AP n°7

PTSI B Lycée Eiffel

Plein de petits exercices sur les espaces vectoriels.

1. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, montrer que $\{P \in E \mid P(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 P(t)\, dt = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E, et en donner une base.
2. Dans $\mathbb{R}^4$, on note $F = \text{Vect}((3,7,1,-5);(-1,3,3,1))$ et $G = \text{Vect}((1,5,2,-2);(2,2,-1,-3))$, montrer que $F = G$.
3. On note E l'ensemble de toutes les fonctions réelles. Montrer que $F\{f \in E \mid f \text{ est paire}\}$ et $G = \{f \in E \mid f \text{ est impaire}\}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Résoudre l'équation fonctionnelle $f''(x) + f(-x) = x$ en utilisant le résultat précédent.
4. Dans $\mathbb{R}^4$, préciser pour quelles valeurs de α la famille $((1,0,0,1);(-1,1,2,-2);(\alpha,2,1,1);(2,-1,1,1))$ est une base. Donner les coordonnées du vecteur $(1,2,-1,1)$ dans cette base en fonction de α.
5. On note, pour tout entier k, $f_k : x \mapsto \sin^k(x)$. Montrer que la famille $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est toujours une famille libre.

Le retour du jeu du sous-espace vectoriel

On se place dans $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (poue un entier $n \geq 2$ quelconque). Précisez pour chacune des conditions suivantes si l'ensemble des matrices la vérifiant est un sous-espace vectoriel de E.

1. M est une matrice dont la première ligne est entièrement nulle.
2. M admet au moins un coefficient nul.
3. Tous les coefficients de M sont égaux.
4. $M^2 = I$.
5. $MA = 0$, avec A une matrice fixée de E.
6. ${}^tM = 2M$.
7. ${}^tM = 2M + I$.
8. $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale, avec P une matrice inversible fixée.

Des sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Dans chacun des cas suivantes, montrer que $F \oplus G = E$.

1. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \text{Vect}((1,2,-1))$ et $G = \{(x,y,z) \in E \mid x + y - 3z = 0\}$.
2. $E = \mathbb{R}_3[X]$, $F = \{P \in E \mid P'(1) = 0\}$, et $G = \text{Vect}(1 + X^2)$.
3. $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ continues}\}$, $F = \{f \in E \mid \int_0^\pi f(t)\, dt = 0\}$ et $G = \{f_a : x \mapsto ax, \text{ avec } a \in \mathbb{R}\}$.

Un peu d'intégrales et de polynômes.

1. Montrer que $(X-1)^3$ divise $P_n = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$, pour tout entier $n \geq 1$.
2. Calculer la limite de la suite définie par $u_n = \dfrac{1}{n^2} \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (n^2 + k^2)^{\frac{1}{n}}$.
3. Trouver tous les polynômes vérifiant $X(X+1)P'' + (X+2)P' - P = 1$.
4. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln(1+x)\, dx$. Calculer les premiers termes de la suite, déterminer sa monotonie et sa limite éventuelle.