

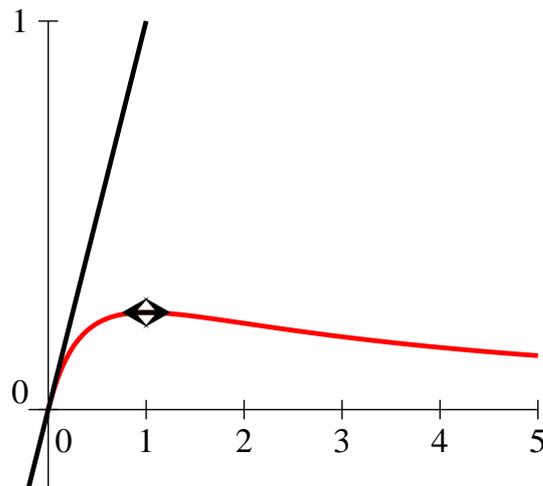
# Concours Blanc : épreuve de mathématiques

PTSI A et B Lycée Eiffel

27 mai 2015

## Exercice 1

1. (a) La fonction  $f$  est dérivable comme quotient de fonctions usuelles, et  $f'(x) = \frac{(x+1)^2 - 2x(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{x+1-2x}{(x+1)^3} = \frac{1-x}{(x+1)^3}$ . L'étude du signe ne pose bien sûr aucun problème : le dénominateur est positif sur notre intervalle d'étude, et le numérateur change de signe pour  $x = 1$ . La dérivée  $f'$  est donc positive sur  $[0, 1]$  et négative sur  $[1, +\infty[$ .
- (b) On peut par exemple écrire  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2x + 1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{x^2} \sim \frac{1}{x}$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .
- (c) On sait que  $\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + o(x)$ , donc  $\frac{1}{(1+x)^2} = (1 - x + o(x))^2 = 1 - 2x + o(x)$ , puis  $f(x) = x - 2x^2 + o(x^2)$  (inutile de pousser le premier développement limité plus loin que l'ordre 1 puisqu'on va multiplier par  $x$  ensuite).
- (d) Puisque la fonction  $f$  admet un développement limité à l'ordre 1 en 0, une équation de sa tangente est obtenue en prenant la partie de ce développement limité, soit  $y = x$ . De plus,  $f(x) - x = -2x^2 + o(x^2) \sim -2x^2 \leq 0$ , ce qui permet d'affirmer que  $f(x) - x \leq 0$  sur un voisinage de 0. Autrement dit, la courbe de  $f$  est en-dessous de sa tangente au voisinage de 0.
- (e) Le seul calcul supplémentaire nécessaire est celui de  $f(1) = \frac{1}{4}$ . On obtient l'allure de courbe suivante :



2. (a) On a déjà calculé plus haut  $u_1 = f(1) = \frac{1}{4}$ . Reste  $u_2 = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\frac{1}{4}}{\left(\frac{5}{4}\right)^2} = \frac{4}{25}$ .

- (b) On peut bien sûr procéder par récurrence. Notons  $P_n$  la propriété :  $0 < u_n \leq \frac{1}{n}$ . La propriété  $P_1$  est manifestement vraie. Supposons désormais  $0 < u_n \leq \frac{1}{n}$ . La fonction  $f$  étant croissante sur l'intervalle  $[0, 1]$ , et donc sur  $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ , on en déduit que  $f(0) < f(u_n) \leq f\left(\frac{1}{n}\right)$ . Or  $f(0) = 0$ , et  $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^2} = \frac{n}{(n+1)^2} < \frac{n+1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n+1}$ . La propriété  $P_{n+1}$  est donc vérifiée, ce qui prouve que  $P_n$  est vrai pour tout entier  $n$ .
- (c) Il suffit d'appliquer le théorème des gendarmes à l'encadrement précédent pour conclure que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .
3. (a) Exprimons :  $v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{(1+u_n)^2}{u_n} - \frac{1}{u_n} = \frac{1+2u_n+u_n^2-1}{u_n} = 2+u_n$ . L'encadrement demandé est alors une conséquence triviale de celui de la question 2.b.
- (b) Effectuons donc une récurrence comme on nous le demande : au rang 2,  $2 \times (2+1) = 6$ , et  $2 \times 3 + \sum_{k=1}^1 \frac{1}{k} = 6+1 = 7$ . Or, on a calculé  $u_2 = \frac{4}{25}$ , soit  $\frac{1}{u_2} = \frac{25}{4}$ , qui est bien compris entre 6 et 7. Supposons désormais l'encadrement vrai au rang  $n$ , on peut alors écrire  $\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + v_n$ , avec  $2(n+1) \leq \frac{1}{u_n} \leq 2(n+1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$  (hypothèse de récurrence), et  $2 \leq v_n \leq 2 + \frac{1}{n}$ . En additionnant ces deux encadrements, on trouve exactement  $2(n+2) \leq \frac{1}{u_{n+1}} \leq 2(n+1) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ , ce qui prouve exactement l'hérédité de notre propriété. Par principe de récurrence, celle-ci est vraie pour tout entier  $n \geq 2$ .
- (c) Quel que soit le réel  $t$  appartenant à l'intervalle  $[k-1, k]$ , on a  $\frac{1}{k} \leq \frac{1}{t}$ . On peut intégrer cette inégalité entre  $k-1$  et  $k$  pour obtenir  $\int_{k-1}^k \frac{1}{k} dt \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t} dt$ , soit  $\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t} dt$  (relation valable pour tout entier  $k \geq 1$ ). On peut ensuite additionner ces inégalités pour toutes les valeurs de  $k$  comprises entre 2 et  $n$  :  $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{t} dt = \int_1^n \frac{1}{t} dt$  (relation de Chasles). Cette dernière intégrale valant  $[\ln(t)]_1^n = \ln(n)$ , on en déduit que  $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \ln(n)$ , puis  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$  en ajoutant le premier terme (on ne peut évidemment pas majorer la somme directement à partir de  $k=1$ ).
4. En reprenant l'encadrement de la question 2.b et le résultat précédent, on peut écrire  $2n+2 \leq \frac{1}{u_n} \leq 2n+3+\ln(n)$ , soit  $2n+o(n) \leq \frac{1}{u_n} \leq 2n+o(n)$ . On en déduit que  $\frac{1}{u_n} \sim 2n$  (pour rédiger vraiment rigoureusement, le mieux est quand même de diviser tout l'encadrement par  $2n$  et d'appliquer la théorème des gendarmes pour justifier que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2nu_n} = 1$ ). On peut passer cet équivalent à l'inverse pour trouver  $u_n \sim \frac{1}{2n}$ .

## Exercice 2

1. Pour déterminer cette matrice, on peut calculer les images par  $f$  des quatre matrices de la base canonique de  $E$ . Pour gagner du temps, calculons directement  $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) =$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$ . On en déduit que  $f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;  $f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ;  $f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ; et  $f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . La matrice de  $f$  dans la base canonique est donc  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

- Les calculs de la question précédente permettent de vérifier immédiatement que  $f \circ f = \text{id}$  (alternativement, on peut constater que  $A^2 = I_4$ ). L'application  $f$  est donc une symétrie, c'est un automorphisme et sa réciproque est  $f$  elle-même.
- Le plus simple est encore de revenir à la définition de  $f$  :  $f(M) \times f(N) = JMJJNJ = JMJ^2NJ$ . Or,  $J^2 = I$  (calcul immédiat), donc  $f(M)f(N) = JMNJ = f(MN)$ .
- Les éléments de  $F$  sont les matrices  $M$  vérifiant  $f(M) = M$ . En reprenant l'expression générale de  $f$  calculée à la première question, cela impose les conditions suivantes sur les coefficients de la matrice :  $a = d$  et  $b = c$ . Autrement dit,  $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ . En particulier, la famille  $\left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$  forme une base de  $F$  (il est évident que cette famille est libre). De même,  $G$  est constitué des matrices vérifiant  $f(M) = -M$ , ce qui impose cette fois-ci  $a = -d$  et  $c = -b$ , soit  $G = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ . Là encore, la famille  $\left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$  est une base de  $G$ .
- On souhaite donc écrire  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z & t \\ -t & -z \end{pmatrix}$ . L'identification des coefficients conduit au système  $\begin{cases} x + z = a \\ y + t = b \\ y - t = c \\ x - z = d \end{cases}$ . Les équations extrêmes donnent  $x = \frac{a+d}{2}$  (en les additionnant) et  $z = \frac{a-d}{2}$  (en les soustrayant); de même  $y = \frac{b+c}{2}$  et  $t = \frac{b-c}{2}$ . La solution étant unique, la décomposition de  $M$  l'est également, et on a donc  $M_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a+d & b+c \\ b+c & a+d \end{pmatrix}$  et  $M_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a-d & b-c \\ c-b & d-a \end{pmatrix}$ . Pour la matrice  $M$  donnée dans l'énoncé,  $M_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$  et  $M_2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -1 \\ 1 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$ .
- Surtout pas de calcul avec les coefficients des matrices, c'est inutile! Si  $A$  et  $B$  appartiennent à  $F$ , alors  $f(A) = A$  et  $f(B) = B$ . En appliquant la relation démontrée à la question 3,  $f(AB) = f(A)f(B) = AB$ , donc  $AB \in F$ . De même, si  $A$  et  $B$ , appartiennent à  $G$ ,  $f(A) = -A$  et  $f(B) = -B$ , donc  $f(AB) = (-A) \times (-B) = AB$ . Autrement dit  $AB \in F$ .
- Autant exploiter les résultats précédents :  $MN = (M_1 + N_1)(M_2 + N_2) = M_1N_1 + M_1N_2 + M_2N_1 + M_2N_2$ . La question précédente assure que  $M_1N_1$  (produit de matrices de  $F$ ) et  $M_2N_2$  (produits de matrices de  $G$ ) appartiennent à  $F$ , donc  $M_1N_1 + M_2N_2 \in F$  (c'est un sous-espace vectoriel). Or, on peut démontrer tout aussi facilement que le produit d'une matrice de  $F$  par une matrice de  $G$  appartient à  $G$  : si  $f(A) = A$  et  $f(B) = -B$ , alors  $f(AB) = A \times (-B) = -AB$  (et de même dans l'autre sens). On en déduit alors que  $M_1N_2 + M_2N_1 \in G$ . La décomposition étant unique, on conclut :  $(MN)_1 = M_1N_1 + M_2N_2$ , et  $(MN)_2 = M_1N_2 + M_2N_1$ .

## Exercice 3

### A. Propriétés générales de la fonction $f$ .

1. La fonction  $\arctan$  étant définie sur  $\mathbb{R}$  tout entier, le deuxième morceau de la formule définissant  $f$  est défini sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$  (valeurs annulant le dénominateur à l'intérieur de l'arctangente). Pour le premier morceau, ce qui est dans la parenthèse est toujours définie, mais il faut vérifier que  $\frac{2x}{1+x^2} \in [-1, 1]$  pour pouvoir lui appliquer la fonction arcsinus. Une façon rapide de faire : pour tout réel  $x$ ,  $(1+x)^2 \geq 0$ , donc  $1+x^2 \geq -2x$ . De même,  $(1-x)^2 \geq 0$  implique  $1+x^2 \geq 2x$ . On en déduit qu'on a toujours  $|2x| \leq 1+x^2$ , donc  $\left| \frac{2x}{1+x^2} \right| \leq 1$ , ce qui démontre l'encadrement souhaité.
2. Les deux expressions  $x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$  et  $x \mapsto \frac{2x}{1-x^2}$  sont impaires. Quand on les compose par les fonctions impaires  $\arcsin$  et  $\arctan$ , on obtient des fonctions impaires. La fonction  $f$  est donc elle-même impaire, on se contentera de l'étudier sur  $[0, 1[ \cup ]1, +\infty[$ .
3. Facile :  $f(0) = \arcsin(0) + \arctan(0) = 0$  (on pouvait aussi utiliser le fait que  $f$  est impaire).  
Moins facile :  $f(\sqrt{3}) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \arctan(-\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ .
4. Comme  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x}{1+x^2} = 1$ , on a  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \frac{\pi}{2}$ . De plus,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x}{1-x^2} = +\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) = \frac{\pi}{2}$ ; et  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x}{1-x^2} = -\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) = -\frac{\pi}{2}$ . Finalement,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$ , et  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \pi$ . Aucun problème pour la limite en  $+\infty$  : les deux parenthèses tendent vers 0, donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

### B. Variations et courbe de $f$ .

1. La dérivabilité du second morceau (avec l'arctangente) est évident, c'est une composée de fonctions dérivables sur le domaine de définition de  $f$ . Par contre, il faut faire attention avec l'arcsinus qui n'est pas dérivable en 1 et en  $-1$  : les seules valeurs de  $x$  pour lesquelles  $\frac{2x}{1+x^2} = \pm 1$  sont  $x = 1$  et  $x = -1$  (c'est une conséquence du calcul effectué à la question A.1, il s'agit des valeurs annulant  $(1+x)^2$  et  $(1-x)^2$ ). Comme ces valeurs ont déjà été supprimées du domaine de définition de  $f$ , la fonction est bien dérivable sur tout ce domaine.

$$\text{Posons } g(x) = \frac{2x}{1+x^2} \text{ et } h(x) = \frac{2x}{1-x^2}, \text{ on calcule d'abord } g'(x) = \frac{2(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}, \text{ et } h'(x) = \frac{2(1-x^2) + 4x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{2+2x^2}{(1-x^2)^2}. \text{ Ensuite, on compose : } (\arcsin \circ g)'(x) = g'(x) \times \frac{1}{\sqrt{1-g(x)^2}} = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} \times \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} \times \frac{1+x^2}{\sqrt{(1+x^2)^2-4x^2}} = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)\sqrt{(1-x^2)^2}}.$$

$$\text{Sur } [0, 1[, 1-x^2 > 0, \text{ donc } (\arcsin \circ g)'(x) = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)(1-x^2)} = \frac{2}{1+x^2}. \text{ Sur } ]1, +\infty[, 1-x^2 < 0,$$

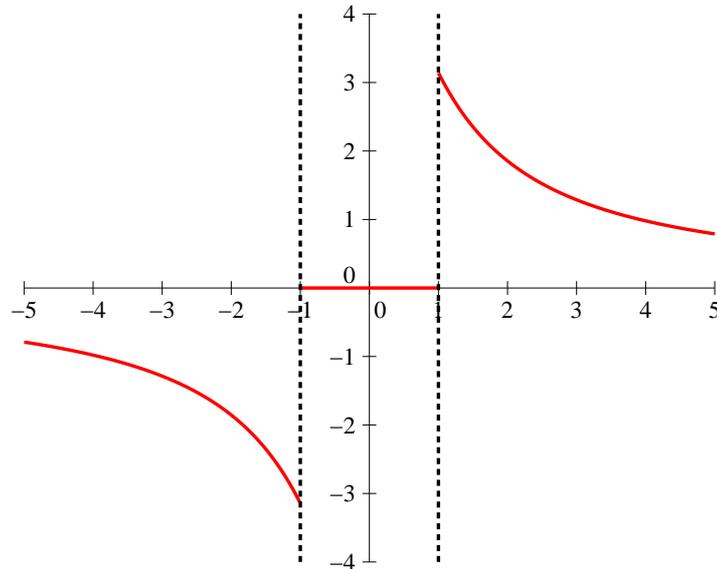
$$\text{et } (\arcsin \circ g)'(x) = -\frac{2}{1+x^2}. \text{ De l'autre côté, } (\arctan \circ h)'(x) = \frac{h'(x)}{1+h(x)^2} = \frac{2+2x^2}{(1-x^2)^2} \times \frac{1}{1+\frac{4x^2}{(1-x^2)^2}} = \frac{2+2x^2}{(1-x^2)^2+4x^2} = \frac{2+2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{1+x^2}. \text{ On obtient bien } f'(x) = 0 \text{ sur } [0, 1[, \text{ et}$$

$$f'(x) = -\frac{4}{1+x^2} \text{ sur } ]1, +\infty[.$$

2. La fonction  $f$  est constante sur  $[0, 1[$  et  $f(0) = 0$ , donc  $f(x) = 0$  quel que soit  $x \in [0, 1[$ . Sur  $]1, +\infty[$ , la formule obtenue pour la dérivée permet d'affirmer que  $f(x) = -4\arctan(x) + k$

pour une certaine constante  $k$ . On peut par exemple utiliser la limite en  $1^+$  pour déterminer la constante  $k$  :  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -4 \times \frac{\pi}{4} + k = k - \pi$ . Or, on a vu par ailleurs que cette limite était égale à  $\pi$ , donc  $k = 2\pi$  et  $f(x) = 2\pi - 4 \arctan(x)$  sur  $]1, +\infty[$ .

3. On dispose de toutes les informations nécessaires pour tracer la courbe. Les plus courageux iront jusqu'à constater que la fonction prolongée par continuité à droite en 1 y admet une tangente verticale (on utilise par ailleurs la symétrie par rapport à l'origine du repère pour compléter la courbe) :



### C. Des équations différentielles.

- Sur l'intervalle  $[0, 1[$ , l'équation se résume à  $y' = 0$ , les solutions en sont les fonctions constantes. Sur l'intervalle  $]1, +\infty[$ , les solutions seront de la forme  $Ke^{-f(x)}$ , donc  $y(x) = Ke^{4 \arctan(x)}$  (quitte à faire passer le facteur  $e^{-2\pi}$  dans la constante).
- Les plus paresseux écriront  $\frac{1}{x(x-1)} = \frac{x - (x-1)}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$ , soit  $a = -1$  et  $b = 1$ . Les autres mettront au même dénominateur et feront une identification.
  - On connaît déjà les solutions de l'équation homogène associée, donnée à la question 1. Cherchons une solution particulière à l'aide de la méthode de variation de la constante, en posant  $y_p(x) = K(x)e^{4 \arctan(x)}$ . On calcule alors  $y_p'(x) = K'(x)e^{4 \arctan(x)} + \frac{4K(x)}{1+x^2}e^{4 \arctan(x)}$ , puis  $y_p'(x) + f'(x)y_p(x) = K'(x)e^{4 \arctan(x)} + \frac{4K(x)}{1+x^2}e^{4 \arctan(x)} - \frac{4K(x)e^{4 \arctan(x)}}{1+x^2} = K'(x)e^{4 \arctan(x)}$ . La fonction  $y_p$  est donc solution de notre équation différentielle si  $K'(x)e^{4 \arctan(x)} = \frac{e^{4 \arctan(x)}}{x(x-1)}$ , soit  $K'(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$ . On prend par exemple  $K(x) = \ln(x-1) - \ln(x) = \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$ , soit  $y_p(x) = \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)e^{4 \arctan(x)}$ . Toutes les solutions de l'équation sont alors les fonction de la forme  $y(x) = \left(K + \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)\right)e^{4 \arctan(x)}$ .
- Un calcul classique :  $\operatorname{sh}^2(t) = \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{4} = \frac{e^{2t} + e^{-2t}}{4} - \frac{1}{2} = \frac{\operatorname{ch}(2t) - 1}{2}$ .
  - Puisqu'on nous le propose si gentiment, effectuons le changement de variable  $x = \operatorname{ch}(t)$ , ce qui donne  $dx = \operatorname{sh}(t) dt$ , donc  $\int \sqrt{x^2 - 1} dx = \int \operatorname{sh}(t) \sqrt{\operatorname{ch}^2(t) - 1} dt$ . Or  $\operatorname{ch}^2(t) - 1 =$

$\text{sh}^2(t)$ , et sur l'intervalle considéré,  $\text{sh}(t) > 0$ , donc  $\int \sqrt{x^2 - 1} \, dx = \int \text{sh}^2(t) \, dt = \int \frac{\text{ch}(2t) - 1}{2} \, dt = \frac{\text{sh}(2t)}{4} - \frac{t}{2}$ . Il reste tout de même un tout petit détail à régler : réussir à exprimer  $t$  en fonction de  $x$ , autrement dit, déterminer la fonction réciproque de la fonction  $\text{ch}$  (restreinte à  $[0, +\infty[$ ). En fait, ça se fait très bien :  $\text{ch}(t) = x$  revient à  $e^t + e^{-t} = 2x$ , soit  $e^{2t} - 2xe^t + 1 = 0$ . On pose  $T = e^t$  pour se ramener à l'équation du second degré  $T^2 - 2xT + 1 = 0$ , qui admet pour discriminant  $\Delta = 4x^2 - 4 = 4(x^2 - 1) > 0$  (on a supposé  $x > 1$ ), et admet pour racines  $T_1 = \frac{2x + 2\sqrt{x^2 - 1}}{2} = x + \sqrt{x^2 - 1}$ , et  $T_2 = x - \sqrt{x^2 - 1}$ . On conserve la racine positive et on obtient alors  $t = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ . Les primitives recherchées sont donc de la forme  $\frac{\text{sh}(2\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}))}{4} - \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})}{2}$  (à une constante près). Avec un peu de motivation, on peut simplifier le premier morceau :  $\text{sh}(2\ln(a)) = \text{sh}(\ln(a^2)) = \frac{e^{\ln(a^2)} - e^{-\ln(a^2)}}{2} = \frac{a^2 - \frac{1}{a^2}}{2}$ , donc le premier morceau de notre primitive devient  $\frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^2}{8} - \frac{1}{8(x + \sqrt{x^2 - 1})^2} = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^4 - 1}{8(x + \sqrt{x^2 - 1})^2} = \frac{x^4 + 4x^3\sqrt{x^2 - 1} + 6x^2(x^2 - 1) + 4x(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1} + (x^2 - 1)^2 - 1}{8(x + \sqrt{x^2 - 1})^2} = \frac{8x^4 - 4x^2 + (8x^3 - 4x)\sqrt{x^2 - 1}}{8(x + \sqrt{x^2 - 1})^2} = \frac{x\sqrt{x^2 - 1}(2x^2 - 1 + 2x\sqrt{x^2 - 1})}{2(x + \sqrt{x^2 - 1})^2} = \frac{x\sqrt{x^2 - 1}}{2}$ .

- (c) Par le même calcul de variation de la constante que plus haut, on obtient la condition  $K'(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ . On peut donc prendre pour  $K$  la fonction obtenue ci-dessus, et les solutions complètes de l'équation différentielle sont les fonctions de la forme  $y(x) = \left( K + \frac{x\sqrt{x^2 - 1}}{2} - \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})}{2} \right) e^{4\arctan(x)}$ .