AP : Séance n°6

PTSI B Lycée Eiffel

27 janvier 2017

Fonctions usuelles

Étudier le plus complètement possible (courbe représentative incluse, bien entendu) la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\ln(e^x - 1)}{x}$.

Trigonométrie

Étudier la fonction f définie par $f(x) = \sin(x)\cos(x) - \sin(x)\cos^3(x)$.

Calcul

1. Prouver que, $\forall t \in [0, 1]$, $t(1-t) \leqslant \dfrac{1}{4}$.
2. Montrer que, si $1 \leqslant k \leqslant n$, on a $k(n-k+1) \leqslant \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2$.
3. Montrer que $(n!)^2 = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} k(n+1-k)$.
4. En déduire que $(\sqrt{n})^n \leqslant n! \leqslant \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

Intégrales

Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{5x^2 - 3x + 1}{x^3 - 2x^2 + x - 2}$.

Équations différentielles

On cherche à résoudre sur $\left]-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$ l'équation $(1+2x)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0$.

1. Déterminer une solution de la forme $y_p(x) = e^{ax}$, où a est une constante réelle.
2. En posant $y(x) = e^{ax}z(x)$, déterminer une équation différentielle vérifiée par la fonction z.
3. En déduire les solutions de notre équation.

Complexes et trigonométrie.

1. Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \geqslant 1$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z+1)^n = e^{2ina}$.
2. En déduire une expression simple de $P_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)$.