

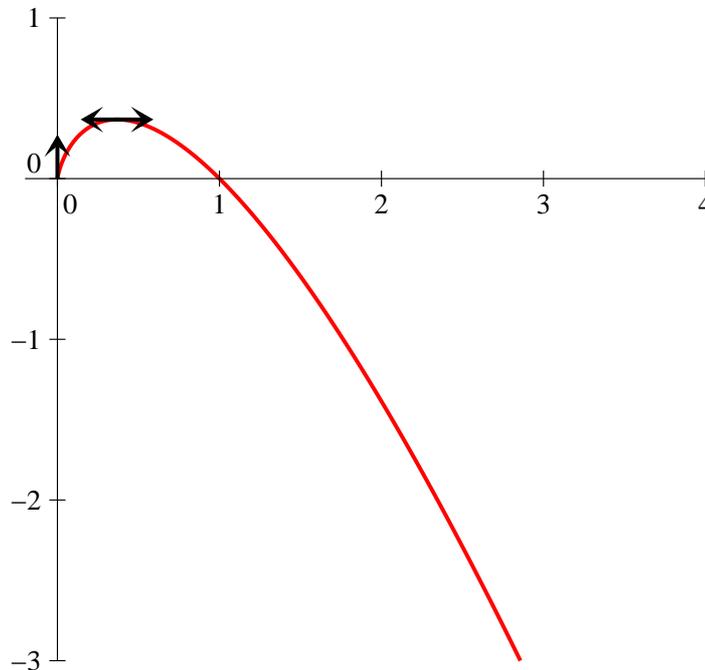
# Devoir Maison n°4 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

2 décembre 2013

## Exercice 1

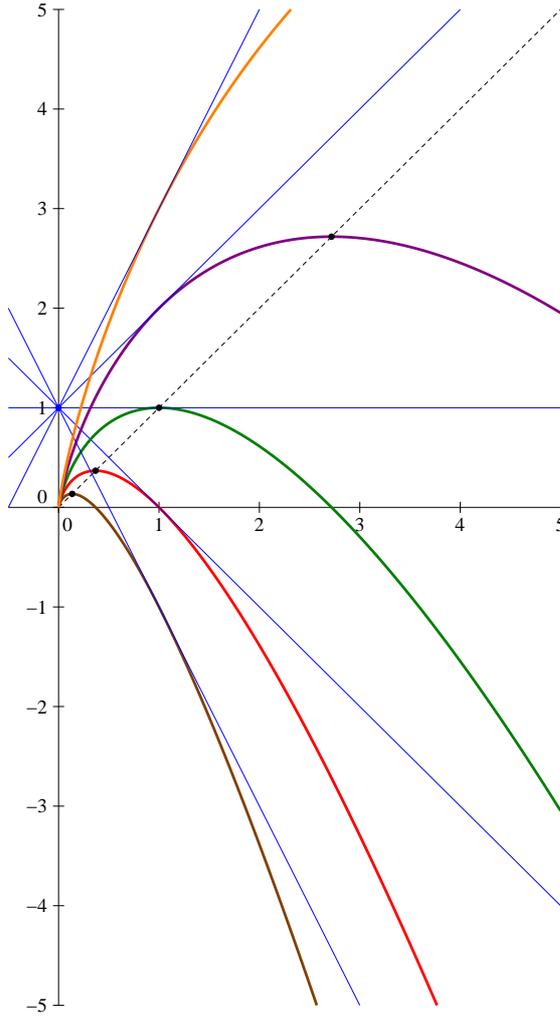
1. La fonction est naturellement définie, dérivable et tout ce qu'on veut sur  $]0, +\infty[$ . Commençons par étudier ses variations :  $f'(x) = -\ln(x) - 1$ , qui s'annule en  $e^{-1} = \frac{1}{e}$ . La fonction est croissante sur  $]0, \frac{1}{e}[$  et décroissante ensuite, et admet pour maximum  $f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e} \ln\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}$ . Les calculs de limites ne sont pas plus compliqués :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  est immédiat, et  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  par croissance comparée. On peut donc prolonger la fonction par continuité en posant  $f(0) = 0$ . Pour savoir si ce prolongement est dérivable, on peut calculer le taux d'accroissement en 0 :  $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{-x \ln(x)}{x} = -\ln(x)$ , qui a pour limite  $+\infty$  quand  $x$  tend vers 0. Le prolongement n'est donc pas dérivable en 0, on peut par contre affirmer la présence d'une tangente verticale en 0. Une allure de courbe :



2. On commence bien sûr par normaliser l'équation :  $y' - \frac{1}{x}y = -1$ . L'équation sans second membre a des solutions de la forme  $y_h(x) = Ke^{\ln(x)} = Kx$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ , et  $y_h(x) = Le^{\ln(-x)} = -Lx$  sur  $\mathbb{R}^{-*}$ . On peut deviner une solution particulière évidente ici, mais pour s'entraîner, appliquons la variation de la constante (sur les deux intervalles simultanément, inutile de faire deux calculs) en cherchant  $y_p(x) = xK(x)$ . On a alors  $y'_p(x) = K(x) + xK'(x)$ , donc  $y_p(x) - \frac{1}{x}y_p(x) =$

$K(x) + xK'(x) - K(x) = xK'(x)$ . La fonction  $y_p$  est donc solution de notre équation différentielle si  $xK(x) = -1$ , soit  $K(x) = -\ln(|x|)$ , et donc  $y_p(x) = -x \ln(|x|)$ . Finalement, les solutions sont de la forme  $y(x) = (K - \ln(x))x$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ , et  $y(x) = -(L + \ln(-x))x$  sur  $\mathbb{R}^{-*}$ . En laissant sous forme développée, et en appliquant des résultats de croissance comparée classique, on voit que toutes ces solutions ont une limite nulle en 0 (que ce soit en  $0^+$  ou en  $0^-$  selon l'intervalle sur lequel elles sont définies). Reste le problème de la dérivée : si on prend la formule obtenue sur  $\mathbb{R}^{+*}$ ,  $y'(x) = K - \ln(x) - 1$ , qui a une limite infinie en 0. Même pas la peine de chercher à étudier de l'autre côté, on ne pourra de toute façon pas obtenir de solutions dérivables sur  $\mathbb{R}$  à l'équation.

3. On sait que  $f(x) = (K - \ln(x))x$ . Pour avoir  $f(x_0) = y_0$ , on impose donc  $(K - \ln(x_0))x_0 = y_0$ , ou encore  $K = \frac{y_0}{x_0} + \ln(x_0)$ . On peut alors écrire que  $f(x) = \left(\frac{y_0}{x_0} - \ln\left(\frac{x}{x_0}\right)\right)x$ . On a déjà calculé la dérivée des solutions plus haut, on sait que  $f'(x_0) = K - \ln(x_0) - 1 = \frac{y_0}{x_0} - 1$ . La tangente correspondante a donc pour équation  $y = \left(\frac{y_0}{x_0} - 1\right)(x - x_0) + y_0 = \left(\frac{y_0}{x_0} - 1\right)x + x_0$ . Si on veut que les droites soient concourantes, il vaut trouver une valeur de  $x$  pour laquelle  $y$  ne dépend pas de  $y_0$ . Comme  $y = y_0 \times \frac{x}{x_0} + x_0 - x$ , il suffit de prendre  $x = 0$ , ce qui donne toujours  $y = x_0$ . Je vous sens venir, vous allez protester que 0 n'appartient pas à  $\mathbb{R}^{+*}$  et que ça pose problème. En fait, pas du tout ! Les tangentes à la courbe sont des droites, définies pour tout réel, et peu importe qu'elles soient concourantes à une abscisse nulle.
4. Répétons une nouvelle fois que, pour les solutions de (E),  $y'(x) = K - \ln(x) - 1$ . Cette dérivée s'annule lorsque  $x = e^{K-1}$ , et elle est négative avant cette valeur et positive après, ce qui correspond bien à un maximum. La valeur du maximum correspondant est  $y(e^{K-1}) = (K - \ln(e^{K-1}))e^{K-1} = e^{K-1}$ . Autrement dit, le maximum est toujours situé sur la droite d'équation  $y = x$ . Plus précisément, le lieu des maxima est la demi-droite ouverte issue de l'origine incluse dans cette droite, puisqu'on  $e^{K-1}$  parcourt exactement  $\mathbb{R}^{+*}$  lorsque  $K$  varie dans  $\mathbb{R}$ .
5. Résumons les données des questions précédentes dans le cas où  $x_0 = 1$  : on aura  $K = y_0$  et la tangente au point d'abscisse 1 aura pour équation  $y = (K - 1)x + 1$ . ces tangentes se coupent au point de coordonnées (0, 1). Pour  $K = 0$ , la solution est simplement la fonction  $f$  étudiée à la question 1. En général, notre solution aura un maximum en  $e^{K-1}$ , de valeur identique. Sur la figure, est tracée en pointillés la demi-droite qui est le lieu des maxima, en bleu les tangentes en 1, et les courbes en diverses couleurs pour des valeurs différentes de  $K$  : rouge pour  $K = 0$ , vert pour  $K = 1$ , violet pour  $K = 2$ , et marron pour  $K = -1$ . Les maxima ne sont exceptionnellement pas indiqués par des doubles flèches horizontales pour ne pas surcharger la figure mais seulement par des points noirs.



## Exercice 2

1. Normalisons l'équation :  $z' - \frac{1}{x}z = x^2$ . Puisqu'on est sur  $]0, +\infty[$ , les solutions de l'équation homogène sont les fonctions  $z_h : x \mapsto Ke^{\ln(x)} = Kx$ . On va utiliser la variation de la constante pour trouver une solution particulière de la forme  $z_p(x) = xK(x)$  (non, on ne cherche pas une forme particulière du genre un polynôme de degré 2 puisque l'équation n'est pas à coefficients constants). On a alors  $z'_p(x) = xK'(x) + K(x)$ , puis  $z'_p(x) - \frac{1}{x}z_p(x) = xK'(x) + K(x) - K(x) = xK'(x)$ . Pour que  $z_p$  soit solution de l'équation, on doit donc avoir  $xK'(x) = x^2$ , soit  $K'(x) = x$ , et donc  $K(x) = \frac{x^2}{2}$ . Autrement dit, on peut choisir  $z_p(x) = \frac{1}{2}x^3$ . Les solutions de l'équation complète sont alors de la forme  $z(x) = \frac{1}{2}x^3 + Kx$ .
2. Avec les hypothèses faites,  $z$  est dérivable (puisque  $xy' - y$  est dérivable,  $y$  étant supposée deux fois dérivable) et  $z' = y' + xy'' - y' = xy''$ . On en déduit que  $xz' - z = x^2y'' - xy' + y = x^3$  par hypothèse. La fonction  $z$  est donc bien solution de l'équation résolue à la question précédente.
3. En reprenant les résultats des deux questions précédentes, on a nécessairement  $xy' - y = \frac{1}{2}x^3 + Kx$ . Nous voilà devant une équation du premier ordre qu'on devrait être capables de résoudre. On commence par normaliser :  $y' - \frac{1}{x}y = \frac{1}{2}x^2 + K$ . Les solutions de l'équation homogène sont de la forme  $Lx$  (cette constante est évidemment indépendante de la constante  $K$ ), on

va chercher une solution particulière à l'aide de la variation de la constante :  $y_p(x) = xL(x)$ . le calcul est le même qu'à la première question, seul le second membre a changé, on trouve donc  $xL'(x) = \frac{1}{2}x^2 + K$ , soit  $L'(x) = \frac{1}{2}x + \frac{K}{x}$ . On peut donc choisir  $L(x) = \frac{1}{4}x^2 + K \ln(x)$ , soit  $y_p(x) = \frac{1}{4}x^3 + Kx \ln(x)$ . Finalement,  $y(x) = \frac{1}{4}x^3 + x(K \ln(x) + L)$ . Si on a peur d'avoir ajouté des solutions à un moment ou à un autre (ici ça ne devrait pas être le cas), on vérifie :  $y'(x) = \frac{3}{4}x^2 + K \ln(x) + L + K$ , puis  $y''(x) = \frac{3}{2}x + \frac{K}{x}$ , donc  $x^2y'' - xy' + y = \frac{3}{2}x^3 + Kx - \frac{3}{4}x^3 - Kx \ln(x) - Lx - Kx + \frac{1}{4}x^3 + Kx \ln(x) + Lx = x^3$ . Tout marche bien !

4. On peut utiliser exactement la même méthode, les solutions particulières des équations homogènes sont toujours de la forme  $Kx$  (ou  $Lx$ ) au signe de la constante près, et on trouve de la même façon  $z(x) = \frac{1}{2}x^3 + Kx$ , par contre à la fin on doit changer le signe à l'intérieur du  $\ln$  pour obtenir  $y(x) = \frac{1}{4}x^3 + x(K \ln(-x) + L)$ . Allez, changeons le nom des constantes pour être rigoureux :  $y(x) = \frac{1}{4}x^3 + x(A \ln(-x) + B)$ . Par croissance comparée, les fonctions solutions auront toujours une limite nulle en 0, que ce soit en  $0^+$  ou en  $0^-$ , ce qui permet au moins de les prolonger par continuité. Reprenons maintenant la formule pour  $y'$  sur  $]0, +\infty[$  :  $y'(x) = \frac{3}{4}x^2 + K \ln(x) + L + K$ . Cette fonction ne peut avoir de limite en 0 que si  $K = 0$ , et on a alors  $\lim_{x \rightarrow 0^+} y'(x) = L$ . C'est exactement la même chose en  $0^-$ , où la limite sera égale à  $B$ . Pour avoir des solutions qui se recollent, on doit donc imposer  $K = A = 0$  et  $L = B$ , soit  $y(x) = \frac{1}{4}x^3 + Lx$ .