Devoir Surveillé n°5

PTSI B Lycée Eiffel

8 février 2016

Durée : 4H. Calculatrices interdites.

Exercice 0

Étudier le plus complètement possible la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{\ln(x)}$ (limites, prolongements, dérivabilité partout où ça a un sens, et bien sûr une belle **courbe** pour conclure).

Exercice 1

Pour tout entier $n \geq 1$, on définit la fonction g_n par l'équation $g_n(x) = e^x - \dfrac{1}{nx}$.

1. Étudier les variations de la fonction g_n sur l'intervalle $]0, +\infty[$, et prouver que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une unique solution sur cet intervalle. On la notera désormais u_n.
2. Montrer que $0 < u_n \leq \dfrac{1}{n}$, et en déduire la limite de la suite (u_n).
3. Simplifier l'expression de $g_{n+1}(x) - g_n(x)$, en déduire le signe de $g_n(u_{n+1})$ puis la monotonie de la suite (u_n).
4. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} nu_n$.

Exercice 2

Dans tout cet exercice, on note $E_n = \{1, 2, \dots, n\}$ (avec $n \geq 1$), et on dit qu'un sous-ensemble de E_n est isolé s'il ne contient pas deux entiers consécutifs. Ainsi, $\{2, 5, 7\}$ est un sous-ensemble isolé de E_8, mais $\{2, 3, 5, 7\}$ n'en est pas un puisqu'il contient les entiers consécutifs 2 et 3. On notera pour la suite de l'exercice I_n^p le nombre de sous-ensembles isolés de E_n contenant exactement p éléments.

1. Donner un exemple de sous-ensemble isolé de E_5 contenant deux éléments. Combien d'éléments peut contenir au maximum un sous-ensemble isolé de E_5 ? En déduire les valeurs de I_5^p pour tous les entiers naturels p.
2. Dans le cas général, préciser les valeurs de I_n^0, I_n^1 et I_n^n.
3. Démontrer que $I_n^2 = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ (un raisonnement rigoureux est attendu).
4. On suppose dans cette question que $n \geq 2$ et $p \geq 1$.
   (a) Exprimer en fonction de I_n^p le nombre de parties isolées à p éléments de E_{n+1} ne contenant **pas** l'entier $n + 1$.
   (b) Justifier de même une relation très simple exprimant le nombre de parties isolées à p éléments de E_{n+1} contenant l'entier $n + 1$ en fonction du cardinal d'un autre ensemble.
   (c) En déduire que $I_{n+1}^p = I_n^p + I_{n-1}^{p-1}$.
5. Calculer toutes les valeurs de I_n^p pour $n \leq 6$ (on pourra présenter les résultats sous forme d'un tableau similaire au triangle de Pascal).

6. (a) Montrer que, $\forall p \geq 1$, $\forall n \geq p-1$, on a la relation :
$$\binom{p-1}{p-1} + \binom{p}{p-1} + \cdots + \binom{n}{p-1} = \binom{n+1}{p}$$
   (b) Montrer que, si $n \geq p \geq 2$, $I_{n+1}^p = \sum_{i=p-1}^{n-1} I_{p-1}^i$ (on pourra utiliser le résultat de la question 4.c).
   (c) En remarquant que $I_n^2 = \binom{n-1}{2}$, montrer que $I_n^3 = \binom{n-2}{3}$, puis $I_n^4 = \binom{n-3}{4}$.
   (d) Conjecturer une formule générale pour I_n^p (en précisant pour quelles valeurs de p elle a un sens), puis la démontrer.

Exercice 3

Dans tout cet exercice, p est un réel fixé appartenant à l'intervalle $[0, 1]$. On définit une matrice $A = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 1-p & p & 0 \\ 0 & 1-p & 1 \end{pmatrix}$, dont on cherche à calculer les puissances.

I. Calcul à l'aide de suites.

1. Que vaut A^n lorsque $p = 1$? Calculer également les puissances de A lorsque $p = 0$. On suppose pour la suite de l'exercice que $0 < p < 1$.
2. Calculer A^2 et A^3.
3. Montrer que, pour tout entier naturel n, il existe trois entiers a_n, b_n et c_n tels que $A^n = \begin{pmatrix} p^n & 0 & 0 \\ a_n & p^n & 0 \\ b_n & c_n & 1 \end{pmatrix}$. On utilisera $A^{n+1} = A^n \times A$ pour la démonstration, et on exprimera a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
4. Reconnaitre la suite (c_n) et en déduire c_n en fonction de n.
5. Montrer que $a_{n+2} - 2pa_{n+1} + p^2 a_n = 0$, et calculer a_n en fonction de n.
6. On note $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et E l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $MU = U$.
   (a) Vérifier que ${}^tA \in E$. Caractériser de façon simple les matrices appartenant à E (on donnera une propriété élémentaire vérifiée par leurs lignes).
   (b) Montrer que, si $(M, N) \in E^2$, alors $MN \in E$.
   (c) En déduire que ${}^tA^n \in E$, puis en déduire une expression de b_n.

II. Calcul à l'aide d'une décomposition astucieuse.

Cette deuxième partie est complètement indépendante de la première, il est interdit de réutiliser les résultats démontrés ci-dessus.

On pose désormais $B = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 1-p & 1-p & 1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & 0 \\ p-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Que vaut $B + C$?
2. Calculer C^2. Comment s'appelle ce genre de matrice ?
3. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
4. On pose $D = P^{-1}BP$, calculer les puissances de la matrice D.
5. En déduire les puissances de B.
6. Exprimer A^n en fonction des puissances de B et de C (attention à bien vérifier les hypothèses), puis retrouver l'expression de A^n obtenue à la première partie.