AP : Séance n°4

PTSI B Lycée Eiffel

19 novembre 2015

Exercice 1

Résoudre les équations suivantes :

1. $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{e^{2t}}{t^2}$ (on posera $y(t) = z(t)e^{2t}$).
2. $y'' - 2y' + 2y = \cos^2(t)$.

Exercice 2

On considère dans tout cet exercice l'équation différentielle $(E) : xy' - y + x = 0$.

1. Étudier la fonction $f : x \mapsto -x\ln(x)$ sur $]0, +\infty[$, en essayant de la prolonger par continuité en 0 et de déterminer si la fonction ainsi prolongée est dérivable en 0. On tracera naturellement une allure soignée de la courbe pour conclure cette étude.
2. Résoudre l'équation (E) successivement sur les deux intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Existe-t-il des solutions à l'équation définies sur $\mathbb{R}$ tout entier ?
3. On se concentre désormais aux solutions définies sur $\mathbb{R}^{+*}$. Soit $x_0 > 0$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, déterminer l'expression de l'unique solution de (E) vérifiant $f(x_0) = y_0$. Donner une équation de sa tangente au point de la courbe d'abscisse x_0, et prouver que toutes les tangentes obtenues sont concourantes lorsque y_0 parcourt $\mathbb{R}$ (x_0 restant fixé).
4. Vérifier que les courbes des solutions de (E) admettent toutes un maximum sur $\mathbb{R}^{+*}$, et déterminer le lieu des points correspondants.
5. Tracer dans un même repère l'allure de quelques solutions définies sur $\mathbb{R}^{+*}$, en faisant apparaitre distinctement leur tangentes au point d'abscisse $x_0 = 1$, ainsi que le lieu des maxima déterminé à la question précédente.

Exercice 3

On considère dans cet exercice l'équation différentielle $x^2y'' - xy' + y = x^3$.

1. Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation du premier ordre $xz' - z = x^3$.
2. Soit y une fonction deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$ solution de l'équation initiale. On pose $z = xy' - y$, montrer que z est solution de l'équation résolue à la question précédente.
3. En déduire toutes les solutions de l'équation initiale sur $]0; +\infty[$.
4. Que se passe-t-il si on essaye de résoudre sur $] - \infty, 0[$? Existe-t-il des solutions à l'équation définies sur $\mathbb{R}$ tout entier ?