TD n°9 : révisions pour le Concours Blanc

PTSI B Lycée Eiffel

1er juin 2017

Exercice 1

On définit une fonction f par $f(x) = \arccos(2x^2 - 1)$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f, et étudier sa parité. Que peut-on en déduire ?
2. Donner le domaine de dérivabilité de la fonction f, et calculer sa dérivée f'.
3. À l'aide du calcul de dérivée précédent, trouver une expression plus simple de $f(x)$ sur l'intervalle $]0,1[$. En déduire une expression simple de $f(x)$ sur $]-1,0[$.
4. Étudier la dérivabilité de f en 0 et en 1.
5. Tracer une allure soignée de la courbe représentative de la fonction f.

Exercice 2

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $\quad u_n = S_n - \ln(n)$ et $v_n = S_{n-1} - \ln(n)$.

On rappelle que la suite (w_n) définie par $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ est une suite convergente.

1. (a) Démontrer à l'aide du théorème des accroissements finis (ou de l'inégalité du même nom) que $\forall x \in [0,1[$, $x + \ln(1-x) \leq 0$.
   (b) Démontrer que, $\forall x \in [0,1[$, $x - \ln(1+x) \geq 0$ (méthode au choix pour cette question).
2. (a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
   (b) Montrer que la suite (v_n) est croissante.
   (c) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont des suites adjacentes. On note γ leur limite commune.
   (d) En se servant de l'encadrement de γ à l'aide de u_n et de v_n, déterminer un rang n_0 tel que u_{n_0} soit une valeur approchée à 10^{-1} près de γ (on ne cherchera pas à calculer numériquement u_{n_0}).
3. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $x_n = \dfrac{1}{n} + \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$.
   (a) Montrer que $x_n = \dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
   (b) En déduire la limite de la suite $(n^2 x_n)$.
   (c) Montrer qu'à partir d'un certain rang, $0 \leq x_n \leq \dfrac{1}{n^2}$ (on pourra revenir à la définition d'une limite et choisir un ε intelligent).

(d) Soit (y_n) la suite définie par $y_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$. Montrer que (y_n) est croissante et majorée (en utilisant la question précédente). Que peut-on en déduire ?

(e) Déduire des questions précédentes que $\gamma = \lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{k} - \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right]$.

Problème

Les différentes partie de ce problème sont très largement indépendantes, et pourront être traitées par les candidats dans l'ordre de leur choix, à condition que l'organisation de la copie reste claire.

Partie I : étude de polynômes de $\mathbb{C}[X]$.

1. On pose $j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

   (a) Calculez les valeurs de j^3 et de $1+j+j^2$. Ces résultats pourront être régulièrement exploités dans la suite du problème.

   (b) Calculer successivement, pour $k = 3p$ (avec $p \in \mathbb{N}$), $k = 3p+1$ et $k = 3p+2$, la valeur de la somme $S(k) = 1 + j^k + (j^2)^k$.

   (c) Soit P un polynôme à coefficients complexes, de la forme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Calculer $P(X) + P(jX) + P(j^2X)$, qu'on exprimera en fonction des coefficients de P (on pourra distinguer trois cas similaires à ceux de la question précédente).

2. (a) Soit $k \in \mathbb{C}$, développer et simplifier le polynôme $R_k(X) = (X-k)(jX-k)(j^2X-k)$.

   (b) Soit le polynôme $Q(X) = (X-1)(X-2)(X-3)(X-4)$. On lui associe le polynôme $T(X) = Q(X)Q(jX)Q(j^2X)$. Montrer que T est un polynôme en la variable X^3.

   (c) En posant $Y = X^3$, déterminer un polynôme H tel que $T(X) = H(Y)$. Déterminer les racines du polynôme H.

   (d) Déterminer de deux façons différentes les racines de T.

Partie II : étude d'une famille de matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

On note $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, l'ensemble des matrices d'ordre 3 à coefficients complexes. On notera $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice identité, et $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. (a) Vérifier que $K^3 = I$.

   (b) Calculer $A = (jK - I)(j^2K - I)$ et $B = (K - I)(K - jI)(K - j^2I)$.

2. (a) Pour une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, on pose $P(M) = \frac{1}{3}(I + M + M^2)$.

   Calculer $P_1 = P(K)$, $P_2 = P(j^2K)$ et $P_3 = P(jK)$.

   (b) Calculer les produits matriciels P_1P_2, P_1P_3 et P_2P_3.

   (c) Vérifier que $P_1^2 = P_1$, $P_2^2 = P_2$ et $P_3^2 = P_3$.

3. On note $F = \left\{ M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{C}^3 \right\}$.

(a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

(b) Déterminer une base et la dimension de F.

4. Soit $F' = \text{Vect}(P_1, P_2, P_3)$.

(a) Montrer que (P_1, P_2, P_3) est une base de F'.

(b) Montrer que F' est stable par produit matriciel : $\forall (M, N) \in F'^2$, $MN \in F'$.

5. On admet que $F = F'$. Soit $M(a, b, c) \in F$, on note (α, β, γ) les coordonnées de M dans la base (P_1, P_2, P_3). Autrement dit, on a $M(a, b, c) = \alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3$. On ne cherche pas à calculer (α, β, γ) en fonction de (a, b, c).

Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $[M(a, b, c)]^n = u_n P_1 + v_n P_2 + w_n P_3$, où (u_n), (v_n) et (w_n) sont trois suites complexes dont on déterminera les expressions en fonction de α, β et γ.

Partie III : étude d'une sous-famille de F.

On pose dans cette dernière partie $G = \left\{ N(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{C}^2 \right\}$.

1. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel F défini dans la partie précédente.

2. On pose $S = N(0, 1)$. Montrer que (I, S) est une base de G.

3. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'application linéaire dont S est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ (cette base canonique sera notée $\mathcal{B}$ dans la suite de l'énoncé).

(a) Déterminer le noyau de f. Que peut-on en déduire ?

(b) Montrer que f est bijective, et déterminer la matrice de f^{-1} dans la base $\mathcal{B}$.

(c) Déterminer une base de $\ker(f - \text{id})$ et de $\ker(f - 2\,\text{id})$.

(d) Quelle est la dimension de $\text{Im}(f + \text{id})$?

(e) Montrer que les deux noyaux définis à la question c sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.