Devoir Surveillé n°9

PTSI B Lycée Eiffel

14 juin 2016

Durée : 2H50. Calculatrices interdites.

Exercice 1

On dispose d'une urne contenant $2n$ jetons numérotés de 1 à $2n$.

1. Un joueur pioche au hasard un jeton dans l'urne. On note X le numéro tiré. Rappeler la loi, l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.
2. Le joueur pioche à présent deux jetons successivement dans l'urne, avec remise du jeton entre les deux tirages. On note Y le plus grand numéro tiré lors de ces deux tirages, U le premier numéro tiré et D le deuxième numéro tiré.
   (a) Pour un entier $i \leq 2n$, déterminer $P(U \leq i)$ et $P(D \leq i)$, et en déduire $P(Y \leq i)$.
   (b) Déduire de la question précédente que $P(Y = i) = \dfrac{2i-1}{4n^2}$.
   (c) Calculer l'espérance de la variable aléatoire Y.
3. Le joueur procède maintenant à l'expérience suivante : il tire un premier jeton dans l'urne. Si le numéro obtenu est strictement supérieur à n, il conserve ce numéro, mais si ce n'est pas le cas il remet son jeton dans l'urne et effectue un deuxième tirage, et conservera le numéro obtenu à ce deuxième tirage (PAS le plus grand des deux). On note Z le numéro obtenu à l'issue de cette expérience.
   (a) Calculer $P(Z = i)$ dans le cas où $i \leq n$.
   (b) Calculer $P(Z = i)$ lorsque $i \in [n+1, \dots, 2n]$.
   (c) Vérifier que $\displaystyle\sum_{i=1}^{2n} P(Z = i) = 1$.
   (d) Calculer l'espérance de la variable aléatoire Z, et la comparer à celle de la variable Y étudiée plus haut.

Exercice 2

Dans un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, on considère le carré $OACB$. On place deux points $P \in [OB]$ et $Q \in [OA]$ tels que $OP = OQ$. On note ensuite H le projeté orthogonal de O sur la droite (AP).

1. Faire une figure (que l'on complètera notamment en traçant le cercle évoqué à la question 4).
2. Donner les coordonnées du point H dans le repère choisi (on utilisera un paramètre pour désigner les coordonnées des points P et Q).
3. À l'aide d'un calcul de produit scalaire, vérifier que les droites (QH) et (HC) sont perpendiculaires.

4. Déterminer les coordonnées du point I, milieu du segment $[QC]$, puis donner une équation du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[QC]$. Montrer que $H \in \mathcal{C}$ à l'aide d'un calcul de distance, et retrouver le résultat de la question précédente.

Exercice 3

Soit (u_n) une suite réelle quelconque, et $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ la somme partielle de la série $\sum u_n$.

1. Justifier que, si $k \geq 1$, on a $u_k = S_k - S_{k-1}$, et montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{k(k+1)} + \frac{S_n}{n+1} - S_0$.
2. En déduire que, si la suite (S_n) est bornée, alors la série $\sum \frac{u_n}{n}$ converge.
3. Trouver un contre-exemple à la réciproque de ce résultat (on cherchera dans les exemples classiques du cours une suite (u_n) telle que (S_n) n'est pas bornée, mais $\sum \frac{u_n}{n}$ converge tout de même).
4. Quelques applications :
   (a) Déterminer la nature de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ (on ne demande pas la somme).
   (b) Soit $\theta \in \mathbb{R}$, simplifier la somme $S_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$.
   (c) En déduire la convergence des séries $\sum \frac{\cos(n)}{n}$ et $\sum \frac{\cos(2n)}{n}$.
   (d) Quelle est la nature de la série $\sum \frac{\sin^2(n)}{n}$?
   (e) Montrer que $|\cos(k)| \geq \frac{1+\cos(2k)}{2}$, et déterminer la nature de $\sum \frac{|\cos(n)|}{n}$.

Exercice 4

Une urne contient N boules : b boules blanches et $N-b$ boules noires (avec $b \geq 1$). On tire toutes les boules de cette urne successivement sans remise et on note X le numéro du tirage où on a tiré la dernière boule blanche.

1. Quelle est la loi de X lorsque $b = 1$?
2. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X lorsque $N = 4$ et $b = 2$.
3. On se place maintenant dans le cas général.
   (a) Quelles sont les valeurs prises par la variable X ?
   (b) Déterminer la probabilité qu'on tire $b-1$ boules blanches lors des $k-1$ premiers tirages, et en déduire que $P(X = k) = \frac{\binom{k-1}{b-1}}{\binom{N}{b}}$.
   (c) Calculer, en fonction de N et de b, l'espérance de la variable aléatoire X.