TD n°5 : révisions pour le DS4

PTSI B Lycée Eiffel

5 janvier 2017

Exercice 1

On définit dans un premier temps une fonction numérique réelle $f : x \mapsto \dfrac{1}{x \ln(|x|)}$.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ? Étudier la parité de f. Que peut-on en déduire ?
2. Dresser un tableau de variations complet de la fonction f sur tout son ensemble de définition (les limites et l'existence de f' devront être justifiées).
3. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = x$ sur $\mathbb{R}$ (on ne demande pas la valeur de ces solutions, mais une justification rigoureuse de leur nombre est attendue).

On définit désormais une fonction de la variable complexe par la même formule que précédemment : $g(z) = \dfrac{1}{z \ln(|z|)}$ (où $|z|$ désigne maintenant le module du nombre complexe z).

4. Quel est l'ensemble de définition de la fonction g ?
5. En écrivant z sous forme exponentielle, déterminer le module et un argument de $g(z)$ en fonction de ceux de z.
6. En déduire les solutions l'équation $g(z) = z$ lorsque $|z| > 1$.

Exercice 2

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 4$, $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$.

1. Calculer u_1, u_2, v_1 et v_2.
2. Montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) sont à termes trictement positifs.
3. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \geq v_n$.
4. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et la suite (v_n) croissante.
5. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq u_{n+1} - v_{n+1} \leq \dfrac{1}{2} \dfrac{(u_n - v_n)^2}{(\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n})^2}$.
6. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq \dfrac{u_n - v_n}{(\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n})^2} \leq 1$.
7. Déduire des question précédentes que $0 \leq u_{n+1} - v_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}(u_n - v_n)$.
8. Prouver par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n - v_n \leq 3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
9. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. On note L leur limite commune.
10. Rappeler la définition d'une valeur approchée de L à ε près.
11. Donner une valeur de n pour laquelle u_n est une valeur approchée de L à 10^{-2} près.
12. On définit maintenant une troisième suite (w_n) par $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (u_k - v_k)$.

    (a) Calculer w_0 et w_1.

(b) Étudier la monotonie de la suite (w_n).

(c) En utilisant le résultat de la question 8, montrer que la suite (w_n) est bornée.

(d) Montrer que la suite (w_n) converge (on ne demande pas sa limite).

(e) Déterminer la limite de la suite (t_n) définie par $t_n = \dfrac{w_n \arctan(n)}{n+1}$.

Exercice 3

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct. On note A le point d'affixe 1 et B le point d'affixe -1. On rappelle que le nombre complexe j est défini par $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

Pour tout entier naturel n et tout nombre complexe z, on pose $S_n(z) = 1 + z^2 + z^4 + \cdots + z^{2n}$.

A. Quelques cas particuliers.

1. Exprimer $S_n(z)$ et calculer $S_n(1+i)$ lorsque $n = 1$, puis $n = 2$.
2. Montrer que, si z est un nombre complexe de module 1, alors $\bar{z}S_1(z)$ est un nombre réel. La réciproque est-elle vraie ?
3. Donner le module et l'argument de $S_1(j)$.
4. Montrer par récurrence que, pour tout entier n, $S_{3n}(j) = 1$.
5. Calculer $S_n(z)$ lorsque $z = 1$ ou $z = -1$.

B. Étude du cas général.

Dans cette partie on suppose que z est distinct de 1 et de -1.

1. Montrer que, pour tout entier n, on a $S_n(z) = \dfrac{1 - z^{2n+2}}{1 - z^2}$.
2. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $S_n(z) = 0$ puis la valeur de la somme de ces solutions.
3. Soit z un nombre complexe de module r strictement inférieur à 1.

   (a) Montrer que, pour tout entier n, on a $\left| S_n(z) - \dfrac{1}{1-z^2} \right| = \dfrac{r^{2n+2}}{|1-z^2|}$.

   (b) En déduire, à l'aide de l'inégalité triangulaire, que $\left| S_n(z) - \dfrac{1}{1-z^2} \right| \leq \dfrac{r^{2n+2}}{1-r^2}$.

   (c) Calculer la limite de $\left| S_n(z) - \dfrac{1}{1-z^2} \right|$ quand n tend vers $+\infty$.

C. Autour d'une fonction de la variable complexe ...

Pour tout nombre complexe distinct de 1 et de -1, on pose $f(z) = \dfrac{1}{1-z^2}$.

1. Montrer que $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$.
2. Résoudre l'équation $f(z) = \dfrac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2z}$ (on ne cherchera pas à donner les solutions sous forme algébrique ou trigonométrique).
3. On note M le point d'affixe z. Montrer que $|f(z)| = 1 \Leftrightarrow AM.BM = 1$.
4. Soit z un nombre complexe de module 1 distinct de 1 et -1. On note $z = e^{i\theta}$.

   (a) Montrer que $f(z) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2\tan(\theta)} i$.

   (b) Pour quelles valeurs de θ a-t-on $|f(z)| = 1$? Représenter les points M correspondants.
5. Dans cette question z désigne un nombre complexe de module r strictement supérieur à 1.

   (a) Montrer que $|f(z)| \leq \dfrac{1}{r^2 - 1}$.

   (b) On note P le point d'affixe $f(z)$. Que peut-on dire de la position du point P lorsque r tend vers $+\infty$?