Feuille d'exercices n°10 : Limites et continuité

PTSI B Lycée Eiffel

19 janvier 2017

Exercice 1 (* à ***)

Calculer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^3-4x^2+x-2}{x^2-4}$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} e^x \sin(e^{-x})$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{\ln(e^x+1)}$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+x-1}-x\sqrt{x}$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^{\ln(x)}}{(\ln(x))^x}$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\cos(x+x^2-1)}{x}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\arccos(x)-\frac{\pi}{2}}$
- $\lim\limits_{x\to 0} x\, Ent\left(\dfrac{1}{x}\right)$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-Ent(x)}{\sqrt{|x|}}$
- $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^3-3x-2}$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{e^x}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2}{\sin^2(x)}-\dfrac{1}{1-\cos(x)}$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} \ln(x)\ln(\ln(x))$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{x+1}-(x+1)^x$
- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{(\sqrt{x}-1)\ln(x)}$

Exercice 2 (** à ***)

Étudier la continuité et les possibilités de prolongement par continuité des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{e^x-1}{x}$
2. $f(x) = \dfrac{1-x}{1-x^2}$
3. $f(x) = \dfrac{x^2\ln(x)}{\sin(x)}$
4. $f(x) = Ent(x)+\sqrt{x-Ent(x)}$
5. $f(x) = \dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{(x-1)^2}$
6. $f(x) = e^{\frac{1}{1-x}}+2x-3$
7. $f(x) = \dfrac{x\ln x}{x+1}$
8. $f(x) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{x^n}{n!}$

Exercice 3 (***)

On considère la fonction f définie par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x > 0$, et $f(x) = 0$ si $x \leqslant 0$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$. Calculer sa dérivée et montrer qu'elle est aussi continue. Faire de même avec la dérivée seconde. Pour les motivés : prouver que, quel que soit l'entier $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ème de la fonction f est continue.

Exercice 4 (** à ***)

Déterminer toutes les fonctions vérifiant les conditions suivantes :

1. f est continue en 0 et en 1 et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(x^2)$.
2. f est continue sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f\left(\dfrac{x+1}{2}\right) = f(x)$.
3. f est continue sur $\mathbb{R}$, $f(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = f(x)\cos(x)$.
4. f est continue sur $\mathbb{R}$ et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = \dfrac{1}{2}(f(x)+f(y))$ (on commencera par prouver que, si $f(0) = f(1) = 0$, f est périodique, et nulle).

Exercice 5 (*)

Montrer que les seules fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$ sont les fonctions constantes.

Exercice 6 (***)

Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ vérifiant $f(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe un réel x tel que $f\left(x + \dfrac{1}{2}\right) = f(x)$. Généraliser en prouvant qu'on peut toujours trouver un x tel que $f\left(x + \dfrac{1}{n}\right) = f(x)$, pour tout entier $n \geqslant 2$.

Exercice 7 (*)

Montrer que chacune des équations suivantes admet une solution sur l'intervalle I considéré.

1. $x^{2015} - x^{2014} = -1$ sur $I = [-1;1]$.
2. $\ln x = \dfrac{x^2-5}{x+2}$ sur $I = [1;10]$.
3. $3x = 1 + \ln(2+x^2)$ sur $I = [0;1]$.
4. $e^x = 2 + x$ sur $[\ln 2; 2\ln 2]$.
5. $x^3 - 3x^2 = -1$ sur $I = [-1;1]$.

Déterminer par dichotomie (et en utilisant la calculatrice !) une valeur approchée à 0.01 d'une solution de chaque équation.

Exercice 8 (***)

On définit, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n par $f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ a une seule solution strictement positive, qu'on notera désormais u_n.
2. Calculer u_1 et u_2 et vérifier que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in \left]0; \dfrac{2}{3}\right[$.
3. Montrer que, $\forall x \in]0;1[$, $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.
4. Que peut-on en déduire concernant la suite u_n ?
5. Montrer que u_n est convergente vers une limite qu'on notera l.
6. Déterminer la limite de u_n^n et en déduire la valeur de l.

Exercice 9 (**)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x + x$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à expliciter.
2. Justifier que pour tout entier positif n, l'équation $f(x) = n$ possède une unique solution que l'on notera par la suite x_n.
3. Déterminer la monotonie de la suite x_n.
4. Démontrer que $\forall n \geqslant 1$, $\ln(n - \ln n) \leqslant x_n \leqslant \ln n$.
5. En déduire la limite de la suite (x_n) puis celle de $\dfrac{x_n}{\ln(n)}$.

Exercice 10 (**)

On considère, pour tout entier naturel n, la fonction f_n définie par $f_n(x) = x^5 + nx - 1$.

1. Étudier les variations de f_n.
2. Montrer que, $\forall n \geqslant 1$, il existe un unique réel u_n tel que $f_n(u_n) = 0$.
3. Montrer que $u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$ et en déduire la convergence de la suite (u_n).
4. Montrer que (nu_n) admet une limite finie, que l'on précisera.

Exercice 11 (***)

Pour tout $n \geqslant 1$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 2$ admet une unique solution qu'on notera u_n.
2. Montrer que $\forall n \geqslant 2$, $u_n \in]0; 1[$.
3. Déterminer la monotonie de la suite (u_n), et en déduire sa convergence.
4. Calculer la limite de la suite (on pourra commencer par prouver que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n^n = 0$).
5. En posant $v_n = u_n - \dfrac{1}{2}$, montrer que $\left(\dfrac{1}{2} + v_n\right)^{n+1} = 2v_n$.

Exercice 12 (**)

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit la fonction g_n par $g_n(x) = e^x - \dfrac{1}{nx}$.

1. Étudier les variations de la fonction g_n sur l'intervalle $]0, +\infty[$, et prouver que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une seule solution sur cette intervalle, que l'on notera désormais u_n.
2. Montrer que $0 < u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$, en déduire la limite de la suite (u_n).
3. Simplifier l'expression de $g_{n+1}(x) - g_n(x)$, et en déduire le signe de $g_n(u_{n+1})$ puis la monotonie de la suite (u_n).
4. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} nu_n$.