AP n°7 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

24 mars 2017

Plein de petits exercices sur les espaces vectoriels.

1. En notant $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ un polynôme quelconque de E, le sous-ensemble (qu'on notera F) est décrit par les équations $d = 0$ et $\frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2} + d = 0$, qui forment un système d'équations linéaires homogènes, donc F est bien un sous-espace vectoriel. Pour en déterminer une base, on résout tout simplement le système (c'est pas trop dur) : $d = 0$ et $c = -\frac{1}{2}a - \frac{2}{3}b$, donc $P = aX^3 + bX^2 - \left(\frac{1}{2}a + \frac{2}{3}b\right)X$, ou si on préfère $F = \text{Vect}\left(X^2 - \frac{1}{2}X, X^2 - \frac{2}{3}X\right)$. La famille dans le Vect constitue une base de F (elle est libre).
2. Pour prouver que $G \subset F$, il suffit de prouver que les deux vecteurs de la base de G appartiennent à F (en effet, toutes leurs combinaisons linéaires appartiendront alors aussi à F), ce qui est bien le cas ici : $(1, 5, 2, -2) = \frac{1}{2}(3, 7, 1, -5) + \frac{1}{2}(-1, 3, 3, 1)$ (on peut naturellement résoudre un système pour trouver ces coefficients) et $(2, 2, -1, -3) = \frac{1}{2}(3, 7, 1, -5) - \frac{1}{2}(-1, 3, 3, 1)$. Pour prouver l'inclusion réciproque $F \subset G$, on peut bien sûr recourir à la même méthode, ou encore plus simplement signaler que les deux ensembles sont des sous-espaces vectoriels de dimension 2, et donc égaux à partir du moment où l'un est inclus dans l'autre.
3. Les ensembles F et G sont bien des sous-espaces vectoriels (ils sont facilement stables par somme et par produit extérieur, et la fonction nulle est à la fois paire et impaire). Le fait que $F \cap G = \{0\}$ est évident, la seule fonction à la fois paire et impaire est la fonction nulle (elle doit vérifier $f(x) = f(-x) = -f(x)$ pour tout réel x, donc $f(x) = 0$). Reste à prouver que $F + G = E$, c'est-à-dire que tout fonction peut s'écrire comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. On peut rédiger efficacement cette démonstration à l'aide d'un raisonnement par analyse et synthèse : on suppose le résultat vérifié, on en déduit à quoi doivent nécessairement ressembler les éléments recherchés, puis on vérifie réciproquement que ces éléments fonctionnent effectivement. Ici, supposons donc que $f = g + h$, avec g paire et h impaire. On a alors, pour tout réel x, $f(x) = g(x) + h(x)$, et donc en particulier $f(-x) = g(-x) + h(-x)$, soit $f(-x) = g(x) - h(x)$ en utilisant les hypothèses faites. Ces deux conditions impliquant facilement que $g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$. On peut passer à la « réciproque » : si f est une fonction quelconque, on pose $g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$. On vérifie alors que g est une fonction paire ($g(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x)$), h est une fonction impaire ($h(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -h(x)$), et surtout $f = g + h$ puisque $g(x) + h(x) = \frac{f(x) + f(-x) + f(x) - f(-x)}{2} = f(x)$. On a bien réussi à décomposer (et de manière unique) une fonction f comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. On a bien prouvé que $F \oplus G = E$.

Pour résoudre l'équation, on décompose f sous la forme $g + h$ comme on vient de voir qu'on pouvait le faire. On se ramène alors à l'équation $g''(x) + g(x) + h''(x) - h(x) = x$ (puisque $f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x)$). Or, la fonction $x \mapsto x$, comme tout fonction, se décompose de façon unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Cette décomposition est d'ailleurs triviale, il suffit d'écrire $x = 0 + x$ (la fonction nulle étant paire, et $x \mapsto x$ étant impaire). Mais on vient d'écrire plus haut une autre décomposition de cette même fonction : $g'' + g$ est paire (la dérivée d'une fonction paire est impaire, sa dérivée seconde est paire), et $h''-h$ est impaire (même raison). Par unicité de la décomposition, on doit donc avoir $g'' + g = 0$ et $h'' - h = x$. On sait très bien résoudre ces deux équations. D'un côté, $g(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$, mais comme g doit être une fonction paire, on ne garde que $g(x) = A\cos(x)$ (nécessairement $B = 0$) ; de l'autre $h(x) = A\,\mathrm{ch}(x)+B\,\mathrm{sh}(x)-x$ (la fonction $x \mapsto -x$ est solution particulière évidente de l'équation), et on impose de façon similaire $A = 0$ pour garder une fonction impaire, soit $h(x) = B\,\mathrm{sh}(x) - x$. Les solutions de l'équation proposée sont alors de la forme $f(x) = A\cos(x) + B\,\mathrm{sh}(x) - x$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ (et réciproquement, toutes ces fonctions sont effectivement solutions).

4. Comme il s'agit d'une famille de quatre vecteurs dans un espace de dimension 4, il s'agira d'une base si et seulement si elle est libre. Soient donc quatre réels a, b, c et d tels que $a(1, 0, 0, 1) + b(-1, 1, 2, -2) + c(\alpha, 2, 1, 1) + d(2, -1, 1, 1) = (0, 0, 0, 0)$, on peut traduire cette égalité par le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} a & - & b & + & \alpha c & + & 2d & = & 0 \\ & & b & + & 2c & - & d & = & 0 \\ & & 2b & + & c & + & d & = & 0 \\ a & - & 2b & + & c & + & d & = & 0 \end{array}\right.$. La différence des deux dernières équations donne $a - 4b = 0$, soit $a = 4b$. En additionnant les deuxième et troisième équations, on trouve $3b + 3c = 0$, soit $c = -b$. La deuxième équation devient alors $-b - d = 0$, soit $d = -b$. Il ne reste plus qu'à tout reporter dans la première équation : $4b - b - \alpha b - 2b = 0$, soit $b(1-\alpha) = 0$. Si $\alpha \neq 1$, cette équation implique $b = 0$ puis $a = c = d = 0$, donc la famille est libre (et donc une base de $\mathbb{R}^4$). Si $\alpha = 1$ par contre, on peut choisir b quelconque, et la famille n'est pas libre (et donc évidemment pas une base). Pour déterminer ensuite les coordonnées de $(1, 2, -1, 1)$, il faut résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} a & - & b & + & \alpha c & + & 2d & = & 1 \\ & & b & + & 2c & - & d & = & 2 \\ & & 2b & + & c & + & d & = & -1 \\ a & - & 2b & + & c & + & d & = & 1 \end{array}\right.$. On va effectuer les mêmes opérations que plus haut pour trouver $a - 4b = 2$, soit $a = 4b + 2$; $3b + 3c = 1$, soit $c = -b + \frac{1}{3}$; et $-b + \frac{2}{3} - d = 2$, soit $d = -b - \frac{4}{3}$. On reporte tout dans la première équation : $4b+2-b-\alpha b+\frac{\alpha}{3}-2b-\frac{8}{3} = 1$, soit $(1-\alpha)b = \frac{5-\alpha}{3}$ et donc $b = \frac{5-\alpha}{3(1-\alpha)}$. On en déduit que $a = \frac{26-10\alpha}{3(1-\alpha)}$, $c = \frac{-4}{3(1-\alpha)}$ et $d = \frac{-9+5\alpha}{3(1-\alpha)}$. Les coordonnées sont donc les quatre réels calculés (question sans l'ombre d'un intérêt !).

5. Supposons donc que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \sin^k(x) = 0$. Cette égalité doit être vérifiée pour tout réel x, et en particulier pour tout les réels de la forme $x = \arcsin(u)$ quand u varie dans $[-1, 1]$. Mais alors on peut simplifier l'expression en $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \sin^k(\arcsin(u)) = 0$, soit $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k u^k = 0$. Cela revient exactement à dire que le polynôme $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k$ s'annule pour tous les réels de l'intervalle $[0, 1]$. En particulier, c'est un polynôme qui a une (grosse) infinité de racines, il est nécessairement nul. Cela prouve que tous les réels λ_k sont nuls, et donc que la famille est libre.

Le retour du jeu du sous-espace vectoriel.

1. C'est un sous-espace vectoriel, on peut par exemple le décrire à l'aide du systèmes d'équations linéaires homogènes $a_{11} = a_{12} = \cdots = a_{1n} = 0$. C'est même assez clairement un sous-espace vectoriel de dimension $n^2 - n$.
2. Ce n'est pas un sous-espace vectoriel, la stabilité par somme n'est pas vérifiée. On prend par exemple la matrice pour laquelle $a_{11} = 0$ et tous les autres coefficients sont égaux à 1, et comme deuxième matrice celle pour laquelle au contraire $a_{11} = 1$ et tous les autres coefficients sont nuls. La somme est constitué entièrement de 1 et n'appartient plus à notre ensemble.
3. C'est un sous-espace vectoriel, il s'agit d'ailleurs de la droite vectorielle engendrée par la matrice ne contenant que des 1 (c'est donc un sous-espace vectoriel de dimension 1).
4. Ce n'est pas du tout un sous-espace vectoriel, la matrice nulle ne vérifie pas cette condition (et ce n'est stable ni par somme, ni par produit par un réel !).
5. C'est un sous-espace vectoriel. Pour la vérification, le plus simple ici est de revenir à la stabilité : la matrice nulle vérifie évidemment la condition ; $MA = 0 \Rightarrow (\lambda M)A = 0$, et si $MA = NA = 0$ alors $(M + N)A = MA + NA = 0$.
6. C'est bien un sous-espace vectoriel, la transposition étant linéaire, la propriété est stable par somme et par produit extérieur (et vérifiée par la matrice nulle).
7. Là par contre, ça ne marche pas du tout, la matrice nulle ne vérifie pas la condition.
8. Encore un sous-espace vectoriel. La matrice nulle est dans l'ensemble (puisque dans ce cas $P^{-1}MP$ est nulle donc diagonale), et l'ensemble est stable par produit par un réel (on multiplie simplement la matrice diagonale par le même réel), et par somme : $P^{-1}(M+N)P = P^{-1}MP + P^{-1}NP$ est une somme de matrices diagonales, donc diagonales.

Des sous-espaces vectoriels supplémentaires.

1. Commençons par prouver que $F \cap G = \{0\}$. Si $u \in F$, alors $u = a(1, 2, -1) = (a, 2a, -a)$, et $u \in G \Rightarrow a + 3a + 3a = 0$, soit $a = 0$. On a donc bien $u = 0$. On peut alors conclure en utilisant la dimension : $\dim(F) = 1$, et $G = \text{Vect}((3, 0, 1), (0, 3, 1))$ (d'autres bases sont possibles pour G), donc $\dim(G) = 2$, et $\dim(F) + \dim(G) = 3 = \dim(E)$. Si on veut prouver tout de même que $E = F + G$, il faut réussir à écrire un vecteur $u = (x, y, z)$ quelconque de E sous la forme $a(1, 2, -1) + b(3, 0, 1) + c(0, 3, 1)$ (la partie $a(1, 2, -1)$ appartenant à F et le reste à G). Cela revient à résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} a & + & 3b & & & = & x \\ 2a & + & & & 3c & = & y \\ -a & + & b & + & c & = & z \end{array}\right.$. On peut par exemple procéder par substitution : $b = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}a$; $c = \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}a$, puis en remplaçant dans la dernière équation $-a + \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}a = z$, soit $a = \frac{1}{6}x + \frac{1}{6}y - \frac{1}{2}z$. On remonte pour trouver $b = \frac{5}{18}x - \frac{1}{18}y + \frac{1}{6}z$ et $c = -\frac{1}{9}x + \frac{2}{9}y + \frac{1}{3}z$. Palpitant.
2. Supposons que $P \in F \cap G$, alors $P = a + aX^2$, et donc $P'(1) = 2a = 0$, donc $P = 0$, ce qui prouve que $F \cap G = \{0\}$. On peut encore conclure à coup de dimensions : $\dim(G) = 1$, $\dim(E) = 4$, et, en notant $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, on a $P \in F \Leftrightarrow 3a + 2b + c = 0$, ce qui permet d'écrire que $F = \text{Vect}(X^3 - 3X, X^2 - 2X, 1)$, et donc que $\dim(F) = 3$. Sinon, on peut utiliser la somme : soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, on veut écrire $P = a(1 + X^2) + Q$, avec $Q'(1) = 0$. Il suffit de calculer $P'(1) = 2a + Q'(1)$ (en dérivant l'équation précédente) pour trouver $a = \frac{P'(1)}{2}$, et imposer $Q = P - \frac{P'(1)}{2}(1 + X^2)$.
3. Ici, bien sûr, pas question d'utiliser la dimension. Commençons par considérer une fonction appartenant à $F \cap G$, on a donc $f(x) = ax$, et du coup $\int_0^\pi f(t)\, dt = \left[\frac{ax^2}{2}\right]_0^\pi = \frac{a\pi^2}{2}$, qui ne

peut valoir 0 que si $a = 0$ et donc $f = 0$. Il faut maintenant prouver qu'une fonction f continue quelconque peut s'écrire sous la forme $f(x) = ax + g(x)$, avec $\int_0^\pi g(t)\ dt = 0$. C'est en fait très simple : on intégre cette égalité entre 0 et π pour trouver $\int_0^\pi f(t)\ dt = \frac{a\pi^2}{2}$ (puisque par hypothèse l'intégrale de g s'annule). On pose donc $a = \frac{2}{\pi^2}\int_0^\pi f(t)\ dt$, et réciproquement, on constate aisément qu'avec ce choix, on aura bien l'écriture souhaitée.

Un peu d'intégrales et de polynômes.

1. Il suffit juste de prouver que 1 est racine triple du polynôme P_n. Calculons donc $P_n' = n(n+2)X^{n+1} - (n+2)(n+1)X^n + n+2$ et $P_n'' = n(n+1)(n+2)X^n - n(n+1)(n+2)X^{n-1}$. On vérifie ensuite que $P_n(1) = n-(n+2)+(n+2)-n = 0$, puis $P_n'(1) = n^2+2n-(n^2+3n+2)+n+2 = 0$ et enfin $P_n''(1) = 0$.
2. On aimerait évidemment utiliser des sommes de Riemann. Pour cela, posons donc $v_n = \ln(u_n)$ (on peut sans problème, u_n est clairement strictement positif), et calculons $v_n = -2\ln(n) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\ln(n^2+k^2) = -2\ln(n) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(n^2) + \ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right) = -2\ln(n) + 2\ln(n) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)$, qui est bien une somme de Riemann associée à la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x^2)$ sur l'intervalle $[0,1]$. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} v_n = I$, avec $I = \int_0^1 \ln(1+x^2)\ dx$. Calculons I en faisant une IPP, en posant $u(x) = \ln(1+x^2)$, donc $u'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$, et $v'(x) = 1$, donc $v(x) = x$. On trouve alors $I = [x\ln(1+x^2)]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2}\ dx = \ln(2) - 2\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\ dx$. Un coup d'astuce belge pour calculer la dernière intégrale : $\int_0^1 \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\ dx = \int_0^1 1 - \frac{1}{1+x^2}\ dx = [x - \arctan(x)]_0^1 = 1 - \frac{\pi}{4}$. On en déduit que $I = \ln(2) - 2\left(1-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} + \ln(2) - 2$, puis $\lim_{n\to+\infty} u_n = e^I = \frac{2e^{\frac{\pi}{2}}}{e^2}$.
3. Commençons par chercher le degré P d'un polynôme vérifiant cette condition : en notant aX^n son terme dominant, on doit avoir (en ne gardant que les termes dominants) $n(n-1)aX^n + naX^n - aX^n = 0$ (sauf si $n = 0$), donc $n^2 - 1 = 0$. Le polynôme P doit donc être de degré 1, soit $P = aX + b$. La dérivée seconde ne sert donc en fait strictement à rien, et l'équation se réduit à $a(X+2) - aX - b = 1$, soit $2a - b = 1$. On a donc $P = aX + 2a + 1$.
4. Commençons donc par calculer $I_0 = \int_0^1 \ln(1+x)\ dx = [(1+x)\ln(1+x) - x]_0^1 = 2\ln(2)$ (on peut aussi faire une IPP en dérivant le $\ln(1+x)$ et en primitivant 1 sous la forme $1+x$ pour simplifier le calcul). Pour I_1, on fait une IPP : $I_1 = \int_0^1 x\ln(1+x)\ dx$, on pose $u(x) = \ln(1+x)$, donc $u'(x) = \frac{1}{1+x}$, et $v'(x) = x$, donc $v(x) = \frac{x^2}{2}$, pour obtenir $I_1 = \left[\frac{x^2}{2}\ln(1+x)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\ dx$. En constatant que $\frac{x^2}{1+x} = \frac{x^2-1+1}{1+x} = x - 1 + \frac{1}{1+x}$, on peut alors calculer $I_1 = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(1+x)\right]_0^1 = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln(2) = \frac{1}{4}$. Les plus motivés calculeront I_2 en utilisant le même genre de méthode et devraient obtenir

$I_2 = \frac{2_ln(2)}{3} - \frac{5}{18}$.
Pour l'étude plus générale de la suite, quand x varie dans l'intervalle $[0,1]$, $x^{n+1} \leq x^n$, donc $x^{n+1}\ln(1+x) \leq x^n \ln(1+x)$ (puisque $\ln(1+x) \geq 0$ sur notre intervalle) et en intégrant l'inégalité $I_{n+1} \leq I_n$. La suite est donc décroissante, et clairement minorée par 0, elle converge donc. On peut obtenir facilement sa limite en majorant : $\ln(1+x) \leq \ln(2)$ sur l'intervalle $[0,1]$, donc $I_n \leq \int_0^1 x^n \ln(2)\ dx = \ln(2)\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{\ln(2)}{n+1}$. On a donc $0 \leq I_n \leq \frac{\ln(2)}{n+1}$. En appliquant le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.