TD n°4 : révisions pour le DS3

PTSI B Lycée Eiffel

17 novembre 2016

Pour s'échauffer

1. On commence par résoudre l'équation homogène $y'' - 4y' + 4y = 0$, qui a pour équation caractéristique $x^2 - 4x + 4 = 0$. On reconnait là le cas particulier d'une racine double, en l'occurrence $x = 2$, les solutions homogènes sont donc de la forme $y_h : t \mapsto (A + Bt)e^{2t}$. On va ensuite appliquer le principe de superposition. Commençons par rechercher une solution particulière de l'équation $y'' - 4y' + 4y = (t^2 + 1)e^t$ sous la forme $y_1(t) = (at^2 + bt + c)e^t$. On calcule $y_1'(t) = (at^2 + (2a + b)t + b + c)e^t$, puis $y_1''(t) = (at^2 + (4a + b)t + 2a + 2b + c)e^t$, et enfin $y_1''(t) - 4y_1'(t) + 4y_1(t) = (at^2 + (4a + b)t + 2a + 2b + c - 4at^2 - (8a + 4b)t - 4b - 4c + 4at^2 + 4bt + 4c)e^t = (at^2 + (-4a + b)t + 2a - 2b + c)e^t$. Par identification, y_1 est solution de notre équation si $a = 1$; $-4a + b = 0$, donc $b = 4a = 4$; et $2a - 2b + c = 1$, soit $c = 1 + 2b - 2a = 7$. Autrement dit, $y_1(t) = (t^2 + 4t + 7)e^t$. Cherchons maintenant une solution particulière de l'équation $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2t}$ sous la forme $y_2(t) = (at^2 + bt + c)e^{2t}$ (on est obligés d'augmenter de deux unités le degré du polynôme car 2 est racine double de l'équation caractéristique). On calcule à nouveau : $y_2'(t) = (2at + b + 2at^2 + 2bt + 2c)e^{2t} = (2at^2 + (2a + 2b)t + b + 2c)e^{2t}$, puis $y_2''(t) = (4at + 2a + 2b + 4at^2 + (4a + 4b)t + 2b + 4c)e^{2t} = (4at^2 + (8a + 4b)t + 2a + 4b + 4c)e^{2t}$, et enfin $y_2''(t) - 4y_2'(t) + 4y_2(t) = (4at^2 + (8a + 4b)t + 2a + 4b + 4c - 8at^2 - (8a + 8b)t - 4b - 8c + 4at^2 + 4bt + 4c)e^{2t} = 2ae^{2t}$. L'identification donne donc tout bêtement $a = 1$ (et on choisit $b = c = 0$), soit $y_2(t) = t^2e^{2t}$. En regroupant tout, les solutions de l'équation initiale sont les fonctions $y : t \mapsto (t^2 + Bt + A)e^{2t} + (t^2 + 4t + 7)e^t$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

2. Puisqu'on nous le demande si gentiment, posons $y(t) = z(t^2)$, ce qui donne $y'(t) = 2tz'(t^2)$, puis $y''(t) = 2z'(t^2) + 4t^2z''(t^2)$. On insère ces relations dans l'équation : $2tz'(t^2) + 4t^3z''(t^2) - 2tz'(t^2) - t^3z(t^2) = 0$, soit $t^3(4z''(t^2) - z(t^2)) = 0$. Si on se place sur l'intervalle $]0, +\infty[$, en posant $x = t^2$, on se ramène donc à l'équation $4z''(x) - z(x) = 0$. Cette équation différentielle homogène à coefficients constants est de la forme $z'' - \omega^2 z = 0$, avec $\omega = \dfrac{1}{2}$, elle a donc pour solutions les fonctions $z : x \mapsto Ae^{\frac{x}{2}} + Be^{-\frac{x}{2}}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Il ne suffit plus que de remonter le changement de variable : $y(t) = z(t^2) = Ae^{\frac{t^2}{2}} + Be^{-\frac{t^2}{2}}$. Si on s'était placés sur $]-\infty, 0[$, on aurait trouvé les mêmes solutions. On constate d'ailleurs aisément que toutes ces solutions sont prolongeables par continuité en 0 (en posant $y(0) = A + B$) et ont une dérivée nulle en $t = 0$, ce qui prouve l'existence d'une infinité de solutions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier (on garde la même valeur de $A + B$ sur $\mathbb{R}^-$ et sur $\mathbb{R}^+$, et on peut même se permettre de prendre des valeurs des constantes différentes sur les deux intervalles).

3. Faisons encore une fois ce qu'on nous demande : si $y(t) = tz(t) =$, alors $y'(t) = z(t) + tz'(t)$, puis $y''(t) = 2z'(t) + tz''(t)$. L'équation devient alors $2t^2z'(t) + t^3z''(t) - 2tz(t) - 2t^2z'(t) + 2tz(t) - t^3z(t) = 0$, soit $t^3(z''(t)2z(t)) = 0$. On peut simplifier joyeusement par t^3 puisqu'on s'est placés sur $]0, +\infty[$, et on trouve comme solutions les fonctions $z : t \mapsto Ae^t + Be^{-t}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Il n'y a plus qu'à conclure : $y(t) = Ate^t + Bte^{-t}$.

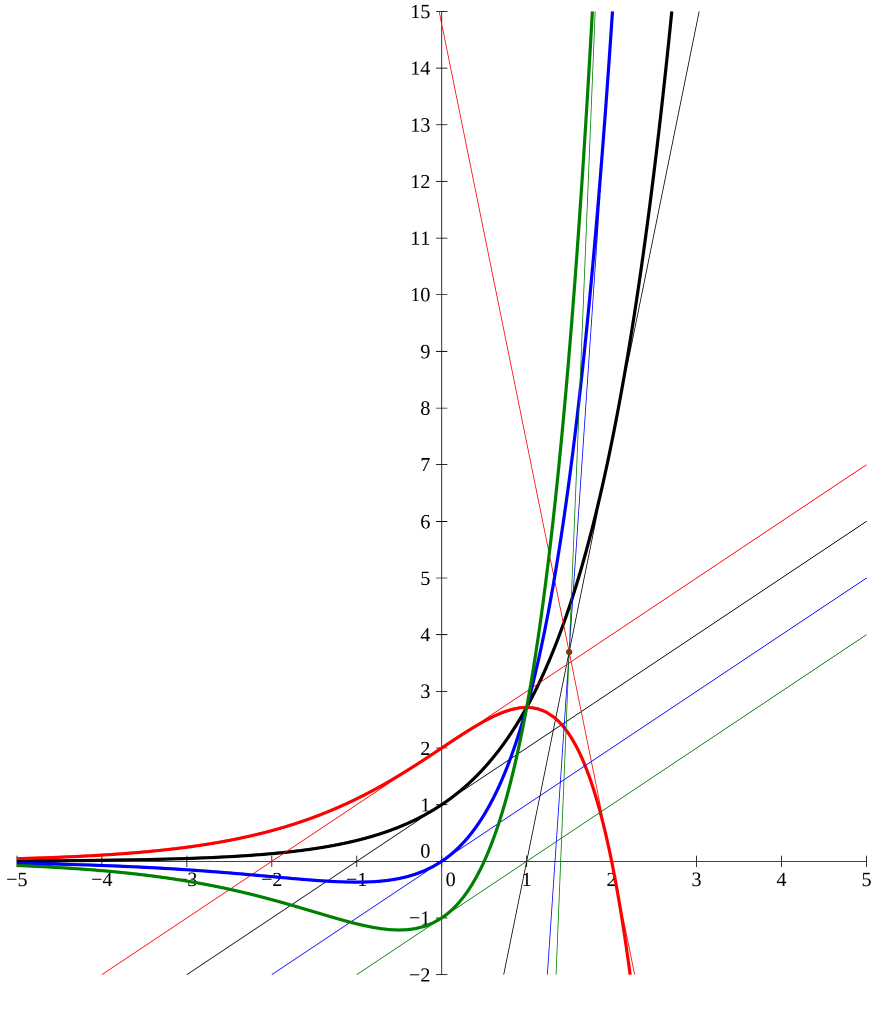
Exercice 1

1. L'équation caractéristique associée est r^2+2r+4, qui a pour discriminant $\Delta = -12$, et admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = \dfrac{-2+i\sqrt{12}}{2} = -1+i\sqrt{3}$ et $r_2 = -1-i\sqrt{3}$. Avec les notations vues en cours, on a donc $r = -1$ et $\omega = \sqrt{3}$, ce qui donne des solutions homogènes de la forme $y_h(x) = (A\cos(\sqrt{3}x) + B\sin(\sqrt{3}x))e^{-x}$.
2. Le second membre est un produit de polynôme par une exponentielle, on peut chercher une solution particulière sous la forme $y_p(x) = (ax+b)e^x$. On aura alors $y_p'(x) = (a+ax+b)e^x$, puis $y_p''(x) = (ax+2a+b)e^x$, dont $y_p''(x)+2y_p'(x)+4y_p(x) = (ax+2a+b+2ax+2a+2b+4ax+4b)e^x = (7ax+4a+7b)e^x$. Par identification, y_p sera solution si $7a = 1$ et $4a+7b = 0$, soit $a = \dfrac{1}{7}$ et $b = -\dfrac{4}{49}$. Autrement dit $y_p(x) = \dfrac{(7x-4)e^x}{49}$, et les solutions de l'équation complète sont donc toutes les fonctions $y : x \mapsto \dfrac{(7x-4)e^x}{49} + (A\cos(\sqrt{3}x) + B\sin(\sqrt{3}x))e^{-x}$.
3. En reprenant la formule précédente pour les solutions, $y(0) = 1 \Leftrightarrow -\dfrac{4}{49} + A = 1$, soit $A = \dfrac{53}{49}$, et $y(1) = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{3e}{49} + \dfrac{A\cos(\sqrt{3}) + B\sin(\sqrt{3})}{e} = 0$, soit $B = \dfrac{3e^2}{49\sqrt{3}} - \dfrac{53e}{49\tan(\sqrt{3})}$. Ces valeurs ignobles sont bel et bien uniques, et donnent une solution particulière que je n'ai même pas envie de recopier entièrement (mais oui, cette question était sans aucun intérêt !).
4. On pose donc plus simplement $f(t) = g(\ln(t))$, ce qui est légitime pour une fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$, et on calcule comme d'habitude $f'(t) = \dfrac{1}{t}g'(\ln(t))$ puis $f''(t) = -\dfrac{1}{t^2}g'(\ln(t)) + \dfrac{1}{t^2}g''(\ln(t))$. En reportant ces valeurs dans l'équation, on trouve $g''(\ln(t)) + 2g'(\ln(t)) + 4g(\ln(t)) = t\ln(t)$, soit $g''(x) + 2g'(x) + 4g(x) = xe^x$. Coïncidence extraordinaire, il s'agit justement de l'équation qu'on vient de résoudre, on connait donc les fonctions g solutions et il ne reste plus qu'à refaire le changement de variable $f(t) = g(\ln(t))$ pour trouver $f : t \mapsto \dfrac{t(7\ln(t)-4)}{49} + \dfrac{A\cos(\sqrt{3}\ln(t)) + B\sin(\sqrt{3}\ln(t))}{t}$.

Exercice 2

1. Puisqu'il faut diviser par $1-x$, on va effectuer une résolution séparée sur $]-\infty;1[$ et sur $]1;+\infty[$.
2. On cherche donc à résoudre l'équation linéaire $y' + \left(\dfrac{1}{1-x} - 1\right)y = \dfrac{e^x}{1-x}$. L'équation homogène associée a pour solutions les fonctions $y_h : x \mapsto Ke^{x+\ln|1-x|} = Ke^x(1-x)$ (quitte à changer le signe de la constante sur $]-\infty;1[$).
3. Pour trouver une solution particulière à l'équation, rien de mieux ici que d'utiliser la méthode de variation de la constante : on cherche $y_p(x) = K(x)(1-x)e^x$, ce qui donne $y_p'(x) = K'(x)(1-x)e^x - K(x)e^x + K(x)(1-x)e^x$. La fonction y_p est donc solution de l'équation initiale si $K'(x)(1-x)e^x - K(x)e^x + K(x)(1-x)e^x + K(x)e^x - K(x)e^x(1-x) = \dfrac{e^x}{1-x}$, c'est-à-dire si $K'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$. On peut choisir $K(x) = \dfrac{1}{1-x}$, soit $y_p(x) = e^x$. Bon, euh oui, en fait on aurait pu se rendre compte que cette solution était plus ou moins évidente. Les solutions de l'équation complète sont donc les fonctions $y : x \mapsto (1+K(1-x))e^x$.
4. Les fonctions obtenues sont certainement définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. Elles vérifient toutes $y(1) = e$, et comme $y'(x) = (-K+1+K(1-x))e^x = (1-Kx)e^x$, on a $y'(1) = (1-K)e$. On ne peut donc pas recoller des morceaux ayant des valeur différentes de la constante K sur chacun des deux intervalles.

5. Avec la forme précédente, $y(0) = 1+K$, donc $f(0) = \alpha$ se produit si et seulement si $K = \alpha-1$. La solution cherchée est bien unique. De plus, $y'(0) = 1$ quelle que soit la valeur de K, donc les tangentes de toutes les solutions en 0 sont effectivement parallèles.
6. Continuons nos petits calculs : $y(2) = (1-K)e^2$, et $y'(2) = (1-2K)e^2$. L'équation de la tangente au point d'abscisse 2 est donc $(1-2K)e^2(x-2)+(1-K)e^2 = [(1-2K)x+3K-1]e^2$. Si on veut que toutes ces droites soient concourantes, il faut trouver une valeur de x pour laquelle l'expression précédente ne dépend pas de K, ce qui est effectivement le cas si $-2Kx+3K = 0$, soit $x = \dfrac{3}{2}$. On a alors toujours $y = \dfrac{e^2}{2}$, les tangentes se coupent donc au point de coordonnées $\left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{e^2}{2}\right)$.
7. Rien de bien difficile, la dérivée s'annule pour $x = \dfrac{1}{K}$ (sauf évidemment dans le cas particulier $K = 0$, où y est simplement la fonction exponentielle qu'on n'a pas vraiment besoin d'étudier), la fonction est croissante sur $\left]-\infty; \dfrac{1}{K}\right[$ et croissante sur $\left]\dfrac{1}{K}; +\infty\right[$, la limite de y en $-\infty$ est toujours nulle (par croissance comparée), en $+\infty$ ça dépend du signe de K : si $K < 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = +\infty$, et si $K > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = -\infty$.
8. On peut bien évidemment tracer les tangentes étudiées plus haut en plus des courbes des fonctions, qui correspondent à $K = -1$, $K = 0$ (fonction exponentielle), $K = 1$ et $K = -2$. En bleu $\alpha = 0$, en noir $\alpha = 1$, en rouge $\alpha = 2$ et en vert $\alpha = -1$. Les tangentes en 0 ont pour équations respectives $y = x$, $y = x+1$, $y = x+2$ et $y = x+3$. Et les tangentes en 2 ont pour équation respectives $y = (3x-4)e^2$, $y = (x-1)e^2$, $y = (-x+2)e^2$ et $y = (5x-7)e^2$.

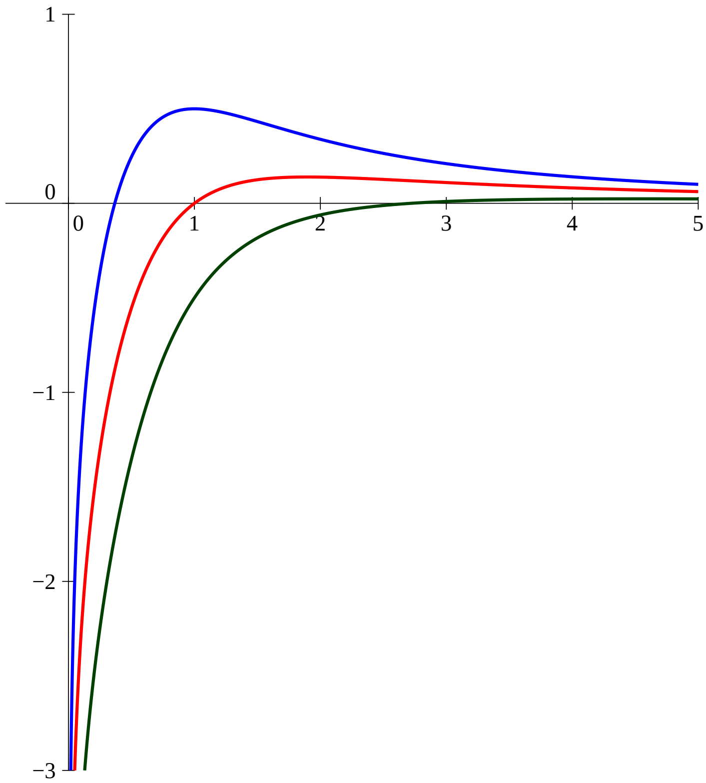


Exercice 3

1. Dans la mesure où $1+x^2$ ne s'annule jamais, la normalisation ne pose aucun problème, et seule la valeur $x=0$ est interdite par le second membre de l'équation. On peut donc résoudre sur $]-\infty,0[$ ou sur $]0,+\infty[$.
2. On normalise pour obtenir $y' + \dfrac{2x}{1+x^2}y = \dfrac{1}{x(1+x^2)}$. L'équation homogène associée a pour solutions toutes les fonctions $y_h : x \mapsto Ke^{-\ln(1+x^2)} = \dfrac{K}{1+x^2}$, pour $K \in \mathbb{R}$. Pour trouver une solution particulière de l'équation complète, on va utiliser la méthode de variation de la constante et poser $y_p(x) = \dfrac{K(x)}{1+x^2}$. On calcule alors $y_p'(x) = \dfrac{K'(x)(1+x^2) - 2xK(x)}{(1+x^2)^2}$, puis $y_p'(x) + \dfrac{2x}{1+x^2}y_p(x) = \dfrac{K'(x)(1+x^2) - 2xK(x) + 2xK(x)}{(1+x^2)^2} = \dfrac{K'(x)}{1+x^2}$. La fonction y_p est donc solution de l'équation si $\dfrac{K'(x)}{1+x^2} = \dfrac{1}{x(1+x^2)}$, ce qui sera par exemple le cas en posant $K(x) = \ln(x)$. Notre solution particulière est donc $y_p : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{1+x^2}$, et les solutions de l'équation complète sont toutes les fonctions $y : x \mapsto \dfrac{\ln(x)+K}{1+x^2}$. Ah ben tiens, ce sont exactement les fonctions f_λ, c'est dingue ça !
3. Il est normal qu'on ait une solution unique à un problème de Cauchy, vérifions-le quand même. Imposer que la courbe passe par le point $M(\alpha,\beta)$ revient à imposer la condition $\dfrac{\ln(\alpha)+\lambda}{1+\alpha^2} = \beta$, soit $\lambda = \beta(1+\alpha^2) - \ln(\alpha)$, ce qui donne bien une valeur unique de λ.
4. Calculons donc (la fonction f_λ est certainement dérivable) : $f_\lambda'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}(1+x^2) - 2x(\ln(x)+\lambda)}{(1+x^2)^2} = \dfrac{g_\lambda(x)}{x(1+x^2)^2}$, qui est en effet du signe de $g_\lambda(x)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
5. La fonction g_λ est elle-même dérivable, et $g_\lambda'(x) = 2x - 4x(\ln(x)+\lambda) - \dfrac{2x^2}{x} = -4x(\ln(x)+\lambda)$. Cette dérivée s'annule toujours une unique fois sur $\mathbb{R}^{+*}$, pour $x = e^{-\lambda}$. La fonction g est croissante sur $]0, e^{-\lambda}]$ et décroissante ensuite. On peut calculer $g(e^{-\lambda}) = 1 + e^{-2\lambda}$ (le reste s'annule. Ce maximum est évidemment strictement positif. De plus, $\lim\limits_{x\to 0^+} g_\lambda(x) = 1$ (le terme en $x^2\ln(x)$ tend vers 0 par croissance comparée), et comme $g_\lambda(x) = 1 + x^2(1+\lambda-2\ln(x))$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} g_\lambda(x) = -\infty$. La fonction g_λ et donc bijective de $]0, e^{-\lambda}]$ sur $[1, 1+e^{-2\lambda}]$ (elle est toujours positive sur cet intervalle), puis bijective de $[e^{-\lambda}, +\infty[$ vers $]-\infty, 1+e^{-2\lambda}]$, intervalle sur lequel elle va donc s'annuler une unique fois, étant positive avant cette valeur d'annulation m_λ, et négative après.
6. D'après la question précédente, f_λ est croissante sur $]0, m_\lambda]$ et décroissante ensuite. De plus, $\lim\limits_{x\to 0} f_\lambda(x) = -\infty$ (aucune forme indéterminée de ce côté), et $f_\lambda(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2} \times \dfrac{1+\frac{\lambda}{\ln(x)}}{1+\frac{1}{x^2}}$, qui a une limite nulle en $+\infty$ par croissance comparée (le deuxième quotient tendant vers 1). Enfin, $f_\lambda(m_\lambda) = \dfrac{\ln(m_\lambda)+\lambda}{1+m_\lambda^2}$, et, par définition, on a $g_\lambda(m_\lambda) = 0$, soit $1+m_\lambda^2 = 2m_\lambda^2(\ln(m_\lambda)+\lambda)$. On peut donc remplacer le numérateur dans $f_\lambda(m_\lambda)$ par $\dfrac{1+m\lambda^2}{2m_\lambda^2}$, ce qui donne bien $f_\lambda(m_\lambda) = \dfrac{1}{2m_\lambda^2}$. On peut résumer tout cela dans le tableau suivant :

x	0		m_λ		$+\infty$
f_λ	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2m_\lambda^2}$	$\searrow$	0

7. Si on prend deux constantes λ et μ distinctes, $f_\lambda(x) - f_\mu(x) = \dfrac{\lambda - \mu}{1 + x^2}$, qui est toujours du signe de $\lambda - \mu$. Autrement dit, la courbe $\mathcal{C}_\lambda$ est toujours au-dessus de la courbe $\mathcal{C}_\mu$ quand $\lambda > \mu$. On dipose d'assez peu d'informations pour tracer les courbes, signalons simplement que f_λ s'annule pour $x = e^{-\lambda}$, que $f_\lambda(1) = \dfrac{\lambda}{2}$, et que $\mu_\lambda \geq e^{-\lambda}$. On obtient des courbes qui devraient ressembler à ce qui suit ($\mathcal{C}_0$ en rouge, $\mathcal{C}_1$ en bleu et $\mathcal{C}_{-1}$ en vert) :



Exercice 4

1. Supposons que $x \in \mathbb{R}$ soit solution de l'équation. En séparant parties réelle et imaginaire, on obtient les deux conditions $4x^6 - 4 = 0$ et $3x^5 + 3x = 0$. Autrement dit, $x^6 = 1$, ce qui impose $x = \pm 1$, condition incompatible avec la deuxième équation. Il n'y a donc pas de solution réelle.

2. Il y a un sens très facile : si $z \in \mathbb{U}$, alors $z = e^{i\theta}$, et $z + \dfrac{1}{z} = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos(\theta) \in \mathbb{R}$. Travaillons maintenant dans l'autre sens, en posant bêtement $z = a + ib$, on calcule alors $z + \dfrac{1}{z} = a + ib + \dfrac{a - ib}{a^2 + b^2} = \dfrac{(a + ib)(a^2 + b^2) + a - ib}{a^2 + b^2}$. Cette expression est réelle si elle a une partie imaginaire nulle, donc si $b(a^2 + b^2) - b = 0$, soit $b(a^2 + b^2 - 1) = 0$. Cela revient à dire que $b = 0$, cas exclu par l'énoncé (puisque dans ce cas $z \in \mathbb{R}$), ou $a^2 + b^2 = 1$, ce qui revient exactement à dire que $|z|^2 = 1$, donc $z \in \mathbb{U}$.

3. Posons $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$. Comme la fonction f est impaire, il suffit de prouver que $f(x) \geq 2$ sur

$\mathbb{R}^{+*}$ (et on aura $f(x) \leq -2$ si $x < 0$). Or, f est dérivable et $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{(x+1)(x-1)}{x^2}$, qui est du signe de $x-1$ sur $]0, +\infty[$. La fonction f est donc décroissante sur $]0, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$, et son minimum sur $]0, +\infty[$ est donc atteint en 1 et a pour valeur $f(1) = 2$. Ceci suffit à prouver l'inégalité souhaitée.

4. (a) Le changement de variable peut s'écrire $z = ia$, on remplace dans l'équation initiale pour obtenir $-4a^6 - 3a^5 - 3a - 4 = 0$. Quitte à changer tous les signes, a est donc solution de l'équation $4a^6 + 3a^5 + 3a + 4 = 0$.

   (b) Développons brutalement le membre de gauche de l'équation proposée dans l'énoncé : $4\left(a^3 + 3a + \dfrac{3}{a} + \dfrac{1}{a^3}\right) + 3\left(a^2 + 2 + \dfrac{1}{a^2}\right) - 12a - \dfrac{12}{a} - 6 = 4a^3 + 3a^2 + \dfrac{3}{a^2} + \dfrac{4}{a^3} = \dfrac{4a^6 + 3a^5 + 3a + 4}{a^3}$. Comme a ne peut pas être nul, cette équation est bien équivalente à la précédente.

   (c) La fonction g est évidemment dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $g'(x) = 12x^2 + 6x - 12 = 6(2x^2 + x - 2)$. Le discriminant de la parenthèse est $\Delta = 1 + 16 = 17$, la dérivée s'annule donc pour les deux valeurs $x_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{17}}{4} > -2$ et $x_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{17}}{4} < 2$ (les bornes sont faciles à prouver en utilisant que $4 < \sqrt{17} < 5$). La fonction g change donc deux fois de variations sur $[-2, 2]$. En fait, les variations ne sont même pas très utiles si on arrive à trouver suffisamment de valeurs de signe opposé dans l'intervalle (pour appliquer ensuite le théorème des valeurs intermédiaires). On calcule donc $g(-2) = -32+12+24-6 = -2 < 0$; $g(-1) = -4+3+12-6 = 5 > 0$; $g(0) = -6 < 0$ et $g(2) = 32+12-24-6 = 14 > 0$, ce qui suffit à prouver que g s'annule sur chacun des intervalles $]-2, -1[$, $]-1, 0[$ et $]0, 2[$, et donc s'annule trois fois sur l'intervalle $[-2, 2]$ (elle ne peut pas s'annuler plus en tant que polynôme de degré 3 et au vu de ses variations).

   (d) Les question précédentes prouvent que $a + \dfrac{1}{a}$ doit être réel pour que z puisse être solution de notre équation. Or, si $a + \dfrac{1}{a} \in \mathbb{R}$, on a vu plus haut que $a \in \mathbb{U}$, et alors $z = ia \in \mathbb{U}$ (la multiplication par i ne fera que modifier l'argument).

   (e) Si on écrit $z = e^{i\theta}$, l'équation initiale devient $4e^{6i\theta} + 3ie^{5i\theta} + 3ie^{i\theta} - 4 = 0$. En séparant partie réelle et imginaire, on obtient les deux conditions $4\cos(6\theta) - 3\sin(5\theta) - 3\sin(\theta) - 4 = 0$, et $4\sin(6\theta) + 3\cos(5\theta) + 3\cos(\theta) = 0$. Effectivement, on est bien contents de ne pas avoir à résoudre ce système !