

TD n°2 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

22 septembre 2016

Exercice 1

1. Cette équation du troisième degré admet -1 comme racine évidente : $(-1)^3 - 5(-1)^2 + 2(-1) + 8 = -1 - 5 - 2 + 8 = 0$. On peut donc factoriser sous la forme $x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = (x + 1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (a + b)x^2 + (b + c)x + c$. Par identification des coefficients, on trouve les conditions $a = 1$, puis $a + b = -5$, soit $b = -6$; $b + c = 2$, soit $c = 8$, ce qui est cohérent avec la valeur du coefficient constant. Le trinôme $x^2 - 6x + 8$ a pour discriminant $\Delta = 36 - 32 = 4$, et admet comme racines $x_1 = \frac{6-2}{2} = 2$, et $x_2 = \frac{6+2}{2} = 4$. Finalement, $\mathcal{S} = \{-1; 2; 4\}$.
2. Cette inéquation ne peut avoir de sens que si $1 - x \geq 0$, soit $x \leq 1$. On peut l'écrire sous la forme $3\sqrt{1-x} \leq 3-x$, et comme le second membre de l'inégalité est toujours positif sur notre intervalle de résolution, on peut élever au carré pour obtenir l'inéquation équivalente $9(1-x) \leq (3-x)^2$, soit $9 - 9x \leq 9 - 6x + x^2$, ou encore $x^2 + 3x \geq 0$. Le membre de gauche a pour racines -3 et 0 , il est positif à l'extérieur de ces racines, d'où $\mathcal{S} =]-\infty, -3] \cup [0, 1]$.
3. On va bien sûr dresser un beau tableau de signes, les trois expressions dans les valeurs absolues s'annulant respectivement en 0 , et -1 et en -3 :

x	$-\infty$	-3	-1	0	$+\infty$
$ 2x $		$-2x$	$-2x$	$-2x$	$2x$
$ 2x+2 $		$-2x-2$	$-2x-2$	$2x+2$	$2x+2$
$ x+3 $		$-x-3$	$x+3$	$x+3$	$x+3$
$f(x)$		$-x-1$	$x+5$	$-3x+1$	$x+1$

En notant $f(x)$ le membre de gauche de l'inéquation, on a donc quatre inéquations à résoudre :

- sur $] -\infty, -3]$, on résout $-x - 1 \leq 3$, soit $x \geq -4$, et on garde donc pour notre solution l'intervalle $[-4, -3]$.
- sur $[-3, -1]$, on résout $x + 5 \leq 3$, soit $x \leq -2$, on garde l'intervalle $[-3, -2]$.
- sur $[-1, 0]$, on résout $-3x + 1 \leq 3$, soit $3x \geq -2$, donc $x \geq -\frac{2}{3}$, on garde l'intervalle $[-\frac{2}{3}, 0]$.
- enfin, sur $\mathbb{R}^+$, l'inéquation $x + 1 \leq 3$ donne $x \leq 2$, on garde donc l'intervalle $[0, 2]$.

Conclusion : $\mathcal{S} = [-4, -2] \cup [-\frac{2}{3}, 2]$.

4. Commençons par signaler que les valeurs -1 et $-\frac{1}{2}$ sont interdites car elles annulent les expressions dans les ln, puis regroupons le membre de gauche dans un seul ln de quotient avant de passer aux exponentielles pour obtenir l'inéquation équivalente $\left| \frac{x+1}{2x+1} \right| \leq 2$. Le membre de gauche doit donc vérifier simultanément les deux inéquations suivantes :

- $\frac{x+1}{2x+1} \leq 2$, soit $\frac{x+1-2(2x+1)}{2x+1} \leq 0$, donc $\frac{-3x-1}{2x+1} \leq 0$. Un tableau de signe donne comme solutions de cette inéquation les nombres appartenant à $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\cup \left[-\frac{1}{3}; +\infty\right[$ (une autre façon de voir les choses est de dire que le quotient est négatif si et seulement si le produit l'est, et le trinôme obtenu est négatif à l'extérieur de ses racines).
 - $\frac{x+1}{2x+1} \geq -2$, soit $\frac{x+1+2(2x+1)}{2x+1} \geq 0$, donc $\frac{5x+3}{2x+1} \geq 0$. Par le même genre de calcul que ci-dessous, on trouve comme solution $\left]-\infty; -\frac{3}{5}\right] \cup \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$.
- Conclusion : $\mathcal{S} = \left]-\infty; -\frac{3}{5}\right] \setminus \{-1\} \cup \left[-\frac{1}{3}; +\infty\right[$.

Exercice 2

1. La fonction f est bien sûr définie sur $\mathbb{R}^{+*}$. De façon évidente, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Et comme $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \ln(x) = 0$ (croissance comparée), on a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \ln(2)$.
2. La fonction f est dérivable sur son domaine de définition, et $f'(x) = \frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\ln(x) + 2}{2\sqrt{x}}$. Le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $\ln(x) + 2$, la dérivée s'annule en particulier pour $x = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$. Après avoir calculé $f(e^{-2}) = \frac{1}{e} \times (-2) + \ln(2) = \ln(2) - \frac{2}{e}$, on obtient le tableau de variations suivant :

x	0	e^{-2}	$+\infty$
f	$\ln(2)$	$\ln(2) - \frac{2}{e}$	$+\infty$

3. D'après le tableau de variations, f est bijective de $]0, e^{-2}]$ vers $\left[\ln(2) - \frac{2}{e}; \ln(2)\right[$, et elle l'est aussi de $[e^{-2}, +\infty[$ vers $\left[\ln(2) - \frac{2}{e}, +\infty\right[$. Or, $\ln(2) - \frac{2}{e} \simeq -0.03 < 0$, ce qui prouve l'existence d'une unique solution à l'équation $f(x) = 0$ sur chacun des deux intervalles où f est bijective. Il y a donc deux solutions à l'équation.
4. (a) On calcule $f\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n^2}\right) + \ln(2) = -\frac{2\ln(n)}{n} + \ln(2)$. Cette expression s'annule si $2\ln(n) = n\ln(2)$, soit en passant tout à l'exponentielle $n^2 = 2^n$.
- (b) Le nombre 2^n étant pair, n^2 est pair, et n aussi (le carré d'un nombre entier a toujours la même parité que le nombre lui-même). On peut donc poser $n = 2p$ pour trouver la condition équivalente $(2p)^2 = 2^{2p}$, soit $4p^2 = 2^{2p}$, ou encore $p^2 = 2^{2p-2} = (2^{p-1})^2$, ce qui implique bien $p = 2^{p-1}$ (tous ces nombres sont positifs).
- (c) L'égalité précédente est manifestement vérifiée lorsque $p = 1$ (puisque $2^0 = 1$) et lorsque $p = 2$ (puisque $2^1 = 2$), ce qui correspond aux deux solutions suivantes de l'équation $f(x) = 0$: $x = \frac{1}{(2 \times 1)^2} = \frac{1}{4}$, et $x = \frac{1}{(2 \times 2)^2} = \frac{1}{16}$. Ce sont évidemment les seules solutions de cette équation, puisqu'on sait qu'elle n'en possède que deux.
5. Il ne reste plus qu'à faire le lien avec l'équation de départ : pour un x nécessairement positif, $x\sqrt{x} = \frac{1}{2}$ donne, en passant tout au $\ln$, l'équation équivalente $\sqrt{x} \ln(x) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$, soit $f(x) = 0$. Les solutions de l'équation (E) sont donc les deux réels $x = \frac{1}{4}$ et $x = \frac{1}{16}$.

Exercice 3

1. La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ étant paire, f_n est de même parité que $x \mapsto x^n$, elle est donc paire si n est pair, et impaire si n est impair.
2. Le domaine de définition de f_n est $\mathbb{R}$ tout entier. En exploitant la parité, on peut se contenter de calculer la limite de f_n en $+\infty$. En écrivant par exemple $f_n(x) = (x^2)^{\frac{n}{2}} e^{-x^2}$, puis en posant $X = x^2$, on se ramène à un cas tout à fait classique de croissance comparée : $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^{-X} = 0$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} X^{\frac{n}{2}} = +\infty$, mais $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$. Que la fonction soit paire ou impaire ne change rien, la limite en $-\infty$ sera également nulle. La seule asymptote à la courbe $\mathcal{C}_n$ est donc l'axe des abscisses, asymptote horizontale valable en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Les fonctions f_n sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et comme $f_1(x) = xe^{-x^2}$, on calcule $f_1'(x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} = (1 - 2x^2)e^{-x^2}$. Cette dérivée est du signe de $1 - 2x^2$, et s'annule en particulier lorsque $x^2 = \frac{1}{2}$, soit $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. On calcule $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}e}$. On peut alors dresser le tableau suivant (en utilisant le fait que f_1 est impaire) :

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
f_1				
		0	$\frac{1}{\sqrt{2}e}$	0
			$-\frac{1}{\sqrt{2}e}$	

Passons désormais à $f_2(x) = x^2e^{-x^2}$. On calcule cette fois $f_2'(x) = 2xe^{-x^2} - 2x^3e^{-x^2} = 2x(1 - x^2)e^{-x^2}$, dérivée qui s'annule en 0 et en ± 1 . On calcule $f_2(0) = 0$, $f_2(1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$, puis on dresse le tableau suivant :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
f_2					
		$\frac{1}{e}$	0	$\frac{1}{e}$	0
	0				0

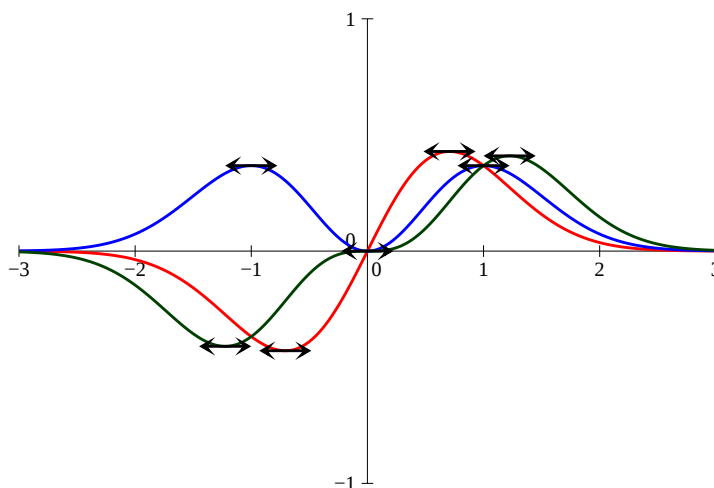
4. Ce n'est pas vraiment plus dur : $f_n'(x) = nx^{n-1}e^{-x^2} - 2x^{n+1}e^{-x^2} = x^{n-1}(n - 2x^2)e^{-x^2}$. La dérivée s'annule toujours en 0 (sauf quand $n = 1$, comme on a vu plus haut) sans changer de signe quand n est impair, et pour $x = \pm \sqrt{\frac{n}{2}}$. On calcule $f\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right) = \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}} = \left(\frac{n}{2e}\right)^{\frac{n}{2}}$. On obtient alors le tableau suivant si n est impair :

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{n}{2}}$	0	$\sqrt{\frac{n}{2}}$	$+\infty$
f_1					
			0	$\left(\frac{n}{2e}\right)^{\frac{n}{2}}$	0
	0	$-\left(\frac{n}{2e}\right)^{\frac{n}{2}}$			0

Et si n est pair :

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{n}{2}}$	0	$\sqrt{\frac{n}{2}}$	$+\infty$
f_1					
		$\left(\frac{n}{2e}\right)^{\frac{n}{2}}$	0	$\left(\frac{n}{2e}\right)^{\frac{n}{2}}$	0
	0				0

5. Même pas besoin de mettre y_n sous forme exponentielle pour se rendre compte que $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = +\infty$. Il n'y a donc pas de majorant commun à toutes les fonctions.
6. Calculons $f_n(x) - f_{n+1}(x) = x^n e^{-x^2} - x^{n+1} e^{-x^2} = x^n(1-x)e^{-x^2}$. La courbe $\mathcal{C}_n$ est donc au-dessus de $\mathcal{C}_{n+1}$ sur l'intervalle $[0, 1]$, et en-dessous sur $[1, +\infty[$. Toutes les courbes se coupent au point de coordonnées $\left(1, \frac{1}{e}\right)$. Sur $\mathbb{R}^-$, $\mathcal{C}_n$ est toujours en-dessous si n est impair, et toujours au-dessus si n est pair, ce qui est évident vu le signe des deux fonctions correspondantes. Faisons de même pour $f_n(x) - f_{n+2}(x) = x^n(1-x^2)e^{-x^2}$. Si n est pair, $\mathcal{C}_n$ est au-dessus de $\mathcal{C}_{n+2}$ sur $[-1, 1]$, en-dessous le reste du temps. Si n est impair, elle est au-dessus sur $[0, 1]$ et sur $] -\infty, -1]$ et en-dessous le reste du temps.
7. Calculons donc $f_1''(x) = -4xe^{-x^2} - 2x(1-2x^2)e^{-x^2} = (4x^3 - 6x)e^{-x^2} = 2x(2x^2 - 3)e^{-x^2}$. Cette dérivée seconde s'annule trois fois, pour $x = 0$ et $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$. On pose donc $a = \sqrt{\frac{3}{2}}$, et on calcule $f_1(a) = \sqrt{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{e\sqrt{2e}}$, ainsi que $f_1'(a) = (1-3)e^{-\frac{3}{2}} = -\frac{2}{e\sqrt{e}}$. Ce qui donne comme équation pour la tangente $y = -\frac{2}{e\sqrt{e}}\left(x - \sqrt{\frac{3}{2}}\right) + \frac{\sqrt{3}}{e\sqrt{2e}} = \frac{-2\sqrt{2}x + 3\sqrt{3}}{e\sqrt{2e}}$.
8. Voici les allures : $\mathcal{C}_1$ en rouge, $\mathcal{C}_2$ en bleu, $\mathcal{C}_3$ en vert :



Problème : Un peu de géométrie !

I. Une inégalité classique.

- Posons donc $f(x) = x(1-x)^2 = x - 2x^2 + x^3$, et étudions les variations de f sur l'intervalle $[0, 1]$: la fonction est évidemment dérivable, et $f'(x) = 1 - 4x + 3x^2$, dérivée ayant pour discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4$, et s'annulant en $x_1 = \frac{4-2}{6} = \frac{1}{3}$ et en $x_2 = \frac{4+2}{6} = 1$. Elle est positive sur $\left[0, \frac{1}{3}\right]$, et croissante sur $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$. La fonction atteint donc comme maximum sur l'intervalle $[0, 1]$ la valeur $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}$. On a exactement prouvé ce qui était demandé.
- (a) On va bien entendu passer par un calcul de dérivée : $f'_a(x) = -2ax + a(1-a)$. Elle s'annule en $x = \frac{a(1-a)}{2a} = \frac{1-a}{2}$, qui appartient bien sûr à l'intervalle $[0, 1-a]$. La dérivée étant

positive avant cette valeur et négative après, la fonction f_a admet pour maximum la valeur $f\left(\frac{1-a}{2}\right) = -a\frac{(1-a)^2}{4} + a(1-a)\frac{1-a}{2} = \frac{a(1-a)^2}{2}$.

- (b) Commençons par fixer la valeur de a , le réel b varie alors entre 0 et $1-a$ (les trois réels étant positifs et de somme 1), et $c = 1-a-b$, donc $abc = ab(1-a-b) = -ab^2 + a(1-a)b$. La question précédente nous assure que cette valeur est maximale si $b = \frac{1-a}{2}$, ce qui revient à dire que $c = b$. Cherchons désormais la valeur de a pour laquelle abc est maximale en imposant $c = b = \frac{1-a}{2}$. On a alors $abc = \frac{a(1-a)^2}{4}$, qui est majoré d'après la première question par $\frac{1}{27}$ (il suffit de tout diviser par 4). Cela prouve que, dans les conditions données, $abc \leq \frac{1}{27}$.

- (c) Pour maximiser abc , il faut avoir d'une part $c = b = \frac{1-a}{2}$, puis $a = \frac{1}{3}$ (question 1), ce qui impose $a = b = c = \frac{1}{3}$.

3. Posons $a = \frac{x}{x+y+z}$, $b = \frac{y}{x+y+z}$ et $c = \frac{z}{x+y+z}$. Ces trois réels a , b et c sont positifs et vérifient $a+b+c = \frac{x+y+z}{x+y+z} = 1$. En appliquant les résultats précédents, $abc \leq \frac{1}{27}$. En multipliant trois fois par $x+y+z$, on trouve exactement $xyz \leq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3$. Un seul cas extrêmement particulier : si $x = y = z = 0$, on ne peut pas diviser par $x+y+z$, mais dans ce cas, l'inégalité demandée est triviale!

4. C'est une égalité si $a = b = c$, ce qui revient exactement à dire que $x = y = z$.

II. Applications aux triangles.

1. Dans un triangle, la somme des longueurs de deux côtés est toujours plus grande que le troisième côté. Ici, par exemple, $a \leq b+c$, donc $2a \leq a+b+c = 2p$, ce qui implique $2p-2a \geq 0$ et donc $x \geq 0$. C'est exactement similaire pour les deux autres côtés.
2. Le périmètre p étant fixé, $\mathcal{A}$ est maximale quand $(p-a)(p-b)(p-c)$ est maximale d'après la formule de Héron, donc quand xyz est maximal. Le maximum de xyz est égal à $\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3$.
Or, $x+y+z = 3p-a-b-c = 3p-2p = p$, donc le maximum de xyz vaut $\frac{p^3}{27}$, et celui de $\mathcal{A}$ est égal à $\sqrt{p \times \frac{p^3}{27}} = \frac{p^2}{\sqrt{27}}$.
3. Puisqu'on doit avoir $x = y = z$, cela revient à dire que $a = b = c$. Autrement dit, le triangle est alors équilatéral.