Feuilles d'exercices n°2 : Fonctions usuelles

PTSI B Lycée Eiffel

15 septembre 2016

Vrai/Faux

On doit être capable de répondre correctement et sans hésiter à toutes ces questions, même un an après avoir suivi le cours correspondant.

1. La partie entière d'un nombre x négatif est toujours supérieure à x.
2. La dérivée d'une fonction réciproque est donnée par la formule $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(x)}$.
3. Toutes les fonctions exponentielles sont strictement croissantes.
4. La fonction $\log_a$ a pour réciproque la fonction $x \mapsto a^x$.
5. La fonction ch est une fonction paire.

Exercice 1 (*)

Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sqrt{2x^2 - 3x - 2}$
2. $f(x) = e^x \ln(x+5)$
3. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x(x-1)}}{x^2 - 4}$
4. $f(x) = \ln(x^5 + 1)$

Exercice 2 (* à **)

Déterminer la parité des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 2x^6 - 5x^4 + x^2 + 6$
2. $f(x) = \ln|x|$
3. $f(x) = \dfrac{1}{(x^3 - 2x)^2} \times \dfrac{x^4}{\sqrt{x^2 + 2}}$
4. $f(x) = |2x^2 - e^{x^4} + \ln(x^2 - 1)|$
5. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

Exercice 3 (** à ***)

Résoudre les équations, inéquations et systèmes suivants :

1. $x^4 + x^2 - 20 = 0$
2. $\ln(x+2) - \ln(2x-6) \leqslant \ln 2$
3. $\dfrac{-x^3 - 2x^2 - 5}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6} \geqslant -1$

4. $x-1 \leqslant \sqrt{x+2}$
5. $\ln(x+3)+\ln(x-1) = 2\ln 2$
6. $3\times 2^{3x-4} \geqslant 2^4$
7. $\ln(2x-3) \leqslant \ln 5$
8. $5^x - 5^{x+1} + 2^{3x-1} = 0$
9. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$
10. $x^{\frac{1}{4}} + 2x^{\frac{5}{3}} - 3 = 0$
11. $e^{-6x} + 3e^{-4x} - e^{-2x} - 3 = 0$
12. $8^{6x} - 3\times 8^{3x} \leqslant 4$
13. $\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 520 \\ \log x & + & \log y & = & 4 \end{array}\right.$
14. $4\,ch(x) + 3\,sh(x) - 4 = 0$

Exercice 4 (**)

Déterminer **sans calculer leur dérivée** les variations des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{-5}{2e^{-2x+3}}$
2. $f(x) = (e^x+2)^2 - 3$
3. $f(x) = (e^x-3)^2 + 2$
4. $f(x) = \ln(e^{-x}-1)$
5. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

Exercice 5 (* à ***)

Étudier les variations et tracer la courbe représentative des fonctions suivantes :

1. $f(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$
2. $f(x) = x^x$
3. $f(x) = \ln(1+x+x^2)$
4. $f(x) = e^{x^2-x-1}$
5. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2-4x}{x^2-4x+3}\right)$
6. $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{x^2-1}$
7. $f(x) = x^{x^2}$
8. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{2a-x}}$, a étant une constante positive fixée.

Exercice 6 (**)

Dans tout cet exercice, on cherche à étudier la fonction f définie par l'équation $f(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Étudier la parité de f.
3. Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

4. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$, et dresser le tableau de variations de la fonction f.
5. Calculer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en son point d'abscisse $\ln 2$.
6. Démontrer que $\forall x \in [0, +\infty[$, $-\dfrac{1}{3} \leqslant f'(x) \leqslant 0$.
7. Montrer à l'aide de la question précédente que $\forall x \in [0, +\infty[$, $-\dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{4} \leqslant f(x)$.
8. Tracer dans un même repère la droite d'équation $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{4}$, et la courbe représentative de la fonction f.

Problème 1 (***)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$, et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

I. Étude de f et de sa réciproque.

1. Étudier les variations et limites de la fonction f.
2. (a) Déterminer la dérivée seconde f'' de la fonction f et vérifier qu'elle s'annule en une unique valeur α.
   (b) Donner l'équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ en son point d'abscisse α. En quel point (T) coupe-t-elle l'axe des abscisses ?
   (c) Étudier la position relative de (T) et de $\mathcal{C}_f$ (on pourra dériver deux fois la différence des deux équations si besoin).
3. Tracer dans un même repère (T) et $\mathcal{C}_f$.
4. Montrer que la fonction f est bijective de $[-1; +\infty[$ vers un intervalle à préciser. On note g la réciproque de la fonction f sur cet intervalle. Donner le tableau de variations complet de la fonction g.
5. Exprimer la dérivée g' de la fonction g en fonction de x et de $g(x)$, sans utiliser d'exponentielle. En déduire une équation différentielle vérifiée par la fonction g.
6. Montrer que l'équation $2^x = x$ admet pour solution $x = -\dfrac{g(-\ln(2))}{\ln(2)}$ (qu'on ne cherchera bien sûr pas à expliciter plus).
7. Exprimer de même une solution de l'équation $x^x = 3$ en faisant intervenir la valeur $g(\ln(3))$.

II. Des fonctions auxiliaires.

On considère désormais, pour tout réel $a > 0$, la fonction h_a définie sur $\mathbb{R}$ par $h_a(x) = e^{-x} + ax^2$.

1. Établir le tableau de variations de la fonction h_a (en exploitant les résultats de la première partie). On montrera en particulier que h_a admet un minimum en un point m_a que l'on exprimera en fonction de a et à l'aide de la fonction g. Montrer que $h_a(m_a) = am_a(m_a + 2)$.
2. On note enfin i la fonction $i : a \mapsto m_a$ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$. Étudier les variations de la fonction i ainsi que ses limites.
3. Montrer que la valeur du maximum de h_a est une fonction croissante du paramètre a, et déterminer sa limite lorsque a tend vers $+\infty$.

Problème 2 (***)

Nous allons dans ce problème définir et tenter d'étudier les propriétés élémentaires d'une nouvelle fonction : la fonction **tangente hyperbolique** ou th définie par : $\text{th}(x) = \dfrac{sh(x)}{ch(x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

I. Étude de la fonction th.

1. Montrer que th est définie sur $\mathbb{R}$ et que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{th}(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$. Déterminer la parité de th.
2. Calculer la dérivée de la fonction th et vérifier que $\operatorname{th}'(x) = 1 - \operatorname{th}^2(x) = \dfrac{1}{ch^2(x)}$. En déduire le tableau de variations de th et prouver qu'elle est bijective de $\mathbb{R}$ vers un intervalle I à préciser.
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction th en son point d'abscisse 0, puis donner une allure de la courbe.
4. Simplifier, pour un réel x quelconque, l'expression de $ch(x) + sh(x)$ ainsi que celle de $ch(x) - sh(x)$. En déduire que, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $ch(x+y) + sh(x+y) = (ch(x) + sh(x))(ch(y) + sh(y))$ et $ch(x+y) - sh(x+y) = (ch(x) - sh(x))(ch(y) - sh(y))$.
5. À l'aide des résultats de la question précédente, exprimer $sh(x+y)$ et $ch(x+y)$ en fonction de $ch(x)$, $sh(x)$, $ch(y)$ et $sh(y)$.
6. Démontrer que, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\operatorname{th}(x+y) = \dfrac{\operatorname{th}(x) + \operatorname{th}(y)}{1 + \operatorname{th}(x)\operatorname{th}(y)}$.

II. Réciproque de la fonction th.

On note argth la fonction réciproque de la fonction th, définie sur l'intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Donner sans aucun calcul une allure de la courbe de la fonction argth, si possible dans le même repère que celle de la question $I.3$.
2. À l'aide de la formule de dérivation d'une réciproque, calculer la dérivée de la fonction argth.
3. Soit $x \in I$ et $y = \operatorname{argth}(x)$. Montrer que $e^{2y} = \dfrac{1+x}{1-x}$, et en déduire une expression de argth à l'aide de la fonction ln. Vérifier avec cette nouvelle expression que votre dérivée de argth est correcte.
4. On considère désormais la fonction f définie par $f(x) = \operatorname{argth}\left(\sqrt{\dfrac{ch(x)-1}{ch(x)+1}}\right)$.
   (a) Déterminer la domaine de définition de f.
   (b) En posant $y = ch(x)$, montrer que $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln(y + \sqrt{y^2-1})$.
   (c) En déduire que $f(x) = \dfrac{|x|}{2}$.

Une équation fonctionnelle (pour aller beaucoup plus loin).

On cherche maintenant toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = \frac{2f(x)}{1 + (f(x))^2}$$

1. Déterminer les fonctions constantes solutions du problème.
2. Montrer que la fonction th est une solution du problème.
3. Soit f une solution, quelles sont les valeurs possibles de $f(0)$?
4. Vérifier que, si f est solution, $-f$ également, et $g : x \mapsto f(kx)$ également (quelle que soit la valeur de $k \in \mathbb{R}$).
5. Montrer que toutes les valeurs prises par la fonction f sont comprises entre -1 et 1.