

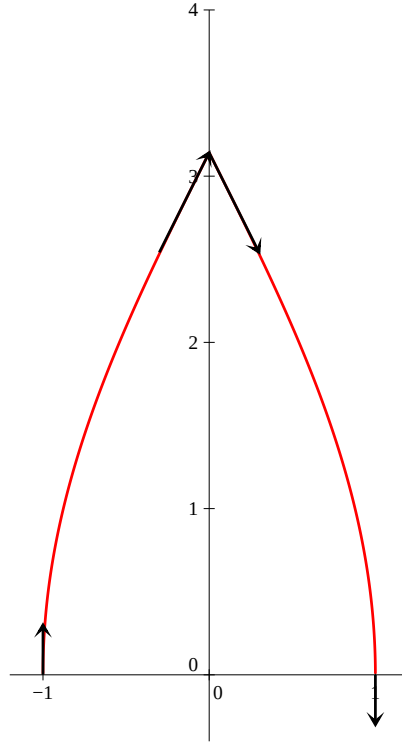
TD n°9 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

1er juin 2017

Exercice 1

1. La fonction f est définie lorsque $2x^2 - 1 \in [-1, 1]$, donc si $2x^2 \leq 2$ (la condition $2x^2 \geq 0$ étant toujours vérifiée). Autrement dit, $\mathcal{D}_f = [-1, 1]$. La fonction $x \mapsto 2x^2 - 1$ étant paire, f l'est aussi. On peut donc restreindre son domaine d'étude à l'intervalle $[0, 1]$ et sa courbe représentative sera symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (Oy).
2. La fonction f est au moins dérivable sur $] -1, 0[$ et sur $]0, 1[$ puisque, sur ces intervalles, $2x^2 - 1 \in] -1, 1[$, intervalle où la fonction arccos est dérivable. On peut se contenter de calculer la dérivée sur $]0, 1[$, où on obtient $f'(x) = -\frac{4x}{\sqrt{1 - (2x^2 - 1)^2}} = -\frac{4x}{\sqrt{4x^2 - 4x^4}} = -\frac{2}{\sqrt{1 - x^2}}$.
3. On constate que $f'(x) = 2 \arccos'(x)$ sur l'intervalle $]0, 1[$, donc $f(x) = 2 \arccos(x) + K$ sur ce même intervalle, pour un réel K à déterminer. Choisissons par exemple de le calculer à l'aide de la valeur en $\frac{1}{2}$: $f\left(\frac{1}{2}\right) = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$. Par ailleurs, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \arccos\left(\frac{1}{2}\right) + K = \frac{2\pi}{3} + K$, donc on a simplement $K = 0$ et $f(x) = 2 \arccos(x)$ sur $]0, 1[$. Sur l'intervalle $] -1, 0[$, par parité de f , on aura $f(x) = 2 \arccos(-x)$ (on peut aussi trouver comme expression $f(x) = 2 \arcsin(x) + \pi$).
4. Le plus simple est d'utiliser l'expression de la dérivée, et (tenter d') appliquer le théorème de prolongement de la dérivée. Puisque $\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = -\infty$, la fonction n'est pas dérivable en 1, et la courbe admettra au point correspondant une demi-tangente verticale. Par symétrie, on aura la même chose en -1 (avec une limite égale à $+\infty$). Par contre, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -2$. Mais, toujours par symétrie, on aura $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 2$. La fonction n'est donc pas non plus dérivable en 0, mais elle y est dérivable à gauche et à droite, et la courbe y admettra donc deux demi-tangentes de pentes respectives 2 et -2 .
5. La seule valeur intéressante à calculer est $f(0) = \pi$, la fonction s'annulant en ± 1 .



Exercice 2

1. (a) Appliquons donc le théorème des accroissements finis à la fonction $f : x \mapsto \ln(1 - x)$ sur l'intervalle $[0, x]$, où x est un réel strictement inférieur à 1. La fonction est bien entendu dérivable sur cet intervalle, de dérivée $f'(x) = -\frac{1}{1-x}$, et le théorème nous assure qu'il existe un réel $c \in [0, x]$ tel que $f'(c) = \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\ln(1-x)}{x}$. Or, $c \in [0, x]$, donc $0 < 1 - c \leq 1$, et $\frac{1}{1-x} \geq 1$, dont on déduit que $f'(x) \leq -1$. On en déduit donc que $\frac{\ln(1-x)}{x} \leq -1$, et comme $x \geq 0$ on peut multiplier par x pour obtenir $\ln(1-x) \leq -x$, ou encore $x + \ln(1-x) \leq 0$.
- (b) On va utiliser une méthode plus classique en posant $g(x) = x - \ln(1+x)$. La fonction g est dérivable sur $[0, 1]$, de dérivée $g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = -\frac{x}{1+x} \leq 0$. La fonction g est donc décroissante, et $g(0) = 0$, ce qui prouve que $g(x) \leq 0$, exactement ce qu'on voulait.
2. (a) Calculons donc $u_{n+1} - u_n = S_{n+1} - \ln(n+1) - S_n + \ln(n) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$. En posant $x = \frac{1}{n+1}$ (qui appartient à l'intervalle $[0, 1[$), il suffit alors d'appliquer le résultat de la question 1.a pour en déduire que $u_{n+1} - u_n \leq 0$, donc que la suite (u_n) est décroissante.
- (b) C'est presque pareil : $v_{n+1} - v_n = S_n - \ln(n+1) - S_{n-1} + \ln(n) = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq 0$ en appliquant la question 1.b à $x = \frac{1}{n}$.
- (c) Il ne reste plus qu'à constater que $u_n - v_n = S_n - S_{n-1} = \frac{1}{n}$ a une limite nulle.

- (d) On aura toujours $v_n \leq \gamma \leq u_n$, donc $0 \leq u_n - \gamma \leq u_n - v_n = \frac{1}{n}$. Le réel u_n est donc une valeur approchée de γ à $\frac{1}{n}$ près, et on peut choisir n_0 tel que $\frac{1}{n_0} \leq \frac{1}{10}$, soit $n_0 = 10$.
3. (a) On peut écrire $x_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, on peut appliquer le développement limité de $\ln(1 + u)$ à l'ordre 2 pour avoir $x_n = \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
- (b) On a donc $n^2 x_n = \frac{1}{2} + o(1)$, ce qui signifie exactement que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 x_n = \frac{1}{2}$.
- (c) On peut appliquer la définition avec $\varepsilon = \frac{1}{2} : \exists n_0, \forall n \geq n_0, \left|n^2 x_n - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2}$, ce qui signifie exactement que $0 \leq n^2 x_n \leq 1$, ou encore que $0 \leq x_n \leq \frac{1}{n^2}$.
- (d) La croissance est une conséquence immédiate de la positivité de x_n (qui est toujours vraie et pas seulement à partir du rang n_0 , c'est la calcul de la question 2.b). De plus, en additionnant les inégalités obtenues à la question précédente lorsque $k \geq n_0$, on trouve que, $\forall n \geq n_0, \sum_{k=n_0}^n x_k \leq \sum_{k=n_0}^n \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$, qui est lui-même majoré par la limite (inconnue) l de la suite (w_n) (qui est croissante et convergente d'après ce que nous affirme l'énoncé). On en déduit que $y_n \leq \sum_{k=1}^{n_0-1} x_k + l$, qui est évidemment une constante majorant y_n . La suite (y_n) est donc convergente (théorème de convergence monotone).
- (e) La deuxième égalité est évidente, c'est la définition de y_n . De plus, $x_k = v_{k+1} - v_k$, donc $y_n = \sum_{k=1}^n v_{k+1} - v_k = v_{n+1} - v_1 = v_{n+1}$ (puisque $v_1 = 0$ avec la définition qui nous est donnée). Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \gamma$, la deuxième égalité en découle.

Problème

Partie I : étude de polynômes de $\mathbb{C}[X]$.

1. (a) C'est presque du cours, mais on peut quand même refaire les calculs : $j^3 = e^{i\frac{6\pi}{3}} = 1$, et $1 + j + j^2 = 1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{i\frac{4\pi}{3}} = 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$ (alternativement, on peut utiliser la somme des premiers termes d'une suite géométrique pour obtenir le deuxième résultat).
- (b) Lorsque $k = 3p$, $S(k) = 1 + j^{3p} + j^{6p} = 1 + 1 + 1 = 3$; si $k = 3p+1$, $S(k) = 1 + j^{3p+1} + j^{6p+2} = 1 + j + j^2 = 0$; et enfin, si $k = 3p+2$, alors $S(k) = 1 + j^{3p+2} + j^{6p+4} = 1 + j^2 + j^4 = 1 + j^2 + j = 0$ en utilisant régulièrement que $j^3 + 1$.
- (c) Calculons donc $P(X) + P(jX) + P(j^2X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k + \sum_{k=0}^n a_k j^k X^k + \sum_{k=0}^n a_k j^{2k} X^k = \sum_{k=0}^n a_k S(k) X^k$ en factorisant. Le calcul de la question précédente prouve alors que tous les termes pour lesquels $k \neq 3p$ sont nuls, et il ne reste plus que $\sum_{p=0}^{\text{Ent}(\frac{n}{3})} 3a_{3p} X^{3p}$.

2. (a) Développons donc brutalement : $R_k(X) = (jX^2 - kX - jkX + k^2)(j^2X - k) = j^3X^3 - kj^2X^2 - kj^3X^2 + k^2j^2X - kjX^2 + k^2X + jk^2X - k^2 = X^3 - kX^2(j^2 + 1 + j) + k^2X(j^2 + 1 + j) - k^3 = X^3 - k^3$.
- (b) On a donc $T(X) = (X - 1)(X - 2)(X - 3)(X - 4)(jX - 1)(jX - 2)(jX - 3)(jX - 4)(j^2X - 1)(j^2X - 2)(j^2X - 3)(j^2X - 4)$, ce qu'on peut regrouper sous la forme $T(X) = R_1(X)R_2(X)R_3(X)R_4(X)$, soit en utilisant le résultat de la question précédente $T(X) = (X^3 - 1)(X^3 - 8)(X^3 - 27)(X^3 - 64)$, qui est bien un polynôme en la variable X^3 .
- (c) C'est évident au vu du calcul précédent : $H(Y) = (Y - 1)(Y - 8)(Y - 27)(Y - 64)$, qui a pour racines 1, 8, 27 et 64.
- (d) On peut utiliser le polynôme H : comme on a posé $Y = X^3$, les racines de T sont les racines cubiques de celles de H . Les racines cubiques de 1 sont 1, j et j^2 ; celles de $8 = 2^3e^{i0}$ sont simplement 2, $2j$ et $2j^2$, et on obtient de même les dernières racines : 3, $3j$, $3j^2$, 4, $4j$ et $4j^2$.

Autre possibilité, on repart de la définition de T sous la forme $T(X) = Q(X)Q(jX)Q(j^2X)$. Le nombre a est donc racine de Q si a est racine de Q (donc égal à 1, 2, 3 ou 4) ; si ja est racine de Q , ce qui donne $a \in \{j^2, 2j^2, 3j^2, 4j^2\}$, puisque $\frac{1}{j} = j^2$ découle de l'égalité $j^3 = 1$; ou si j^2a est racine de Q , ce qui donne symétriquement $a \in \{j, 2j, 3j, 4j\}$. On retrouve évidemment les mêmes racines.

Partie II : étude d'une famille de matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

On note $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, l'ensemble des matrices d'ordre 3 à coefficients complexes. On notera

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ la matrice identité, et } K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. (a) On calcule facilement $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis effectivement $K^3 = I$.
- (b) Autant faire un calcul formel et ne faire intervenir les matrices qu'au dernier moment : $A = j^3K^2 - j^2K - jK + I = K^2 + K + I$ en utilisant que $-j - j^2 = 1$ puisque $1 + j + j^2 = 0$. Autrement dit, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Pour B , le résultat est encore plus simple : $B = (K^2 - K - jK + jI)(K - j^2I) = K^3 - K^2 - jK^2 + jK - j^2K^2 + j^2K + j^3K - j^3I = K^3 - I = 0$.
2. (a) Calculs sans l'ombre d'un intérêt : $P_1 = \frac{1}{3}A$, $P_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j^2 & 1 & j \\ j & j^2 & 1 \end{pmatrix}$ et $P_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & j^2 & j \\ j & 1 & j^2 \\ j^2 & j & 1 \end{pmatrix}$.
- (b) Les deux premiers produits sont nuls de façon évidentes car la somme des coefficients de chaque colonne de P_2 (ou de P_3) est toujours égale à $1 + j + j^2 = 0$. C'est moins évident pour P_2P_3 où on va trouver des coefficients de la forme $1 + j^2 + j^4$ par exemple, qui sont toutefois également nuls puisque $j^4 = j$. Bref, $P_2P_3 = 0$.
- (c) Ben oui, c'est vrai, écrivez le calcul si vraiment vous y tenez et simplifiez bien entendu les j^4 en j .
3. (a) Par définition, $F = \text{Vect}(I, K, K^2)$ est bien un sous-espace vectoriel de E .
- (b) La famille (I, K, K^2) est trivialement libre (si $aI + bK + cK^2 = 0$, on a directement $a = b = c = 0$ en écrivant la matrice, qui est la même que celle donnée dans la définition de F), donc est une base de F , qui est donc de dimension 3.
4. (a) Il suffit à nouveau de prouver que la famille est libre. Supposons donc $aP_1 + bP_2 + cP_3 = 0$, quitte à tout multiplier par 3, on se ramène au système de trois équations suivant (les six

autres coefficients de la matrice donnent les mêmes équations) :
$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a + jb + j^2c = 0 \\ a + j^2b + jc = 0 \end{cases}.$$

En additionnant les trois équations du système (et en exploitant une fois de plus le fait que $1 + j + j^2 = 0$, on a immédiatement $3a = 0$, donc $a = 0$. Quitte à être malin, on peut également effectuer la combinaison $L_1 + jL_2 + j^2L_3$ pour trouver $3c = 0$ soit $c = 0$. On a alors nécessairement $b = 0$, et la famille est libre, et donc une base de F' .

- (b) Posons donc $M = aP_1 + bP_2 + cP_3$ et $N = a'P_1 + b'P_2 + c'P_3$. On sait déjà que $P_1P_2 = P_1P_3 + P_2P_3 = 0$, et on vérifie sans problème que les produits dans l'autre sens P_2P_1 , P_3P_1 et P_3P_2 sont également nuls. On peut alors développer brutalement $MN = aa'P_1^2 + bb'P_2^2 + cc'P_3^2 = aa'P_1 + bb'P_2 + cc'P_3$ d'après la question 2c (les autres termes sont tous nuls). La matrice MN appartient bien à F' .
5. On peut constater que $P_1 + P_2 + P_3 = I$, ce qui permet d'initialiser la récurrence à $n = 0$ en posant $u_0 = v_0 = w_0 = 1$. Si on suppose ensuite la relation vérifiée au rang n , alors $M^{n+1} = M \times M^n = (u_nP_1 + v_nP_2 + w_nP_3)(\alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3) = \alpha u_nP_1 + \beta v_nP_2 + \gamma w_nP_3$ d'après le calcul de la question précédente. Ceci achève la récurrence et permet d'obtenir les relations $u_{n+1} = \alpha u_n$, $v_{n+1} = \beta v_n$ et $w_{n+1} = \gamma w_n$. Les trois suites sont donc géométriques de premier terme 1 et de raison respectives α , β et γ . Autrement dit, $M(a, b, c)^n = \alpha^n P_1 + \beta^n P_2 + \gamma^n P_3$.

Partie III : étude d'une sous-famille de F .

1. On a manifestement $G = \text{Vect} \left(I, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$, donc G est bien un sous-espace vectoriel de E , et comme $N(a, b) = M(a, b, b)$, toutes les matrices de G appartiennent aussi à F et G est bien un sous-espace de F .
2. C'est complètement trivial, la famille est manifestement libre.
3. (a) L'application f est donc définie par $f(x, y, z) = (y+z, x+z, y+z)$. Un vecteur $u = (x, y, z)$ appartient donc au noyau de f si $y+z = x+z = x+y = 0$. En additionnant les trois équations (et en divisant par 2), on trouve $x+y+z = 0$, et il ne reste plus qu'à soustraire à cette égalité chacune des trois équations pour obtenir $x = y = z = 0$. L'application f est donc injective, et même bijective puisqu'il s'agit d'un endomorphisme en dimension finie.
- (b) On a déjà fait la première partie de la question, reste à inverser la matrice S . Je préfère comme d'habitude utiliser un système :
$$\begin{cases} y + z = a \\ x + z = b \\ x + y = c \end{cases}.$$
 En additionnant tout, on a $x+y+z = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$, et en soustrayant chacune des équations, $x = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$; $y = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$ et $z = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c$, soit $S^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, qui est donc la matrice de f^{-1} dans la base canonique.
- (c) Il y avait un petit bug d'énocé, le premier noyau à calculer est celui de $f + \text{id}$, ce qui revient à résoudre le système constitué de trois équations identiques $x + y + z = 0$. On a donc $\ker(f + \text{id}) = \text{Vect}((1, -1, 0); (1, 0, -1))$. Pour le deuxième noyau, on obtient les équations $-2x + y + z = x - 2y + z = x + y - 2z = 0$. La soustraction des deux dernières équations donne $-3y + 3z = 0$, soit $z = y$. En reportant, on a alors $-2x + 2y = 0$, soit $x = y = z$, et $\ker(f - 2\text{id}) = \text{Vect}((1, 1, 1))$.
- (d) Le théorème du rang assure de façon immédiate que $\dim(\text{Im}(f + \text{id})) = 3 - 2 = 1$.
- (e) On sait déjà que $\dim(\ker(f + \text{id})) = 2$ et $\dim(\ker(f - 2\text{id})) = 1$, et la somme de ces deux dimensions est égale à celle de l'espace. Il ne reste donc plus qu'à prouver que leur

intersection est nulle. Or, si u appartient simultanément aux deux noyaux, on doit avoir à la fois $f(u) = -u$ et $f(u) = 2u$, donc $2u = -u$, ce qui implique manifestement $u = 0$. Les deux noyaux sont donc bien supplémentaires.