Devoir Surveillé n°3 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

4 décembre 2015

Exercice 1

1. On commence par résoudre l'équation homogène $y'' - 4y' + 4y = 0$, qui a pour équation caractéristique $x^2 - 4x + 4 = 0$. On reconnait là le cas particulier d'une racine double, en l'occurrence $x = 2$, les solutions homogènes sont donc de la forme $y_h : x \mapsto (A + Bt)e^{2t}$. On va ensuite appliquer le principe de superposition. Commençons par rechercher une solution particulière de l'équation $y'' - 4y' + 4y = (t^2 + 1)e^t$ sous la forme $y_1(t) = (at^2 + bt + c)e^t$. On calcule $y_1'(t) = (at^2 + (2a + b)t + b + c)e^t$, puis $y_1''(t) = (at^2 + (4a + b)t + 2a + 2b + c)e^t$, et enfin $y_1''(t) - 4y_1'(t) + 4y_1(t) = (at^2 + (4a + b)t + 2a + 2b + c - 4at^2 - (8a + 4b)t - 4b - 4c + 4at^2 + 4bt + 4c)e^t = (at^2 + (-4a + b)t + 2a - 2b + c)e^t$. Par identification, y_1 est solution de notre équation si $a = 1$; $-4a + b = 0$, donc $b = 4a = 4$; et $2a - 2b + c = 1$, soit $c = 1 + 2b - 2a = 7$. Autrement dit, $y_1(t) = (t^2 + 4t + 7)e^t$. Cherchons maintenant une solution particulière de l'équation $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2t}$ sous la forme $y_2(t) = (at^2 + bt + c)e^{2t}$ (on est obligés d'augmenter de deux unités le degré du polynôme car 2 est racine double de l'équation caractéristique). On calcule à nouveau : $y_2'(t) = (2at + b + 2at^2 + 2bt + 2c)e^{2t} = (2at^2 + (2a + 2b)t + b + 2c)e^{2t}$, puis $y_2''(t) = (4at + 2a + 2b + 4at^2 + (4a + 4b)t + 2b + 4c)e^{2t} = (4at^2 + (8a + 4b)t + 2a + 4b + 4c)e^{2t}$, et enfin $y_2''(t) - 4y_2'(t) + 4y_2(t) = (4at^2 + (8a + 4b)t + 2a + 4b + 4c - 8at^2 - (8a + 8b)t - 4b - 8c + 4at^2 + 4bt + 4c)e^{2t} = 2ae^{2t}$. L'identification donne donc tout bêtement $a = 1$ (et on choisit $b = c = 0$), soit $y_2(t) = t^2e^{2t}$. En regroupant tout, les solutions de l'équation initiale sont les fonctions $y : t \mapsto (t^2 + Bt + A)e^{2t} + (t^2 + 4t + 7)e^t$.
2. Puisqu'on nous le demande si gentiment, posons $y(t) = z(t^2)$, ce qui donne $y'(t) = 2tz'(t^2)$, puis $y''(t) = 2z'(t^2) + 4t^2z''(t^2)$. On insère ces relations dans l'équation : $2tz'(t^2) + 4t^3z''(t^2) - 2tz'(t^2) - t^3z(t^2) = 0$, soit $t^3(4z''(t^2) - z(t^2)) = 0$. Si on se place sur l'intervalle $]0, +\infty[$, en posant $x = t^2$, on se ramène donc à l'équation $4z''(x) - z(x) = 0$. Cette équation différentielle homogène à coefficients constants est de la forme $z'' - \omega^2 z = 0$, avec $\omega = \dfrac{1}{2}$, elle a donc pour solutions les fonctions $z : x \mapsto Ae^{\frac{x}{2}} + Be^{-\frac{x}{2}}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Il ne suffit plus que de remonter le changement de variable : $y(t) = z(t^2) = Ae^{\frac{t^2}{2}} + Be^{-\frac{t^2}{2}}$. Si on s'était placés sur $]-\infty, 0[$, on aurait trouvé les mêmes solutions. On constate d'ailleurs aisément que toutes ces solutions sont prolongeables par continuité en 0 (en posant $y(0) = A + B$) et ont une dérivée nulle en $t = 0$, ce qui prouve l'existence d'une infinité de solutions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier (on garde la même valeur de $A + B$ sur $\mathbb{R}^-$ et sur $\mathbb{R}^+$, et on peut même se permettre de prendre des valeurs des constantes différentes sur les deux intervalles).
3. Faisons encore une fois ce qu'on nous demande : si $y(t) = tz(t) =$, alors $y'(t) = z(t) + tz'(t)$, puis $y''(t) = 2z'(t) + tz''(t)$. L'équation devient alors $2t^2z'(t) + t^3z''(t) - 2tz(t) - 2t^2z'(t) + 2tz(t) - t^3z(t) = 0$, soit $t^3(z''(t)2z(t)) = 0$. On peut simplifier joyeusement par t^3 puisqu'on s'est placés sur $]0, +\infty[$, et on trouve comme solutions les fonctions $z : t \mapsto Ae^t + Be^{-t}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Il n'y a plus qu'à conclure : $y(t) = Ate^t + Bte^{-t}$.
4. Posons donc $z = bi$, alors $z^3 + (2+2i)z^2 + (3i-2)z + 5 + 5i = -b^3i - 2b^2 - 2ib^2 - 3b - 2bi + 5 + 5i = 0$. Ce nombre complexe est nul si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles, ce qui donne les conditions $2b^2 + 3b - 5 = 0$, et $b^3 + 2b^2 + 2b - 5 = 0$. La valeur $b = 1$ est

solution triviale des deux équations, pas besoin de s'embêter plus. On peut donc factoriser le membre de gauche de notre équation sous la forme $z^3 + (2+2i)z^2 + (3i-2)z + 5 + 5i = (z-i)(az^2+bz+c) = az^3 + (b-ai)z^2 + (c-bi)z - ci$. Par identification, on a les conditions $a = 1$; puis $b - ai = 2 + 2i$, soit $b = 2 + 2i + i = 2 + 3i$; et enfin $c - bi = 3i - 2$, donc $c = 3i - 2 + 2i - 3 = 5i - 5$ (ce qui vérifie bien la condition donnée par le coefficient constant). Il ne reste plus qu'à résoudre l'équation du second degré $z^2 + (2+3i)z - 5 + 5i = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = (2+3i)^2 - 4(-5+5i) = 4 + 12i - 9 + 20 - 20i = 15 - 8i$. On cherche $\delta = a + ib$ tel que $\delta^2 = \Delta$, soit $(a+ib)^2 = a^2 + 2iab - b^2 = 15 - 8i$. On a donc les deux premières équations $a^2 - b^2 = 15$ et $2ab = -8$, auxquelles on ajoute la condition sur le module $|\delta|^2 = a^2 + b^2 = |\Delta| = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{225 + 64} = \sqrt{289} = 17$. En additionnant et soustrayant les deux équations extrêmes, on trouve $2a^2 = 32$, soit $a = \pm 4$, et $2b^2 = 2$, soit $b = \pm 1$. Comme a et b sont de signe contraire (deuxième équation), on peut prendre $\delta = 4 - i$. On calcule alors les deux racines restantes : $z_2 = \dfrac{-2-3i+4-i}{2} = 1 - 2i$, et $z_3 = \dfrac{-2-3i-4+i}{2} = -3 - i$. Conclusion : $\mathcal{S} = \{i, 1-2i, -3-i\}$.

Exercice 2

1. Plusieurs méthodes possibles, par exemple $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{i(1+\sqrt{5})}{2} \in i\mathbb{R}$, donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$, ce qui prouve bien que le triangle ABC est rectangle en A.
2. On sait que la similitude a une équation de la forme $f(z) = az + b$. Comme $f(B) = A$, on a la première équation $-1-i = a(1-i)+b$, et $f(A) = C$ implique de même $-1+i\sqrt{5} = a(-1-i)+b$. En soustrayant ces deux équations, on trouve $i(\sqrt{5}+1) = -2a$, soit $a = -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}i$. On en déduit alors $b = -1 - i + (i-1)a = -1 - i + \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}i = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}i$. Conclusion : $f(z) = -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}iz + \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}(1+i)$.
3. Le rapport de la similitude est obtenu en calculant $\left|-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}i\right| = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Le coefficient devant z étant imaginaire pur et « négatif », l'angle de la similitude vaut $-\dfrac{\pi}{2}$.
4. (a) A étant l'image de B par une similitude de centre Ω et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$, le triangle $AB\Omega$ est rectangle en Ω. Cela suffit à assurer que Ω appartient au cercle de diamètre $[AB]$.

   (b) On peut se contenter de signaler que $A\Omega B$ et $A\Omega C$ sont deux triangles rectangles en Ω pour en déduire que B, C et Ω sont alignés. Calculons quand même l'affixe du point Ω, qui correspond au point fixe de l'application f : si $f(z) = z$, alors $z\left(1 + \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}i\right) = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}(1+i)$, soit $z = \dfrac{(\sqrt{5}-1)(1+i)}{2+(1+\sqrt{5})i} = \dfrac{(\sqrt{5}-1)(1+i)(2-(1+\sqrt{5})i)}{4+(1+\sqrt{5})^2} = \dfrac{2\sqrt{5}-2+2i\sqrt{5}-2i-4i+4}{10+2\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}+1+i(\sqrt{5}-3)}{5+\sqrt{5}} = \dfrac{(\sqrt{5}+1)(5-\sqrt{5})}{25-5} + \dfrac{(\sqrt{5}-3)(5-\sqrt{5})}{25-5}i = \dfrac{1}{\sqrt{5}} + \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}} - 1\right)i = z_\Omega$.
   On peut ensuite calculer $\det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{B\Omega}) = \mathrm{Im}((\overline{z_C - z_B}) \times (z_\Omega - z_B))$
   $= \mathrm{Im}\left((-2-i(\sqrt{5}+1))\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}} - 1 + \dfrac{2}{\sqrt{5}}i\right)\right) = -\dfrac{4}{\sqrt{5}} - 1 + \sqrt{5} - \dfrac{1}{\sqrt{5}} + 1 = 0$, ce qui prouve la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{B\Omega}$, et donc l'alignement des trois points.
5. (a) On peut appliquer exactement le même raisonnement qu'à la question précédente. Calculons tout de même l'affixe du point D à l'aide de l'expression de f obtenue à la question

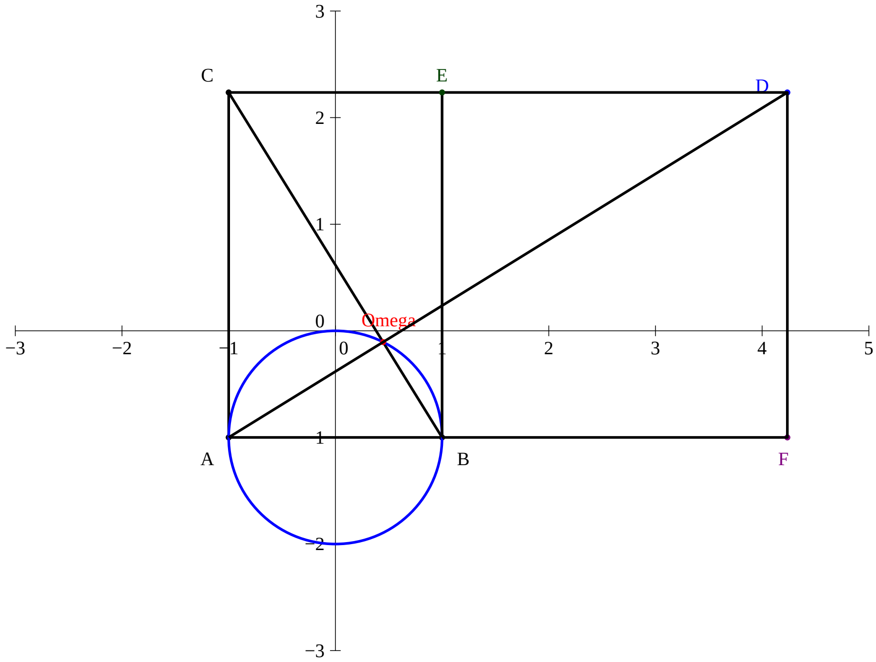
$2 : f(-1+i\sqrt{5}) = -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\left(-\sqrt{5}-i\right) + \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}(1+i) = \dfrac{\sqrt{5}}{2} + \dfrac{5}{2} + \dfrac{1}{2}i + \dfrac{\sqrt{5}}{2}i + \dfrac{\sqrt{5}}{2} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}i - \dfrac{1}{2}i = \sqrt{5}+2+\sqrt{5}i = z_D$. On peut alors calculer $z_D - z_A = \sqrt{5}+3+(1+\sqrt{5})i$, et $z_\Omega - z_A = \dfrac{1}{\sqrt{5}} + 1 + \dfrac{2}{\sqrt{5}}i$, puis $\mathrm{Im}((\overline{z_D - z_A})(z_\Omega - z_A)) = (\sqrt{5}+3) \times \dfrac{2}{\sqrt{5}} - (1+\sqrt{5})\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) = 2 + \dfrac{6}{\sqrt{5}} - 1 - \dfrac{1}{\sqrt{5}} - \sqrt{5} - 1 = 0$, ce qui prouve l'alignement des points A, D et Ω.

(b) Pas vraiment besoin de calcul, z_A et z_B d'une part, z_C et z_D d'autre part ont la même partie imaginaire, ce qui prouve que les deux droites (AB) et (CD) sont parallèles à l'axe réel, et donc parallèles entre elles. De plus, $z_D - z_C = \sqrt{5}+3$, ce qui donne la valeur de la distance CD.

6. (a) Pas vraiment de calcul encore une fois, ce projeté a simplement la même abscisse que le point B et la même ordonnée que le point C (ou que le point D), donc $z_E = 1 + i\sqrt{5}$.

(b) On n'en a pas vraiment besoin mais calculons l'affixe du point F : $f(1+i\sqrt{5}) = -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}(i-\sqrt{5}) + \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}(1+i) = -\dfrac{1}{2}i - \dfrac{\sqrt{5}}{2}i + \dfrac{\sqrt{5}}{2} + \dfrac{5}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}i - \dfrac{1}{2}i = 2 + \sqrt{5} - i = z_F$. Le point F ayant la même abscisse que D et la même ordonnée que B, le quadrilatère $BEDF$ est un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes. De plus, $BE = ED = 1 + \sqrt{5}$, ce qui prouve que le quadrilatère est en fait un carré.

7. Voila, ça manque un peu de couleurs mais c'est assez complet :

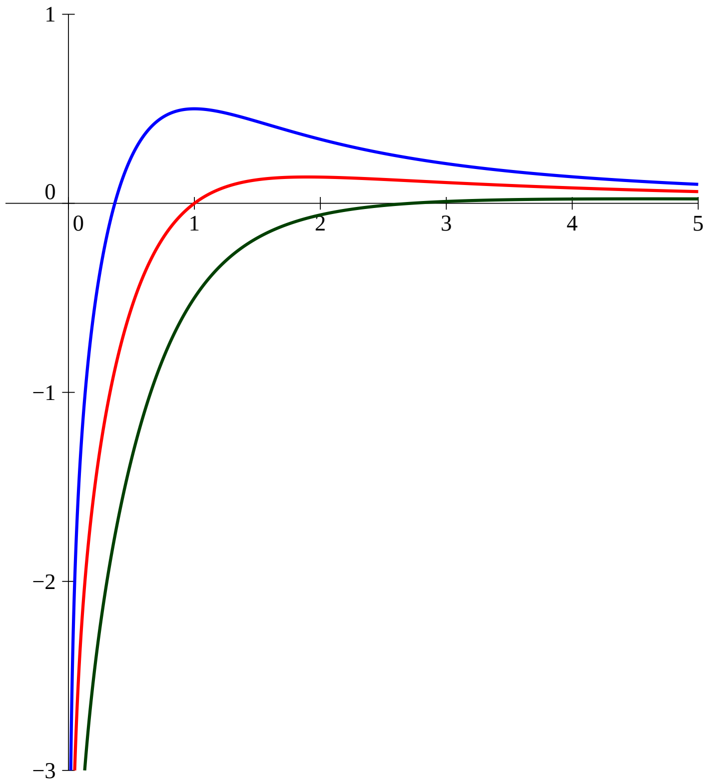


Exercice 3

1. Dans la mesure où $1+x^2$ ne s'annule jamais, la normalisation ne pose aucun problème, et seule la valeur $x=0$ est interdite par le second membre de l'équation. On peut donc résoudre sur $]-\infty,0[$ ou sur $]0,+\infty[$.
2. On normalise pour obtenir $y' + \dfrac{2x}{1+x^2}y = \dfrac{1}{x(1+x^2)}$. L'équation homogène associée a pour solutions toutes les fonctions $y_h : x \mapsto Ke^{-\ln(1+x^2)} = \dfrac{K}{1+x^2}$, pour $K \in \mathbb{R}$. Pour trouver une solution particulière de l'équation complète, on va utiliser la méthode de variation de la constante et poser $y_p(x) = \dfrac{K(x)}{1+x^2}$. On calcule alors $y_p'(x) = \dfrac{K'(x)(1+x^2) - 2xK(x)}{(1+x^2)^2}$, puis $y_p'(x) + \dfrac{2x}{1+x^2}y_p(x) = \dfrac{K'(x)(1+x^2) - 2xK(x) + 2xK(x)}{(1+x^2)^2} = \dfrac{K'(x)}{1+x^2}$. La fonction y_p est donc solution de l'équation si $\dfrac{K'(x)}{1+x^2} = \dfrac{1}{x(1+x^2)}$, ce qui sera par exemple le cas en posant $K(x) = \ln(x)$. Notre solution particulière est donc $y_p : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{1+x^2}$, et les solutions de l'équation complète sont toutes les fonctions $y : x \mapsto \dfrac{\ln(x)+K}{1+x^2}$. Ah ben tiens, ce sont exactement les fonctions f_λ, c'est dingue ça !
3. Il est normal qu'on ait une solution unique à un problème de Cauchy, vérifions-le quand même. Imposer que la courbe passe par le point $M(\alpha,\beta)$ revient à imposer la condition $\dfrac{\ln(\alpha)+\lambda}{1+\alpha^2} = \beta$, soit $\lambda = \beta(1+\alpha^2) - \ln(\alpha)$, ce qui donne bien une valeur unique de λ.
4. Calculons donc (la fonction f_λ est certainement dérivable) : $f_\lambda'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}(1+x^2) - 2x(\ln(x)+\lambda)}{(1+x^2)^2} = \dfrac{g_\lambda(x)}{x(1+x^2)^2}$, qui est en effet du signe de $g_\lambda(x)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
5. La fonction g_λ est elle-même dérivable, et $g_\lambda'(x) = 2x - 4x(\ln(x)+\lambda) - \dfrac{2x^2}{x} = -4x(\ln(x)+\lambda)$. Cette dérivée s'annule toujours une unique fois sur $\mathbb{R}^{+*}$, pour $x = e^{-\lambda}$. La fonction g est croissante sur $]0, e^{-\lambda}]$ et décroissante ensuite. On peut calculer $g(e^{-\lambda}) = 1 + e^{-2\lambda}$ (le reste s'annule. Ce maximum est évidemment strictement positif. De plus, $\lim\limits_{x\to 0^+} g_\lambda(x) = 1$ (le terme en $x^2\ln(x)$ tend vers 0 par croissance comparée), et comme $g_\lambda(x) = 1 + x^2(1+\lambda-2\ln(x))$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} g_\lambda(x) = -\infty$. La fonction g_λ et donc bijective de $]0, e^{-\lambda}]$ sur $[1, 1+e^{-2\lambda}]$ (elle est toujours positive sur cet intervalle), puis bijective de $[e^{-\lambda}, +\infty[$ vers $]-\infty, 1+e^{-2\lambda}]$, intervalle sur lequel elle va donc s'annuler une unique fois, étant positive avant cette valeur d'annulation m_λ, et négative après.
6. D'après la question précédente, f_λ est croissante sur $]0, m_\lambda]$ et décroissante ensuite. De plus, $\lim\limits_{x\to 0} f_\lambda(x) = -\infty$ (aucune forme indéterminée de ce côté), et $f_\lambda(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2} \times \dfrac{1+\frac{\lambda}{\ln(x)}}{1+\frac{1}{x^2}}$, qui a une limite nulle en $+\infty$ par croissance comparée (le deuxième quotient tendant vers 1). Enfin, $f_\lambda(m_\lambda) = \dfrac{\ln(m_\lambda)+\lambda}{1+m_\lambda^2}$, et, par définition, on a $g_\lambda(m_\lambda) = 0$, soit $1+m_\lambda^2 = 2m_\lambda^2(\ln(m_\lambda)+\lambda)$. On peut donc remplacer le numérateur dans $f_\lambda(m_\lambda)$ par $\dfrac{1+m\lambda^2}{2m_\lambda^2}$, ce qui donne bien $f_\lambda(m_\lambda) = \dfrac{1}{2m_\lambda^2}$. On peut résumer tout cela dans le tableau suivant :

x	0		m_λ		$+\infty$
f_λ	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2m_\lambda^2}$	$\searrow$	0

7. Si on prend deux constantes λ et μ distinctes, $f_\lambda(x) - f_\mu(x) = \dfrac{\lambda - \mu}{1 + x^2}$, qui est toujours du signe de $\lambda - \mu$. Autrement dit, la courbe $\mathcal{C}_\lambda$ est toujours au-dessus de la courbe $\mathcal{C}_\mu$ quand $\lambda > \mu$. On dipose d'assez peu d'informations pour tracer les courbes, signalons simplement que f_λ s'annule pour $x = e^{-\lambda}$, que $f_\lambda(1) = \dfrac{\lambda}{2}$, et que $\mu_\lambda \geq e^{-\lambda}$. On obtient des courbes qui devraient ressembler à ce qui suit ($\mathcal{C}_0$ en rouge, $\mathcal{C}_1$ en bleu et $\mathcal{C}_{-1}$ en vert) :



Exercice 4

1. L'application g est manifestement définie sur $\mathbb{C}\backslash\{-2\}$.
2. Calculons : $g(2+2i) = \dfrac{2}{4+2i} = \dfrac{2(4-2i)}{16+4} = \dfrac{4-2i}{10} = \dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{5}i$. Ensuite, $g(1+3i) = \dfrac{1+i}{3+3i} = \dfrac{1}{3}$. Bon, ben la forme exponentielle est donc $\dfrac{1}{3} \times e^{0i}$, ce qui n'est guère palpitant. Enfin, $g(2e^{i\frac{\pi}{3}}) = \dfrac{2e^{i\frac{\pi}{3}} - 2i}{2e^{i\frac{\pi}{3}} + 2} = \dfrac{e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\frac{\pi}{3}} + 1}$. Une occasion rêvée d'appliquer des factorisations par l'angle moitié : $f(2e^{i\frac{\pi}{3}}) = \dfrac{e^{i\frac{5\pi}{12}}(e^{-i\frac{\pi}{12}} - e^{i\frac{\pi}{12}})}{e^{i\frac{\pi}{6}}(e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{-i\frac{\pi}{6}})} = e^{i\frac{\pi}{4}} \times \dfrac{-2i\sin(\frac{\pi}{12})}{2\cos(\frac{\pi}{6})} = \dfrac{2\sin(\frac{\pi}{12})}{\sqrt{3}}e^{-i\frac{\pi}{4}}$, ce qui constitue une forme exponentielle.
3. L'équation $g(z) = 0$ a clairement pour unique solution $z = 2i$, qui est donc le seul antécédent de 0. L'équation $g(z) = i$ peut s'écrire $z - 2i = iz + 2i$, soit $z(1-i) = 4i$ et donc $z = \dfrac{4i}{1-i} =$

$\dfrac{4i(1+i)}{2} = -2+2i$. Là encore, on a un unique antécédent.

4. Il suffit de constater que, plus généralement, l'équation $g(z) = Z$ se ramène à $z-2i = zZ+2Z$, soit $z(1-Z) = 2Z+2i$, et cette dernière équation a une unique solution sauf si $Z = 1$. L'application g est donc bijective de $\mathbb{C}\backslash\{-2\}$ vers $\mathbb{C}\backslash\{1\}$. Accessoirement, sa réciproque est donnée par l'équation $g^{-1}(z) = \dfrac{2z+2i}{1-z}$.

5. Encore une fois, on passe le dénominateur à droite : $z-2i = \dfrac{1}{2}z^2+z$, soit $z^2 = -4i$. Pas besoin de calcul de discriminant ici, on peut écrire $-4i = 4e^{-i\frac{\pi}{2}}$, et en déduire que $z = 2e^{-i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}-\sqrt{2}i$, ou $z = -2e^{i\frac{\pi}{4}} = -\sqrt{2}+\sqrt{2}i$. La deuxième équation devient $z-2i = z^2+2z$, soit $z^2+z+2i = 0$. Le discriminant de cette équation du second degré vaut $\Delta = 1-8i$. On cherche $\delta = a+ib$ tel que $\delta^2 = \Delta$, soit $(a+ib)^2 = a^2+2iab-b^2 = 1-8i$. On obtient les deux premières conditions $a^2-b^2 = 1$ et $2ab = -i$, auxquelles on peut rajouter une troisième équation obtenue via l'égalité des modules : $|\delta|^2 = a^2+b^2 = |\Delta| = \sqrt{65}$. En additionnant et en soustrayant les équations extrêmes, on trouve $2a^2 = 1+\sqrt{65}$ et $2b^2 = \sqrt{65}-1$. Comme a et b sont de signe opposé puisque $2ab = -8$, on peut par exemple choisir $\delta = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{65}}{2}} - i\sqrt{\dfrac{\sqrt{65}-1}{2}}$. On trouve alors deux solution à l'équation : $z_1 = \dfrac{-1+\delta}{2}$ et $z_2 = \dfrac{-1-\delta}{2}$, que nous n'avons pas le moindre intérêt à tenter de détailler plus.

6. Le plus simple est de calculer sous forme algébrique en posant $z = a+ib$. On a alors $g(z) = \dfrac{a+i(b-2)}{a+2+ib} = \dfrac{(a+i(b-2))(a+2-ib)}{(a+2)^2+b^2}$. Ce nombre est réel si et seulement si la partie imaginaire de son numérateur est nulle, soit $(a+2)(b-2)-ab = 0$, donc $2b-2a-4 = 0$, ce qu'on peut encore écrire $b = a+2$. Autrement dit, l'image du nombre z dans le plan complexe doit appartenir à la droite d'équation $y = x+2$.

6bis. La condition $g(z) \in \mathbb{U}$ peut s'écrire $|g(z)| = 1$, c'est-à-dire $|z-2i| = |z+2|$. Soit on sort alors une interprétation géométrique en termes de médiatrice (on est à égale distance des points d'affixe $2i$ et -2), soit on bourrine en posant $z = a+ib$ et en élevant les modules au carré : $a^2+(b-2)^2 = (a+2)^2+b^2$ donne $a^2+b^2-4b+4 = a^2+4a+4+b^2$, soit $4a+4b = 0$, et donc $b = -a$. L'ensemble recherché est simplement la droite d'équation $y = -x$ dans le plan complexe.

7. (a) C'est exactement le même calcul que pour la dernière image de la question 2 : $g(2e^{i\theta}) = \dfrac{e^{i\theta}-e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\theta}+1} = \dfrac{e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}(e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})}-e^{i(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})})}{e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}})} = e^{i\frac{\pi}{4}} \times \dfrac{2i\sin(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})}{2\cos(\frac{\theta}{2})} = e^{i\frac{3\pi}{4}} \times \dfrac{\sin(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})}{\cos(\frac{\theta}{2})}$.

   (b) Quelle que soit la valeur de θ, le nombre obtenu à la question précédente est toujours un multiple réel de $e^{i\frac{3\pi}{4}}$, donc un multiple réel de $-1+i$. Cela revient à dire qu'il appartient toujours à la droite d'équation $y = -x$.