PTSI B 2012-2013 : Un an de maths

Guillaume LAFON

4 août 2013

Table des matières

L'année la plus dure

Je vais partager un petit secret avec vous. La course à pied
fut à l'origine de ma force. Très tôt dans ma carrière,
j'ai appris à courir au-delà de la fatigue. Tant que je ne
ressentais ni lassitude ni douleur, je considérais cela comme
un simple échauffement. Il fallait que je dépasse mon seuil
de tolérance pour que l'entraînement devienne profitable.
C'est à ce moment-là que je mettais les bouchées doubles.
Chaque kilomètre supplémentaire m'apportait un surcroît d'énergie.
Ce qui fait la différence sur le ring, c'est ce dont on est
capable une fois qu'on est fatigué. C'est la même chose
dans la vie. Ne vous laissez pas arrêter par ceux qui abandonnent
quand ils se sentent mal, par ceux qui se désespèrent facilement,
par ceux que l'échec et l'injustice démoralisent, par ceux
qui perdent de vue leur objectif. Si vous voulez gagner,
votre volonté ne doit jamais fléchir, votre foi ne jamais faiblir.
Vous ne devez jamais cesser de vous battre.

Muhammad Ali

Après avoir instauré comme tradition la citation (on passera sous silence les très mauvaises blagues qui les ont accompagnées) en début de chapitre, je ne pouvais pas échapper à une dernière citation digne de ce nom pour châpeauter ce bilan. Bon, là, au moins, je pense que vous n'avez pas été volés. C'est bien, elle prend tellement de place qu'il en restera moins pour moi pour dire n'importe quoi. Mais plus sérieusement, je pense que cette citation est fort adaptée pour les préparationnaires que vous êtes (d'ailleurs, je l'ai honteusement pompée sur un blog consacré à la prépa). Je vous laisserai la méditer à loisir la prochaine fois que serez découragé par l'ampleur de la tâche qu'on demande de vous pour préparer vos concours.

Eh oui, ne l'oublions pas, votre objectif est encore devant vous, les concours ce sera l'an prochain. C'est d'ailleurs pourquoi mon titre ne s'adresse pas du tout à vous, mais bel et bien à moi (quel égoïste ce prof quand même). Oui, cette année de prépa (ok, ce n'est pas vraiment la même chose pour nous que pour vous, mais on refait quand même une année de prépa par an) aura été la plus dure. Non pas à cause de vous, même si j'ai certainement laissé beaucoup trop de liberté d'expression aux plus bavards d'entre vous pendant les cours du vendredi matin, mais en raison d'un tas de facteurs qui ont convergé, tels de vilaines suites adjacentes, pour rendre ces dix mois particulièrement fatigants pour moi. Il y a, bien sûr, les gamins à la maison qui bouffent énormément d'énergie (il faudra encore quelques années avant qu'ils ne bouffent énormément tout court quand ils feront leur poussée de croissance). J'ai d'ailleurs un bon conseil à donner à ceux d'entre vous qui envisagent de se muter en parents un jour ou l'autre (ou qui l'envisageront un peu plus tard) : allez-y, faites-vous plaisir, les gamins c'est génial, mais si vous pouvez, essayez de faire des marmottes. Des gamins qui dorment la nuit, genre dix heures de suite, qui ne font jamais de cauchemar, qui n'ont pas envie de se prendre un petit biberon à trois heures du matin parce que c'est fun, bref qui vous laissent de temps en temps faire une nuit complète d'un seul tenant. Parce qu'on a beau être un très bon dormeur, les nuits hachées, à la longue, ça use terriblement.

Autre gros facteur de fatigue évident, le fait de changer de classe. Même si je connais bien le programme de première année scientifique (celui de PTSI n'est pas foncièrement différent de celui que j'ai moi-même connu il y a 15 ans), préparer les cours, les exos etc prend un temps fou. Sauf à être capable de tout organiser pendant les vacances d'été avant la rentrée (et ça, je sais que ce ne sera jamais mon cas !), on finit forcément à un moment ou à un autre par faire des cours à l'arrache à peine préparés ou par poser un exo qu'on n'a même pas pris le temps de vérifier. Pire, j'avais cette année un gros facteur aggravant, le fait que je savais très bien que le programme allait changer ensuite et que je préparais donc plein de choses dont je ne me resservirais pas ! Je comprends maintenant un peu mieux tous ceux d'entre vous qui se demandent pourquoi on les force pendant leur prépa à faire des maths compliquées dont ils n'utiliseront pas le dizième ensuite. J'espère en tout cas que je n'aurai pas eu trop souvent d'absences au moment des démonstrations, pas trop fait d'erreurs de calculs atroces au tableau, et pas trop raconté n'importe quoi en TD de Maple.

À propos de Maple d'ailleurs, j'ai décidé de purement et simplement supprimer de ce bilan toute la partie concernant l'informatique. Je pense ne jamais trouver la motivation nécessaire pour taper des corrigés des TP dignes de ce nom, alors vous vous contenterez d'aller retrouver les énoncés sur ma page si vous y tenez. Pour la partie mathématiques, par contre, c'est bel et bien complet, remis en forme, et sans une seule faute de frappe. Non, je plaisante, je n'ai absolument pas repris tout ce que j'avais tapé pendant l'année, les très nombreuses coquilles sont donc toujours présentes. Mais je compte sur monsieur Maire pour m'envoyer un compte-rendu détaillé de mes nombreuses erreurs après relecture attentive (à propos, rien à avoir, mais nous avons dégusté la bouteille amenée pour le pique-nique, c'est assez surprenant mais fort agréable). Bien sûr, je ne doute pas que vous ferez tous une relecture très attentive de ces presque 1000 pages de contenu. Grosse déception pour moi tout de même, je n'ai pas atteint la barrière symbolique des quatre chiffres cette année, malgré une inflation très nette par rapports aux années précédentes. Mais oui, je sais, il ne fallait pas sacrifier ce pauvre Maple.

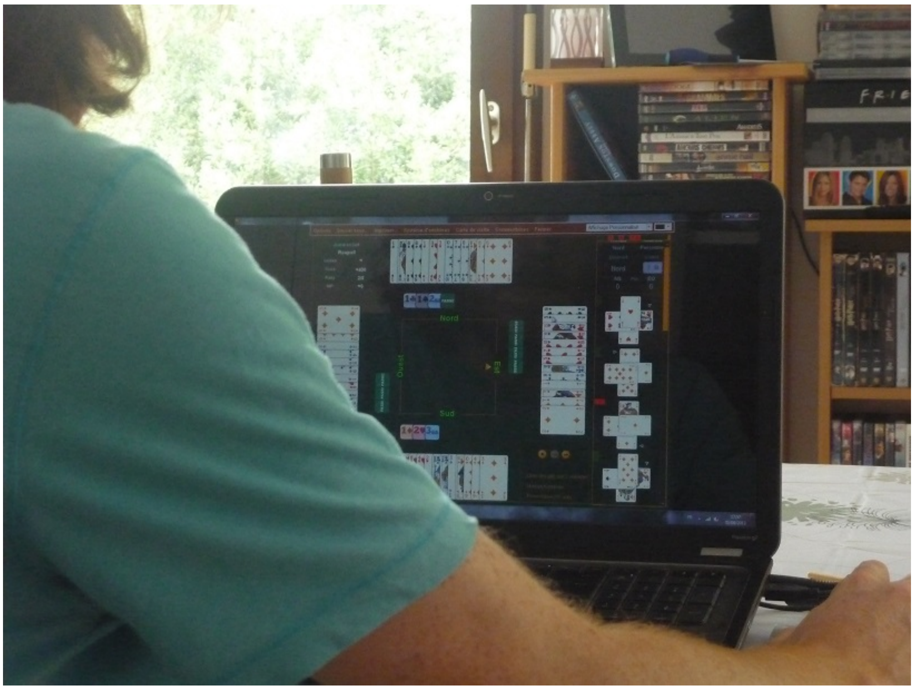
Tout de même, quand on y réfléchit, plusieurs centaines de pages pour seulement quelques mois, c'est beaucoup. Trop, sûrement. Trop en tout cas pour que ça puisse être complètement et parfaitement assimilé par le commun des mortels. Et même si vous n'êtes pas tout à fait le commun des mortels, je sais bien que beaucoup de subtilités dans tout ce qu'on a pu voir ensemble vous auront passé largement au-dessus de la tête. Ce n'est pas grave. Ce qui est important pour vous, c'est que vous ayez assez assimilé pour être bien préparés pour l'an prochain, et je pense sincèrement que ce sera le cas pour tous, quitte bien sûr à se replonger un petit peu dedans avant septembre. Mais surtout, ce qui est important, c'est que vous ayez compris que la prépa ne sert pas seulement à vous gaver de connaissances de façon un peu brutale, mais aussi à vous faire comprendre que la connaissance brute n'est pas le but, mais qu'il y a une organisation du savoir, une compréhension fine du monde qui nous entoure, une curiosité de l'agencement extraordinairement subtil de tous les composants qui constituent notre environnement de tous les jours, de la simplicité de l'atome à la complexité de votre smartphone, qui justifie les heures passées à souffrir sur des formules immondes et autres thoérèmes aux noms barbares. J'espère avoir pu contrubuer à vous éclairer un peu sur cette fabuleuse science que sont les mathémtiques. J'espère même que vous aurez un peu de gratititude pour avoir tenté de vous en faire découvrir quelques aspects. En ce qui me concerne, en tout cas, je vous remercie une dernière fois de m'avoir écouté, avoir plus ou moins d'intérêt, de bonne volonté ou de compréhension, mais toujours dans la bonne humeur, pendant un nombre de secondes que je laisse le soin aux plus masochistes d'ntre vous de se remémorer !

Guillaume 'Roupoil' Lafon
4 août 2013

Désolé pour le retard, tout est de ma faute !

Première partie

Cours



- Ouiiiiiiiiiin.
- Chérie, tu peux y aller ? Je finis de préparer mon cours pour demain !

Chapitre 1

Fonctions usuelles

Logarithme et exponentielle dînent ensemble au resto.
C'est exponentielle qui paye tout la note, pourquoi ?
Parce que logarithme népérien !

Ce premier chapitre de l'année a pour principal objectif de constituer un catalogue des fonctions que nous considérerons comme suffisamment classiques pour que leur maîtrise soit indispensable. Certaines de ces fonctions ont déjà été étudiées au lycée (logarithme népérien et exponentielle ; fonctions trigonométriques), les autres ne font intervenir aucune théorie supplémentaire, si ce n'est la notion de bijection qui sera abordée en début de chapitre. On en profitera d'ailleurs pour donner quelques notations sur les ensembles qui seront réutilisées en permanence tout au long de l'année, et dont la maîtrise parfaite devra donc être immédiate.

Objectifs du chapitre :

- maîtrise de l'utilisation des quantificateurs $\exists$ et $\forall$: compréhension d'un énoncé faisant intervenir une succession de quantificateurs, capacité à donner la négation d'un énoncé quantifié.
- maîtrise des règles de calcul sur l'exponentielle, le logarithme et les puissances : résolution d'équations se ramenant à du second degré, manipulation aisée des racines carrées.
- connaissance des dérivées et représentations graphiques des fonctions trigonométriques et hyperboliques, et de leurs réciproques (y compris limites et asymptotes).

1.1 Vocabulaire

1.1.1 Ensembles et logique

La logique est un domaine un peu à part au sein des mathématiques, essentiel à la construction même de l'ensemble de la théorie mathématique. À notre petit niveau, nous ne ferons rien de bien compliqué, contentons-nous de considérer la logique comme une sorte de grammaire des mathématiques. Pour bien comprendre le sens exact que l'on attribue à chaque énoncé que contient un texte mathématique, il est important de s'appuyer sur des bases rigoureuses. En ce qui concerne les ensembles, ils forment les briques élémentaires de la grande théorie des mathématiques qui est en cours aujourd'hui. Tous les objets mathématiques que vous manipulerez cette année (y compris les fonctions, ou même les nombres entiers par exemple) peuvent être vus comme des ensembles. Là encore, rien de compliqué dans ce chapitre, simplement quelques définitions, que nous compléterons dans un chapitre ultérieur.

Ensembles

Définition 1. Un **ensemble** est une collection d'objets mathématiques. Il peut être décrit en donnant la liste de tous ses éléments, mais sera plus souvent (notamment pour les ensembles infinis) défini par une propriété commune de ces objets, par exemple $[2;3[=\{x\in\mathbb{R} \mid 2\leqslant x<3\}$. Le symbole $\in$ signifie « appartient à » et le symbole $\mid$ signifie « tels que ». La notation entre accolades désigne toujours un ensemble en mathématiques.

Définition 2. Deux ensembles E et F sont **égaux** s'ils contiennent exactement les même éléments. L'ensemble F est **inclus** dans l'ensemble E si tout élément de F appartient aussi à E. On le note $F\subset E$.

Méthode : Pour montrer que deux ensembles E et F sont égaux, on peut procéder par double inclusion, c'est-à-dire prouver séparément le fait que $E\subset F$ et $F\subset E$.

Remarque 1. Il ne faut pas confondre appartenance et inclusion. Ainsi, $\sqrt{7}\in[2;3[$, mais $[\pi-1;\sqrt{7}]\subset[2;3[$.

Définition 3. L'ensemble ne contenant aucun élément, appelé **ensemble vide**, est noté $\emptyset$.

Quantificateurs et équivalences

Définition 4. Nous utiliserons tout au long de l'année dans nos énoncés de théorèmes et de propositions les deux symboles suivants, appelés un peu pompeusement **quantificateur existentiel** et **quantificateur universel** :
- le symbole $\exists$ signifie « il existe » ; ainsi, le fait qu'une fonction f s'annule sur l'intervalle $[0;1]$ peut s'écrire plus mathématiquement $\exists x\in[0;1],\ f(x)=0$.
- le symbole $\forall$ signifie « quel que soit » ; ainsi, le fait qu'une fonction f soit nulle sur l'intervalle $[0;1]$ s'écrit $\forall x\in[0;1],\ f(x)=0$. Notez bien la différence entre ces deux exemples, il est évidemment essentiel de ne pas confondre les deux symboles.

Remarque 2. Dans les cas où a besoin de plusieurs quantificateurs pour exprimer une propriété (ça arrive souvent), l'ordre dans lequel on les dispose est aussi très important. On les lit naturellement de gauche à droite, ce qui donne par exemple :
- $\exists x\in\mathbb{R},\ \forall y\neq x\in\mathbb{R},\ f(x)>f(y)$ signifie que f admet un maximum (global) en x ($f(x)$ est plus grand que toutes les autres images par f).
- $\forall y\in\mathbb{R},\ \exists x\neq y\in\mathbb{R},\ f(x)>f(y)$ signifie que f n'admet pas de maximum (quelle que soit la valeur de y, on peut trouver un x ayant une image plus grande par f).

En général, il faut retenir que, dans un énoncé commençant par $\forall x$, $\exists y$, la variable y dépend de x, alors que dans le cas où l'énoncé stipule $\exists y$, $\forall x$, le y est universel, il doit fonctionner pour toutes les valeurs de x possibles.

Définition 5. Le symbole $\Rightarrow$ est un symbole d'**implication** : $A\Rightarrow B$ signifie que la propriété B est vraie dès que A l'est (par contre, si A est fausse, B peut bien être vraie ou fausse, ça n'a pas d'importance). Le symbole $\Leftrightarrow$ est un symbole d'équivalence : $A\Leftrightarrow B$ signifie que A implique B **et** B implique A. Autrement dit, dès que l'une est vraie, l'autre aussi, et dès que l'une est fausse l'autre aussi. Autre façon de voir les choses : $A\Rightarrow B$ et sa **réciproque** $B\Rightarrow A$ sont toutes les deux vraies.

Exemple (théorème de Pythagore et réciproque) : Un triangle ABC est rectangle en $A\Leftrightarrow AB^2+AC^2=BC^2$.

Remarque 3. Quand on calcule les longueurs des côtés d'un triangle, et qu'on invoque l'absence d'égalité de Pythagore pour prouver que le triangle n'est pas rectangle, on n'utilise pas la réciproque du théorème, mais bel et bien le théorème lui-même, ou plutôt sa **contraposée** : si $A\Rightarrow B$, la contraposée stipule que la négation de B implique la négation de A. Lorsqu'une implication est vraie, sa contraposée l'est également.

Méthode : Pour prouver une équivalence $A\Leftrightarrow B$, on procède souvent en prouvant séparément les deux implications $A\Rightarrow B$, et $B\Rightarrow A$. Faites très attention à ne pas vous contenter de prouver l'une des deux implications.

1.1.2 Fonctions

Le vocabulaire de base sur les fonctions étant supposé acquis au lycée, ce paragraphe est simplement l'occasion d'énoncer certaines définitions essentielles à l'aide des quantificateurs. En particulier, les définitions suivantes ne sont pas rappelées : image et antécédents d'un réel par une fonction, limites, asymptotes, continuité, dérivée et lien entre le signe de la dérivée et le sens de variations de la fonction. Tous ces points sont supposés maîtrisés sur le bout des doigts. Nous reviendrons sur les notions de continuité et de dérivabilité (avec une approche beaucoup plus rigoureuse qu'au lycée) ultérieurement.

Domaine de définition

Définition 6. Une **fonction** $f : \mathcal{D}_f \mapsto \mathbb{R}$ est un objet mathématique associant à tout réel x appartenant à un sous-ensemble $\mathcal{D}_f$ de $\mathbb{R}$, un réel y également noté $f(x)$. L'ensemble $\mathcal{D}_f$ est appelé **domaine de définition** de la fonction f.

Méthode : Pour déterminer un domaine de définition, on fera notamment attention au trois problèmes suivants :

- annulation d'un dénominateur : si $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-4}$, alors $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-2;2\}$.
- positivité sous une racine : si $f(x) = \sqrt{4-2x}$, alors $\mathcal{D}_f =]-\infty;2]$.
- stricte positivité sous un ln : si $f(x) = \ln(x^2-9)$, alors $\mathcal{D}_f =]-\infty;-3[\cup]3;+\infty[$

Parité, périodicité

Définition 7. Une fonction f est **paire** si son domaine de définition est symétrique par rapport à 0 et $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = f(x)$. Elle est **impaire** si son domaine de définition est symétrique par rapport à 0 et $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = -f(x)$.

Remarque 4. La condition sur la symétrie de l'ensemble de définition est nécessaire pour assurer que $-x$ appartienne toujours au domaine de définition de f.

Méthode : Pour prouver qu'une fonction est paire (ou impaire), on exprime $f(-x)$ en fonction de x et on essaie de le mettre sous une forme permettant de constater que $f(-x) = f(x)$. Pour prouver qu'une fonction n'est pas paire, il suffit de trouver un contre-exemple, donc une valeur de x pour laquelle $f(-x) \neq f(x)$. Attention tout de même, le fait que $f(-2) = f(2)$ par exemple ne prouve rien.

Proposition 1. La courbe représentative d'une fonction paire dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'axe (Oy) du repère. La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine 0 du repère.

Démonstration. Graphiquement, la parité s'exprime comme ceci : si un point $A(x; f(x))$, le point $A'(-x, f(x))$ appartiendra également à la courbe (et vice-versa). Or, A' n'est autre que le symétrique de A par rapport à l'axe (Oy). Le raisonnement est le même pour les fonctions impaires. □

Définition 8. Une fonction f est périodique de période T si, quel que soit x appartenant à $\mathcal{D}_f$, $x+T$ appartient à $\mathcal{D}_f$ et $f(x+T) = f(x)$.

Remarque 5. Une fonction périodique possède plusieurs périodes différentes, puisque tout multiple d'une période est également une période. Ainsi, la fonction cos est périodique de période 2π, mais aussi 4π ou encore -56π. Il existe toutefois toujours une période qui sera la plus petite période positive de la fonction f, et qu'on appelle par abus de langage la période de la fonction f.

Proposition 2. La courbe représentative d'une fonction f périodique de période T est invariante par translation de vecteur $T\overrightarrow{i}$.

Démonstration. Le point $(x, f(x))$ ayant pour image par cette translation le point $(x+T, f(x))$, c'est une conséquence immédiate de la définition. □

Monotonie

Définition 9. Une fonction réelle f est **croissante** (resp. **décroissante**) sur un intervalle I si, $\forall (x,y) \in I^2$, $x < y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$ (resp. $f(x) \geqslant f(y)$). Je vous épargne les définitions de croissance et décroissance stricte.

Définition 10. Une fonction réelle f admet un **maximum** (local) en x sur l'intervalle I si $x \in I$ et $\forall y \in I$, $f(y) \leqslant f(x)$. On parle de **maximum global** si $I = \mathcal{D}_f$. On définit de même **minimum local et global**.

Définition 11. Le réel m est un **minorant** de la fonction f sur l'intervalle I si $\forall x \in I$, $f(x) \geqslant m$. De même, M est un **majorant** de f sur I si $\forall x \in I$, $f(x) \leqslant M$. On dit que f est bornée sur I si elle y admet à la fois un majorant et un minorant.

Remarque 6. Un minorant n'est pas la même chose qu'un minimum. Par exemple, la fonction $x \mapsto x^2$ a pour minimum 0 sur $\mathbb{R}$, mais elle est aussi minorée par -2, -15 et beaucoup d'autres valeurs. Une fonction peut même être minorée sans avoir de minimum, par exemple la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$.

Bijections

Définition 12. Une fonction $f : I \to J$ est une **bijection** de l'intervalle I dans l'intervalle J si tout élément de J admet exactement un antécédent par la fonction f dans l'intervalle I.

Définition 13. Si f est une fonction bijective de I dans J, on appelle **bijection réciproque** de f la fonction $g : J \to I$ qui, à un réel y appartenant à I, associe son unique antécédent x par la fonction f. L'application g est alors une bijection de l'intervalle J dans l'intervalle I. On la note f^{-1}.

Exemple : La notion de réciproque est intuitivement simple, il s'agit simplement de créer une fonction g qui « fait le contraire » de la fonction f. Mais pour cela, la condition sur l'unicité des antécédents est indispensable, sinon on aura plusieurs possibilités pour la définition de la fonction g. Un exemple que vous connaissez déjà est celui de la racine carrée, qui est la réciproque de la fonction carré $f : x \mapsto x^2$. Attention tout de même, la fonction f n'est pas une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, puisque les réels négatifs n'ont pas d'antécédent par f, mais que les réels strictement positifs en ont deux. Par contre, cette même fonction f est bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. C'est pour cela que la racine carrée est une fonction définie seulement sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ (dans la définition de la racine carrée, on précise bien qu'il s'agit d'un nombre positif).

Remarque 7. Pour tout x appartenant à I, on a $f^{-1}(f(x)) = x$; pour tout x dans J, $f(f^{-1}(x)) = x$. De plus, les représentations graphiques des fonctions f et f^{-1} dans un repère orthogonal sont des courbes symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Théorème 1. Soit $f : I \to J$ une fonction continue et strictement monotone. Alors f effectue une bijection de I dans J. De plus, sa réciproque f^{-1} est également continue et strictement monotone, de même monotonie que f.

Proposition 3. Soit $f : I \to J$ une bijection dérivable sur I et telle que $\forall x \in I$, $f'(x) \neq 0$, alors sa bijection réciproque est dérivable sur J et $\forall y \in J$, $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

Exemple : Si on reprend l'exemple de la racine carrée, on trouve en utilisant le fait que $(x^2)' = 2x$, la formule bien connue $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

1.2 Logarithmes et exponentielles

Éternel dilemme du professeur de maths au moment d'aborder cette partie du cours : exponentielle d'abord ou logarithme en premier ? Quel que soit le choix, soyez conscients que la construction s'appuiera à ce stade sur des résultats puissants que nous ne serons pas en mesure de démontrer : existence d'une primitive à une fonction continue pour le logarithme, existence d'une solution à une équation différentielle pour l'exponentielle. Nous commencerons avec le logarithme (c'est le plus traditionnel) car les démonstrations sont plus faciles à enchaîner dans ce sens, mais je vous donnerai également des définitions indépendantes de l'exponentielle.

1.2.1 La fonction logarithme népérien

Définition 14. La fonction ln (**logarithme népérien**) est l'unique primitive de la fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$ s'annulant pour $x = 1$.

Proposition 4. Principales propriétés de la fonction ln :

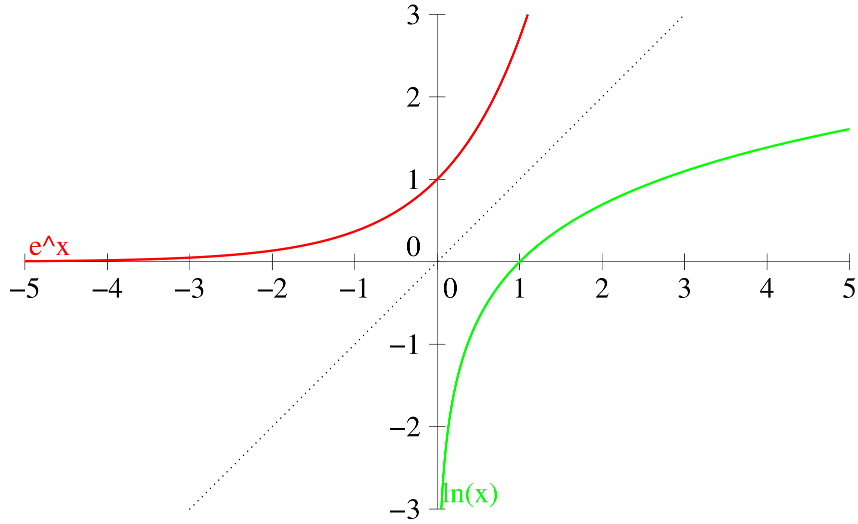
- Pour tous nombres réels strictement positifs x et y, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.
- Les formules suivantes découlent de la première propriété : $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)$; $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$; pour tout entier relatif n, $\ln(x^n) = n\ln(x)$.
- La fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$
- Il existe un unique réel, noté e, vérifiant $\ln(e) = 1$.

Démonstration.

- Puisque tout ce que nous savons pour l'instant sur le logarithme est qu'il est une primitive de $\dfrac{1}{x}$, la démonstration va passer par une dérivation. Fixons donc une valeur de $y > 0$, et posons $g(x) = \ln(xy) - \ln(x) - \ln(y)$. La fonction g est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$, de dérivée $g'(x) = \dfrac{y}{xy} - \dfrac{1}{x} = 0$. La fonction g est donc constante sur $\mathbb{R}^{+*}$. Comme $g(1) = \ln(y) - \ln(1) - \ln(y) = 0$, on en déduit que $\forall x > 0$, $\ln(x + y) - \ln(x) - \ln(y) = 0$, ce qui est équivalent à notre propriété.
- En choisissant $y = \dfrac{1}{x}$ dans la formule précédente, on obtient $\ln(1) = \ln(x) + \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$, soit $\ln(x) + \ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$, ce qui prouve le premier point. Il suffit ensuite d'écrire $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln\left(x \times \dfrac{1}{y}\right) = \ln(x) + \ln\left(\dfrac{1}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$ pour obtenir le deuxième. La dernière formule se prouve, pour les valeurs positives de n, par récurrence. Pour $n = 0$, $\ln(x^0) = \ln(1) = 0 = 0 \times \ln(x)$. Ensuite, si on suppose vraie la proptiété au rang n, alors $\ln(x^{n+1}) = \ln(x^n \times x) = \ln(x^n) + \ln(x) = n\ln(x) + \ln(x) = (n+1)\ln(x)$, ce qui prouve l'hérédité de la propriété. Pour les valeurs négatives de n, on écrit simplement $\ln(x^{-n}) = \ln\left(\dfrac{1}{x^n}\right) = -\ln(x^n) = -n\ln(x)$.
- Sa dérivée étant strictement positive, c'est clair.
- La fonction étant croissante, elle admet nécessairement une limite (finie ou infinie) en $+\infty$, il suffit donc de prouver qu'elle n'est pas majorée pour obtenir une limite infinie. Or, en prenant un x pour lequel $\ln(x) > 0$ (par exemple $x = 2$), on a $\ln(x^n) = n\ln(x)$, qui a pour limite $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. La fonction ne peut donc être majorée, et $\ln\limits_{x\to+\infty}(x) = +\infty$. En posant $X = \dfrac{1}{x}$, on a alors $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X) = -\infty$.
- La fonction ln étant continue et strictement croissante, et au vu des limites calculées précédemment, elle effectue une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ vers $\mathbb{R}$. Le nombre réel 1 admet donc un unique antécédent par la fonction ln.

□

Ajoutons la courbe représentative de la fonction, que je couple avec celle de la fonction exponentielle que nous allons maintenant aborder.



1.2.2 La fonction exponentielle

Définition 15. La **fonction exponentielle**, que l'on notera exp, est définie sur $\mathbb{R}$ comme la réciproque de la fonction ln.

Remarque 8. On peut définir la fonction exponentielle de façon indépendante, sans référence au logarithme. Par exemple, la fonction exponentielle est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ solution de l'équation différentielle et vérifiant de plus $f' = f$. Une autre définition nettement plus maniable mais faisant intervenir des séries (vous la reverrez l'an prochain) est la suivante : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Proposition 5. Principales propriétés de la fonction exponentielle :
- La fonction exponentielle est à valeurs strictement positives, et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est la fonction exponentielle elle-même.
- $\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$.
- Pour tous nombres réels x et y, $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$. En particulier, $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$, et $(\exp(x))^n = \exp(nx)$. Pour tout entier n, $\exp(n) = e^n$ (où e, rappelons-le, est l'unique réel vérifiant $\ln(e) = 1$; on étendra comme vous en avez l'habitude la notation e^x à toutes les valeurs de l'exponentielle).

Démonstration.
- On peut appliquer le théorème de la bijection rappelé plus haut. La fonction exp est définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$, et de même monotonie que ln. De plus, sa dérivée est donnée par $\exp'(x) = \frac{1}{\ln'(\exp(x))} = \exp(x)$.
- Les limites découlent également du théorème de la bijection.
- Le but ici est d'utiliser les règles de calcul vues sur le logarithme. Notons a et b les antécédents (uniques à chaque fois par bijectivité du ln) de x et y par la fonction ln, on peut écrire $\exp(x + y) = \exp(\ln(a) + \ln(b)) = \exp(\ln(ab)) = ab = \exp(x) \times \exp(y)$. Comme $\ln(1) = 0$, on a par ailleurs $\exp(0) = 1$, donc $\exp(x) \times \exp(-x) = \exp(x - x) = 1$, soit $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ (on peut aussi revenir au logarithme pour démontrer cette formule). Ensuite, $\exp(nx) = \exp(n \ln a) = \exp(\ln(a^n)) = a^n = (\exp(x))^n$. En particulier, $\exp(n) = (\exp(1))^n = e^n$, puisque $\ln(e) = 1 \Leftrightarrow \exp(1) = e$.

$\square$

1.2.3 Fonctions logarithmes et exponentielles quelconques

Logarithmes en base a

Définition 16. Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$, la fonction **logarithme en base** a est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.

Remarque 9. La fonction ln correspond en fait au logarithme en base e. Un autre logarithme est assez fréquemment employé, le logarithme en base 10, aussi appelé logarithme décimal et noté simplement log (c'est à cette fonction que correspond la touche log des calculatrices).

Proposition 6. Principales propriétés des fonctions logarithmes :

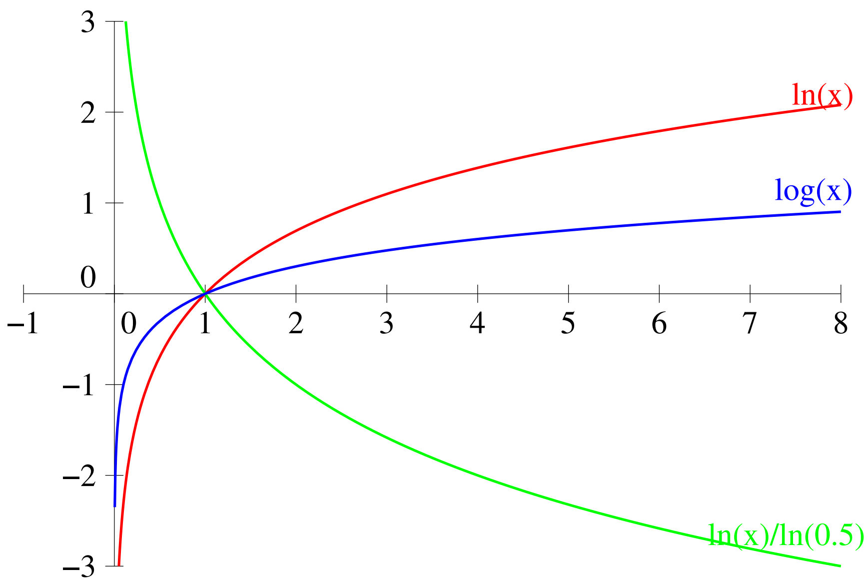
- Lorsque $a > 1$, la fonction $\log_a$ est strictement croissante et admet les mêmes limites que le logarithme népérien.
- Lorsque $0 < a < 1$, la fonction $\log_a$ est strictement décroissante ; $\lim_{x \to 0} \log_a(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \log_a(x) = -\infty$.
- Toutes les règles de calcul vues sur le logarithme népérien restent valables pour le logarithme en base a.

Démonstration.

- La fonction $\log_a$ étant proportionnelle au logarithme népérien, elle est dérivable, de dérivée $\log_a'(x) = \dfrac{1}{x \ln(a)}$. Lorsque $a > 1$, $\ln(a) > 0$, la fonction est donc strictement croissante, et les limites découlent de celles de la fonction ln par simple application des règles usuelles de calculs de limites.
- Cette fois-ci, $\ln(a) < 0$, ce qui explique à la fois le changement de sens de variation, et le changement de signe des limites.
- Il suffit de reprendre chacune des formules pour le ln, et de diviser partout par $\ln(a)$, pour obtenir les équivalents pour le logarithme en base a.

$\square$

Pour finir, quelques exemples de courbes, qui ont la même allure que celle de la fonction ln :



Exponentielles de base a

Définition 17. Soit $a \in \mathbb{R}^{+*} \backslash \{1\}$, la fonction **exponentielle en base** a est définie sur $\mathbb{R}$ comme la réciproque de la fonction $\log_a$. On la note $\exp_a$.

Proposition 7. Principales propriétés des exponentielles :

- On dispose de la formule explicite suivante : $\exp_a(x) = e^{x\ln(a)}$.
- Lorsque $a > 1$, la fonction $\exp_a$ est strictement croissante et admet les mêmes limites que l'exponentielle.
- Lorsque $0 < a < 1$, la fonction $\exp_a$ est strictement décroissante ; $\lim_{x \to -\infty} \exp_a(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \exp_a(x) = 0$.
- Toutes les règles de calcul vues sur l'exponentielle restent valables pour l'exponentielle en base a. On notera généralement, similairement à ce qu'on fait pour l'exponentielle de base e, $\exp_a(x) = a^x$.

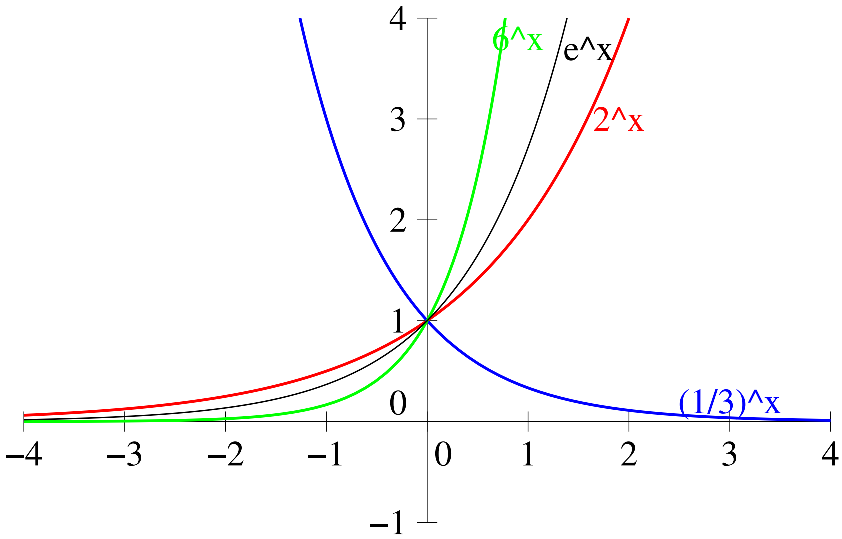
Démonstration.

- En effet, $\log_a(e^{x\ln(a)}) = \dfrac{\ln(e^{x\ln(a)})}{\ln(a)} = x$, donc $e^{x\ln(a)}$ est bien l'unique antécédent de x par la fonction $\log_a$.
- On peut au choix utiliser le théorème de la bijestion comme on l'a fait pour l'exponentielle, ou simplement utiliser la formule explicite vue ci-dessus.
- Cf le point précédent.
- Là encore, on peut reprendre la méthode utilisée dans le cas de l'exponentielle, ou utiliser la formule explicite. Par exemple, $\exp_a(x+y) = e^{(x+y)\ln(a)} = e^{x\ln(a)+y\ln(a)} = e^{x\ln(a)} \times e^{y\ln(a)} = \exp_a(x) \times \exp_a(y)$.

□

Remarque 10. En utilisant la notation introduite en fin de proposition précédente, on peut écrire les règles de calcul sous une forme plus simple, par exemple $a^{x+y} = a^x a^y$. Toutes ces formules correspondent à des propriétés classiques de manipulation des puissances, qui se généralisent ainsi sans difficulté à des exposants et des bases non entiers.

Et pour changer, on conclut avec quelques courbes :



1.3 Fonctions puissances

1.3.1 Rappels sur les fonctions puissances entières et racines n-èmes

Fonctions puissances entières

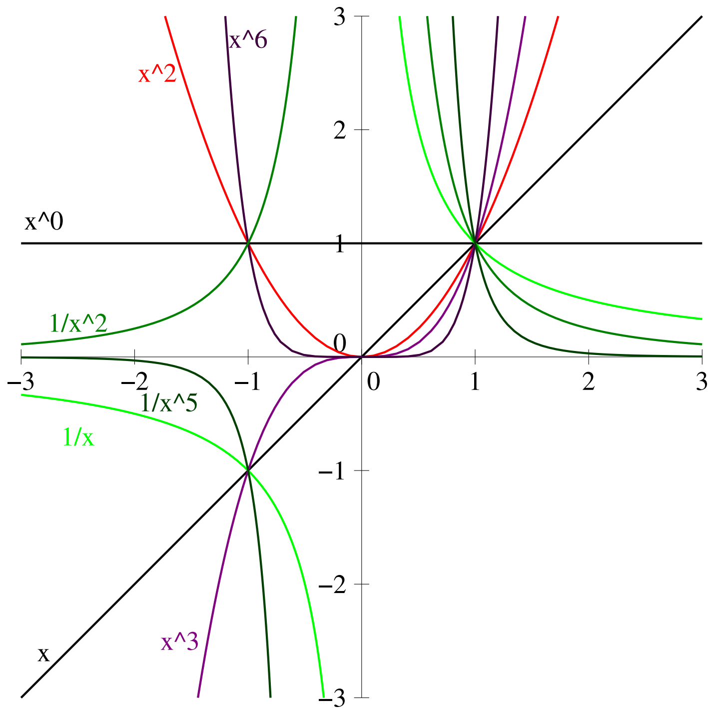
Définition 18. Soit x un nombre réel. Les **puissances positives** de x sont définies par récurrence : $x^0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x^{n+1} = x^n \times x$. Lorsque $x \neq 0$, on peut également définir des **puissances négatives** comme inverses des puissances positives : $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$. Les fonctions puissances $x \mapsto x^n$ sont donc définies sur $\mathbb{R}$ lorsque $n \geqslant 0$, et sur $\mathbb{R}^*$ lorsque $n < 0$.

Proposition 8. Principales propriétés des fonctions puissances entières :

- Les fonctions puissances sont continues et dérivables sur leur domaine de définition, de dérivée nx^{n-1} lorsque $n \neq 0$ (la dérivée de la fonction constante x^0 étant nulle).
- Lorsque n est un entier pair strictement positif, la fonction puissance n est paire, décroissante sur $]-\infty;0]$ et croissante sur $[0;+\infty[$. Elle a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
- Lorsque n est impair positif, la fonction est impaire, croissante sur $\mathbb{R}$, de limites respectives $-\infty$ et $+\infty$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
- Lorsque n est pair strictement négatif, la fonction est paire, strictement croissante sur $]-\infty;0[$ et décroissante sur $]0;+\infty[$. De plus, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} x^n = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to 0} x^n = +\infty$.
- Lorsque n est impair négatif, la fonction est impaire, décroissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$. De plus, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} x^n = 0$; $\lim\limits_{x \to 0^-} x^n = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} x^n = +\infty$.

Démonstration. Nous nous contenterons de démontrer la formule pour la dérivée, les limites étant « évidentes » à ce stade de l'année (on reviendra sur ces calculs après avoir rigoureusement défini les limites dans un chapitre ultérieur). Prouvons donc la formule quand $n > 0$ par récurrence, ce qui nous donnera une occasion de réviser un peu la théorie de la dérivation. Pour $n = 1$, la fonction $x \mapsto x$ a pour taux d'acroissement au point d'abscisse x l'expression $\tau_x(h) = \dfrac{x+h-x}{h} = 1$. Cette expression ayant évidemment pour limite 1 quand h tend vers 0, la dérivée de la fonction $x \mapsto x$ est constante égale à 1. Supposons désormais la formule vraie pour un certain entier n, et appliquons la formule de défivation d'un produit à la fonction $f : x \mapsto x^{n+1} = x^n \times x$: $f'(x) = nx^{n-1} \times x + x^n \times 1 = nx^n + x^n = (n+1)x^n$, ce qui prouve l'hérédité et achève la récurrence. Pour les puissances négatives, on peut utiliser la dérivée d'un inverse. Si $n > 0$, $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$ a pour dérivée $-\dfrac{nx^{n-1}}{(x^n)^2} = -\dfrac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$. La formule annoncée est donc toujours valable. □

Vous commencez à avoir l'habitude, quelques petites courbes pour illustrer tout cela :

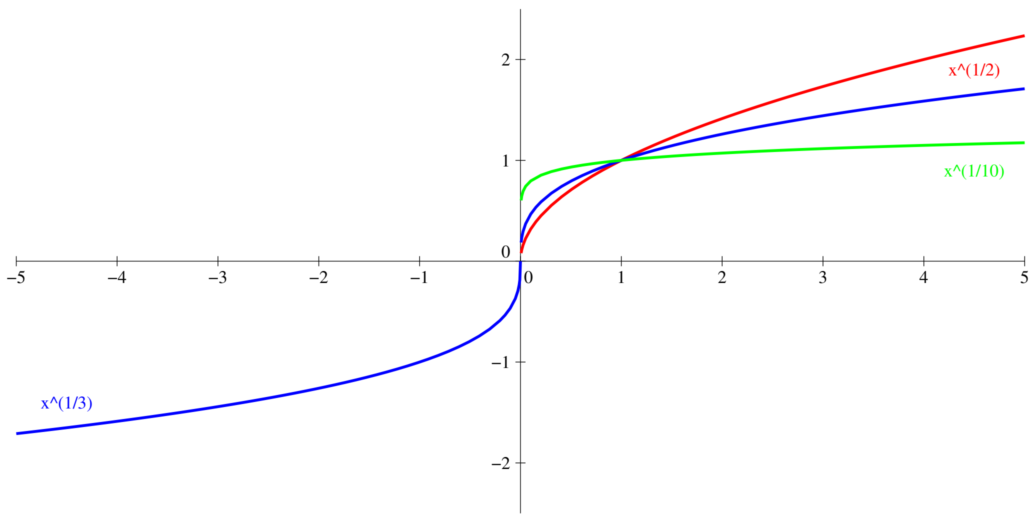


Racines n-èmes

Définition 19. Soit n un entier pair strictement positif. On définit la fonction **racine n-ème** comme la réciproque de la fonction puissance n sur l'intervalle $[0; +\infty[$. On la note $\sqrt[n]{x}$. Lorsque n est impair strictement positif, on peut définir la fonction racine n-ème sur $\mathbb{R}$ puisque la puissance n est alors bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La notation reste la même.

Remarque 11. Lorsque $n = 2$, comme vous en avez l'habitude, on notera la racine carrée $\sqrt{x}$.

Encore quelques exemples de courbes :



1.3.2 Puissances quelconques

Définition 20. Soit $a \in \mathbb{R}^*$, la fonction **puissance en base** a est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $x^a = e^{a \ln x}$.

Remarque 12. Cette définition prolonge bien celle donnée pour les puissances entières et les racines n-èmes. Pour les puissances entières par exemple, on a vu que $n \ln x = \ln(x^n)$, donc $e^{n \ln x} = x^n$.

Proposition 9. Principales propriétés des fonctions puissances :
- La fonction $x \mapsto x^a$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, de dérivée ax^{a-1}.
- Si $a > 0$, la puissance en base a est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. De plus, $\lim_{x \to 0^+} x^a = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} x^a = +\infty$.
- Si $a < 0$, la puissance en base a est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. De plus, $\lim_{x \to 0^+} x^a = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} x^a = 0$.
- Les fonctions puissances en base a et en base $\frac{1}{a}$ sont réciproques l'une de l'autre. En particulier, la fonction puissance en base $\frac{1}{n}$ coïncide avec racine n-ème.
- Les propriétés algébriques des puissances entières restent valables pour les puissances quelconques : $x^a \times x^b = x^{a+b}$; $(x^a)^b = x^{ab}$; $1^a = 1$.

Démonstration.
- En effet, $e^{a \ln(x)}$ se dérive comme une composée, et a pour dérivée $\frac{a}{x} e^{a \ln(x)} = \frac{a}{e^{\ln(x)}} e^{a \ln(x)} = a e^{(a-1)\ln(x)} = ax^{a-1}$.
- En effet, la dérivée est alors positive. Les limites se calculent via les règles usuelles de calculs de limites. Par exemple, $\lim_{x \to 0} a \ln(x) = -\infty$, et par composition $\lim_{x \to 0} e^{a \ln(x)} = \lim_{X \to -\infty} e^X = 0$.
- Même principe que ci-dessus.
- Vérifions : $e^{a \ln(x)} = y$ est équivalent à $a \ln(x) = \ln(y)$, soit $\ln(x) = \frac{1}{a} \ln(y)$ ou encore $x = e^{\frac{1}{a} \ln(y)}$, ce qui prouve le proposition.
- Tout cela se vérifie aisément à l'aide des propriétés du logarithme et de l'exponentielle. Par exemple, $x^a \times x^b = e^{a \ln(x)} \times e^{b \ln(x)} = e^{(a+b)\ln(x)} = x^{a+b}$. De même, $(x^a)^b = e^{b \ln(e^{a \ln(x)})} = e^{ab \ln(x)} = x^{ab}$. Quant au $1^a = 1$, c'est une conséquence directe du fait que $\ln(1) = 0$.

$\square$

Remarque 13. La fonction puissance en base a est prolongeable par continuité en 0 en posant $0^a = 0$ lorsque $a > 0$. Si $a > 1$, sa dérivée est également prolongeable par 0 en 0 (cf les résultats de croissance comparée), ce qui prouve que la courbe représentative de ces fonctions admet en 0 une tangente verticale (on reviendra sur ce genre de calculs dans un chapitre ultérieur sur la dérivation.

Vous attendiez les courbes ? Il n'y en aura pas, les fonctions puissances quelconques ayant des allures très similaires à celles des puissances entières et des racines n-èmes vues plus haut.

1.4 Limites et dérivées utiles

1.4.1 Limites classiques

Proposition 10. Les deux limites suivantes en 0 peuvent permettre de lever des indéterminations complexes : $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$; et $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Démonstration. Ce sont des conséquences des formules pour les dérivées des fonctions ln et exp. Le taux d'accroissement de la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ en 0 vaut $\tau_0(h) = \frac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h} = \frac{\ln(1+h)}{h}$. La fonction f étant dérivable, de dérivée $\frac{1}{x+1}$, l'expression converge donc quand h tend vers 0 vers $f'(0) = 1$. De même, en considérant simplement le taux d'accroissement de la fonction exponentielle en 0, la deuxième limite est égale à $e^0 = 1$. $\square$

Proposition 11. Croissances comparées :

- $\forall a > 1$, $\forall b > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a^x}{x^b} = +\infty$
- $\forall b > 0$, $\forall c > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^b}{(\ln(x))^c} = +\infty$
- $\forall a > 1$, $\forall c > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a^x}{(\ln(x))^c} = +\infty$

Autrement dit, on peut répartir de la façon suivante les fonctions usuelles en $+\infty$, les croissances les plus rapides se situant à droite :
$(\ln x)^{\frac{1}{2}}$ $\ln x$ $(\ln x)^2$ $(\ln x)^{47}$ $\sqrt{x}$ x x^2 $x^{2436525}$ $1,2^x$ 2^x e^x 12^x

Démonstration. Toutes ces propriétés se ramènent à la plus simple des propriétés de croissance comparée, à savoir que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$, ce que nous ne pouvons pas prouver aisément avec notre définition du logarithme.

- Constatons par exemple que $\dfrac{a^x}{x^b} = \dfrac{e^{x\ln(a)}}{e^{b\ln(x)}} = e^{x\ln(a) - b\ln(x)} = e^{x(\ln(a) - b\frac{\ln(x)}{x})}$. En admettant la limite précédente, l'exposant dans l'exponentielle a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ (avec la condition $a > 1$), donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a^x}{x^b} = +\infty$.
- La deuxième est exactement du même type en posant $X = \ln(x)$, puisqu'on a alors $\dfrac{x^b}{(\ln(x))^c} = \dfrac{e^{bX}}{e^{c\ln(X)}} = e^{X(b - c\frac{\ln(X)}{X})}$.
- La dernière découle des deux premières par un simple produit de limites.

□

Remarque 14. On peut déduire de ces résultats les autres propriétés suivantes :
- $\forall a > 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x \times x^n = 0$
- $\forall b > 0$, $\forall c > 0$, $\lim\limits_{x \to 0^+} x^b(\ln x)^c = 0$.

1.4.2 Dérivation de fonctions issues d'exponentielles

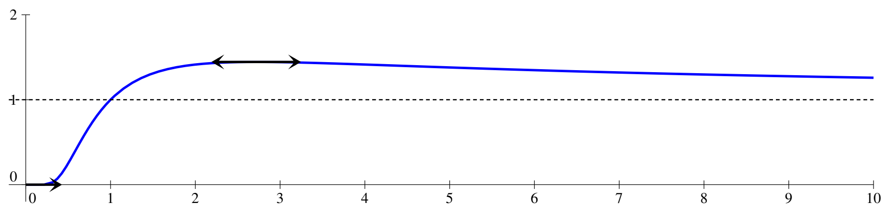
Proposition 12. Rappelons les deux cas particuliers suivants de la formule de dérivation d'une composée :
- $(\ln|u|)' = \dfrac{u'}{u}$
- $(e^u)' = u'e^u$

Nous y ajouterons une troisième formule utilisant les puissances quelconques étudiées ci-dessus : lorsque u est une fonction à valeurs strictement positives, $(u^v)' = \left(v'\ln(u) + \dfrac{vu'}{u}\right)u^v$.

Démonstration. Il est totalement inutile d'apprendre cette dernière formule par coeur, il faut simplement se rappeler que, pour étudier une fonction de ce type, il est indispensable de l'écrire d'abord sous forme exponentielle : $u^v = e^{v\ln(u)}$. La formule est alors une simple application de dérivation d'exponentielle. □

Exemple : Étudions en détail la fonction $f : x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$.
- Le premier réflexe à avoir est d'écrire f sous la forme $f(x) = e^{\frac{1}{x}\ln(x)}$. Cela permet notamment de justifier de façon immédiate que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^{+*}$.
- On peut ensuite calculer la dérivée : $f'(x) = \left(-\dfrac{1}{x^2}\ln(x) + \dfrac{1}{x} \times \dfrac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}\ln(x)} = \dfrac{1 - \ln(x)}{x^2}e^{\frac{1}{x}\ln(x)}$.
  L'exponentielle étant toujours positive, et x^2 également, le signe de f' est celui de $1 - \ln(x)$, qui s'annule lorsque $\ln(x) = 1$, soit $x = e$. La fonction f est croissante sur $]0; e]$ et décroissante sur $[e; +\infty[$. Elle admet un maximum pour $x = e$, de valeur $f(e) = e^{\frac{1}{e}}$ (ça ne se simplifie pas).

- Déterminons désormais les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Comme $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\ln(x) = -\infty$ (pas de forme indéterminée ici), $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$. De l'autre côté, comme $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x}\ln(x) = 0$ (par croissance comparée), on a $\lim_{x\to +\infty} f(x) = e^0 = 1$. Il y a en particulier une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $+\infty$.
- Si on est courageux, on peut tenter de déterminer la présence d'une éventuelle tangente en 0 (où la fonction est prolongeable par continuité), en cherchant si f' y admet une limite. Le calcul est loin d'être évident, mais on peut faire une factorisation ingénieuse : $f'(x) = \frac{\ln(x)^2}{x^2}\left(\frac{1}{\ln(x)^2} - \frac{1}{\ln(x)}\right)e^{\frac{\ln(x)}{x}}$. En posant $X = \frac{\ln(x)}{x}$, X a pour limite $-\infty$ quand x tend vers 0, donc le produit X^2e^X tend vers 0 (c'est de la croissance comparée). La parenthèse restante avec les inverses de ln tendant elle aussi manifestement vers 0, on en déduit que $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$, ce qui prouve l'existence d'une tanngente horizontale à la courbe en 0.
- On achève naturellement par une jolie courbe, en indiquant les tangentes connues :



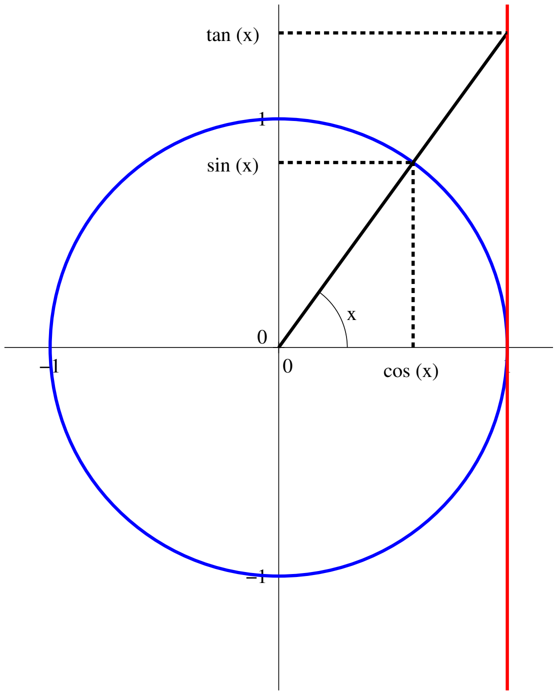
1.5 Fonctions trigonométriques et trigonométriques réciproques

1.5.1 Rappels de trigonométrie

Nous débuterons cette partie de cours par un retour sur les bases de la trigonométrie, que vous avez du voir de façon un peu éparpillée au collège, puis en seconde. Les démonstrations seront volontairement brèves, puisque ces premiers paragraphes sont censés être constitués de révisions.

Cercle trigonométrique, radians

Définition 21. Le **cercle trigonométrique**, dans un repère orthonormé, est le cercle de centre O (origine du repère) et de rayon 1. À tout réel x, on associe un point M du cercle trigonométrique en parcourant le cercle sur une distance x à partir du point $(1, 0)$, et x est appelé **mesure en radians** de l'angle orienté $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM})$. L'abscisse et l'ordonnée du point M associé à x sont appelées respectivement **cosinus** et **sinus** de ce réel. On définit par ailleurs la **tangente** quand c'est possible, c'est à dire si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, par $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Pour une interprétation géométrique de la tangente (expliquant d'ailleurs le nom de tangente), cf le dessin ci-dessous.



Remarque 15. Le repérage du cercle trigonométrique suppose le choix d'une orientation sur ce cercle. On appelle sens trigonométrique (ou positif) le sens opposé à celui des aiguilles d'une montre.

Proposition 13. Valeurs remarquables à connaitre :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\|\|$	0	$\|\|$

Démonstration. Pour les multiples de $\dfrac{\pi}{2}$, il suffit de regarder le cercle trigonométrique. Pour $\dfrac{\pi}{4}$, on obtient les valeurs facilement en se plaçant dans un demi-carré de côté 1 (en revenant à la définition purement géométrique du cosinus et du sinus dans les triangles rectangles, que vous avez vue au collège). La diagonale a pour longueur $\sqrt{2}$, donc le cosinus comme le sinus de chacun des deux angles de mesure $\dfrac{\pi}{4}$ valent $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Pour $\dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{\pi}{6}$, on se place dans un demi-triangle équilatéral de côté 1. Les longueurs des trois côtés sont donc 1 ; $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (un petit coup de théorème de Pythagore), dont on déduit sans difficulté les valeurs des lignes trigonométriques. $\square$

Proposition 14. Propriétés de symétrie du cosinus, du sinus et de la tangente :

• $\cos(x+2\pi) = \cos x$	• $\sin(x+2\pi) = \sin x$	• $\tan(x+2\pi) = \tan x$
• $\cos(x+\pi) = -\cos x$	• $\sin(x+\pi) = -\sin x$	• $\tan(x+\pi) = \tan x$
• $\cos(-x) = \cos x$	• $\sin(-x) = -\sin x$	• $\tan(-x) = -\tan x$
• $\cos(\pi-x) = -\cos x$	• $\sin(\pi-x) = \sin x$	• $\tan(\pi-x) = -\tan x$
• $\cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin x$	• $\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x$	• $\tan(x+\frac{\pi}{2}) = -\dfrac{1}{\tan(x)}$
• $\cos(\frac{\pi}{2}-x) = \sin x$	• $\sin(\frac{\pi}{2}-x) = \cos x$	• $\tan(\frac{\pi}{2}-x) = \dfrac{1}{\tan(x)}$

Démonstration. C'est toujours une question de symétries du cercle trigonométrique : à $x+2\pi$ correspond le même point qu'à x ; à $x+\pi$ le symétrique par rapport à 0 ; à $-x$ le symétrique par rapport à l'axe des abscisses ; à $\pi-x$ celui par rapport à l'axe des ordonnées ; à $x+\frac{\pi}{2}$ l'image par une rotation de centre 0 et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et enfin à $\frac{\pi}{2}-x$ l'image par la composée de cette rotation et de la symétrie par rapport à l'axe des abscisses (en commençant par la symétrie). □

Formules trigonométriques

Proposition 15. Pour tout réel x, $\sin^2 x+\cos^2 x=1$.

Démonstration. Soit M le point associé à x sur le cercle trigonométrique. La distance OM, qui vaut 1, est égale à $\sqrt{\cos^2 x+\sin^2 x}$, ce qui élevé au carré donne notre égalité. □

Les formules suivantes sont toutes à connaitre parfaitement et surtout à ne pas confondre les unes avec les autres. Nous verrons un peu plus tard comment les retenir plus facilement à l'aide des exponentielles complexes.

Proposition 16. Formules d'addition :
- $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$
- $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$
- $\tan(a+b)=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$
- $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$
- $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$
- $\tan(a-b)=\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$

Démonstration. Soient M et N les points du cercle trigonométrique de coordonnées respectives $(\cos a,\sin a)$ et $(\cos(a+b),\sin(a+b))$ et M' l'image de M par rotation autour de l'origine d'angle $\frac{\pi}{2}$. Le triplet $(O,\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'})$ est un repère (orthonormal direct). Les coordonnées de N dans ce repère sont $(\cos b,\sin b)$ (puisque N appartient toujours au cercle trigonométrique dans ce nouveau repère, et $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON})=a+b-a=b$), donc $\overrightarrow{ON}=\cos b\ \overrightarrow{OM}+\sin b\ \overrightarrow{OM'}=\cos b\ (\cos a\ \overrightarrow{i}+\sin a\ \overrightarrow{j})+\sin b\ (-\sin a\ \overrightarrow{i}+\cos a\ \overrightarrow{j})=(\cos a\cos b-\sin a\sin b)\ \overrightarrow{i}+(\sin a\cos b-\cos a\sin b)\ \overrightarrow{j}$. Comme on sait par ailleurs, par définition du point N, que ces coordonnées sont égales à $(\cos(a+b),\sin(a+b))$, une petite identification donne les formules d'addition du sinus et du cosinus. On a ensuite $\tan(a+b)=\dfrac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}=\dfrac{\sin a\cos b+\cos a\sin b}{\cos a\cos b-\sin a\sin b}=\dfrac{\frac{\sin a}{\cos a}+\frac{\sin b}{\cos b}}{1-\frac{\sin a\sin b}{\cos a\cos b}}=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$. Pour obtenir les formules de soustraction, on reprend les formules précédentes en remplaçant b par $-b$. □

Méthode : Ces formules permettent de calculer les valeurs exactes des lignes trigonométriques d'angles qui peuvent s'exprimer comme sommes ou différences d'angles classiques, par exemple $\frac{\pi}{12}$: on utilise le fait que $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$, donc $\cos\frac{\pi}{12}=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. De même, $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Proposition 17. Formules de duplication :
- $\cos(2a)=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a$
- $\sin(2a)=2\cos a\sin a$
- $\cos(3a)=4\cos^3 a-3\cos a$
- $\sin(3a)=3\sin a-4\sin^3 a$

Démonstration. Ce ne sont que des cas particuliers des formules d'addition, mais il est bon de bien les connaitre. Pour obtenir $\cos(3a)$, on applique la formule d'addition à a et $2a$: $\cos(3a) = \cos(2a)\cos a - \sin(2a)\sin a = 2\cos^3 a - \cos a - 2\cos a \sin^2 a = 2\cos^3 a - \cos a - 2\cos a(1-\cos^2 a) = 4\cos^3 a - 3\cos a$. □

Remarque 16. On peut calculer les valeurs de $\cos(na)$ et $\sin(na)$ de proche en proche de cette manière, mais on verra une méthode plus efficace utilisant les nombres complexes.

Proposition 18. Transformations de sommes en produits (et vice versa) :

- $\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$
- $\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$
- $\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$
- $\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- $\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- $\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- $\sin p - \sin q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

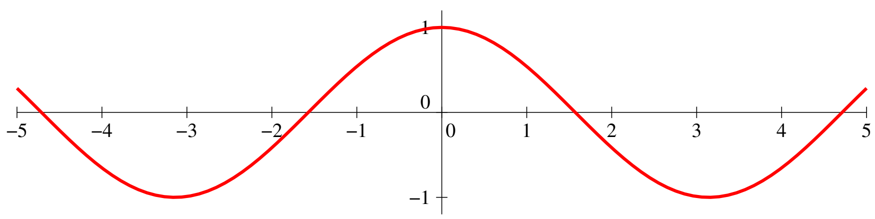
Démonstration. Rien de compliqué, par exemple $\cos(a+b) + \cos(a-b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b + \cos a \cos b + \sin a \sin b = 2\cos a \cos b$. On obtient de même les deux formules suivantes, puis les quatre dernières s'obtiennent directement en partant du membre de droite et en utilisant les trois premières. □

1.5.2 Fonctions trigonométriques

Proposition 19. La fonction **cosinus** est définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \cos(x)$. Elle est paire et 2π-périodique, continue et dérivable, et sa dérivée est égale à $-\sin(x)$. Sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$, son tableau de variations est le suivant :

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos x$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

La courbe bien connue du cosinus :

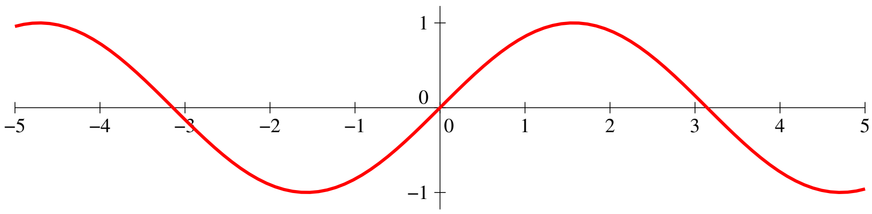


Démonstration. La périodicité et la parité découlent des propriétés $\cos(x+2\pi) = \cos x$ et $\cos(-x) = \cos x$. Le calcul de dérivée peut s'effectuer en revenant au taux d'accroissement et en utilisant des encadrements exploitant la définition géométrique des lignes trigonométriques, nous verrons cette démonstration en exercice. □

Proposition 20. La fonction **sinus** est définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \sin(x)$. Elle est impaire, 2π-périodique, continue et dérivable, sa dérivée est la fonction cosinus, et voici son tableau de variations sur $[-\pi;\pi]$:

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin x$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Et une autre courbe bien connue :

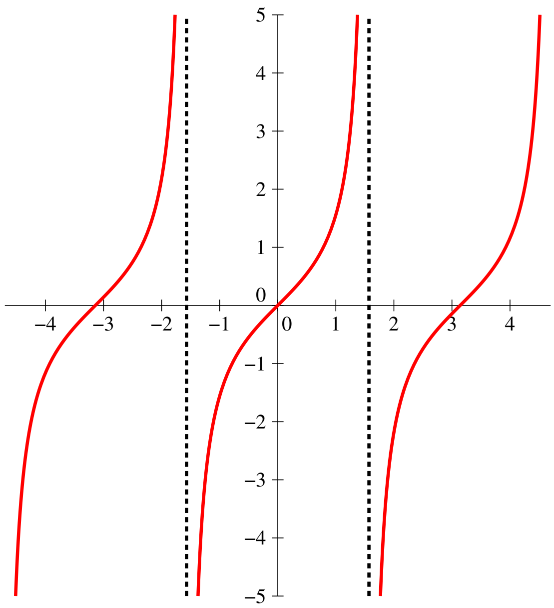


Démonstration. Mêmes remarques que pour le sinus. □

Proposition 21. La fonction **tangente** est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ par $x \mapsto \tan(x)$. Elle est impaire, π-périodique, continue et dérivable sur son domaine de définition, et $\tan' = 1 + \tan^2 = \dfrac{1}{\cos^2}$. D'où le tableau de variations suivant sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$:

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$\tan x$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Et une dernière courbe peut-être moins bien connue :

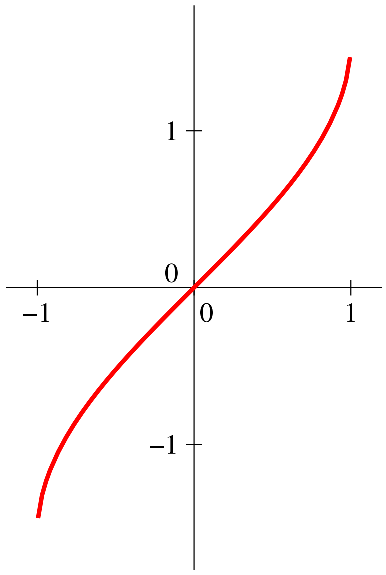


Démonstration. Encore une fois, tout a été vu sauf la dérivée et les limites, qui se calculent facilement. Par exemple, $\tan'(x) = \left(\dfrac{\sin}{\cos}\right)'(x) = \dfrac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$ en utilisant la formule de dérivation d'un quotient. Par ailleurs, $1+\tan^2(x) = 1+\dfrac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$, d'où la deuxième forme possible. □

1.5.3 Fonctions trigonométriques réciproques

Définition 22. La fonction sin étant strictement croissante sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, elle y est bijective vers l'intervalle image $[-1;1]$. La fonction réciproque du sinus sur cet intervalle est appelée **arcsinus** et notée arcsin.

Proposition 22. La fonction arcsin est impaire, définie et continue sur $[-1;1]$ et dérivable sur $]-1;1[$, de dérivée $\arcsin'(y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$. Elle est strictement croissante sur son domaine de définition.

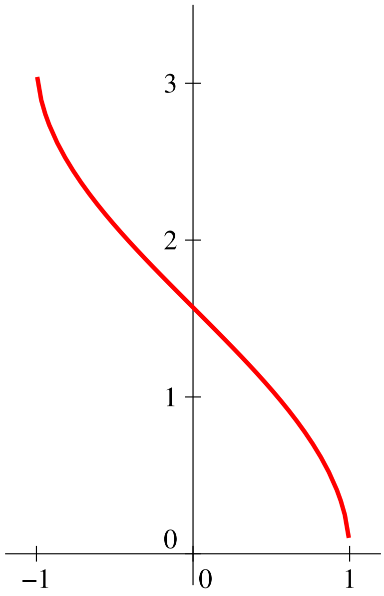


Démonstration. L'imparité et la croissance d'arcsin découlent de celles du sinus via le théorème de la bijection. Pour la dérivée, appliquons la formule de dérivation d'une réciproque : $\arcsin'(y) = \dfrac{1}{\sin'(\arcsin y)} = \dfrac{1}{\cos(\arcsin y)}$. La fonction arcsin étant à valeurs dans $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$, et le cosinus étant positif sur cet intervalle, on a $\cos(\arcsin y) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin y))} = \sqrt{1-y^2}$, ce qui prouve la formule. □

Remarque 17. Le fait que $\sin(\arcsin y) = y$, utilisé dans la démonstration, n'est vrai que si $y \in [-1;1]$ (sinon $\arcsin(y)$ n'existe pas). De même, $\arcsin(\sin(x)) = x$ seulement si $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ (mais cette expression est définie quelle que soit la valeur de x).

Définition 23. La fonction cos est strictement décroissante sur $[0;\pi]$, elle y est donc bijective vers son intervalle image $[-1;1]$. On définit la fonction **arccosinus** sur $[-1;1]$ (notée arccos) comme la réciproque de cos sur cet intervalle.

Proposition 23. La fonction arccos est paire, continue sur $[-1;1]$ et dérivable sur $]-1;1[$, de dérivée $\arccos'(y) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$. Elle est strictement décroissante sur son domaine de définition.



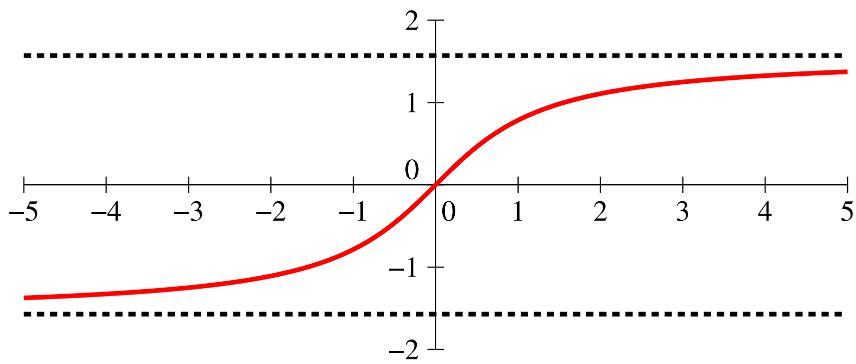
Démonstration. La preuve est totalement similaire à la précédente. $\square$

Proposition 24. Pour tout réel $y \in [-1;1]$, $\arccos(y) + \arcsin(y) = \dfrac{\pi}{2}$.

Démonstration. Notons $g : y \mapsto \arccos(y) + \arcsin(y)$. La fonction g est définie sur $[-1;1]$, dérivable et de dérivée nulle sur $]-1;1[$. Elle est donc constante égale à $g(0) = \arccos(0) + \arcsin(0) = \dfrac{\pi}{2} + 0 = \dfrac{\pi}{2}$. $\square$

Définition 24. La fonction tan est strictement croissante sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$, elle y effectue donc une bijection vers son intervalle image $\mathbb{R}$. La fonction **arctangente** est définie sur $\mathbb{R}$ comme sa réciproque, on la note arctan.

Proposition 25. La fonction arctan est impaire, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\arctan'(y) = \dfrac{1}{1+y^2}$. Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec pour limites respectives $-\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2}$ en $-\infty$ et $+\infty$.



Démonstration. Comme d'habitude, contentons-nous du calcul de la dérivée, qui est ici facile : $\arctan'(y) = \dfrac{1}{\tan'(\arctan y)} = \dfrac{1}{(1+\tan^2)(\arctan y)} = \dfrac{1}{1+y^2}$. $\square$

1.6 Fonctions hyperboliques et hyperboliques réciproques

Les fonctions hyperboliques sont de la même famille que les fonctions trigonométriques dans le sens où elles ont une interprétation géométrique très similaire en remplaçant le cercle trigonométrique par une hyperbole, ce qui explique le nom de ces fonctions. Je ne vous donnerai toutefois pas cette interprétation immédiatement, car ces fonctions peuvent s'exprimer très simplement à partir d'une autre fonction que vous connaissez bien, l'exeponentielle.

1.6.1 Fonctions hyperboliques

Définition 25. Les fonctions **cosinus, sinus et tangente hyperbolique** sont définies sur $\mathbb{R}$ par les équations suivantes : $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$; $\sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ et $\tanh(x) = \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

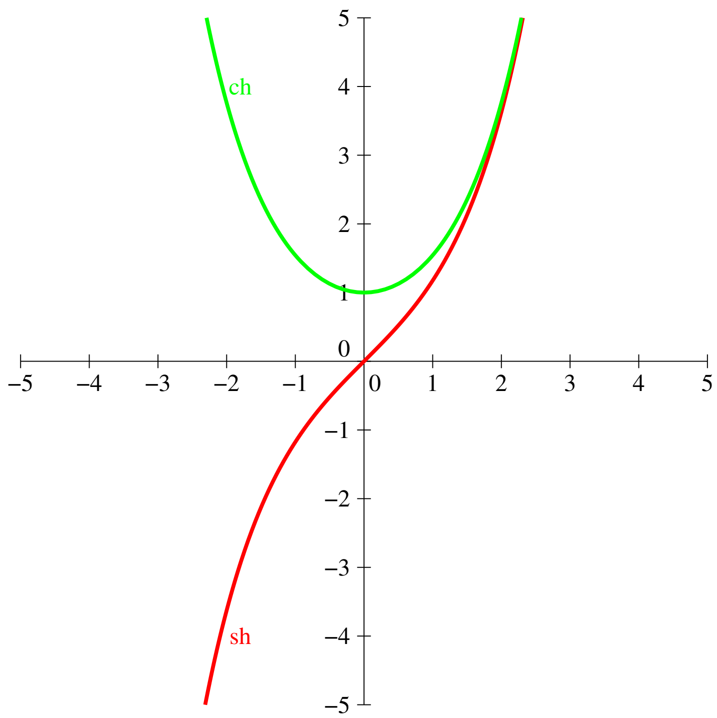
Remarque 18. Nous verrons quand nous reverrons les propriétés classiques des nombres complexes que les formules d'Euler donnent une forme extrêmement similaires aux fonctions trigonométriques. Par ailleurs, les fonctions trigonométriques interviennent naturelles dans le cadre de certains problèmes physiques simples : la courbe formée par un cable fixé en deux points et soumis à la force gravitationnelle (cable téléphonique mal tendu entre deux poteaux, par exemple) est une courbe de cosinus hyperbolique.

Proposition 26. Pour tout réel x, on a $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.

Démonstration. $\cosh^2(x) + \sinh^2(x) = \dfrac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} + 2 - e^{2x} - e^{-2x} + 2) = 1$. □

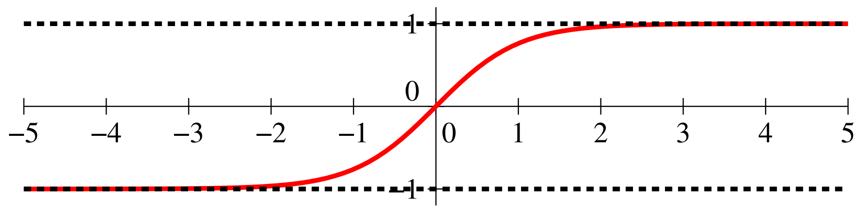
Remarque 19. Il existe beaucoup d'autres formules de trigonométrie hyperbolique, ressemblant souvent aux formules de trigonométrie classiques, nous en verrons quelques exemples en exercice.

Proposition 27. La fonction cosh est paire, la fonction sinh impaire. Les fonctions cosh et sinh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\cosh' = \sinh$; $\sinh' = \cosh$. Le cosinus hyperbolique est décroissant sur $\mathbb{R}_-$ et croissant sur $\mathbb{R}_+$, alors que le sinus hyperbolique est croissant sur $\mathbb{R}$. Les courbes sont les suivantes :



Démonstration. Tout ceci est assez facile : $\cosh(-x) = \dfrac{e^{-x}+e^{x}}{2} = \cosh x$; $\sinh(-x) = \dfrac{e^{-x}-e^{x}}{2} = -\sinh x$; $\cosh'(x) = \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2} = \sinh x$, et de même pour $\sinh'$. Quand aux signes, cosh est positive comme somme de deux exponentielles, sinh est donc croissante et s'annule en 0, elle est donc négative sur $\mathbb{R}_-$ et positive sur $\mathbb{R}_+$. □

Proposition 28. La fonction tanh est impaire, dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée $\tanh' = 1 - \tanh^2 = \dfrac{1}{\cosh^2}$. Elle est croissante sur $\mathbb{R}$, et admet pour asymptotes horizontales les droites d'équation $y = -1$ en $-\infty$ et $y = 1$ en $+\infty$. La courbe :

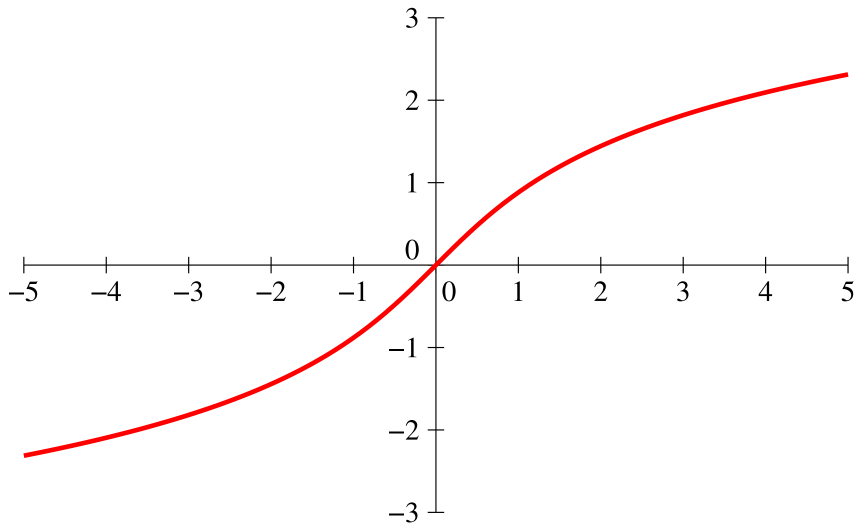


Démonstration. tanh est impaire comme quotient d'une fonction paire et d'une impaire. De plus, $\tanh' = \dfrac{\cosh^2 - \sinh^2}{\cosh^2} = \dfrac{1}{\cosh^2} = 1 - \tanh^2$. Les calculs de limites sont élémentaires, par exemple $\tanh(x) = \dfrac{e^x(1-e^{-2x})}{e^x(1+e^{-2x})} = \dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$, qui a bien pour limite 1 en $+\infty$. On peut déduire la limite en $-\infty$ de l'imparité de la fonction. □

1.6.2 Fonctions hyperboliques réciproques

Définition 26. La fonction sinh étant bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on définit la fonction **argument sinus hyperbolique**, ou Argsh, sur $\mathbb{R}$ comme étant sa réciproque.

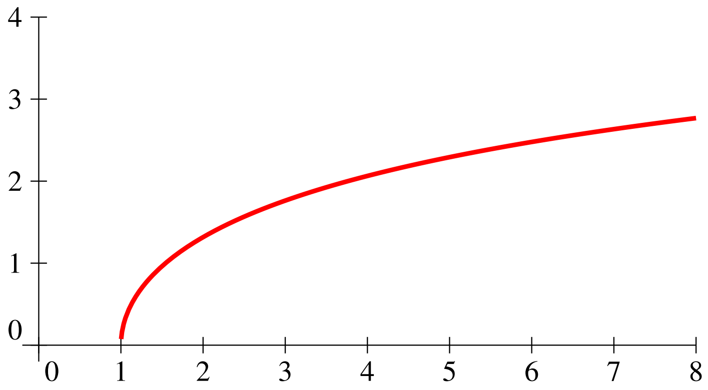
Proposition 29. La fonction Argsh est impaire, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\mathrm{Argsh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



Démonstration. Comme d'habitude, le théorème de la bijection fournit une grande partie des résultats, et la formule de la dérivée d'une réciproque permet d'obtenir la dérivée : $\text{Argsh}'(x) = \frac{1}{\cosh(\text{Argsh}(x))}$. Or, $\cosh(\text{Argsh}(x)) = \sqrt{1+\sinh^2(\text{Argsh}(x))} = \sqrt{1+x^2}$ en utilisant la formule $\sinh^2(x) - \cosh^2(x) = 1$. □

Définition 27. La fonction cosh étant strictement croissante, donc bijective sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut définir la fonction argument cosinus hyperbolique, ou Argch, sur $[1;+\infty[$ comme sa réciproque.

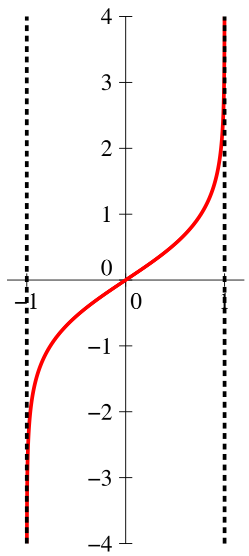
Proposition 30. La fonction Argch est continue sur $[1;+\infty[$ et dérivable sur $]1;+\infty[$, de dérivée $\text{Argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. Elle est strictement croissante sur $[1;+\infty[$.



Démonstration. Démonstration tout à fait similaire à la précédente. □

Définition 28. La fonction tanh étant bijective de $\mathbb{R}$ dans $]-1;1[$, on définit la fonction argument tangente hyperbolique, ou Argth, sur $]-1;1[$ comme sa réciproque.

Proposition 31. La fonction Argth est impaire, continue et dérivable sur $]-1;1[$, de dérivée $\text{Argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$. Elle est strictement croissante sur $]-1;1[$.



Démonstration. Ici aussi, la preuve est la même que dans le cas d'arctan, à un petit signe près dans le calcul de la dérivée. □

1.7 Formulaire de dérivées à connaitre

Pour terminer, un petit tableau récapitulatif des dérivées à savoir par coeur :

fonction	dérivée	$\mathcal{D}_f$	$\mathcal{D}_{f'}$	condition
c	0	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$c \in \mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$n \in \mathbb{N}^*$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n-1}}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$n \in \mathbb{N}^*$
x^a	ax^{a-1}	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+$	$a \geqslant 1$
x^a	ax^{a-1}	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+^*$	$0 < a < 1$
x^a	ax^{a-1}	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$a < 0$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	
a^x	$a^x \ln a$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$a > 0$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x\ln(a)}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
$\tan(x)$	$1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right\}$	$\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right\}$	
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$[-1;1]$	$]-1;1[$	
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$[-1;1]$	$]-1;1[$	
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
$\tanh(x)$	$1-\tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
$\mathrm{Argsh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
$\mathrm{Argch}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$[1;+\infty[$	$]1;+\infty[$	
$\mathrm{Argth}(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$	$]-1;1[$	$]-1;1[$	

Chapitre 2

Nombres complexes

Les nombres remarquables sont de sortie en discothèque.
e et π s'amusent comme des fous, mais i reste scotché au bar.
e va alors voir i et lui dit : « Allez, viens dans $\mathbb{C}$! »

Introduction

Pour ce deuxième chapitre de l'année, nous allons revenir sur une notion que vous avez déjà abordée l'an dernier, celle de nombres complexes. Ces derniers forment un outil fondamental en mathématiques, à la fois d'un point de vue théorique et d'un point de vue pratique (notamment en géometrie, comme on le verra un peu plus loin). Mais avant de commencer les explications, une petite question : pourquoi avoir « inventé » de toutes pièces ces nombres complexes ? Les différents ensembles de nombres sont apparus historiquement de façon relativement naturelle pour résoudre des problèmes concrets : les entiers naturels servent tout simplement à compter, les entiers relatifs deviennent nécessaires dès qu'on veut quantifier de façon un peu abstraite des échanges commerciaux, et les rationnels apparaissent dès qu'on cherche à diviser en plusieurs parts une quantité entière. Enfin, les réels permettent de graduer une droite et sont donc utiles pour se repérer (ils apparaissent par ailleurs assez rapidement dans des problèmes de géometrie : diagonale d'un carré ou périmètre d'un cercle). Les complexes, eux, ont été d'abord introduits pour permettre de résoudre des équations, les autres applications n'apparaissant qu'ensuite. En effet, on sait bien par exemple que tout nombre positif possède une racine carrée réelle (autrement dit, l'équation $x^2 = a$ admet une, et même deux, solutions réelles si $a > 0$), mais qu'en est-il pour les nombres négatifs, et notamment pour -1 ? L'ensemble des nombres complexes possède l'étonnante propriété que toute équation polynomiale y admet (au moins) une solution.

Objectifs du chapitre :

- maitrise du calcul algébrique sur les nombres complexes : résolution d'équations, utilisation alternée de la forme algébrique et de la forme trigonométrique dans la résolution de problèmes.
- compréhension du lien entre trignonométrie et nombres complexes via la notation d'exponentielle complexe.
- résolution de problèmes géométriques à l'aide des nombres complexes.

2.1 L'ensemble des nombres complexes, structure et opérations

2.1.1 Définitions

Définition 29. L'ensemble des **nombres complexes**, usuellement noté $\mathbb{C}$, est constitué de tous les nombres de la forme $a + ib$, où a et b sont deux réels quelconques. Il est muni des deux opérations suivantes : l'addition définie par $(a + ib) + (c + di) = a + c + (b + d)i$ et la multiplication définie par $(a + ib)(c + id) = ac - bd + (bc + ad)i$.

Remarque 20. Autrement dit, le nombre i vérifie $i^2 = -1$ et les opérations vérifient les propriétés usuelles.

Théorème 2. Propriétés des opérations usuelles sur les nombres complexes.

- L'addition est associative, commutative et a pour élément neutre $0 + 0i$ (désormais noté plus simplement 0), c'est-à-dire que, pour tout nombre complexe z, on a $z + 0 = 0 + z = z$.
- La multiplication est associative, commutative et a pour élément neutre $1 + 0i$ (noté 1).
- La multiplication est distributive par rapport l'addition.
- Tout nombre complexe z admet un opposé noté $-z$. Tout nombre complexe non nul z admet un inverse noté $\frac{1}{z}$ ou z^{-1}.

Démonstration.

- Les propriétés de l'addition découlent immédiatement de celles de l'addition sur les réels.
- Posons $z_1 = a + ib$; $z_2 = c + di$ et $z_3 = e + fi$ trois nombres complexes, on a $z_1z_2 = (a+ib)(c+id) = (ac-bd)+i(ad+bc) = (c+id)(a+ib)$, donc le produit est bien commutatif. De même $(z_1z_2)z_3 = ((ac-bd)+i(ad+bc))(e+if) = ace-bde-adf-bcf+i(acf-bdf+ade+bce)$ et $z_1(z_2z_3) = (a+ib)((ce-df)+i(cf+de)) = ace-adf-bcf-bde+i(acf+ade+bce-bdf)$. Les deux résultats étant les mêmes, le produit est bien associatif.
- La distributivité est à nouveau un calcul sans difficulté : $z_1(z_2+z_3) = (a+ib)(c+e+i(d+f)) = a(c+e)-b(d+f)+i(a(d+f)+b(c+e)) = ac-bd+i(ad+bc)+ae-bf+i(af+be) = z_1z_2+z_1z_3$.
- Enfin, l'opposé du complexe $a + ib$ est sans difficulté le complexe $-a - ib$; et l'inverse de z est le complexe $\dfrac{a - ib}{a^2 + b^2}$. En effet, $(a - ib)(a + ib) = a^2 - b^2$.

□

Remarque 21. On identifie souvent l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels comme un sous-ensemble de $\mathbb{C}$ en associant à un réel a le nombre complexe $a + 0i$. Les opérations définies plus haut prolongent alors la somme et le produit sur les réels.

Définition 30. Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. Le réel a est appelé **partie réelle** de z, et noté $\mathrm{Re}(z)$. Le réel b est appelé **partie imaginaire** de z, et noté $\mathrm{Im}(z)$.

Définition 31. Un nombre complexe de partie réelle nulle est appelé **imaginaire pur**, et on note $i\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres imaginaires purs.

Remarque 22. Un nombre complexe est déterminé de façon unique par ses parties réelle et imaginaire, ce qui mène à l'identification suivante :

Définition 32. À tout nombre complexe $z = a + ib$, on peut associer le point M du plan (muni d'un repère orthonormé) de coordonnées (a, b). Le point M est appelé **image** du nombre complexe z, et le nombre z **affixe** du point M.

2.1.2 Conjugaison

On peut définir sur les nombres complexes une autre opération qui sera la première pour laquelle nous aurons une interprétation géométrique simple :

Définition 33. Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, on appelle **conjugué** de z, et on note $\overline{z}$, le nombre $a - ib$.

Proposition 32. La conjugaison est compatible avec la somme et le produit : pour tous nombres complexes z et z', $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ et $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$. De plus, la conjugaison est involutive, c'est-à-dire que $\overline{\overline{z}} = z$.

Démonstration. Soit $z = a + ib$ et $z' = c + id$, on a $\overline{z+z'} = \overline{a+c+i(b+d)} = a + c - i(b+d) = a - ib + c - id = \overline{z} + \overline{z'}$; $\overline{zz'} = \overline{ac - bd + i(ad + bc)} = ac - bd - i(ad + bc)$ et $\overline{z}\,\overline{z'} = (a - ib)(c - id) = ac - bd - i(ad + bc)$. La dernière propriété est tellement évidente que je vous épargne le calcul. □

Proposition 33. Pour tout nombre complexe z, on a $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ et $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$.
Par conséquent, z est un nombre réel si et seulement si $z = \overline{z}$ et z est imaginaire pur si et seulement si $z = -\overline{z}$.

Démonstration. Comme $z = a + ib$ et $\overline{z} = a - ib$, on a bien $z + \overline{z} = 2a = 2\,\mathrm{Re}(z)$, et $z - \overline{z} = 2ib = 2i\,\mathrm{Im}(z)$. □

Proposition 34. Soit z un nombre complexe et M son image dans un repère orthonormal du plan. Alors l'image de $\overline{z}$ est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du fait que le symétrique de $M(a,b)$ par rapport à l'axe des abscisses est $M'(a,-b)$. □

2.1.3 Module

Définition 34. Le **module** d'un nombre complexe $z = a + ib$, noté $|z|$, est le réel positif $\sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Démonstration. On a bien $z\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$. □

Remarque 23. Le calcul précedent devrait vous rappeler quelque chose : on a $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$. On utilise cette propriété pour « simplifier » les quotients de deux nombres complexes en multipliant numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur, par exemple :

$$\frac{2+i}{3-4i} = \frac{(2+i)(3+4i)}{|3-4i|} = \frac{2+11i}{5}$$

Remarque 24. Pour un nombre réel, le module coincide avec la valeur absolue, ce qui explique que la notation soit la même.

Proposition 35. Pour tous nombres complexes z et z', on a $|zz'| = |z||z'|$. Si $z' \neq 0$, $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$.
De plus, $|z| = |\overline{z}|$, et $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

Démonstration. En effet, $|zz'| = \sqrt{zz'\overline{zz'}} = \sqrt{z\overline{z}z'\overline{z'}} = |z|.|z'|$. Le quotient se fait de la même façon. Le fait que $|z| = |\overline{z}|$ découle immédiatement de la définition. Enfin, pour que $|z| = |a + ib| = 0$, il faut avoir $a^2 + b^2 = 0$, ce qui ne se produit que si $a = b = 0$, donc si $z = 0$. □

Remarque 25. Si M est l'image de z dans un repère orthonormé d'origine O, le module de z représente tout simplement la distance OM.

Proposition 36. Soit z un nombre complexe, alors $|\,\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|$ et $|\,\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|$.

Démonstration. C'est évident en utilisant la remarque précédente, puisque $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$ représentent les distances de O aux projetés orthogonaux de M sur les axes du repère. □

Théorème 3. Inégalité triangulaire
Soient z et z' deux nombres complexes, alors $||z| - |z'|| \leqslant |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$. De plus, l'inégalité de droite est une égalité si et seulement si $z = \lambda z'$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) ou $z' = 0$.

Démonstration. Commençons par l'inégalité de droite : $|z+z'|^2 = (z+z')(\overline{z}+\overline{z'}) = |z|^2+|z'|^2+2\operatorname{Re}(\overline{z}z') \leqslant |z|^2+|z'|^2+2|zz'| = (|z|+|z'|)^2$. Tous ces modules étant des réels positifs, l'inégalité triangulaire en découle par passage à la racine carrée.

L'inégalité de gauche est en fait presque la même que celle de droite. En effet, appliquons cette dernière à z' et $z-z'$, on obtient $|z| \leqslant |z'|+|z-z'|$, donc $|z|-|z'| \leqslant |z-z'|$. En inversant le rôle de z et z', on a de même $|z'|-|z| \leqslant |z'-z|$, ce qui permet d'ajouter la valeur absolue au membre de gauche. Ne reste plus qu' remplacer z en $-z$ pour la forme de l'énoncé.

Enfin, d'après la démonstration faite, l'égalité dans l'inégalité de droite se produit exactement quand $\operatorname{Re}(\overline{z}z') = |zz'|$, ou encore quand $\operatorname{Im}(\overline{z}z') = 0$, donc si $\operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z') - \operatorname{Im}(z)\operatorname{Re}(z') = 0$. Autrement dit, les couples $(\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z))$ et $(\operatorname{Re}(z'), \operatorname{Im}(z'))$ sont proportionnels, ce qui signifie que les images des complexes z et z' sont alignés avec O dans le plan complexe. Cela correspond exactement à la condition donnée. □

Remarque 26. On peut facilement généraliser l'inégalité à plus de deux nombres complexes : $|z_1+\cdots+z_n| \leqslant |z_1|+\cdots+|z_n|$. Cette inégalité triangulaire généralisée se prouve par récurrence.

Une dernière application géométrique du module, la définition des cercles dans le plan complexe :

Proposition 37. Soit a un complexe, A son image et r un réel positif. L'ensemble M des points du plan d'affixe z vérifiant $|z-a| = r$ (respectivement $|z-a| \leqslant r$ et $|z-a| < r$) est le cercle (respectivement le disque fermé et ouvert) de centre A et de rayon r.

Démonstration. C'est évident dès qu'on a constaté que $|z-a|$ représentait la distance AM. □

Exemple : On peut passer de ce type d'équation de cercle à une équation cartésienne (faisant intervenir les deux corordonnées sous la forme (x,y)) par un calcul élémentaire. Faisons-le sur un exemple, celui du cercle de centre $A(1+i)$ et de rayon 2. En posant $z = x+iy$, on part de $|z-(1+i)|^2 = 4$, soit $(z-1-i)(\overline{z}-1+i) = 4$, donc $(x+iy-1-i)(x-iy-1+i) = 4$. Il ne reste plus qu'à développer : $x^2-ixy-x+ix+ixy+y^2-iy-y-x+iy+1-i-ix-y+i+1 = 4$, soit $x^2+y^2-2x-2y-2 = 0$.

2.2 Complexes et trigonométrie

2.2.1 Groupe des complexes de module 1

Définition 35. On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 (ou nombres complexes **unimodulaires**). Cet ensemble est stable par produit et passage à l'inverse.

Démonstration. Si z et z' sont deux nombres complexes de module 1, on a $|zz'| = |z||z'| = 1$, et $|z^{-1}| = \dfrac{1}{|z|} = 1$, donc $\mathbb{U}$ est bien stable par produit et inversion. □

Remarque 27. Le produit complexe, restreint à $\mathbb{U}$, est donc associatif, possède un élément neutre 1, et tout élément de $\mathbb{U}$ est inversible. Ce sont ces propriétés qui font de $\mathbb{U}$ ce qu'on appelle un groupe commutatif, notion que étudierons plus en détail dans un chapitre ultérieur.

Définition 36. Soit x un réel quelconque, on note e^{ix} le nombre complexe $\cos x + i \sin x$.

Proposition 38. Pour tous réels x et y, on a $\overline{e^{ix}} = e^{-ix} = \left(e^{ix}\right)^{-1}$, et $e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}$. De plus, $e^{ix} \in \mathbb{U}$.

Démonstration. En effet, $\overline{e^{ix}} = \cos(x) - i\sin(x) = \cos(-x) + i\sin(-x) = e^{-ix}$, et d'après la formule que nous allons montrer juste après, $e^{ix}e^{-ix} = e^{i0} = 1$, donc $e^{-ix} = \left(e^{ix}\right)^{-1}$. La deuxième propriété découle imédiatement des formules d'addition pour le cos et le sin : $e^{ix}e^{iy} = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) + i(\cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y)) = \cos(x+y) + i\sin(x+y)$. Enfin, la dernière affirmation peut être démontrée de plusieurs façons, par exemple par calcul direct : $|e^{ix}| = \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$. □

Théorème 4. Soit $z \in \mathbb{U}$, alors z peut s'écrire sous la forme e^{ix}, où x est un réel unique modulo 2π.

Démonstration. Comme $|z| = 1$, le point $M(a; b)$ image de z dans le plan appartient au cercle trigonométrique. On a donc $a = \cos(x)$ et $b = \sin(x)$, où x est un angle défini à 2π près, et $z = a + ib = e^{ix}$. □

Remarque 28. Le réel x s'interprétant naturellement comme un angle, on utilise souvent la variable θ pour le paramétrage : $\mathbb{U} = \{e^{i\theta} \mid \theta \in [0; 2\pi[\}$.

2.2.2 Argument d'un nombre complexe

Proposition 39. Tout nombre complexe non nul z peut s'écrire sous la forme $re^{i\theta}$, où $r = |z| \in \mathbb{R}^+$, et θ est un réel défini à 2π près. Cette écriture est appelée **forme trigonométrique** du nombre complexe z.

Démonstration. C'est une application immédiate du théorème du paragraphe précedent : $z = |z|\dfrac{z}{|z|}$, et le complexe $\dfrac{z}{|z|}$ ayant pour module 1, il peut s'écrire sous la forme $e^{i\theta}$. □

Définition 37. Le réel θ est appelé **argument** du nombre complexe z, et noté $arg(z)$ (il n'est pas unique). L'unique valeur de θ appartenant à l'intervalle $]-\pi; \pi]$ est l'**argument principal** de z, souvent noté $Arg(z)$.

Remarque 29. Le nombre complexe 0 est donc le seul à ne pas posséder d'argument.

Proposition 40. Les arguments vérifient les propriétés suivantes :
- $\arg(-z) = \arg(z) + \pi$
- $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$
- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$
- $\arg\left(\dfrac{z}{z}\right) = \arg(z) - \arg(z')$

Démonstration. C'est en fait une simple redite des propriétés vues au paragraphe précédent. Si $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$, on a les formes trigonométriques suivantes : $-z = r(-e^{i\theta}) = r(-\cos(\theta) - i\sin(\theta)) = r(\cos(\theta + \pi) + i\sin(\theta + \pi)) = re^{i(\theta+\pi)}$; $\overline{z} = \overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$; $zz' = rr'e^{i\theta}e^{i\theta'=rr'e^{i(\theta+\theta')}}$, et de même pour le quotient. □

2.2.3 Applications en trigonométrie

Proposition 41. Formules d'Euler.
Pour tout réel θ, $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

Démonstration. C'est en fait une simple redite pour le cas de $e^{i\theta}$ des formules $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ et $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$ □

Proposition 42. Formules de Moivre.
Pour tout réel θ, $\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n$.

Démonstration. De façon équivalente, il suffit de montrer que $e^{in\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n$, ce qui se prouve aisément par récurrence : c'est une évidence pour $n = 1$, et si la formule est vraie au rang n, alors $e^{i(n+1)\theta} = e^{in\theta+i\theta} = e^{in\theta}e^{i\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n e^{i\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^{n+1}$. □

Plus que les formules elles-mêmes, ce sont quelques calculs classiques les utilisant qu'il faut connaitre :
Exemple 1 : On a vu dans le premier chapitre des formules de duplication et de triplication du cosinus. Les formules de Moivre et d'Euler permettent plus généralement de calculer $\cos(n\theta)$ comme

un polynome en $\cos(\theta)$ (et de même pour le sinus) via la formule du binome de Newton. Par exemple (attention les yeux) :

$$\begin{aligned}\cos(5\theta) &= \frac{e^{5i\theta}+e^{-5i\theta}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left((\cos(\theta)+i\sin(\theta))^5+(\cos(\theta)-i\sin(\theta))^5\right) \\ &= \frac{1}{2}(\cos^5(\theta)+5i\cos^4(\theta)\sin(\theta)-10\cos^3(\theta)\sin^2(\theta)-10i\cos^2(\theta)\sin^3(\theta) \\ &\quad +5\cos(\theta)\sin^4(\theta)+i\sin^5(\theta)+\cos^5(\theta)-5i\cos^4(\theta)\sin(\theta) \\ &\quad -10\cos^3(\theta)\sin^2(\theta)+10i\cos^2(\theta)\sin^3(\theta)+5\cos(\theta)\sin^4(\theta)-i\sin^5(\theta)) \\ &= \cos^5(\theta)-10\cos^3(\theta)(1-\cos^2(\theta))+5\cos(\theta)(1-\cos^2(\theta))^2 \\ &= 16\cos^5(\theta)-20\cos^3(\theta)+5\cos(\theta)\end{aligned}$$

Exemple 2 : Dans l'autre sens, on peut facilement linéariser les puissances du cosinus (et du sinus), c'est-à-dire les exprimer en fonction des cosinus des multiples de θ, par exemple :

$$\cos^3(\theta)=\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^3=\frac{1}{8}(e^{3i\theta}+3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}+e^{-3i\theta})=\frac{1}{8}(2\cos(3\theta)+6\cos(\theta))=\frac{1}{4}\cos(3\theta)+\frac{3}{4}\cos(\theta)$$

Exemple 3 : Une autre technique utile est celle de la factorisation par l'angle moitié, par exemple $e^{i\theta}+1=e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)=2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$.
Un exemple d'application à un calcul de somme :

$$\sum_{k=0}^{k=n}\cos(k\theta)=\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{k=n}e^{ik\theta}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{-2ie^{i(n+1)\frac{\theta}{2}}\sin(\frac{(n+1)\theta}{2})}{-2ie^{i\frac{\theta}{2}}\sin(\frac{\theta}{2})}\right)=\frac{\cos(\frac{n\theta}{2})\sin(\frac{(n+1)\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})}$$

(on utilise en cours de calcul la formule de calcul d'une somme de termes d'une suite géométrique, qui fonctionne très bien avec des nombres complexes).

2.2.4 Exponentielle complexe

On peut en fait généraliser la définition de l'exponentielle à tout nombre complexe.

Définition 38. Soit $z=a+ib$ un nombre complexe, son exponentielle est le nombre $e^z=e^ae^{ib}$.

Remarque 30. Cette définition généralise à la fois celle de l'exponentielle réelle et celle donnée pour les imaginaires purs. On a en fait $\arg(e^z)=\mathrm{Im}(z)$ et $|e^z|=e^{\mathrm{Re}(z)}$.

Proposition 43. La fonction exponentielle complexe est $2i\pi$-périodique, et vérifie la propriété $e^{z+z'}=e^ze^{z'}$.

Démonstration. La périodicité découle simplement du fait que $e^{2i\pi}=1$, et l'équation fonctionnelle est issue de celle vérifiée par les deux exponentielles déjà définies précédemment. □

2.3 Équations complexes

2.3.1 Racines n-èmes de l'unité

Définition 39. Les **racines n-èmes** d'un nombre complexe a sont toutes les solutions de l'équation $z^n=a$.

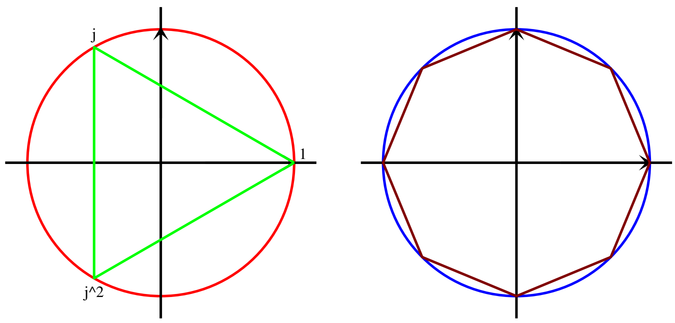
Remarque 31. Cette équation a en général plusieurs solutions, il est hors de question de parler de **la** racine n-ème d'un complexe comme on peut le faire pour un réel. De même, le symbole $\sqrt{\ }$ est à éviter absolument quand on travaille avec des complexes, du fait de l'absence de distinction possible entre les deux racines carrées d'un nombre complexe (pas de positivité sur $\mathbb{C}$, ni même de notion d'ordre).

Définition 40. On appelle **racines n-èmes de l'unité** les racines n-èmes du nombre 1.

Théorème 5. Les racines n-èmes de l'unité sont les n complexes $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, k variant de 0 à $n-1$.

Démonstration. En effet, soit $z = re^{i\theta}$ un nombre complexe (non nul) mis sous forme trigonométrique. On a $z^n = 1$ si et seulement si $r^n = 1$ et $e^{in\theta} = 1$. Or, r étant un réel positif, on a nécessairement $r = 1$, et $e^{in\theta} = 1 \Leftrightarrow in\theta \equiv 0[2\pi]$, donc $\theta \equiv 0 \left[\frac{2\pi}{n}\right]$, ce qui donne bien, modulo 2π, les n valeurs annoncées. □

Si on essaie de visualiser dans le plan complexe le résultats précédent, les racines n-èmes forment en fait un n-gone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique, par exemple pour $n = 3$ et $n = 8$:



Définition 41. On note habituellement j le nombre complexe $e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Les racines cubiques de l'unité sont 1, j et $j^2 = \overline{j}$.

Démonstration. En effet, la troisième racine cubique de l'unité est d'après le théorème précédent $e^{\frac{4i\pi}{3}}$, qui est bien égale à j^2. De plus, $\overline{j} = \cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{4i\pi}{3}}$. □

Remarque 32. Plus généralement, on peut en fait remarquer qu'en notant $\omega = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, l'ensemble des racines n-èmes de l'unité est constitué des nombres de la forme ω^k, pour k variant entre 0 et $n-1$ (ω est appelée racine n-ème primitive de l'unité, car on peut obtenir toutes les autres en prenant les puissances de celle-ci). En particulier, il est stable par produit, ce qui en fait, tout comme $\mathbb{U}$, un **groupe**. Il s'agit même d'un sous-groupe de $\mathbb{U}$, puisqu'il est inclus dans ce dernier (les racines n-èmes de l'unité ayant toujours pour module 1). On le note $\mathbb{U}_n$.

Proposition 44. Les éléments de $\mathbb{U}_n$ vérifient les propriétés suivantes : $\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n} \omega = 0$; et pour tout nombre complexe z, $\prod_{\omega\in\mathbb{U}_n} (z-\omega) = z^n - 1$.

Démonstration. La première égalité est un simple calcul : $\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n} \omega = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^k = \frac{e^{2i\pi}-1}{e^{\frac{2i\pi}{n}}-1} = 0$. Pour démontrer la deuxième, nous avons besoin de quelques propriétés élémentaires des polynomes qui seront démontrées plus loin dans le cours, notamment le fait qu'un polynome de degré n admet exactement n racines $z_1, \dots z_n$ dans $\mathbb{C}$ (éventuellement multiples) et qu'on peut le factoriser comme produit de monomes de la forme $P(z) = \alpha\prod_{i=1}^{n}(z-z_i)$, α étant le coefficient dominant du polynome P. Ici, $\alpha = 1$, et les n racines du polynome sont, par définition, les racines n-èmes de l'unité, ce qui donne la factorisation annoncée. □

Tous ces calculs se généralisent facilement aux cas des racines n-èmes de n'importe quel combre complexe non nul, contentons-nous d'énoncer le résultat suivant :

Proposition 45. Soit $z = re^{i\theta}$ un nombre complexe mis sous forme trigonométrique. Ses n racines n-èmes sont les nombres de la forme $\sqrt[n]{r}e^{\frac{i(\theta+2k\pi)}{n}}$, $k \in \{0, \dots, n-1\}$.

Démonstration. L'équation $z^n = re^{i\theta}$ se résout de la même façon que $z^n = 1$, et on obtient les racines démandées sans difficulté. □

Exemple : On cherche à déterminer les racines cubiques de $a = 2+2i$. Commençons par écrire a sous forme exponentielle : $|a| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$, donc $a = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. En notant $z = re^{i\theta}$, l'équation $z^3 = a$ se ramène à $r^3e^{3i\theta} = a$, c'est-à-dire aux deux conditions $r^3 = 2\sqrt{2}$ et $3\theta \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$, soit $r = \sqrt{2}$, et $\theta \equiv \frac{\pi}{12}\left[\frac{2\pi}{3}\right]$. Autrement dit, les trois racines cubiques sont $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$, $z_2 = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3})} = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$, et $z_3 = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{12}+\frac{4\pi}{3})} = \sqrt{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}$.

Remarque 33. En particulier, tout nombre complexe non nul admet deux racines carrées, qui sont opposées l'une de l'autre.

2.3.2 Équations du second degré

Théorème 6. Soit à résoudre une équation de la forme $az^2 + bz + c = 0$ (les coefficients a, b et c étant des nombres complexes, et a non nul). On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ et δ une des deux racines carrées de Δ. Alors notre équation admet deux solutions $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$. Dans le cas où $\Delta = 0$, ces deux solutions sont confondues, égales à $\frac{-b}{2a}$. Si les coefficients sont réels et $\Delta < 0$, z_1 et z_2 sont conjugués l'un de l'autre.

Démonstration. La preuve est la même que dans le cas réel : en divisant l'équation par a puis en mettant sous forme canonique, on obtient $\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$. Si Δ est nul, il n'y a qu'une seule solution égale à $\frac{-b}{2a}$. Sinon, on a $z + \frac{b}{2a} = \frac{\delta}{2a}$ ou $z + \frac{b}{2a} = -\frac{\delta}{2a}$, ce qui donne les deux solutions annoncées. □

Méthode : Pour obtenir une racine carrée d'un nombre complexe, il est en général conseillé d'utiliser la méthode trigonométrique vue au paragraphe précédent, mais on peut également le faire algébriquement : si $z^2 = a + ib$, avec $z = x + iy$, alors par égalité des modules $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2}$, mais comme $\operatorname{Re} z^2 = a$, on a aussi $x^2 - y^2 = a$, dont on déduit les valeurs de x^2 et de y^2. Ensuite, l'égalité des parties imaginaires donne $2xy = b$, ce qui permet de connaitre les signes de x et de y (il y a bien entendu deux possibilités).
Par exemple, pour résoudre $z^2 = 12 + 5i$, on obtient $x^2 + y^2 = \sqrt{12^2+5^2} = 13$ et $x^2 - y^2 = 12$, donc $2a^2 = 25$ et $2b^2 = 1$, soit $a = \pm\frac{5}{\sqrt{2}}$ et $b = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Et comme enfin $2ab = 5$, on obtient les deux solutions $z_1 = \frac{5+i}{\sqrt{2}}$ et $z_2 = \frac{-5-i}{\sqrt{2}}$.
Exemple : On veut résoudre l'équation $z^2 - iz - i - 1 = 0$. On calcule donc le discriminant $\Delta = (-i)^2 - 4(-i-1) = -1 + 4i + 4 = 3 + 4i$. Cherchons donc $\delta = a + ib$ vérifiant $\delta^2 = 3 + 4i$. Comme $\delta^2 = a^2 - b^2 + 2iab$, on obtient les deux conditions $a^2 - b^2 = 3$ et $2ab = 4$. On ajoute la condition sur le module $|\delta|^2 = a^2 + b^2 = |\Delta| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$. En additionant et soustrayant la première et la dernière équation, on a $2a^2 = 8$, soit $a = \pm 2$; et $2b^2 = 2$, soit $b = \pm 1$. Comme par ailleurs $2ab > 0$, a et b doivent être de même signe, ce qui laisse les possibilités $\delta_1 = 2+i$ et $\delta_2 = -2-i$. Les solutions de l'équation initiale sont donc $z_1 = \frac{i+2+i}{2} = 1 + i$, et $z_2 = \frac{i-2-i}{2} = -1$.

Proposition 46. Soient z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation $az^2+bz+c=0$, alors $z_1+z_2=-\dfrac{b}{a}$ et $z_1z_2=\dfrac{c}{a}$.

Démonstration. On peut s'en sortir directement avec les formules donnant les solutions : $z_1+z_2=\dfrac{-b-\delta}{2a}+\dfrac{-b+\delta}{2a}=\dfrac{-2b}{2a}-\dfrac{b}{a}$, et $z_1z_2=\dfrac{-b-\delta}{2a}\dfrac{-b+\delta}{2a}=\dfrac{b^2-\delta^2}{4a^2}=\dfrac{4ac}{4a^2}=\dfrac{c}{a}$. □

Terminons ce paragraphe en citant, sans le démontrer, un théorème extrêmement fondamentale sur les équations complexes :

Théorème 7. D'Alembert-Gauss.
Toute équation polynomiale admet au moins une solution dans $\mathbb{C}$.

Remarque 34. Ce théorème porte également le nom pompeux de théorème fondamental de l'algèbre. Il peut être précisé, le nombre de racines d'un polynome de degré n étant toujours égal à n si on les compte avec multiplicité. Nous reviendrons sur ces notions plus tard.

2.4 Complexes et géometrie

2.4.1 Affixes d'objets géométriques du plan

Nous avons déjà vus qu'on pouvait de façon naturelle associer un nombre complexe à chaque point du plan, et que le module et l'argument s'interprétaient respectivement comme une longueur et un angle. De façon similaire, on peut associer un nombre complexe aux vecteurs du plan :

Définition 42. L'**affixe** complexe du vecteur du plan $\overrightarrow{u}=x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}$ est le nombre $z_{\overrightarrow{u}}=x+iy$.

Proposition 47. Propriétés des affixes vectorielles :

- Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan, $z_{\vec{u}+\vec{v}}=z_{\vec{u}}+z_{\vec{v}}$.
- Pour tout vecteur $\vec{u}$ et tout réel λ, $z_{\lambda\vec{u}}=\lambda z_{\vec{u}}$.
- Pour tous points M et M' du plan, $z_{\overrightarrow{MM'}}=z_M-z_{M'}$.
- Pour tout système pondéré $((M_1,\alpha_1);\dots;(M_n,\alpha_n))$ de points du plan vérifiant $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$, le barycentre G du système a pour affixe $z_G=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i z_{M_i}$.

Démonstration.

- C'est une conséquence immédiate du fait que les coordonnées d'une somme de vecteurs sont obtenues en faisant la somme des coordonnées des deux vecteurs.
- C'est tout aussi immédiat.
- En effet, si M a pour coordonnées (a,b) et $M'(a',b')$, $\overrightarrow{MM'}=(a'-a)\overrightarrow{i}+(b'-b)\overrightarrow{(}j)$ a pour affixe $a'-a+i(b'-b)=a'+ib'-(a+ib)$.
- C'est une conséquence de la caractérisation vectorielle du barycentre : on a en particulier $\overrightarrow{OG}=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{OM_i}$, il ne reste plus qu'à prendre les affixes.

□

Plus intéressante est la propriété suivante, qui est la base de l'utilisation des complexes en géométrie :

Proposition 48. Soient A, B et C trois points du plan, alors $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\equiv\arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)[2\pi]$ et $\dfrac{AC}{AB}=\left|\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|$.

Démonstration. En effet, $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg(z_C - z_A) - \arg(z_B - z_A) = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{AC}) - (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et de même $\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \frac{\| \overrightarrow{AC} \|}{\| \overrightarrow{AB} \|} = \frac{AC}{AB}$. □

2.4.2 Produit scalaire et déterminant

Proposition 49. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan, alors $\vec{u}.\vec{v} = \mathrm{Re}(\overline{z_{\vec{u}}} z_{\vec{v}})$ et $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \mathrm{Im}(\overline{z_{\vec{u}}} z_{\vec{v}})$.

Démonstration. Si $\vec{u} = (a, b)$ et $\vec{v} = (a', b')$, alors $z_{\vec{u}} = a + ib$ et $z_{\vec{v}} = a' + ib'$, donc $\mathrm{Re}(\overline{z_{\vec{u}}} z_{\vec{v}}) = ab' + a'b = \vec{u}.\vec{v}$. De même, $\mathrm{Im}(\overline{z_{\vec{u}}} z_{\vec{v}}) = aa' - bb' = \det(\vec{u}, \vec{v})$. □

Proposition 50. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\frac{z_{\vec{u}}}{z_{\vec{v}}} \in i\mathbb{R}$. Ils sont colinéaires si et seulement si $\frac{z_{\vec{u}}}{z_{\vec{v}}} \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Il est plus simple de prouver cette proposition à l'aide du dernier résultat du paragraphe précédent, c'est même immédiat ! Mais si on reprend notre démonstration du cas d'égalité de l'inégalité triangulaire, on voit que ces conditions sont équivalentes à celles d'annulation des formules données ci-dessus pour le produit scalaire et le déterminant. □

2.4.3 Transformations du plan

Toutes les transformations du plan que vous avez pu étudier dans les classes antérieures peuvent s'exprimer simplement à l'aide des affixes complexes :

Proposition 51. Soit M un point du plan, z son affixe.

- L'image M' de M par la translation de vecteur $\vec{u}$ a pour affixe $z_{M'} = z_M + z_{\vec{u}}$.
- L'image M' de M par la rotation d'angle θ et de centre A a pour affixe $z_{M'} = e^{i\theta}(z_M - z_A) + z_A$.
- L'image M' de M par l'homothétie de rapport h et de centre A a pour affixe $z_{M'} = h(z_M - z_A) + z_A$.
- L'image M' de M par la réflexion d'axe (Ox) (respectivement (Oy) a pour affixe $z_{M'} = \overline{z_M}$ (resp. $z_{M'} = -\overline{z_M}$).

Démonstration.

- En effet, $z_{\vec{u}} = z_{\overrightarrow{MM'}} = z_{M'} - z_M$, dont on déduit la formule donnée.
- On peut caractériser l'image d'une rotation par le fait que $AM = AM'$, et $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) = \theta$. Autrement dit, le nombre complexe $\frac{z_A - z_{M'}}{z_A - z_M}$ a pour module 1 (le numérateur et le dénominateur ont pour module respectif AM' et AM), et pour argument θ. On peut donc écrire $\frac{z_A - z_{M'}}{z_A - z_M} = e^{i\theta}$, soit $z_{M'} = e^{i\theta}(z_M - z_A) + z_A$.
- Même principe que pour la rotation, on aura cette fois-ci $\frac{z_A - z_{M'}}{z_A - z_M} = h$ (le rapport des modules vaut h, et l'angle est nul), dont on déduit aisément la formule.
- On a déjà vu la caractérisation géométrique de la conjugaison. il suffit de constater que, si $z = a + ib$, $-\overline{z} = -a + ib$ pour en déduire que cela correspond à une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

□

Exemple : La rotation de centre $A(0; 1)$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ transforme $M(z)$ en $M'(z')$ avec $z' = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(z - i) + i = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3i}{2}$.

Remarque 35. Toutes ces transformations sont de la forme $z \mapsto az + b$ ou $z \mapsto a\overline{z} + b$ (pour les réflexions), avec a non nul et b quelconque. Par ailleurs, les transformations de la première catégorie conservent les angles orientés alors que celles de la deuxième catégorie les inversent, et seules les transformations pour lesquelles $a \in \mathbb{U}$ conservent les distances. Ce sont des cas particuliers du puissant théorème que nous allons maintenant énoncer.

Définition 43. Une transformation du plan est appelée **isométrie** si elle conserve les distances, et **similitude** de rapport λ si elle multiplie toutes les distances par un même réel $\lambda > 0$. Par ailleurs, une similitude (ou une isométrie) est dite **directe** si elle préserve les angles orientés, **indirecte** si elle transforme tout angle orienté en son opposé.

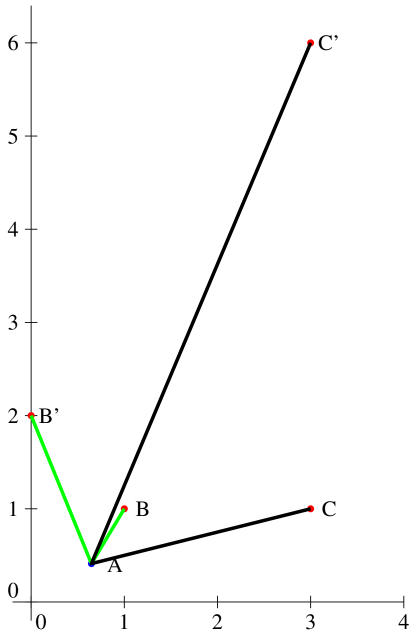
Théorème 8. Caractérisation complexe des isométries et des similitudes.
- Les similitudes directes du plan correpondent à une action sur les affixes complexes de la forme $z \mapsto az + b$, avec $a \neq 0$.
- Les isométries directes du plan correspondent à une action sur les affixes complexes de la forme $z \mapsto az + b$, avec $a \in \mathbb{U}$.
- Les similitudes indirectes du plan correspondent à une action sur les affixes complexes de la forme $z \mapsto a\overline{z} + b$, avec $a \neq 0$.
- Les isométries indirectes du plan correspondent à une action sur les affixes complexes de la forme $z \mapsto a\overline{z} + b$, avec $a \in \mathbb{U}$.

Démonstration. La démonstration est faisable par des moyens élémentaires, mais assez rébarbative, je vous en fais grâce. □

Méthode : Pour reconnaitre une similitude à partir de son équation $z' = az + b$, on peut procéder de la façon suivante (on traite le cas des similitudes directes, les similitudes indirectes étant de toute façon obtenues à partir de ces dernières par simple composition par la conjugaison).
- Si $a = 1$, on reconnait immédiatement une translation, dont le vecteur a pour affixe b.
- Si $a \neq 1$, l'application $z \mapsto az+b$ admet un unique point fixe ω, dont on notera Ω l'image dans le plan complexe. En notant $\lambda = |a|$ et $\alpha = \arg(a)$, l'application f est alors la composée d'une homothétie de centre Ω et de rapport λ, et d'une rotation de centre Ω et d'angle α. Le réel λ est appelé rapport de similitude de l'application f, et α angle de la similitude.

Exemple : Considérons l'application $f : z \mapsto (1+i)z - 2i$. On recherche le point fixe de l'application en résolvant l'équation $z = (1 + i)z - 2i$, ce qui donne $iz = 2i$, soit $z = \dfrac{1}{2}$. Comme par ailleurs $|1 + i| = \sqrt{2}$, et $\arg(1 + i) = \dfrac{\pi}{4}$, l'application f est la composée d'une rotation de centre $A\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$, et d'une homothétie de même centre A et de rapport $\sqrt{2}$.

Exemple 2 : Une isométrie peut également être décrite par l'image de certains points du plan. Ainsi, posons $B(1+i)$, $C(3+i)$, $B'(2i)$ et $C'(3+6i)$. On admet qu'il existe une unique similitude directe du plan f vérifiant $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$. Déterminons l'équation de cette similitude. On sait qiu'elle admet nécessairement une écriture de la forme $f(z) = az + b$, avec ici $f(1 + i) = a(1 + i) + b = 2i$, et $f(3 + i) = a(3 + i) + b = 3 + 6i$. En soustrayant les deux équations, on obtient immédiatement $2a = 3+4i$, soit $a = \dfrac{3}{2} + 2i$; puis on en déduit $b = 2i - a(1+i) = 2i - \dfrac{3}{2} - 2i - \dfrac{3}{2}i + 2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}i$. On a donc $f(z) = \left(\dfrac{3}{2} + 2i\right) z + \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}i$. Cherchons désormais le point fixe de cette similitude : $f(z) = z \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{2} + 2i\right) z + \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}i = z \leftrightarrow z = \dfrac{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i}{\frac{1}{2} + 2i} = \dfrac{-1 + 3i}{1 + 4i} = \dfrac{(-1 + 3i)(1 - 4i)}{17} = \dfrac{11 + 7i}{17}$. La similitude a donc pour centre $A\left(\dfrac{11}{17} + \dfrac{7}{17}i\right)$ Par ailleurs, la similitude a pour rapport $\left|\dfrac{3}{2} + 2i\right| = \sqrt{\dfrac{9}{4} + 4} = \sqrt{\dfrac{25}{4}} = \dfrac{5}{2}$; et pour angle $\arg\left(\dfrac{3}{2} + 2i\right)$, qui n'est pas un angle remarquable. Une illustration de ces calculs :



C'
B'
B
C
A
0
1
2
3
4
5
6
0
1
2
3
4

Chapitre 3

Géométrie plane

Qu'est-ce qu'un ours cartésien ?
Un ours polaire ... après changement de coordonnées !

Introduction

Ce premier chapitre de géométrie sera consacré à rappeler les principales définitions et propriétés relatives à la géométrie analytique dans le plan. Autrement dit, nous travaillerons toujours avec des coordonnées. La plupart des notions ont déjà été vues au lycée, et nous avons abordé dans le chapitre précédent leur interprétation en terme de nombres complexes. Nous ferons également un bilan de tout ce qu'il y a à savoir sur les deux types d'objets gémétriques les plus simples et les plus couramment utilisés dans le plan : les droites et les cercles.

Objectifs du chapitre :

- maitrise de la géométrie vectorielle et analytique élémentaire.
- capacité à calculer des équations d'objets simples et à déterminer des lignes de niveau

3.1 Repérage dans le plan

3.1.1 Rappels sur les vecteurs

Nous ne chercherons absolument pas à donner ici une définition de la notion de vecteur, qui reviendrait à tenter la peu satisfaisante caractérisation d'un vecteur par les trois données que sont sa direction, son sens et sa norme, comme vous avez pu le voir au lycée. Nous ferons nettement mieux un peu plus tard dans l'année. Pour l'instant, contentons-nous de garder notre vision intuitive de ce qu'est un vecteur : un objet mathématique caractérisant une translation, et concentrons-nous sur les opérations que nous connaissons les concernant.

Définition 44. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs, et t et t' les translations correspondantes. Le vecteur $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ est le vecteur caractérisant la translation $t' \circ t$. Une autre façon de voir les choses en utilisant des points : si les trois points A, B et C vérifient $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$, alors $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ (en effet, $B = t(A)$ et $C = t'(B)$ donc $C = t' \circ t(A)$). C'est la fameuse **relation de Chasles**.

Proposition 52. L'addition vectorielle est associative et commutative. Elle admet un élément neutre, le vecteur nul (correspondant à la translation identité) noté $\overrightarrow{0}$, et tout vecteur $\overrightarrow{u}$ admet un opposé noté $-\overrightarrow{u}$.

Démonstration. L'associativité et la commutativité découlent de celle de l'opération de composition sur les translations (la composition n'est en général pas commutative). Le vecteur nul est un élément neutre puisque $t \circ id = id \circ t = t$ quelle que soit la translation t, et l'existence d'un opposé découle du fait que toute translation est bijective et admet une réciproque qui est également une translation. Plus simplement, en notant $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, on constate en utlilisant la relation de Chasles que $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$. □

Remarque 36. Ces propriétés font de l'ensemble des vecteurs du plan, muni de son addition, un groupe commutatif.

Remarque 37. En termes de points, on aura $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$, et $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

Définition 45. À tout vecteur $\overrightarrow{u}$ et à tout réel λ, on peut associer un vecteur $\lambda\overrightarrow{u}$, de même direction de même sens si $\lambda > 0$ et de sens opposé sinon, et de norme mutlipliée par $|\lambda|$. Ce produit est appelé **produit extérieur** d'un vecteur par un nombre réel.

Proposition 53. Le produit extérieur vérifie les propriétés suivantes :
- Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$, $1\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$.
- Pour tous réels λ et μ, $(\lambda\mu)\overrightarrow{u} = \lambda(\mu\overrightarrow{u})$.
- Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et pour tout réel λ, $\lambda(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u} + \lambda v$.
- Pour tous réels λ et μ et pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$, $(\lambda + \mu)\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$.

Démonstration. On ne démontrera pas ces propriétés faute d'avoir une définition suffisamment pratique du produit extérieur. Cette démonstration ne présenterait de toute façon guère d'intérêt. □

Définition 46. Les deux dernières propriétés énoncées ci-dessus constituent la **double distributivité** du produit extérieur sur l'addition, vectorielle d'une part et réelle d'autre part. L'ensemble des propriétés vérifiées par l'addition vectorielle et par le produit extérieur font de l'ensemble des vecteurs du plan, muni de ces deux opérations, un **espace vectoriel réel**.

Remarque 38. Nous étudierons abondamment la notion d'espace vectoriel plus tard. On peut déjà en donner d'autres exemples : l'ensemble de toutes les suites, celui de toutes les fonctions (munis à chaque fois de la somme interne, et du produit extérieur par un réel).

Définition 47. Un vecteur est **unitaire** (ou **normé**) s'il a une norme égale à 1.

Définition 48. Deux vecteurs sont **colinéaires** s'ils forment un angle nul modulo π, ou si l'un des deux est nul. Ils sont **orthogonaux** s'ils forment un angle droit, c'est-à-dire un angle de $\frac{\pi}{2}$ modulo π.

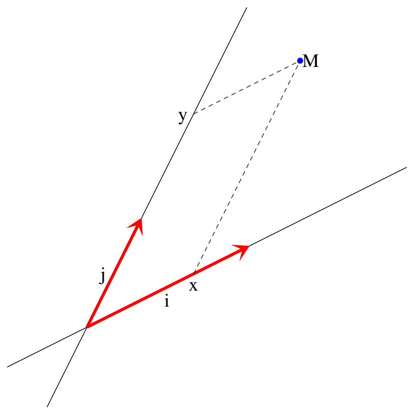
3.1.2 Repères cartésiens

Définition 49. Une **base** du plan est la donnée d'un couple de vecteurs $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ non colinéaires. Un **repère** du plan est la donnée d'un triplet $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, où O est un point du plan et $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ forment une base du plan. Le point O est alors appelé **origine** du repère, et les droites passant par O et dirigées par les vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ **axes** du repère, usuellement notés (Ox) et (Oy).

Définition 50. Une base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ (et les repères correspondants) est **orthogonale** si les vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ sont orthogonaux. Elle est **orthonormale** si de plus $\| \overrightarrow{i} \| = \| \overrightarrow{j} \| = 1$. Un repère orthonormal est **direct** si $(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}}) = \frac{\pi}{2}$

Théorème 9. Soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une base du plan. Tout vecteur du plan peut s'écrire de façon unique sous la forme $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$, où x et y sont deux réels appelés **coordonnées** du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Définition 51. Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère du plan, et M un point du plan. Les **coordonnées** du point M sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On notera ces coordonnées sous la forme $M(x; y)$.



Dans ce repère, le point M a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}, 2\right)$.

Remarque 39. Cette dernière définition constitue en fait une identification entre l'ensemble des points du plan, l'ensemble des vecteurs du plan, et l'ensemble $\mathbb{R}^2$ des couples de réels.

Méthode : Il existe évidemment énormément de repères dans le plan, et il faut être capable de passer d'un repère à l'autre. Plutôt que de vous donner des formules lourdes dans le cas général, je préfère vous expliquer la méthode, les calculs étant faciles à refaire. Considérons donc un point M, qui admet pour coordonnées (x, y) dans un premier repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, et dont on cherche à calculer les nouvelles coordonnées (x', y') dans un second repère $(O', \overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'})$. Pour cela, il faudra bien entendu au préalable avoir exprimé les vecteurs de la seconde base dans la première : $\overrightarrow{i'} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$, et $\overrightarrow{j'} = c\overrightarrow{i} + d\overrightarrow{j}$. On écrit alors $\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM} = -x_{O'}\overrightarrow{i} - y_{O'}\overrightarrow{j} + x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} = (x - x_{O'})\overrightarrow{i} + (y - y_{O'})\overrightarrow{j}$. Comme par ailleurs on a par définition $\overrightarrow{O'M} = x'\overrightarrow{i'} + y'\overrightarrow{j'} = ax'\overrightarrow{i} + bx'\overrightarrow{j} + cy'\overrightarrow{i} + dy'\overrightarrow{j} = (ax' + cy')\overrightarrow{i} + (bx' + dy')\overrightarrow{j}$, on obtient les deux équations $x - x_{O'} = ax' + cy'$ et $y - y_{O'} = bx' + dy'$. Reste un système à résoudre. Alternativement, on peut partir des coordonnées du point O dans le nouveau repère pour obtenir des formules donnant x' et y' en fonction de x et y.

Exemple : Considérons un premier repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et un second $(O', \overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'})$, où O' a pour coordonnées $(-1; 2)$ dans l'ancien repère, et $\overrightarrow{i'} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$, et $\overrightarrow{j'} = -\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}$. On considère le point M ayant pour coordonnée $(3, 3)$ dans le premier repère et on cherche ses coordonnées (x', y') dans le second. On écrit donc $3\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = -\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + x'\overrightarrow{i'} + y'\overrightarrow{j'} = -\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + x'(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}) + y'(-\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}) = (-1 + x' - y')\overrightarrow{i} + (2 + x' + 3y')\overrightarrow{j}$. Par identification, on a donc les deux équations $4 = x' + y'$ et $1 = x' + 3y'$. Une petit soustraction donne $3 = -2y'$, soit $y' = -\frac{3}{2}$, puis $x' = 4 - y' = \frac{11}{2}$. Les coordonnées cherchées sont donc $\left(\frac{11}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.

Proposition 54. Soient $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et $(O', \overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'})$ deux repères orthonormaux directs, et $\theta = \widehat{(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i'})}$, alors les coordonnées (x', y') d'un point M dans le nouveau repère sont en relation avec celles de l'ancien, notées (x, y), via les formules :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - x_{O'} & = & \cos(\theta)x' - \sin(\theta)y' \\ y - y_{O'} & = & \sin(\theta)x' + \cos(\theta)y' \end{array} \right.$$

3.1.3 Répérage polaire

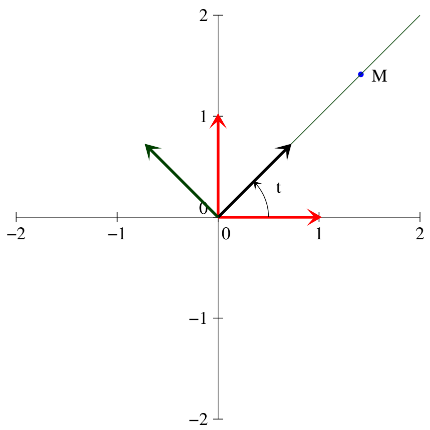
Le repérage polaire est une autre façon de décrire les points du plan à l'aide de deux réels, qui suppose un repère orthonormal direct déjà fixé. Si on veut se ramener aux notions vues dans le chapitre précédent, le repérage cartésien (couple de coordonnées (x, y)) correspond à l'écriture d'un nombre complexe sous forme algébrique $z = a + ib$, alors que le repérage polaire sera l'équivalent de la forme exponentielle $z = re^{i\theta}$.

Définition 52. Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormal direct, et $\theta \in \mathbb{R}$. Le **repère polaire** associé au réel θ est le repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}(\theta), \overrightarrow{v}(\theta))$, où $\overrightarrow{u}(\theta) = \cos(\theta)\overrightarrow{i} + \sin(\theta)\overrightarrow{j}$, et $\overrightarrow{v}(\theta) = -\sin(\theta)\overrightarrow{i} + \cos(\theta)\overrightarrow{j}$.

Remarque 40. Les vecteurs de base du repère polaire associé à l'angle θ sont parfois notés $\overrightarrow{u}_r$ (au lieu de $\overrightarrow{u}(\theta)$) et $\overrightarrow{u_\theta}$ (au lieu de $\overrightarrow{v(\theta)}$). Le repère polaire associé à l'angle θ correspond simplement à une rotation d'angle θ du repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Définition 53. Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormal direct, et M un point du plan distinct de l'origine O du repère. Un **couple de coordonnées polaires** du point M est un couple de réels (r, θ) tel que $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u}(\theta)$, où $\overrightarrow{u(\theta)}$ est le premier vecteur de la base du repère polaire associé à θ. Un tel couple est unique si $M \neq O$ si on impose de plus la condition $r > 0$ (l'angle θ est alors unique à 2π près), mais le couple $(-r, \theta + \pi)$ est également un couple de coordonnées polaires du point M.

Remarque 41. On peut convenir que n'importe quel couple de la forme $(0, \theta)$ constitue un couple de coordonnées polaires de l'origine O du repère.



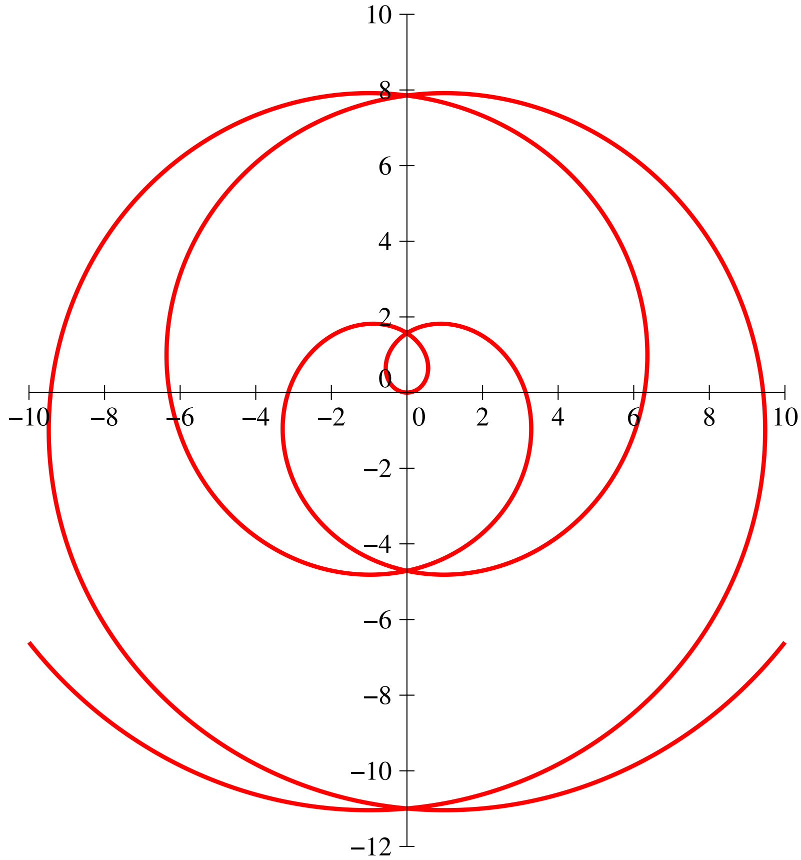
Sur ce schéma (où θ est noté t), le point M a pour coordonnées cartésiennes $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ et pour coordonnées polaires $\left(2, \dfrac{\pi}{4}\right)$ ou $\left(-2, -\dfrac{3\pi}{4}\right)$. En vert, le repère polaire associé à l'angle $\dfrac{\pi}{4}$

Proposition 55. Si un point M admet pour coordonnées cartésiennes (x, y), et pour coordonnées polaires (r, θ) dans un même repère, alors $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$. Dans l'autre sens, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\theta = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$ conviennent (quand cela a un sens et plus ou moins π pour avoir un angle dans le bon quart du cercle trigonométrique).

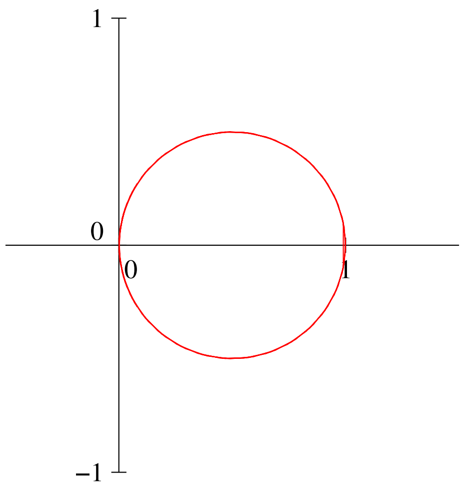
Démonstration. C'est quasi évident vue la définition des coordonnées polaires et du repère polaire associé à θ : $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u}(\theta) = r(\cos(\theta)\overrightarrow{i} + \sin(\theta)\overrightarrow{j}) = r\cos(\theta)\overrightarrow{i} + r\sin(\theta)\overrightarrow{j}$. Les formules dans l'autre sens doivent évidemment vous rappeler des souvenirs, cela correspond naturellement au calcul du module et de l'argument d'un nombre complexe. Elles découlent des précédentes : $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{r^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = r$, et $\arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) = \arctan\left(\dfrac{r\sin(\theta)}{r\cos(\theta)}\right) = \arctan(\tan(\theta)) = \theta$ si $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$. $\square$

Exemple : Les calculs de coordonnées polaires étant identiques à ceux de forme exponentielle d'un nombre complexe, vous en avez en fait déjà fait suffisamment dans le chapitre précédent. Par exemple, un couple de coordonnées polaires du point $(2,2)$ sera $\left(2\sqrt{2}; \dfrac{\pi}{4}\right)$. Ce même point aura également pour coordonnées polaires $\left(-2\sqrt{2}; \dfrac{-3\pi}{4}\right)$.

Remarque 42. Nous étudierons un peu plus tard dans l'année des exemples de courbes définies dans le plan par des équations polaires, c'est-à-dire des équations de la forme $r = f(\theta)$. Ces courbes sont très différentes des courbes auxquelles vous êtes habitués dans le cadre d'équations cartésiennes du type $y = f(x)$. En voici deux exemples pour vous donner un petit avant-goût, d'abord le simple $r = \theta$ qui donne une double spirale :



Et une fonction « trigonométrique » $r = \cos(\theta)$ qui donne ici un simple cercle :



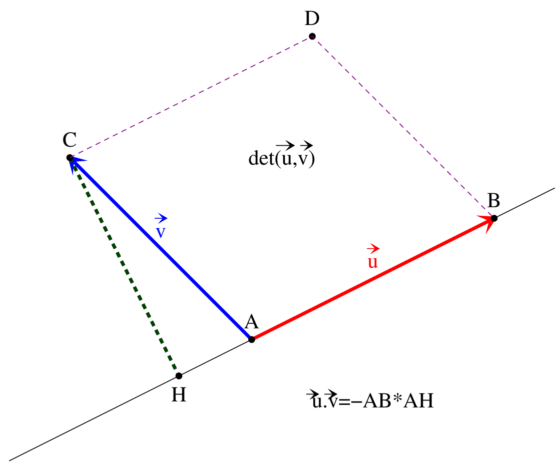
3.2 Produit scalaire et déterminant

3.2.1 Produit scalaire

Définition 54. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls du plan, le **produit scalaire** de ces deux vecteurs, noté $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$, est le réel $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \| \overrightarrow{u} \| \times \| \overrightarrow{v} \| \times \cos(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$. Si l'un des deux vecteurs est nul, le produit scalaire est nul.

Remarque 43. Rappelons que $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = \| \overrightarrow{u} \|^2$. On peut ainsi développer des carrés scalaires de sommes ou de différence comme des identités remarquables, par exemple $\| \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \|^2 = \| \overrightarrow{u} \|^2 + \| \overrightarrow{v} \|^2 + 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$.

Remarque 44. On peut donner une interprétation géométrique du produit scalaire en termes de projection : si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{v}$, en notant H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB), on peut écrire $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overline{AB}.\overline{AH}$ ($\overline{AB}$ désignant la mesure algébrique du segment $[AB]$, qui est égale à sa distance au signe près, deux segments de même direction mais de sens opposé ayant des mesures algébriques de signe opposés).



Proposition 56. Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de nos définitions : le produit scalaire est nul si et seulement si le cosinus de l'angle formé par les deux vecteurs est nul, ce qui se produit si cet angle est égal à $\frac{\pi}{2}[\pi]$, exactement la définition que nous avons donné pour l'orthogonalité. □

Proposition 57. Propriétés du produit scalaire
Le produit scalaire est :

- bilinéaire : $\overrightarrow{u}.(\lambda\overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{w}) = \lambda\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$ et $(\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}).\overrightarrow{w} = \lambda\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} + \mu\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w}$.
- symétrique : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$.
- défini positif : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} \geqslant 0$, et $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

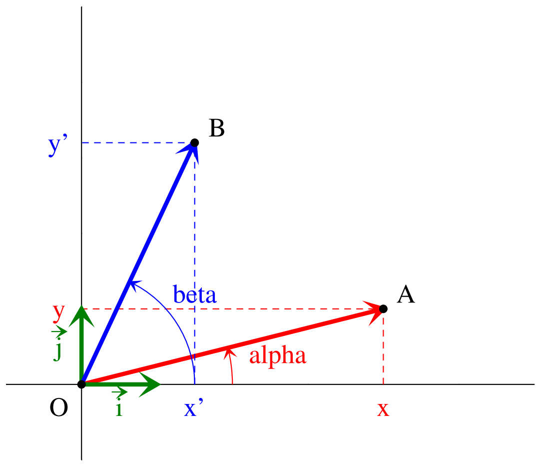
Démonstration.

- La bilinéarité est pénible à vérifier avec notre définition du produit scalaire, alors qu'elle est très facile avec l'expression dans une base orthormée : $x(\lambda x' + \mu x'') + y(\lambda y' + \mu y'') = \lambda(xx' + yy') + \mu(xx'' + yy'')$ (la deuxième partie découle de la symétrie).
- Il suffit de constater que $\cos(\widehat{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}}) = \cos(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$, ce qui découle de la parité du cosinus.
- C'est une conséquence immédiate du fait que $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = \| u \|^2$.

□

Proposition 58. Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ont pour coordonnées respectives (x, y) et (x', y') dans un repère orthonormal, alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy'$.

Démonstration. Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ le repère orthonormal dans lequel on connait nos coordonnées. Notons A et B les points tels que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{v}$, et notons $\alpha = (\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OA}})$ et $\beta = (\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OB}})$. On peut alors écrire $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = OA \times OB \times \cos(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = OA \times OB \times \cos(\beta - \alpha) = OA \times OB \times (\cos(\beta)\cos(\alpha) + \sin(\beta)\sin(\alpha))$. Or, $x = OA\cos(\alpha)$, $y = OA\sin(\alpha)$; $x' = OB\cos(\beta)$ et $y' = OB\sin(\beta)$. On obtient donc $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = OA \times OB \times \left(\frac{x}{OA} \times \frac{x'}{OB} + \frac{y}{OA} \times \frac{y'}{OB}\right) = xx' + yy'$. □



3.2.2 Déterminant

Définition 55. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan, leur **déterminant** est le nombre réel $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = |\overrightarrow{u} \quad \overrightarrow{v}| = \parallel \overrightarrow{u} \parallel \times \parallel \overrightarrow{v} \parallel \times \sin(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$.

Remarque 45. Avec les mêmes notations que pour le produit scalaire, on peut interpréter le déterminant comme $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = AB \times CH$ (au signe près). Plus intéressant, le déterminant représente l'aire algébrique du parallélogramme construit sur les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ (aire du parallélogramme $ABDC$ dans la figure tracée pour le produit scalaire).

Proposition 59. Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$.

Démonstration. Comme pour le déterminant, c'est une conséquence immédiate de nos définitions. □

Proposition 60. Propriétés du déterminant
Le déterminant est :

- bilinéaire : $\det(\overrightarrow{u}, \lambda\overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{w}) = \lambda\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + \mu\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})$ et $\det(\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \lambda\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}) + \mu\det(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$.
- antisymétrique : $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = -\det(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})$.

Démonstration. La bilinéarité est à nouveau facile à prouver une fois connue l'expression en base orthonormale, et l'antisymétrie découle de l'imparité du sinus. □

Proposition 61. Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ont pour coordonnées respectives (x, y) et (x', y') dans un repère orthonormal direct, alors $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = xy' - x'y$.

Démonstration. En reprenant les notations de la démonstration effectuée dans le cas du produit scalaire, $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = OA \times OB \times \sin(\beta - \alpha) = OA \times OB \times (\cos(\beta)\sin(\alpha) - \sin(\beta)\cos(\alpha)) = OA \times OB \times \left(\frac{y'}{OA} \times \frac{x}{OB} - \frac{x'}{OA} \times \frac{y}{OB}\right) = xy' - x'y$. □

Exemple : On peut calculer très rapidement des aires à l'aide du déterminant. Si on place dans un repère orthonormal les points $A(-1,1)$, $B(2,3)$ et $C(-4,6)$, l'aire du triangle ABC est donnée par $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(15+6) = \frac{21}{2}$.

3.3 Droites et cercles

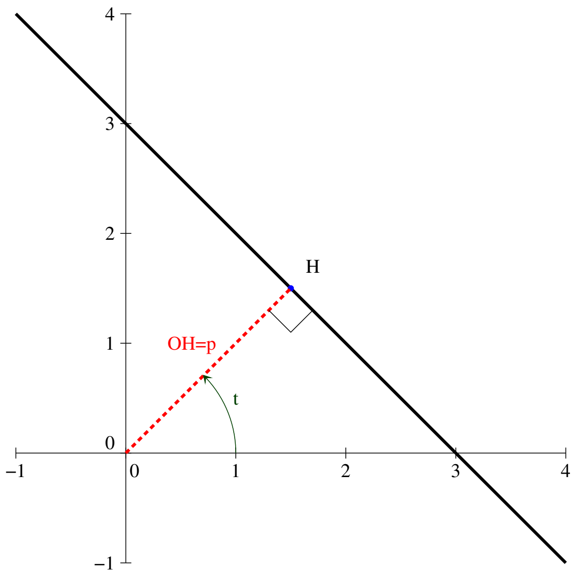
3.3.1 Équations de droites

Proposition 62. Équations cartésiennes de droite
Une équation du type $ax+by+c=0$, où a, b et c sont trois réels tels que $(a,b) \neq (0,0)$, est l'équation cartésienne d'une droite. Réciproquement, toute droite du plan admet une équation de cette forme.

Remarque 46. Une telle équation n'est pas unique, si on multiplie les trois coefficients a, b et c par une même constante non nulle k, on trouve une nouvelle équation de la même droite.

Proposition 63. Toute droite (d) du plan admet une équation de la forme $x\cos(\theta) + y\sin(\theta) = p$, où (p,θ) représente un couple de coordonnées polaires du projeté orthogonal H de l'origine O du repère sur la droite (d). Une telle équation est appelée **équation normale** de la droite (d).

Démonstration. En effet, un point $M(x,y)$ appartient à la droite (d) si et seulement si $\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{OH} = 0$, c'est-à-dire si $(x - p\cos(\theta))p\cos(\theta) + (y - p\sin(\theta))p\sin(\theta) = 0$, ce qui donne en développant $xp\cos(\theta) + yp\sin(\theta) = p^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) = p^2$. Il suffit alors de tout diviser par p pour obtenir l'équation normale (on vérifie sans mal que l'équation reste valable si $p = 0$). □



Remarque 47. Pour passer d'une équation cartésienne $ax+by+c=0$ à une équation normale, il suffit de diviser tous les coefficients par $\sqrt{a^2+b^2}$. On obtient alors une équation $a'x+b'y+c'=0$, avec $\sqrt{a'^2+b'^2} = 1$. On peut donc écrire $a' = \cos(\theta)$ et $b' = \sin(\theta)$ puisque le point (a',b') correspond à un point du cercle trigonométrique.

Définition 56. Un **vecteur directeur** d'une droite (d) du plan est un vecteur colinéaire à tout vecteur de la forme $\overrightarrow{AB}$, où A et B sont deux points appartenant à la doite (d). Un **vecteur normal** à la droite (d) est un vecteur orthogonal à tout vecteur directeur de la droite (d).

Remarque 48. Si le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées (a,b) dans un repère orthonormal est un vecteur directeur non nul de la droite (d), alors $\overrightarrow{v}(-b,a)$ est un vecteur normal à cette même droite, puisque $\overrightarrow{v}.\overrightarrow{n} = -ab+ba = 0$.

Proposition 64. Soit (d) une droite du plan passant par le point $A(x_A, y_A)$ et admettant le vecteur $\overrightarrow{n}(a,b)$ pour vecteur normal, alors l'équation $a(x-x_A)+b(y-y_A)$ est une équation cartésienne de la droite (d).

Démonstration. En effet, un point $M(x,y)$ appartient à la droite (d) si et seulement si $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AM}=0$, soit $a(x-x_A)+b(y-y_A)=0$. □

Exemple : On peut de même utiliser le déterminant pour obtenir une équation de droite à partir d'un vecteur directeur. Soit (d) la droite passant par $A(-1,2)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(-3,4)$. Un point $M(x,y)$ appartient à la droite (d) si et seulement si $\det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{u})=0$, soit $4(x+1)+3(y-2)=0$, ce qui donne l'équation cartésienne $4x+3y-2=0$. On procède de la même manière si la droite est définie par deux de ses points A et B, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ étant alors un vecteur directeur de la droite. Ces méthodes restent valables même si on ne se trouve pas dans un repère orthonormal, l'expression $xy'-x'y$ continuant alors à caractériser la colinéarité des vecteurs de coordonnées (x,y) et (x',y').

Définition 57. La droite (d) passant par le point $A(x_A,y_A)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(a,b)$ peut être décrite par le **système d'équations paramétriques** $\begin{cases} x &= x_A+at \\ y &= y_A+bt \end{cases}$, où $t\in\mathbb{R}$

Démonstration. En effet, un point $M(x,y)$ appartient à (d) si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{u}$, ce qu'on peut traduire par l'existence d'un réel t pour lequel $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{u}$. Cela donne les deux équations $x-x_A=ta$ et $y-y_A=tb$, dont découlent les formules. □

Proposition 65. Équations polaires de droite.
Soit (d) une droite du plan passant par l'origine O du repère, elle admet une équation polaire de la forme $\theta=\theta_0[\pi]$.
Si (d) ne passe pas par O, elle admet une équation de la forme $r=\dfrac{p}{\cos(\theta-\theta_0)}$, où (p,θ_0) constitue un couple de coordonnées polaires du projeté orthogonal du point O sur la droite (d).

Démonstration. Le premier cas est évident : si on considère un couple de coordonnées polaires (r,θ_0) d'un point de la droite distinct du point O, un point quelconque du plan appartient à la droite si et seulement s'il a un « argument » (pour parler en terme de nombres complexes) égal à θ_0 ou $\theta_0+\pi$. La deuxième équation s'obtient très facilement à partir de l'équation normale $x\cos(\theta_0)+y\sin(\theta_0)=p$, en remplaçant x et y par leurs équivalents polaires $r\cos(\theta)$ et $r\sin(\theta)$: on obtient $r(\cos(\theta)\cos(\theta_0)+\sin(\theta)\sin(\theta_0))=p$, soit en utilisant une formule d'addition trigonométrique $r\cos(\theta-\theta_0)=p$. □

Exemple : La droite d'équation cartésienne $x+y-4=0$ admet pour équation normale $\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}y=2\sqrt{2}$, donc pour équation polaire $r=\dfrac{2\sqrt{2}}{\cos(\theta-\frac{\pi}{4})}$. Inversement, la droite d'équation polaire $r=\dfrac{3}{\cos(\theta+\frac{2\pi}{3})}$ aura pour équation normale $-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}y=3$, et par exemple pour équation cartésienne $x+\sqrt{3}y+6=0$.

Proposition 66. Distance d'un point à une droite.
Soit $M(x_M,y_M)$ un point du plan, et (d) une droite. La distance de M à la droite (d) peut être donnée par une des quatre formules suivantes :

- Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de (d), alors $d(M,d)=\dfrac{|\det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{u})|}{\|\overrightarrow{u}\|}$.
- Si $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal à (d), alors $d(M,d)=\dfrac{|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}|}{\|\overrightarrow{n}\|}$.
- Si la droite a pour équation cartésienne $ax+by+c=0$, alors $d(M,d)=\dfrac{|ax_M+by_M+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

- Si la droite a pour équation normale $x\cos(\theta) + y\sin(\theta) = p$, alors $d(M, d) = |x_M \cos(\theta) + y_M \sin(\theta) - p|$.

Démonstration.
- Il faut revenir à l'interprétation géométrique du déterminant : $|\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u})| = \| \overrightarrow{u} \| \times MH$, où H est le projeté orthogonal du point M sur la droite (d). La distance MH étant égale à celle de M à (d), la formule en découle.
- C'est exactement comme ci-dessus, le produit scalaire avec un vecteur normal est (au signe près) égal à $\| n \| \times MH$.
- Quitte à tout diviser par $\sqrt{a^2 + b^2}$, on trouve une équation normale de la droite, et on se ramène au cas suivant.
- Le vecteur $\overrightarrow{n}(\cos(\theta), \sin(\theta))$ est un vecteur normal à (d) normé, et le point $A(p\cos(\theta), p\sin(\theta))$ appartient à la droite, donc en reprenant la deuxième formule démontrée, $d(M, d) = |\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}| = |(x_M - p\cos(\theta))\cos(\theta) + (y_M - p\sin(\theta))\sin(\theta)| = |x_M \cos(\theta) + y_M \sin(\theta) - p(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))| = |x_M \cos(\theta) + y_M \sin(\theta) - p|$.

□

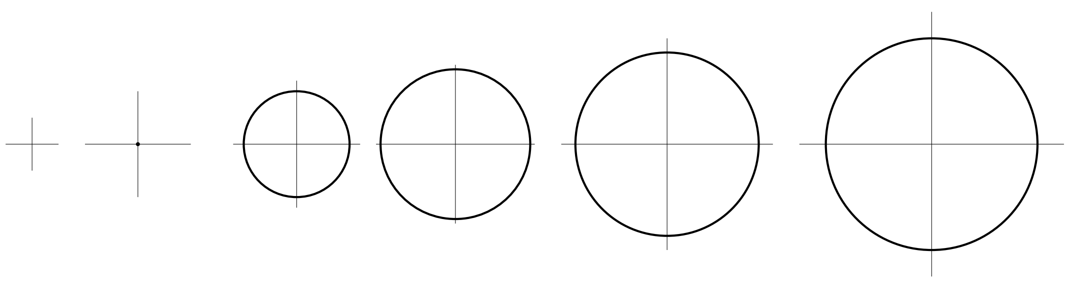
Exemple : Soit $M(3, 5)$ et (d) la droite d'équation cartésienne $2x - 3y + 1 = 0$, alors $d(M, d) = \dfrac{|6 - 15 + 1|}{\sqrt{4 + 9}} = \dfrac{8}{\sqrt{13}}$.

3.3.2 Lignes de niveau

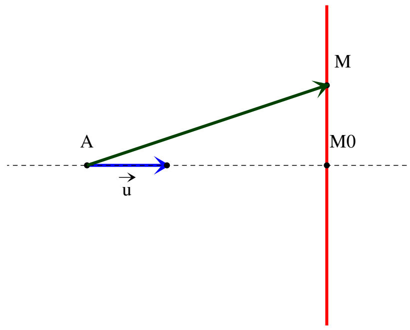
Définition 58. Soit f une application associant à tout point M du réel un nombre réel $f(M)$ (autrement dit, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est en fait une fonction à deux variables), et $k \in \mathbb{R}$. La **ligne de niveau k** de la fonction f est constituée de l'ensemble de tous les points M du plan vérifiant $f(M) = k$.

Remarque 49. Cette notion est très utilisée en dehors du domaine des mathématiques, par exemple en cartographie (où on trace usuellement pour indiquer le relief des lignes de niveau de la fonction altitude), ou en météorologie (lignes de niveau de pression ou de température).

Exemple : Considérons, dans un repère orthonormal d'origine O, la fonction définie par $f(M) = x^2 + y^2 = OM^2$ (carré de la distance à l'origine). Si $k < 0$, la ligne de niveau k associée à f est vide. Si $k \geqslant 0$, la ligne de niveau k associée à f est un cercle de centre O et de rayon $\sqrt{k}$. Ci-dessous, les lignes de niveau pour $k = -1$, 0, 1, 2, 3, 4.



Proposition 67. Soit A un point du plan et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul, les lignes de niveau de l'application f définie par $f(M) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{AM}$ sont des droites orthogonales à $\overrightarrow{u}$. Plus précisément, la ligne de niveau k est orthogonale à $\overrightarrow{u}$ et passe par le point M_0 vérifiant $\overrightarrow{AM_0} = \dfrac{k\overrightarrow{u}}{\parallel \overrightarrow{u} \parallel^2}$.



Sur ce schéma, en admettant que $\overrightarrow{u}$ est un vecteur normé, la droite rouge représente tous les points M pour lesquels $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{AM} = 3$.

Démonstration. Commençons par vérifier que M_0 appartient à la ligne de niveau : $f(M_0) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{AM_0} = \overrightarrow{u}.\dfrac{k\overrightarrow{u}}{\parallel \overrightarrow{u} \parallel^2} = \dfrac{k \parallel \overrightarrow{u} \parallel^2}{\parallel \overrightarrow{u} \parallel^2} = k$. On peut ensuite utiliser la linéarité du produit scalaire pour décomposer $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{AM_0} + \overrightarrow{u}\overrightarrow{M_0M} = k + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{M_0M}$. On en déduit que $f(M) = k \Leftrightarrow \overrightarrow{u}.\overrightarrow{M_0M} = 0$. Autrement dit, M appartient à la droite orthogonale à $\overrightarrow{u}$ passant par M_0. □

Exemple : Soient A et B deux points distants du plan tels que $AB = 4$, on chercher à déterminer l'ensemble des points M du plan pour lesquels $MA^2 - MB^2 = 8$. On peut utiliser le point I, milieu du segment $[AB]$, pour se ramener au cas étudié ci-dessus : $MA^2 - MB^2 = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}).(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) = 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA}$. Les points recherchés sont donc ceux vérifiant $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IM} = 4$, ils sont situés sur une droite orthogonale à (AB), passant par le point M_0 vérifiant $\overrightarrow{IM_0} = \dfrac{4}{16}\overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. Autrement dit, l'ensemble recherché est la droite perpendiculaire à (AB) passant par le milieu du segment $[IB]$ (on vérifie facilement que ce point M_0 vérifie la condition imposée : $MA = 3$ et $MB = 1$ donc $MA^2 - MB^2 = 9 - 1 = 8$). On peut évidemment effectuer ce genre de calcul plus directement si l'on travaille avec des coordonnées dans un repère orthonormal.

Proposition 68. Soit A un point du plan et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul, les lignes de niveau de l'application f définie par $f(M) = \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM})$ sont des droites dirigées par $\overrightarrow{u}$. Plus précisément, la ligne de niveau k est parallèle à $\overrightarrow{u}$ et passe par la point M_0 vérifiant $\overrightarrow{AM_0} = \dfrac{k\overrightarrow{n}}{\parallel \overrightarrow{u} \parallel^2}$, où $\overrightarrow{n}$ est le vecteur de même norme que $\overrightarrow{u}$ directement orthogonal à $\overrightarrow{u}$.

Démonstration. Le principe est le même que tout à l'heure : $f(M_0) = \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM_0}) = \det\left(\overrightarrow{u}, \dfrac{k\overrightarrow{n}}{\parallel \overrightarrow{u} \parallel^2}\right) = \dfrac{k \parallel \overrightarrow{u} \parallel . \parallel \overrightarrow{n} \parallel}{\parallel \overrightarrow{u} \parallel^2} = k$. On peut ensuite utiliser la linéarité du déterminant : $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM}) = \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM_0}) + \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{M_0M}) = k + \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{M_0M})$. On en déduit que $f(M) = k \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{M_0M}) = 0$. Autrement dit, M appartient à la droite parallèle à $\overrightarrow{u}$ passant par M_0. □

3.3.3 Équations de cercles

Définition 59. Équation cartésienne de cercle.

Dans un repère orthonormal, le cercle de centre $A(a,b)$ et de rayon R admet pour **équation cartésienne** $(x-a)^2+(y-b)^2 = R^2$. Réciproquement, toute équation de la forme $x^2+y^2-2ax-2by-c=0$ avec $a^2+b^2+c \geqslant 0$ est une équation de cercle de centre $A(a,b)$ et de rayon $R = \sqrt{c+a^2+b^2}$.

Exemple : On peut factoriser l'équation $x^2+y^2+8x-2y+14=0$ sous la forme $(x+4)^2+(y-1)^2=4$, où on reconnait le cercle de centre $A(-4,1)$ et de rayon 2.

Proposition 69. Le cercle de diamètre $[AB]$ admet pour équation $(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0$

Démonstration. Cela revient à dire qu'un point M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$, une propriété que vous connaissez bien depuis votre collège. Démontrons-là à coup de propriétés du produit scalaire, en introduisant le point I, milieu du segment $[AB]$ et donc centre du cercle de diamètre $[AB]$. On peut alors écrire $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}) = MI^2 + \overrightarrow{MI}.(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}) + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}$. Or, $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$, donc $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - IA^2$. Le produit scalaire est donc nul si et seulement si $MI = IA$, ce qui indique bien que M appartient au cercle de centre I et de rayon IA, autrement dit au cercle de diamètre $[AB]$. □

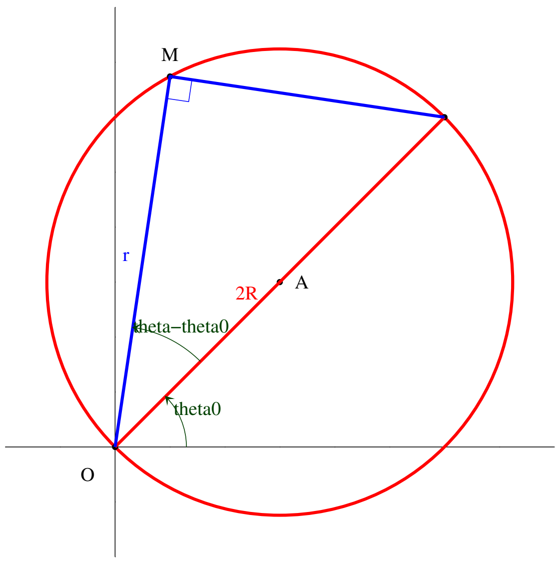
Définition 60. Le cercle de centre $A(a,b)$ et de rayon R peut être décrit dans un repère orthonormal par le **système d'équations paramétriques** $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & a+R\cos(t) \\ y & = & b+R\sin(t) \end{array}\right.$, où $t \in]-\pi,\pi]$ (on peut aussi prendre $t \in \mathbb{R}$, on parcourra simplement plusieurs fois le cercle).

Remarque 50. On reconnait, à une homothétie de rapport R et à une translation de vecteur de coordonnées (a,b) près, le classique paramétrage du cercle trigonométrique : $x=\cos(\theta)$ et $y=\sin(\theta)$.

Proposition 70. Le cercle passant pour l'origine O du repère, de centre A ayant pour coordonnées cartésiennes (a,b) et de rayon R admet pour équation polaire $r = 2a\cos(\theta)+2b\sin(\theta)$. De façon équivalente, son équation peut être mise sous la forme $r = 2R\cos(\theta-\theta_0)$, où (R,θ_0) est un couple de coordonnées polaires de son centre A.

Démonstration. Si le cercle passe par l'origine, il a une équation de la forme $x^2+y^2-2ax-2by=0$, soit $x^2+y^2+2ax+2by$. En remplaçant x et y par $r\cos(\theta)$ et $r\sin(\theta)$, on obtient $r^2 = 2ar\cos(\theta) + 2br\sin(\theta)$. Il suffit de diviser par r pour obtenir l'équation souhaitée, mais cela pose un problème pour $r=0$ (et l'origine est censée appartenir au cercle). En fait, en prenant θ tel que $\cos(\theta) = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin(\theta) = -\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, on constate que $r=0$ est également une solution de l'équation.

Pour trouver la deuxième équation, on note θ_0 l'angle tel que $\cos(\theta_0) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin(\theta_0) = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, et on pose $R = \sqrt{a^2+b^2}$ (qui correspond à la distance OA, c'est-à-dire au rayon du cercle). On obtient alors $r = 2R(\cos(\theta)\cos(\theta_0)+\sin(\theta)\sin(\theta_0)) = 2R\cos(\theta-\theta_0)$. Cette dernière équation est en fait très naturelle si on observe la figure suivante :

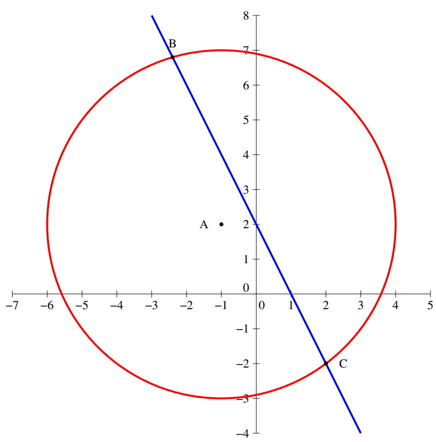


□

Proposition 71. Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre A et de rayon R et (d) une droite du plan. Alors :

- si $d(A,d) > R$, $\mathcal{C}$ et (d) ne se coupent pas.
- si $d(A,d) = R$, $\mathcal{C}$ et (d) se coupent en un point unique, on dit que la droite (d) est **tangente** au cercle $\mathcal{C}$.
- si $d(A,d) < R$, $\mathcal{C}$ et (d) ont deux points d'intersection distincts.

Exemple : Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $A(-1,2)$ et de rayon 5, et (d) la droite d'équation $2x+y-2=0$. On peut commencer par calculer $d(A,d) = \dfrac{|-2+2-2|}{\sqrt{4+1}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} < 5$ pour constater que $\mathcal{C}$ et (d) ont deux points d'intersection. Pour les déterminer on peut simplement exprimer y en fonction de x dans l'équation de la droite : $y = 2-2x$, et injecter cette expression dans l'équation du cercle : $(x+1)^2+(y-2)^2 = 25$ donne alors $(x+1)^2+(-2x)^2 = 25$, soit $x^2+2x+1+4x^2 = 25$, donc $5x^2+2x-24 = 0$. Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 4+480 = 484 = 22^2$, et admet donc deux racines $x_1 = \dfrac{-2-22}{10} = -\dfrac{12}{5}$ et $x_2 = \dfrac{-2+22}{10} = 2$. On trouve les valeurs correspondantes des ordonnées $y_1 = 2-2x_1 = \dfrac{34}{5}$, et $y_2 = 2-2x_2 = -2$. Le cercle et la droite se coupent donc en $B\left(-\dfrac{12}{5}, \dfrac{34}{5}\right)$, et en $C(2,-2)$.

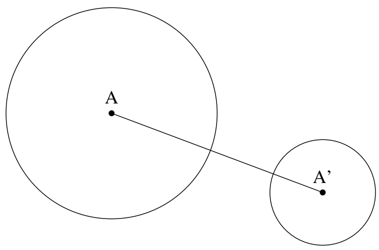


Proposition 72. Soit $\mathcal{C}$ le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2ax - 2by - c = 0$, et $M_0(x_0, y_0)$ un point de $\mathcal{C}$, alors une équation de la tangente en M à $\mathcal{C}$ est $xx_0 + yy_0 - a(x + x_0) - b(y + y_0) - c = 0$.

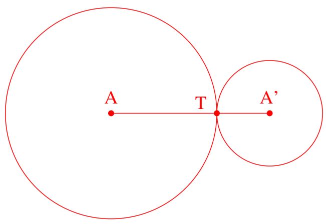
Démonstration. Un point $M(x, y)$ appartient à la tangente en M_0 à $\mathcal{C}$ si $\overrightarrow{M_OM}.\overrightarrow{AM_0} = 0$, soit $(x - x_0)(x_0 - a) + (y - y_0)(y_0 - b) = 0$. En développant, $xx_0 + yy_0 - ax - by + ax_0 + by_0 - x_0^2 - by_0^2$. Mais comme le point M_0 est sur le cercle, il vérifie l'équation $x_0^2 + y_0^2 = 2ax_0 + 2by_0 + c$, donc on retrouve la condition $xx_0 + yy_0 - a(x + x_0) - b(y + y_0) - c = 0$. $\square$

Proposition 73. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles du plan, de centres respectifs A et A' et de rayons respectifs R et R'. Alors :

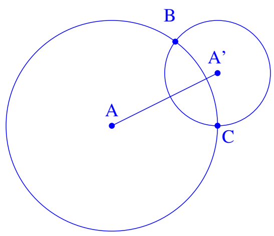
- si $AA' > R + R'$, les deux cercles ne se coupent pas.
- si $AA' = R+R'$, les deux cercles sont tangents extérieurement, ils ont un unique point commun.
- si $|R - R'| < AA' < R + R'$, les deux cercles se coupent en deux points distincts.
- si $AA' = |R - R'|$, les deux cercles sont tangents intérieurement, ils ont un unique point commun.
- si $AA' < |R - R'|$, les deux cercles ne se coupent pas.



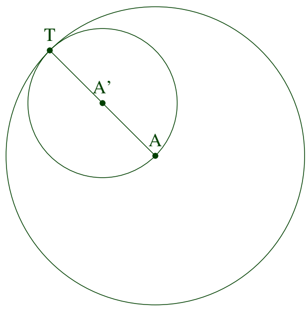
AA'>R+R'



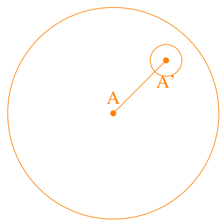
AA'=R+R'



|R−R'|<AA'<R+R'



AA'=|R−R'|



AA' < |R−R'|

Chapitre 4

Équations différentielles

Lors d'une grosse fiesta organisée chez les fonctions,
la fonction exponentielle peurniche dans un coin.
Les autres fonctions viennent la voir :
- Bah pourquoi tu pleures ?
- Bououh snif, je suis toute seule, bouhouhou.
- Bah viens avec nous, on va t'intégrer !
- Non, snif snif, c'est pas la peine, bouhouhou, ça changera rien !

4.1 Introduction

Les équations différentielles sont un outil absolument fondamental en mathématiques, intervenant très régulièrement dans quantité de problème faisant intervenir une modélisation par des fonctions. Vous en retrouverez régulièrement l'usage en physique notamment. Les problèmes de résolution d'équations différentielles sont en général extrêmement difficiles à résoudre (nombre de problèmes mathématiques ouverts à l'heure actuelle concernent des équations différentielles), c'est pourquoi nous nous contenterons dans ce chapitre d'apprendre à résoudre des types très particuliers d'équations. Dans les cas qui nous concernent, les méthodes sont clairement définies et leur application quasiment mécanique.

Objectifs du chapitre :

- Reconnaitre sans hésitation les primitives classiques.
- Savoir résoudre une équation linéaire du premier ordre ou du second ordre à coefficients constants, en maîtrisant notamment la méthode de variation de la constante.
- Comprendre et savoir analyser un problème de recollement de solutions.

4.2 Vocabulaire

Définition 61. Une **équation différentielle** est une équation dont l'inconnue est une fonction y (réelle ou complexe, même si nous traiterons surtout le cas réel dans ce chapitre), et faisant intervenir les dérivées successives y', y'', …, $y^{(n)}$ de la fonction y. L'équation est dité **d'ordre** n si la dérivée d'ordre le plus élevé de y apparaissant dans l'équation est $y^{(n)}$. **Résoudre** l'équation différentielle sur un intervalle I consiste à déterminer toutes les fonctions dérivables sur I vérifiant l'équation.

Remarque 51. On utilise généralement la variable muette x ou t pour indiquer la variable, mais on notera souvent l'inconnue y, y compris dans l'équation, et pas nécessairement $y(x)$. Ainsi, on parlera par exemple de l'équation $xy' + 3x^2y^2 = 0$.

Définition 62. Une équation différentielle est **linéaire** si elle s'écrit sous la forme $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x) = 0$.

Définition 63. Une équation différentielle linéaire est **normalisée** si $a_n(x) = 1$. Une équation différentielle est **homogène** (ou **sans second membre**) si $a_0(x) = 0$.

Définition 64. Les **courbes intégrales** associées à une équation différentielles sont les courbes représentatives des fonctions solutions de l'équation différentielle.

4.3 Quelques rappels sur les primitives

Commençons avec une propriété toute bête et pourtant fondamentale pour ce qui va suivre, à tel point qu'on lui donne parfois le nom de **théorème fondamental de l'analyse**.

Théorème 10. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, alors f est constante sur I si et seulement si sa dérivée y est nulle.

Proposition 74. Si F_1 et F_2 sont deux primitives d'une même fonction f sur un intervalle I, alors $F_1 - F_2$ est une fonction constante. -

Démonstration. En effet, $F_1 - F_2$ est alors dérivable sur I, de dérivée nulle. Elle y est donc constante. □

Théorème 11. Toute fonction continue sur un intervalle I y admet une primitive.

Proposition 75. Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$, alors il existe une unique primitive de la fonction F vérifiant $F(a) = \alpha$, et elle est donnée par la formule $F : x \mapsto \alpha \int_a^x f(t)\, dt$.

Démonstration. Il faudrait bien sûr définir correctement les intégrales pour que ce résultat ait un sens. Mais en admettant les propriétés de l'intégrale, F est une primitive de f, et elle vérifie bien $F(a) = \alpha$. De plus, deux telles primitives sont égales car elle diffèrent d'une constante, qui doit valoir 0 pour que les valeurs en a coïncident. □

Remarque 52. Dans les cas où on travaillera sur des fonctions complexes, les mêmes propriétés que sur les primitives réelles existent. On convient simplement d'appeler primitive de la fonction $f = f + ig$ toute fonction de la forme $F+iG$, où F et G sont des primitives respectives de f et g. Deux primitives d'une même fonction différent alors d'une constante complexe.

Pour finir, un petit tableau récapitulatif des primitives usuelles :

Fonction	*Primitive*	*Fonction*	*Primitive*
$a(constante)$	ax	af	aF
$x^a (a \neq -1)$	$\dfrac{x^{a+1}}{a+1}$	$f+g$	$F+G$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(x)$	$u'f(u)$	$F(u)$
$\ln(x)$	$x\ln(x)-x$	$f'f$	$\dfrac{f^2}{2}$
e^x	e^x	$\dfrac{f'}{f}$	$\ln\|f\|$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$f'e^f$	e^f
$\sin(x)$	$-\cos(x)$		
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$		
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$		
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$		
$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\mathrm{Argth}(x)$		
$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\mathrm{Argsh}(x)$		
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$		
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\mathrm{Argch}(x)$		

4.4 Équations linéaires du premier ordre

On s'intéresse dans toutes cette partie à une équation du type $y' + a(x)y = b(x)$. Dans le cas où l'équation qu'on cherche à résoudre ne serait pas normalisée, on commencera par la normaliser, et on la résoudra séparément sur tous les intervalles sur lesquels l'équation normalisée a un sens. On reviendra à la fin de cette partie sur les problèmes de recollement des solutions aux bornes de ces intervalles.

4.4.1 Résolution de l'équation homogène associée

Définition 65. Un **problème de Cauchy** associé à l'équation homogène du premier ordre est un système de la forme

$$\begin{cases} y' + a(x)y & = & b(x) \\ y(x_0) & = & \alpha \end{cases}$$

On parle aussi d'équation différentielle avec conditions initiales.

Théorème 12. Soit $y'+a(x)y = 0$ une équation linéaire homogène du premier ordre, avec a continue sur l'intervalle d'étude I. Alors ses solutions sont les fonctions de la forme $t \mapsto Ke^{-A(x)}$, où K est une constante réelle et A une primitive (fixée) de a.

Démonstration. Commençons par constater que ces fonctions sont effectivement solutions de l'équation : si $y(x) = Ke^{-A(x)}$, alors $y'(x) = -Ka(x)e^{-A(x)}$, donc $y'(x) + a(x)y(x) = -Ka(x)e^{-A(x)} + Ka(x)e^{A(x)} = 0$. Réciproquement, supposons y solution de l'équation et posons $z(x) = y(x)e^{A(x)}$, où A est un primitive quelconque de a (qui, étant continue, possède des primitives), on a alors $z'(x) = y'(x)e^{A(x)} + a(x)y(x)e^{A(x)} = e^{A(x)}(y'(x) + a(x)y(x)) = 0$. La fonction z a une dérivée nulle, elle est donc constante, égale à un certain réel K. On a alors, par définition de z, $y(x) = Ke^{A(x)}$. $\square$

Remarque 53. Les problèmes de Cauchy associés à des équations linéaires du premier ordre ont donc toujours une solution unique (la valeur imposée permet de fixer la constante K). En particulier, on peut définir la fonction exponentielle comme unique solution de l'équation différentielle $y' = y$, avec condition initiale $y(0) = 1$.

Proposition 76. Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x + y) = f(x)f(y)$, alors f est nulle ou $f(x) = e^{kx}$, pour une certaine constante réelle k.

Démonstration. On a déjà vu au chapitre sur les fonctions usuelles que les exponentielles convenaient. Cherchons à prouver la réciproque. Si f est une fonction vérifiant l'équation fonctionnelle demandée, commençons par remarquer que $f(0) = (f(0))^2$, donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$. Si $f(0) = 0$, on obtient en remplaçant x par 0 dans l'équation fonctionnelle que f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$. Si $f(0) = 1$, on dérive l'équation par rapport à y puis on fixe $x = 0$, ce qui donne $f'(x + y) = f'(x)f(y)$, puis $f'(y) = f'(0)f(y)$. En notant $k = f'(0)$, f est donc solution du problème de Cauchy associé à l'équation différente $y' = ky$, avec $y(0) = 1$. Ce problème admet pour unique solution $y : x \mapsto e^{kx}$ (la constante K de résolution de l'équation différentielle vaut 1 à cause de la condition $y(0) = 1$), d'où la proposition. □

Exemple : Considérons l'équation différentielle $y' + 2xy = 0$ (sur $\mathbb{R}$), avec comme condition initiale $y(1) = 2$. Les solutions de l'équation sont de la forme Ke^{-x^2}, et la condition initiale se traduit alors par $Ke^{-1} = 2$, soit $K = 2e$, donc l'unique solution de ce problème de Cauchy est la fonction $y : x \mapsto 2e^{1-x^2}$.

4.4.2 Résolution de l'équation complète

Théorème 13. Soit $y' + a(x)y = b(x)$ une équation différentielle linéaire sur un intervalle I, avec a continue sur I. Alors les solutions de cette équation sont de la forme $x \mapsto Ke^{-A(x)} + y_p(x)$, où K est une constante réelle, A une primitive fixée de a, et y_0 une solution particulière quelconque de l'équation.
Si de plus on impose la condition $y(x_0) = \alpha$, avec $x_0 \in I$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, la solution du problème de Cauchy existe et est unique, il s'agit de la fonction $x \mapsto \alpha e^{A(x_0)-A(x)} + e^{-A(x)} \displaystyle\int_{x_0}^{x} e^{A(t)} b(t)\ dt$.

Remarque 54. La première partie du théorème indique simplement que toute solution de l'équation complète est obtenue comme somme d'une solution particulière et d'une solution de l'équation sans second membre.

Démonstration. Commençons par la première affirmation. Soit donc y_p une solution particulière et y une solution quelconque. On a $y'+a(x)y = b(x) \Leftrightarrow y'+a(x)y = y_p'+a(x)y_p \Leftrightarrow (y-y_p)'+a(x)(y-y_p) = 0$. La différence des deux fonctions est donc solution de l'équation homogène, ce qui en utilisant les résultats du paragraphe précédent donne la forme demandée.
La deuxième moitié fait intervenir une technique qui sera fondamentale pour la suite. On cherche une fonction y vérifiant l'équation et telle que $y(x_0) = \alpha$. Posons $z(x) = y(x)e^{A(x)}$. On obtient, très similairement à ce qu'on a fait pour les équations homogènes un peu plus haut, $z'(x) = b(x)e^{A(x)}$. La fonction z est donc la primitive de be^A valant $\alpha e^{A(x_0)}$ en x_0 (cette primitive est unique), c'est-à-dire $z(x) = \alpha e^{A(x_0)} + \displaystyle\int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}\ dt$. Cela donne bien la formule souhaitée pour y. □

Remarque 55. Cette formule n'est à peu près d'aucune utilité pour le calcul pratique de solution, puisqu'on ne saura pas calculer l'intégrale. Pour réellement résoudre une équation différentielle, il faut (et c'est bien le plus difficile) trouver une solution particulière. Pour cela, deux techniques utiles :

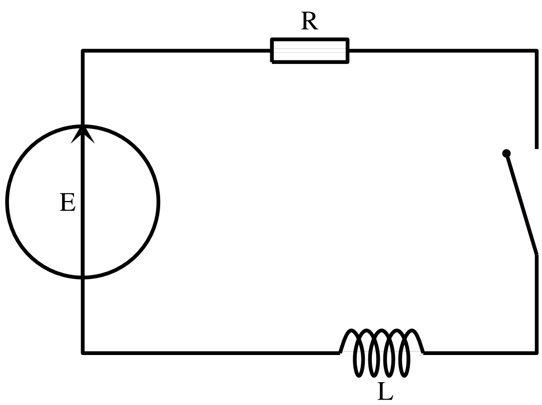
Méthode de variation de la constante :
Il est naturellement conseillé dans un premier temps de chercher une solution particulière « évidente » (nous reviendrons sur certains cas particuliers un peu plus loin). Toutefois, dans le cas général, il n'existe pas de solution particulière simple, et on a alors recours à la méthode suivante : on cherche y_p de la forme $K(x)e^{-A(x)}$. Autrement dit, y_p est de la même forme que les solutions de l'équation

homogène, à la différence près qu'on a remplacé la constante K par une fonction $K(x)$ (d'où le nom de variation de la constante).

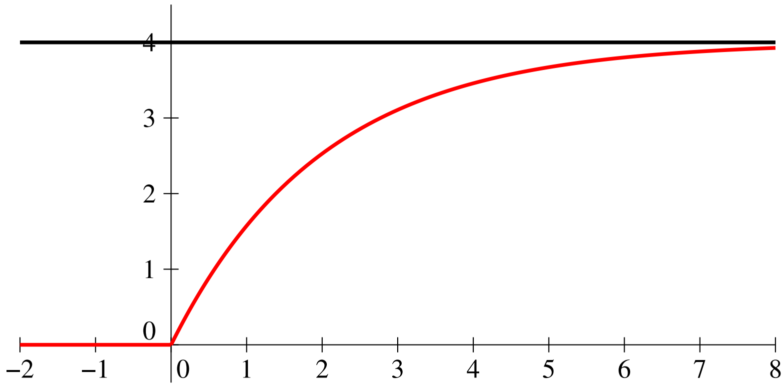
Exemple 1 : On cherche à résoudre l'équation différentielle $y' + xy = x$. L'équation homogène associée a pour ensemble de solutions les fonctions de la forme $x \mapsto Ke^{-\frac{x^2}{2}}$, et une solution particulière évidente est la fonction constante égale à 1, donc les solutions de l'équation sont de la forme $Ke^{-\frac{x^2}{2}} + 1$.

Exemple 2 : On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $y' + 2\frac{y}{x} = \frac{e^x}{x}$. L'équation homogène associée est $y' + 2\frac{y}{x} = 0$, dont les solutions sont de la forme $Ke^{-A(x)}$, où A est une primitive quelconque de $\frac{2}{x}$. Une telle primitive est $2\ln x$, donc les solutions sont les fonctions $Ke^{-2\ln(x)} = \frac{K}{x^2}$. Reste à trouver une solution particulière, via la méthode de variation de la constante : posons $y(x) = \frac{K(x)}{x^2}$, on a alors $y'(x) = \frac{K'(x)}{x^2} - 2\frac{K(x)}{x^3}$, donc $\frac{K'(x)}{x^2} - 2\frac{K(x)}{x^3} + 2\frac{K(x)}{x^3} = \frac{e^x}{x}$. La fonction K est donc une primitive de $x \mapsto xe^x$. On peut par exemple choisir $K(x) = \int_0^x te^t\ dt = [te^t]_0^x - \int_0^x e^t\ dt = xe^x - e^x + 1$. On obtient finalement toutes les solutions de l'équation initiale sous la forme $x \mapsto \frac{K' + (x-1)e^x}{x^2}$, où $K' = K + 1$.

Exemple 3 : On considère un circuit électrique constitué d'un échelon de tension E, une résitance R, une bobine d'inductance L et un interrupteur. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur, qui était jusque là ouvert. Comment évolue l'intensité i dans le circuit ?



L'intensité vérifie l'équation différentielle $L\frac{di}{dt} + Ri = E$, avec comme condition initiale $i(0) = 0$. En notant $\tau = \frac{L}{R}$ (constante de temps du circuit), on obtient $i' + \frac{i}{\tau} = \frac{E}{L}$. Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $t \mapsto Ke^{-\frac{t}{\tau}}$, et la fonction constance $\frac{E}{R}$ est solution particulière de l'équation. La solution générale est donc de la forme $t \mapsto \frac{E}{R} + Ke^{-\frac{t}{\tau}}$. Comme de plus $i(0) = 0$, on obtient $K = -\frac{E}{R}$, soit $i(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ (si $t \geqslant 0$, bien entendu). La courbe ressemble à ceci (on a pris $\frac{E}{R} = 4$ et $\tau = 2$) :



La fonction est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, avec une asymptote horizontale de valeur $\dfrac{E}{R}$ en $+\infty$. En physique, on dira plutôt que l'intensité est en régime permanent quand elle s'approche fortement de son asymptote (en pratique, pour un circuit RL, on considère le régime permanent atteint pour $t = 3\tau$, à cet instant, l'intensité vaut environ 95% de sa valeur maximale), et en régime transitoire dans sa période de forte croissance.

Proposition 77. Principe de superposition.
Soit $y' + a(x)y = 0$ une équation différentielle homogène et y_1, y_2 des solutions particulières respectives des équations $y' + a(x)y = b_1(x)$ et $y' + a(x)y = b_2(x)$, alors $y_1 + y_2$ est une solution particulière de l'équation avec pour second membre $y' + a(x)y = b_1(x) + b_2(x)$.

Démonstration. C'est un calcul idiot : si $y_1' + a(x)y_1 = b_1(x)$ et $y_2' + a(x)y_2 = b_2(x)$, on a en additionnant $(y_1 + y_2)' + a(x)(y_1 + y_2) = b_1(x) + b_2(x)$. □

Méthode : dans certains cas de second membre bien particulier, quand a est une fonction constante, on peut systématiquement se dispenser de la méthode de variation de la constante, et chercher directement une solution particulière d'une forme pas trop compliquée. Voici les trois principaux cas que vous croiserez :

- l'équation $y' + ay = P(x)$, où a est constante, et $P(x)$ est un polynôme de degré n, admet une solution particulière polynomiale de degré n.
- l'équation $y' + ay = P(x)e^{kx}$, où a est constante et P est un polynôme de degré n, admet une solution particulière de la forme $y_p(x) = Q(x)e^{kx}$, où Q est un polynôme de degré n si $a + k \neq 0$, de degré $n + 1$ sinon.
- l'équation $y' + ay = \alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x)$, où a est une constante, et $\omega \in \mathbb{R}$, admet une solution particulière de la forme $\gamma\cos(\omega x) + \delta\sin(\omega x)$.

Exemples :

- On cherche à résoudre l'équation $y' - y = (2x+1)e^x$. Les solutions de l'équation homogène sont de la forme Ke^x, et comme le coefficient dans l'exponentielle correspond à celui du membre de droite, on va chercher une solution particulière sous la forme $y_p(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$. On a alors $y_p'(x) = (2ax + b)e^x + (ax^2 + bx + c)e^x$, donc y_p est solution de l'équation complète si $(2ax + b)e^x = (2x + 1)e^x$. On peut choisir $a = b = 1$ (et par exemple $c = 0$) pout obtenir la solution $y_p : x \mapsto (x^2 + x)e^x$. Les solutions de l'équation complète sont donc les fonctions $y : x \mapsto (x^2 + x + K)e^x$.
- On cherche à résoudre l'équation $y' + 2y = \cos(2x) + 2\sin(2x)$. Les solutions de l'équation homogène sont de la forme Ke^{-2x}, et on cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = a\cos(2x) + b\sin(2x)$. On aura donc $y_p'(x) = -2a\sin(2x) + 2b\cos(2x)$. La fonction y_p est solution de l'équation complète si $(2b+2a)\cos(2x) + (2b-2a)\sin(2x) = \cos(2x) + 2\sin(2x)$. Cette relation est vérifiée si $2a + 2b = 1$ et $2a - 2b = 2$, ce qui donne en additionnant $4a = 3$ soit $a = \dfrac{3}{4}$,

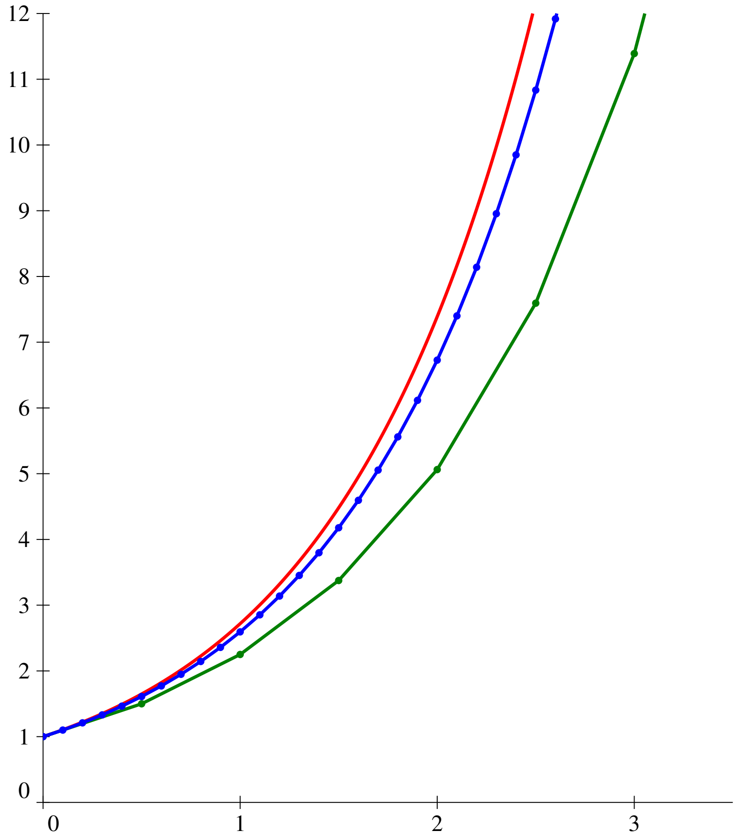
puis $b = a - 1 = -\frac{1}{4}$. Notre solution particulière est donc $y_p : x \mapsto \frac{3}{4}\cos(x) - \frac{1}{4}\sin(x)$, et les solutions de l'équation complète sont les fonctions $y : x \mapsto Ke^{-2x} + \frac{3}{4}\cos(x) - \frac{1}{4}\sin(x)$.

4.4.3 Méthode d'Euler pour la résolution approchée

La méthode d'Euler est une méthode de résolution approchée des équations différentielles du premier ordre. Elle ne fournira donc jamais de solutions exactes, mais permet néanmoins de se faire une idée de l'allure des courbes intégrales. Le principe est d'approcher une solution de l'équation par sa tangente sur de petits intervalles, à partir d'une condition initiale. Considérons une équation de la forme $y' + a(x)y = b(x)$, et supposons qu'on impose $y(0) = 0$. On a alors $y'(0) = b(0)$, et on approchera donc y par la doite d'équation $y = b(0)x$ au voisinage de 0. En pratique, on se donne un pas h, par exemple $h = 0.1$, et on considère la première approximation valable sur $[0; 0.1]$. En 0.1, on peut maintenant calculer une valeur approchée de $y(0.1)$ grace à l'approximation précédente, et en déduire une valeur approchée de $y'(0.1)$ via l'équation différentielle, qui permet de faire une nouvelle approximation sur $[0.1; 0.2]$, et ainsi de suite. Bien entendu, plus on s'éloigne du point de départ, moins le résultat est précis, mais la méthode peut donner des résultats intéressants en pratique.

Exemple : construction de la fonction exponentielle.

Appliquons cette méthode à l'équation $y' = y$, avec $y(0) = 1$. Prenons un pas de la forme $h = \frac{1}{n}$, avec $n \in \mathbb{N}$. Comme on impose $y(0) = 1$, on a $y'(0) = 1$, donc on approche y sur $\left[0; \frac{1}{n}\right]$ par la droite d'équation $y = 1 + x$. On a donc $y\left(\frac{1}{n}\right) \simeq 1 + \frac{1}{n}$, d'où $y'\left(\frac{1}{n}\right) \simeq 1 + \frac{1}{n}$. L'équation de la tangente approchée en ce point est alors $y = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(x - \frac{1}{n}\right) + 1 + \frac{1}{n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(x + 1 - \frac{1}{n}\right)$. En $\frac{2}{n}$, on a alors $y\left(\frac{2}{n}\right) \simeq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$, etc. On montre par récurrence que $y\left(\frac{p}{n}\right) \simeq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p$. En effet, c'est vrai pour $p = 1$, et en le supposant vrai pour un entier p, l'équation de la tangente approchée en $\frac{p}{n}$ sera $y = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p \left(x - \frac{p}{n} + 1\right)$, dont la valeur en $\frac{p+1}{n}$ est $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{p+1}$. En admettant que les courbes ainsi obtenues vont effectivement se rapprocher de celle de l'exponentielle quand n tend vers $+\infty$ (le pas tendant alors vers 0), on peut obtenir la propriété suivante pour l'exponentielle, qui sera démontrée plus tard dans le cours : $e^x = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. Exemples de courbes obtenues par la méthode d'Euler, pour $n = 2$ et $n = 10$ (en rouge, l'exponentielle, en vert la courbe obtenue avec $n = 2$ et en bleu celle obtenue avec $n = 10$).



4.5 Équations linéaires du deuxième ordre à coefficients constants

Les méthodes ne sont pas très différentes de celles vues pour le premier ordre. Simplement, la complexité devenant nettement plus élevée, on se restreindra au cas de coefficients constants.

Définition 66. Une **équation différentielle du deuxième ordre à coefficients constants** est une équation différentielle du type $y'' + ay' + by = f(x)$, où b et c sont deux nombres complexes (ou réels), et f une fonction continue sur l'intervalle d'étude I. On associe à cette équation l'équation homogène $y'' + ay' + by = 0$.
Un problème de Cauchy pour une équation du deuxième est constitué d'un système du type :

$$\left\{\begin{array}{ccc} y'' + ay' + by & = & f(x) \\ y(x_0) & = & \alpha \\ y'(x_0) & = & \beta \end{array}\right.$$

Définition 67. L'**équation caractéristique** associée à l'équation sans second membre est l'équation $r^2 + ar + b = 0$.

Théorème 14. Solutions complexes de l'équation sans second membre.
Si l'équation caractéristique possède deux racines distinctes r_1 et r_2, les solutions complexes de l'équations homogènes sont les fonctions de la forme $Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$, où A et B sont deux constantes complexes.
Si l'équation caractéristique a une racine double r, alors les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $(A + Bx)e^{rx}$, $(A, B) \in \mathbb{C}^2$.

Théorème 15. Solutions réelles de l'équation sans second membre.

- Si l'équation caractéristique possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, les solutions relles de l'équations homogènes sont les fonctions de la forme $Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$, où A et B sont deux constantes relles.

- Si l'équation caractéristique a une racine double réelle r, alors les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $(A + Bx)e^{rx}$, $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
- Enfin, si l'équation caractéristique a deux racines complexes conjuguées $r + i\omega$ et $r - i\omega$, les solutions sont de la forme $(A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x))e^{rx}$, $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Remarque 56. Dans tous les cas, les solutions de l'équation homogène s'écrivent comme combinaisons obtenues à partir de deux solutions particulières de cette équation. Nous aurons une interprétation de ce résultat quand nous aurons étudié les espaces vectoriels.

Démonstration. Dans un premier temps, occupons-nous du cas complexe. Commençons par rechercher les solutions de l'équation de la forme $y : x \mapsto e^{rx}$. On a alors $y'(x) = re^{rx}$ et $y''(x) = r^2e^{rx}$, donc en factorisant par e^{rx}, y est solution de l'équation si et seulement si r est racine de l'équation caractéristique. On en déduit aisément que, dans le cas des racines distinctes, les fonctions données dans le théorème sont effectivement solutions de l'équation.

Soit donc r_1 une racine de cette équation et y une solution de notre équation différentielle, qu'on va écrire (de façon très analogue au cas du premier ordre) sous la forme $y(x) = z(x)e^{r_1x}$. On a alors $y'(x) = (z'(x) + r_1z(x))e^{r_1x}$ et $y''(t) = (z''(x) + 2r_1z'(x) + r_1^2z(x))e^{r_1x}$. En factorisant une fois de plus par e^{r_1x}, on obtient la condition $z'' + (2r_1 + a)z' + (r_1^2 + ar_1 + b)z = 0$. Le dernier terme du membre de gauche étant nul, la fonction z' est donc solution de l'équation différentielle du premier ordre $z'' + (2r_1 + a)z' = 0$. Dans le cas où r_1 est racine double de l'équation, on a $r_1 = -\dfrac{1}{2a}$ donc $2r_1 + a = 0$, et z'' est nulle ; z est donc une fonction affine, on retrouve bien des solutions de la forme $(A + Bx)e^{rx}$. Si r_1 n'est pas racine double, on a par contre $z'(x) = Ke^{-(2r_1+a)x}$. On a alors $z(x) = Ae^{-(2r_1+a)x} + B$, soit $y(x) = z(x)e^{r_1x} = Ae^{-(r_1+a)x} + Be^{r_1x}$. Or, la deuxième racine de l'équation caractéristique n'est autre que $-(r_1 + a)$, puisqu'on sait que les deux racines du trinome ont pour somme $-a$. On retrouve exactement les solutions annoncées.

Passons au cas réel. Les deux premiers cas (racines réelles distinctes ou racine double) sont exactement similaires, nous ne reprendrons pas les calculs. Concentrons-nous sur le cas des deux racines complexes conjuguées. On sait que dans ce cas $y(x) = e^{rx}(Ae^{i\omega x} + Be^{-i\omega x})$. Examinons les valeurs prises par une telle fonction en $x = 0$ et en $x = \dfrac{\pi}{2\omega}$. Comme $y(0) = A + B$, pour que $y(0)$ soit réel, il faut avoir $\Im(A) + \Im(B) = 0$. De même, pour que y soit réelle en $\dfrac{2\pi}{\omega}$, il faut que $e^{\frac{2\pi r}{\omega}}(iA - iB)$ soit réel, ce qui se produit si $i(A - B) \in \mathbb{R}$, soit $A - B \in i\mathbb{R}$, ou encore $\Re(A) = \Re(B)$. Finalement, les deux condition combinées nous donnent $B = \overline{A}$, donc $y(x) = e^{rx}(Ae^{i\omega x} + \overline{A}e^{-i\omega x}) = 2e^{rx}\Re(Ae^{i\omega x}) = 2e^{rx}(\Re(A)\cos(\omega x) - \Im(A)\sin(\omega x))$, qui est bien de la forme annoncée.

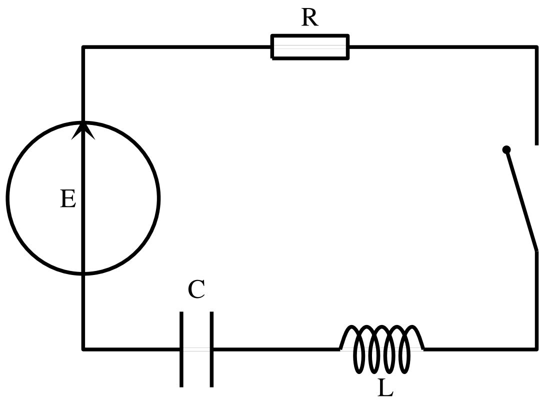
□

Remarque 57. Une équation différentielle de la forme $y'' - \omega^2y = 0$, où $\omega \in \mathbb{R}$, a donc pour solutions les fonctions de la forme $Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$. De même les solutions de l'équation $y'' + \omega^2y = 0$ sont de la forme $A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$. Ces équations apparaissent très fréquemment en physique. Pour la deuxième d'entre elles, on préfère en physique écrire les solutions sous la forme $t \mapsto A\cos(\omega t + \varphi)$, avec $A \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in \left[0; \dfrac{2\pi}{\omega}\right[$. La constante A est appelée amplitude de la solution, et la constante φ déphasage.

Exemple 1 : Les solutions de l'équation différentielle homogène $y'' - 3y' + 2y = 0$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ae^x + Be^{2x}$. Remarquons que si on impose les valeurs de y et de y' en un point, par exemple $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$, il existe une seule solution qui les vérifie. Ici, on obtient le système $A + B = 1$ et $A + 2B = 0$, dont on tire $A = 2$ et $B = -1$. La seule solution de l'équation homogène vérifiant les deux conditions imposées est donc $y : t \mapsto 2e^x - e^{2x}$.

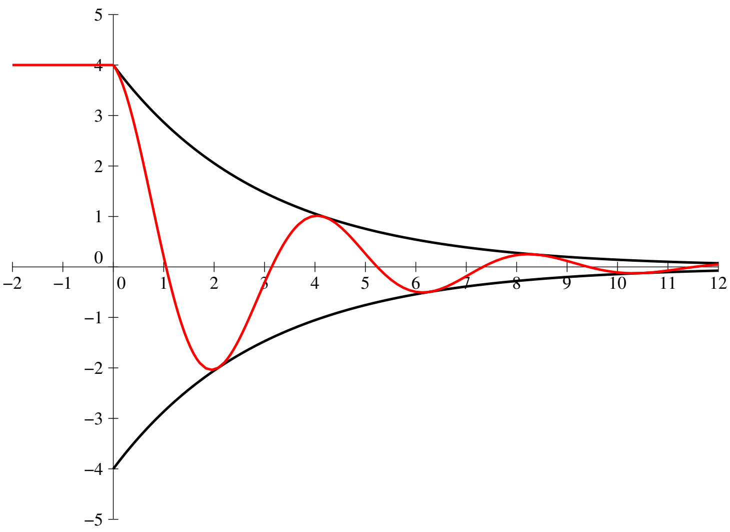
Exemple 2 : De même, les solutions de l'équation homogène $y'' - 2y' + y = 0$ sont de la forme $x \mapsto (A + Bx)e^x$, et la seule vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$ est la fonction $x \mapsto e^x$.

Exemple 3 : Revenons une nouvelle fois à un peu de physique. On considère cette fois un circuit RLC série muni d'un interrupteur que, comme la dernière fois, on fermera à $t = 0$.



On suppose le condensateur chargé avec une certaine charge q_0 avant la fermeture de l'interrupteur. On va s'intéresser à l'évolution de cette charge q. Elle est, mathématiquement parlant, la dérivée de l'intensité i. Par ailleurs, la tension aux bornes d'un condensateur est donnée par $u_C = \frac{q}{C}$, où C est une constante appelée charge du condensateur. On a dans le circuit $L\frac{di}{dt} + Ri + u_C = 0$, soit en exprimant tout en fonction de q, $q'' + \frac{R}{L}q' + \frac{1}{LC}q = 0$. On note habituellement en physique $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ (vous allez vite comprendre pourquoi), constante appelée pulsation propre du circuit, et $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{L}{R\omega_0}$, qu'on appelle facteur de qualité du circuit. Notre équation différentielle devient alors $q'' + \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2 q = 0$. On a par ailleurs les conditions initiales $q(0) = q_0$ et $q'(0) = 0$ (continuité de la charge et de l'intensité). Son équation caractéristique a pour discriminant $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2}(1 - 4Q^2)$.

Le discriminant est positif quand $Q < \frac{1}{2}$, auquel cas les deux racines de l'équation caractéristiques sont $\frac{\omega_0}{2Q}(\pm\sqrt{1-4Q^2} - 1)$, négatives toutes les deux. La charge est donc une somme de deux exponentielles décroissantes, on parle alors de régime apériodique, la charge se contentant de décroitre de q_0 vers 0. Au contraire, lorsque $Q > \frac{1}{2}$, le discriminant de l'équation est négatif, et on a donc une charge qui est le produit d'une fonction périodique par une exponentielle décroissante. On parle alors de régime pseudo-périodique : la charge tend toujours vers 0, mais en oscillant avec une amplitude décroissante au cours du temps. Une allure de la fonction de charge dans ce cas :



Enfin, dans le cas où $Q = \frac{1}{2}$, il y a une racine double et une charge qui est produit d'une fonction affine par une exponentielle décroissante. On parle de régime critique, la courbe ressemble à celle du régime apériodique.

Théorème 16. Soit $y'' + ay + b = f(x)$ une équation différentielle du second ordre à coefficients constants. Alors ses solutions sont de la forme $y : x \mapsto y_p(x)+y_h(x)$, où y_p est une solution particulière fixée de l'équation, et y_h parcourt l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.

Démonstration. C'est la même preuve que pour le premier ordre : si $y''+ay+b = f$, on a $y''+ay+b = y_p'' + ay_p' + c$, d'où $(y - y_p)'' + a(y - y_p)' + (y - y_p) = 0$, et $y - y_p$ est donc solution de l'équation sans second membre. □

Théorème 17. Un problème de Cauchy associé à une équation différentielle du second ordre à coefficients constants admet toujours une solution unique.

Démonstration. Plaçons-nous dans $\mathbb{C}$ et prenons par exemple le cas de deux racines complexes distinctes. Les solutions sont alors de la forme $x \mapsto y_p(x) + Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$. Imposer à une solution $y(x_0) = \alpha$ et $y'(x_0) = \beta$ revient donc à demander que A et B soient solutions d'un système du type $Aa + Bb = \alpha$, $r_1Aa+r_2Bb = \beta$, où a, b, α et β sont des constantes complexes. Ce système a toujours une solution unique car $r_1 \neq r_2$. Les autres cas sont similaires. □

Proposition 78. Le principe de superposition reste vrai pour les équations différentielles du deuxième ordre.

Le problème reste le même que dans le cas des équations du premier ordre : trouver une solution particulière de l'équation. En général, il n'existe pas de méthode très efficace, c'est pourquoi nous nous bornerons à décrire une méthode dans un cas très particulier, celui où la fonction f est de la forme $P(t)e^{kt}$, où P est un polynome, et k un coefficient complexe. Par superposition, on saura alors trouver des solutions particulières quand le deuxième membre est une somme de telles fonctions.

Proposition 79. Soit $y''+ay'+b = P(x)e^{xt}$ une équation différentielle du second ordre à coefficients constants, telle que P soit un polynome de degré n. Alors il existe une solution particulière à l'équation de la forme $x \mapsto Q(x)e^{kx}$, avec $d^\circ(Q) = n$ si k n'est pas racine de l'équation caractéristique de l'équation, $d^\circ(Q) = n+1$ si k en est une racine simple et $d^\circ(Q) = n+2$ si k en est une racine double.

Exemple : On cherche à résoudre l'équation différentielle $y'' - y = x^2 + 1 - e^x$.
Les solutions de l'équation homogène associée sont de la forme $x \mapsto Ae^x + Be^{-x}$.

Pour chercher une solution particulière, utilisons le principe de superposition et commençons par chercher une solution de l'équation $y'' - y = x^2 + 1$ sous la forme $y_1(x) = ax^2 + bx + c$. On a donc $y_1''(x) = 2a$, donc on cherche à avoir $-ax^2 - bx + 2a - c = x^2 + 1$, ce qui nous donne comme conditions $-a = 1$, donc $a = -1$, $b = 0$, et $2a - c = 1$, donc $c = 2a - 1 = -3$. On obtient donc $y_1(x) = -x^2 - 3$.

Cherchons maintenant une solution particulière à l'équation $y'' - y = e^x$ sous la forme $y_2(x) = (\alpha x + \beta)e^x$ (puisque 1 est racine de l'équation caractéristique). On a donc $y'(x) = (\alpha x + \alpha + \beta)e^x$, et $y''(x) = (\alpha + 2\alpha + \beta)e^x$, donc $y'' - y = e^x$ si (en factorisant par e^x) $\alpha x + 2\alpha + \beta - (\alpha x + \beta) = 1$, soit $\alpha = \dfrac{1}{2}$. On peut prendre n'importe quelle valeur pour β, choisissons par exemple $y_2(x) = \dfrac{1}{2}xe^x$.

Une solution particulière de l'équation complète est donc $y_p : x \mapsto -x^2 - 3 - \dfrac{xe^x}{2}$, et les solutions de l'équation complète sont les fonctions $y : x \mapsto -x^2 - 3 + \left(A - \dfrac{x}{2}\right) e^x + Be^{-x}$.

Remarque 58. On peut trouver de même des solutions particulières dans le cas où un cos ou un sin apparait dans le second membre de l'équation.

Exemple : On cherche à résoudre l'équation différentielle $y'' + y' + y = e^x \cos x$.
L'équation homogène associée a pour équation caractéristique $r^2 + r + 1$, donc les racines sont $r_1 = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, et $r_2 = \overline{r_1} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$. Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme $x \mapsto \left(A\cos\left(\dfrac{x\sqrt{3}}{2}\right) + B\sin\left(\dfrac{x\sqrt{3}}{2}\right)\right) e^{-\frac{x}{2}}$.
Pour trouver une solution particulière de l'équation générale, commençons par remarquer que $y'' + y' + y = \Re(e^{(1+i)x})$. Cherchons alors plutôt une solution particulière (complexe) de l'équation $y'' + y' + y = e^{(1+i)x}$. On la cherche sous la forme $y_p : t \mapsto ae^{(1+i)x}$, où a est une constante complexe. On a donc $y_p'(x) = a(1+i)e^{(1+i)x}$, et $y_p''(x) = (a(1+i)^2)e^{(1+i)x} = 2iae^{(1+i)x}$. En factorisant par $e^{(1+i)x}$, on voit que y_p est solution si $a(2+3i) = 1$, soit $a = \dfrac{2-3i}{(2+3i)(2-3i)} = \dfrac{2-3i}{13}$. On a donc $y_p(x) = \dfrac{2-3i}{13}e^{(1+i)x}$, et en prenant sa partie réelle, on obtient une solution de notre équation initiale : $\widetilde{y}_p : x \mapsto \dfrac{2\cos(x) + 3\sin(x)}{13}e^x$.

Conclusion : les solutions de l'équation initiale sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \left(\frac{2\cos(x) + 3\sin(x)}{13}\right) e^x + \left(A\cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + B\sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)\right) e^{-\frac{x}{2}}$$

Chapitre 5

Géométrie dans l'espace

Rien n'est plus facile à apprendre que la géométrie pour peu qu'on en ait besoin.

Sacha Guitry

Dans l'espace, personne ne vous entendra crier.

Tagline du film **Alien, le huitième passager**.

Introduction

Nous continuons dans ce chapitre notre étude des techniques de base en géométrie, mais cette fois-ci dans l'espace. Rien ne change très profondément par rapport à ce que nous avons vu dans le plan, il y a simplement une coordonnée de plus ...

Objectifs du chapitre :

- maîtrise des calculs géométriques dans l'espace, notamment de produit vectoriel et produit mixte
- capacité à calculer des équations d'objets simples

5.1 Repérage dans l'espace

Puisque ça fonctionne exactement de la même façon que dans le plan, nous ne reprendront pas toute la présentation sur les vecteurs faites dans notre premier chapitre de géométrie. Les opérations sont de toute façon les mêmes, et la structure d'espace vectorielle est également présente.

5.1.1 Repérage cartésien

Définition 68. Trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ de l'espace sont **coplanaires** s'il existe un triplet $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ de réels tels que $a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} + c\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$.

Remarque 59. Si l'un des trois coefficients, par exemple a, est nul, cela signifie que deux des vecteurs (ici $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$) sont colinéaires. Dans le cas général, $\overrightarrow{w}$ peut s'écrire comme combinaison des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, ce qui signifie bien intuitivement qu'il se situe « dans le plan » défini par les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Définition 69. Une **base** de l'espace est la donnée d'un triplet de vecteurs $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ non coplanaires. Un **repère** du plan est la donnée d'un quadruplet $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, où O est un point de l'espace et $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ forment une base de l'espace. Le point O est alors appelé **origine** du repère, et les droites passant par O et dirigées par les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ **axes** du repère, usuellement notés (Ox), (Oy) et (Oz).

Théorème 18. Soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ une base. Tout vecteur de l'espace peut s'écrire de façon unique sous la forme $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$, où x, y et z sont trois réels appelés **coordonnées** du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Dans l'espace, la troisième coordonnée z est appelée **cote** du vecteur $\overrightarrow{u}$.

Définition 70. Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère, et M un point de l'espace. Les **coordonnées** du point M sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On notera ces coordonnées sous la forme $M(x; y; z)$.

Remarque 60. On peut donc identifier, de façon similaire à ce qu'on a vu dans le plan, l'ensemble des vecteurs (ou des points) de l'espace à l'ensemble $\mathbb{R}^3$ des triplets de nombres réels.

Définition 71. Une base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ (et les repères correspondants) est **orthogonale** si les vecteurs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ sont orthogonaux deux à deux. Elle est **orthonormale** si de plus $\| \overrightarrow{i} \| = \| \overrightarrow{j} \| = \| \overrightarrow{k} \| = 1$.

Définition 72. Une base orthogonale $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ de l'espace est **directe** si elle vérifie la régle dite « du petit bonhomme » : en dessinant sur la base un petit bonhomme dont les pieds sont placés sur les vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$, et la tête sur le vecteur $\overrightarrow{k}$, le petit bonhomme doit avoir le pied droit sur $\overrightarrow{i}$ et le pied gauche sur $\overrightarrow{j}$.

Remarque 61. Il faut bien avoir conscience qu'on ne peut pas définir de sens direct pour les plans dans l'espace. Par exemple, si on considère une base directe, si on regarder le plan engendré par $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ « du dessus » (du côté où les cotes sont positives), la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ de ce plan parait directe. Mais vue « du dessous », elle semble indirecte.

Pour toute la suite du chapitre, on fixe une bonne fois pour toutes une base orthonormale de l'espace $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Cette hypothèse ne sera pas rappelée dans tous les énoncés, qui pour certains seraient faux dans une base quelconque.

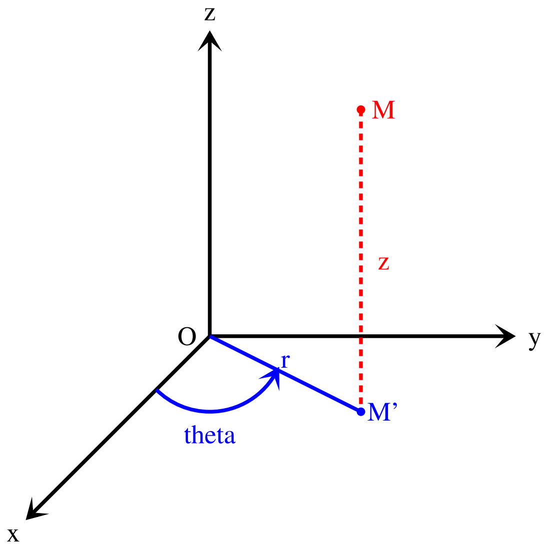
Proposition 80. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de coordonnées (x, y, z) dans une base orthonormale, alors $\| \overrightarrow{u} \| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Par conséquent, la distance entre deux points A et B est donnée par la formule $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

5.1.2 Repérage cylindrique

La repérage cylindrique consiste tout simplement à remplacer les deux premières coordonnées cartésiennes x et y par des coordonnées polaires dans le plan engendré par $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$, sans toucher à la troisième coordonnée z.

Définition 73. Un point de l'espace M admet pour **coordonnées cylindriques** le triplet (ρ, θ, z) si $\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{u}_\theta + z\overrightarrow{k}$, où $\overrightarrow{u}_\theta = \cos(\theta)\overrightarrow{i} + \sin(\theta)\overrightarrow{j}$.

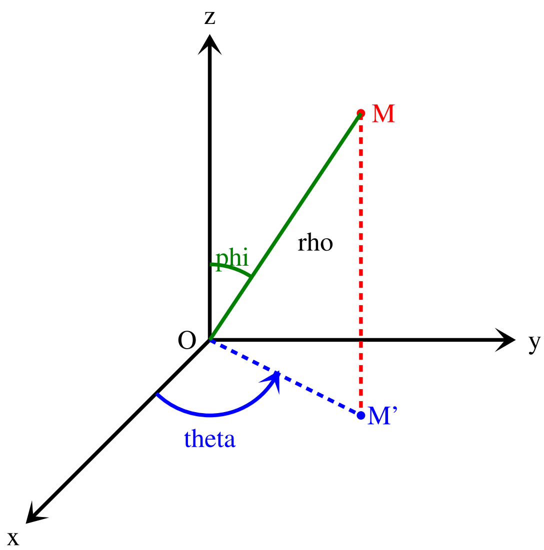
Remarque 62. Les coordonnées cylindriques ne sont pas uniques, tout comme les coordonnées polaires dans le plan. Attention au fait qu'ici, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ ne correspond pas à la distance du point M à l'origine du repère, mais à la distance OM', où M' est le projeté orthogonal du point M sur le plan $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.



5.1.3 Repérage sphérique

Ce dernier repérage utilise désormais une seule distance et deux angles, c'est en fait le repère qu'on utilise régulièrement pour les points situés sur le gloterrestre (où la distance au centre de la Terre, constante, n'est pas précisée) quand on donne la latitude et la longitude d'un point. La convention utilisée ici est légèrement différente.

Définition 74. Un point de l'espace M admet pour **coordonnées sphériques** le triplet (r, θ, φ) si $\overrightarrow{OM} = r\sin(\varphi)\cos(\theta)\overrightarrow{i} + r\sin(\varphi)\sin(\theta)\overrightarrow{j} + r\cos(\varphi)\overrightarrow{k}$. L'angle θ est appelé **longitude** et l'angle φ **colatitude** du point M. Le réel r représente simplement la distance OM.



Remarque 63. Vu la définition donnée, on a manifestement $x = r\sin(\varphi)\cos(\theta)$, $y = r\sin(\varphi)\sin(\theta)$ et $z = r\cos(\varphi)$.

Exemple : Il n'est en général pas aisé de passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées sphérique,s car il faut avoir deux angles remarquables à reconnaitre pour obtenir une expression simple. Il est toutefois bon de connaitre la méthode : on commence par factoriser par r en laissant les deux premières coordonnées groupées, on fait apparaitre l'angle φ, puis on factorise à nouveau les deux premières coordonnées pour reconnaitre l'angle θ. Tentons le coup avec le point $M : (1, 1, \sqrt{2})$, on peut écrire $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \sqrt{2}\overrightarrow{k}$, avec $OM = \sqrt{1+1+2} = 2$. On factorise donc par 2, ce qui permet de reconnaitre sur la dernière coordonnée $\varphi = \frac{\pi}{4}$: $\overrightarrow{OM} = 2\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{i} + \frac{1}{2}\overrightarrow{j}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{k} = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{j}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\overrightarrow{k}$. On reconnait à nouveau un angle de $\frac{\pi}{4}$ pour θ, et on peut donc conclure qu'un triplet de coordonnées sphériques de M est $\left(2; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$.

5.2 Produit scalaire ; produit vectoriel ; produit mixte

5.2.1 Produit scalaire

Définition 75. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace, le **produit scalaire** de ces deux vecteurs, noté $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$, est le réel $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$. Si l'un des deux vecteurs est nul, le produit scalaire est nul.

Remarque 64. Cette définition est rigoureusement identique à celle vue dans le plan, puisqu'on calcule de fait ce produit scalaire dans le plan engendré par les deux vecteurs. Tout ce qu'on a pu voir sur le produit scalaire dans le plan va donc rester vrai dans l'espace.

Proposition 81. Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$.

Proposition 82. Propriétés du produit scalaire
Le produit scalaire est :
- bilinéaire : $\overrightarrow{u}.(\lambda\overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{w}) = \lambda\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$ et $(\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}).\overrightarrow{w} = \lambda\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} + \mu\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w}$.
- symétrique : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$.
- défini positif : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} \geqslant 0$, et $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

Proposition 83. Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ont pour coordonnées respectives (x, y, z) et (x', y', z') dans une base orthonormale, alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$.

Démonstration. On va effectuer une preuve très différente de celle vue dans le plan, en utilisant la bilinéarité du produit scalaire et le fait que la base dans laquelle on travaille est orthonormale. On peut écrire $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = (x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}).(x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j} + z'\overrightarrow{k})$, ce qui vaut en développant tout par la bilinéarité $xx'\overrightarrow{i}.\overrightarrow{i} + xy'\overrightarrow{i}.\overrightarrow{j} + xz'\overrightarrow{i}.\overrightarrow{k} + yx'\overrightarrow{j}.\overrightarrow{i} + yy'\overrightarrow{j}.\overrightarrow{j} + yz'\overrightarrow{j}.\overrightarrow{k} + zx'\overrightarrow{k}.\overrightarrow{i} + zy'\overrightarrow{k}.\overrightarrow{j} + zz'\overrightarrow{k}.\overrightarrow{k}$. La base étant orthonormale, $\overrightarrow{i}.\overrightarrow{i} = \|\overrightarrow{i}\| = 1$ (et de même pour les deux autres vecteurs), et $\overrightarrow{i}.\overrightarrow{j} = 0$ (de même pour les autres produits scalaires), il ne reste que $xx' + yy' + zz'$ comme annoncé. □

5.2.2 Produit vectoriel

Remarque 65. Il n'est pas possible de définir un déterminant de deux vecteurs dans l'espace de la même façon qu'on le fait dans le plan, car cette définition faisait apparaitre un sinus, dont le signe dépend de l'orientation de l'angle entre les vecteurs. Or, comme on l'a vu, l'orientation des plans dans l'espace n'est pas possible. L'outil qui remplace en quelque sorte le déterminant est le produit vectoriel.

Définition 76. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace. Le **produit vectoriel** de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le vecteur $\overrightarrow{w}$ orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, tel que la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ soit une base directe, et vérifiant $\|\overrightarrow{w}\| = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \sin(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$, où l'angle dont on prend le sinus est l'angle géométrique entre les deux vecteurs (pour ne pas avoir de problème de signe). On note $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$. Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, on pose $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

Proposition 84. Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur produit vectoriel est nul.

Démonstration. C'est une conséquence évidente de la définition choisie. □

Proposition 85. Propriétés du produit vectoriel.
Le produit vectoriel est :

- bilinéaire : $\overrightarrow{u} \wedge (\lambda\overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{w}) = \lambda\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w}$ et $(\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{w} = \lambda\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w} + \mu\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}$.
- antisymétrique : $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u}$.

Démonstration. L'antisymétrie est assez facile : si on échange le rôle de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on ne change pas la norme ni la direction de $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$, mais on modifie son sens pour que la base reste directe. La bilinéarité est un peu technique à démontrer dans l'espace, nous admettrons ce résultat. □

Proposition 86. Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ont pour coordonnées respectives (x, y, z) et (x', y', z') dans un repère orthonormal direct, alors $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ a pour coordonnées $(yz' - zy', zx' - xz', xy' - yx')$.

Démonstration. En admettant la bilinéarité du produit vectoriel, on peut effectuer une démonstration similaire à celle du produit scalaire. Il suffit de calculer les produits vectoriels des vecteurs de la base : $\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{k} = \overrightarrow{0}$; pour les autres, les normes seront toujours égales à 1, et la direction sera toujours celle du troisième vecteur de la base (qui est orthogonal aux deux autres), il suffit donc de faire attention au sens pour que la base soit directe. On obtient $\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k}$ mais $\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{i} = -\overrightarrow{k}$ etc, ce qui donne bien la formule donnée en développant brutalement. □

Remarque 66. Les formules des coordonnées sont en fait des formules de déterminant où on « oublie » dans le deux vecteurs la coordonnée qu'on est en train de calculer pour le produit vectoriel. Attention tout de même au changement de signe très piégeux pour la deuxième coordonnée !

Exemple : On peut toujours calculer des aires de triangle à l'aide du produit vectoriel. Par exemple, prenons $A(1, 2, 3)$, $B(-1, 1, -1)$ et $C(0, 2, 4)$. On calcule par exemple $\overrightarrow{AB}(-2, -1, -4)$ et $\overrightarrow{AC}(-1, 0, 1)$, puis $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(-1, -6, -1)$. Il ne reste plus qu'à calculer $\frac{1}{2} \parallel \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \parallel = \frac{\sqrt{1+36+1}}{2} = \sqrt{\frac{19}{2}}$.

5.2.3 Produit mixte

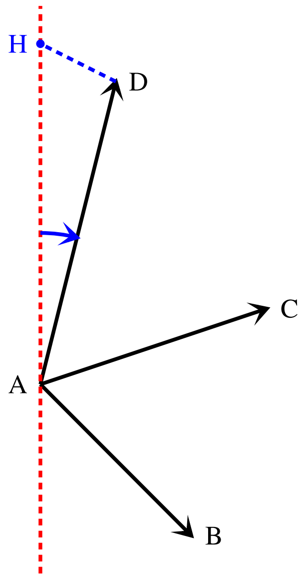
Définition 77. Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace, leur **produit mixte** (aussi appelé comme dans le plan **déterminant**) est le nombre réel $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}).\overrightarrow{w}$. On le note $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$, ou encore $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$, ou même $|\overrightarrow{u} \quad \overrightarrow{v} \quad \overrightarrow{w}|$.

Proposition 87. Trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement si $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = 0$.

Démonstration. En effet, le produit mixte est nul si et seulement si $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est orthogonal à $\overrightarrow{w}$. cela se produit (outre les cas particuliers évidents de colinéarité) si et seulement si $\overrightarrow{w}$ est situé dans le plan engendré par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. □

Proposition 88. On retrouve ici une interprétation géométrique du produit mixte : il représente (au signe près) le volume du parallélépipède construit sur les trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$.

Démonstration. Notons A, B, C et D quatre points tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AD}$. D'après les propriétés du produit scalaire et du produit vectoriel, $|[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]| = \parallel \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \parallel \times \parallel \overrightarrow{w} \parallel \cos(\widehat{\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}})$. La première norme représente l'aire du parallélogramme construit sur les points A, B et C, notons-la $\mathcal{A}$. Le volume recherché vaut $\mathcal{A} \times AH$, où H est le projeté orthogonal de D sur la droite passant par A et perpendiculaire au plan contenant $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (AH représente une hauteur du parallélépipède). Or, cette droite est la même que celle dirigeant le produit vectoriel $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$, donc $AH = \parallel \overrightarrow{W} \parallel \cos(\widehat{\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}})$, ce qui prouve la formule. Dans la figure qui suit, l'angle dont le cosinus apparait dans le formule est indiqué en bleu : □



Proposition 89. Propriétés du produit mixte

Le produit mixte est :

- trilinéaire : $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \lambda\overrightarrow{w} + \mu\overrightarrow{t}] = \lambda[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] + \mu[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{t}]$; $[\overrightarrow{u}, \lambda\overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{w}, \overrightarrow{t}] = \lambda[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{t}] + \mu[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{t}]$ et $[\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{t}] = \lambda[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{t}] + \mu[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{t}]$.
- alterné : si deux des trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont égaux, alors $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = 0$

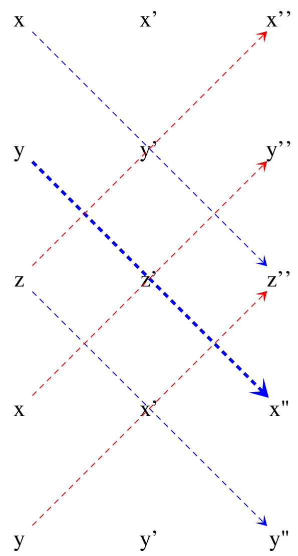
Démonstration. Prouvons la première formule à l'aide des propriétés déjà établies des produit scalaire et vectoriel : $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \lambda\overrightarrow{w} + \mu\overrightarrow{t}] = (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}).(\lambda\overrightarrow{w} + \overrightarrow{t}) = \lambda(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}).\overrightarrow{w} + \mu(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}).\overrightarrow{t}$ par biliéarité du produit scalaire, ce qui donne la formule attendue. les deux autres ne sont pas plus compliquées. Pour le caractère alternée, si ce sont $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ qui sont égaux, leur produit vectoriel est nul, donc le produit mixte par n'importe quel vecteur $\overrightarrow{w}$ aussi. Si $\overrightarrow{w}$ est égal à $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$, il est orthogonal à $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$, donc le produit mixte est également nul. □

Remarque 67. On peut prouver à partir du caractère alterné que le produit mixte est antisymétrique, c'est-à-dire qu'il change de signe si on échange deux des vecteurs. En effet, on a par exemple $[\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = 0$ par alternance, mais également par trilinéarité $[\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}] + [\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}] + [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] + [\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$. les deux termes extrêmes étant nuls, toujours par alternance, les deux autres sont opposés, ce qui prouve la propriété annoncée.

Proposition 90. Si $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ ont pour coordonnées respectives (x, y, z), (x', y', z') et (x'', y'', z'') dans un repère orthonormal direct, alors $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = x'' \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} - y'' \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} + z'' \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy'z'' - xz'y'' + yz'x'' - yx'z'' + zx'y'' - zy'x''$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate des expressions dans une base orthonormale directe du produit scalaire et du produit vectoriel. □

Méthode : Pour calculer un peu plus rapidement les produits mixtes (et ne pas se tromper dans les signes), on peut appliquer la règle de Sarrus. On écrit le diagramme suivant :



On additionne les trois produits obtenus les long des diagonales descendantes, et on soustrait les trois produits obtenus le long des diagonales ascendantes.

Exemple : On peut très bien calculer des produits mixtes (on les appelle plutôt déterminants dans ce cas) indépendemment de toute interprétation géométrique : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7 - 4 + 2 \times 5 = 13.$

5.3 Plans, droites et sphères

5.3.1 Équations de plans

Proposition 91. Équations cartésiennes de plans
Une équation du type $ax + by + cz + d = 0$, où a, b, c et d sont trois réels tels que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, est l'équation cartésienne d'une plan. Réciproquement, tout plan admet une équation de cette forme.

Remarque 68. Comme dans le cas des équations de droite dans le plan, l'équation n'est pas unique puisqu'on peut multiplier toute l'équation par une même constante pour décrire le même plan.

Exemple : Un plan $\mathcal{P}$ est en général défini par trois points distincts A, B et C. Pour en obtenir une équation, le plus simple est de passer par la condition suivante : $M \in \mathcal{P}$ si $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM}] = 0$, ou alternativement si $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AM} = 0$. Prenons les points $A(2, 0, 0)$, $B(1, -1, 1)$ et $C(0, 2, 3)$, alors $\overrightarrow{AB}(-1, -1, 1)$ et $\overrightarrow{AC}(-2, 2, 3)$, donc $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(-5, 1, -4)$. Un point $M(x, y, z)$ appartient donc au plan (ABC) si $-5(x - x_A) + (y - y_A) - 4(z - z_A) = 0$, soit $-5x + y - 4z + 10 = 0$.

Définition 78. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ forment une base du plan $\mathbb{P}$ s'ils ne sont pas colinéaires et qu'on peut trouver trois points A, B et C dans le plan $\mathcal{P}$ tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{v}$. Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ s'il est orthogonal aux deux vecteurs d'une base de $\mathcal{P}$.

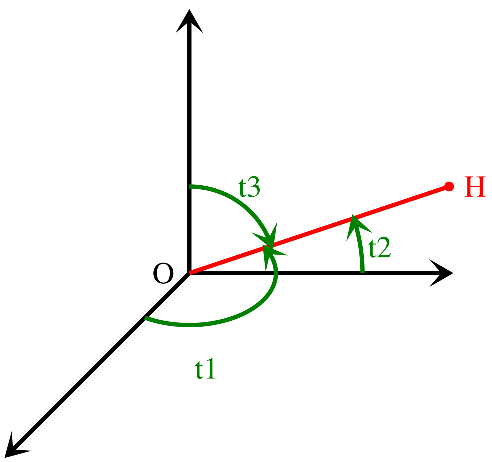
Proposition 92. Le vecteur normal à un plan $\mathcal{P}$ est unique à un facteur (non nul) près. Un plan ayant pour base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ admet pour vecteur normal $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$. Le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ admet le vecteur $\overrightarrow{n}(a, b, c)$ pour vecteur normal.

Démonstration. L'unicité du vecteur normal est due au fait que dans l'espace, toutes les droites perpendiculaires à un plan sont parallèles entre elles. Le fait que $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ soit un vecteur normal découle des propriétés du produit vectoriel (il est à la fois orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$). Enfin, si $\overrightarrow{P}$ a pour équation $ax + by + cz + d = 0$, tous les vecteurs $\overrightarrow{u(\alpha, \beta, \gamma)}$ de $\overrightarrow{P}$ vérifient l'équation $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$ (en effet, si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, avec A et B appartenant à $\overrightarrow{P}$, on a $ax_A + by_A + cz_A = ax_B + by_B + cz_B = -d$, donc $a(x_B - x_A) + b(y_B - y_A) + c(z_B - z_A) = 0$). Leur produit scalaire avec le vecteur de coordonnées (a, b, c) est donc nul. □

Remarque 69. Le plan passant par le point A et admettant pour vecteur normal $\overrightarrow{n}(a, b, c)$ a pour équation $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$.

Proposition 93. Tout plan $\mathcal{P}$ admet une équation de la forme $x\cos(\theta_1) + y\cos(\theta_2) + z\cos(\theta_3) = p$, où p représente la distance du point O au plan $\mathcal{P}$, et θ_1, θ_2 et θ_3 les trois angles entres les vecteurs de base $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ et le vecteur $\overrightarrow{OH}$, H étant le projeté orthogonal de O sur le plan $\mathcal{P}$.

Démonstration. Le plan $\mathcal{P}$ peut être décrit comme le plan passant par H et de vecteur normal unitaire $\frac{\overrightarrow{OH}}{OH}$. Ce vecteur ayant pour norme 1, a simplement pour coordonnées $(\cos(\theta_1), \cos(\theta_2), \cos(\theta_3))$, donc l'équation du plan sera de la forme $\cos(\theta_1)x + \cos(theta_2)y + \cos(\theta_3)z + d = 0$. Par ailleurs, puisque $\overrightarrow{OH} = OH \times \frac{\overrightarrow{OH}}{OH}$, le point H a pour coordonnées $(p\cos(\theta_1), p\cos(\theta_2), p\cos(\theta_3))$, et appartient donc au plan à condition que $p(\cos^2(\theta_1) + \cos^2(\theta_2) + \cos^2(\theta_3)) + d = 0$, soit $p + d = 0$ (la somme des trois carrés de cosinus représente le carré de la norme du vecteur unitaire, donc est égale à 1), donc $d = -p$, et on trouve l'équation souhaitée. □



Sur cette figure, les trois angles sont notés t_i au lieu de θ_i.

Remarque 70. Pour passer d'une équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ à une équation normale, il suffit donc de diviser tous les coefficients par $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Définition 79. Deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont **parallèles** s'ils admettent des vecteurs normaux colinéaires. Ils sont **perpendiculaires** s'ils admettent des vecteurs normaux orthogonaux.

Remarque 71. Attention, deux droites contenues dans des plans perpendiculaires ne sont pas nécessairement perpendiculaires (elles peuvent être parallèles), et deux droites incluses dans des plans parallèles ne sont pas forcément parallèles (elles peuvent être orthogonales).

Proposition 94. Si $\mathcal{P}$ a pour équation $ax+by+cz+d=0$, et $\mathcal{Q}$ a pour équation $a'x+b'y+c'z+d'=0$, alors

- $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont perpendiculaires si $aa'+bb'+cc'=0$.
- $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont parallèles si $(a,b,c)\wedge(a',b',c')=\overrightarrow{0}$.

Définition 80. Le plan $\mathcal{P}$ passant par le point $A(x_A,y_A,z_A)$ et de base $\overrightarrow{u}(a,b,c)$, $\overrightarrow{v}(a',b',c')$ peut être décrit par le **système d'équations paramétriques** $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & x_A+at+a't' \\ y & = & y_A+bt+b't' \\ z & = & z_A+ct+c't' \end{array}\right.$, où $(t,t')\in\mathbb{R}^2$.

Démonstration. En effet, un point $M(x,y,z)$ appartient à $\mathcal{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ est coplanaire avec $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, ce qu'on peut traduire par l'existence de deux réels t et t' pour lequels $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{u}+t'\overrightarrow{v}$, ce qui donne ces équations. □

Exemple : On considère le plan passant par $A(-1,-1,-1)$, et admettant pour base ($\overrightarrow{u}(1,2,3)$; $\overrightarrow{v}(-2,0,1)$). Ce plan a une représentation paramétrique sous la forme $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -1+t-2t' \\ y & = & -1+2t \\ z & = & -1+3t+y' \end{array}\right.$.

Pour déterminer si le point $B(3,3,4)$ appartient appartient au plan, on cherche si le système $\left\{\begin{array}{lcl} 3 & = & -1+t-2t' \\ 3 & = & -1+2t \\ 4 & = & -1+3t+t' \end{array}\right.$ (système de trois équations à deux inconnues) admet ou non une solution.

Ici, la deuxième équation donne immédiatement $t=2$, ce qui donne dans les deux autres $3=1-2t'$ et $4=5+t'$, soit dans les deux cas $t'=-1$. Le système admet donc une (unique) solution, ce qui prouve que B appartient au plan et accessoirement que $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$.

Proposition 95. Distance d'un point à une plan.
Soit $M(x_M,y_M,z_M)$ un point de l'espace, et $\mathcal{P}$ un plan. La distance de M à $\mathcal{P}$ peut être donnée par une des quatre formules suivantes :

- Si $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ est une base de $\mathcal{P}$, alors $d(M,\mathcal{P})=\dfrac{|\det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})|}{\|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\|}$.
- Si $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$, alors $d(M,\mathcal{P})=\dfrac{|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}|}{\|\overrightarrow{n}\|}$.
- Si $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$, alors $d(M,\mathcal{P})=\dfrac{|ax_M+by_M+cz_M+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.
- Si $\mathcal{P}$ a pour équation normale $x\cos(\theta_1)+y\cos(\theta_2)+z\cos(\theta_3)=p$, alors $d(M,\mathcal{P})=|x_M\cos(\theta_1)+y_M\cos(\theta_2)+z_M\cos(\theta_3)-p|$.

5.3.2 Droites dans l'espace

Proposition 96. Deux plans non parallèles de vecteur normaux respectifs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ont une intersection qui est une droite dirigée par le vecteur $\overrightarrow{n}\wedge\overrightarrow{n'}$.

Démonstration. En effet, la droite d'intersection doit être à la fois orthogonale à $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$, ce qui est le cas du vecteur $\overrightarrow{n}\wedge\overrightarrow{n'}$. □

Proposition 97. Toute droite de l'espace peut être décrite par un système d'équations cartésiennes $\left\{\begin{array}{ccccccccc} ax & + & by & + & cz & + & d & = & 0 \\ a'x & + & b'y & + & c'z & + & d' & = & 0 \end{array}\right.$, où (a,b,c) et (a',b',c') sont des triplets de réels non tous nuls et non proportionnels.

Démonstration. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de la droite (d) et A un point de (d). Choisissons un vecteur $\overrightarrow{n}$ orthogonal à $\overrightarrow{u}$. La droite (d) peut alors être décrite comme l'intersection des deux plans contenant le point A et de bases respectives $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{n})$ et $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{n}\wedge\overrightarrow{u})$. Ces deux plans ont, comme tous les plans de l'espace, des équations du type donné dans l'énoncé de la propriété, et admettent respectivement pour vecteur normal $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{n}$, et $\overrightarrow{n}$. Ces deux vecteurs normaux étant non colinéaires (ils sont même orthogonaux), les triplets (a,b,c) et (a',b',c') sont non proportionnels. □

Remarque 72. En notant $\overrightarrow{n}(a,b,c)$ et $\overrightarrow{n'}(a',b',c')$, la droite (d) sera dirigée par le vecteur $\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{n'}$.

Exemple : Soit (d) la droite passant par le point $A(2,0,-1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(-1,1,1)$. Une façon d'obtenir une équation cartésienne de la droite est de dire que $M(x,y,z)$ appartient à (d) si $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, soit $(x-2, y, z+1) \wedge (-1,1,1) = (0,0,0)$ ce qui donne le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} & & y & - & z & - & 1 & = & 0 \\ -x & & & - & z & + & 1 & = & 0 \\ x & + & y & & & - & 2 & = & 0 \end{array}\right.$. Il y a une équation « de trop » dans le système, mais on constate qu'en soustrayant les deux premières équations, on retombe sur la troisième, qui est donc superflue. On peut en fait garder deux quelconques des trois équations pour obtenir une équation de (d).

Proposition 98. La droite (d) passant par le point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ peut être décrite par le système d'équations paramétriques $\left\{\begin{array}{rcrcl} x & = & x_A & + & \alpha t \\ y & = & y_A & + & \beta t \\ z & = & z_A & + & \gamma t \end{array}\right.$, où $t \in \mathbb{R}$.

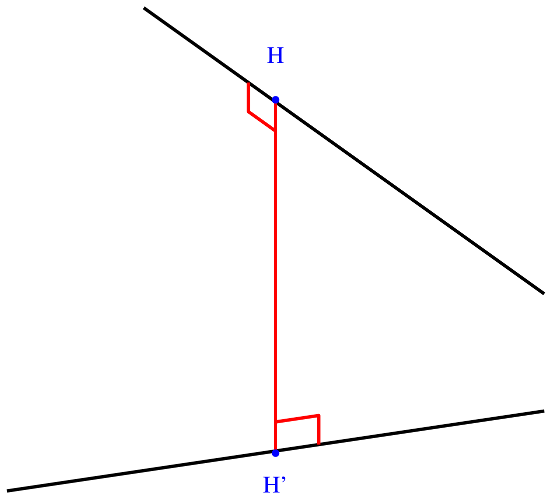
Proposition 99. La distance d'un point M à la droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ est donnée par la formule $d(M,d) = \dfrac{\| \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u} \|}{\| \overrightarrow{u} \|}$.

Proposition 100. Soient (d) et (d') deux droites de l'espace non parallèles, de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$. Il existe une unique droite (Δ) perpendiculaire simultanément aux droites (d) et (d'). Cette droite est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u'}$.

Démonstration. Commençons par prouver l'existence. Pour cela, on note $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$, et A, A' deux points quelconques situés respectivement sur (d) et sur (d'). Notons alors $\mathcal{P}$ le plan passant par A et de base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, et $\mathcal{P}'$ le plan passant par A' de base $(\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v})$. Ces deux plans ne peuvent pas être parallèles : s'ils admettaient un même vecteur normal, celui-ci serait orthogonal à la fois à $\overrightarrow{u}$ et à $\overrightarrow{u'}$, donc serait colinéaire à $\overrightarrow{v}$, et ne pourrait donc lui être en même temps orthogonal. Leur intersection est donc une droite (Δ), qui est par construction dirigée par le vecteur $\overrightarrow{v}$ puisque celui-ci est commun aux deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$. Cette direction étant orthogonale à $\overrightarrow{u}$ et à $\overrightarrow{v}$, (Δ) est orthogonale à (d) et à (d'). Comme par ailleurs (Δ) et (d) sont coplanaires (dans $\mathcal{P}$), elles sont perpendiculaires. De même pour (Δ) et (d').
Passons à l'unicité : si une droite est à la fois perpendiculaire à (d) et (d'), elle est nécessairement dirigée par un vecteur à la fois orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$, donc $\overrightarrow{v}$ est un vecteur directeur convenable. Par ailleurs, elle doit être sécante à la droite (d), donc notre droite appartient au plan $\mathcal{P}$ (elle contient un point du plan et est dirigée par un vecteur de base du plan). De même, elle appartient à $\mathcal{P}'$. Conclusion : il ne peut s'agir que de la droite (Δ). □

Remarque 73. Cette démonstration constitue en fait une méthode pour déterminer la perpendiculaire commune à deux droites : on détermine $\overrightarrow{v}$, puis les équations des deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$, et on obtient ainsi l'équation de leur intersection.

Proposition 101. Soient (d) et (d') deux droites non parallèles, passant respectivement par les points A et A', et de vecteur directeur respectif $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$. La distance entre (d) et (d') est donnée par la formule $d(d,d') = \dfrac{|[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}, \overrightarrow{AA'}]|}{\| u \wedge \overrightarrow{u'} \|}$



Démonstration. Notons (Δ) la perpendiculaire commune aux deux droites, et H et H' les intersection respectives de (Δ) avec (d) et (d'). La distance recherchée est la distance HH' (si ça ne vous semble pas clair, réfléchissez un peu plus). Or, $|[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}, \overrightarrow{AA'}]| = (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u'}).(\overrightarrow{AA'}) = (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u'}).(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{H'A'})$. Or, le vecteur $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u'})$ est orthogonal à (d) et à (d'), donc son produit scalaire avec $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{H'A'}$ est nul. Ne reste plus que $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u'}).\overrightarrow{HH'} = \| \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u'} \| \times HH'$ (cette fois-ci, les vecteurs sont colinéaires, puisqu'on sait que Δ est dirigée par $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u'})$). La formule en découle. □

5.3.3 Équations de sphères

Définition 81. Équation cartésienne de sphère.

Dans un repère orthonormal, la sphère de centre $A(a, b, c)$ et de rayon R admet pour **équation cartésienne** $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$. Réciproquement, toute équation de la forme $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz - d = 0$ avec $a^2 + b^2 + c^2 + d \geqslant 0$ est une équation de cercle de centre $A(a, b)$ et de rayon $R = \sqrt{d + a^2 + b^2 + c^2}$.

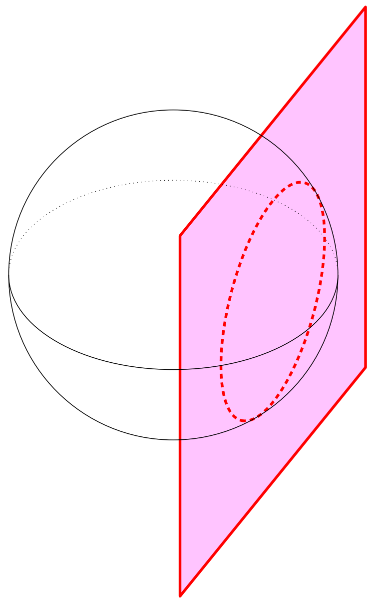
Exemple : L'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z - 4 = 0$ peut se factoriser sous la forme $(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 9$, on reconnait la sphère de centre $A(2, 0, -1)$ et de rayon 3.

Proposition 102. La sphère de diamètre $[AB]$ admet pour équation $(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) + (z - z_A)(z - z_B) = 0$

Démonstration. Un point M appartient à cette sphère si et seulement si $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$, la démonstration est la même que pour le cercle dans le plan. □

Proposition 103. Soit $(\mathcal{S})$ une sphère de centre A et de rayon R et $\mathcal{P}$ un plan. Alors :

- si $d(A, \mathcal{P}) > R$, $\mathcal{S}$ et $\mathcal{P}$ ne se coupent pas.
- si $d(A, \mathcal{P}) = R$, $\mathcal{S}$ et $\mathcal{P}$ se coupent en un point unique, le plan $\mathcal{P}$ est **tangent** à la sphère $\mathcal{S}$.
- si $d(A, \mathcal{P}) < R$, $\mathcal{S}$ et $\mathcal{P}$ ont une intersection qui est un cercle dont le centre est le projeté orthogonal de A sur le plan $\mathcal{P}$.



Remarque 74. Comme on ne sait pas décrire facilement un cercle dans l'espace, tout cela reste assez théorique.

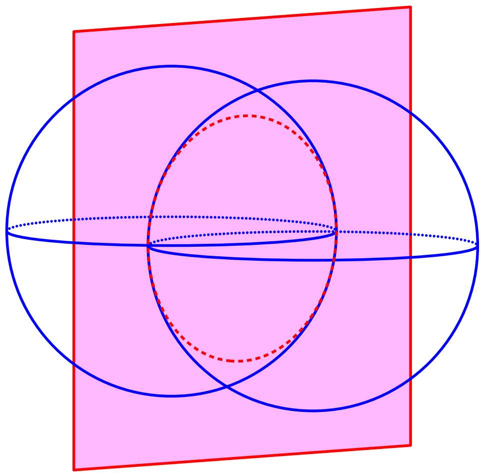
Proposition 104. Soit $(\mathcal{S})$ une sphère de centre A et de rayon R et (d) une droite de l'espace. Alors :

- si $d(A,d) > R$, $\mathcal{S}$ et (d) ne se coupent pas.
- si $d(A,d) = R$, $\mathcal{S}$ et (d) se coupent en un point unique, on dit que la droite (d) est **tangente** à la sphère $\mathcal{S}$.
- si $d(A,d) < R$, $\mathcal{S}$ et (d) ont deux points d'intersection distincts.

Exemple : Si on souhaite déterminer les points d'intersection de la sphère décrite ci-dessus (équation $x^2+y^2+z^2-4x+2z-4=0$) avec la droite d'équation cartésienne $\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & 2 & = & 0 \\ 3x & - & y & + & z & + & 4 & = & 0 \end{array}\right.$, on peut exprimer à l'aide de l'équation de la droite les deux variables y et z en fonction de x (ici, c'est le plus facile, en général, il faut ne garder qu'une variable sur les trois) : en additionnant les deux équations, $4x+2z+6=0$, donc $z=-3-2x$; en les soustrayant $2x-2y+2=0$, donc $y=x+1$. Il ne reste plus qu'à remplacer dans l'équation de la sphère pour obtenir une équation du second degré vérifiée par x : $x^2+(x+1)^2+(-3-2x)^2-4x-6-4x-4=0$, soit $6x^2+6x=0$. On obtient les deux racines évidentes $x=0$ et $x=-1$, qui donnent ensuite, en calculant les valeurs de y et z correspondantes, les deux points d'intersection $B(0,1,-3)$ et $C(-1,0,-1)$.

Proposition 105. Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ deux sphères du plan, de centres respectifs A et A' et de rayons respectifs R et R'. Alors :

- si $AA' > R+R'$, les deux sphères ne se coupent pas.
- si $AA' = R+R'$, les deux sphères sont tangentes extérieurement.
- si $|R-R'| < AA' < R+R'$, les deux sphères se coupent en deux points distincts.
- si $AA' = |R-R'|$, les deux sphères sont tangentes intérieurement.
- si $AA' < |R-R'|$, les deux sphères ne se coupent pas.



Chapitre 6

Courbes planes

Qu'est-ce qu'une vie humaine ? La courbe d'un projectile.

Anatole FRANCE

Le progrès fait les routes droites, mais celles qui se recourbent,
sans progrès, sont les routes du génie.

William BLAKE (pour garder un lien avec le cinéma).

Introduction

Le but de ce chapitre est de compléter notre panel d'outils disponibles pour tracer des courbes dans le plan définies par des équations fonctionnelles. Nous savons déjà plus ou moins tracer les courbes représentatives de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, nous apprendrons à faire mieux. Mais surtout, nous apprendrons à étudier les représentations graphiques d'arcs paramétrés, qui correspondent au parcours d'une trajectoire plane d'un mobile évoluant au cours du temps, ou si on préfère à la projection plane de courbes de focntions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Ce type de courbe est évidemment beaucoup plus varié que celles obtenues avec des fonctions usuelles.

Objectifs du chapitre :

- maîtrise de l'étude des branches infinies d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{R}^2$
- capacité à tracer rapidement l'allure d'un arc paramétré ou d'une courbe définie par une équation polaire

6.1 Compléments sur les fonctions réelles

6.1.1 Convexité

Définition 82. Une fonction est **de classe** $\mathcal{D}^k$ sur un intervalle I si elle est k fois dérivable sur I. Elle est **de classe** $\mathcal{C}^k$ sur I si de plus sa dérivée k-ème $f^{(k)}$ est continue sur I.

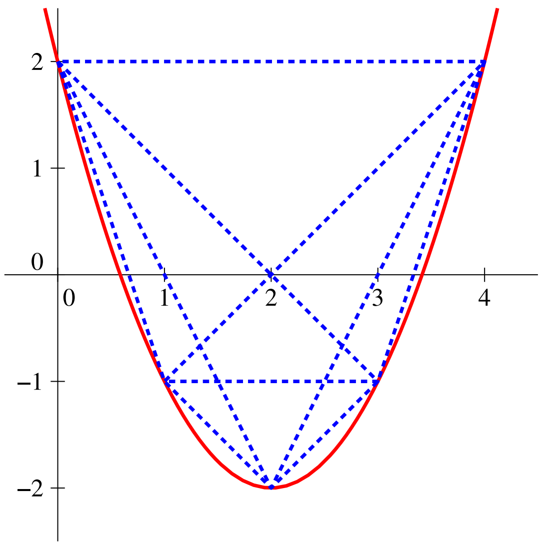
Remarque 75. Une fonction $\mathcal{D}^k$ sur I est forcément $\mathcal{C}^{k-1}$ sur I puisqu'une fonction dérivable est nécessairement continue. Une fonction $\mathcal{C}^k$ est bien entendu $\mathcal{D}^k$. On a donc les implications suivantes : $\mathcal{C}^k \Rightarrow \mathcal{D}^k \Rightarrow \mathcal{C}^{k-1} \Rightarrow \mathcal{D}^{k-1} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \mathcal{C}^1 \Rightarrow \mathcal{D}^1 \Rightarrow \mathcal{C}^0$ (cette dernière catégorie contenant simplement les fonctions continues).

Définition 83. Une fonction est **de classe $\mathcal{C}^\infty$** sur un intervalle I si elle y est dérivable k fois pour tout entier k.

Remarque 76. Toutes ses dérivées sont alors continues (puisqu'on peut toujours dériver une fois de plus), ce qui justifie qu'on ne distingue pas $\mathcal{D}^\infty$ et $\mathcal{C}^\infty$.

Définition 84. Une fonction f définie est **convexe** sur I si $\forall (x,y) \in I^2$, $\forall t \in [0;1]$, $f(tx+(1-t)y) \leqslant tf(x)+(1-t)f(y)$. La fonction f est **concave** sur I si $\forall (x,y) \in I^2$, $\forall t \in [0;1]$, $f(tx+(1-t)y) \geqslant tf(x)+(1-t)f(y)$.

Remarque 77. En fait, lorsque $t \in [0;1]$, $tx+(1-t)y$ prend toutes les valeurs comprises entre x et y. De même $tf(x)+(1-t)f(y)$ prend toutes les valeurs comprises entre $f(x)$ et $f(y)$. L'inégalité de la définition signifie que tout point de la courbe situé entre les abscisses x et y est en-dessous (ou au-dessus dans le cas de la concavité) du point situé à la même abscisse sur la droite rejoignant les points $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$. Autrement dit, la courbe d'une fonction convexe est située en-dessous de toutes ses cordes. Celle d'une fonction concave est située au-dessus de ses cordes. Voici une illustration dans le cas convexe -quelques cordes en pointillés bleus) :



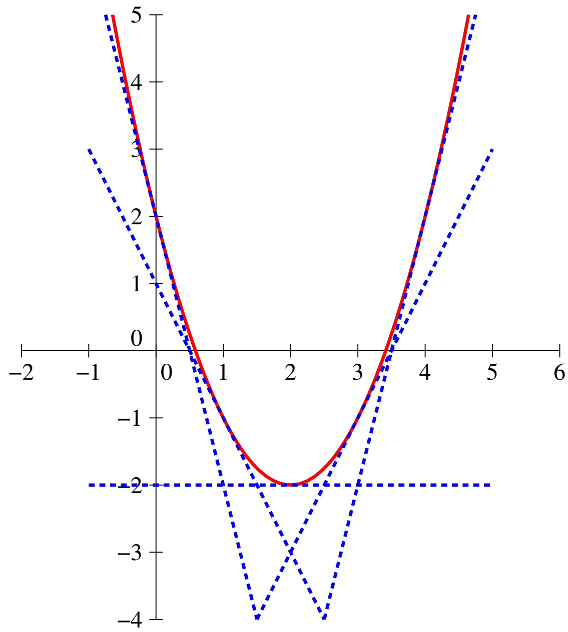
Exemples : Parmi les fonctions usuelles,

- Les fonctions $x \mapsto e^x$, $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \cosh(x)$ sont convexes sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions $x \mapsto \ln(x)$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \text{Argch}(x)$
- Les fonctions $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \sinh(x)$, $x \mapsto \text{Argth}(x)$ sont concaves sur $\mathbb{R}^-$ et convexes sur $\mathbb{R}^+$.
- Les fonctions $x \mapsto \sqrt[3]{x}$, $x \mapsto \text{Argsh}(x)$, $x \mapsto \tanh(x)$ sont convexes sur $\mathbb{R}^-$, concaves sur $\mathbb{R}^+$.

Proposition 106. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, alors f est convexe sur I si et seulement si son taux d'accroissement en tout point de I est une fonction croissante de h.

Démonstration. Supposons la fonction convexe sur I, et $a \in I$. Soient $0 < h < h'$ (les autres cas sont similaires), on a alors $a+h = ta+(1-t)(a+h')$ pour un certain $t \in [0;1]$, donc $f(a+h) \leqslant tf(a)+(1-t)f(a+h')$, d'où $f(a+h)-f(a) \leqslant tf(a)+(1-t)f(a+h')-f(a)$, soit $f(a+h)-f(a) \leqslant (1-t)(f(a+h')-f(a))$. Or, par définition, $(1-t)a+h = (1-t)(a+h')$, donc $1-t = \dfrac{h}{a+h'-a} = \dfrac{h}{h'}$. On obtient alors l'inégalité $f(a+h)-f(a) \leqslant \dfrac{h(f(a+h')-f(a))}{h'}$, soit en divisant par h, $\tau_a(h) \leqslant \tau_a(h')$, donc le taux d'accroissement en a est bien une fonction croissante. La réciproque se montre en utilisant le même type de calcul. $\square$

Remarque 78. Cette caractérisation peut s'interpréter géométriquement : une fonction dérivable est convexe si sa courbe représentative est située au-dessus de chacune de ses tangentes, elle est concave si sa courbe est située en-dessous de ses tangentes. Le même exemple que ci-dessus, avec cette fois-ci quelques tangentes en pointillés :



Proposition 107. Une fonction dérivable sur un intervalle I est convexe si et seulement si sa dérivée sur I est une fonction croissante. Elle y est convexe si et seulement si sa dérivée est décroissante sur I.

Démonstration. En effet, soient x et y deux réels appartenant à I. Posons $h = y - x$, on a $\tau_x(h) = \dfrac{f(y) - f(x)}{h} \geqslant f'(x)$ d'après la proposition précédente ; par ailleurs, $\tau_y(-h) = \dfrac{f(x) - f(y)}{-h} \leqslant f'(y)$. En combinant les deux inégalités, on obtient $f'(x) \leqslant f'(y)$. □

Proposition 108. Soit f une fonction $\mathcal{D}^2$ sur un intervalle I, alors f est convexe si et seulement si f'' est positive sur I. De même, f est concave sur f si et seulement si f'' est négative sur I.

Définition 85. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I, un **point d'inflexion** pour f est un réel pour lequel f'' change de signe.

Remarque 79. On a en particulier $f''(x) = 0$ en tout point d'inflexion, et c'est naturellement ainsi que l'on détermine les points d'inflexion. Il arrive toutefois qu'un réel vérifiant $f''(x) = 0$ ne soit pas point d'inflexion, tout comme un réel vérifiant $f'(x) = 0$ ne correspond pas toujours à un extremum.

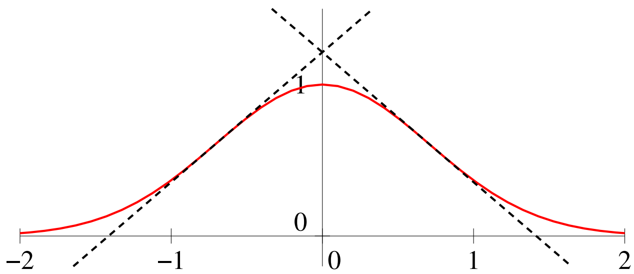
Remarque 80. La fonction f change donc de concavité en chaque point d'inflexion. Une autre façon de voir les choses est que la tangente au point d'inflexion traverse la courbe représentative de f, particularité rare qui explique que le calcul des points d'inflexion améliore la précision du tracé de courbe. On tracera systématiquement les tangentes aux points d'inflexion à chaque fois que l'on étudiera la convexité d'une fonction.

Exemple : On cherche à tracer une courbe représentative la plus précise possible de la fonction $f : x \mapsto e^{-x^2}$. La fonction f est définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Elle a des limites nulles en $\pm\infty$. Sa dérivée est $f'(x) = -2xe^{-x^2}$, donc f est croissante sur $]-\infty; 0]$ et décroissante sur $[0; +\infty[$, admettant un maximum en 0 de valeur $f(0) = 1$. De plus, sa dérivée seconde est $f''(x) = (-2 + 4x^2)e^{-x^2}$. Elle s'annule lorsque $x^2 = \dfrac{1}{2}$, la fonction f a donc deux points d'inflexion en $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et en $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. On

calcule $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$, et $f'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{\frac{2}{e}}$ et $f'\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{2}{e}}$.
On peut alors compléter le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\sqrt{\frac{2}{e}}$	$+$	0	$-$	$-\sqrt{\frac{2}{e}}$	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\searrow$	0
$f''(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
f		convexe			concave			convexe	

La courbe représentative de f ressemble à ceci (les tangentes aux points d'inflexion sont en pontillés) :



6.1.2 Branches infinies

Définition 86. La courbe représentative d'une fonction f admet en $+\infty$ une **branche parabolique de direction** (Ox) si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$, mais $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ (on a une définition similaire en $-\infty$).

Exemples : Les fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ ou $x \mapsto \ln x$ admettent une branche parabolique de direction (Ox).

Définition 87. La courbe représentative d'une fonction f admet en $+\infty$ une **branche parabolique de direction** (Oy) si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ (on a une définition similaire en $-\infty$).

Exemple : La fonction $x \mapsto x^2$ admet une branche parabolique de direction (Oy) (d'où le nom de branche parabolique, d'ailleurs), ainsi que la fonction $x \mapsto e^x$ en $+\infty$.

Définition 88. La courbe représentative d'une fonction f admet en $+\infty$ une **branche parabolique de direction la droite d'équation** $y = ax$ $(a \neq 0)$ si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a$, mais $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty$ (on a une définition similaire en $-\infty$).

Remarque 81. Comme dans le cas des autres branches paraboliques, cela signifie que la courbe a une direction qui se rapproche de celle de la droite considérée, mais sans avoir d'asymptote oblique (autrement dit, la courbe s'éloigne de plus en plus de la droite d'équation $y = ax$, tout en ayant une direction qui se rapproche de celle de la droite).

Exemple : La fonction $f(x) = x + \ln x$ a une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = x$ en $+\infty$.

Méthode : Plan d'étude des branches infinies.
Quand on cherche à étudier les branches infinies d'une fonction, on procède dans l'ordre suivant :

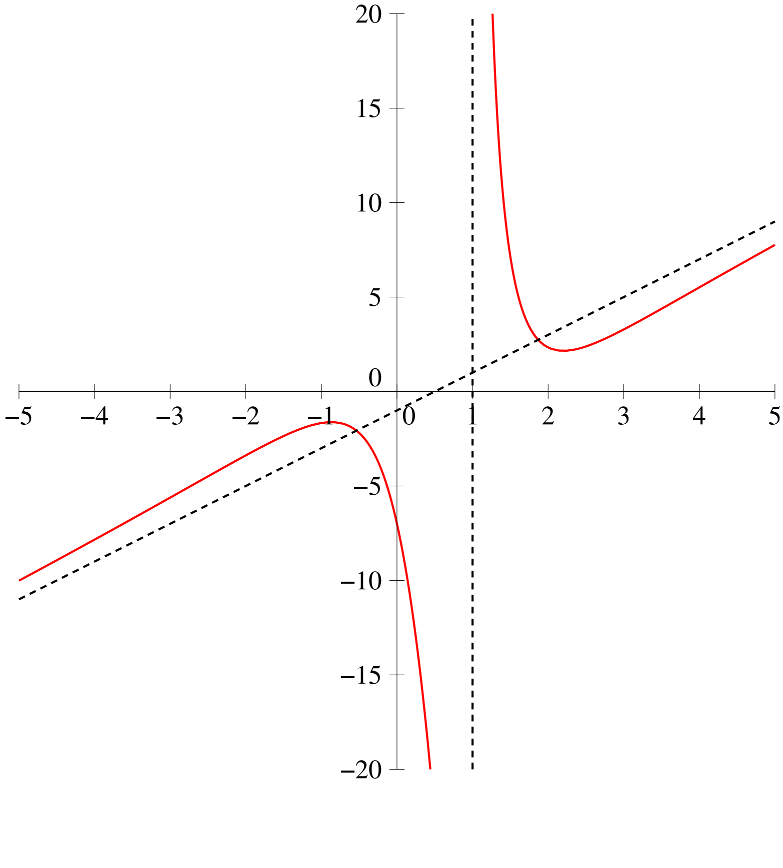
- On calcule la limite de f. Si elle est finie, on a une asymptote horizontale, si elle est infinie on continue.
- On calcule la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$. Si elle est nulle ou infinie, on a une branche parabolique de direction (Ox) ou (Oy). S'il y a une limite finie non nulle a, on continue.
- On calcule la limite de $f(x) - ax$. Soit elle est finie égale à b et on a une asymptote oblique d'équation $y = ax+b$, soit elle est infinie, et il y a une branche parabolique de direction $y = ax$.

Exemple :
Étude des branches infinies de $f(x) = \dfrac{2x^4 - 5x^3 + 4x + 7}{x^3 - 2x^2 + 2x - 1}$.

Commençons par déterminer le domaine de définition : $x^3 - 2x^2 + 2x - 1$ a pour racine évidente $x = 1$, et se factorise en $(x-1)(x^2 - x + 1)$ (je vous passe les détails de la factorisation). Le trinome $x^2 - x + 1$ a pour discriminant $\Delta = -3$, il ne s'annule donc jamais (il est toujours positif). On a donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

Pour déterminer l'existence d'une éventuelle asymptote verticale, inutile de se fatiguer et de préciser les signes : $\lim\limits_{x\to 1} x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$ et $\lim\limits_{x\to 1} 2x^4 - 5x^3 + 4x + 7 = 8$, donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \pm\infty$, ce qui nous suffit à connaitre l'existence d'une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^4}{x^3} = +\infty$. De même, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$. Reste à calculer $f(x) - 2x = \dfrac{2x^4 - 5x^3 + 4x + 7 - 2x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 2x}{x^3 - 2x^2 + 2x - 1} = \dfrac{-x^3 - 4x^2 + 6x + 7}{x^3 - 2x^2 + 2x - 1}$, qui a pour limite -1 en $+\infty$ (même méthode qu'au-dessus). Des calculs absolument identiques amènent à la même conclusion en $-\infty$. Conclusion : la droite d'équation $y = 2x - 1$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
Voici l'allure de la courbe :



Exemple :

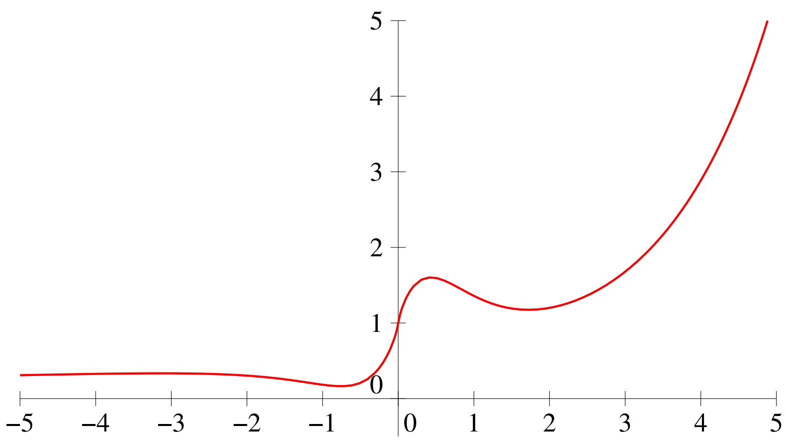
Étude des branches infinies de $g(x) = \dfrac{e^x - x\ln|x|}{x^2+1}$.

Le dénominateur ne s'annulant jamais, g est définie sur $\mathbb{R}^*$ (il faut tout de même avoir $|x| > 0$). Quand x tend vers 0, numérateur et dénominateur convergent vers 1, puisque $\lim\limits_{x\to 0} x\ln|x| = 0$, donc il n'y a pas d'asymptote verticale.

Pour calculer les limites, le principe est le même que pour les quotients de polynômes (on garde le terme « le plus fort »), mais on est obligés d'écrire la factorisation : $g(x) = \dfrac{e^x(1 - \frac{x\ln(x)}{e^x})}{x^2(1+\frac{1}{x^2})}$, chacun des deux termes entre parenthèses a pour limite 1 en $+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$. De même, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^3} = +\infty$. Il y a donc en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Oy).

En $-\infty$, c'est bien sûr différent, l'exponentielle tendant vers 0. On a cette fois, en écrivant le même genre de factorisation, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x\ln(-x)}{x^2}$, qui tend vers 0 par croissance comparée. Il y a donc une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$.

L'allure de la courbe :



6.2 Arcs paramétrés

Définition 89. Un **arc paramétré** est la représentation graphique d'une fonction $f : t \mapsto \overrightarrow{f(t)}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. On représentera également souvent l'image du paramètre t par ses coordonnées $\overrightarrow{f(t)} = (x(t), y(t))$. Le **support** de l'arc paramétré est constitué de tous les points du plan du plan de coordonnées $(x(t), y(t))$ (autrement dit, de la projection orthogonale de la courbe représentative de la fonction sur un plan orthogonal à l'axe de la variable t). C'est ce support que nous chercherons à représenter.

6.2.1 Dérivation de fonctions à deux variables

Définition 90. Une fonction vectorielle $t \mapsto \overrightarrow{f(t)}$ admet pour le vecteur $\overrightarrow{l}$ pour **limite** lorsque t tend vers t_0 si $\lim\limits_{t\to t_0} \parallel \overrightarrow{f(t)} - \overrightarrow{l} \parallel = 0$.

Proposition 109. La fonction f admet pour limite $\overrightarrow{l} = (a, b)$ lorsque t tend vers t_0 si et seulement si $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = a$ et $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = b$.

Démonstration. En effet,

$$\begin{array}{rlcl} & \lim\limits_{t\to t_0} \| \overrightarrow{f(t)} - \overrightarrow{l} \| & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \lim\limits_{t\to t_0} \sqrt{(x(t)-a)^2+(y(t)-b)^2} & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \lim\limits_{t\to t_0} (x(t)-a)^2+(y(t)-b)^2 & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{t\to t_0} (x(t)-a)^2 \\ \lim\limits_{t\to t_0} (y(t)-b)^2 \end{array}\right. & \begin{array}{c} = \\ = \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{t\to t_0} x(t) \\ \lim\limits_{t\to t_0} y(t) \end{array}\right. & \begin{array}{c} = \\ = \end{array} & \begin{array}{c} a \\ b \end{array} \end{array}$$

□

Définition 91. La fonction f est **dérivable** en t_0 si son **taux d'acroissement** $\tau_{t_0} : t \mapsto \dfrac{\overrightarrow{f(t)} - \overrightarrow{f(t_0)}}{t - t_0}$ admet une limite lorsque t tend vers t_0. Dans ce cas, cette limite est appelée **vecteur dérivé de** f **en** t_0, et noté $\overrightarrow{f'(t_0)}$. On définit ensuite les dérivées succesiives de la fonction f de la même manière que pour une fonction usuelle.

Proposition 110. La fonction f est dérivable en t_0 si et seulement si ses deux fonctions coordonnées sont dérivables en t_0, et dans ce cas $\overrightarrow{f'(t_0)} = (x'(t_0), y'(t_0))$.

Démonstration. En effet, en utilisant la propriété précédente sur le calcul des limites, τ admet une limite en t_0 si et seulement si ses deux coordonnées $\dfrac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}$ et $\dfrac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}$ admettent des limites en t_0. Cette propriété en découle immédiatement. □

Proposition 111. Si f et g sont deux fonctions vectorielles dérivables en t_0, alors la fonction réelle $h : t \mapsto \overrightarrow{f(t)}.\overrightarrow{g(t)}$ est dérivable en t_0, et $h'(t_0) = \overrightarrow{f'(t_0)}.\overrightarrow{g(t_0)} + \overrightarrow{f(t_0)}.\overrightarrow{g'(t_0)}$. De même, la fonction $j : t \mapsto \det(\overrightarrow{f(t)}, \overrightarrow{g(t)})$ est dérivable en t_0, et $j'(t_0) = \det(\overrightarrow{f'(t_0)}, \overrightarrow{g(t_0)}) + \det(\overrightarrow{f(t_0)}, \overrightarrow{g'(t_0)})$. Enfin, si $\| \overrightarrow{f(t_0)} \| \neq 0$, la fonction $k : t \mapsto \| \overrightarrow{f(t)} \|$ est dérivable en t_0, de dérivée $k'(t_0) = \dfrac{\overrightarrow{f'(t_0)}.\overrightarrow{f(t_0)}}{\| \overrightarrow{f(t_0)} \|}$.

Démonstration. Il suffit d'exprimer chaque fonction à l'aide des coordonnées et d'utiliser la propriété précédente. Ainsi, en notant $\overrightarrow{f(t)} = (x(t), y(t))$ et $\overrightarrow{g(t)} = (a(t), b(t))$, on peut écrire $j(t) = x(t)a(t) + y(t)b(t)$ et dériver les produits : $j' = x'a + xa' + y'b + yb' = (x', y').(a, b) + (x, y).(a', b')$. Le calcul pour le déterminant est quasiment identique. Pour la norme, on écrit $k(t) = \sqrt{j(t)^2}$, et on obtient la condition de dérivabilité et la formule pour la dérivée, pusique $k' = \dfrac{2jj'}{2\sqrt{j}} = \dfrac{j'}{\sqrt{j}}$. □

Définition 92. Un arc paramétré admet une **tangente** en son point de pramètre t_0 si $\dfrac{\overrightarrow{f(t) - f(t_0)}}{\| \overrightarrow{f(t)} - \overrightarrow{f(t_0)} \|}$ admet une limite quand t tend vers t_0.

Remarque 82. Cette condition signifie qu'un vecteur directeur normé de la droite reliant les points de l'arc de paramètres t et t_0 se rapproche d'un certain vecteur, qui sera évidemment directeur de la droite tangente. C'est en fait la même notion que pour les tangentes à des courbes de fonctions réelles.

Définition 93. Soit f une fonction vectorielle dérivable en t_0, le point de paramètre t_0 est un **point stationnaire** de l'arc si $\overrightarrow{f'(t_0)} = \overrightarrow{0}$. Dans le cas contraire, le point est un **point régulier**.

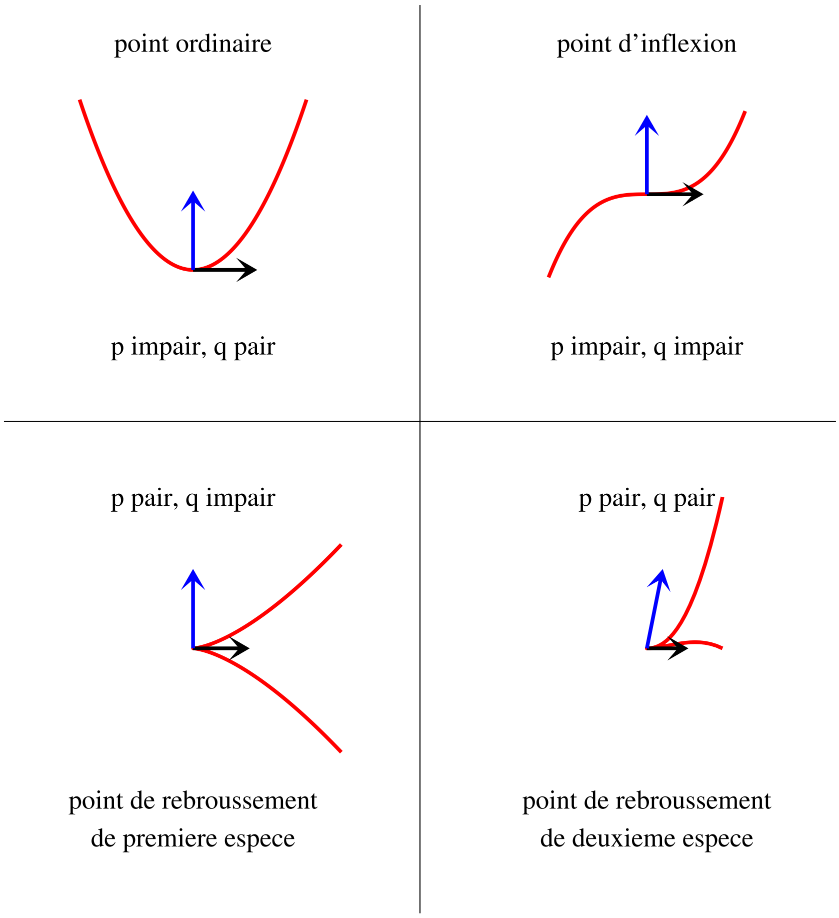
Proposition 112. Un arc paramétré admet en chacun de ses points réguliers une tangente dirigée par le vecteur $\overrightarrow{f'(t_0)}$.

Exemple : Un arc paramétré peut très bien admettre également des tangentes en ses points stationnaires, ce sera même très souvent le cas ! Par exemple, si $\overrightarrow{f(t)} = (t^2, t^4)$, on a un point stationnaire (l'origine du repère) si $t = 0$, mais comme $y = x^2$ quelle que soit la valeur de t, la courbe est simplement constitué de la moitié droite de la parabole $y = x^2$ (moitié droite seulement car t^2 sera toujours positif), parcourue dans un sens puis dans l'autre). À l'origine, cette courbe admet l'axe des abscisses comme tangente.

Proposition 113. Si le quotient $\dfrac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)}$ admet une limite finie m quand t tend vers t_0, alors l'arc paramétré admet une tangente de pente m en t_0. Si ce même quotient admet pour limite $\pm\infty$, il y aura une tangente verticale.

Remarque 83. On peut retrouver la tangente horizontale de l'exemple précédent de cette façon, puisque $\dfrac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} = \dfrac{t^4}{t^2}$ qui tend vers 0 en 0. Cette méthode permet théoriquement de gérer également le cas des points stationnaires, mais en pratique la limite de ce quotient peut être fort pénible à calculer, on va donc admettre le résultat beaucoup plus puissant suivant (sa démonstration nécessite des connaissances sur les développements limités) :

Théorème 19. Soit p le plus petit entier non nul tel que $\overrightarrow{f^{(p)}(t_0)} \neq \overrightarrow{0}$ (le point est donc stationnaire si $p \geqslant 2$, et q le plus petit entier strictement supérieur à p tel que $\overrightarrow{f^{(q)}(t_0)}$ ne soit pas colinéaire à $\overrightarrow{f^{(p)}(t_0)}$. La tangente à l'arc en son point de paramètre t_0 est toujours dirigée par L'allure de l'arc paramétré aux alentours de son point de paramètre t_0 est alors décrite par un des quatre cas suivants, selon la parité des entiers p et q (en noir $\overrightarrow{f^{(p)}(t_O)}$, en bleu $\overrightarrow{f^{(q)}(t_O)}$) :



Remarque 84. Même si on retient pas par coeur les quatre cas, on ne doit pas avoir de problème à tracer les courbes en pratique, en observant simplement les variations des fonctions x et y. Par exemple, si x et y admettent simultanément un minimum en t_0, on sera dans un cas de rebroussement de deuxième espèce.

Exemple : Étude complète de la fonction paramétrée $f : t \mapsto \left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & \cos^3(t) \\ y(t) & = & \sin^3(t) \end{array} \right.$.

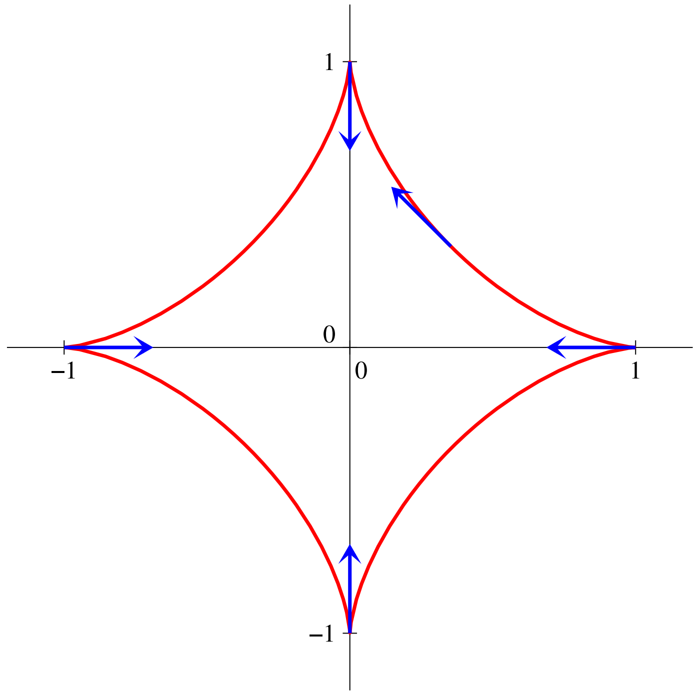
La fonction étant 2π-périodique, on peut se contenter de faire une étude sur l'intervalle $[0; 2\pi]$. De nombreuses autres symétries peuvent en fait permettre de réduire l'intervalle à $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, mais nous allons garder un intervalle « trop gros » pour ce premier exemple. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $x'(t) = -3\sin(t)\cos^2(t)$; $y'(t) = 3\cos(t)\sin^2(t)$. Ces dérivées sont respectivement du signe de $-\sin(t)$ et de $\cos(t)$, on peut donc faire le double tableau de variations suivant (en indiquant bien toutes les valeurs annulant les dérivées pour repérer les points stationnaires) :

t	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$x'(t)$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0
$x(t)$	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	1
$y'(t)$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0
$y(t)$	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	0

Il y a quatre points stationnaires qui se traitent tous de la même manière. On calcule $x''(t) = -3\cos^3(t) + 3\sin^2(t)\cos(t)$ et $y''(t) = 3\sin^3(t) - 3\cos^2(t)\sin(t)$. On en déduit que la tangente en 0 est horizontale dirigée vers la gauche ($x'' = -3$ et $y'' = 0$), celle en $\frac{\pi}{2}$ verticale dirigée vers le bas, celle en π horizontale vers la droite, et celle en $3\frac{\pi}{2}$ verticale vers le haut. Si on veut être complet, on vérifie que les points sont tous des points de rebroussement de première espèce en calculant $x'''(t) = 9\cos^2(t)\sin(t) + 6\cos^2(t)\sin(t) - 3\sin^3(t) = 15\cos^2(t)\sin(t) - 3\sin^3(t)$ et $y'''(t) = 9\cos(t)\sin^2(t) + 6\cos(t)\sin^2(t) - 3\cos^3(t) = 15\cos(t)\sin^2(t) - 3\cos^3(t)$. La dérivée tierce est toujours orthogonale à la dérivée seconde pour les points stationnaires.

Ce n'est pas indispensable, mais pour donner un petit calcul supplémentaire, regardons ce qui se passe en $\frac{\pi}{4}$: on a alors $x(t) = y(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{4}$; et $x'(t) = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$, $y'(t) = \frac{3\sqrt{2}}{4}$. Il s'agit donc d'un point régulier dont la tangente est dirigée par le vecteur $(-1, 1)$.

On conclut bien sûr l'étude par une belle courbe, qui porte ici le nom d'astroïde :



6.2.2 Branches infinies

Définition 94. Un arc paramétré admet une **branche infinie** quand t tend vers t_0 si $\lim\limits_{t\to t_0} \parallel \overrightarrow{f(t)} \parallel = +\infty$.

Remarque 85. Cette situation se produit si (au moins) une des deux fonctions coordonnées x et y a une limite infinie en t_0. On autorise dans cette définition t_0 à être infini (aucune raison de distinguer dans le cas des arcs paramétrés).

Définition 95. Une droite d du plan est **asymptote** à l'arc paramétré en t_0 si l'arc y admet une branche infinie et $\lim\limits_{t\to t_0} d(M(t), d) = 0$, où $M(t)$ désigne le point de l'arc de paramètre t.

Proposition 114. La droite verticale d'équation $x = a$ est asymptote à un arc paramétré en t_0 si $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = a$ et $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = \pm\infty$.
La droite horizontale d'équation $y = b$ est asymptote à un arc paramétré en t_0 si $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = b$.
Plus généralement, la droite d'équation $ax + by + c = 0$ est asymptote à un arc paramétré en t_0 si $\lim\limits_{t\to t_0} ax(t) + by(t) + c = 0$.

Démonstration. En effet, si d a pour équation $ax+by+c = 0$, on sait que $d(M(t), d) = \dfrac{|ax(t) + by(t) + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.
Ce quotient vers 0 si et seulement si ce qui se trouve dans la valeur absolue a une limite nulle. □

Méthode : La recherche de branches infinies d'un arc paramétré est très similaire à celle étudiée pour une fonction réelle.

- On se place au voisinage d'une valeur t_0 pour laquelle une deux fonctions coordonnées a une limite infinie. Si l'autre fonction coordonnée n'a pas une limite infinie, il s'agit d'une asymptote verticale ou horizontale. Sinon, on continue.
- On calcule $\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)}$. Si cette limite est nulle, on dira (comme pour une fonction réelle) qu'il s'agit d'une **branche parabolique de direction** (Ox). Si elle est infinie, c'est une **branche parabolique de direction** (Oy). Si on trouve une limite finie a, on continue.

- On calcule $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) - ax(t)$. Si on obtient une limite finie b, la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à l'arc, sinon il y a une **branche parabolique de direction la droite d'équation** $y = ax$.

Exemple : Étude complète de la fonction $f; t \mapsto \begin{cases} x(t) &= \dfrac{t^2}{t^2-4} \\ y(t) &= \dfrac{t^2-t}{t-2} \end{cases}$.

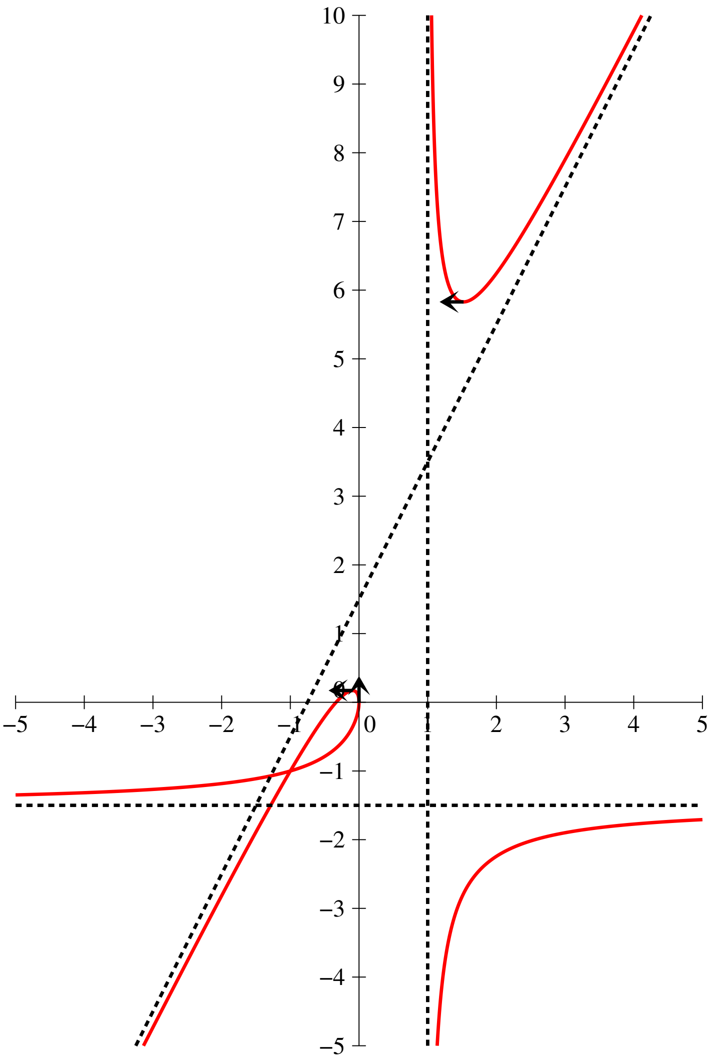
La fonction est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2;2\}$, et admet donc a priori deux branches infinies. Commençons donc par les étudier. Comme $\lim\limits_{t\to -2^-} x(t) = \dfrac{4}{0^+} = +\infty$, $\lim\limits_{t\to -2^+} x(t) = \dfrac{4}{0^-} = -\infty$ et $\lim\limits_{t\to -2} y(t) = -\dfrac{6}{4} = -32$, la droite d'équation $y = -\dfrac{3}{2}$ est asymptote horizontale à la courbe. Le fait que la limite change de signe pour x signifie que la trajectoire va se diriger vers la droite en -2^-, et repartir de la gauche en -2^+. Pour $t = 2$, les deux fonctions coordonnées ont des limites infinies : $\lim\limits_{t\to 2^-} x(t) = \dfrac{4}{0^-} = -\infty$, $\lim\limits_{t\to 2^+} x(t) = \dfrac{4}{0^+} = +\infty$, $\lim\limits_{t\to 2^-} y(t) = \dfrac{2}{0^-} = -\infty$ et $\lim\limits_{t\to 2^+} y(t) = \dfrac{2}{0^+} = +\infty$. Calculons donc $\dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{(t^2-t)(t^2-4)}{t^2(t-2)} = \dfrac{(t+2)(t^2-t)}{t^2}$, qui a pour limite 2 quand t tend vers 2. Calculons alors $y(t) - 2x(t) = \dfrac{t^2-t}{t-2} - \dfrac{2t^2}{t^2-4} = \dfrac{(t^2-t)(t+2) - 2t^2}{(t-2)(t+2)} = \dfrac{t^3-t^2-2t}{(t-2)(t+2)} = \dfrac{t(t-2)(t+1))}{(t-2)(t+2)} = \dfrac{t(t+1)}{t+2}$ qui a pour limite $\dfrac{3}{2}$ quand t tend vers 2. La droite d'équation $y = 2x + \dfrac{3}{2}$ est donc asymptote à la courbe quand t tend vers 2 (là aussi les changements de signe des limites indiquent de quel côté de l'asymptote on se trouve en 2^- et en 2^+).

En $\pm\infty$, on constate en utilisant le quotient des termes de plus haut degré que x a pour limite 1 et y a pour limite $\pm\infty$, ce qui indique la présence d'une autre asymptote, verticale cette fois-ci, d'équation $x = 1$ aux deux infinis.

Passons à l'étude des variations : $x'(t) = \dfrac{2t(t^2-4) - 2t^3}{(t^2-4)^2} = \dfrac{-8t}{(t^2-4)^2}$; et $y'(t) = \dfrac{(2t-1)(t-2) - (t^2-t)}{(t-2)^2} = \dfrac{t^2-4t+2}{(t-2)^2}$. Le numérateur de ce quotient a pour discriminant $\Delta = 16 - 8 = 8$, et s'annule donc pour $t_1 = \dfrac{4-2\sqrt{2}}{2} = 2-\sqrt{2}$, et $t_2 = \dfrac{4+2\sqrt{2}}{2} = 2+\sqrt{2}$. On peut calculer $x(2-\sqrt{2}) = \dfrac{4-4\sqrt{2}+2}{4-4\sqrt{2}+2-4} = \dfrac{3-2\sqrt{2}}{1-2\sqrt{2}} = \dfrac{(3-2\sqrt{2})(1+2\sqrt{2})}{1-8} = \dfrac{5-4\sqrt{2}}{7}$, $y(2-\sqrt{2}) = \dfrac{4-4\sqrt{2}+2-2+\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = \dfrac{-4+3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{6-4\sqrt{2}}{2} = 3-2\sqrt{2}$; puis $x(0) = y(0) = 0$ (ça c'est gentil) ; et enfin $x(2+\sqrt{2}) = \dfrac{4+4\sqrt{2}+2}{4+4\sqrt{2}+2-4} = \dfrac{3+2\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}} = \dfrac{(3+2\sqrt{2})(1-2\sqrt{2})}{1-8} = \dfrac{5+4\sqrt{2}}{7}$ et $y(2+\sqrt{2}) = \dfrac{4+4\sqrt{2}+2-2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{4+3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3+2\sqrt{2}$. Ouf, on peut dresser le tableau de variations suivant :

t	$-\infty$		-2		0		$2-\sqrt{2}$		2		$2+\sqrt{2}$		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	<0		$\Vert$	$-$	<0	$-$	
x	1	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\dfrac{5-4\sqrt{2}}{7}$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$\dfrac{5+4\sqrt{2}}{7}$	$\searrow$	1
$y'(t)$		$+$	>0	$+$	>0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$-\dfrac{3}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$3-2\sqrt{2}$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$3+2\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

On peut constater qu'il existe un point double (atteint pour deux valeurs distinctes du paramètre) sur cette courbe, le point de coordonnées $(-1,-1)$ qui est atteint à la fois lorsque $t=\sqrt{2}$ et $t=-\sqrt{2}$.



6.3 Fonctions polaires

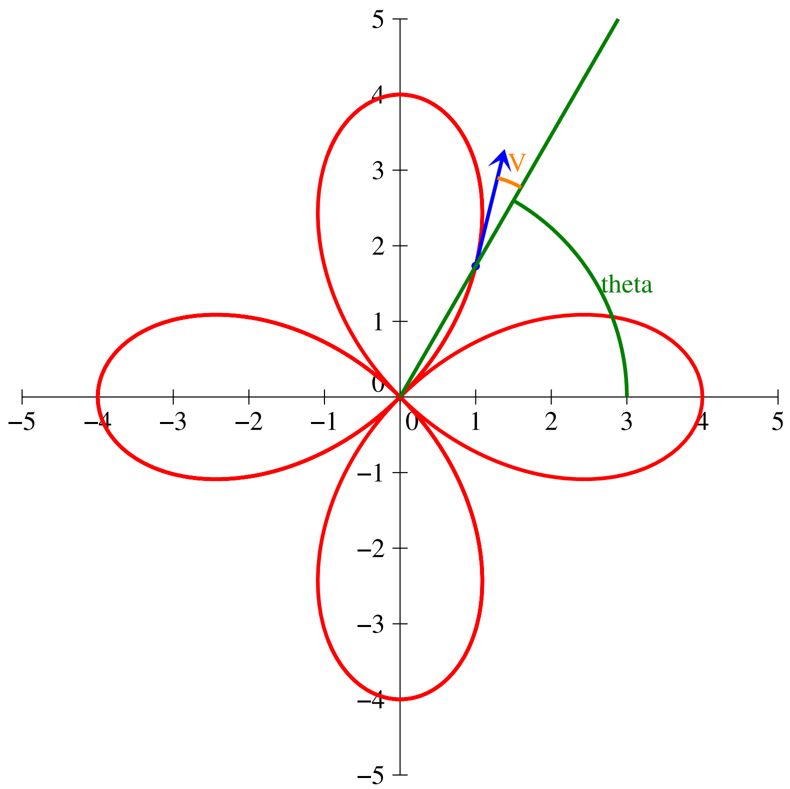
On s'intéresse dans cette dernière partie à des arcs paramétrés définis par une équation polaire de la forme $\overrightarrow{f(t)} = \rho(t)\overrightarrow{u_{\theta(t)}}$. Il y a en fait très très peu de choses à savoir sur ces fonctions.

Proposition 115. Pour tout réel t, $\overrightarrow{f'(t)} = \rho'(t)\overrightarrow{u_{\theta(t)}} + \rho(t)\theta'(t)\overrightarrow{v_{\theta(t)}}$. De même, $\overrightarrow{f''(t)} = (\rho''(t) - \rho(t)\theta'^2(t))\overrightarrow{u_{\theta(t)}} + (2\rho'(t)\theta'(t) + \rho(t)\theta''(t))\overrightarrow{v_{\theta(t)}}$.

Démonstration. La façon la plus simple de voir les choses est d'écrire que $f = \rho \times u \circ \theta$, où la fonction u est définie par $\overrightarrow{u(t)} = \cos(t)\overrightarrow{i} + \sin(t)\overrightarrow{j}$, de dérivée $-\sin(t)\overrightarrow{i} + \cos(t)\overrightarrow{j} = \overrightarrow{v_t}$. De même, on obtient que $\overrightarrow{v'(t)} = -\overrightarrow{u_t}$, en notant $v : t \mapsto \overrightarrow{v_t}$ (les physiciens écrivent sans vergogne que $\dfrac{d\overrightarrow{u_t}}{dt} = \overrightarrow{v_t}$). On dérive ensuite simplement le produit $\rho \times u \circ \theta$, ce qui donne $\rho' \times u \circ \theta + \rho\theta' \times u' \circ \theta$, soit $\rho'\overrightarrow{u_{\theta(t)}} + \rho\theta'\overrightarrow{v_{\theta(t)}}$. On obtient la dérivée seconde de même en dérivant une nouvelle fois cette expression : $\rho'' \times u \circ \theta + \rho'\theta' \times u' \circ \theta + \rho'\theta' \times u' \circ \theta + \rho\theta'' \times u' \circ \theta + \rho\theta' \times u'' \circ \theta$, avec $u'' = v' = -u$. $\square$

Remarque 86. En pratique, on étudiera pratiquement uniquement des fonctions polaires pour lesquelles $\theta(t) = t$, auquel cas on note simplement le paramètre θ. On a alors $\overrightarrow{f'(t)} = \rho'(\theta)\overrightarrow{u_\theta} + \rho(\theta)\overrightarrow{v\theta}$. On peut alors constater les propriétés suivantes :

- les seuls points stationnaires possibles vérifient $\rho(\theta) = 0$, donc des points où la trajectoire se trouve à l'origine du repère. Il ne peut s'agir que de points ordinaire (si ρ change de signe) ou de points de rebroussement de première espèce.
- si $\rho'(\theta) = 0$, la tangente est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{v_\theta}$, on parle alors de tangente **orthoradiale**. Autre façon de voir les choses, la **normale** à la courbe (droite perpendiculaire à la tangente) est radiale, c'est-à-dire dirigée par $\overrightarrow{u_\theta}$.
- En général, si on note V l'angle $(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{f'(\theta)}}) - \theta$, on aura $\tan(V) = \dfrac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)}$.



Sur cette courbe (pour les curieux, il s'agit de la fonction $\rho(\theta) = \cos(2\theta)$), on a tracé en bleu la tangente en un point, l'angle V est représenté en orange.

- Si $\lim\limits_{\theta\to\theta_0}\rho(\theta)=\pm\infty$, la droite passant par l'origine d'équation $\theta=\theta_0$ est toujours direction asymptotique à la courbe. Pour déterminer s'il y a effectivement une asymptote ou une simple branche parabolique, on étudie la distance des points de la courbe à la droite, donnée par $\rho(\theta)\sin(\theta-\theta_0)$ (s'il y a une limite finie l, il y aura une asymptote de même direction que la droite $\theta=\theta_0$ mais située à distance l de cette dernière, si la limite est infinie c'est une branche parabolique).
- Si $\lim\limits_{\theta\to\pm\infty}\rho(\theta)$ est finie, il y a un cercle asymptote (celui de rayon égal à la limite), si cette limite est infinie, la courbe prend une allure de spirale.
- Les symétries de la courbe jouent un rôle très important dans l'étude des fonctions polaire. Par exemple, $\rho(\theta+\pi)=\rho(\theta)$ indique une symétrie par rapport à l'origine du repère.

Exemple : Étude de la courbe polaire $\rho(\theta)=\dfrac{\cos(2\theta)}{\cos(\theta)}$.

La fonction est définie sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right\}$. Elle est évidemment 2π-périodique, mais on peut également constater que $\rho(\theta+\pi)=-\rho(\theta)$, ce qui signifie que la courbe obtenue sur $[\pi;2\pi]$ est identique à la courbe obtenue sur $[0;\pi]$, intervalle que nous prendrons comme intervalle d'étude (on peut encore réduire car $\rho(\pi-\theta)=-\rho(\theta)$, ce qui indique une symétrie par rapport à l'axe (Ox)).

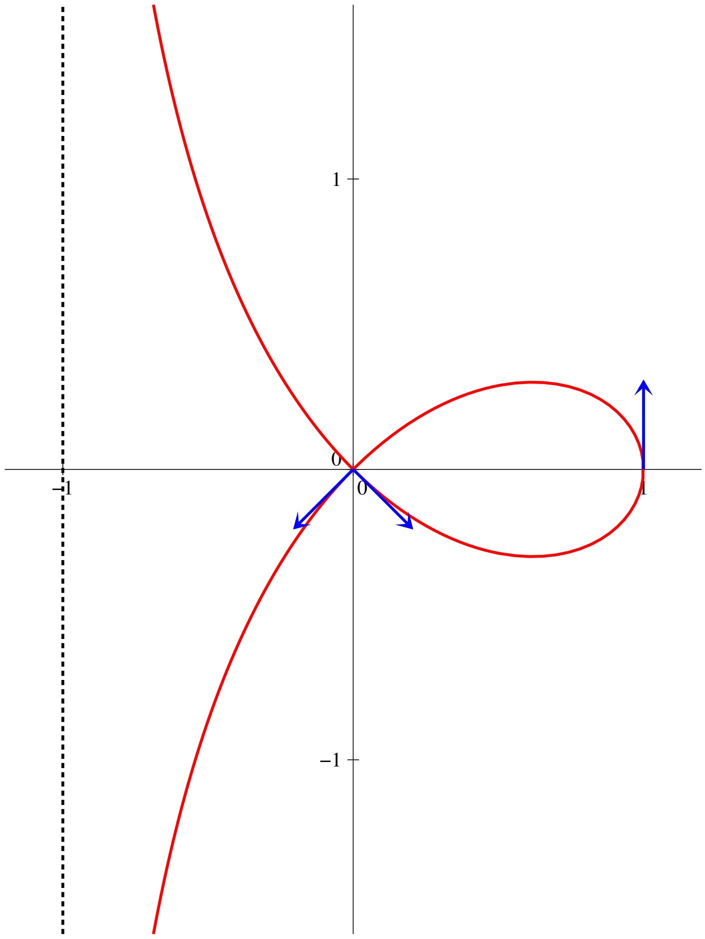
La fonction est dérivable sur son domaine de définition, de dérivée
$\rho'(\theta)=\dfrac{-2\sin(2\theta)\cos(\theta)+\sin(\theta)\cos(2\theta)}{\cos^2(\theta)}=\dfrac{-4\sin(\theta)\cos^2(\theta)+\sin(\theta)(2\cos^2(\theta)-1))}{\cos^2(\theta)}$
$=\dfrac{\sin(\theta)(-2\cos^2(\theta)-1)}{2\cos^2(\theta)}$, qui est du signe opposé à celui de $\sin(\theta)$, donc négative sur $[0;\pi]$. Cette dérivée s'annule en 0 et en π, les tangentes à la courbe aux points correspondants seront donc orthoradiales, c'est-à-dire ici verticales.

Il y a une branche infinie en $\dfrac{\pi}{2}$, la distance à la droite d'équation $\theta=\dfrac{\pi}{2}$, qui n'est autre que l'axe des ordonnées, est donnée par $\rho(\theta)\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\rho(\theta)\cos(\theta)$ (ce qui représente l'opposé de l'abscisse du point). Cette quantité vaut ici $-\cos(2\theta)$, qui a pour limite 1 quand θ tend vers $\dfrac{\pi}{2}$. Il y aura une asymptote verticale d'équation $x=-1$ (distance 1 de l'axe des ordonnées dans la direction de $\overrightarrow{v_{\theta_0}}$).

Pour compléter le tableau de variations, on peut ajouter les valeurs pour lesquelles $\rho(\theta)=0$, ici cela signifie que $\cos(2\theta)=0$, ce qui se produit en $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ et $\theta=\dfrac{3\pi}{4}$. Ces deux points sont des points réguliers (ρ change de signe puisque la fonction est décroissante), il y aura des tangentes radiales pour ces deux valeurs de θ.

θ	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$\rho(\theta)$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

On achève bien sûr l'étude par le tracé de la courbe :


1
0
−1
0
1
−1

Chapitre 7

Coniques

À quoi sert une hyperbole ?
À boire de l'hypersoupe !

L'homme n'est pas un cercle à un seul centre ; c'est une ellipse à deux foyers. Les faits sont l'un, les idées sont l'autre.

Victor Hugo (uniquement pour la citation, pas pour la blague).

Introduction

Ce dernier chapitre de la première période de PTSI est consacré à l'étude des coniques, qui nous verra faire quelques allusions à d'autres domaines étudiés en ce début d'année : un peu de courbes paramétrées, pas mal de géométrie, mais assez peu d'équations différentielles, alors que ces courbes ont pourtant une grande utilité en physique en tant que trajectoires d'astres (et donc comme solutions d'équation différentielles). Nous nous contenterons d'en faire une étude géométrique sommaire dans ce chapitre, en en donnant donc des définitions géométriques. Notons qu'assez curieusement, les sections planes de cônes, qui sont à l'origine de leur dénomination, ne seront même pas évoquées dans ce chapitre sur les coniques.

Objectifs du chapitre :

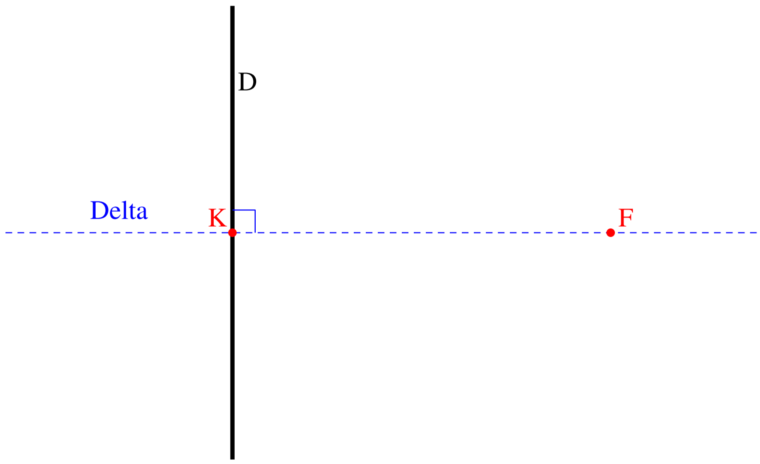
- connaissance des différentes définitions des coniques, et des liens entre tous leurs paramètres géométriques
- capacité à déterminer une équation réduite de conique à partir d'une équation algébrique du second degré

7.1 Définition monofocale des coniques

7.1.1 Équations cartésienne et polaire

Définition 96. Soit D une droite du plan, F un point du plan n'appartenant pas à la droite D, et e un réel strictement positif. La **conique** de **directrice** D et de **foyer** F est l'ensemble des points M du plan vérifiant l'égalité $d(M, F) = ed(M, D)$.

Définition 97. La droite perpendiculaire à la directrice passant par le foyer est appelée **axe focal** de la conique (habituellement noté Δ). Cet axe est toujours un axe de symétrie de la conique. En notant d la distance du foyer à la directrice, on appelle **paramètre** de la conique le réel $p = de$.



Définition 98. Une conique d'excentricité e est appelée **parabole** si $e = 1$, **ellipse** si $0 < e < 1$, et **hyperbole** si $e > 1$.

Proposition 116. Dans le repère orthonormal ayant pour origine F et pour base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, où $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ sont des vecteurs directeurs respectifs de Δ (dans le sens de $\overrightarrow{KF}$) et de D, la conique a pour équation $x^2 + y^2 = e^2(x + d)^2$.

Démonstration. En effet, dans ce repère, si on prend un point $M(x, y)$ quelconque du plan, $d(M, F)^2 = x^2 + y^2$ et $d(M, D) = (x + d)^2$ pusique la directrice a alors pour équation $x = -d$. □

Proposition 117. Dans le même repère que pour la proposition précédente, la conique a pour équation polaire $r = \dfrac{p}{1 - e\cos(\theta)}$. Plus généralement, dans un repère centré sur le foyer et dans lequel la directrice a pour équation $r = \dfrac{d}{\cos(\theta - \theta_0)}$, la conique aura pour équation $r = \dfrac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}$.

Démonstration. Reprenons l'équation obtenue dans la proposition précédente, et passons-la en coordonnées polaires : $r^2 = e^2(r\cos(\theta) + d)^2$, soit $r = \pm e(r\cos(\theta) + d)$, ce qui donne $r_1 = \dfrac{ed}{1 - e\cos(\theta)}$, ou $r_2 = \dfrac{-ed}{1 + e\cos(\theta)}$. Seule la première équation correspond à celle annoncée dans notre proposition, mais la deuxième correspond en fait à la même courbe plane, car $r_2(\theta + \pi) = -r_1(\theta)$, ce qui correspond au même point. Cette équation est bien un cas particulier de l'équation générale (dont nous ne ferons pas le détail de la preuve), dans le cas où $\theta_0 = \pi$. □

7.1.2 Parabole

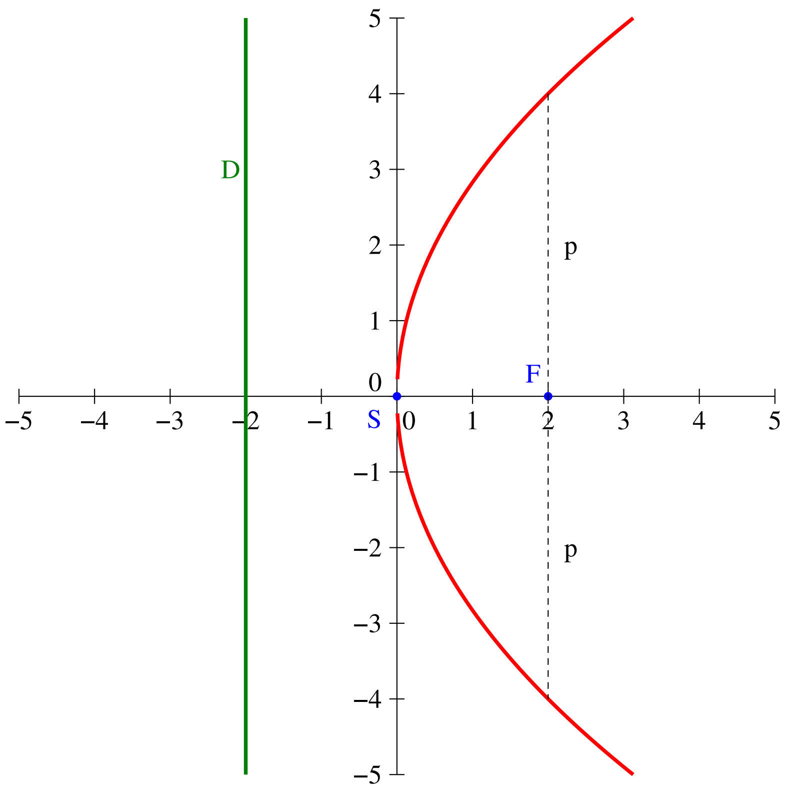
Remarque 87. La parabole possède un seul point situé sur son axe focal, qui coïncide avec le milieu du segment $[FK]$ (où K, conformément à la figure réalisée ci-dessus, est le projeté orthogonal de F sur D). Ce point est noté S et appelé **sommet** de la parabole.

Démonstration. En effet, dans le cas de la parabole, l'excentricité étant égale à 1, l'équation se réduit à $d(M, D) = d(M, F)$. Si on place le point M sur l'axe focal, on aura $d(M, D) = MK$, donc le milieu de $[FK]$ est le seul point de l'axe focal appartenant à la parabole. □

Théorème 20. Dans le repère orthonormal ayant pour origine S et pour base $(\vec{i}, \vec{j})$ (les mêmes que précédemment), la parabole a pour équation $y^2 = 2px$. Cette équation est appelée **équation réduite** de la parabole. Réciproquement, la courbe d'équation $y^2 = 2px$ dans un repère orthonormal est une parabole de sommet O, de foyer $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ et de directrice D d'équation $x = -\frac{p}{2}$.

Démonstration. Dans ce repère, le foyer a pour coordonnées $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ et la directrice a pour équation $x = -\frac{p}{2}$. Si on considère un point $M(x, y)$, on a donc $d(M, D) = x + \frac{p}{2}$, et $d(M, F) = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$. En élevant tout au carré (ce sont des distances positives), le point appartient à la parabole si $x^2 + px + \frac{p^2}{4} = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2$, soit $y^2 = 2px$. La réciproque est immédiate, tous les calculs effectués étant des équivalences. □

Remarque 88. Les points de la parabole ayant pour abscisse $x = \frac{p}{2}$ (même abscisse que le foyer) ont pour ordonnée $\pm p$. En effet, si $x = \frac{p}{2}$, $y^2 = 2p \times \frac{p}{2} = p^2$.



Proposition 118. La parabole peut être paramétrée par les équations $\begin{cases} x(t) = \frac{pt^2}{2} \\ y(t) = pt \end{cases}$.

Démonstration. On constate aisément que ce paramétrage vérifie $y^2 = 2px$, puis $y^2 = p^2t^2 = 2p \times \frac{pt^2}{2}$. De plus, avec ce paramétrage, y prend exactement une fois chaque valeur dans $\mathbb{R}$, et la parabole a un unique point sur chaque droite horizontale, donc tous les points de la parabole sont bien décrits. □

Proposition 119. La tangente à la parabole en un point $M(x_M, y_M)$ a pour équation $yy_M = p(x + x_M)$.

Démonstration. Passons par l'équation paramétrique. On calcule aisément $x'(t) = pt$ et $y'(t) = p$, donc la tangente au point M est dirigée par le vecteur de coordonnées (y_M, p). Un vecteur normal à la tangente est alors $(p, -y_M)$. Comme cette tangente passe par le point M, elle a pour équation $p(x - x_M) - y_M(y - y_M) = 0$, soit $yy_M = y_M^2 + p(x - x_M)$. Le point M appartenant à la parabole, $y_M^2 = 2px_M$, et on trouve bien l'équation $yy_M = p(x + x_M)$. □

7.1.3 Ellipse

Remarque 89. L'ellipse possède deux points A et A' sur son axe focal, appelés **sommets** de l'ellipse. En notant O le milieu du segment $[AA']$ (point qu'on appellera **centre** de l'ellipse), F' le symétrique de F par rapport à O (deuxième **foyer** de l'ellipse), et D' la droite symétrique de D par rapport à O (deuxième **directrice** de l'ellipse) ; en posant $a = OA$ et $c = OF$, alors on a les relations $a = \dfrac{de}{1 - e^2}$, $e = \dfrac{c}{a}$, et $OK = c + d = \dfrac{a^2}{c}$.

Démonstration. En reprenant le schéma général effectué plus haut, on ne peut pas avoir de points de l'ellipse sur l'axe focal qui ne soient pas du même coté de la directrice que le foyer, car ces points ont une distance au foyer supérieure à celle à la directrice, donc ne peuvent vérifier l'équation $d(M, D) = ed(M, F)$, avec $e < 1$. Par contre, il existe un point de l'ellipse sur le segment $[FK]$: si on le note A, on doit avoir $AK + AF = FK = d$, et $d(A, F) = AF = eAK$, donc $AK(1+e) = d$, soit $AK = \dfrac{d}{1+e}$ et $AF = \dfrac{de}{1+e}$ (ce qui correspond bien à un point situé à gauche de F) ; il existe un deuxième point sur l'axe focal à droite du foyer, qu'on va noter A'. Il vérifie cette fois $A'K - A'F = d$, et $A'F = eA'K$, soit $A'K = \dfrac{d}{1-e}$ (qui correspond bien à un point à droite de F avec $0 < e < 1$). On calcule ensuite $AA' = AF + A'F = \dfrac{de}{1+e} + \dfrac{de}{1-e} = \dfrac{de(1-e) + de(1+e)}{1-e^2} = \dfrac{2de}{1-e^2}$, donc $a = OA = OA' = \dfrac{1}{2}AA' = \dfrac{de}{1-e^2}$; $c = OF = OA - AF = \dfrac{de}{1-e^2} - \dfrac{de}{1+e} = \dfrac{de(1-1+e)}{1-e^2} = \dfrac{de^2}{1-e^2} = ae$, soit $e = \dfrac{c}{a}$. Enfin, $OK = OA + AK = \dfrac{ed}{1-e^2} + \dfrac{d}{1+e} = \dfrac{ed + d - de}{1-e^2} = \dfrac{d}{1-e^2} = \dfrac{a}{e} = \dfrac{a^2}{c}$. □

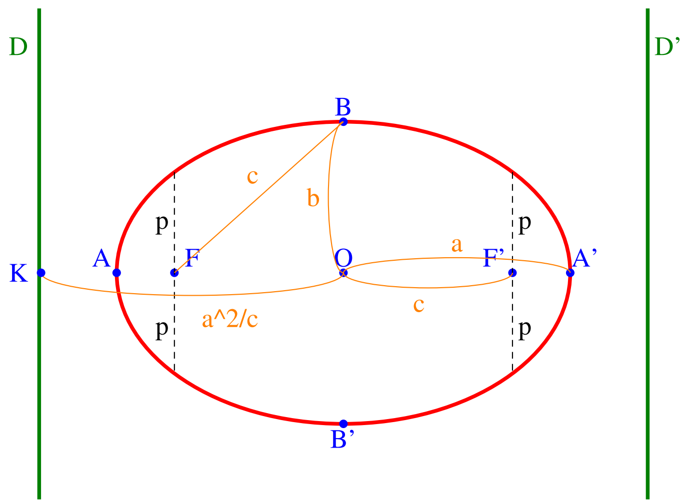
Théorème 21. Dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ (les vecteurs de base n'ont toujours pas changé), l'ellipse admet pour équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, où on a posé $b = \sqrt{a^2 - c^2}$. Les foyers ont pour coordonnées $(\pm c; 0)$ et les directrices pour équations $x = \pm\dfrac{a^2}{c}$. Réciproquement, une telle **équation réduite** est celle d'une ellipse dont les foyers et les directrices ont les coordonnées et équations indiquées.

Démonstration. Soit $M(x, y)$ un point du plan. Dans ce repère, au vu des calculs préliminaires, on a $MF^2 = (x - c)^2 + y^2$, et $d(M, D) = x + \dfrac{a^2}{c}$, donc en élevant tout au carré, M appartient à l'ellipse si $x^2 - 2cx + x^2 + y^2 = \dfrac{c^2}{a^2}\left(x^2 + 2\dfrac{a^2}{c}x + \dfrac{a^2}{c^2}\right)$, soit $x^2 + 2cx + c^2 + y^2 - \dfrac{c^2}{a^2}x^2 - 2cx = a^2$, ou encore $x^2\left(1 - \dfrac{c^2}{a^2}\right) + y^2 = a^2 - c^2$. Pour trouver l'équation réduite, on divise par $a^2 - c^2$, et on trouve $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$. Il suffit donc de poser $b^2 = a^2 - c^2$, ce qui est possible puisque $a > c$. □

Remarque 90. L'ellipse coupe l'axe des ordonnées (qui est également axe de symétrie) en deux points B et B' appelées **sommets** de l'ellipse (qui en a donc quatre) de coordonnées $(0, b)$ et $(0, -b)$. Les points de l'ellipse de même abscisses que les foyers (donc $\pm c$) ont pour ordonnée $\pm p$.

Démonstration. Pour les deux derniers sommets, c'est évident, prendre $x = 0$ dans l'équation réduite de l'ellipse donne $y^2 = b^2$. Pour $x = \pm c$, on obtient cette fois $\frac{c^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, soit $\frac{y^2}{b^2} = \frac{b^2 - c^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2}$. On obtient donc $y = \pm\frac{b^2}{a}$. Or, $p = de = a(1 - e^2) = a\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) = \frac{b^2}{a}$. □

Définition 99. Le réel a est appelé **demi-grand axe** de l'ellipse, le réel b **demi-petit axe**. Le réel c est la **demi-distance focale** de l'ellipse.



Proposition 120. On peut paramétrer l'ellipse par les équations $\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & a\cos(t) \\ y(t) & = & b\sin(t) \end{array}\right.$, où $t \in]-\pi;\pi]$.

Démonstration. On reconnait une paramétrisation très proche de celle du cercle. On vérifie aisément qu'avec le parémétrage choisi, on a $\frac{x(t)^2}{a^2} + \frac{y(t)^2}{b^2} = 1$, et tous les points de l'ellipse sont atteints une unique fois pour une valeur de t entre $-\pi$ et π. □

Proposition 121. La tangente à l'ellipse en son point $M(x_M, y_M)$ a pour équation $\frac{xx_M}{a^2} + \frac{yy_M}{b^2} = 1$.

Démonstration. Passons à nouveau par le paramétrage, on a $x'(t) = -a\sin(t)$ et $y'(t) = b\cos(t)$, donc la tangente a pour vecteur normal $(b\cos(t), a\sin(t))$, et pour équation $b\cos(t)(x - a\cos(t)) + a\sin(t)(y - b\sin(t)) = 0$, soit $b\cos(t)x + a\sin(t)y = ab$. En divisant tout par ab, on trouve donc $x\frac{\cos(t)}{a} + y\frac{\sin(t)}{b} = 1$, ou encore $\frac{xx_M}{a^2} + \frac{yy_M}{b^2} = 1$. □

Les ellipses n'étant au fond qu'une version un peu dégénérée des cercles, on peut les voir apparaitre dans d'autres contextes.

Définition 100. Une **affinité** de centre O, de rapport k dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est une application du plan dans lui-même associant au point de coordonnées (x, y) dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, le point de coordonnées (x, ky). Autrement dit, une affinité effectue une homothétie sur un seul des deux axes du repère, mais ne touche pas à ce qui se passe sur l'autre.

Proposition 122. L'image d'un cercle de rayon R centré en O par une affinité dans la base orthonormale $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est une ellipse de demi-grand axe R et de demi-petit axe kR (si $0 \leqslant k \leqslant 1$).

Proposition 123. La projection orthogonale d'un cercle de rayon R dans l'espace sur un plan non perpendiculaire au plan le contenant, est une ellipse dont le centre est le projeté orthogonal du centre du cercle, de demi-grand axe R et de demi-petit axe $R\cos(\alpha)$, où α représente l'angle entre les deux plans.

Démonstration. Nous admettrons ces deux propriétés annexes, qui sont assez intuitives mais un peu techniques à prouver. □

7.1.4 Hyperbole

Remarque 91. Tout comme l'ellipse, l'hyperbole possède deux points sur son axe focal, situés de part et d'autre de sa directrice. On utilisera les mêmes notations que pour les ellipses : F et F' pour les deux foyers, A et A' pour les sommets, D et D' pour les directrices, O pour le centre. Avec ces notations, on a les relations $a = \dfrac{de}{e^2-1}$; $e = \dfrac{c}{a}$ et $OK = \dfrac{a^2}{c}$.

Démonstration. Les calculs étant exactement les mêmes que dans le cas de l'ellipse à des petits changemets de signe près, ils seront laissés en exercice au lecteur. □

Théorème 22. Dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, l'hyperbole admet pour équation $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, où on a posé $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. Les foyers ont pour coordonnées $(\pm c; 0)$ et les directrices pour équations $x = \pm\dfrac{a^2}{c}$. Réciproquement, une telle **équation réduite** est celle d'une hyperbole dont les foyers et les directrices ont les coordonnées et équations indiquées.

Proposition 124. On peut paramétrer l'hyperbole par les équations $\begin{cases} x(t) &= \pm a\cosh(t) \\ y(t) &= b\sinh(t) \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$. Plus précisément, si $x(t) = a\cosh(t)$, on obtient une des branches de l'hyperbole, et on retrouve l'autre avec $x(t) = -a\cosh(t)$.

Démonstration. La paramétrage est proche de celui de l'ellipse, et découle de la relation $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$. Par contre, on ne trouvera que des valeurs de x supérieures à a en prenant $x(t) = a\cosh(t)$, d'où la nécessité d'un paramétrage pour chaque branche de l'hyperbole. □

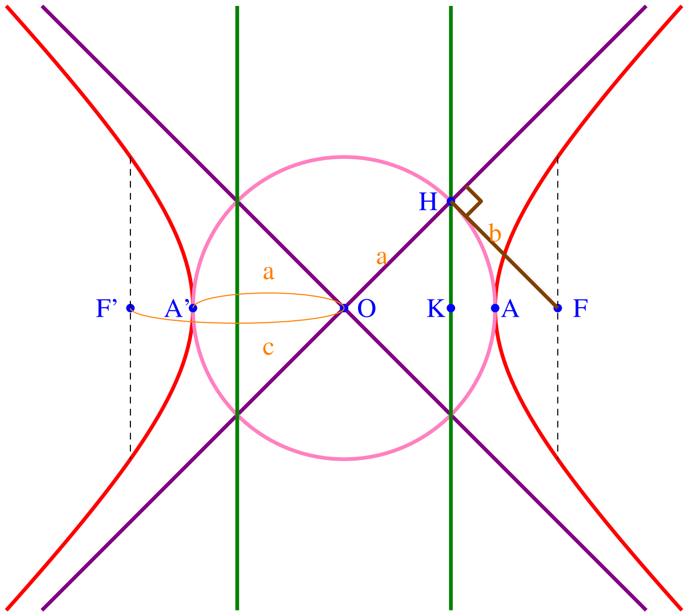
Proposition 125. L'hyperbole admet deux asymptotes obliques d'équation $y = \dfrac{b}{a}x$ et $y = -\dfrac{b}{a}x$. Ces asymptotes se coupent au centre de l'hyperbole, et son symétriques par rapport à chacun des deux axes.

Démonstration. Faisons le calcul pour une des deux branches, par exemple celle où $x(t) = a\cosh(t)$. On étudie la branche infinie quand t tend vers $+\infty$: $\dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{a\sinh(t)}{b\cosh(t)} = \dfrac{a(e^t - e^{-t})}{b(e^t + e^{-t})}\dfrac{a}{b}\dfrac{1 - e^{-2t}}{1 + e^{-2t}}$ en factorisant par e^t des deux côtés, d'où une limite égale à $\dfrac{a}{b}$. On calcule alors $y(t) - \dfrac{b}{a}x(t) = b(\sinh(t) - \cosh(t)) = -2be^{-t}$, qui a une limite nulle en $+\infty$. On trouve donc une asymptote oblique d'équation $y = \dfrac{b}{a}x$. On effectue des calculs très similaires (ou on invoque des propriétés de symétrie) pour déterminer les asymptotes en $-\infty$ et sur l'autre branche. □

Remarque 92. La distance des foyers de l'hyperbole à chacune de ses asymptotes vaut b. Le projeté orthogonal H du foyer F sur l'asymptote d'équation $y = \dfrac{b}{a}x$ (et de même pour les autres projetés) est à distance a de l'origine. De plus, le point H est situé sur la directrice D. Enfin, les points d'abscisse $\pm c$ sur l'hyperbole ont pour ordonnée $\pm p$.

Démonstration. On peut utiliser la distance d'un point à une droite : en notant $\mathcal{A}$ l'asymptote d'équation $bx - ay = 0$, $d(F, \mathcal{A}) = \dfrac{|bc|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{bc}{c} = b$. Le triangle OHF étant alors rectangle en H, on a $OH^2 = OF^2 - FH^2 = c^2 - b^2 = a^2$, d'où $OH = a$. L'aire du triangle OHF vaut $\dfrac{1}{2}ab$, mais également $\dfrac{1}{2}cy_H$, donc $y_H = \dfrac{ab}{c}$. Comme H appartient à l'asymptote $\mathcal{A}$, on en déduit que

$x_H = \frac{a}{b} \times y_H = \frac{a^2}{c}$, ce qui prouve que le point H appartient bien à la directrice. Enfin, pour les points d'abscisse $\pm c$, c'est très similaire au cas de l'ellipse, on a alors $y\frac{y^2}{b^2} = \frac{c^2}{a^2} - 1 = \frac{b^2}{a^2}$, donc $y = \pm\frac{b^2}{a}$, qui coïncide toujours avec la valeur du paramètre p. □



Proposition 126. La tangente à l'hyperbole en son point $M(x_M, y_M)$ a pour équation $\frac{xx_M}{a^2} - \frac{yy_M}{b^2} = 1$.

Démonstration. Ce dernier calcul est également laissé en exercice au lecteur. □

7.2 Définition bifocale des coniques

On peut également définir les coniques à centre (mais pas les paraboles) de façon géométrique en utilisant les deux foyers.

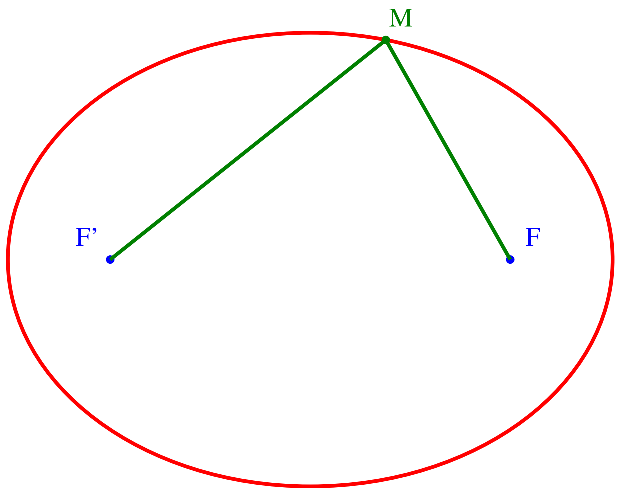
Théorème 23. Soient F et F' deux points distincts du plan vérifiant $FF' = 2c$ et a un réel strictement positif.

- Si $a > c$, l'ensemble des points M du plan vérifiant $MF + MF' = 2a$ est une ellipse dont les deux foyers sont F et F', de demi-distance focale c et de demi-grand axe a.
- Si $a < c$, l'ensemble des points M du plan vérifiant $|MF - MF'| = 2a$ est une hyperbole dont les deux foyers sont F et F', de demi-distance focale c et de demi axe a.

Démonstration. Les deux preuves étant extraordinairement similaires, on se contentera du cas de l'ellipse. On peut toujours se placer dans un repère orthonormal où les points F et F' ont pour coordonnées $(\pm c; 0)$. On a alors, en notant $M(x, y)$ un point du plan, $MF + MF' = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, on peut écrire les équivalences suivantes :

$$
\begin{array}{ll}
 & MF + MF' = 2a \\
\Leftrightarrow & (x-c)^2 + y^2 + (x+c)^2 + y^2 + 2\sqrt{((x-c)^2+y^2)((x+c)^2+y^2)} = 4a^2 \\
\Leftrightarrow & 2\sqrt{((x-c)^2+y^2)((x+c)^2+y^2)} = 4a^2 - 2x^2 - 2c^2 - 2y^2 \\
\Leftrightarrow & ((x-c)^2+y^2)((x+c)^2+y^2) = (2a^2 - x^2 - c^2 - y^2)^2 \\
\Leftrightarrow & (x^2-c^2)^2 + y^2(2x^2+2c^2) + y^4 = \\
\Leftrightarrow & \qquad 4a^4 + x^4 + c^4 + y^4 - 4a^2x^2 - 4a^2c^2 - 4a^2y^2 + 2x^2c^2 + 2x^2y^2 + 2c^2y^2 \\
\Leftrightarrow & x^4 - 2x^2c^2 + c^4 + 2y^2x^2 + 2y^2c^2 = \\
\Leftrightarrow & \qquad 4a^4 + x^4 + c^4 - 4a^2x^2 - 4a^2c^2 - 4a^2y^2 + 2x^2c^2 + 2x^2y^2 + 2c^2y^2 \\
\Leftrightarrow & 4a^2x^2 - 4x^2c^2 + 4a^2y^2 = 4a^4 - 4a^2c^2 \\
\Leftrightarrow & x^2\left(\dfrac{4(a^2-c^2)}{4a^2(a^2-c^2)}\right) + y^2\dfrac{4a^2}{4a^2(a^2-c^2)} = 1 \\
\Leftrightarrow & \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1
\end{array}
$$

□



7.3 Courbes algébriques du second degré

Définition 101. Une **courbe algébrique** du second degré est une courbe définie par une équation de la forme $ax^2 + bxy +^c y^2 + dx + ey + f = 0$, où a, b, c, d, e et f sont six réels non tous nuls.

Définition 102. Le **discriminant** d'une courbe algébrique du second degré est le réel $\delta = ac - \frac{b^2}{4}$. Si $\delta = 0$, la courbe est dite **de type parabole**, si $\delta > 0$, elle est **de type ellipse**, et si $\delta < 0$, elle est **de type hyperbole**.

Remarque 93. Cette terminologie ne signifie pas qu'il s'agit nécessairement du type correspondant, comme va le préciser le théorème suivant.

Théorème 24. Une courbe algébrique peut être, selon son discriminant, l'une des choses suivantes :

- si $\delta = 0$, soit une parabole, soit deux droites parallèles, soit une droite, soit l'ensemble vide.

- si $\delta > 0$, soit une ellipse, soit un point, soit l'ensemble vide.
- si $\delta < 0$, soit une hyperbole, soit deux droites sécantes.

Démonstration. L'idée de la preuve, que nous ne ferons pas en détail, est de ramener l'équation initiale à une équation réduite de conique (ou à un cas particulier plus simple). On procède en deux étapes : la première consiste à se débarasser du terme en xy en effectuant une rotation du repère orthonormal (sans en changer l'origine). Autrement dit, on pose $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & x'\cos(\theta) & - & y'\sin(\theta) \\ y & = & y'\cos(\theta) & + & x'\sin(\theta) \end{array}\right.$, et on choisit la valeur de θ de façon à supprimer le facteur devant $x'y'$ (nous admettrons que c'est toujours possible). On obtient alors une équation intermédiaire de la forme $Ax'^2+Cy'^2+Dx'+Ey'+F=0$. Les constantes sont évidemment différentes de celles de l'équation initiale, mais le discriminant n'a pas changé (autrement dit, $AC = ac - \frac{b^2}{4}$). Ce résultat très calculatoire sera également admis.

La deuxième étape consiste désormais à se débarasser des termes Dx' et Ey' (lorsque c'est possible), en effectuant une translation de repère. En fait, on essaye, comme dans le cas d'une factorisation d'équation de cercle, de mettre sous forme canonique. Il faut tout de même distinguer plein de cas :

- si $\delta = 0$, cela signifie que $A = 0$ ou $C = 0$. Si les deux coefficients sont nuls, il reste une équation de la forme $Dx' + Ey' + F = 0$, qui est une équation de droite (éventuelle vide).
- si $A = 0$ mais $C \neq 0$, regardons d'abord le cas où $D = 0$, on se retrouve avec $Cy'^2+Ey' = -F$, soit $C\left(y' + \frac{E}{2C}\right)^2 = -F - \frac{E^2}{4C}$. Autrement dit, pour une certaine constante k et en appelant Y ce qui se trouve dans la parenthèse, on a $Y^2 = k$. Si $k < 0$, notre courbe est vide, si $k = 0$, on trouve une unique droite, et si $k > 0$, on aura deux droites parallèles (horizontales dans le dernier repère).
- si $D \neq 0$, on ramène l'équation (par le même genre de factorisation que ci-dessus), à $Y^2 = kX$, qui est une équation de parabole.
- dans le cas où $\delta > 0$, on peut toujours supposer $A > 0$ et $C > 0$ (sinon on change tous les signes) et se ramener à l'aide de mises sous forme canonique à une équation du genre $A'X^2+C'Y^2 = k$ (les deux coefficients à gauche étant toujours positifs). Si $k < 0$, notre courbe est à nouveau vide, si $k = 0$, la courbe est réduite à un point (l'origine du dernier repère), enfin si $k > 0$, en divisant par k, on reconnait une équation réduite d'ellipse.
- enfin, si $\delta < 0$, on se ramène de même à $A'X^2 - C'Y^2 = k$. Si $k \neq 0$, on aura toujours une hyperbole (si la constante k est négative, on se trouvera seulement avec une hyperbole dont l'axe focal est l'axe des ordonnées). Par contre, si $k = 0$, on peut factoriser sous la forme $(\sqrt{A'}X - \sqrt{C}Y)(\sqrt{A'}X + \sqrt{C}Y) = 0$, ce qui correspond à deux droites sécantes (symétriques par rapport aux axes dans le dernier repère).

□

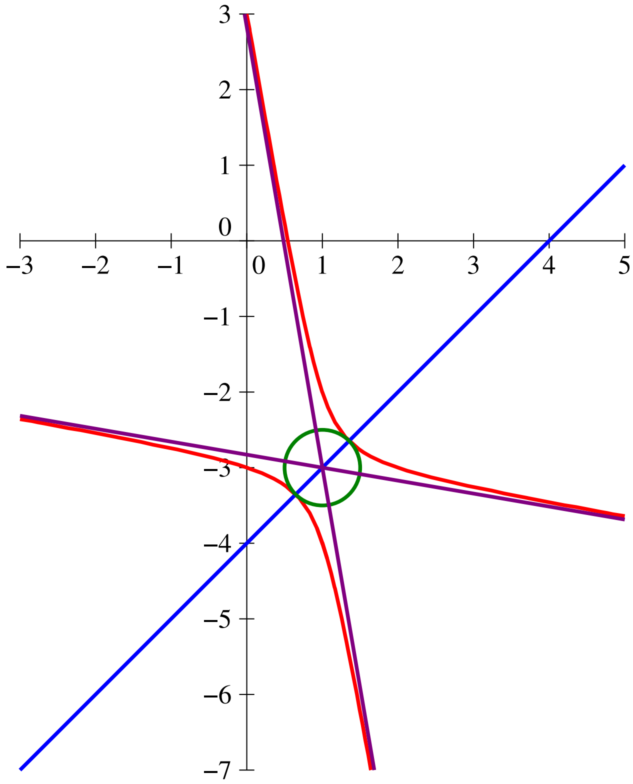
Exemple : On cherche à réduire l'équation $x^2 + 6xy + y^2 + 16x - 9 = 0$.

On peut commencer par calculer le discriminant $\delta = 1 - \frac{36}{4} = -8$ pour constater que notre courbe est de type hyperbole.

Pour la première étape, on admet que le fait que les coefficients devant x^2 et y^2 soient égaux permet d'effectuer une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$. On pose alors $x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')$ et $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y)$. Le membre de gauche devient alors $\frac{1}{2}(x' - y')^2 + 3(x' - y')(x' + y') + \frac{1}{2}(x' + y')^2 + 8\sqrt{2}(x' - y') - 9 = 4x'^2 - 2y'^2 + 8\sqrt{2}x' - 8\sqrt{2}y' - 9$. On constate en passant que le discriminant n'a effectivement pas changé, il vaut toujours -8.

On passe donc à la deuxième étape, qui consiste simplement ici à mettre sous forme canonique le membre de gauche : $4(x' + \sqrt{2})^2 - 8 - 2(y' + 2\sqrt{2})^2 + 16 - 9$. L'équation dans le repère translaté est donc $4X^2 - 2Y^2 = 1$. On reconnait ici l'équation d'une hyperbole, dont les paramètres sont $a = \frac{1}{2}$

et $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$, centrée en $O(-\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ dans le repère tourné de $\frac{\pi}{4}$. Dans le repère initial, on retrouve donc $x_O = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\sqrt{2} + 2\sqrt{2}) = 1$, et $y_O = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\sqrt{2} - 2\sqrt{2}) = -3$ On peut calculer facilement l'équation de l'axe focal, il forme un angle de $\frac{\pi}{4}$ par rapport à l'axe des abscisses, et passe par le point O. Autrement dit, il a une équation du type $y = x + b$, avec donc $b = -4$. On pourrait de même calculer les coordonnées des foyers et sommets de l'hyperbole. En voici une représentation :



Chapitre 8

Ensembles

La vie n'est bonne qu'à étudier et à enseigner les mathématiques.

Blaise Pascal.

Ne tenez pour certain que ce qui est démontré.

Isaac Newton.

Introduction

Ce chapître est un peu fourre-tout, la notion (extrêmement générale) d'ensemble étant prétexte à regrouper trois parties de cours assez indépendantes : une partie théorique sur les notions d'applications injective et sujective, permettant de vraiment comprendre la notion essentielle en mathématiques de bijection ; une partie consacrée au principe de récurrence et à ses variantes, il est évidemment essentiel de maîtriser parfaitement cette technique de démonstration fondamentale. Cette partie contiendra également quelques notions sur les calculs de sommes, là aussi un outil qu'on recroisera souvent. Enfin, la dernière partie de ce chapitre est consacrée au dénombrement, qui sert un peu moins pour nous que pour vos camarades ayant des probabilités à leur programme, mais qui permet tout de même d'introduire quelques outils de calculs très importants, au premier rang desquels les coefficients binomiaux. Même si ce chapître ne sera pas celui qui fera l'objet du plus grand nombre d'interrogations dans l'immédiat, il serait vraiment très malvenu de le négliger, son contenu étant nécessaire pour fixer les bases des premiers chapîtres d'algèbre et d'analyse que nous aborderons ensuite.

Objectifs du chapitre :

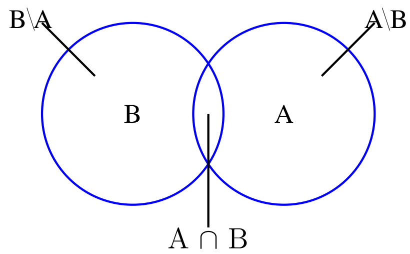
- maîtriser les notions d'application injective et surjective, y compris pour des applications autres que celles de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
- comprendre réellement le principe de récurrence, et savoir l'appliquer dans toutes les situations où on peut en avoir besoin
- maîtriser les calculs de sommes faisant intervenir les sommes classiques
- savoir effectuer des dénombrements d'ensembles non triviaux, maitriser les calculs faisant intervenir les coefficients binomiaux

8.1 Ensembles et applications

8.1.1 Ensembles

On suppose connues les notions d'**ensemble**, **sous-ensemble**, **inclusion**, **appartenance**, **ensemble vide** (qui sont rappelées dans notre premier chapître sur les fonctions usuelles), ainsi que les opérations d'**union** et d'**intersection** et leurs propriétés élémentaires, notamment la distributivité de l'une par rapport à l'autre (dans les deux sens). Signalons simplement la possibilité d'effectuer des unions ou intersections infinies, qu'on notera sous la forme $\bigcup_{i\in I} A_i$ et $\bigcap_{i\in I} A_i$.

Définition 103. Soit A un sous-ensemble d'un ensemble E. On définit le **complémentaire** de A dans E par $\overline{A} = \{x \in E \mid x \notin A\}$. Plus généralement, si B est un autre sous-ensemble de E, on peut définir le complémentaire de A dans B (aussi appelé différence de B et de A) par $B\backslash A = \{x \in B \mid x \notin A\}$.



Exemple : Soit $E = \mathbb{R}$ et $A = [-3; 5]$, alors $\overline{A} =]-\infty; 3[\cup]5; +\infty[$.

Proposition 127. Lois de Morgan. Deux propriétés symétriques à retenir :
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Démonstration. Ne pas appartenir à A ou à B est équivalent à n'appartenir ni à A, ni à B. C'est juste ceci que retranscrit la première loi de Morgan. La deuxième est similaire. □

Définition 104. Le **produit cartésien** de deux ensembles E et F est l'ensemble constitué de tous les couples d'éléments (x, y), avec $x \in E$ et $y \in F$. On le note $E \times F$.

Remarque 94. Les notations sont très importantes : l'ensemble $\{2; 3\}$ est constitué de deux éléments (les entiers 2 et 3), alors que l'ensemble $\{(2, 3)\}$ est constitué d'un seul élément, la paire d'entiers $(2, 3)$.

Remarque 95. Encore une fois, on généralise facilement à plus de deux ensembles.

Remarque 96. Lorsque $E = F$, on note E^2 plutôt que $E \times E$, et plus généralement $\underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{n \text{ fois}} = E^n$.

Définition 105. L'ensemble des parties d'un ensemble E, noté $\mathcal{P}(E)$, est l'ensemble dont les éléments sont les sous-ensembles de E.

Exemple : Si $E = \{1; 2; 3\}$, $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1; 2\}; \{1; 3\}; \{2; 3\}; \{1; 2; 3\}\}$.

8.1.2 Applications

Une application est un cas particulier de ce que vous avez l'habitude d'appeler une fonction. La différence est qu'une application doit être définie sur tout son ensemble de départ, alors qu'on parle par exemple de fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour la fonction inverse (mais on peut très bien parler de l'application inverse de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$).

Définition 106. Une **application** f est la donnée d'un ensemble E, appelé ensemble de départ de l'application, d'un ensemble F appelé ensemble d'arrivée, et pour chaque élément x de E, d'un unique élément de F noté $f(x)$. On appelle $f(x)$ l'**image** de l'élément x par f, et si $y \in E$, les éléments x de E vérifiant $f(x) = y$ sont appelés **antécédents** de y par f (un élément y peut très bien ne pas avoir d'antécédent, ou au contraire en avoir plusieurs).

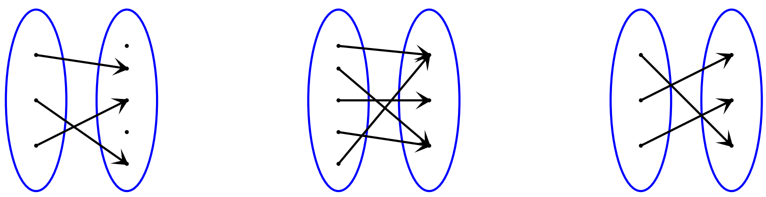
Exemple : L'application $x \to x$, définie sur un ensemble quelconque E, est appelée application **identité**, souvent notée id (ou id_E si on veut bien préciser l'ensemble de départ). La fonction $x \mapsto \dfrac{3}{x-2}$ est une application de $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ dans $\mathbb{R}$.

Remarque 97. Deux applications sont identiques si elles ont même ensemble de départ, même ensemble d'arrivée et envoient un même élément sur une même image. Par exemple, les fonctions d'une variable réelle $f : x \mapsto x - 4$ et $g : x \mapsto \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x - 1}$ sont différentes, même si elles coïncident sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$: elles n'ont pas le même ensemble de définition.

Définition 107. Soit $f : E \to F$ une application et E' un sous-ensemble de E. L'application $g : E' \to F$ définie par $\forall x \in E'$, $g(x) = f(x)$ est appelée **restriction** de f au sous-ensemble E' et notée $f_{|E'}$. On dit egalement que f est un **prolongement** de g à E.

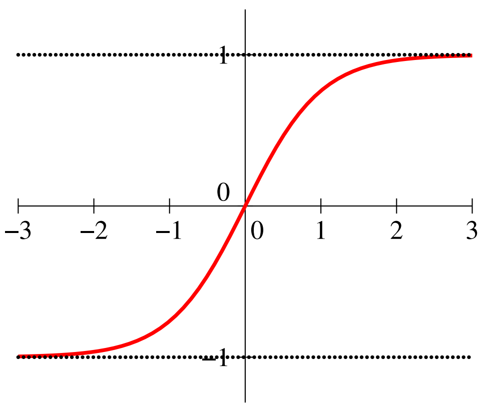
Exemple : La fonction $x \to x \ln x$, définie sur R_+^*, peut se prolonger en une fonction $\tilde{f}$ définie et continue sur R_+ en posant $\tilde{f}(0) = 0$. En pratique, on utilise souvent la même notation pour désigner le prolongement que pour la fonction d'origine, même si c'est un abus de notation.

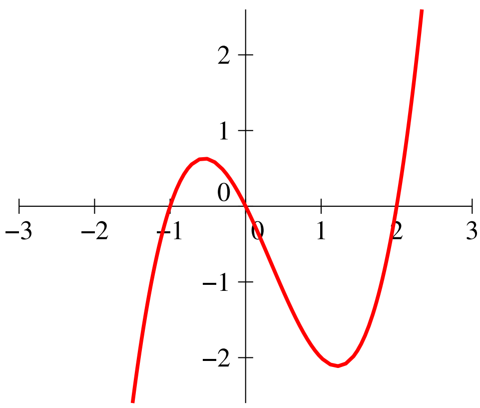
Définition 108. Soit $f : E \to F$ une application, f est dite **injective** si $\forall (x, x') \in E^2, f(x) = f(x') \Rightarrow x = y$; f est dite **surjective** si $\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$; enfin, f est dite **bijective** si elle est à la fois injective et surjective.



f injective $\qquad$ f surjective $\qquad$ f bijective

Et pour ceux qui préfèrent avec des fonctions, un exemple de fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ injective mais pas surjective (à gauche, on voit que les valeurs supérieures à 1 par exemple n'ont pas d'anctécédent), et un de fonction surjective mais pas injective à droite (par exemple 0 a trois antécédents par cette fonction) :





Remarque 98. Autrement dit, f est injective si tout élément de F a au plus un antécédent par f, surjective si tout élément de F a au moins un antécédent de F, et bijective si tout élément de F a exactement un antécédent par f. On peut aussi définir une application injective de la façon suivante : $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$.

Exemples : L'application $x \mapsto x^2$, qui va de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$, est surjective (tout réel positif admet une racine carrée) mais pas injective car par exemple 2 et -2 ont la même image par f. L'application racine carrée est par contre bijective de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même.

Proposition 128. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective. Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.

Démonstration. Supposons g et f injectives, et soient $x, x' \in E^2$ tels que $g(f(x)) = g(f(x'))$. Par injectivité de g, on a alors nécessairement $f(x) = f(x')$, puis par injectivité de f, $x = x'$, ce qui prouve l'injectivité de $g \circ f$. Supposons désormais g et f surjectives et soit $z \in G$. Par surjectivité de g, $\exists y \in F$, $z = g(y)$, puis par surjectivité de f, $\exists x \in E$, $y = f(x)$. Mais alors $z = g \circ f(x)$, donc z a un antécédent par $g \circ f$, ce qui prouve sa surjectivité. □

Remarque 99. La réciproque de ces propriétés est totalement fausse, voir la feuille d'exercices pour quelques exemples.

Proposition 129. Une application $f : E \to F$ est bijective si et seulement si il existe $g : F \to E$ telle que $g \circ f = id_E$ et $f \circ g = id_F$. L'application g est alors appelée **bijection réciproque** de f (ou réciproque tout court) et notée f^{-1}.

Remarque 100. Cette réciproque, bien que notée f^{-1}, n'a rien à voir avec la fonction inverse de f, que pour cette raison nous noterons toujours $\dfrac{1}{f}$. Notons au passage que f^{-1} est effectivement bijective, de réciproque f (c'est évident une fois le théorème démontré).

Démonstration. Supposons f bijective et soit $y \in F$. Il existe un unique antécédent x de y par f, on pose $g(y) = x$. On a alors par construction $f \circ g(x) = x$, donc $f \circ g = id_F$. De plus, si $x \in E$, $g(f(x))$ est un antécédent de $f(x)$, mais comme il n'y en qu'un ça ne peut être que x, donc on a aussi $g \circ f = id_E$.
Réciproquement, si $g \circ f = id_E$ et $f \circ g = id_F$, considérons x et x' tels que $f(x) = f(x')$, on a alors $g \circ f(x) = g \circ f(x')$, donc $x = x'$, ce qui prouve l'injectivité de f. Soit maintenant $y \in F$, alors $g(y)$ est un antécédent de y par f puisque $f \circ g(y) = y$, donc f est sujective. L'application f est donc bijective. □

Remarque 101. Vous connaissez déjà quelques exemples classiques de bijections réciproques, notamment ln (bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$) et exp (bijective réciproque de ln de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$). Vous savez également que les représentations graphiques de ces deux fonctions sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$. C'est une propriété générale des fonctions réciproques.

Exemple : L'application $f : x \mapsto 3x + 6$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et son application réciproque est l'application $g : x \mapsto \dfrac{1}{3}x - 2$. En effet, $g \circ f(x) = \dfrac{1}{3}(3x+6) - 2 = x$ et $f \circ g(x) = 3\left(\dfrac{1}{3}x - 2\right) + 6 = x$.

Proposition 130. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications bijectives, alors $g \circ f : E \to G$ est une application bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Démonstration. f et g étant à la fois injectives et surjectives, $g \circ f$ est à la fois injective et surjective (cf plus haut) donc bijective. De plus, $\forall x \in E$, $f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f(x) = f^{-1}((g^{-1} \circ g)(f(x))) = f^{-1}(f(x)) = x$ et de même $\forall x \in G$, $g \circ f \circ f^{-1} \circ g^{-1}(x) = x$. □

Définition 109. Soit $f : E \to F$ une application et $A \subset E$. On appelle **image** (directe) de A l'ensemble des images des éléments de A : $f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A, f(x) = y\}$. Soit maintenant $B \subset F$, on appelle **image réciproque** de B par F l'ensemble des antécédents d'élements de B : $f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$.

Remarque 102. La deuxième notation n'a pas été choisie de façon contradictoire avec la définition d'application réciproque (encore heureux). Si f est bijective, l'image réciproque d'une partie B de F est confondue avec son image directe par f^{-1}.

Exemple : Considérons l'application $f : x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors $f([2;5]) = [4;25]$; $f([-1;3]) = [0;9]$; $f^{-1}([4;9]) = [-3;-2] \cup [2;3]$.

8.2 Récurrence, sommes et produits

8.2.1 Démonstration par récurrence

Théorème 25. Tout sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Remarque 103. Ce résultat fondamental pour la structure de l'ensemble $\mathbb{N}$ est plus un axiome qu'un réel théorème.

Proposition 131. Principe de récurrence.
Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de propriétés. Si P_0 est vraie, et si $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n \Rightarrow P_{n+1}$, alors toutes les propriétés P_n sont vraies.

Démonstration. C'est en fait équivalent au théorème énoncé précédemment. Notons $A = \{n \in \mathbb{N} \mid P_n \text{est fausse}\}$. On procède par l'absurde, supposons donc que les propriétés ne sont pas toutes vraies, ce qui revient à dire que l'ensemble A n'est pas vide. D'après le théorème précédent, il y a donc un entier n_0 qui est le plus petit élément de l'ensemble A. Cet entier ne peut pas être nul puisque P_0 est supposée vrai, on en déduit que $n_0 - 1 \in \mathbb{N}$. La propriété P_{n_0-1} est vraie puisque n_0 est le plus petit élément de A, mais P_{n_0} est fausse. C'est impossible à cause de l'hypothèse $P_n \Rightarrow P_{n+1}$, l'ensemble A est donc vide, et les propriétés sont toutes vraies. □

Cette propriété sert également de pense-bête pour bien structurer la rédaction d'une démonstration par récurrence. On procède théoriquement en quatre étapes :

- **Énoncé** clair et précis des propriétés P_n et du fait qu'on va réaliser une récurrence.
- **Initialisation** : on vérifie que P_0 est vraie (habituellement un calcul très simple).
- **Hérédité** : on suppose P_n vraie pour un entier n quelconque (c'est l'hypothèse de récurrence) et on prouve P_{n+1} à l'aide de cette hypothèse (si on n'utilise pas l'hypothèse de récurrence, c'est qu'on n'avait pas besoin de faire une récurrence !).
- **Conclusion** : En invoquant le principe de récurrence, on peut affirmer avoir démontré P_n pour tout entier n.

Exemple : On considère la suite numérique définie de la façon suivante : $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n - 2} + 2$. On souhaite prouver que cette suite est minorée par 2, c'est-à-dire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2$. Nous allons pour cela, bien évidemment, procéder par récurrence :

- **Énoncé** : Nous allons prouver par récurrence la propriété P_n : $u_n > 2$.
- **Initialisation** : $u_0 = 4 > 2$, donc la propriété P_0 est vérifiée.
- **Hérédité** : Supposons désormais P_n vraie, c-est-à-dire que $u_n > 2$, et essayons de prouver que $u_{n+1} > 2$. C'est en fait assez simple en partant de l'hypothèse de récurrence : $u_n > 2 \Rightarrow u_n - 2 > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{u_n - 2} > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{u_n - 2} + 2 > 2 \Rightarrow u_{n+1} > 2$.
- **Conclusion** : D'après le principe de récurrence, la propriété P_n est vrai pour tout entier n.

Remarque 104. Variations du principe de récurrence :
Le monde mathématique n'étant pas parfait, une récurrence classique n'est hélas pas toujours suffisante pour montrer certaines propriétés. Il faut donc être capable de modifier légèrement la structure dans certains cas :

- si on ne cherche à montrer P_n que lorsque $n \geqslant n_0$ (n_0 étant un entier fixe dépendant du contexte), on peut toujours procéder par récurrence, mais en initialisant à n_0.

- il est parfois nécessaire que l'hypothèse de récurrence porte non pas sur une valeur de n, mais sur deux valeurs consécutives. On peut alors effectuer une récurrence double : on vérifie P_0 et P_1 lors de l'étape d'initialisation, et on prouve P_{n+2} à l'aide de P_n et P_{n+1} lors de l'hérédité (on peut de même effectuer des récurrences triples, quadruples, etc. en faisant une initialisation triple ou plus, et en prenant une hypothèse de récurrence triple ou plus ; dans tous les cas on ne démontre qu'une seule propriété lors de l'hérédité).
- on peut même avoir besoin pour prouver l'hérédité que la propriété soit vérifiée pour **tous** les entiers inférieurs. Dans ce cas, on parle de récurrence forte : le plus simple est de modifier la définition de la propriété P_n pour lui donner un énoncé commençant par $\forall k \leqslant n$. Ainsi, lorsqu'on suppose P_n vérifiée, on a une relation vraie pour toutes les valeurs de k inférieures ou égales à n (les plus malins d'entre vous noteront d'ailleurs qu'on peut toujours rédiger une récurrence sous forme de récurrence forte, ça ne demande pas plus de travail et ça ne peut pas être moins efficace ; c'est toutefois un peu plus lourd et déconseillé sauf nécessité).

Exemple : On considère la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$, et on veut déterminer une expression du terme général de la suite (u_n). Pour cela (ce n'est pas forcément la meilleure méthode, mais la plus simple pour nous pour l'instant), on calcule les termes suivants de la suite : $u_2 = 5$, $u_3 = 19$, $u_4 = 65$. Une inspiration soudaine nous fait conjecturer que $u_n = 3^n - 2^n$ (si on ne devine pas la formule, on ne pourra jamais faire de récurrence), ce qu'on va prouver par récurrence double. La formule est vraie pour u_0 : $3^0 - 2^0 = 1 - 1 = 0$ et pour u_1 : $3^1 - 2^1 = 1$. Supposons-là vérifiée pour u_n et u_{n+1}, alors $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n = 5(3^{n+1} - 2^{n+1}) - 6(3^n - 2^n) = 15 \times 3^n - 10 \times 2^n - 6 \times 3^n + 5 \times 2^n = 9 \times 3^n - 4 \times 2^n = 3^{n+2} - 2^{n+2}$. La formule est donc vérifiée au rang $n + 2$, le principe de récurrence double permet de conclure.

8.2.2 Sommes

Définition 110. Le symbole $\sum$ signifie « somme ». Plus précisément, la notation $\sum_{i=1}^{i=n} a_i$ se lit par exemple « somme pour i variant de 1 à n de a_i » et peut se détailler de la façon suivante : $\sum_{i=1}^{i=n} a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

Remarque 105.

- La lettre i est une variable muette, autrement dit on peut la changer par n'importe quelle autre lettre sans changer la valeur de la somme. On choisit traditionnellement les lettres i, j, k, etc. pour les indices de sommes.
- Dans une somme, la variable muette prend toujours **toutes** les valeurs entières comprises entre la valeur initiale et la valeur finale.

Exemple : Si a est une constante, $\sum_{i=2}^{i=n} a = (n-1)a$ (faites bien attention au nombre de termes que contient la somme...).

Proposition 132. Règles de calcul sur les sommes. On a le droit d'effectuer les opérations suivantes :

- factoriser par une constante : $\sum_{i=0}^{i=n} ka_i = k \sum_{i=0}^{i=n} a_i$
- séparer ou regrouper des sommes de mêmes indices : $\sum_{i=0}^{i=n} a_i + b_i = \sum_{i=0}^{i=n} a_i + \sum_{i=0}^{i=n} b_i$
- séparer les indices en deux (relation de Chasles) : $\sum_{i=1}^{i=n} a_i = \sum_{i=1}^{i=p} a_i + \sum_{i=p+1}^{i=n} a_i$
- faire un changement d'indice : $\sum_{i=1}^{i=n} a_i = \sum_{j=0}^{j=n-1} a_{j+1}$ (on a posé $j = i - 1$)

Remarque 106. Tenter de simplifier d'une façon ou d'une autre une somme de la forme $\sum_{i=0}^{i=n} a_i b_i$ est par contre une très bonne manière de s'attacher la rancoeur tenace de votre professeur ; les sommes et produits ne font pas bon ménage.

Proposition 133. Sommes classiques.

- $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^{i=n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^{i=n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^{i=n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{i=1}^{i=n} i\right)^2$
- $\forall q \neq 1, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{k=n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Démonstration.

- Nous allons démontrer par récurrence que la propriété $P_n : \sum_{i=0}^{i=n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ est vraie pour tout entier n. Pour $n = 0$, nous avons $\sum_{i=0}^{i=n} i = 0$ et $\frac{0(0+1)}{2} = 0$, donc P_0 est vraie. Supposons P_n vraie pour un entier n quelconque, c'est-à-dire que $\sum_{i=0}^{i=n} i = \frac{n(n+1)}{2}$. On peut alors effectuer le calcul suivant : $\sum_{i=0}^{n+1} i = \sum_{i=0}^{i=n} i + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, ce qui prouve P_{n+1}. D'après le principe de récurrence, nous pouvons donc affirmer que, $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^{i=n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

- Nous allons prouver par récurrence la propriété $P_n : \sum_{i=0}^{i=n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Pour $n = 0$, nous avons $\sum_{i=0}^{i=n} i^2 = 0^2 = 0$, et $\frac{0(0+1)(2\times 0+1)}{6} = 0$, donc P_0 est vérifiée. Supposons désormais P_n vraie pour un entier n quelconque, on peut alors écrire $\sum_{i=0}^{i=n+1} i^2 = \sum_{i=0}^{i=n} i^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)(n(2n+1)+6n+6)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$, donc P_{n+1} est vérifiée. D'après le principe de récurrence, on peut conclure que P_n est vraie pour tout entier naturel n.

- Nous allons prouver par récurrence la propriété $P_n : \sum_{i=0}^{i=n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. Pour $n = 0$, nous avons $\sum_{i=0}^{i=n} i^3 = 0^3 = 0$, et $\frac{0^2(0+1)^2}{4} = 0$, donc P_0 est vérifiée. Supposons désormais P_n vraie pour un entier n quelconque, on peut alors écrire $\sum_{i=0}^{i=n+1} i^3 = \sum_{i=0}^{i=n} i^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$, donc P_{n+1} est vérifiée. D'après le principe de récurrence, on peut conclure que P_n est vraie pour tout entier naturel n.

- Nous allons prouver par récurrence la propriété P_n : $\sum_{k=0}^{k=n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Pour $n = 0$, nous avons $\sum_{k=0}^{k=n} q^k = q^0 = 1$, et $\frac{1-q^1}{1-q} = 1$, donc P_0 est vérifiée. Supposons désormais P_n vraie pour une entier n quelconque, on peut alors écrire $\sum_{k=0}^{k=n+1} q^k = \sum_{k=0}^{k=n} q^k + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$, donc P_{n+1} est vérifiée. D'après le principe de récurrence, on peut conclure que P_n est vraie pour tout entier naturel n.

$\square$

Exemple : La technique de la somme télescopique consiste à constater que la différence de deux sommes ayant beaucoup de termes communs comporte en fait nettement moins de termes que ce qu'elle n'en a l'air au départ. Considérons $S = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i(i+1)}$. A priori pas évident à calculer, du moins tant qu'on a pas constaté que $\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} = \frac{i+1-i}{i(i+1)} = \frac{1}{i(i+1)}$. On peut alors faire le calcul suivant :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i+1} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i} - \sum_{j=2}^{j=n+1} \frac{1}{j} = 1 + \sum_{i=2}^{i=n} \frac{1}{i} - \sum_{j=2}^{j=n} \frac{1}{j} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Si la fin du calcul ne vous semble pas claire, on peut aussi voir les choses ainsi :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Rien ne nous interdit de mettre une somme à l'intérieur d'une autre somme. Dans ce cas, il est toutefois très important d'utiliser deux indices différents pour les deux sommes, sous peine de confusion totale. Plusieurs notations sont possibles pour exprimer des sommes doubles : $\sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} i\sqrt{j} = \sum_{j=1}^{j=n} \sum_{i=1}^{i=n} i\sqrt{j} = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} i\sqrt{j}$. Cette somme est constituée de n^2 termes qu'on peut par exemple représenter dans un tableau contenant n lignes et n colonnes. L'ordre dans lequel on place les deux sommes est indifférent (d'où également la possibilité de n'utiliser qu'une seule somme), on a donc intérêt à les placer dans l'ordre le plus pratique pour le calcul, ici par exemple :

$$\sum_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} 3j = 3 \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=i} = 3 \sum_{i=1}^{i=n} \frac{i(i+1)}{2} = \frac{3}{2} \sum_{i=1}^{i=n} i^2 + i = \frac{3}{2} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right) = \frac{n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1)}{4} = \frac{(n+1)(2n^2+n+3n)}{4} = \frac{n(n+1)(n+2)}{2}.$$

8.2.3 Produits

Définition 111. Le symbole $\prod$ signifie « produit ». Par exemple, $\prod_{i=1}^{i=n} a_i = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$.

Définition 112. On appelle **factorielle** de l'entier naturel n, et on note $n!$, le nombre $n! = \prod_{i=1}^{i=n} i$.

Exemples : $\prod_{i=1}^{i=n} a = a^n$; $\quad \frac{(n+1)!}{n!} = \frac{\prod_{i=1}^{i=n+1} i}{\prod_{i=1}^{i=n} i} = n+1$.

Proposition 134. Les règles de calcul suivantes peuvent être utiles quand on manipule des produits :

- séparer ou regrouper des produits ayant les mêmes indices : $\prod_{i=1}^{i=n} a_i \times \prod_{i=1}^{i=n} b_i = \prod_{i=1}^{i=n} a_i b_i$
- séparer les indices (relation de Chasles) : $\prod_{i=1}^{i=n} a_i = \prod_{i=1}^{i=p} a_i \times \prod_{i=p+1}^{i=n} a_i$
- faire un changement d'indice : $\prod_{i=2}^{i=n+1} a_i = \prod_{j=1}^{j=n} a_{j+1}$

Remarque 107. Bien entendu, tenter de simplifier $\prod_{i=1}^{i=n}(a_i + b_i)$ serait une grave erreur que, j'en suis certain, vous ne commettrez pas deux fois (ni même une seule, si possible).

Exemple : Un petit calcul de produit pour finir ce paragraphe. $P = \prod_{i=1}^{i=n} 3i = \prod_{i=1}^{i=n} 3 \times \prod_{i=1}^{i=n} i = 3^n n!$

8.3 Dénombrement

8.3.1 Cardinaux

Définition 113. Un ensemble E est **fini** s'il est en bijection avec l'ensemble $\{1; 2; \dots; n\}$, pour un entier naturel n. Cet entier n est alors unique. Il est appelé **cardinal** de l'ensemble E, et on le note $card(E)$, ou $|E|$, ou encore $\sharp E$.

Remarque 108. Cela correspond bien à la notion intuitive d'ensemble dont on peut compter les éléments. En effet, une bijection de E vers $\{1; \dots; n\}$ est simplement une façon d'étiquetter les éléments de E avec les numéros 1, 2, …, n.

Démonstration. La seule chose nécessitant une preuve est l'unicité du cardinal. Supposons donc qu'un même ensemble soit à la fois en bijection avec $\{1; \dots; n\}$ et avec $\{1; \dots; p\}$ pour deux entiers distincts n et p. Quitte à composer les deux bijections, il existe alors une bijection de $\{1; \dots; n\}$ dans $\{1; \dots; p\}$. Notons donc n le plus petit entier naturel pour lequel $\{1; \dots; n\}$ est en bijection avec un ensemble de la forme $\{1; \dots; p\}$, où $p > n$. On veut prouver que cet entier n ne peut pas exister. Notons f la bijection supposée, $f(n) = k$ est alors un entier inférieur ou égal à p ayant un unique antécédent (en l'occurence n) par f. On construit désormais une application $g : \{1; \dots; p-1\} \to \{1; \dots; n-1\}$ de la façon suivante : $\forall i < k$, $g(i) = f^{-1}(i)$, et si $i > k$, $g(i) = f^{-1}(i+1)$. Cette application est bien définie, est à valeurs dans $\{1; \dots; n-1\}$ (puisqu'on a soigneusement évité la valeur $f^{-1}(k)$ dans notre définition), et elle est bijective (linjectivité découle immédiatement de celle de f^{-1}, la surjectivité n'est pas difficile non plus en utilisant celle de f^{-1}, on prend toutes les valeurs prises par f^{-1} sauf n). On en déduit que $\{1; \dots; n-1\}$ est en bijection avec $\{1; \dots; p-1\}$, avec $p-1 > n-1$ puisque $p > n$. Ceci contredit la minimalité de l'entier n et achève notre démonstration. □

Proposition 135. Soit E un ensemble fini et F un sous-ensmble de E, alors F est un ensemble fini, et $|F| \leqslant |E|$, avec égalité si et seulement si $E = F$.

Démonstration. Cette propriété, comme souvent en ce qui concerne les ensembles finis, est assez évidente d'un point de vue intuitif, mais pas si simple à démontrer correctement. Contentons-nous de constater sur un cas particulier de constater que le principe est proche de la démonstration précédente. Soit F le sous-ensemble de E obtenu en enlevant à l'ensemble E un seul de ses éléments, qu'on notera x. Il existe par hypothèse, si $|E| = n$, une bijection $f : E \to \{1; \dots ; n\}$. On peut alors construire $g : \{1; \dots ; n-1\} \to F$ de la façon suivante : en notant $k = f(x)$, on pose $g(i) = f^{-1}(i)$ si $i < k$, et $g(i) = f^{-1}(k+1)$ si $i \geqslant k$. On vérifie sans trop de difficulté que g est bijective, et on prouve ainsi que $|E\backslash\{x\}| = n - 1$. Le cas général utilise une récurrence. □

Proposition 136. Soient E et F deux ensembles finis. Si E et F sont en bijection l'un avec l'autre, ils ont même cardinal.

Démonstration. Il existe par hypothèse une bijection f de E vers F. De plus, F étant fini, notons n son cardinal, il existe alors une bijection g de F dans $\{1; \dots ; n\}$. L'application $g \circ f : E \to \{1; \dots ; n\}$ est une composée d'applications bijectives, donc est bijective, ce qui prouve que E est de cardinal n. □

Proposition 137. Soient A et B deux sous-ensembles d'un même ensemble fini E. Alors $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Démonstration. Commençons par constater que dans le cas où les deux ensembles A et B sont disjoints, on a $|A \cup B| = |A| + |B|$. Vous voulez une démonstration ? Soit f une bijection de A dans $\{1; \dots ; n\}$ et g une bijection de B dans $\{1; \dots ; p\}$, n et p étant les cardinaux respectifs de A et de B. On peut alors construire une bijection h de $A \cup B$ vers $\{1; \dots ; n+p\}$ en posant $\forall x \in A$, $h(x) = f(x)$ et $\forall x \in B$, $h(x) = g(x)+p$ (intuitivement, cela revient à garder pour les éléments de A la numérotation donnée par l'application f, et à décaler pour les éléments de B la numérotation donnée par g, de façon à ne pas utiliser deux fois les mêmes numéros). La démonstration de la bijectivité de h est laissée au lecteur. Une fois ce fait admis, constatons que $A \cup B$ est l'union disjointe des trois ensembles $A\backslash B$, $B\backslash A$ et $A \cap B$. On a donc, en utilisant le résultat que nous venons de démontrer, $|A \cup B| = |A\backslash B| + |B\backslash A| + |A \cap B|$. Or, A étant union disjointe de $A\backslash B$ et de $A \cap B$, on a également $|A| = |A\backslash B| + |A \cap B|$, ou encore $|A\backslash B| = |A| - |A \cap B|$. De même, $|B\backslash A| = |B| - |A \cap B|$, donc on obtient $|A \cup B| = |A| - |A \cap B| + |B| - |A \cap B| + |A \cap B|$, ce qui donne bien la formule annoncée. □

Théorème 26. Formule du crible de Poincaré.
Soient A_1, A_2, …, A_n des sous-ensembles finis d'un même ensemble E, alors

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} (-1)^{k+1} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$$

Proposition 138. La formule de Poincaré étant assez peu lisible, voici ce que ça donne pour $n = 3$ et $n = 4$:

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

$|A \cup B \cup C \cup D| = |A| + |B| + |C| + |D| - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| + |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| - |A \cap B \cap C \cap D|$

Démonstration. La preuve de la formule générale, assez technique, se fait par récurrence forte en utilisant le cas $n = 2$ (démontré plus haut). La formule est certainement vraie pour $n = 2$ (et $n = 1$ accessoirement). Supposons-la vraie au rang n, alors $\left|\bigcup\limits_{i=1}^{n+1} A_i\right| = \left|\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) \cup A_{n+1}\right| = \left|\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right| + |A_{n+1}| - \left|\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1}\right| = \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} (-1)^{k+1} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}| + |A_{n+1}| - \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} (-1)^{k+1} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k} \cap A_{n+1}|$ (on utilise simplement les propriétés élémentaires de l'union et de l'intersection pour faire rentrer le A_{n+1} dans la somme de droite). Il ne reste plus qu'à constater que tous les termes présents dans ce développement correspondent à ceux de la formule au rang $n+1$: tous les termes ne faisant pas intervenir A_{n+1} sont dans la somme de gauche, tous ceux faisant intervenir A_{n+1} pour $k \geqslant 2$ sont dans celle de droite (et on a bien un $(-1)^{k+2}$ devant la somme intérieure quitte à changer le signe $-$ devant la somme, ce qui correspond au nombre d'ensemble dont on prend l'intersection une fois qu'on a ajouté A_{n+1}). Enfin, le seul terme faisant intervenir A_{n+1} pour $k=1$ est $|A_{n+1}|$, qui est bien présent entre nos deux sommes. Bref, ça marche. □

Exemple : Dans un lycée de 300 élèves, 152 savent jouer au poker, 83 au tarot et 51 au bridge. De plus, 24 savent jouer à la fois au poker et au tarot, 14 au poker et au bridge, et 8 au tarot et au bridge. Enfin, 3 élèves maitrisent les trois jeux de cartes. Le nombre d'élèves jouant aux cartes est alors de $152+83+51-24-14-8+3=237$.

Proposition 139. Soit A un sous-ensemble fini d'un ensemble fini E, alors $|\bar{A}| = |E| - |A|$.

Démonstration. C'est une conséquence de la formule pour une union : E est union disjointe de A et de $\bar{A}$, donc $|E| = |A| + |\bar{A}|$. □

Proposition 140. Soient E et F deux ensembles finis, alors $E \times F$ est fini, et $|E \times F| = |E| \times |F|$.

Démonstration. C'est intuitivement évident en plaçant tous les éléments du produit cartésien dans un tableau :

	e_1	e_2	$\dots$	e_n
f_1	(e_1, f_1)	(e_2, f_1)	$\dots$	(e_n, f_1)
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
f_p	(e_1, f_p)	(e_2, f_p)	$\dots$	(e_n, f_p)

Pour une preuve rigoureuse, il faut constater que $\forall i \in \{1; \dots; n\}$, $F_p = \{e_i\} \times F$ a pour cardinal p (ce n'est pas difficile, il suffit d'envoyer (e_i, f_j) sur l'image de f_j par une bijection entre F et $\{1; \dots; p\}$. Ensuite, E est la réunion disjointe pour i variant entre 1 et n est ensembles précédents, donc $|E| = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} p = np$. □

8.3.2 Listes, arrangements et combinaisons

Définition 114. Soit E un ensemble fini de cardinal n, et $p \in \mathbb{N}$. Une **p-liste** d'éléments de E, ou p-uplet d'éléments de E, est simplement un élément de E^p.

Remarque 109. On peut très bien avoir plusieurs fois le même élément dans une p-liste. Par ailleurs, l'ordre des éléments de la p-liste est important.

Proposition 141. Le nombre de p-listes dans un ensemble de cardinal n vaut n^p.

Démonstration. C'est une conséquence de la formule de cardinal du produit vue un peu plus haut : comme $|E \times F| = |E| \times |F|$, on a $|E^p| = |E|^p$, ce qui prouve bien la propriété. □

Définition 115. Soit E un ensemble à n éléments et $p \in \mathbb{N}$, on appelle **arrangement** de p éléments de E une p-liste d'éléments distincts de E.

Remarque 110. L'ordre des éléments est toujours important, par contre on ne peut plus avoir de répétition d'élément dans un arrangement.

Définition 116. Soient n et p deux entiers tels que $p \leqslant n$, on note $A_{n,p} = \dfrac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)$.

Proposition 142. Le nombre d'arrangements de p éléments dans un ensemble à n éléments vaut $A_{n,p}$.

Démonstration. Contentons-nous de l'idée intuitive : lorsqu'on construit un arrangement, on a n choix pour le premier élément, $n-1$ pour le deuxième, ..., $n-p+1$ pour le $p$ème, soit au total $n(n-1)\times(n-p+1) = \dfrac{n(n-1)\dots(n-p+1)(n-p)\dots 2\times 1}{n(n-1)\dots 2\times 1} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$. □

Définition 117. Un arrangement de n éléments dans un ensemble à n éléments est aussi appelé **permutation**. Il y a donc $n!$ permutations dans un ensemble à n éléments.

Exemple 1 : Le nombre de façons d'asseoir 6 personnes autour d'une table ronde est $6! = 720$.

Exemple 2 : Le nombre d'anagrammes d'un mot peut se calculer à l'aide de permutations. Il faut simplement diviser le nombre total du permutations du mot par $k!$ chaque fois qu'une même lettre apparait k fois dans le mot (ainsi, s'il y a trois E dans le mot, on divise par $3!$ car les permutations qui se contentent d'échanger les E entre eux ne modifient pas l'anagramme). Par exemple, le nombre d'anagrammes du mot DENOMBREMENT est $\dfrac{12!}{3!\times 2!\times 2!}$.

Remarque 111. Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est le nombre d'applications bijectives de cet ensemble dans lui-même.

Proposition 143. $\forall n\in\mathbb{N}$, $(n+1)! = n!\times(n+1)$

Pour les plus curieux, j'ajoute le résutat (hors programme) suivant, connu sous le nom de formule de Stirling : $\dfrac{n!}{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n} = 1$.

Définition 118. Une **combinaison** de p éléments dans un ensemble fini E à n éléments est un sous-ensemble à p éléments de E.

Définition 119. Soient n et p deux entiers tels que $p\leqslant n$, on appelle **coefficient binomial** d'indices n et p le nombre $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$. On le lit « p parmi n » (comme un raccourci signifiant que le nombre de façon de choisir p objets parmi n objets au total).

Remarque 112. On pose souvent $\dbinom{n}{p} = 0$ si $p > n$.

Proposition 144. Le nombre de sous-ensembles à p éléments d'un ensemble à n éléments est $\dbinom{n}{p}$.

Démonstration. En effet, une combinaison n'est rien d'autre qu'un arrangement dans lequel on a enlevé l'importance de l'ordre. Autrement dit, chaque combinaison apparait $p!$ fois quand on dénombre les arrangements (puisqu'il y a $p!$ façons d'ordonner un ensemble à p éléments), donc le nombre de combinaisons à p éléments vaut $\dfrac{A_{n,p}}{p!} = \dbinom{n}{p}$. □

Exemple : Les combinaisons apparaitront dans les calculs dès qu'on travaillera avec des tirages simultanés, c'est-à-dire quand l'ordre n'est pas important. Ainsi, le nombre de trinomes de colle différents qu'on peut constituer dans une classe de 45 élèves vaut $\dbinom{45}{3} = \dfrac{45\times 44\times 43}{3\times 2\times 1} = 14190$.

8.3.3 Propriétés des coefficients binomiaux

Proposition 145. Quelques propriétés des coefficients binomiaux, utiles pour les calculs :

- $\forall n\geqslant 2$, $\dbinom{n}{0} = 1$; $\dbinom{n}{1} = n$; $\dbinom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

- $\forall k \leqslant n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (propriété de symétrie).
- $\forall 1 \leqslant k \leqslant n$, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.
- $\forall 1 \leqslant k \leqslant n$, $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$ (relation de Pascal).

Démonstration. Pour le premier point, il suffit de reprendre la définition des coefficients binomiaux : $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = 1$; $\binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)!} = n$ et $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$.

La propriété de symétrie est facile aussi : $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$. Il y a également une interprétation combinatoire de ce résultat : choisir un sous-ensemble de k éléments dans un ensemble à n éléments est équivalent à choisir son complémentaire, qui est constitué de $n-k$ éléments, donc il y a autant de sous-ensembles à k éléments et à $n-k$ éléments dans un ensemble à n éléments.

Pour la troisième, $k\binom{n}{k} = \frac{k \times n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$, et $n\binom{n-1}{k-1} = \frac{n \times (n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$, les deux quantités sont bien égales.

Enfin, la formule de Pascal : $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$ $= \frac{(n-k) \times (n-1)! + k \times (n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n \times (n-1)!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$. La encore, il y a une interprétation combinatoire. Soit E un ensemble à n éléments et x un élément fixé de E. Les sous-ensembles de E à k éléments, au nombre de $\binom{n}{k}$, se répartissent en deux catégories : ceux qui contiennent x, qui sont au nombre de $\binom{n-1}{k-1}$ puisqu'il reste $k-1$ éléments à choisir parmi les $n-1$ restants dans E une fois x choisi ; et ceux qui ne contiennent pas x, qui sont au nombre de $\binom{n-1}{k}$ puisqu'il reste cette fois-ci k éléments à choisir parmi les $n-1$ restants (on n'en a encore choisi aucun). D'où la formule. □

Triangle de Pascal : La relation de Pascal permet de calculer les valeurs des coefficients binomiaux par récurrence, en les répartissant sous forme d'un tableau triangulaire :

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$
$n=0$	1								
$n=1$	1	1							
$n=2$	1	2	1						
$n=3$	1	3	3	1					
$n=4$	1	4	6	4	1				
$n=5$	1	5	10	10	5	1			
$n=6$	1	6	15	20	15	6	1		
$n=7$	1	7	21	35	35	21	7	1	
$n=8$	1	8	28	56	56	56	28	7	1

Pour obtenir un coefficient du tableau, on fait la somme de celui qui est au-dessus de lui, et de celui qui est à gauche de celui-ci.

Théorème 27. Formule du binôme de Newton.
Soient a et b deux réels, et $n \in \mathbb{N}$, alors $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Remarque 113. On peut obtenir à partir de cette formule le développement d'une différence : $(b-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k a^k b^{n-k}$. En pratique, il suffit d'alterner les signes.

Exemple : $(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$. L'ordre est inversé par rapport à celui de la formule, mais c'est la façon habituelle d'écrire le développement. Autre exemple : $(1-2x)^5 = 1 - 5\times 2x + 10\times(2x)^2 - 10\times(2x)^3 + 5\times(2x)^4 - (2x)^5 = 1 - 10x + 40x^2 - 80x^3 + 80x^5 - 32x^5$.

Démonstration. On va procéder par récurrence sur l'entier n. Pour $n=0$, la formule du binome dit simplement que $(a+b)^0 = \binom{0}{0}a^0b^0$, ce qui est vrai (on a 1 de chaque côté). Supposons la formule vraie au rang n, on a alors $(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$ par hypothèse de récurrence, donc en développant le $a+b$ et en le faisant rentrer dans la somme, on obtient $(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n+1-k}$. Effectuons un changement d'indice en remplaçant k par $k+1$ dans la première somme (on ne touche à rien dans la deuxième) : $(a+b)^{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^kb^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n+1-k} = \binom{n}{n}a^{n+1}b^0 + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)a^kb^{n+1-k} + \binom{n}{0}a^0b^{n+1}$ (on a isolé un terme dans chaque somme pour pouvoir regrouper les sommes). Maintenant, on reconnait la formule de Pascal dans la somme, donc $(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^kb^{n+1-k} + b^{n+1}$. Il ne reste plus qu'à remettre les deux termes isolés dans la somme pour obtenir la formule au rang $n+1$, ce qu'on peut faire puisqu'ils sont justement égaux aux termes manquants pour $k=0$ et $k=n+1$. □

Proposition 146. Soit E un ensemble fini de cardinal n. Alors $\mathcal{P}(E)$ est fini, de cardinal 2^n.

Démonstration. Le cardinal de $\mathcal{P}(E)$ est le nombre de sous-ensembles de E. Or, on sait que, pour tout entier k, il y a $\binom{n}{k}$ sous-ensembles de E à k éléments, ce qui fait au total $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ sous-ensembles. Cette somme n'est rien d'autre qu'un cas particulier de formule du binôme, pour $a=b=1$, donc elle vaut $(1+1)^n = 2^n$.

Une façon plus combinatoire de voir les choses : choisir un sous-ensemble A de l'ensemble E revient à choisir, pour chaque élément de E, si celui-ci appartient à A ou non. On a ainsi deux possibilités pour chaque élément de E, ce qui fait au total 2^n possibilités pour construire le sous-ensemble A. Autre façon de décrire les choses pour les plus formalistes d'entre vous : pour chaque sous-ensemble A de E, on définit une application $\chi_A : E \to \{0;1\}$, telle que $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$, et $\chi_A(x) = 0$ si $x \notin A$ (cette application χ_A est appelée application caractéristique de l'ensemble A, car elle décrit les éléments appartenant à l'ensemble A). On peut prouver que toutes applications de E vers $\{0;1\}$ sont des applications caractéristiques d'un sous-ensemble de E, et que deux sous-ensembles distincts de E ont des applications caractéristiques différentes. Autrement dit, il y a une bijection entre $\mathcal{P}(E)$ et l'ensemble des applications de E dans $\{0;1\}$. Or, comme on l'a vu plus haut (après la définition des p-listes), il y a 2^n applications de E dans $\{0;1\}$. □

Chapitre 9

Suites

Une méthode est un truc qui a été utilisé plusieurs fois.

George Polya (1887-1985), mathématicien hongrois.

Deux suites adjacentes décident d'aller s'éclater dans une soirée « no limit ». Mais elles se font refouler à l'entrée parce qu'elles convergent !

Introduction

Objectifs du chapitre :

- connaitre précisément le vocabulaire sur les suites, et comprendre la signification des définitions de limite, équivalence et négligeabilité
- maîtriser les techniques classiques de calcul de limite et d'étude de suite
- savoir étudier une suite récurrente ou une suite implicite en faisant intervenir des fonctions

9.1 Structure de l'ensemble $\mathbb{R}$

Nous ne donnerons pas dans ce cours de construction rigoureuse de l'ensemble $\mathbb{R}$, mais nous contenterons de dégager quelques éléments de structure sur $\mathbb{R}$, qui nous permettrons de mieux comprendre certains théorèmes sur les limites de suites.

9.1.1 Relations d'ordre

Définition 120. Une **relation** R sur un ensemble E est un sous-ensemble de E^2. On dit que deux éléments x et y de E sont en relation, et on note en général xRy, si $(x, y) \in E$.

Exemples : Une relation est en fait simplement quelque chose qui relie deux éléments d'un ensemble. L'ordre dans lequel on place les deux éléments est en général important. Quelques exemples de relations plus ou moins classiques en méthématiques pour montrer la diversité que peut recouvrir cette définition :

- la relation de perpendicularité sur l'ensemble des droites du plan (ici, l'ordre n'est pas important).
- la relation de divisibilité sur l'ensemble des entiers (naturels ou relatifs).

- la relation xRy si x a un dénominateur plus petit que y lorsqu'on écrit les deux nombres sous forme de fractions irréductibles (cette relation ne peut être définie que sur $\mathbb{Q}$).
- la relation ARB s'il existe une application $f : A \to B$ injective sur $\mathbb{P}(\mathbb{R})$.

Définition 121. Une relation sur un ensemble E est une **relation d'ordre** si elle a les trois caractéristiques suivantes :
- réflexive : $\forall x \in E$, xRx.
- antisymétrique : si xRy et yRx, alors $y = x$.
- transitive : si xRy et yRz, alors xRz.

Définition 122. Une relation d'ordre est **totale** si, $\forall (x, y) \in E^2$, on a soit xRy, soit yRx.

Remarque 114. Les propriétés faisant d'une relation une relation d'ordre sont des propriétés naturelles pour que la relation permette de classer les éléments d'un ensemble. On considérera que xRy signifie que x est « plus petit » que y au sens de la relation R (qui ne correspond pas toujours à l'ordre usuel sur l'ensemble considéré quand il y en a un). Une relation d'ordre est total si on peut toujours comparer deux éléments de l'ensemble. Ce n'est par exemple pas le cas de la relation de divisibilité sur $\mathbb{N}$ (qui est pourtant une relation d'ordre).

Théorème 28. La relation $\leqslant$ est une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. On ne peut évidemment rien prouver sans donner de définition de ce qu'est l'ensemble $\mathbb{R}$. Ce résultat est en fait plus un axiome qu'un véritable théorème. □

9.1.2 Borne supérieure

Toutes les définitions de ce paragraphe seront données dans le cas particulier de la relation d'ordre naturelle sur $\mathbb{R}$, mais elles peuvent être facilement généralisées à une relation d'ordre R sur un ensemble E quelconque.

Définition 123. Soit $A \subset \mathbb{R}$. Le réel M est un **majorant de** A (ou A est **majorée par** M) si $\forall x \in A$, $A \leqslant M$. On définit un **minorant** m de façon symétrique par la condition $\forall x \in A$, $m \leqslant x$. Le réel M constitue une **borne supérieure de** A si de plus, pour tout autre majorant M' de A, on a $M \leqslant M'$. On définit de même une **borne inférieure** comme un plan grand minorant de l'ensemble A. On note ces réels respectivement $\sup(A)$ et $\inf(A)$.

Remarque 115. Un majorant n'appartient pas nécessairement à l'ensemble A. Si c'est le cas, on dit que M constitue un maximum de A (symétriquement un minimum si c'est un minorant appartenant à A).

Proposition 147. Si un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure, celle-ci est unique.

Démonstration. Supposons donc qu'il y en ait deux, que nous noterons M_1 et M_2. Par définition de la borne supérieure, on a donc $M_1 \leqslant M_2$, puisque M_2 est également un majorant de l'ensemble, et de même $M_2 \leqslant M_1$. L'antisymétrie de la relation d'ordre assure alors que $M_1 = M_2$ (ce résultat reste valable pour une relation d'ordre quelconque. □

Théorème 29. Tout sous-ensemble majoré de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Démonstration. Ce résultat est en fait un des axiomes constitutifs de l'ensemble $\mathbb{R}$. □

Proposition 148. Caractérisation de la borne supérieure.
Un réel M est la borne supérieure de l'ensemble A si et seulement si M est un majorant de A et $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in A$, $M - \varepsilon \leqslant x$.

Démonstration. Supposons que $M = \sup(A)$, alors M est un majorant de A. De plus, si la propriété énoncée ci-dessus n'est pas vérifiée, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $\forall x \in A$, $x \leqslant M - \varepsilon$. Dans ce cas, le réel $M - \varepsilon$ est un majorant de l'ensemble A, qui est plus petit que sa borne supérieure M. Ceci contredit la définition d'une borne supérieure.
Dans l'autre sens, il est plus facile de raisonner par contraposée. Si $M \neq \sup(A)$, il existe donc un majorant de A plus petit que M, notons-le M' et posons $\varepsilon = M - M'$. On a bien $\varepsilon > 0$ et, M' étant un majorant de A, $\forall x \in A$, $x \leqslant M' = M - \varepsilon$, ce qui contredit la caractérisation de l'énoncé. □

Définition 124. On note $\overline{\mathbb{R}}$, et on appelle **droite réelle achevée** l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$.

Remarque 116. On peut prolonger sur $\overline{\mathbb{R}}$ la relation d'ordre naturelle sur $\mathbb{R}$ en posant $\forall x \in \mathbb{R}$, $-\infty \leqslant x$, et $x \leqslant +\infty$. Toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$ admet alors une borne supérieure et une borne inférieure.

Proposition 149. $\mathbb{R}$ est **archimédien** : $\forall (x, y) > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$, $y \leqslant nx$.

Démonstration. Procédons par l'absurde. Si la propriété est fausse, cela revient à dire que, pour un certain x, l'ensemble $\{nx \mid n \in \mathbb{N}\}$ est majoré (par y). Notons alors M sa borne supérieure, et appliquons la caractérisation de la borne supérieure en prenant $\varepsilon = x$. Il existe donc un entier n pour lequel $M - x \leqslant nx$. Mais alors $M < M + x \leqslant (n+2)x$, ce qui contredit violemment le fait que M est un majorant de notre ensemble. □

Définition 125. Pour tout nombre réel x, il existe un unique entier relatif n vérifiant $n \leqslant x < n+1$. Cet entier est appelé **partie entière** de x, et noté $Ent(x)$, ou $\lfloor x \rfloor$.

Démonstration. Puisque $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe certainement un entier n à partir duquel $n > x$. Il suffit alors de prendre le maximum de l'ensemble constitué des entiers inférieurs à x pour obtenir sa partie entière. □

Définition 126. Un **intervalle** est une partie convexe de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire un sous-ensemble I pour lequel, si $(x, y) \in I^2$, tout réel vérifiant $x \leqslant z \leqslant y$ appartient à I.

Nous ne détaillerons volontairement pas tous les types d'intervalles existant dans $\mathbb{R}$, travail fastidieux et sans grand intérêt. Les propriétés des intervalles sont supposées connues.

Définition 127. Un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ est **dense** dans $\mathbb{R}$ si tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contient un élément de A.

Théorème 30. L'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. L'ensemble des irrationnels $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ est également dense dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. La preuve étant compliquée dans le cas des irrationnels, on admettra ce résultat. □

9.2 Généralités sur les suites

9.2.1 Vocabulaire

Définition 128. Une **suite** d'élements d'un ensemble E est une application $u : \mathbb{N} \to E$. On note habituellement u_n l'image par une telle application de l'entier n, aussi appelé **terme d'indice** n de la suite et on désigne par $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'ensemble des termes de la suite, c'est-à-dire la suite elle-même. On parle également de suite de **terme général** u_n lorsqu'on donne l'expression de u_n en fonction de n.

On peut définir une suite réelle de bien des façons, les plus fréquentes étant les suivantes :

- par la liste de ses éléments, par exemple $u_0 = 2$; $u_1 = 4$; $u_2 = 6$; $u_3 = 8$; $u_4 = 10$ etc. C'est la méthode la plus naturelle, mais elle trouve très vite ses limites puisqu'il faut que la suite soit suffisamment simple pour qu'on devine tous les termes à partir des premiers.

- par une formule explicite pour le terme général, par exemple $u_n = n^2 - 4n + 1$. C'est une définition qui ressemble beaucoup à la définition usuelle d'une fonction, et qui est extrêmement pratique pour les calculs. C'est celle qu'on cherchera à obtenir le plus souvent.
- un cas très fréquent est le cas de la définition par récurrence. Elle consiste à donner une relation de récurrence entre les termes de la suite, c'est-à-dire à exprimer u_{n+1} en fonction de u_n, et à préciser la valeur de u_0 (sinon, c'est comme pour une récurrence non initialisée, ça ne sert à rien). Par exemple, $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 - 5$. C'est beaucoup moins pratique pour les calculs qu'une définition explicite, mais c'est souvent la définition la plus naturelle que nous aurons d'une suite. Il peut arriver qu'une suite soit définie par récurrence double (u_{n+2} en fonction de u_{n+1} et u_n), auquel cas il faut préciser les valeurs de u_0 et u_1, voire par récurrence triple ou pire (mais c'est plus rare !).
- de façon implicite, par exemple u_n est l'unique réel positif vérifiant $e^{u_n} - u_n - 2 = n$ (croyez-moi sur parole, il y en a un et un seul pour chaque valeur de n). Pas vraiment extrêmement pratique pour les calculs, mais on n'arrive pas toujours à obtenir une formule explicite. Dans ce cas, on arrive quand même à étudier la suite à l'aide d'études de fonctions.

Remarque 117. L'ensemble des suites réels est naturellement muni d'opération de somme (on additionne les deux suites terme à terme) et de produit par un réel, qui lui donnent une structre d'espace vectoriel réel. Il existe également une opération de produit sur les suites.

Définition 129. Une suite réelle (u_n) est **croissante** (resp. **décroissante**) si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$ (resp. $u_n \geqslant u_{n+1}$; je vous fais grâce des définitions de croissance et décroissance stricte). Une suite réelle est **stationnaire** si elle est constante à partir d'un certain rang : $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n_0$, $u_n = u_{n_0}$.

Exemple : Une technique classique pour étudier le sens de variation d'une suite est de calculer $u_{n+1} - u_n$ et de déterminer son signe. Prenons la suite définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 2$, alors $u_{n+1} - u_n = u_n^2 + 2 > 0$, donc la suite est strictement croissante.

Définition 130. Une suite (u_n) est **majorée** (resp. **minorée**) par un réel m si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant m$ (resp. $u_n \geqslant m$). Elle est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Remarque 118. Une suite est majorée si $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est majoré.

9.2.2 Suites usuelles

Définition 131. Une **suite arithmétique** de raison $r \in \mathbb{R}$ est une suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.

Proposition 150. Une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 vérifie les résultats suivants :

- formule explicite : $\forall n \in \mathbb{R}$, $u_n = u_0 + nr$.
- variations : si $r > 0$, la suite (u_n) est strictement croissante ; si $r < 0$, elle est strictement décroissante.
- sommes partielles : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} u_k = \frac{(u_0 + u_n)(n+1)}{2}$.

Démonstration.

- Une petite récurrence permet de prouver $P_n : u_n = u_0 + nr$. C'est vrai au rang 0 : $u_0 = u_0 + 0 \times r$, et en le supposant vrai au rang n, on a par définition $u_{n+1} = u_n + r = u_0 + nr + r = u_0 + (n+1)r$, donc P_{n+1} est vérifiée. D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.
- Cela découle de façon immédiate de la constatation que $u_{n+1} - u_n = r$.
- $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} u_k = \sum_{k=0}^{k=n} u_0 + kr = \sum_{k=0}^{k=n} u_0 + r \sum_{k=0}^{k=n} k = (n+1)u_0 + r\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(2u_0 + nr))(n+1)}{2} = \frac{(u_0 + u_0 + nr)(n+1)}{2} = \frac{(u_0 + u_n)(n+1)}{2}$. On a réutilisé pour ce calcul une des sommes classiques calculées au chapitre sur les ensembles.

□

Définition 132. Une **suite géométrique** de raison $q \in \mathbb{R}$ est une suite vérifiant la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = q \times u_n$.

Proposition 151. Une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 vérifie les résultats suivants :

- formule explicite : $\forall n \in \mathbb{R}$, $u_n = u_0 \times q^n$.
- variations : si $q > 1$ et $u_0 > 0$, la suite (u_n) est strictement croissante ; si $0 < q < 1$ et $u_0 > 0$, elle est strictement décroissante (si $u_0 < 0$, c'est le contraire). Si $q < 0$, les termes de la suite sont de signe alterné.
- sommes partielles : $\forall n \in \mathbb{N}$, si $q \neq 1$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Démonstration.

- Une petite récurrence permet de prouver $P_n : u_n = u_0 \times q^n$. C'est vrai au rang 0 : $u_0 = u_0 \times q^0$, et en le supposant vrai au rang n, on a par définition $u_{n+1} = u_n \times q = u_0 \times q^n \times q = u_0 \times q^{n+1}$, donc P_{n+1} est vérifiée. D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$.
- On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_0 \times q^{n+1} - u_0 \times q^n = u_0 q^n (q-1)$. Toues les résultats concernant le sens de variation en découlent.
- $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} u_k = \sum_{k=0}^{k=n} u_0 \times q^k = u_0 \sum_{k=0}^{k=n} q^k = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

□

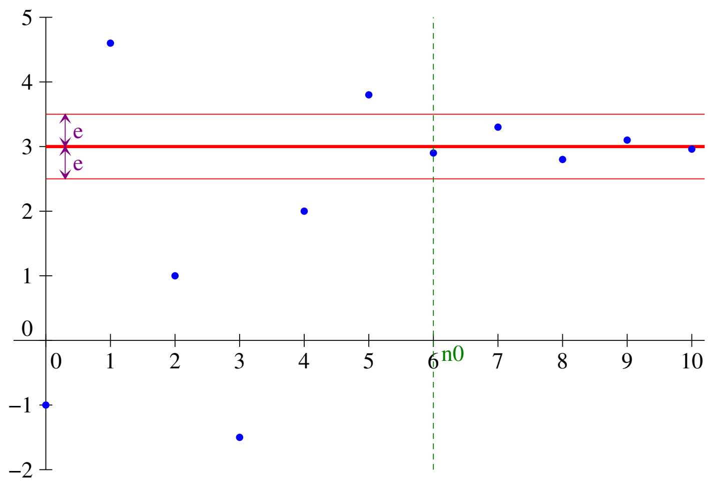
9.3 Convergence de suites

Une petite remarque préliminaire : dans la partie précédente, la plupart des résultats peuvent s'étendre à des suites qui ne sont pas à valeurs réelles (oui, mêmes les notions de suites arithmétique ou géométrique). Pour les résultats de convergence, nous allons nous restreindre au cas des suites réelles.

9.3.1 Limites finies

Définition 133. Une suite réelle (u_n) **converge** vers une **limite** $l \in \mathbb{R}$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n_0$, $|u_n - l| < \varepsilon$. On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$. Toute suite convergeant vers une limite l est appelée suite **convergente**. Sinon, la suite est dite **divergente** (même si elle peut avoir une limite infinie).

Rappelons que $|u_n - l| < \varepsilon$ signifie que $u_n \in]l-\varepsilon; l+\varepsilon[$. Autrement dit, aussi petit que soit l'intervalle que l'on prend autour du réel l (c'est-à-dire aussi proche de 0 que soit ε dans notre définition), les valeurs de la suite vont finir par être **toutes** dans cet intervalle, à condition qu'on attende suffisamment longtemps (jusqu'à n_0). Sur la figure ci-dessous, on a $l = 3$, et pour $\varepsilon = 0.5$ (noté e sur la figure), $n_0 = 6$.



Méthode : Pour prouver qu'une suite donnée converge vers un certain réel à l'aide de cette définition (ce qu'on fera heureusement assez rarement, mais il est important de bien comprendre les mécanismes cachés derrière le formalisme), on procède ainsi :

- On fixe ε à une valeur strictement positive quelconque.
- On calcule $|u_n - l|$.
- On cherche une valeur de n_0 (qui va naturellement dépendre de ε) à partir de laquelle cette expression est inférieure à ε.

Exemple : Considérons la suite définie par $u_n = \dfrac{n+3}{n+2}$, et prouvons que sa limite vaut 1. Soit $\varepsilon > 0$, alors $|u_n - 1| = \left|\dfrac{n+3}{n+2} - 1\right| = \left|\dfrac{n+3-(n+2)}{n+2}\right| = \left|\dfrac{1}{n+2}\right| = \dfrac{1}{n+2}$. L'expression étant positive, il suffit de déterminer pour quelles valeurs de n on a $\dfrac{1}{n+2} < \varepsilon$, ce qui nous donne $n > \dfrac{1}{\varepsilon} - 2$. On peut donc choisir $n_0 = Ent\left(\dfrac{1}{\varepsilon} - 2\right) + 1$ (remarquez que, plus ε est proche de 0, plus n_0 devient grand, ce qui est logique).

Remarque 119. Le fait qu'une suite converge vers une limite l est équivalent à avoir $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - l = 0$.

Proposition 152. Soit (u_n) une suite convergente, alors sa limite l est unique.

Démonstration. Nous allons recourir à un raisonnement par l'absurde pour démontrer cette proposition. Supposons donc que le résultat énoncé est faux, c'est-à-dire qu'une même suite (u_n) admet deux limites distinctes l et l' (notons par exemple l' la plus grande des deux). Appliquons donc la définition de la limite avec $\varepsilon = \dfrac{l'-l}{3}$: on peut donc trouver d'une part un entier n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \in]l-\varepsilon; l+\varepsilon[$; d'autre part un entier n_1 tel que $\forall n \geqslant n_1$, $u_n \in]l'-\varepsilon; l'+\varepsilon[$. Mais alors, dès que $n \geqslant \max(n_0, n_1)$, on a $u_n \in]l-\varepsilon; l+\varepsilon[\cap]l'-\varepsilon; l'+\varepsilon[$, ce qui est très gênant puisque cette intersection est vide d'après la définition de ε. Conclusion, l'hypothèse effectuée était absurde, et une suite ne peut pas avoir deux limites différentes. □

Proposition 153. Toute suite convergente est bornée.

Démonstration. Appliquons la définition de la limite avec par exemple $\varepsilon = 1$. On obtient un entier n_0 tel que, $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \in]l-1; l+1[$. Par ailleurs, les termes de la suite d'indice inférieur à n_0 sont en nombre fini, il en existe donc un qui est le plus grand (notons sa valeur M) et un qui est le plus petit (on va le noter m). Il est alors facile de constater que la suite est minorée par $\min(m, l-1)$ et majorée par $\max(M, l+1)$. □

Définition 134. Une **sous-suite** d'une suite (u_n) (aussi appelée **suite extraite**) est une suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

Les sous-suites que nous manipulerons le plus souvent sont les sous-suites de la forme (u_{2n}) (on ne garde que les termes d'indice pair de la suite), (u_{2n+1}) (on garde les termes d'indice impair), u_{3n}, etc.

Proposition 154. Soit (u_n) une suite réelle convergeant vers une limite l. Alors toute sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ de (u_n) converge vers cette même limite l.

Démonstration. C'est évident. Si on fixe un $\varepsilon > 0$, on peut trouver un n_0 à partir duquel $|u_n - l| < \varepsilon$, et l'application φ étant strictement croissante, on aura a fortiori $|u_{\varphi(n)} - l| < \varepsilon$ dès que $n \geqslant n_0$. □

Remarque 120. La réciproque de cette proposition est évidemment fausse. Un contre-exemple classique (qui est aussi un contre-exemple à la réciproque de la proposition sur le caractère borné des suites convergentes) est la suite définie par $u_n = (-1)^n$. Pour cette suite, la suite extraite (u_{2n}) a pour limite 1 puisqu'elle est constante, la suite (u_{2n+1}) converge quant à elle vers -1, et (u_n) n'est pas convergente.

Proposition 155. Si les deux sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) d'une suite (u_n) convergent vers une même limite l, alors (u_n) converge vers l.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors un entier n_0 et un entier n_1 à partir desquels on aura respectivement $|u_{2n} - l| < \varepsilon$ et $|u_{2n+1} - l| < \varepsilon$. Si $n \geqslant \max(2n_0, 2n_1+1)$, u_n est de la forme $2p$ (s'il est pair) ou $2p+1$ (s'il est impair) pour un entier $p \geqslant \max(n_0, n_1)$, donc on aura $\forall n \geqslant \max(2n_0, 2n_1+1)$, $|u_n - l| < \varepsilon$, ce qui prouve que (u_n) converge vers l. □

Théorème 31. Bolzano-Weierstraß.
De tout suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

Démonstration. Ce théorème est complètement HORS-PROGRAMME, interdiction absolue de l'utiliser en devoir. Nous en verrons tout de même une démonstration amusante un peu plus bas. □

Théorème 32. Théorème de convergence monotone :
Toute suite décroissante et minorée converge. Toute suite croissante et majorée converge.

Démonstration. Plaçons-nous dans le cas d'une suite croissante majorée. L'ensemble des termes de la suite étant majoré, il admet une borne supérieure M. On va prouver que la suite converge vers M. Soit $\varepsilon > 0$, par caractérisation de la borne supérieure, il existe un entier n_0 tel que $M - \varepsilon < u_{n_0} \leqslant M$. Mais, la suite étant croissante et M étant un majorant de la suite, on a alors $\forall n \geqslant n_0$, $M - u_n < u_{n_0} \leqslant u_n \leqslant M$, et en particulier $|u_n - l| < \varepsilon$. Ceci prouve la convergence de la suite vers M. □

Remarque 121. Attention ! Une suite croissante et majorée par un réel M ne converge pas nécessairement **vers M**. La suite a tout un paquet de majorants, dont un seul est sa limite. En fait, on aura toujours dans ce cas $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sup(\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\})$.

Exemple : La suite définie par $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}dx$ est croissante (car, $\forall x \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x^{n+1} \leqslant x^n$, donc $\dfrac{1}{1+x^n} \leqslant \dfrac{1}{1+x^{n+1}}$), et majorée par 1 (car $\forall x \in [0;1]$, $\dfrac{1}{1+x^n} \leqslant 1$, donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}dx \leqslant \int_0^1 1dx = 1$), donc convergente. Mais ces arguments ne prouvent en aucun cas que sa limite est 1. Le calcul de la limite est d'ailleurs loin d'être simple (nous reverrons des exemples de ce genre dans le chapitre sur l'intégration).

Démonstration. du théorème de Bolzano-Weierstraß.
Soit donc (u_n) une suite bornée. Notons $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall p \geqslant n,\ u_n \geqslant u_p\}$. Deux possibilités : soit l'ensemble est fini, soit il est infini. Si A est infini, on considère la sous-suite contenant tous les termes de (u_n) dont l'indice appartient à A. Cette sous-suite est par construction décroissante puisque chacun de ses termes est plus grand que tous les termes suivants dans la suite (u_n). Comme ladite sous-suite est par ailleurs minorée puisque (u_n) est bornée, elle converge d'après le théorème de convergence monotone. Si A est infini, considérons un n_0 plus grand que le plus grand élément de A. Puisque $n_0 \notin A$, il existe certainement un entier $n_1 > n_0$ pour lequel $u_{n_0} < u_{n_1}$. De même, $n_1 \notin A$, donc on peut trouver un entier n_2 tel que $u_{n_1} < u_{n_2}$. On construit ainsi petit à petit une suite d'indices correspondant à une sous-suite croissante de (u_n). Cette sous-suite étant majorée, elle converge. Remarquons qu'on a en fait démontré le résultat suivant : de toute suite réelle, on peut extraire une sous-suite monotone. □

9.3.2 Limites infinies

Définition 135. Une suite réelle (u_n) **diverge vers** $+\infty$ si $\forall A \in \mathbb{R}$, $\exists n_0 \in \mathbb{R}$, $\forall n \geqslant n_0$, $u_n > A$. On le note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. De même, une suite réelle (u_n) **diverge vers** $-\infty$ si $\forall A \in \mathbb{R}$, $\exists n_0 \in \mathbb{R}$, $\forall n \geqslant n_0$, $u_n < A$. On le note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Exemple : Considérons la suite définie par $u_n = n^2$ et montrons à l'aide de cette définition que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Comme pour le cas d'une limite finie, on commence pour cela par fixer la valeur de A. Constatons ensuite que $u_n > A \Leftrightarrow n > \sqrt{A}$ (si $A \geqslant 0$; mais si $A < 0$, il n'y a pas vraiment de souci puisque dans ce cas u_n est toujours supérieur à A). On peut donc choisir $n_0 = Ent(\sqrt{A}) + 1$, et on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Proposition 156. Une suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$. Une suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.

Démonstration. Soit (u_n) une suite croissante et non majorée. Cette dernière hypothèse signifie que $\forall A \in \mathbb{R}$, $\exists n_0 \in \mathbb{R}$, $u_{n_0} > A$. Mais la suite étant croissante, on a en fait $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant u_{n_0} > A$, ce qui prouve exactement la divergence vers $+\infty$. Inutile de refaire quoi que ce soit pour le deuxième cas : si (v_n) est décroissante non minorée, alors $(-v_n)$ est croissante non majorée, et on se ramène au cas précédent. □

Remarque 122. Une autre façon de voir les choses est de dire que dans $\overline{\mathbb{R}}$, le théorème de convergence monotone reste vrai même en supprimant l'hypothèse de majoration ou de minoration.

9.3.3 Opérations et limites

Proposition 157. Soient (u_n) et (v_n) deux suites ayant une limite (finie ou infinie), alors la limite de leur somme $(u_n + v_n)$ est donnée par le tableau suivant (f.i. signifiant forme indéterminée) :

$(u_n)\backslash(v_n)$	l'	$+\infty$	$-\infty$
l	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$f.i.$
$-\infty$	$-\infty$	$f.i.$	$-\infty$

Démonstration. Prouvons par exemple le cas où les deux suites ont une limite finie, notées respectivement l et l'. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe un entier n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \in \left]l - \frac{\varepsilon}{2} ; l + \frac{\varepsilon}{2}\right[$ (oui, la division par 2 est volontaire, après tout $\frac{\varepsilon}{2}$ est un réel strictement positif auquel on peut appliquer la définition de la limite) ; et un entier n_1 tel que $\forall n \geqslant n_1$, $v_n \in \left]l' - \frac{\varepsilon}{2} ; l' + \frac{\varepsilon}{2}\right[$. En notant $N = \max(n_0, n_1)$, on obtient alors en ajoutant les deux encadrements $\forall n \geqslant N$, $u_n + v_n \in]l + l' - \varepsilon, l + l' + \varepsilon[$, ce qui prouve que $\lim_{n\to+\infty} u_n + v_n = l + l'$. Les autres cas se démontrent de façon similaire et ne présentent pas de grosse difficulté. □

Proposition 158. Soit (u_n) une suite réelle et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Alors, si $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$, $\lim_{n\to+\infty} \lambda u_n = \lambda l$. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} \lambda u_n = \pm\infty$ (le signe dépendant du signe de la limite de (u_n) et de celui de λ suivant la règle des signes).

Démonstration. Prouvons le cas où la limite est finie. Soit $\varepsilon > 0$, alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, |u_n - l| < \dfrac{\varepsilon}{|\lambda|}$ (c'est la même astuce que pour la démonstration de la limite d'une somme), donc pour $n \geqslant n_0$, $|\lambda u_n - \lambda l| < \varepsilon$, ce qui prouve bien que $\lim_{n\to+\infty} \lambda u_n = \lambda l$. Le cas des limites infinies est très similaire. □

Proposition 159. Soient (u_n) et (v_n) deux suites ayant une limite (finie ou infinie), alors la limite de leur produit $(u_n v_n)$ est donnée par le tableau suivant :

$(u_n)\backslash(v_n)$	$l' > 0$	$l' < 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$l > 0$	$l.l'$	$l.l'$	0	$+\infty$	$-\infty$
$l < 0$	$l.l'$	$l.l'$	0	$-\infty$	$+\infty$
0	0	0	0	$f.i.$	$f.i.$
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$f.i.$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$f.i.$	$-\infty$	$+\infty$

Démonstration. Commençons par prouver le cas où les deux suites ont pour limite 0, et considérons $\varepsilon > 0$. Il existe deux réels n_0 et n_1 tels que, respectivement, $\forall n \geqslant n_0$, $|u_n| < \sqrt{\varepsilon}$; et $\forall n \geqslant n_1$, $|v_n| < \sqrt{\varepsilon}$. On en déduit que $\forall n \geqslant \max(n_0, n_1)$, $|u_n v_n| < \varepsilon$, ce qui prouve que $(u_n v_n)$ tend vers 0.

Supposons désormais que $\lim_{n\to+\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = l' \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{n\to+\infty} (u_n - l) = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} (v_n - l') = 0$, donc en utlisant ce qu'on vient juste de démontrer $\lim_{n\to+\infty} (u_n - l)(v_n - l') = 0$. Or, $(u_n - l)(v_n - l') = u_n v_n - l v_n - l' u_n + l l'$, ou encore $u_n v_n = (u_n - l)(v_n - l') + l v_n + l' u_n - l l'$. D'après les propositions démontrées auparavant (limite d'une somme et d'un produit par un réel), on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = 0 + l l' + l' l - l l' = l l'$. □

Définition 136. On note $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0^+$ lorsque la suite (u_n) tend vers 0 en étant positive à partir d'un certain rang. De même, on notera $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0^-$ si (u_n) est négative à partir d'un certain rang.

Proposition 160. Soit (u_n) une suite réelle qui ne s'annule plus à partir d'un certain rang, et ayant une limite, alors la limite de $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ est donnée par le tableau suivant :

(u_n)	$l \neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$	$\dfrac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-

Démonstration. Prouvons par exemple le cas où $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0^+$. Soit $A > 0$, alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0$, $|u_n| < \dfrac{1}{A}$. Quitte à changer la valeur de n_0 pour atteindre le rang à partir duquel (u_n) est positive et ne s'annule plus, on a même $0 < u_n < \dfrac{1}{A}$, d'où $\dfrac{1}{u_n} > A$, ce qui prouve que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = +\infty$. □

Proposition 161. Soient (u_n) et (v_n) deux suites ayant une limite (finie ou infinie), alors la limite de leur produit $(u_n v_n)$ est donnée par le tableau suivant :

$(u_n)\backslash(v_n)$	$l' > 0$	$l' < 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$l > 0$	$\frac{l}{l'}$	$\frac{l}{l'}$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-
$l < 0$	$\frac{l}{l'}$	$\frac{l}{l'}$	$-\infty$	$+\infty$	0^-	0^+
0^+	0	0	$f.i.$	$f.i.$	0	0
0^-	0	0	$f.i.$	$f.i.$	0	0
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$f.i.$	$f.i.$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$f.i.$	$f.i.$

Démonstration. Pas besoin de preuve, puisqu'un quotient n'est rien d'autre que le produit par un inverse. □

Exemple : $u_n = \dfrac{\ln n + n^2 + 2}{e^n + \sqrt{n}} = \dfrac{n^2}{e^n} \times \dfrac{1 + \frac{2}{n^2} + \frac{\ln n}{n^2}}{1 + \frac{\sqrt{n}}{e^n}}$. En utilisant nos connaissances sur les croissances comparées, il est facile de constater que le premier quotient tend vers 0 et le deuxième vers 1, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

9.3.4 Inégalités et limites

Proposition 162. Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergeant repectivement vers l et l' et telles que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang. Alors $l \leqslant l'$.

Démonstration. Petit raisonnement par l'absurde : supposons $l > l'$ et posons $\varepsilon = \dfrac{l - l'}{3}$, alors à partir d'un certain rang on aura $u_n \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$ et $v_n \in]l' - \varepsilon, l' + \varepsilon[$. Mais comme $l' + \varepsilon < l - \varepsilon$ (par construction de ε), ceci est incompatible avec le fait que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang. L'hypothèse est donc absurde et $l \leqslant l'$. □

Remarque 123. Cette proposition est souvent utilisée sous la forme plus simple où l'une des deux suites est constante. Ainsi, si (u_n) converge et que $u_n \leqslant A$ à partir d'un certain rang, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \leqslant A$. Notamment, la limite d'une suite de signe constant est de même signe que la suite.

Remarque 124. L'inégalité sur la limite est toujours large, même si on a une inégalité stricte entre u_n et v_n. Par exemple, $\forall n \geqslant 1$, $1 + \dfrac{1}{n} > 1 + \dfrac{1}{n^2}$, mais ces deux suites ont la même limite.

Théorème 33. Théorème des gendarmes (ou théorème d'encadrement si vous voulez faire plus sérieux).
Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites vérifiant $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang, et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ (ces limites ont le droit d'être infinies).

Démonstration. Occupons-nous du cas où la limite commune de (u_n) et (w_n) est un réel l, et choisissons $\varepsilon > 0$. Alors à partir d'un certain rang, on aura $|u_n - l| < \varepsilon$ et $|v_n - l| < \varepsilon$. Autrement dit, u_n et v_n appartiennent tous deux à l'intervalle $]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$. Mais alors w_n, qui se situe entre les deux, appartient lui aussi à cet intervalle, et $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = l$. Le cas des limites infinies est tout aussi simple (une seule des deux suites encadrantes suffit même). □

Exemple : Considérons la suite définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{k=2n} \frac{1}{k^2}$. Très pénible à étudier avec sa somme à nombre de termes variable, mais si on ne veut que la limite, c'est beaucoup plus facile. Chacun des termes de la somme est compris entre le plus petit, en l'occurence $\dfrac{1}{(2n)^2}$, et le plus grand, à savoir $\dfrac{1}{(n+1)^2}$, donc $\dfrac{n}{(2n)^2} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n}{(n+1)^2}$ (il y a n dans la somme définissant u_n). Chacune des deux suites encadrant u_n ayant pour limite 0, le théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Définition 137. Deux suites (u_n) et (v_n) sont **adjacentes** si elles vérifient les deux propriétés suivantes :

- l'une est croissante et l'autre décroissante.
- $\lim_{n \to +\infty} u_n - v_n = 0$.

Théorème 34. Deux suites adjacentes convergent et ont la même limite.

Démonstration. Supposons par exemple (u_n) croissante et (v_n) décroissance, et commençons par constater que la suite $(u_n - v_n)$ est croissante et a pour limite 0. Cela implique que cette suite est à termes négatifs : en effet, si on avait, pour un rang n_0, $u_{n_0} - v_{n_0} = \alpha > 0$, $(u_n - v_n)$ serait supérieure à $\alpha > 0$ à partir d'un certain rang, donc ne pourrait pas converger vers 0. Conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$.
Mais alors, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$. Autrement dit, (u_n) est croissante et majorée donc convergente. De même, (v_n) est décroissante et minorée par u_0, donc converge également. Si on note l et l' leurs limites respectives, on a $\lim_{n \to +\infty} u_n - v_n = l - l' = 0$, donc $l = l'$, ce qui achève la démonstration. $\square$

Exemple : Considérons les suites définies par $u_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$. Comme $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$, la suite (u_n) est croissante. Par ailleurs, $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)} - u_n - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{n} = \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2} = \frac{-1}{(n+1)^2}$, qui est négatif. La suite (v_n) est donc décroissante. Reste à vérifier que $\lim_{n \to +\infty} u_n - v_n = 0$, ce qui n'a rien de difficile puisque $u_n - v_n = -\frac{1}{n}$.
Les deux suites sont donc adjacentes (pour les curieux, leur limite commune vaut $\frac{\pi^2}{6}$).

Proposition 163. Soit $x \in \mathbb{R}$. Les deux suites définies par $a_n = \frac{Ent(10^n x)}{10^n}$, et $b_n = a_n + \frac{1}{10^n}$ sont adjacentes et ont pour limite commune x. Le réel a_n est appelé **approximation décimale par défaut de x à 10^{-n} près**, et le réel b_n **approximation décimale par excès de x à 10^{-n} près**.

Démonstration. Par définition des parties entières, on a $Ent(10^n x) \leqslant 10^n x < Ent(10^n x) + 1$, donc $a_n \leqslant x < b_n$. En multipliant cet encadrement par 10, on obtient $10\, Ent(10^n x) \leqslant 10^{n+1} x < 10\, Ent(10^n x) + 1$. Le membre de gauche et celui de droite dans cet encadrement étant des nomrbes entiers, la caractérisation de la partie entière permet d'affirmer que $10\, Ent(10^n x) \leqslant Ent(10^{n+1} x) \leqslant 10^{n+1} x < Ent(10^{n+1} x) + 1 \leqslant 10\, Ent(10^n x) + 1$, soit en divisant le tout par 10^{n+1}, $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant x < b_{n+1} \leqslant b_n$. Autrement dit, la suite (a_n) est croissante et la suite (b_n) décroissante. De plus, $b_n - a_n = \frac{1}{10^n}$ a certainement une limite nulle quand n tend vers $+\infty$. Les deux suites sont donc adjacentes et convergent vers une même limite. Les encadrement donnés plus haut indiquent que cette limite commune est nécessairement inférieure ou égale à x (puisque la suite (a_n) est majorée par x), mais également supérieure ou égale à x (puisque (b_n) est minorée par x). Elle est donc nécessairement égale à x. $\square$

Remarque 125. Les nombres a_n et b_n correspondent effectivement aux valeurs usuelles utilisées pour les approximations décimales. Par exemple, si $x = \pi$, on obtiendra $a_3 = 3.141$ et $b_3 = 3.142$.

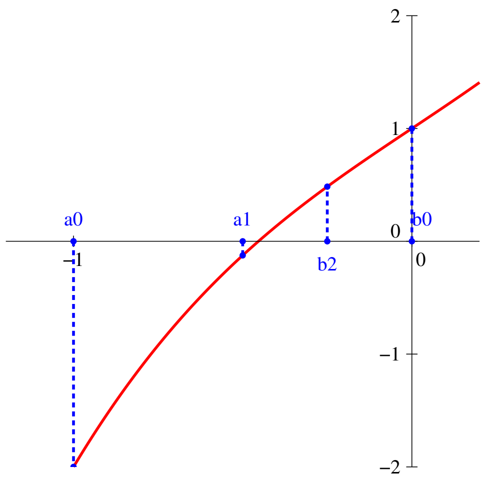
Théorème 35. Théorème des segments emboîtés.
Soit $(I_n = [a_n; b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de segments (intervalles fermés aux deux bornes) de $\mathbb{R}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} \subset I_n$, et $\lim_{n \to +\infty} b_n - a_n = 0$. Alors l'intersection de tous les segments I_n est réduite à un unique réel x.

Démonstration. Il suffit de constater que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes, ce qui découle immédiatement des hypothèses : l'emboîtement des intervalles implique que (a_n) est croissante et (b_n) décroissante, et la limite de leur différence est supposée nulle. Les deux suites convergent donc vers une limite commune x, et vérifient $a_n \leqslant x \leqslant b_n$, ce qui implique que $x \in I_n$. Le réel x est nécessairement unique : supposons par exemple qu'il eixste un $y < x$ appartenant à tous les I_n, et notons $\varepsilon = \dfrac{x-y}{2}$. À partir d'un certain rang, on aura $x - \varepsilon \leqslant a_n$, donc a fortiori $y < a_n$, et y n'appartient plus à l'intervalle I_n, ce qui est contradictoire. □

Proposition 164. Méthode de dichotomie.
Soit f une fonction continue sur un segment $[a;b]$, telle que $f(a)f(b) < 0$ (autrement dit, $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe opposé). On construit deux suites récurrentes (a_n) et (b_n) en posant $a_0 = a$ et $b_0 = b$ puis en procédant ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, si $f(a_n)f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < 0$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$; dans le cas contraire on pose $a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$. Les deux suites (a_n) et (b_n) sont alors adjacentes, et elles convergent vers une limite commune α vérifiant $f(\alpha) = 0$. De plus, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$, ce qui majore l'erreur commise en approchant α par a_n ou b_n.

Démonstration. Cette propriété est une conséquence du théorème précédent. Les segments $[a_n;b_n]$ sont emboîtés par construction, reste à prouver que leur largeur tend vers 0, ce qui découle de l'affirmation $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$. Prouvons cette affirmation par récurrence. Au rang 0, on a $b_0 - a_0 = b - a = \dfrac{b-a}{2^0}$, donc la proriété est vraie. Supposons la vraie au rang n. On a alors, au choix, $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2} - a_n = \dfrac{b_n-a_n}{2}$, ou $b_{n+1} - a_{n+1} = b_n - \dfrac{a_n+b_n}{2} = \dfrac{b_n-a_n}{2}$. Dans les deux cas, en exploitant l'hypothèse de récurrence, $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{1}{2^n} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2^{n+1}}$, ce qui prouve la propriété au rang $n+1$. Il existe donc un unique réel α appartenant simultanément à tous les segments $[a_n;b_n]$. Reste à prouver que $f(\alpha) = 0$. Supposons par exemple $f(a) > 0$. Par construction, on aura toujours $f(a_n) \geqslant 0$ donc, la fonction étant continue, par passage à la limite, $f(\alpha) \geqslant 0$. De même, $f(b_n) \leqslant 0$, ce qui implique $f(\alpha) \leqslant 0$. On conclut que $f(\alpha) = 0$. □

Exemple d'utilisation : On cherche à étudier les variations de la fonction $f(x) = x^4 + 4x^2 + 4x - 5$. Cette fonction est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = 4x^3 + 8x + 4x = 4g(x)$, avec $g(x) = x^3 + 2x + 1$. Cette fonction g est elle-même dérivable et $g'(x) = 3x^2 + 2 > 0$. La fonction g est strictement croissante, elle s'annule en un unique réel α, et f est donc décroissante sur $]-\infty;\alpha]$ et croissante sur $[\alpha;+\infty[$.



On aimerait déterminer une valeur approchée de α. Ayons pour cela recours à la dichotomie, mais il faut commencer par trouver un premier encadrement de α. On constate que $g(0) = 1$ et $g(-1) = -2$, donc la racine de g se trouve dans l'intervalle $[-1;0]$. On calcule ensuite $g(-0.5)$, qui se trouve être négatif, donc $\alpha \in [-0.5;0]$. Puis on calcule $g(-0.25)$, qui est positif, donc $g(\alpha) \in [-0.5;-0.25]$. On sait donc déjà que $\alpha \simeq -0.375$, à 0.125 près. On aura naturellement recours à la calculatrice ou à l'ordinateur pour effectuer ce genre d'algorithmes de façon plus poussée. Remarquons que pour obtenir une valeur approchée à $\varepsilon > 0$ près, il suffit de choisir n tel que $\dfrac{b-a}{2^n} < \varepsilon$.

9.4 Relations de comparaison

9.4.1 Négligeabilité

Définition 138. Une suite (u_n) est **négligeable** par rapport à une suite (v_n) s'il existe une suite auxilaire (a_n) telle que $u_n = a_n v_n$, avec $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. On le note $u_n = o(v_n)$. Une suite (u_n) est **majorée en ordre de grandeur** par une suite (v_n) s'il existe une suite (a_n) telle que $u_n = a_n v_n$, avec la suite (a_n) bornée. On note alors $u_n = O(v_n)$.

Remarque 126.
- En pratique, on utilisera très souvent une caractérisation plus simple : lorsque la suite (v_n) ne s'annule pas, on aura $u_n = o(v_n)$ si $\dfrac{u_n}{v_n}$ a une limite nulle.
- Ces relations ne sont pas des relations d'ordre sur les suites. Elles sont toutes les deux transitives, mais le o n'est pas réflexif (ni antisymétrique) et le O est réflexif mais pas antisymétrique.
- Dire que $u_n = o(1)$ revient à dire que (u_n) converge vers 0. Dire que $u_n = O(1)$ est équivalent à dire que la suite (u_n) est bornée.
- La suite (v_n) sera pratiquement toujours une suite très simple. On n'écrira par exemple jamais $u_n = o(2n^2 + 1)$, mais plus simplement $u_n = o(n^2)$, ce qui est totalement équivalent. Ce sont les ordres de grandeur des suites considérérées qui sont importants.
- Les égalités faisant intervenir les o seront vraiment traitées en tant qu'égalités, et on se permettra de faire un peu de calcul algébrique avec. Ainsi, si $u_n - n = o(\sqrt{n})$, on a le droit d'écrire que $u_n = n + o(\sqrt{n})$.

Proposition 165. Règles de calcul sur la relation de négligeabilité.
- Si $u_n = o(v_n)$ et $w_n = o(v_n)$, alors $u_n + w_n = o(v_n)$.
- Si $u_n = o(v_n)$, alors $u_n w_n = o(v_n w_n)$.
- Si $u_n = o(v_n)$ et $w_n = o(t_n)$ alors $u_n w_n = o(v_n t_n)$.
- Si $u_n = o(v_n)$ et que les suites ne s'annulent plus à partir d'un certain rang, alors $\dfrac{1}{v_n} = o\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$.

Remarque 127. On peut par exemple résumer la première propriété en écrivant des égalités du genre $o(n) + o(n) = o(n)$. Bien sûr, celà peut sembler perturbant au premier abord, mais il faut bien prendre conscience que $o(n)$ ne désigne pas une suite précise, mais toute un ensemble de suites, et donc que le $o(n)$ du membre de droite n'a aucune raison d'être égal (au sens strict du terme) à chacun des $o(n)$ du membre de gauche. Une fois admises ces singularités, la symbolisme du o permet d'écrire des calculs de façon très souple et efficace.

Démonstration. Toutes ces propriétés sont très faciles à démontrer, surtout si on suppose que la suite (v_n) ne s'annule pas, ce qui permet de les écrire comme simples calculs de limites. Ainsi pour la première, on suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{w_n}{v_n} = 0$, et on veut prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n + w_n}{v_n} = 0$, ce qui est une conséquence évidente des résultats classiques sur la limite des sommes. Tout le reste est similaire. $\square$

9.4.2 Equivalence

Définition 139. Deux suites (u_n) et (v_n) sont **équivalentes** si on peut écrire $u_n = a_n v_n$, où (a_n) est une suite vérifiant $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$. On le note $u_n \sim v_n$.

Proposition 166. Deux suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes si et seulement si $u_n - v_n = o(v_n)$.

Démonstration. En effet, si $u_n = a_n v_n$, avec (a_n) ayant pour limite 1, alors $u_n - v_n = (a_n - 1)v_n$, avec évidemment $(a_n - 1)$ qui tend vers 0. ce résultat apparemment anodin est en fait tout à fait fondamental, puisqu'on s'en sert très fréquemment lorsqu'on rédige des calculs faisant intervenir les notions d'équivalence et de négligeabilité. $\square$

Remarque 128.
- Comme dans le cas de la négligeabilité, on utilisera souvent la caractérisation $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.
- La relation d'équivalence est réflexive, transitive et symétrique (dès que $u_n \sim v_n$, on a automatiquement $v_n \sim u_n$). Ce type de relation porte justement le nom de relations d'équivalence.
- Dire que $u_n \sim 0$ revient à dire que la suite (u_n) est nulle à partir d'un certain rang. En général, quand on écrit celà, on est en train de faire une grosse bêtises (souvent, on voulait simplement dire que la suite (u_n) a une limite nulle).
- Si k est un réel non nul (cf ci-dessus), dire que $u_n \sim k$ est équivalent à dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = k$.
- Si deux suites sont équivalentes, et qu'elles admettent des limites (éventuellement infinies), alors leurs limites sont égales.

Proposition 167. Régles de calcul.
- Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim t_n$, alors $u_n w_n \sim v_n t_n$.
- Si $u_n \sim v_n$ et v_n ne s'annule plus à partir d'un certain rang, alors $\dfrac{1}{u_n} \sim \dfrac{1}{v_n}$.
- Si $u_n \sim v_n$, alors $\forall \alpha \neq 0$, $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$.

Démonstration. Encore une fois, tout cela est complètement évident. $\square$

Remarque 129. **ATTENTION**, on ne peut pas additionner des équivalents, c'est même une source d'horreurs mathématiques hélas très utilisée. Par exemple $n^2 + n \sim n^2$, et $-n^2 - 3 \sim -n^2$, mais la somme nous donnerait $n - 3$ équivalent à 0, ce qui est risible. Plus subtil, les équivalents ne se composent pas non plus en général. Ainsi, on peut écrire $n^2 + n \sim n^2$ mais $e^{n^2+n} \not\sim e^{n^2}$ (le quotient de ces deux suites est égal à e^n, qui tend vers $+\infty$). Si on tient vraiment à manipuler des sommes, il faudra systématiquement retraduire les équivalences à l'aide de o.

Exemples : La stabilité des équivalences par quotient et produit va enfin nous permettre de rédiger rapidement des calculs de limites faisant par exemple intervenir des croissances comparées (on rappelera ces résultats juste en-dessous). Ainsi, $\dfrac{n^2 + \sqrt{n} + 1}{e^n - n^4} \sim \dfrac{n^2}{e^n}$, on obtient directement une limite nulle pour ce quotient.
Attention, le concept de « garder le terme le plus fort » ne s'applique que dans le cas d'une somme, et certainement pas pour un produit. Ainsi, $n + \ln(n) \sim n$, mais $n\ln(n) \not\sim n$.
Un cas un peu plus pénible, on cherche la limite de la suite définie par $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Bien qu'on ait le droit de prendre des équivalents sous la racine carrée pour écrire $\sqrt{n+1} \sim \sqrt{n}$, on ne peut sûrement pas soustraire $\sqrt{n}$ à cet équivalent. Si on tente d'écrire les choses avec des o, on trouve $u_n = \sqrt{n} + o(\sqrt{n}) - \sqrt{n} = o(\sqrt{n})$. Malheureusement, on ne peut rien conclure de ce résultat (une suite négligeable devant $\sqrt{n}$ peut encore avoir n'importe quoi comme limite). Il faut donc commencer par multiplier par la quantité conjuguée avant d'utiliser les o : $u_n = \dfrac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n} + o(\sqrt{n}) + \sqrt{n}} = \dfrac{1}{2\sqrt{n} + o(\sqrt{n})} \sim \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$. On peut en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ (et on a même obtenu beaucoup plus précis puisqu'on possède un équivalent simple de u_n).

9.4.3 Résultats classiques

Proposition 168. Croissances comparées.
- Si $\alpha < \beta$, $n^\alpha = o(n^\beta)$
- $\forall a > 1$, $\forall b > 0$, $n^b = o(a^n)$
- $\forall b > 0$, $\forall c > 0$, $(\ln n)^c = o(n^b)$
- $\forall a > 1$, $a^n = o(n!)$
- $n! = o(n^n)$

Démonstration. Nous ne reviendrons pas sur les trois premiers résultats qui ont déjà été vus dans le cadre des fonctions usuelles. Prouvons la quatrième propriété en posant $u_n = \dfrac{n!}{a^n}$. Comme $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+1}{a}$ a pour limite $+\infty$, il existe certainement un rang n_0 à partir duquel $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 2$, soit $u_{n+1} \geqslant 2u_n$. Par une récurrence facile, on prouve alors que $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 2^{n-n_0}u_{n_0}$. Le membre de droite de cette inégalité tend certainement vers $+\infty$, donc u_n aussi. La dernière propriété est encore plus facile : $\dfrac{n^n}{n!} = \dfrac{n \times n \times \cdots \times n}{1 \times 2 \times \cdots \times n} = n \times \dfrac{n}{2} \times \cdots \times 1 > n$, donc là aussi la limite du quotient sera infinie. $\square$

Proposition 169. Un polynôme est équivalent à son terme de plus haut degré.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la première propriété de croissance comparée : toutes les puissances de n inférieures à celle apparaissant dans le terme de plus haut degré seront négligeables. $\square$

Proposition 170. Équivalente classiques.
Soit (u_n) une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Alors :
- $\ln(1 + u_n) \sim u_n$
- $e^{u_n} - 1 \sim u_n$
- $\sin(u_n) \sim u_n$
- $\tan(u_n) \sim u_n$
- $1 - \cos(u_n) \sim \dfrac{u_n^2}{2}$

Démonstration. Les quatre premiers résultats découlent tous d'une même propriété plus générale : si f est une fonction dérivable en 0, et que (u_n) tend vers 0, alors $f(u_n)-f(0) \sim f'(0)u_n$. Cette propriété est une simple réécriture de la définition de la dérivée comme quotient du taux d'accroissement : $\dfrac{f(u_n) - f(0)}{u_n - 0}$ a pour limite $f'(0)$ quand u_n tend vers 0. On applique ici cette propriété aux fonctions $f_1 : x \mapsto \ln(1 + x)$ (qui a pour dérivée en 0, $\dfrac{1}{1+0} = 1$; puis à $f_2 : x \mapsto e^x$, qui a pour dérivée en 0 $e^0 = 1$; à $f_3 : x \mapsto \sin(x)$, qui a pour dérivée en 0 $\cos(0) = 1$, et enfin à $f_4 : x \mapsto \tan(x)$, qui a pour dérivée $1+\tan^2(0) = 1$. La dernière propriété est un peu plus complexe (on ne voit pas bien d'où sort ce carré), nous l'admettrons provisoirement en attendant un futur chapître sur les développements limités. $\square$

Exemple : Le fait que la suite tende vers 0 est absolument essentiel. Par exemple, $\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{1}{n}$, mais $\ln(n + 1) \not\sim n$ (c'est en l'occurence équivalent à $\ln(n)$).

9.5 Compléments

9.5.1 Suites classiques

Définition 140. Une suite réelle (u_n) est **arithmético-géométrique** s'il existe deux réels $a \notin \{0 : 1\}$ et $b \neq 0$ tels qu'elle vérifie la relation de récurrence suivante : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$.

Théorème 36. Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique, alors, en notant α l'unique solution de l'équation $x = ax + b$ (aussi appelée **équation de point fixe** de la suite), la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \alpha$ est une suite géométrique de raison a.

Démonstration. L'existence et l'unicité du réel α découlent du fait qu'on a imposé $a \neq 1$ dans la définition d'une suite arithmético-géométrique. Remarquons ensuite que $\forall n \in \mathbb{N}$,
$v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha = au_n + b - \alpha = au_n - a\alpha = a(u_n - \alpha) = av_n$.
La suite (v_n) est donc géométrique de raison a. □

Remarque 130. On déduit du théorème précédent que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + \alpha = v_0 \times a^n + \alpha = (u_0 - \alpha)a^n + \alpha$, ce qui donne une expression explicite du terme de u_n. En pratique, en présence d'une suite arithmético-géométrique, on présentera les calculs de la façon suivante :

- calcul du point fixe α.
- définition de la suite (v_n).
- vérification que (v_n) est suite géométrique.
- conclusion : expression du terme général u_n.

Exemple Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 4$. L'équation de point fixe de la suite est $x = 3x - 4$, qui a pour unique solution $x = 2$, on pose donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 2$. On remarque que $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = 3u_n - 4 - 2 = 3u_n - 6 = 3(u_n - 2) = 3v_n$, donc la suite (v_n) est géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = u_0 - 2 = 3$. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 3^{n+1}$, donc $u_n = v_n + 2 = 3^{n+1} + 2$.

Définition 141. Une suite réelle est dite **récurrente linéaire d'ordre** 2 si elle vérifie une relation de récurrence double linéaire à coefficients constants, c'est-à-dire que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$, où a et b sont deux réels non nuls.

Définition 142. Soit (u_n) une suite récurrente linéaire d'ordre 2. On appelle **équation caractéristique** de la suite l'équation du second degré $r^2 - ar - b = 0$.

Théorème 37. Si l'équation caractéristique d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 (u_n) admet deux racines réelles distinctes r et s, le terme général de la suite peut s'écrire sous la forme $u_n = \alpha r^n + \beta s^n$, α et β étant deux réels pouvant être déterminés à l'aide des deux premiers termes de la suite.
Si l'équation caractéristique admet une racine réelle double r, alors $u_n = (\alpha + \beta n)r^n$ (avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$).
Si l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$, alors $u_n = r^n(\alpha \cos(n\theta) + \beta \sin(n\theta))$.

Démonstration. Constatons que, si r et s sont racines de l'équation caractéristique, toutes les suites de la forme $u_n = \alpha r^n + \beta s^n$ vérifient la récurrence linéaire : en effet, $r^2 = ar + b \Rightarrow r^{n+2} = ar^{n+1} + br^n$ (et de même pour s^{n+2}), donc $u_{n+2} = \alpha r^{n+2} + \beta s^{n+2} = \alpha(ar^{n+1} + br^n) + \beta(as^{n+1} + bs^n) = au_{n+1} + bu_n$. Comme de plus la suite u_n est complètement déterminée par ses deux premiers termes et la relation de récurrence double, une suite vérifiant cette même relation de récurrence et ayant les deux mêmes premiers termes que (u_n) est égale à celle-ci. Les autres cas se font de façon similaire. On notera une grande similitude formelle entre ces récurrences linéaires d'ordre 2 et les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants.
Le point délicat de toute cette démonstration, que nous allons subtilement esquiver, est en fait d'arriver à prouver qu'il existe toujours une suite du type donné ayant les deux mêmes premiers termes que u_n. Nous nous contenterons pour l'instant d'admettre (et de constater sur des exemples) que c'est bien le cas, et qu'on ne peut pas en général se contenter d'une forme plus simple (par exemple avec une seule des deux racines dans le premier cas). □

Exemple : suite de Fibonacci. Il s'agit de la suite définie par $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. L'équation caractéristique de la suite est $x^2 = x + 1$, soit $x^2 - x - 1 = 0$, dont le discriminant vaut $\Delta = 1 + 4 = 5$, et qui admet donc deux solutions $r = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (plus connu sous le petit nom de nombre d'or), et $s = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. On en déduit comme précédemment que $u_n = \alpha r^n + \beta s^n$. Comme $u_0 = u_1 = 1$, on obtient les équations $\alpha + \beta = 1$ et $\alpha\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \beta\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$. Procédons par substitution pour résoudre le système : on a $\beta = 1 - \alpha$, donc en remplaçant dans la deuxième équation $\alpha\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} - \alpha\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$, soit encore en regroupant et mettant tout au même dénominateur $\alpha\sqrt{5} = 1 - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Autrement dit, ${}^{\alpha} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$. On obtient ensuite $\beta = 1 - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = -\dfrac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$. Conclusion : $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$. Il n'est pas le moins du monde évident que ces formules vont donner des valeurs entières pour tous les termes de la suite, et pourtant c'est bien le cas !

9.5.2 Suites implicites

Dans ce paragraphe comme dans le suivant, on se contentera d'énoncer quelques grands principe généraux, et de les appliquer sur un exemple concret. Les suites implicites auxquelles nous allons nous intéresser sont définies par des équations de la forme $f_n(u_n) = 0$, où $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues. On peut alors dresser la courte liste de méthodes suivante, en constatant que tous les calculs s'appuieront sur unr étude préalable des variations des fonctions f_n :

- Pour majorer ou minorer une telle suite par un réel M, on se contente de calculer $f_n(M)$ et d'utiliser le tableau de variations de la fonction.
- Pour étudier la monotonie de la suite, on tentera d'exprimer $f_{n+1}(u_n)$ (ou $f_n(u_{n+1})$) sous une forme simple, pour le comparer à $f_{n+1}(u_{n+1})$ (qui est nul par hypothèse). Là encore, les variations de f_n permettront de conclure.
- Pour déterminer la limite éventuelle de la suite, on tentera de passer à la limite dans la relation $f_n(u_n) = 0$. De même, les calculs d'équivalent repartiront toujours de cette égalité.

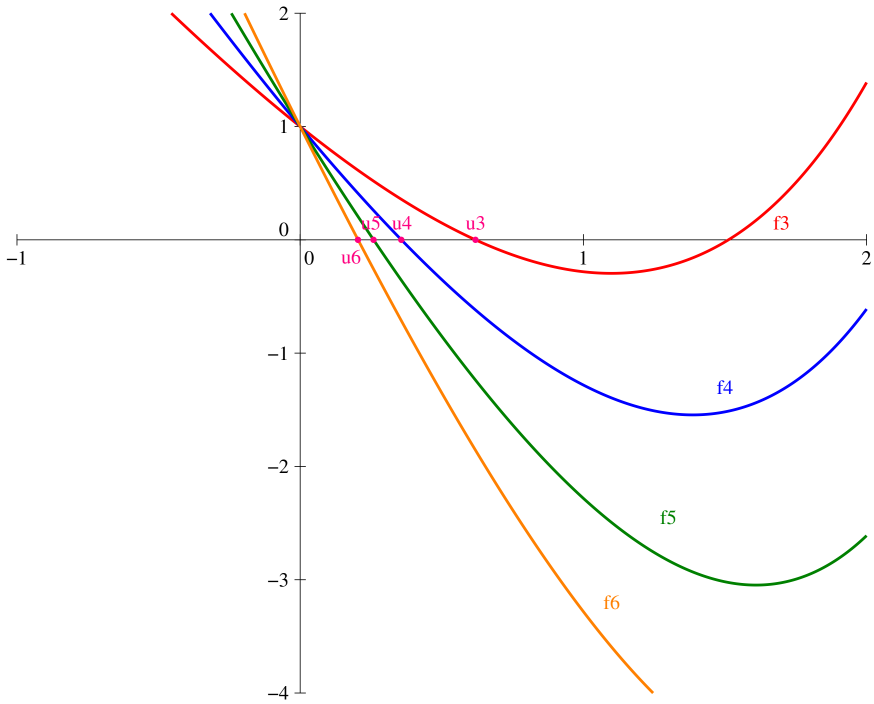
Exemple : On définit la suite (u_n) de la façon suivante : $\forall n \geqslant 3$, u_n est la plus petite solution de l'équation $e^x = nx$. Cette définition est correcte car la fonction $f_n : x \mapsto e^x - nx$ est continue dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f_n'(x) = e^x - n$, donc admet un minimum global en $\ln n$, de valeur $e^{\ln n} - n\ln n = n(1 - \ln n) < 0$ pour $n \geqslant 3$. L'équation admet donc une solution $x_n \leqslant \ln n$ (et accessoirement une deuxième solution supérieure à $\ln n$).

Pour prouver par exemple que $\forall n \geqslant 3$, $u_n > 0$, on constate que $f_n(0) = e^0 - n \times 0 = 1 > 0$. Or, par définition, $f_n(u_n) = 0 < f_n(0)$. En utilisant le théorème de la bijection (et en fait la partie de la conclusion qui stipule que f_n^{-1}, qui est définie sur $[n(1-\ln n); +\infty[$, à valeurs dans $]-\infty; \ln n]$, est de même monotonie que f_n), on peut en déduire que $u_n > 0$.

On peut prouver de même que la suite (u_n) est décroissante : $f_{n+1}(u_n) = e^{u_n} - (n+1)u_n = e^{u_n} - nu_n - u_n = -u_n < 0$ (on a utilisé le fait que $f_n(u_n) = 0$, et que $u_n > 0$). On a donc $f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$, d'où $u_n > u_{n+1}$ (c'est encore la décroissance de la réciproque qui est utilisée).

La suite étant décroissante minorée, elle converge vers un certain réel l. Pour déterminer la valeur de l, il faut revenir à l'équation permettant de définir la suite : puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, on aura $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{u_n} = e^l$. Or, par définition, $e^{u_n} = nu_n$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = e^l$. Ceci n'est possible que si $l = 0$ (sinon, nu_n tendrait vers $+\infty$), et on en déduit au passage que $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 1$, c'est-à-dire que

$u_n \sim \dfrac{1}{n}$. On peut même faire mieux. Puisque u_n tend vers 0, on peut affirmer que $e^{u_n} = 1+u_n+o(u_n)$, donc $e^{u_n} = 1 + \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Comme $e^{u_n} = nu_n$, on en déduit que $nu_n = 1 + \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, soit en divisant tout par n, $u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Ce résultat, meilleur que le simple équivalent, porte le nom de développement asymptotique de la suite. On peut naturellement tenter de pousser plus loin ce développement pour obtenir à la fin un o de quelque chose de plus petit que $\dfrac{1}{n^2}$, mais on se heurte ici à des difficultés de calcul. Nous reviendrons plus en détail sur ce genre de développements plus tard dans l'année.



9.5.3 Suites récurrentes

Définition 143. Une **suite récurrente** est une suite définie par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$, où la fonction f sera en ce qui nous concerne toujours continue.

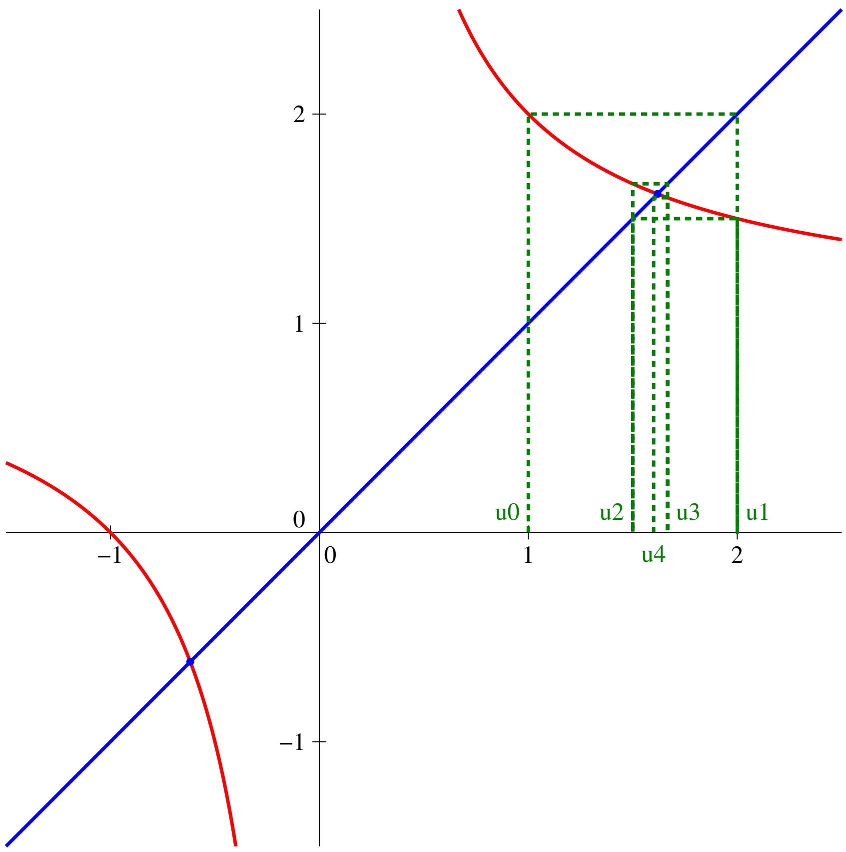
- La limite l de la suite vérifie nécessairement $f(l) = l$, c'est un **point fixe** de la fonction f.
- Pour majorer ou minorer une telle suite, on cherche un intervalle I **stable** par la fonction f, c'est-à-dire tel que $f(I) \subset I$. Si un terme u_{n_0} de la suite appartient à cet intervalle stable, tous les termes suivants y seront également (ce qu'on redémontrera à chaque fois par récurrence).
- Pour étudier la monotonie de la suite, on étudiera le signe de $f(x) - x$, en espérant qu'il soit constant sur notre intervalle stable. Quand la fonction f est croissante, la suite sera toujours monotone (mais pas nécessairement croissante !), quand f est décroissante, ça se passe en général moins bien. Toutefois, les sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) seront alors monotones.
- On commence de toute façon toujours l'étude d'une suite récurrente par l'étude des variations de la fonction f, et surtout du signe de $f(x) - x$ (qui donne au passage les points fixes). On fera même très souvent une représentation graphique de f, en traçant dans le même repère la droite d'équation $y = x$, et on pourra placer sur ce graphique les premiers termes de la suite.

Exemple : Considérons la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$. On pose donc $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée $-\dfrac{1}{x^2}$. Elle est donc décroissante sur

$]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$. Par ailleurs, $f(x)-x = 1+\dfrac{1}{x}-x = \dfrac{x+1-x^2}{x}$. Le numérateur a pour discriminant $\Delta = 5$, et s'annule en $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{-2} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, et en $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

x	$-\infty$		x_2		0		x_1		$+\infty$
$f(x)$	1	$\searrow$	x_2	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	x_1	$\searrow$	1
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	

On peut représenter les premiers termes de la suite sur la figure suivante :



On constate que la suite semble converger vers x_1, mais la fonction n'étant pas croissante, on n'a aucun intervalle stable pratique à disposition. Contournons donc la difficulté en étudiant séparément la sous-suite des termes pairs et impairs de la suite. Ces deux suites vérifient une relation de récurrence du type $v_{n+1} = f(f(v_n)) = g(v_n)$, où $g(x) = 1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1+\dfrac{x}{x+1} = \dfrac{2x+1}{x+1}$. Cette fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, de dérivée $g'(x) = \dfrac{2(x+1)-2x-1}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{(2x+1)^2}$. La fonction g est croissante sur chacun de ses deux intervalles de définition. Par ailleurs, $g(x)-x = \dfrac{2x+1-x^2-x}{x+1}$, qui s'annule sans surprise pour les mêmes valeurs que f (les points fixes de f seront nécessairement des points fixes de $f\circ f$, même si la réciproque n'est pas forcément vraie). Les intervalles $I = [0,x_1]$ et $J = [x_1;+\infty[$ sont stables par la fonction g. Prouvons par exemple par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$u_{2n} \in I$. C'est évidemment vrai au rang 0 puisque $0 \leqslant 1 \leqslant x_1$. Supposons désormais que $u_n \in I$, alors par croissance de la fonction g, on aura $g(0) \leqslant g(u_{2n}) \leqslant g(x_1)$, soit $1 \leqslant u_{2n+2} \leqslant x_1$, ce qui prouve la propriété au rang $n+1$. Une fois cette récurrence effectuée, on peut affirmer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+2} - u_{2n} = g(u_{2n}) - u_{2n} > 0$, puisque $g(x) - x \geqslant 0$ sur l'intervalle I. Autrement dit, la suite (u_{2n}) est croissante, et par ailleurs majorée par x_1, elle converge nécessairement. Sa limite étant un point fixe de la fonction, il ne peut s'agir que de x_1 ou de x_2. Or, l'encadrement obtenu sur la suite l'empêche de converger vers x_2 qui est strictement négatif. Conclusion : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{2n} = x_1$. On prouve de façon très similaire, en exploitant l'intervalle J, que la sous-suite (u_{2n+1}) est décroissante minorée par x_1, et converge elle aussi vers x_1. Un résultat classique vu en cours nous permet alors de tirer la conclusion suivante : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (à savoir, pour la petite histoire, le nombre d'or ; ce résultat a un lien avec des histoires de développement en fraction continue de ce fameux nombre d'or).

Chapitre 10

Structures algébriques

Qu'est-ce qu'un Kinder surprise sans son jouet ?
Un Kinder injectif, son noyau est réduit à zéro !

Un groupe de loups, c'est une horde.
Un groupe de vaches, c'est un troupeau.
Un groupe d'hommes, c'est souvent une bande de cons.

Philippe Gelück (auteur du Chat).

Introduction

Ce premier chapître d'algèbre pur de l'année est absolument fondamental pour la compréhension de tout ce qu'on fera ensuite sur les espaces vectoriels. Ce cha)tre vous semblera certainement ardu au premier abord car les structures étudiées sont très générales, et le formalisme rebutant. Mais vous faites ici vos premiers pas vers une nouvelle façon de considérer les mathématiques, non plus comme un simple alignement de calcul utilisant de temps à autre, par commodité, des notations ou des théorèmes dont on ne saisit pas toujours la portée, mais bien comme une science visant à dégager à partir des objets mathématiques usuels des structures très générales, qu'on étudie ensuite de façon abstraite pour énoncer des théorèmes très généraux qui s'appliqueront ensuite de façon identique quelle que soit l'ensemble étudié en pratique. Ainsi, un résultat théorique sur les groupes pourra aussi bien s'appliquer sur les nombres entiers, que sur des suites ou plus tard des matrices.

Objectifs du chapitre :

- comprendre l'intérêt de dégager des structures algébriques très générales, qui s'adapteront à des ensembles et des opérations variés.
- maîtriser le formalisme des groupes et des anneaux, et être capable de faire des calculs abstraits dans ces structures.
- savoir factoriser ou effectuer une division euclidienne sur des polynômes à coefficients réels ou complexes.

10.1 Groupes

10.1.1 Lois de composition interne

Définition 144. Soit E un ensemble, une **loi de composition interne** (ou plus simplement lci) sur E est une application $\star : E \times E \to E$. On note en général l'image du couple (x, y) par cette application $x \star y$ plutôt que $\star(x, y)$.

Remarque 131. Une loi de composition est tout simplement une opération sur l'ensemble E, d'où la notation utilisée pour les images. Ainsi, la somme ou le produit sont des lci sur les ensembles $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ ou encore sur l'ensemble de toutes les suites réelles. Par contre, la soustraction est une lci sur $\mathbb{R}$ mais pas sur $\mathbb{N}$ où elle n'est plus interne (la différence de deux entiers naturels peut ne plus être un entier naturel). La division est une lci sur $\mathbb{R}^*$ (on ne peutpas diviser par 0). Le produit vectoriel est une lci sur l'ensemble des vecteurs de l'espace, mais pas le produit scalaire (le résultat n'étant plus un vecteur mais un réel). On peut évidemment multiplier les exemples puisqu'aucune condition n'est imposée pour l'instant sur notre lci.

Définition 145. Un ensemble E muni d'une lci $\star$ est appelé un **magma**. On le note $(E, \star)$.

Définition 146. Soit $(E, \star)$ un magma. La lci $\star$ est **associative** si $\forall (x, y, z) \in E^3$, $x \star (y \star z) = (x \star y) \star z$. La loi est **commutative** si $\forall (x, y) \in E^2$, $x \star y = y \star x$.

Exemples : La opération de somme ou de produit sont associatives et commutatives sur tous les ensembles sur lesquels on a pu les étudier jusqu'à présent (mais ce ne sera pas le cas du produit matriciel, par exemple). Par contre, une opération aussi élémentaire que la soustraction sur $\mathbb{R}$ n'est ni associative ni commutative. La composition de fonction est un bon exemple de lci associative mais pas commutative.

Définition 147. Soit $(E, \star)$ un magma. Un **élément neutre** pour la loi $\star$ dans E est un élément $e \in E$ tel que $\forall x \in E$, $x \star e = e \star x = x$.

Proposition 171. S'il existe un élément neutre pour une lci, alors il est unique.

Démonstration. Supposons donc qu'il y ait deux éléments neutres dans un même magma, que nous noterons e et e'. Alors, par neutralité de e, $e \star e' = e'$. Mais par neutralité de e', ce même $e \star e'$ doit être égal à e. Cela impose $e = e'$ et l'unicité du neutre. □

Exemples : L'addition sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$ admet 0 pour élément neutre. L'addition sur l'ensemble des fonctions réelles admet pour élément neutre la fonction constante égale à 0, qu'on se permettra de noter 0 par abus de notation. La multiplication admet pour élément neutre 1 (ou la fonction constante égale à 1). La composition sur l'ensemble des fonctions réelles admet pour élément neutre l'application identité. La multiplication définie sur $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant 6\}$ est une lci mais n'admet pas d'élément neutre. Le produit vectoriel sur l'ensemble des vecteurs de l'espace n'admet pas d'élément neutre.

Définition 148. Soit $(E, \star)$ un magma dans lequel $\star$ admet un élément neutre e. Un élément $x \in E$ est **symétrisable** s'il existe $y \in E$ tel que $x \star y = y \star x = e$. L'élément y est appelé **symétrique** de x et noté x^{-1}

Remarque 132. On parlera plutôt d'inverse dans le cas où l'opération $\star$ est une multiplication. On parlera d'opposé lorsque l'opération est une addition, et on notera dans ce cas le symétrique $-x$ plutôt que x^{-1}.

Proposition 172. Si x est un élément symétrisable, alors x^{-1} aussi, et $(x^{-1})^{-1} = x$. Dans le cas où la lci $\star$ est associative, le symétrique d'un élément x, s'il existe, est unique. Si x et y sont deux éléments symétrisables, alors $x \star y$ l'est aussi, et $(x \star y)^{-1} = y^{-1} \star x^{-1}$.

Démonstration. La première propriété est évidente au vu de la définition de la symétrisabilité. Pour la deuxième, supposons qu'il y ait deux symétriques y et z à un même élément x, alors d'une part $y \star (x \star z) = y \star e = y$, et d'autre part $(y \star x) \star z = e \star z = z$, ce qui prouve que $y = z$. Enfin, la dernière propriété se prouve en constatant que $(y^{-1} \star x^{-1}) \star (x \star y) = y^{-1} \star (x^{-1} \star x) \star y = y^{-1} \star e \star y = y^{-1} \star y = e$, et de même pour l'opération en sens inverse. □

Remarque 133. L'élément neutre est toujours symétrisable, il est son propre symétrique. Lorsqu'un élément est symétrisable, on peut simplifier sans problème par cet élément. Par exemple $x \star y = x \star z$ implique $y = z$ si x est symétrisable. En effet, dans ce cas, on peut multiplier les deux membre de l'égalité à gauche par x^{-1}.

Exemples :
- Dans $\mathbb{R}$, tout élément est symétrisable pour l'addition, mais il faut se placer dans $\mathbb{R}^*$ pour que ce soit le cas du produit.
- Si on considère l'addition dans $\mathbb{N}$, seul l'élément neutre 0 est symétrisable.
- Dans $\mathbb{Z}$ muni de la multiplication, les seuls éléments symétrisables sont -1 et 1.
- Dans l'ensemble des fonctions muni de la composition, les éléments symétrisables sont les fonctions bijectives (et l'inverse est alors la réciproque, ce qui justifie la notation usuelle de la réciproque).
- Si on considère l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des sous-ensembles d'un ensemble E, l'opération d'union est une lci sur E. Elle admet pour élément neutre l'ensemble vide, mais seul le neutre est symétrisable.

10.1.2 Groupes et sous-groupes

Définition 149. Un ensemble G muni d'une loi de composition interne $\star$ est un **groupe** si :
- la loi $\star$ est associative.
- elle admet un élément neutre.
- tout élément de G est symétrisable.

On note alors le groupe $(G, \star)$ (comme un magma, même si les conditions sont nettement plus strictes). Dans le cas où la lci est de plus commutative (ce qui n'est pas imposé), le groupe est dit **commutatif** ou **abélien**.

Exemples :
- $(\mathbb{R}, +)$ ou $(\mathbb{Z}, +)$ sont des groupes mais pas $(\mathbb{N}, +)$.
- $(\mathbb{R}^*, \times)$ ou $(\mathbb{C}^*, \times)$ sont des groupes.
- L'ensemble des applications bijectives de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ muni de la composition est un groupe non commutatif.
- Si E est un ensemble quelconque, $(\mathcal{P}(E), \Delta)$ est un groupe (où Δ désigne la différence symétrique vue en exercice dans un chapitre précédent).

Définition 150. Soit $(G, \star)$ un groupe, et H un sous-ensemble de G, H est un **sous-groupe** de G si $(H, \star_{|H})$ est un groupe.

Proposition 173. Si $H \subset G$, où $(G, \star)$ est un groupe, alors est un sous-groupe de G si et seulement si $e \in H$ et $\forall (x, y) \in H^2$, $x \star y^{-1} \in H$.

Démonstration. Si H est un sous-groupe de G, il vérifie certainement les deux propriétés citées. En effet, il doit contenir un élément neutre pour la lci $\star$, qui ne peut être autre que l'élément neutre e du groupe G. De plus, si $y \in H$, y doit admettre un symétrique dans H, donc $y^{-1} \in H$, et $\star$ étant une lci dans H, $x \star y^{-1}$ appartient également à H. La réciproque est un peu plus intéressante. La lci $\star$ étant associative sur G, elle le sera nécessairement sur H. De plus, il s'agit vraiment d'une lci sur H, car en prenant $x = e$ dans la deuxième condition, on aura, pour tout élément y de H, $y^{-1} \in H$, et on peut alors remplacer y^{-1} par $(y^{-1})^{-1}$ dans cette même condition pour obtenir $x \star y \in H$. On a montré en passant que tous les éléments de H étaient symétrisables dans H, toutes les conditions sont réunies pour que H soit un groupe. □

Remarque 134. La deuxième condition est en fait un condensé de deux conditions naturelles : le sous-ensemble H doit être **stable** par la loi $\star$ (le produit de deux éléments de H reste dans H) et par passage à l'inverse. Il est nettement plus facile en pratique de prouver qu'un ensemble est un sous-groupe d'un groupe que de montrer qu'il s'agit d'un groupe, car on évite la partie habituellement la plus technique de la preuve : la démonstration de l'associativité de la loi.

Exemples : $(\mathbb{Z},+)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$. Plus intéressant, $(\mathbb{U},\times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*,\times)$.

Proposition 174. Soient H_1 et H_2 deux sous-groupes d'un même groupe $(G,\star)$, alors $H_1 \cap H_2$ est également un sous-groupe de G.

Démonstration. C'est quasiment immédiat : si l'élément neutre appartient à H_1 et à H_2, il appartient âussi à $H_1 \cap H_2$, et de même pour $x \star y^{-1}$ si on suppose que x et y appartiennent tous les deux aux deux sous-groupes. □

Remarque 135. Attention, l'union de deux sous-groupes n'a en général aucune raison d'être un sous-groupe, la deuxième condition n'étant pas nécessairement vérifiée. Si on prend x dans H_1 et y dans H_2, $x\star y^{-1}$ ne sera en général ni dans H_1 ni dans H_2. Ainsi, $(\mathbb{R},+)$ et $(i\mathbb{R},+)$ sont deux sous-groupes de $(\mathbb{C},+)$, mais leu union n'est pas du tout un sous-groupe car elle n'est pas stable par somme.

Définition 151. Le **sous-groupe engendré** par un sous-ensemble de G est le plus petit sous-groupe de G contenant ce sous-ensemble.

Remarque 136. On considère souvent le sous-groupe engendré par un nombre fini x_1, x_2, …, x_n d'éléments de G.

Théorème 38. Sous-groupes de $\mathbb{Z}$.
Tous les sous-groupes de $(\mathbb{Z},+)$ sont de la forme $a\mathbb{Z} = \{k \in \mathbb{Z} \mid \exists b \in \mathbb{Z}, k = a \times b$, avec $a \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. Soit G un sous-groupe de $\mathbb{Z}$, G contient nécessairement l'élément neutre 0. S'il ne contient aucun autre élément, il est donc égal à $0\mathbb{Z}$, ce n'est pas le cas le plus intéressant. Supposons donc qu'il y ait un élément non nul dans G. Comme G est stable par passage à l'opposé, on peut toujours supposer cet élément strictement positif. L'ensemble de tous les éléments strictement positifs de G étant non vide, il admet un plus petit élément que nous noterons a. On prouve facilement par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $na \in G$: $0 \in G$ et si $na \in G$, $na + a \in G$ car G est stable par somme. L'ensemble G contient aussi les multiples négatifs de a puisqu'il est stable par passage à l'opposé. On en conclut que $a\mathbb{Z} \subset G$. Prouvons la réciproque par l'absurde, ce qui utilisera un peu d'arithmétique que nous reverrons un peu plus loin dans ce cours. Supposons donc que G contienne un élément x qui ne soit pas un multiple de a. Par division euclidienne de x par a, on peut écrire $x = aq + r$, avec $0 < r < a$ (r ne peut pas être nul car x n'est pas multiple de a). Or, $x \in G$ et $aq \in G$, donc $r = x - aq \in G$, ce qui contredit la minimalité de a comme élément strictement positif de G. C'est absurde, on a donc $G = a\mathbb{Z}$. □

Remarque 137. On peut facilement déterminer l'intersection de deux tels sous-groupes, quitte à anticiper un peu sur l'arithmétique. En effet, on constate que $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = c\mathbb{Z}$, où c est le pgcd des entiers a et b.

10.1.3 Morphismes de groupes

Définition 152. Soit $(G,\star)$ et $(H,*)$ deux groupes. Une application $f : G \to H$ est un **morphisme de groupes** si $\forall (x,y) \in G^2$, $f(x\star y) = f(x) * f(y)$. On parle d'**isomorphisme de groupes** si f est de plus bijective. Un morphisme de $(G,\star)$ vers lui-même est appelé **endomoprhisme de groupes**, et on parlera d'**automorphisme** pour un endomorphisme bijectif.

Exemples : La multiplication par 3 dans $(\mathbb{Z},+)$ ($f : n \mapsto 3n$) est un morphisme de groupes, mais pas un aotomorphisme. Vous connaissez déjà des morphismes de groupes nettement moins évidents : le logarithme népérien est un isomorphisme de groupes de $(\mathbb{R}^{+*},\times)$ vers $(\mathbb{R},+)$ (et l'exponentielle en est un dans l'autre sens).

Proposition 175. Soit f un morphisme de groupes de $(G,\star)$ vers $(H,*)$, alors $f(e) = e'$, où on a noté e et e' les éléments neutres respectifs de G et H ; et $\forall x \in G$, $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$.

Démonstration. En utilisant la définition d'un morphisme de groupes, on a $f(e\star e) = f(e)*f(e)$. Mais comme $e\star e = e$, on trouve $f(e) = f(e)*f(e)$, ce qui en simplifiant par $f(e)$ dans H donne $e' = f(e)$. On peut ensuite appliquer la définition d'un morphisme à x et x^{-1} : $f(x\star x^{-1}) = f(x)*f(x^{-1})$, soit $f(e) = e' = f(x)*f(x^{-1})$ (et de même $f(x^{-1})*f(x) = e'$), ce qui prouve que $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$. □

Remarque 138. On retrouve ici les propriétés classique de l'exponentielle et du logarithme : $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ et $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)$.

Proposition 176. La composition de deux morphismes de groupes est un morphismes de groupes. Si on note $Aut(G)$ l'ensemble des automorphismes d'un groupe G, $(Aut(G), \circ)$ est lui-même un groupe.

Démonstration. La première partie de la proposition est évidente, il suffit de l'écrire. L'ensemble $Aut(G)$ est alors stable par composition (puisqu'on sait qu'une composée de deux bijections est une bijection). Il admet certainement un élément neutre : l'application identité de G dans lui-même est un automorphisme. On sait que l'opération de composition est associative. Reste à prouver l'existence d'un inverse pour tout automorphisme, à savoir ici d'une réciproque. La réciproque d'une application bijective est certainement bien définie et bijective, reste à prouver que c'est un morphisme de groupe. En effet, si f est un automorphisme de $(G, \star)$ dans lui-même, on aura $f(x\star y) = f(x)\star f(y)$ pour tout couple d'éléments (x, y) de G. Appliquons cette formule à $f^{-1}(x)$ et $f^{-1}(y)$, on trouve alors $f(f^{-1}(x)\star f^{-1}(y)) = f(f^{-1}(x))\star f(f^{-1}(y))$, soit $f(f^{-1}(x)\star f^{-1}(y)) = x\star y$. L'application f étant bijective, on peut écrire $f^{-1}(x)\star f^{-1}(y) = f^{-1}(x\star y)$, ce qui prouve que f^{-1} est bien un morphisme de groupes. □

Définition 153. Avec les notations précédentes, si f est un morphisme de groupes, on appelle **noyau de** f l'ensemble noté $\ker(f) = \{x \in G \mid f(x) = e'\}$. On appelle **image de** f, et on note $\mathrm{Im}(f)$, l'image de G par le morphisme f, soit $\mathrm{Im}(f) = \{y \in H \mid \exists x \in G, f(x) = y\}$.

Proposition 177. Si f est un morphisme de groupes de $(G, \star)$ vers $(H, *)$, son noyau est un sous-groupe de G, et son image un sous-groupe de H.

Démonstration. Le noyau contient toujours e comme on l'a vu plus haut. De plus, si x et y appartiennent au noyau, alors $f(x\star y^{-1}) = f(x)*f(y)^{-1} = e'*(e')^{-1} = e'$, donc $x\star y^{-1} \in \ker(f)$. Le noyau est bien un sous-groupe de G. Pour l'image, c'est également élémentaire : e' appartient à $\mathrm{Im}(f)$ puisqu'il est l'image de e, et si z et w sont les images respectives de x et de y, alors $z*w^{-1} = f(x\star y^{-1})$ d'après les propriétés des morphismes de groupes. L'image est donc également un sous-groupe (mais de H cette fois-ci). □

Proposition 178. Un morphisme de groupes f est injectif si et seulement si $\ker(f) = \{e\}$. Un morphisme de groupes est surjectif si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = H$.

Démonstration. La deuxième propriété est évidente, c'est même la définition de la surjectivité. La première est plus intéressante. On sait déjà que le noyau de f contient toujours e puisque $f(e) = e'$ pour un morphisme. Si on suppose de plus f injectif, e' ne peut avoir plus d'un antécédent par f. Puisqu'il en a déjà un, il est unique et $\ker(f) = \{e\}$. Supposons désormais le contraire, à savoir que $\ker(f) = \{e\}$, et montrons que f est injectif. Pour cela, considérons deux éléments x et y tels que $f(x) = f(y)$. On a donc, en utilisant les notations habituelles, $f(x)*f(y)^{-1} = e'$, soit, puisque f est un morphisme $f(x\star y^{-1}) = e'$. Autrement dit, $x\star y^{-1} \in \ker(f)$, ce qui induit $x\star y^{-1} = e$. Mais cela ne peut se produire que si $y^{-1} = x^{-1}$, soit $x = y$. On a bien prouvé l'injectivité du morphisme f. □

Exemples : La multiplication par 3, définie de $(\mathbb{Z}, +)$ dans lui-même, est un morphisme injectif (seul 0 a une image nulle), mais pas surjectif. Plus précisément, son image est le sous-groupe $3\mathbb{Z}$. Le module est un morphisme de groupes de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers $(\mathbb{R}^{+*}, \times)$, dont le noyau est l'ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1. Il est par ailleurs surjectif.

10.2 Anneaux et arithmétique dans $\mathbb{Z}$

10.2.1 Anneaux et corps

Définition 154. Soit E un ensemble muni de deux lois de composition internes $\star$ et $*$. La loi $\star$ est **distributive** par rapport à la loi $*$ si $\forall (x,y,z) \in E^3$, $x \star (y * z) = (x \star y) * (x \star z)$, et $(y * z) \star x = (y \star x) * (z \star x)$.

Définition 155. Un ensemble A muni de deux lci $+$ et $\times$ est un **anneau** si :
- $(A, +)$ est un groupe commutatif.
- il existe un élément neutre pour la loi $\times$.
- la loi $\times$ est associative et distributive par rapport à la loi $+$.

Un anneau est noté $(A, +, \times)$, et ses éléments neutres sont notés 0 (pour la loi $+$) et 1 (pour la loi $\times$). Si la loi $\times$ est commutative, on dit que A est un **anneau commutatif**.

Exemples : L'exemple le plus classique d'anneau est $(\mathbb{Z}, +, \times)$ (on n'impose aucune condition d'inversibilité pour la loi multiplicative), mais les ensembles de suites ou de fonctions sont aussi des anneaux pour la somme et le produit usuels. Nous verrons plus tard dans l'année un exemple d'anneau non commutatif avec les matrices.

Proposition 179. Dans un anneau $(A, +, \times)$, 0 est un élément **absorbant** : $\forall x \in A$, $0 \times x = x \times 0 = 0$.

Démonstration. En effet, $(0 + 0) \times x = 0 \times x + 0 \times x$ par distributivité, ce qui implique $0 \times x = 0 \times x + 0 \times x$, soit $0 \times x = 0$. L'autre sens est identique. □

Définition 156. Un anneau $(A, +, \times)$ est **intègre** si $\forall (x, y) \in A^2$, $x \times y = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $y = 0$. Dans un anneau non intègre, les éléments x pour lesquels il existe un y non nul tel que $x \times y = 0$ sont appelés **diviseurs de zéro**.

Remarque 139. Les diviseurs de 0 sont nécessairement des éléments non inversibles de l'anneau. Difficile de donner un exemple simple d'anneau non intègre pour l'instant, encore une fois les matrices fourniront un sujet d'étude intéressant de ce point de vue.

Définition 157. Dans un anneau A, on notera nx l'élément $\underbrace{x + \cdots + x}_{n \text{ fois}}$. On utilisera également la notation Σ pour les sommes dans les anneaux. De même, si l'anneau est commutatif, on se servira des notations x^n et Π. Les puissances entières vérifient alors toutes les propriétés usuelles des puissances.

Proposition 180. Soit x un élément différent de 1 dans un anneau commutatif A, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$.

Démonstration. La démonstration est rigoureusement la même que celle de la somme géométrique de réels. □

Théorème 39. Formule du binôme de Newton dans un anneau.
Soit $(A, +, \times)$ un anneau et $(x, y) \in A^2$ vérifiant $xy = yx$ (on dit que x et y **commutent**), alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $(x + y)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$. Sous la même hypothèse de commutation, on a également $\forall n \in \mathbb{N}$, $x^n - y^n = (x - y) \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k} = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2} y + \cdots + x y^{n-2} + y^{n-1})$.

Démonstration. Nous n'allons sûrement pas redémontrer la formule du binôme de Newton, une fois suffit. La deuxième formule ne nécessite absolument pas de récurrence, simplement la constatation du fait que $(x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} x^{k+1} y^{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} x^k y^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-k} = x^n - y^n$ avec un petit décalage d'indice en cours de calcul, et un superbe télescopage pour finir. □

Définition 158. Si $(A, +, \times)$ est un anneau, un sous-ensemble $B \subset A$ est un **sous-anneau** de A si $(B, +_{|A}, \times_{|A})$ est un anneau.

Proposition 181. B est un sous-anneau de A si et seulement si $(B, +)$ est un sous-groupe de $(A, +)$, B est stable par la loi $\times$, et B contient l'élément 1.

Démonstration. Comme dans le cas des groupes, le sens direct est essentiellement évident. La réciproque est ici très facile également puisque B vérifiera effectivement tous les axiomes nécessaires pour être un anneau si c'est un sous-groupe, qu'il contient un neutre pour le produit et qu'il est stable par multiplication. □

Exemples : L'anneau $(\mathbb{Z}, +, \times)$ n'a aucun autre sous-anneau que $\mathbb{Z}$ lui-même. En effet, le seul sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ contenant 1 est $\mathbb{Z}$. Par contre, $\mathbb{Z}$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$.

Définition 159. Soit $(A, +, \times)$ et $(B, \bigoplus, \bigotimes)$ deux anneaux. Une application $f : A \to B$ est un **morphisme d'anneaux** si :

- $\forall (x, y) \in A^2$, $f(x+y) = f(x) \bigoplus f(y)$
- $\forall (x, y) \in A^2$, $f(x \times y) = f(x) \bigotimes f(y)$
- $f(1) = 1$

Remarque 140. Contrairement au cas des morphismes de groupes, la condition sur l'image du neutre multiplicatif n'est pas automatiquement vérifiée pour un morphisme d'anneaux. On utilisera pas ailleurs le même vocabulaire (endomorphisme, isomorphisme, etc.) que pour les groupes.

Exemple : La conjugaison est un morphisme d'anneaux de $(\mathbb{C}, +, \times)$ vers $(\mathbb{R}, +, \times)$. C'est même un automorphisme de corps, comme on va le voir.

Définition 160. Un anneau $(K, +, \times)$ est un **corps** si $(K^*, \times)$ est un groupe. Autrement dit, tout élément non nul de K est inversible pour le produit.

Remarque 141. Un corps est toujours un anneau intègre.

Définition 161. On définit de façon totalement similaire aux anneaux les notions de sous-corops et de morphisme de corps.

Exemples : $(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un sous-corps de $(\mathbb{R}, +, \times)$, qui est lui-même un sous-corps de $(\mathbb{C}, +, \times)$.

10.2.2 Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

L'arithmétique est en général l'étude des propriétés des anneaux, mais dans ce paragraphe, nous nous contenterons de considérerer l'anneau le plus simple qui soit, celui des entiers relatifs. Nous verrons dans la dernière partie du cours consacrée aux polynômes que beaucoup des propriétés de $\mathbb{Z}$ s'étendent aux polynômes.

Définition 162. Soient n et p deux entiers relatifs, n est **divisible par** p (ou p divise n) s'il existe un troisième entier k tel que $n = kp$.

Remarque 142. La relation de divisibilité est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$ mais pas sur $\mathbb{Z}^*$, où elle n'est pas pas antisymétrique. En effet, deux entiers relatifs qui se divisent l'un l'autre sont soit égaux soit opposés.

Théorème 40. Division euclidienne.
Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}^*$, alors il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $n = pq + r$, et $0 \leqslant r < p$. L'entier q est appelé **quotient** de la division euclidienne de n par p, et l'entier r **reste** de cette même division.

Exemple : Pour effectuer en pratique une division euclidienne, on peut revenir à ses classiques du primaire en posant la division (et en s'arrêtant avant d'obtenir un quotient décimal). Ainsi, on aura par exemple $207 = 14 \times 14 + 11$.

Démonstration. Commençons par prouver l'existence du couple (q, r), en supposant $n > 0$ (sinon, ce n'est pas beaucoup plus compliqué). Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe certainement un entier a à partir duquel $ap > n$, notons donc $q = \max\{a \in \mathbb{N} \mid ap \leqslant n\}$, et $r = n - pq$. Par définition, $pq \leqslant n$, donc $r \geqslant 0$. De plus, par maximalité de q, on doit avoir $(q + 1)p > n$, soit $pq + p - n > 0$, ou encore $p > n - pq = r$. Enfin, par définition de r, $n = pq + r$, l'existence du couple est donc prouvée.
Démontrons désormais l'unicité en supposant comme d'habitude qu'il y a deux couples convenables (q, r) et (q', r'). On a alors $pq + r = pq' + r' = n$, donc $p(q - q') = r' - r$. En particulier $r' - r$ divise p, alors que $-p < r' - r < p$. Ce n'est possible que si $r' - r = 0$, soit $r' = r$, ce qui implique $p(q' - q) = 0$, donc $q = q'$. Les deux couples sont alors identiques. □

Définition 163. Soit n et p deux entiers naturels non nuls. Le **plus grand commun diviseur** (ou pgcd) de n et p est, comme son nom l'indique, le plus grand entier divisant simultanément n et p. On le note parfois $n \wedge p$. Le **plus petit commun multiple** (ou ppcm) est le plus petit entier naturel que divisent n et p.

Définition 164. Un entier naturel n est **premier** s'il n'est divisible que par 1 et par lui-même. Deux entiers n et p sont premiers entre eux si leu pgcd est égal à 1.

Remarque 143. Par convention, le nombre 1 n'est pas considéré comme un nombre premier.

Théorème 41. Théorème de Bezout.
Deux entiers n et p sont premiers entre eux si et seulement s'il existe un couple d'entiers $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $an + bp = 1$. Plus généralement, il existe toujours un couple d'entiers relatifs tels que $an + bp = n \wedge p$.

Démonstration. Ce théorème étant à la lisière du programme, on ne démontrera que la deuxième partie. Les deux entiers n et p engendrent dans $\mathbb{Z}$ les sous-groupes $n\mathbb{Z}$ et $p\mathbb{Z}$. Le sous-groupe G engendré par n et p est quant à lui composé de tous les entiers de la forme $an + bp$, pour a et b parcourant $\mathbb{Z}$ (en effet, un sous-groupe contenant n et p contient nécessairement tout ces éléments puisqu'il eststable par somme, et cet ensemble est bien un sous-groupe de $\mathbb{Z}$). Or, c'est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$, donc il est de la forme $k\mathbb{Z}$. Comme $n \in G$ et $p \in G$, les deux entiers n et p sont divisibles par k, qui divise donc nécessairement le pgcd de n et p. Autrement dit, $n \wedge p \in G$, ce qui prouve l'existence de deux entiers tels que $an + bp = n \wedge p$. □

Théorème 42. Il existe une infinité de nombres premiers.

Démonstration. On va un tout petit peu anticiper sur le dernier résultat du paragraphe. Faisons un raisonnement par l'absurde : il existerait donc une liste finie p_1, p_2, …, p_k de nombres premiers. Notons alors $p = \prod_{i=1}^{k} p_i + 1$. Cet entier n'est sûrement pas divisible par p_1 (puisque l'entier qui le précède l'est et que $p_1 \geqslant 2$), ni par aucun des p_i. Soit il est lui-même premier (mais distinct des autres, ce qui est absurde), soit il est divisible par un entier premier (c'est là qu'on utilise la décomposition), qui n'est lui-même aucun des p_i. Dans tous les cas, on aboutit à une contradiction. □

Théorème 43. Décomposition en facteurs premiers.
Tout nombre entier $n \geqslant 2$ peut se décomposer de façon unique à l'ordre des facteurs près sous la forme $n = \prod_{i=1}^{i=k} p_i^{\alpha_i} = p_1^{\alpha_1} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k}$, où p_1, p_2, …, p_k sont des nombres premiers, et $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in (\mathbb{N}^*)^k$.

Démonstration. La démonstration de ce théorème n'est pas au programme, on va s'en dispenser. On peut la faire par récurrence, mais c'est un peu technique. □

10.3 Polynômes

Dans toute cette dernière partie, $\mathbb{K}$ désigne un corps qui peut être le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels ou le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

10.3.1 L'anneau $\mathbb{K}[X]$

Définition 165. Un **polynôme à coefficients dans** $\mathbb{K}$ est un objet mathématique formel s'écrivant $P = \sum_{k=0}^{k=n} a_k X_k$, où $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, et X est une indéterminée destinée à être remplacée par n'importe quel objet pour lequel le calcul de P peut avoir un sens (donc en gros des éléments qu'on sait élever à une certaine puissance et multiplier par des éléments de $\mathbb{K}$).

Définition 166. On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble de tous les polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Proposition 182. Muni de la somme (si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{p} b_k X^k$, alors $P+Q = \sum_{k=0}^{\max(p,n)} (a_k + b_k) X^k$) et du produit ($PQ = \sum_{k=0}^{p+n} (\sum_{i=0}^{i=k} a_i b_{k-i}) X^k$) usuels sur les polynômes, l'ensemble $\mathbb{K}[X]$ est un anneau commutatif.

Démonstration. La démonstration est un peu pénible si on définit les polynômes en dehors de tout contexte, puisqu'on doit tout prouver, y compris l'associativité des opérations. Il est nettement plus commode d'identifier $\mathbb{K}[X]$ à l'ensemble des **fonctions polynômiales** de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$, qui constitue un sous-anneau de l'ensemble de toutes les fonctions (ce qui pour le coup est facile à prouver). Notons tout de même que l'élément neutre pour l'addition est le polynôme nul, noté 0, et l'élément neutre pour le produit le polynôme constant 1. □

Définition 167. Soit $P = \sum_{k=0}^{k=n} a_k X^k$ un polynôme, avec $a_n \neq 0$. Les nombres a_k sont appelés **coefficients** du polynôme P, l'entier n **degré** de P (souvent noté $d^\circ(P)$), le coefficient correspondant a_n est le **coefficient dominant** de P. Si ce coefficient est égal à 1, on dit que P est un polynôme **unitaire**.

Remarque 144. Par convention, le polynôme nul a pour degré $-\infty$. C'est relativement cohérent avec les propriétés énoncées ci-dessous.

Proposition 183. Soient P et Q deux polynômes, alors $d^\circ(P+Q) \leqslant \max(d^\circ(P), d^\circ(Q))$, et $d^\circ(PQ) = d^\circ(P) + d^\circ(Q)$.

Démonstration. Cela découle immédiatement des définitions données des deux opérations. L'inagalité peut être stricte pour le degré de la somme, dans le cas où P et Q sont de même degré mais ont un coefficient dominant opposé. Par contre, c'est toujours une égalité pour le produit, le coefficient dominant du produit étant le produit des coefficients dominants de P et Q. □

Remarque 145. L'anneau $\mathbb{K}[X]$ est un anneau intègre. Ses seuls éléments inversibles sont les polynômes constants (non nuls). Ces deux remarques découlent de la propriété sur le degré d'un produit de polynômes.

Définition 168. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Remarque 146. Ces ensembles $K_n[X]$ sont stables par somme (contrairement à l'ensemble des polynômes de degré exactement n), ce qui est une des conditions pour en faire des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}[X]$.

Définition 169. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et Q deux polynômes, le **polynôme composé** de P et Q est le polynôme $P \circ Q = \sum_{k=0}^{n} a_k Q^k$.

Exemple : Si $P = X^2 + 1$ et $Q = 2X + 3$, alors $P \circ Q = (2X+3)^2 + 1 = 4X^2 + 12X + 10$, alors que $Q \circ P = 2(X^2+1) + 3 = 2X^2 + 5$.

Proposition 184. Si P et Q sont deux polynômes, $d^\circ(P \circ Q) = d^\circ(P) \times d^\circ(Q)$.

Démonstration. En effet, $P \circ Q = \sum_{k=0}^{n} a_k (\sum_{i=0}^{p} b_i X^i)^k$, dont le terme dominant vaut (si on développe tout brutalement à coups de formules du binôme de Newton) $a_n b_p^n X^{in}$. □

Définition 170. Un polynôme P est **divisible** par un polynôme Q s'il existe un troisième polonôme A tel que $P = AR$.

Remarque 147. Cette relation n'est pas une relation d'ordre sur $\mathbb{K}[X]$, elle est réflexive et transitive mais pas antisymétrique. Deux polynômes qui se divisent l'un l'autre sont simplement égaux à une constante multiplicative près. Dans ce cas, on dit que les deux polynômes sont **associés**.

Théorème 44. Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$.
Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]^2$, alors il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $A = BQ + R$ et $d^\circ(R) < d^\circ(B)$. Le polynôme Q est appelé **quotient** de la division de A par B, et le polynôme R **reste** de cette même division.

Démonstration. La preuve de l'existence de la division peut se faire par récurrence sur le degré de A, le polynôme B restant fixé. L'existencce est triviale si $d^\circ(A) < d^\circ(B)$ puisqu'on peut écrire $A = 0B + A$, ce qui sert d'initialisation. Supposons désormais l'existence de la division prouvée pour tout polynôme de degré n, et choisissons A un polynôme de degré $n+1$. Notons $a_n X^{n+1}$ son terme dominant, et $b_p X^p$ celui de B, alors $C = A - \frac{a_n}{b_p} X^{n+1-p} B$ est un polynôme de degré n (en effet, on a soustrait à A un polynôme de même degré et de même coefficient dominant. Par hypothèse de récurrence, il existe donc des polynômes Q et R tels que $C = BQ + R$, avec $d^\circ(R) < d^\circ(B)$. Mais alors $A = \left(Q + \frac{a_n}{b_p} X^{n+1-p}\right) B + R$, et comme R n'a pas changé de degré, on vient d'écrire une division euclidienne de A par B.
Pour l'unicité, on suppose évidemment qu'il y a deux couples possibles : $BQ + R = BQ' + R'$, alors $B(Q - Q') = R - R'$, avec par hypothèse et règles de calculs sur le degré d'une somme $d^\circ(R - R') < d^\circ(B)$. Or, $d^\circ(B(Q - Q')) \geqslant d^\circ(B)$, sauf si $Q - Q' = 0$, soit $Q = Q'$. On en déduit que $R - R' = 0$, donc les deux couples sont égaux. □

Exemple : Pour effectuer en pratique une division euclidienne de polynômes, on procède comme pour les entiers, par exemple pour diviser $X^4 - 3X^3 + 5X^2 + X - 3$ par $X^2 - 2X + 1$:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrr|l}
 & X^4 & - & 3X^3 & + & 5X^2 & + & X & - & 3 & & X^2-2X+1 \\ \cline{12-12}
- & (X^4 & - & 2X^3 & + & X^2) & & & & & & X^2-X+2 \\
 & & - & X^3 & + & 4X^2 & + & X & - & 3 & & \\
 & & - & (-X^3 & + & 2X^2 & - & X) & & & & \\
 & & & & & 2X^2 & + & 2X & - & 3 & & \\
 & & & & - & (2X^2 & - & 4X & + & 2) & & \\
 & & & & & & & 6X & - & 5 & &
\end{array}
$$

Conclusion : $X^4 - 3X^3 + 5X^2 + X - 3 = (X^2 - X + 2)(X^2 - 2X + 1) + 6X - 5$. Cette méthode de calcul est une alternative à l'identification lorsqu'on cherche à factoriser un polynôme, par exemple après en avoir trouvé une racine évidente.

10.3.2 Factorisation de polynômes

Définition 171. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $x \in \mathbb{K}$. On dit que x est une **racine** du polynôme P si $P(x) = 0$.

Remarque 148. On identifie ici le polynôme et la fonction polynômiale associée, comme ce sera le cas dans tout ce dernier paragraphe.

Proposition 185. Un réel a est racine du polynôme P si et seulement si $X - a$ divise P.

Démonstration. C'est une conséquence de la division euclidienne. Si on effectue la division de P par $X-a$, on sait que le reste sera de degré strictement inférieur à celui de $X-a$, donc sera une constante. Autrement dit, $\exists k \in \mathbb{R}$, $P = Q(X - a) + k$. On a donc $P(a) = 0 \Leftrightarrow Q(a)(a - a) + k = 0 \Leftrightarrow k = 0$. Autrement dit, a est une racine de P lorsque le reste de la division de P par $X - a$ est nul, donc quand P est divisible par $X - a$. $\square$

Exemple : on a déjà fréquemment utilisé cette propriété pour factoriser des polynômes de degré 3 possédant une récine « évidente ». Soit par exemple $P = 2X^3 - 3X^2 + 5X - 4$. On constate que 1 est racine évidente de P : $P(1) = 2 - 3 + 5 - 4 = 0$, donc P est factorisable par $X - 1$: $P = (X - 1)(aX^2 + bX + c) = aX^3 + (b - a)X^2 + (c - b)X - c$. Par identification, on obtient $a = 2$; $b - a = -3$; $c - b = 5$ et $-c = -4$, donc $a = 2$; $b = -1$ et $c = 4$, soit $P = (X - 1)(2X^2 - X + 4)$. Ce dernier facteur ayant un discriminant négatif, P n'admet pas d'autre racine réelle que 1.

Corollaire 1. Un polynôme admet a_1, a_2, ..., a_k comme racines distinctes si et seulement si il est divisible par $\displaystyle\prod_{i=1}^{k}(X - a_i)$.

Démonstration. On peut procéder par récurrence sur le nombre de racines distinctes. L'initialisation correspond à la propriété précédente. Si on suppose qu'on polynôme P à k racines distinctes est toujours factorisable comme décrit, en ajoutant une racine a_{k+1}, on pourra commencer par écrire $P = \displaystyle\prod_{i=1}^{k}(X - a_i) \times Q$, et comme $P(a_{i+1}) = 0$, on a nécessairement $Q(a_{i+1}) = 0$ (en effet, les facteurs précédents $a_{i+1} - a_i$ ne peuvent s'annuler puisque les racines sont supposées distinctes). En appliquant à nouveau notre propriété, on peut donc écrire $Q = (X - a_{k+1})R$, ce qui donne la factorisation souhaitée pour P, et achève la récurrence. $\square$

Corollaire 2. Un polynôme de degré n admet au maximum n racines distinctes.

Démonstration. En effet, s'il en avait plus, on pourrait l'écrire sous la forme $\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1}(X - a_i) \times Q$, qui est de degré au moins $n + 1$. Il y a là une contradiction flagrante. $\square$

Corollaire 3. Un polynôme admettant une infinité de racines est nécessairement le polynôme nul.

Démonstration. En effet, par contraposée, un polynôme non nul a un certain degré n, et ne peut donc pas avoir plus de n racines. $\square$

Corollaire 4. Principe d'identification des coefficients.
Si deux polynômes P et Q correspondent à des fonctions polynômiales identiques, alors $P = Q$.

Démonstration. Dans ce cas, $P-Q$ est un polynôme admettant tous les réels (ou tous les complexes) comme racines, ce qui en fait une grosse infinité, donc $P-Q=0$. C'est bien ce principe qu'on utilise pour identifier les coefficients de deux polynômes correspondant à des expressions polynômiales égales. $\square$

Définition 172. Soit P un polynôme et a une racine de P. On dit que a est une racine **d'ordre de multiplicité** $k \in \mathbb{N}^*$ si $(X-a)^k$ divise P, mais $(X-a)^{k+1}$ ne divise pas P.

Définition 173. Soit $P = \sum_{k=0}^{k=n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. Le **polynôme dérivé de** P est le polynôme $P' = \sum_{k=1}^{k=n} k a_k X^{k-1}$. On notera également P'' le polynôme de dérivé de P', et $P^{(n)}$ le polynôme dérivé n fois du polynôme P.

Remarque 149. Cette dérivation, bien que définie de façon formelle, coïncide évidemment avec la dérivation usuelle sur les fonctions polynômiales, et de ce fait vérifie toutes les formules de dérivation usuelle. En particulier celle rappelée ci-dessous :

Proposition 186. Formule de Leibniz.
Soient P et Q deux polynômes, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$.

Démonstration. Ce résultat est formellement identique à la formule du binôme de Newton. Il se démontre par récurrence, exactement comme le binôme de Newton. Du coup, on ne le fera pas. $\square$

Proposition 187. Une racine a est d'ordre de multiplicité k pour P si et seulement si $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(k-1)}(a) = 0$ et $P^{(k)}(a) \neq 0$.

Démonstration. Une façon de prouver ce résultat est de prouver le lemme suivant : si a est racine d'ordre k de P alors a est racine d'ordre $k-1$ de P'. En effet, si $P = (X_a)^k Q$, avec $Q(a) \neq 0$ alors $P' = k(X-a)^{k-1}Q + (X-a)^k Q' = (X-a)^{k-1}(kQ + (X-a)Q')$, avec $kQ(a) + (a-a)Q'(a) = kQ(a) \neq 0$. Par une récurrence facile, une racine d'ordre k sera donc racine de tous les polynômes dérivés jusqu'au $k-1$-ème, mais pas du k-ème. $\square$

Remarque 150. La notation de dérivée pour un polynôme réel correspond à la dérivée de la fonction polynômiale associée. On peut en fait définir formellement le polynôme dérivé d'un polynôme sans passer par une interprétation en terme de fonctions. On notera également qu'on emploie souvent plus simplement le terme d'ordre ou celui de multiplicité à la place d'ordre de multiplicité.

Exemple : Considérons le polynôme $P = X^4 - 2X^3 - 19X^2 + 68X - 60$ et constatons ensemble que 2 est une racine double de P. En effet, on a $P(2) = 16 - 2\times 8 - 19\times 4 + 68\times 2 - 60 = 16 - 16 - 76 + 136 - 60 = 0$; de plus, $P' = 4X^3 - 6X^2 - 38X + 68$, donc $P'(2) = 4\times 8 - 6\times 4 - 38\times 2 + 68 = 32 - 24 - 76 + 68 = 0$. on peut en déduire, via la proposition précédente, que P est factorisable par $(X-2)^2$. Effectuons une petite division euclidienne pour obtenir cette factorisation :

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr|l}
 & X^4 & - & 2X^3 & - & 19X^2 & + & 68X & - & 60 & X^2-4X+4 \\ \cline{11-11}
- & (X^4 & - & 4X^3 & + & 4X^2) & & & & & X^2+2X-15 \\
 & & & 2X^3 & - & 23X^2 & + & 68X & - & 60 & \\
 & & - & (2X^3 & - & 8X^2 & + & 8X) & & & \\
 & & & & - & 15X^2 & + & 60X & - & 60 & \\
 & & & & - & (-15X^2 & + & 60X & - & 60) & \\
 & & & & & & & & & 0 &
\end{array}$$

On a donc $P(X) = (X-2)^2(X^2+2X-15)$. Le deuxième facteur a pour discriminant $\Delta = 4+60 = 64$, et admet deux racines réelles $x_1 = \dfrac{-2-8}{2} = -5$ et $x_2 = \dfrac{-2+8}{2} = 3$. On peut donc factoriser P sous la forme $P(X) = (X-2)^2(X-3)(X+5)$. On ne risque pas de factoriser plus puisqu'il ne reste que des facteurs de degré 1.

Remarque 151. Un polynôme de degré n ne peut admettre plus de n racines comptées avec multiplicité. Ainsi, un polynôme de degré 5 admettant une racine triple ne peut plus admettre que deux autres racines.

Définition 174. Un polynôme P est **scindé** s'il peut s'écrire comme produit de polynômes de degré 1 (autrement s'il a un nombre de racines égal à son degré). Il est **scindé à racines simples** si de plus toutes ses racines sont distinctes.

Théorème 45. Théorème de d'Alembert-Gauss.
Tout polynôme dans $\mathbb{K}[X]$ est scindé.

Démonstration. Ce résultat fondamental a déjà été croisé dans le chapître sur les nombres complexes. Nous n'avons toujours pas les moyens de le démontrer maintenant. □

Exemple : Le polynôme $X^4 - 1$ se factorise dans $\mathbb{C}[X]$ sous la forme $X^4 - 1 = (X-1)(X+1)(X-i)(X+i)$.

Théorème 46. Tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ peut se factoriser sous la forme $P = \alpha(X-a_1)\dots(X-a_k)Q_1\dots Q_p$, où α est le coefficient dominant de P, les a_i sont les racines réelles du polynôme P, et les polynômes Q_i sont des polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif.

Démonstration. Puisqu'on peut identifier $\mathbb{R}$ à un sous-corps de $\mathbb{C}$, le polynôme P peut être vu comme un élément de $\mathbb{C}[X]$ et donc s'écrire, d'après le théorème précédent, sous la forme $P = \displaystyle\prod_{j=1}^{d^\circ(P)} (X-\alpha_i)$, où les α_i sont les racines complexes de P. Parmi tous ces facteurs, on peut déjà isoler tous ceux qui correspondent à des racines réelles, qui donneront les premiers termes dans la factorisation annoncée. Reste à savoir quoi faire des racines complexes. Commençons par constater que, si z est racine complexe de P, alors $\overline{z}$ également. En effet, $P(\overline{z}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k\overline{z}^k = \sum_{k=1}^{n} \overline{a_k z^k} = \overline{P(z)}$, puisque les coefficients a_k sont réels et donc égaux à leur conjugué. Si $P(z) = 0$, on aura également $\overline{P(z)} = 0$, donc $P(\overline{z}) = 0$. De plus, la multiplicité de z sera toujours la même que celle de $\overline{z}$ puisque le raisonnement précédent peut s'appliquer à l'identique aux polynômes dérivés successifs de P. On peut donc regrouper tous les termes faisant intervenir des racines complexes sous la forme (quitte à répéter plusieurs fois chaque racine et chaque conjugué) $(X-z_1)(x-\overline{z_1})\dots(X-z_p)(X-\overline{z_p})$. Reste à constater que $(X-z_i)(X-\overline{z_i}) = X^2 - (z_i+\overline{z_i})X + z_i\overline{z_i} = X^2 - 2\operatorname{Re}(z_i) + |z_i|^2$ est un polynôme de degré 2 à coefficients réels, et à discriminant négatif puisque ses racines sont complexes. La factorisation annoncée en découle. □

Définition 175. Un polynôme P est **irréductible** s'il ne peut pas se décomposer comme produit de deux polynômes de degré strictement inférieur au sien. Autrement dit, les seuls diviseurs d'un polynôme irréductibles sont ses polynômes associés et les polynômes constants.

Remarque 152. Par convention, on décrète que les polynômes constants ne sont pas irréductibles.

Théorème 47. Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.
Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif.

Théorème 48. Tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ s'écrit comme produit de facteurs irréductibles, et ce produit est unique à l'ordre des facteurs et au remplacement de certains polynômes par des polynômes associés près.

Démonstration. Ces derniers théorèmes ne sont que des façons légèrement différentes d'énoncer la factorisation des polynômes vue un peu plus haut. L'unicité de la décomposition en produit d'irréductibles est admise. □

Proposition 188. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, et α_1, α_2, …, α_n ses racines (éventuellement répétées plusieurs fois). On a alors les relations suivantes entre les coefficients et les racines de P :

- $\sum_{k=1}^{k=n} \alpha_i = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$
- $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \alpha_i \alpha_j = \dfrac{a_{n-2}}{a_n}$
- …
- $\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leqslant n} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_p} = (-1)^p \dfrac{a_{n-p}}{a_n}$
- …
- $\prod_{k=1}^{n} \alpha_i = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n}$

Démonstration. Il suffit d'identifier la forme développée du polynôme et sa forme factorisée. On sait que $P = a_n(X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \dots (X - \alpha_n)$. Si on développe brutalement ce produit, le terme dominant sera $a_n X^n$ (heureusement !), le terme de degré $n - 1$ est obtenu dans le développement en piochant des X dans $n-1$ parenthèses et un coefficient dans la dernière, ce qui donne $a_n(-\alpha_1 X^{n-1} - \alpha_2 X^{n-1} - \cdots - \alpha_n X^{n-1})$, qu'on identifie à $a_{n-1}X^{n-1}$ pour obtenir la première formule annoncée. Les autres sont obtenues de la même façon, les termes en X^{n-p} étant obtenus en prenant au choix p racines dans p parenthèses et $n-p$ X dans les autres, ce qui donne un terme en $(-1)^p \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_p} X^{n-p}$. Le terme constant est obtenu en prenant les racines dans toutes les parenthèses, il est égal à $a_n \times (-1)^n \prod_{k=1}^{n} \alpha_i$. □

Exemple : Pour un polynôme de degré 4 ayant pour racines a, b, c et d, les formules deviennent $a+b+c+d = -\dfrac{a_3}{a_4}$; $ab+ac+ad+bc+bd+cd = \dfrac{a_2}{a_4}$; $abc+abd+acd+bcd = -\dfrac{a_1}{a_4}$ et $abcd = \dfrac{a_0}{a_4}$.

Exemple : On cherche à factoriser le polynôme $4X^3 - 4X^2 - 15X + 18$, sachant qu'un ami nous a glissé un indice : il possède une racine double. deux méthodes sont possibles pour celà.

Première méthode : Puisqu'il y a une racine double, celle-ci est également racine de P'. Or, $P' = 12X^2 - 8X - 15 = 4\left(3X^2 - 2X - \dfrac{15}{4}\right)$. Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 4 + 3 \times 15 = 49$, et admet pour racines $X_1 = \dfrac{2+7}{6} = \dfrac{3}{2}$ et $X_2 = \dfrac{2-7}{6} = -\dfrac{5}{6}$. Vérifions si X_1 est racine de P : $4 \times \dfrac{27}{8} - 4 \times \dfrac{9}{4} - \dfrac{45}{2} + 18 = \dfrac{27}{2} - \dfrac{45}{2} + 9 = 0$, donc $\dfrac{3}{2}$ est la racine double recherchée. Inutile de vérifier si $\dfrac{5}{6}$ est aussi racine double, un polynôme de degré 3 ne peut pas avoir deux racines doubles. Pour déterminer la dernière racine, on peut effectuer une division euclidienne ou plus simplement utiliser le fait que le produit des trois racines sera égal à $-\frac{18}{4}$. Comme ce produit vaut, en notant α la dernière racine, $\left(\frac{3}{2}\right) \times \alpha = \frac{9}{4}\alpha$, on en déduit que $\alpha = -2$, et $P = 4\left(X - \frac{3}{2}\right)^2 (X + 2)$.

Deuxième méthode : On utilise directement les relations coefficients-racines. En notant a la racine double et b la troisième racine de P, on aura le système $\left\{\begin{array}{lcl} 2a + b & = & 1 \\ a^2 + 2ab & = & -\frac{15}{4} \\ a^2 b & = & -\frac{9}{2} \end{array}\right.$ En substituant $b = 1 - 2a$ dans la deuxième équation, on trouve $a^2 + 2a(1 - 2a) = -\frac{15}{4}$, soit $-3a^2 + 2a + \frac{15}{4} = 0$. Tiens, comme c'est curieux, c'est la même équation que plus haut. Pour déterminer si les deux solutions trouvées sont valables, on vérifie que la troisième équation du système fonctionne avec les valeurs obtenues. Si $a = -\frac{5}{6}$, on trouive $b = 1 - 2a = \frac{8}{3}$, d'où $a^2 b = \frac{25}{36} \times \frac{8}{3} = \frac{50}{27}$, ce qui assez différent de $-\frac{9}{2}$. Par contre, si $a = \frac{3}{2}$, $b = 1 - 2a = -2$, et $a^2 b = \frac{9}{4} \times (-2) = -\frac{9}{2}$, là ça marche. La conclusion est la même que ci-dessus.

Chapitre 11

Continuité

Un prof de maths explique à une blonde comment montrer que $\lim_{x \to 8} \frac{1}{x-8} = \infty$.
La blonde assure avoir parfaitement compris.
Pour vérifier, le prof lui demande ce que vaut $\lim_{x \to 5} \frac{1}{x-5}$.
Et la blonde répond, très fière d'elle : $\lim_{x \to 5} \frac{1}{x-5} = \rotatebox{90}{5}$.

Une fois qu'on a passé les bornes, il n'y a plus de limite.

Alphonse Allais.

Introduction

Un petit chapitre de transition entre deux chapîtres d'algèbre pour reprendre de façon rigoureuse la notion de limite et de continuité sur les fonctions réelles. Pour les limites, ce sera très simple si vous avez bien assimilé le chapître correspondant sur les suites. Quant à la continuité, ce n'est finalement qu'une question de limite (notion locale) qu'on étend sur un intervalle (notion globale). Elle mène toutefois à quelques théorèmes d'analyse fondamentaux que nous aborderons en fin de chapître, donc le fameux théorème des valeurs intermédiaires que vous connaissez déjà bien mais que vous appliquez en général fort mal.

Objectifs du chapitre :

- savoir calculer des limites efficacement, et notamment bien saisir la notion d'équivalent sur les fonctions et les pièges qui lui sont associés.
- comprendre la différence entre théorème des valeurs intermédiaires et théorème de la bijection, et reconnaître les situations permettant d'utiliser chacun d'eux.

11.1 Limites

Remarque 153. Comme nous avons déjà abordé dans le tout premier chapître de l'année le vocabulaire classique sur les fonction réelles, nous ne reviendrons pas dessus dans ce chapître. Ajoutons toutefois la notation $\sup_{x \in I} f$ qui désigne la borne supérieur de l'ensemble $\{f(x) \mid x \in I\}$. On définit bien sûr de même $\inf_{x \in I} f$.

Définition 176. Une fonction f définie sur un intervalle de la forme $[a;+\infty[$ **admet pour limite** $l \in \mathbb{R}$ **en** $+\infty$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_0 \in \mathbb{R}$, $\forall x \geqslant x_0$, $|f(x)-l| < \varepsilon$. On définit de même une limite finie quand x tend vers $-\infty$ en reamplaçant simplement la condition $\forall x \geqslant x_0$ par $\forall x \leqslant x_0$ (et on suppose f définie sur un intervalle de la forme $]-\infty;a]$). On le note respectivement $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$.

Remarque 154. Cette définition étant strictement identique à celle qu'on a vue dans le cadre des suites, nous allons rapidement passer à la suivante. Notons qu'elle est même plus facile à manier que dans le cas des suites puisqu'on n'a pas besoin de s'embêter à prendre des parties entières pour la valeur de x_0 si on veut l'appliquer à un calcul de limite pratique.

Définition 177. Une fonction f définie sur un intervalle de la forme $[a;+\infty[$ **admet pour limite** $+\infty$ **(respectivement** $-\infty$**) en** $+\infty$ si $\forall M \in \mathbb{R}$, $\exists x_0 \in \mathbb{R}$, $\forall x \geqslant x_0$, $f(x) \geqslant M$ (resp. $f(x) \leqslant M$). On le note $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (restp. $-\infty$), et on définit bien sûr de façon similaire des limites infinies en $-\infty$.

Là encore, rien de nouveau sous le soleil.

Définition 178. Une fonction f définie sur un intervalle contenant le réel a (mais pas nécessairement définie en a) **admet pour limite** $l \in \mathbb{R}$ **quand** x **tend vers** a si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$, $\forall x \in]a-\eta;a+\eta[\backslash\{a\}$, $|f(x)-l| < \varepsilon$. On note alors $\lim_{x \to a} f(x) = l$.

Remarque 155. Cette définition est au fond assez naturelle : on est aussi proche que souhaité de l quitte à se mettre suffisamment près de a au départ.

Exemple : Montrons à l'aide de cette définition que $\lim_{x \to 1} x^2 = 1$. Fixons donc (comme on le faisait pour les suites) un $\varepsilon > 0$, on souhaite vérifier la condition $|x^2-1| < \varepsilon$, soit $|x-1| \times |x+1| < \varepsilon$. Quitte à imposer $\eta \leqslant \dfrac{1}{2}$ (on chercher simplement une valeur convenable de toute façon), $\dfrac{1}{2} \leqslant |x+1| \leqslant \dfrac{3}{2}$, donc il faut avoir $|x+1| \leqslant \dfrac{2\varepsilon}{3}$. La constante $\eta = \min\left(\dfrac{2\varepsilon}{3};\dfrac{1}{2}\right)$ convient donc.

Définition 179. Une fonction f définie sur un intervalle contenant le réel a **admet pour limite** $+\infty$ **(resp.** $-\infty$**) quand** x **tend vers** a si $\forall M \in \mathbb{R}$, $\exists \eta > 0$, $\forall x \in]a-\eta;a+\eta[\backslash\{a\}$, $f(x) \geqslant M$ (resp. $f(x) \leqslant M$). On note alors $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$.

Remarque 156. Dans les deux dernières définitions, on a exclu la valeur a de l'intervalle où l'inégalité doit être vérifiée, ce qui est absolument nécessaire si on veut une définition raisonnable de la limite. En effet, sinon, aucune fonction ne pourrait avoir de limite infinie en 0 (par exemple) car la valeur de $f(0)$ empêcherait la définition de fonctionner.

Proposition 189. La limite d'une fonction f (que ce soit en a ou en $\pm\infty$), lorsqu'elle existe, est unique.

Démonstration. C'est exactement la même preuve que dans le cas des suites. □

Définition 180. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, un **voisinage** de a est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant a (ou dans le cas où a est infini, un intervalle de la forme $]b;+\infty[$ ou $]-\infty;c[$).

Remarque 157. La notion de voisinage, même si elle peut paraître extrêmement rudimentaire, permet d'unifier toutes les différentes définitions de la limite qu'on a données depuis le début du chapître. En effet, que a et l soient finis ou infinis, on pourra toujours traduire $\lim_{x \to a} f(x) = l$ de la façon suivante : pour tout voisinage V de l, il existe un voisinage W de a tel que $f(W) \subset V$ (je vous laisse vérifier). Elle permet aussi de donner des démonstrations simples et élégantes de la plupart des propriétés élémentaires sur les limites. On évitera toutefois un recours trop systématique à cette notion qui est à la frontière du programme.

Proposition 190. Une fonction admettant une limite finie en a est bornée au voisinage de a.

Démonstration. Comme dans le cas des suites, il suffit de prendre par exemple $\varepsilon = 1$ dans la définition pour trouver un intervalle sur lequel f est bornée. □

Définition 181. La fonction f admet pour limite **à gauche** quand x tend vers a un nombre l (éventuellement infini) si on remplace dans la définition de la limite la condition $x \in]a-\eta; a+\eta[$ par la condition $x \in]a-\eta; a[$. On définit de même une notion de limite **à droite** en remplaçant la condition par $x \in]a; a+\eta[$. On le note respectivement $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l$.

Remarque 158. Clairement, f admet pour limite l en a si et seulement si $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l$.

Exemple : La fonction partie entière admet en chaque entier naturel des limites à gauche et à droite qui sont distinctes. Ainsi, $\lim\limits_{x\to 2^+} Ent(x) = 2$, mais $\lim\limits_{x\to 2^-} Ent(x) = 1$.

Théorème 49. Toutes les propriétés vues dans le chapître sur les suites concernant les opérations et les limites, ainsi que les inégalités et les limites, restent valables sur les fonctions, que ce soit en $\pm\infty$ ou en $a \in \mathbb{R}$. Nous ne reviendrons pas dessus, pas plus que nous ne referons de démonstrations concernant les limites de fonctions usuelles vues en début d'année.

Proposition 191. Soient f et g deux fonctions telles que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x) = l$, alors $\lim\limits_{x\to a} g \circ f(x) = l$ (tous les réels ayant le droit d'être infinis).

Remarque 159. Ce résultat reste vrai quand on compose une fonction et une suite : si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = l$.

Démonstration. C'est la seule démonstration que je ferai à l'aide de voisinages pour ne pas avoir à distinguer plein de cas. Soit donc V un voisinage de l. Puisque $\lim\limits_{x\to b} g(x) = l$, il existe un voisinage W de b tel que $g(W) \subset V$. De même, il existe un voisinage U de a tel que $f(U) \subset W$. On en déduit que $g \circ f(U) \subset g(W) \subset V$, donc on a trouvé un voisinage convenable de a, et $\lim\limits_{x\to a} g \circ f(x) = l$. □

Proposition 192. Caractérisation séquentielle de la limite.
Une fonction f admet pour limite l quand x tend vers a si et seulement si, pour toute suite (u_n) telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = l$.

Démonstration. Le sens réciproque est évident, c'est la composition d'une limite de suite et de fonction qu'on vient de voir. Pour l'autre sens, on va en fait démontrer la réciproque : supposons que f n'admet pas pour limite l lorsque x tend vers a. Pour simplifier, on prendra des valeurs finies pour a et l même si la caractérisation reste vraie avec des limites infinies. Si on prend la négation de la définition de la limite, $\exists \varepsilon > 0$, $\forall \eta > 0$, $\exists x \in]a-\eta; a+\eta[$, $|f(x) - l| \geqslant \varepsilon$. Fixons donc un tel ε, et prenons comme valeurs de η les nombres $\dfrac{1}{n}$. Il existe donc, quel que soit l'entier n, (au moins) un réel que l'on va noter x_n dans l'intervalle $\left]a - \dfrac{1}{n}; a + \dfrac{1}{n}\right[$, pour lequel $|f(x) - l| \geqslant \varepsilon$. Par construction, la suite (x_n) converge vers a (puisque $a - \dfrac{1}{n} < x_n < a + \dfrac{1}{n}$, c'est une application du théorème des gendarmes), et pourtant $f(x_n)$ ne peut pas converger vers l puisque cette suite est oujours à une distance de l plus grande qu'un $\varepsilon > 0$ fixé. Ceci démontre la contraposée du sens direct du théorème, et donc le théorème lui-même. □

Remarque 160. Cette caractérisation peut surtout être utile pour prouver qu'une fonction n'admet pas de limite à un endroit donné. Pour celà, il suffit en effet de trouver par exemple deux suites convergeant vers la valeur en question, mais pour lesquelles les images par f n'ont pas la même limite. Prenons par exemple $f(x) = \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$, dont on veur étudier le comportement en 0. Posons d'abord $u_n = \dfrac{1}{2n\pi}$, la suite (u_n) converge vers 0 et $f(u_n) = \cos(2n\pi) = 1$ est une suite constante convergeant vers 1. Considérons désormais $v_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$, la suite (v_n) tend également vers 0, mais cette fois-ci $f(v_n) = -1$. La fonction f ne peut donc pas admettre de limite en 0.

Théorème 50. Théorème de la limite monotone.
Toute fonction monotone définie sur un intervalle I admet en tout point de I une limite à gauche (sauf pour la borne inférieure de I, et en tout point de I une limite à droite (sauf pour la borne supérieure de I). Ces limites peuvent être infinies. Si on note $I =]a; b[$, dans le cas où la fonction est croissante, on aura toujours $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = \sup_{x \in]a;c[} f$, et $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = \inf_{x \in]c;b[} f$ (si f est décroissante, on inverse le rôle des bornes inférieure et supérieure).

Démonstration. La démonstration est à peu près identique à celle effectuée dans le cas des suites, si ce n'est qu'on a en plus le cas des limites infinies à traiter. Supposons donc f croissante et notons c un point de l'intervalle, et $l = \sup_{x<c} f$. Si $l = +\infty$, cela signifie que l'ensemble $\{f(x) \mid x \leqslant c\}$ n'est pas majoré. Autrement dit, quel que soit le réel M, il existe un $x_M \leqslant c$ tel que $f(x_m) > M$. Par croissance de f, on aura alors $f(x) > M$ sur tout l'intervalle $[x_M; c[$, et on en déduit que $\lim\limits_{x \to c} f(x) = +\infty$. Si au contraire l est fini, choisisson un $\varepsilon > 0$. Par caractérisation de la borne supérieure, il existe un $x_0 \leqslant c$ tel que $l - \varepsilon < f(x_0) \leqslant l$. En notant $\eta = c - x_0$ et en utilisant la croissance de f, on obtient que $l - \varepsilon < f(x) \leqslant l$ sur tout l'intervalle $[c - \eta; c[$, ce qui correspond exactement à la définition de la limite. Les autres cas (fonction décroissante, limite à droite) se traitent exactement de la même façon. On peut même ne rien faire du tout en constatant que, si f est décroissante, $-f$ est croissante, ce qui ramène au cas précédent ; et que, pour la limite à droite on peut considérer la fonction $x \mapsto f(-x)$ qui renverse l'ordre et tranforme donc la limite à droite en limite à gauche. □

Définition 182. Une fonction f définie sur un intervalle I est **continue en** $a \in I$ si $\lim\limits_{x \in a} f(x) = f(a)$. La fonction f est **continue à gauche** en a si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$, et **continue à droite** en a si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$. Elle est continue en a si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en a.

Exemple : La fonction partie entière (notre exemple préféré quand il s'agit de continuité) est continue à droite en tout réel, mais elle n'est pas continue à gauche en x (et donc pas continue du tout) lorsque $x \in \mathbb{Z}$.

Définition 183. Une fonction f est **continue sur un intervalle** I si elle est continue en tout point de I.

Théorème 51. Tous les résultats classiques sur les opérations et les limites permettent de prouver facilement qu'une somme, un produit, un quotient, une composée de fonctions continues est une fonction continue. Par ailleurs, toutes les fonctions usuelles (sauf la partie entière) sont continues sur tous les intervalles où elles sont définies. ces résultats seront souvent désignés par le terme générique de théorèmes généraux, et utilisés sans rentrer dans le détail dans les exercices (on se concentrera sur les études de continuité aux endroits où il y a vraiment un calcul à faire ou une réflexion à mener).

Proposition 193. Soit f une fonction définie sur $I \backslash \{a\}$ admettant une limite finie l quand x tend vers a, alors on peut prolonger f de manière unique en une fonction continue sur I en posant $f(a) = l$ (on garde habituellement la même notation pour la fonction prolongée, même si c'est un abus de notation). On parle de **prolongement par continuité** de f en a.

Exemple : La fonction $f : x \mapsto x \ln x$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ mais prolongeable par continuité à $\mathbb{R}_+$ en posant $f(0) = 0$, puisque $\lim\limits_{x \to 0} x \ln(x) = 0$ (croissance comparée).

Définition 184. Soit I un intervalle et k un réel strictement positif. Une fonction f est **k-Lipschitzienne** sur I si, $\forall (x, y) \in I^2$, $|f(y) - f(x)| \leqslant k|y - x|$. La fonction f est **Lipschitzienne** si elle est k-Lipschitzienne pour un certain réel k. Une fonction k-Lipschitzienne pour une valeur de k strictement inférieure à 1 est dite **contractante**.

Proposition 194. La somme de deux fonctions Lipschitziennes est Lipschitzienne. La composée de deux fonctions Lipschitzienne est Lipschitzienne. Si f est Lipschitzienne sur I et sur J, avec $I \cap J \neq \emptyset$, alors f est Lipschitzienne sur $I \cup J$.

Remarque 161. Attention, le produit de deux fonctions Lipschitziennes n'est par contre en général pas Lipschitzien.

Démonstration.

- Supposons donc f et g Lipschitziennes (avec des coefficients respectifs k et k' non nécessairement égaux) sur un même intervalle I. On peut alors utiliser l'inégalité triangulaire pour affirmer que $|(f+g)(y)-(f+g)(x)| \leqslant |f(y)-f(x)|+|g(y)-g(x)| \leqslant k|y-x|+k'|y-x| \leqslant (k+k')|y-x|$. La fonction $f+g$ est donc $(k+k')$-Lipschitzienne sur I.
- C'est encore plus simple pour la composée : si f est k-Lipschitzienne sur I et g est k'-Lipschitzienne sur $f(I)$, alors $|g(f(y)) - g(f(x))| \leqslant k'|f(y) - f(x)| \leqslant k'k|y - x|$, donc $g \circ f$ est kk'-Lipschitzienne sur I.
- Supposons donc f k-Lipschitzienne sur I et k'-Lipschitzienne sur J. Si on considère deux réels x et y appartenant tous les deux à I ou à J, on peut majorer $|f(y)-f(x)|$ par $k|y-x|$ ou $k'|y-x|$ respectivement. Prenons désormais $x \in I$ et $y \in J$, et choisissons un réel $z \in I \cap J$ tel que $x < z < y$ (un tel réel existe nécessairement, faites un dessin), alors par inégalité triangulaire $|f(y)-f(x)| \leqslant |f(y)-f(z)|+|f(z)-f(x)| \leqslant k|y-z|+k'|z-x| \leqslant \max(k,k')(|y-z|+|z-x|) \leqslant \max(k,k')|y-x|$. La fonction f est donc $\max(k,k')$-Lipschitzienne sur $I \cup J$.

□

Proposition 195. Une fonction Lipschitzienne sur un intervalle I est continue sur I.

Démonstration. C'est une conséquence du théorème des gendarmes : $0 \leqslant |f(x) - f(a)| \leqslant k|x-a|$. Si on suppose que x tend vers a, les deux extrêmes ont pour limite 0, donc $\lim\limits_{x \to a} |f(x) - f(a)| = 0$, soit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. □

11.2 Comparaison de fonctions

Attention, dans cette partie, nous allons atteindre des sommets inégalités de paresse de la part de votre professeur de maths préféré c'est très simple, pour tout ce qui est négligeabilité et équivalents, les fonctions, c'est comme les suites, reportez-vous donc à la partie correspondante du chapître sur les suites ! Bon, tout de même une remarque importante : quanf on travaille avec des fonctions, il est absolument indispensable de bien préciser vers quoi x va tendre pour qu'un équivalent ou une négligeabilité soit valable. Ainsi, on peut écrire $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ (équivalent classique vu dans le chapître sur les suites, mais par contre $\ln(1+x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x)$ (ce qui n'est pas une conséquence directe des résultats du cours puisqu'on ne peut toujours pas composer des équivalents, mais ça se démontre facilement). Pour le reste, les définitions et propriétés sont identiques (y compris bien sûr les résultats essentiels de croissance comparée, de toute façon déjà énoncés dans le chapître sur les fonctions usuelles). Pour ne pas avoir un paragraphe complètement vide, je vais ajouter un petit équivalent à la liste des équivalents classiques :

Proposition 196. $(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$.

Démonstration. Posons $f(x) = (1+x)^\alpha$, alors $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$. Le taux d'accroissement de la fonction en 0 vaut $\dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$ et tend vers $f'(0) = \alpha$, donc $(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$. □

Bon, allez, pour remplir encore un peu, une fois n'est pas coutume, un petit exercice glissé au milieu du cours :
Exercice : Calculer les limites suivantes :

1. $\lim \dfrac{x^2+|x|}{x^2-|x|}$ en -1, 1, 0, $+\infty$, $-\infty$
2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin(x)-\cos(x)}{x-\frac{\pi}{4}}$
3. $\lim \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x^2+x+3}-\sqrt{2x+5}}$ en 2 et en $+\infty$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$
5. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\ln(x^2)}{x^3-1}$

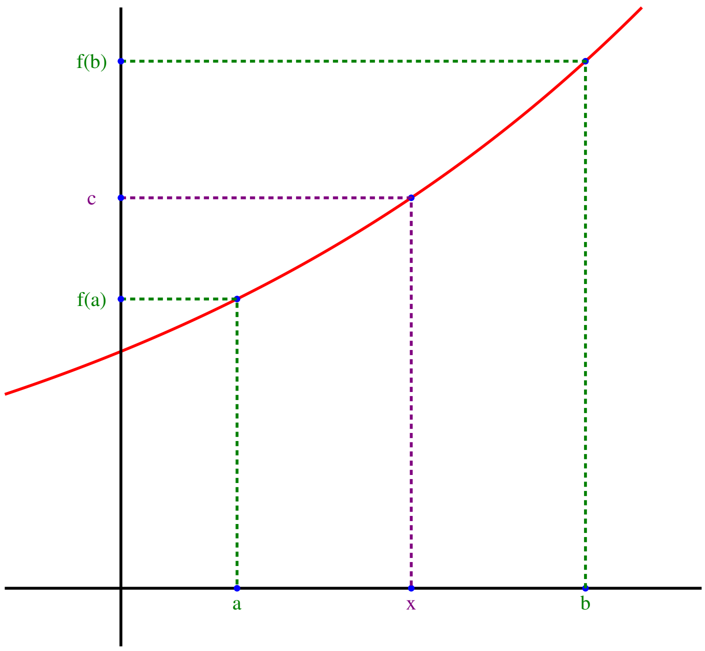
Corrigé :

1. Posons $f(x)=\dfrac{x^2+|x|}{x^2-|x|}$. Une façon simple d'écrire les choses est de dire que, si $x\geqslant 0$, $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x^2-x}$, et si $x\leqslant 0$, $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2+x}$. On en déduit facilement, par exemple à coups d'équivalents) que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=1$. Si $x>0$ et $x\neq 1$, $f(x)=\dfrac{x(x+1)}{x(x-1)}=\dfrac{x+1}{x-1}$, donc $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-1$. De même, $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x-1}{x+1}=-1$, donc finalement $\lim\limits_{x\to0} f(x)=-1$. Enfin, des calculs directs donnent $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=+\infty$. on pouvait aussi constater que la fonction f était paire pour éviter une partie des calculs.
2. On reconnait le taux d'accroissement de la fonction sinus en $\dfrac{\pi}{4}$, la limite vaut donc $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
3. Bien sûr, numérateur et dénominateur tendent vers 0 quand x tend vers 2. N'oublions pas nos classiques et multiplions par la quantité conjuguée : $\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x^2+x+3}-\sqrt{2x+5}}=\dfrac{x+2-4}{\sqrt{x+2}+2}\times\dfrac{\sqrt{x^2+x+3}+\sqrt{2x+5}}{x^2+x+3-(2x+5)}=\dfrac{(x-2)(\sqrt{x^2+x+3}+\sqrt{2x+5})}{(\sqrt{x+2}+2)(x^2-x-2)}$. On constate facilement que $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$ (on sait que ça s'annule en 2 et l'autre racin est évidente), par ailleurs les sommes de racines ont une limite finie, on peut les remplacer par des équivalents, donc $\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x^2+x+3}-\sqrt{2x+5}}\underset{2}{\sim}\dfrac{6(x-2)}{4(x+1)(x-2)}\sim\dfrac{3}{2(x+1)}\sim\dfrac{3}{4}$. La limite recherchée vaut donc $\dfrac{3}{4}$.
   En $+\infty$, inutile de s'embêter autant, on peut prendre des équivalents dans les racines carrées, en faisant quand même attention à ne pas additionner des équivalents : $\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x^2+x+3}-\sqrt{2x+5}}\underset{+\infty}{=}\dfrac{\sqrt{x}+o(\sqrt{x})}{x+o(x)-\sqrt{2x}+o(\sqrt{x})}\sim\dfrac{\sqrt{x}}{x}\sim\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, qui a bien entendu pour limite 0 en $+\infty$.
4. Un classique : $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, on peut écrire $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\sim\dfrac{1}{x}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=1$, puis $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e^1=e$.
5. Un peu plus rigolo : $\dfrac{\ln(x^2)}{x^3-1}=\dfrac{2\ln(x)}{(x-1)(x^2+x+1)}$. Il suffit alors de se rappeler que $\ln(X)\underset{1}{\sim}X-1$ (c'est le classique $\ln(1+x)\underset{0}{\sim}x$ en posant $X=1+x$) pour obtenir $\dfrac{\ln(x^2)}{x^3-1}\underset{1}{\sim}\dfrac{2}{x^2+x+1}$, qui a donc pour limite $\dfrac{2}{3}$.

11.3 Propriétés globales

Cette dernière partie sera simplement consacrée à un alignement de gros théorèmes fondamentaux pour la compréhension de la notion de continuité, à commencer par le plus célèbre d'entre eux :

Théorème 52. Théorème des valeurs intermédiaires.
Soit f une fonction continue sur le segment $[a;b]$ et c un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe un réel $x \in [a;b]$ tel que $f(x) = c$.



Remarque 162. Quoi que veuillent bien en dire des générations d'élèves, le théorème des valeurs intermédiaires ne garantit pas le moins du monde l'unicité du réel x, c'est un simple théorème d'existence. Si on doit prouver qu'une équation du type $f(x) = c$ admet une solution unique sur un intervalle, ce n'est donc pas lui qu'il faut invoquer, mais son cousin le théorème de la bijection (que nous allons revoir plus bas).

Démonstration. Considérons pour simplifier que $f(a) \leqslant f(b)$, et notons $E = \{x \in [a;b] \mid f(x) \leqslant c\}$. L'ensemble E est majoré par b, et non vide puisqu'il contient a (par hypothèse, $f(a) \leqslant c \leqslant f(b)$), il a donc une borne supérieure que nous allons noter avec beaucoup d'à propos x. En effet, on va prouver que $f(x) = c$ (ce qui prouvera le théorème !). Commençons par appliquer la caractérisation de la borne supérieure : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists y \in [x - \varepsilon; x]$, $y \in E$. En prenant par exemple $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$, on peut trouver un y_n dans $\left[x - \dfrac{1}{n}; x\right]$ tel que $f(y_n) \leqslant c$. La fonction étant continue, on peut passer à la limite pour obtenir $f(x) \leqslant c$ (par construction, la suite (y_n) converge vers x). De l'autre côté, c'est encore plus simple : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f\left(x + \dfrac{1}{n}\right) > 0$ (sinon x ne serait pas un majorant de E), on peut à nouveau passer à la limite pour obtenir cette fois $f(x) \geqslant c$. Conclusion : on a bien $f(x) = c$. Pour être tout à fait rigoureux, il y a de petites difficultés si $x = a$ ou $x = b$, aue nous esquiverons pour nous concentrer sur les idées principales de la preuve. □

Corollaire 5. L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Exemple : Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ et à valeurs dans $[0;1]$, alors f admet forcément un point fixe. En effet, si on pose $fg(x) = f(x) - x$, la fonction g est certainement continue, $g(0) =$

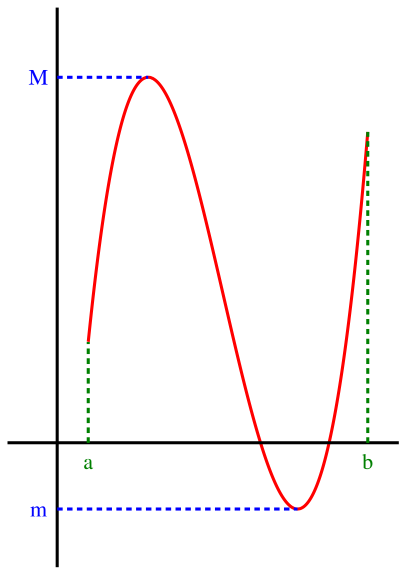
$f(0) \geqslant 0$, et $g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$ puisque $f(1) \leqslant 1$. Le réel 0 est donc compris entre $g(0)$ et $g(1)$, on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour affirmer l'existence d'un réel x tel que $g(x) = 0$, c'est-à-dire $f(x) = x$. Ce résultat garantit l'existence d'un point fixe sur tout intervalle stable (les valeurs 0 et 1 sont accessoires) d'une fonction continue.

Démonstration. En effet, un intervalle est simplement un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui contient tous les réels contenus entre deux de ses éléments. Le théorème des valeurs intermédiaires assure exactement celà pour l'image d'un intervalle par une fonction continue. □

Remarque 163. La nature (ouvert, fermé, borné) de l'intervalle image n'est pas toujours la même que celle de l'intervalle de départ. Par exemple, si $f(x) = x^2$, $f([-2;1[) = [0;4]$. Si f est la fonction inverse, $f([1;+\infty[) =]0;1]$.

Remarque 164. Rappelons que le théorème des valeurs intermédiaires est un outil fondamental pour la mise en place de la méthode de dichotomie vue dans le chapître sur les suites.

Théorème 53. Théorème du maximum.
L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.



Remarque 165. Autrement dit, une fonction continue sur un segment atteint son minimum et son maximum. Ce résultat ressemble énormément au précédent, et pourtant il est plus profond, et ne se démontre pas uniquement à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires. D'ailleurs, je ne donne la démonstration qu'à titre indicatif, puisqu'elle est hors-programme, faisant intervenir le théorème de Bolzano-Weierstraß.

Démonstration. Soit donc une fonction f définie et continue sur un segment $[a;b]$. Commençons par prouver que f est bornée sur $[a;b]$. Supposons par l'absurde qu'elle n'est par exemple pas majorée. Il existe alors, pour tout entier naturel n, un réel x_n dans l'intervalle $[a;b]$ tel que $f(x_n) \geqslant n$. La suite (x_n) étant bornée, elle admet, d'après le théorème de Bolzano-Weierstraß, une sous-suite y_n convergeant vers un réel c. Par continuité de f, on devrait donc avoir $\lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n) = f(c)$. Or, $f(x_n) \geqslant n$ implique $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = +\infty$, et de même pour la sous-suite $(f(y_n))$. C'est contradictoire, la fonction est donc nécessairement majorée. Notons alors $M = \sup_{[a;b]} f$. Par caractérisation de la borne supérieure, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in [a;b]$, $f(x) \geqslant M - \varepsilon$. En particulier, en posant $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$, on trouve un réel x_n (rien à voir avec le x_n de la première partie de la démonstration) pour lequel

$f(x_n) \geqslant M - \dfrac{1}{n}$. Comme précédemment, on peut en extraire une sous-suite convergeante (y_n) telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} f(y_n) = M$ (puisque $M - \dfrac{1}{n} \leqslant f(y_n) \leqslant M$). Si on note c la limite de (y_n), par continuité de la fonction f, on aura $f(x) = M$. Le maximum est donc bien atteint. C'est évidemment pareil pour le minimum. □

Théorème 54. Théorème de la bijection.
Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I. Alors f est bijective de I vers $J = f(I)$ et sa réciproque g est continue et strictement monotone (de même monotonie que f) sur J.

Démonstration. Supposons f croissante (l'autre cas est très similaire). On sait déjà que $f(I)$ est un intervalle, et de plus f est injective car strictement monotone, donc bijective sur son image. La fonction g est donc bien définie sur J. De plus, si y et y' sont deux éléments de J tels que $y < y'$, on a $y = f(x)$ et $y' = f(x')$, avec $x < x'$, donc $g(y) = x < x' = g(y')$ et g est strictement croissante. Enfin, soit $y \in J$, $x = g(y)$ et $\varepsilon > 0$ (et tel que $[x - \varepsilon; x + \varepsilon] \subset I$, sinon il n'y a pas de problème). Notons $y_1 = g(x - \varepsilon)$, $y_2 = f(x + \varepsilon)$. Posons $\eta = \min(y - y_1; y_2 - y)$. On a alors $[y - \eta; y + \eta] \subset [y_1; y_2]$, donc par croissance de g, $g([y - \eta; y + \eta]) \subset [x - \varepsilon; x + \varepsilon]$. Ceci prouve la continuité de g en y. □

Chapitre 12

Calcul matriciel

Le possible est une matrice formidable.

Victor Hugo

Unfortunately, no one can be told what the Matrix is.
You have to see it for yourself.

Tagline du film Matrix (traduction en exercice).

Introduction

Avant de rentrer dans le vif du sujet en algèbre linéaire (les fameux espaces vectoriels), un chapître plus orienté calcul sur un outil qui sera fondamental dans la suite du cours : les matrices. Il s'agit ici simplement d'apprendre à calculer avec les matrices, mais aussi de voir le lien entre ces nouveaux objets et quelques autres notions que vous maîtrisez déjà : les systèmes d'équations linéaires, pour lesquelles nous verrons une méthode de résolution systématique, et les déterminants que nous avons utilisés en géometrie en début d'année.

Objectifs du chapitre :

- maîtriser le calcul matriciel, calculs de puissances ou de déterminants notamment.
- comprendre le fonctionnement de l'algorithme du pivot de Gauss, et savoir l'appliquer efficacement dans le vadre de l'inversion de matrices comme dans celui de la résolution de systèmes.

12.1 Un exemple amusant

Pour introduire le concept de matrice, intéressons-nous au problème tout à fait concret suivant : dans un jeu video débile (qui a dit pléonasme ?), on peut composer des armées consituées de trois types de créatures, trolls, orcs et gobelins. Un élève de PTSI ayant trop de temps à perdre contitue lors d'une même soirée les trois armées suivantes :

	Trolls	Orcs	Gobelins
Armée 1	3	5	8
Armée 2	6	2	12
Armée 3	5	5	15

Les bêbêtes en question étant assez gourmandes, il faudra les nourrir quotidiennement d'une certaine quantité de poulet, de bananes, et de lasagnes surgelées (garantis 100% viande de cheval). La quantité de nourriture ingurgitée par chaque type de créature est donnée, en kilos par jour, dans le tableau suivant :

	Poulet	Bananes	Lasagnes
Troll	10	3	8
Orc	8	4	10
Gobelin	2	6	2

La question est fort simple : quelle quantité de chaque aliment le larbin chargé de faire les courses doit-il se procurer pour nourrir chacune des armées ? La réponse est la suivante :

	Poulet	Bananes	Lasagnes
Armée 1	86	77	90
Armée 2	100	98	92
Armée 3	120	125	120

Le remplissage du dernier tableau découle d'un calcul assez simple. Pour trouver par exemple la valeur 86 de la première case, on a multiplié deux à deux les éléments de la première ligne du premier tableau par ceux de la première colonne du deuxième tableau, et additionné le tout : $3 \times 10 + 5 \times 8 + 8 \times 2 = 86$. De même pour les autres éléments, on effectue à chaque fois le « produit » d'une ligne du premier tableau par une colonne du deuxième tableau. eh bien, ce qu'on vient de faire, c'est exactement un produit de matrices. Cette opération en apparence peu naturelle quand on la présente de façon formelle (ce qu'on ne va pas tarder à faire) est donc en réalité très concrète. elle interviendra systématiquement dès qu'on possède trois lots de données, deux tableaux exprimant la première donnée en fonction de la deuxième et la deuxième en fonction de la troisième, et qu'on cherche à exprimer directement la première donnée en fonction de la troisième.

12.2 Structure et opérations

12.2.1 Somme et produits

Définition 185. Une **matrice** à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ (comme dans le cas des polynômes, $\mathbb{K}$ désignera pour nous soit $\mathbb{R}$ soit $\mathbb{C}$; n et p sont deux entiers naturels non nuls) est un tableau rectangulaire (à n lignes et p colonnes) contenant np éléments de $\mathbb{K}$. On note un tel objet $M = (m_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ ou de façon plus complète

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & \ddots & & m_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & \dots & \dots & m_{nn} \end{pmatrix}$$

Autrement dit, m_{ij} est le terme de la matrice M se trouvant à l'intersection de la $i$ème ligne et de la $j$ème colonne.

Définition 186. L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Dans le cas où $n = p$, on dit que la matrice est **carrée** et on note plus simplement l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque 166. Dans le cas où $n = 1$, la matrice se réduit à une ligne, et on parle effectivement de matrice-ligne. De même, lorsque $p = 1$, on parlera de matrice-colonne. La notation est alors extrêmement similaire à celle utilisée pour désigner un élément de $\mathbb{K}^n$ par ses coordonnées dans une base, et on identifiera de fait souvent $\mathbb{K}^n$ à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Définition 187. Soient A et B deux matrices dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la **somme** de A et de B est la matrice $A + B = C$, où $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 3 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 7 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; $A + B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Proposition 197. $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +)$ est un groupe commutatif.

Définition 188. La **matrice nulle** $0_{n,p}$ (ou plus simplement 0 si les dimensions de la matrice sont claires dans le contexte) est la matrice à n lignes et p colonnes dont tous les coefficients sont nuls. L'**opposé** d'une matrice A pour l'opération de somme sera noté $-A$, il s'agit de la matrice obtenue en prenant les opposés de tous les termes de la matrice A.

Démonstration. Il faut bien faire attention que chaque ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ constitue un groupe, séparément les uns des autres. D'ailleurs, la matrice nulle qui contitue l'élément neutre est différente si on modifie les dimensions des matrices considérées. Toutes les propriétés sont en tout cas évidentes, elles découlent immédiatement des propriétés de la somme de réels, puisque la somme se fait terme à terme. □

Définition 189. Le **produit d'une matrice** A **par un réel** λ est la matrice, notée λA, obtenue à partir de A en multipliant chacun de ses coefficients par λ.

Proposition 198. Le produit par un réel est distributif par rapport à l'addition de matrices : $(\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B)$. On a également les propriétés suivantes : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\quad 1.A = A$ et $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\quad \lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$.

Remarque 167. Ces propriétés du produit « extérieur » (par opposition au produit intérieur, le produit par un réel n'est pas une lci), cumulées au statut de groupe commutatif, font de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ un **espace vectoriel** sur le corps $\mathbb{K}$.

Définition 190. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, alors le **produit** des deux matrices A et B est la matrice $A \times B = C \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ où $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\forall j \in \{1, \dots, q\}$, $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$.

Remarque 168. Cette définition correspond exactement à ce qu'on a vu dans notre exemple introductif : on multiplie terme à terme la i-ème ligne de A par la j-ème colonne de B et on somme le tout. Il faut faire très attention à ce que les tailles des matrices soient compatibles pour que le produit existe.

Définition 191. La **matrice identité** dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposition 199. Propriétés élémentaires du produit de matrices :

- Le produit de matrices est associatif : $(AB)C = A(BC)$.
- Le produit de matrices est distributif par rapport à l'addition : $A(B + C) = AB + AC$; $(A + B)C = AC + BC$.
- La matrice identité est un élément neutre pour le produit : $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $I_n A = A I_p = A$.

- Le produit d'une matrice par une matrice nulle (de taille compatible), à gauche comme à droite, est toujours nul.

Démonstration.

- Pour prouver l'associativité, il faut juste un peu de courage : considérons A et B ayant les dimensions indiquées dans la définition du produit, et $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, qu'on peut donc multiplier à droite par B. Si on note $D = (AB)C$, on peut alors écrire $d_{ij} = \sum_{k=1}^{q} (AB)_{ik} C_{kj} = \sum_{k=1}^{q} (\sum_{l=1}^{p} a_{il} b_{lk}) c_{kj}$. On peut écrire ceci plus simplement sous la forme $\sum_{k=1}^{q} \sum_{l=1}^{p} a_{il} b_{lk} c_{kj}$. De même, en notant $E = A(BC)$, on aura $E_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} (BC)_{kj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} (\sum l = 1^q b_{kl} c_{lj}) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{p} a_{ik} b_{kl} c_{lj}$. Les deux formules sont bien les mêmes puisque les indices dans une somme double sont muets.
- C'est un calcul assez élémentaire sur les sommes : $\sum_{k=1}^{p} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=1}^{p} a_{ik} c_{kj}$. L'autre calcul est essentiellement identique.
- Pour cette propriété, on notera juste I et pas I_n par souci de lisibilité. Soit m_{ij} le terme d'indice i, j de la matrice produit IA. On a par définition $m_{ij} = \sum_{k=1}^{n} I_{ik} A_{kj}$. Mais le seul terme non nul parmi les I_{ik} est I_{ii}, qui vaut 1. On a donc bien $m_{ij} = A_{ij}$. Pour le produit à droite par I_p, la démonstration est essentiellement la même.
- Laissée en exercice !

$\square$

Remarque 169. L'ensemble $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est donc un anneau (non commutatif). Attention aux pièges suivants quand on manipule le produit matriciel :

- Le produit de matrices n'est pas commutatif. En fait, l'existence du produit AB n'implique même pas celle de BA, mais même dans le cas des matrices carrées, par exemple, on a en général $AB \neq BA$. Dans le cas contraire, on dit que A et B commutent.
- Parler de division de matrice n'a en général aucun sens.
- L'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas intègre. Plus généralement, même si les matrices ne sont pas carrées, $AB = AC$ n'implique en général pas $B = C$.
- On peut écrire les systèmes d'équations linéaires à l'aide de produits de matrices, mais on reviendra là-dessus un peu plus tard.

Exemple 1 : $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; $A \times B = \begin{pmatrix} -4 & 11 \\ 6 & 27 \end{pmatrix}$

Exemple 2 : $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$; $A \times B = 0$

12.2.2 Transposition

Définition 192. La **transposée** d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice $M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, où $m_{ij} = a_{ji}$. On la note ${}^tA$. Autrement dit, les lignes de A sont les colonnes de ${}^tA$ et vice-versa.

Proposition 200. La transposition vérifie les propriétés suivantes : $\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,

- ${}^t({}^tA) = A$
- ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$
- ${}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA$

- $\forall C \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{R})$, ${}^t(AC) = {}^tC\,{}^tA$.

Démonstration. Les trois premières propriétés ne posent aucun problème, mais la dernière est nettement plus complexe. Écrivons ce que vaut le terme d'indice ij à gauche et à droite de l'égalité. Pour ${}^t(AC)$, il est égal au terme d'indice ji de AC, c'est-à-dire à $\sum_{k=1}^{p} a_{jk}c_{ki}$. À droite, on a $\sum_{k=1}^{p} ({}^tC)_{ik}({}^tA)_{kj} = \sum_{k=1}^{p} c_{ki}a_{jk}$. Les deux quantités sont bien égales. □

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$; ${}^tA = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

Définition 193. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **symétrique** si ${}^tA = A$, c'est-à-dire si $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}^2$, $a_{ij} = a_{ji}$. Elle est antisymétrique si ${}^tA = -A$.

12.2.3 Matrices carrées

Remarque 170. Puisque l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un anneau, on peut définir des puissances de matrices carrées vérifiant les propriétés usuelles de calcul des puissances entières. Attention tout de même aux pièges découlant de la non-commutativité du produit matriciel, pas exemple, on ne peut pas dire en général que $(AB)^2 = A^2B^2$, et les identités remarquables du genre $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ sont fausses.

Définition 194. Une matrice carrée est **diagonale** si seuls ses coefficients a_{ii} sont (éventuellement) non nuls (on les appelle d'ailleurs coefficients diagonaux de A), ou encore $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Une matrice carrée est **triangulaire supérieure** si seuls les termes « au-dessus » de sa diagonale sont non nuls, c'est-à-dire $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$, ou encore si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$.

On définit de même des matrices triangulaires inférieures.

Proposition 201. Le produit de deux matrices diagonales est une matrice diagonale. Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure (et de même pour les matrices triangulaires inférieures).

Démonstration. Pour les matrices diagonales, prenons deux matrices diagonales (de taille n) A et B. Le terme d'indice ij de AB vaut $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$. Parmi tous les termes intervenant dans cette somme, seul un des termes de gauche est non nul, quand $k = i$, et seul un des termes de droite est non nul, quand $k = j$. Si $i \neq j$, on n'a donc que des produits nuls, ce qui prouve bien que les seuls termes qui peuvent être non nuls pour AB sont les termes diagonaux.
C'est un peu le même principe pour les matrices triangulaires supérieures. Prenons deux telles matrices A et B et supposons $i > j$. Le terme d'indice ij de AB vaut $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} 0 \times b_{kj} + \sum_{k=i}^{n} a_{ik} \times 0 = 0$. La matrice AB est donc triangulaire supérieure. □

Remarque 171. La transposée d'une matrice triangulaire supérieure est triangulaire inférieure (et vice versa).

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A \times B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -6 \\ 0 & 18 & -15 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Remarquez au passage que les termes diagonaux de $A \times B$ sont obtenus comme le produit de ceux de A par ceux de B.

Remarque 172. On déduit aisément des remarques précédentes que les puissances d'une matrice diagonale sont simplement obtenues en prenant les puissances correspondantes de ses coefficients diagonaux.

Définition 195. Une matrice carrée A est dite **nilpotente** s'il existe un entier n tel que $A^n = 0$.

Remarque 173. Si une matrice carrée d'ordre n est nilpotente, elle vérifie nécessairement $A^n = 0$ (pour l'entier n correspondant à l'ordre de la matrice).

Théorème 55. (formule du binôme de Newton) Si A et B sont deux matrices qui commutent dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $(A+B)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} A^i B^{k-i}$.

Démonstration. La démonstration a déjà été faite dans le cadre d'un anneau quelconque. □

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On remarque que $A = I + B$, où $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ vérifie $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis $B^k = 0$ à partir de $k = 3$ (autrement dit, la matrice B est nilpotente). Les matrice I et B commutent certainement, on peut donc appliquer la formule du binôme : $A^k = (I_3 + B)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} I^i B^{k-i} = I^k + k \times I^{k-1}B + \frac{k(k-1)}{2} \times I^{k-2}B^2 = I_3 + kB + \frac{k(k-1)}{2}B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2k & 3k + 2k(k-1) \\ 0 & 1 & 2k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2k & k(2k+1) \\ 0 & 1 & 2k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exemple : Il est également fréquent de calculer les puissances successives d'une matrice par récurrence. Posons par exemple $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -4 & 9 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$, et on constate que $A^2 = -2A + 3I$. Il existe alors deux méthodes pour terminer les calculs.

Première méthode : Prouvons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists (u_k, v_k) \in \mathbb{R}^2$, $A^k = u_k A + v_k I$. C'est vrai pour $k = 2$ comme on vient de le voir, mais aussi pour $k = 1$ puisque $A = 1A + 0I$ (on pose donc $u_1 = 1$ et $v_1 = 0$) et pour $k = 0$ puisque $A^0 = 0A + 1I$ (donc $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$). Supposons le résultat vrai au rang k, on a alors $A^{k+1} = A \times A^k = A(u_k A + v_k I) = u_k A^2 + v_k A = u_k(-2A + 3I) + v_k A = (v_k - 2u_k)A + 3u_k I$. En posant $u_{k+1} = -2u_k + v_k$ et $v_{k+1} = 3u_k$, on a bien la forme demandée au rang $n + 1$, d'où l'existence des coefficients u_k et v_k.

Nous avons de plus obtenu des relations de récurrence qui permettent de faire le calcul suivant : $u_{k+2} = -2u_{k+1} + v_{k+1} = -2u_{k+1} + 3u_k$. La suite (u_k) est donc récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique est $x^2 + 2x - 3 = 0$, elle a pour discriminant $\Delta = 4 + 12 = 16$, et admet donc deux racines $r = \frac{-2-4}{2} = -3$, et $s = \frac{-2+4}{2} = 1$. On en déduit que $u_k = \alpha(-3)^k + \beta$, avec $u_0 = \alpha + \beta = 0$ et $v_0 = -3\alpha + \beta = 1$, dont on tire $\alpha = -\frac{1}{4}$ en faisant la différence des deux équations, puis $\beta = \frac{1}{4}$. On a donc $u_k = \frac{1}{4}(1 - (-3)^k)$ et $v_k = \frac{3}{4}(1 - (-3)^{k-1})$.

On peut alors écrire explicitement les coefficients de la matrice A^k (ce qui n'a pas grand intérêt en soi...).
Deuxième méthode : Une fois obtenue la relation $A^2 = -2A+3I$, on peut poser $P = X^2+2X-3$ et travailler avec des polynômes. Le polynôme P se factorise sous la forme $(X-1)(X+3)$ (il possède une racine évidente), cherchons à déterminer le reste de la division euclidienne de X^k par P. On sait que $X^k = PQ+R$, où R est un polynôme de degré 1, autrement dit de la forme a_kX+b_k. Évaluons l'égalité précédente pour chacune des deux racines du polynôme P, ce qui permet de se débarasser du terme PQ : $1^k = P(1)Q(1)+a_k+b_k$, soit $a_k+b_k = 1$; de même, $(-3)^k = -3a_k+b_k$. En soustrayant les deux équations trouvées, on trouve $a_k = \dfrac{1-(-3)^k}{4}$, puis on en déduit que $b_k = 1-a_k = \dfrac{3+(-3)^k}{4}$. Comme $X^k = P(X)Q(X)+a_kX+b_k$, on peut appliquer cette égalité à la matrice A (rien ne l'interdit) qui annule le polynôme P pour retrouver $A^k = a_kA+b_k$, avec les mêmes coefficients que par la première méthode.

Définition 196. La **trace** d'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est le nombre $\mathrm{Tr}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Proposition 202. La trace est une application linéaire : $\mathrm{Tr}(\lambda A+\mu B) = \lambda A+\mu B$.
La trace vérifie la formule $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ (quand A et B sont de même taille).

Démonstration. La première propriété est complètement évidente. La deuxième l'est un peu moins. Calculons donc $\mathrm{Tr}(AB) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(AB)_{ii}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}$. De même, $\mathrm{Tr}(BA) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}a_{ij}$. Quitte à échanger le rôle des deux variables muettes i et j, c'est bien la même chose. □

12.3 Inversion et systèmes

12.3.1 Inversion de matrices

Définition 197. Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **inversible** s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$. La matrice B est alors notée A^{-1} et on l'appelle **matrice inverse** de la matrice M. On note par ailleurs $GL_n(\mathbb{K}$ l'ensemble des matrices inversibles d'ordre n.

Remarque 174. La notion n'a pas bien sûr de sens dans le cas de matrices qui ne sont pas carrées.

Remarque 175. L'inverse d'une matrice, quand il existe, est unique. C'est une conséquence de l'étude générale de la symétrisabilité faite dans le chapître sur les structures algrébriques.

Exemple : L'inverse de la matrice I_n est bien sûr I_n elle-même. La matrice nulle n'est pas inversible.
Exemple : Cherchons à déterminer de façon très rudimentaire l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.
On cherche donc une matrice $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ telle que $AB = I$ (dans ce cas, le produit dans l'autre sens sera automatiquement égal à I, comme on pourra le vérifier facilement). On trouve donc le système $\left\{\begin{array}{ccccc} 2x & + & z & = & 1 \\ 2y & + & t & = & 0 \\ 3x & + & 2z & = & 0 \\ 3y & + & 2t & = & 1 \end{array}\right.$. La deuxième équation donne $t = -2y$, ce qui en reportant dans la dernière amène $y = -1$, et donc $t = 2$. La première équation donne $z = 1-2x$, soit en reportant dans la troisième $-x+2 = 0$, donc $x = 2$, puis $z = -3$. Finalement, la matrice A est inversible, et son inverse est $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. On va très vite essayer de trouver des méthodes de calcul d'inverse plus efficace, car je doute que vous ayez envie de calculer l'inverse d'une matrice d'ordre 5 de cette façon.

Remarque 176. Une matrice diagonale est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. On a alors, si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}^{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn}^{-1} \end{pmatrix}$. Nous verrons plus loin que cette caractérisation s'étend aux matrices triangulaires.

Proposition 203. Principales propriétés calculatoires de l'inversion de matrices.

- Si A est inversible, alors M^{-1} aussi et $(A^{-1})^{-1} = A$.
- Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ sont deux matrices inversibles, le produit AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- Si A est une matrice inversible, A^k est inversible pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, et $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$.
- Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifient $AB = I$, alors A et B sont inversibles et inverses l'une de l'autre.

Remarque 177. On peut déduire de ces propriétés que $(GL_n(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe.

Démonstration. Rien à prouver, tout a déjà été fait dans un cadre plus général sur les anneaux. □

Remarque 178. Un des principaux intérêts de travailler avec des matrices inversibles est qu'on peut simplifier un peu plus naturellement certains calculs, notammant : si M est une matrice inversible et $MA = MB$, alors $A = B$ (il suffit de multiplier l'égalité à gauche par M^{-1} pour obtenir le résultat). Autre remarque utile : si A et B sont deux matrices non nulles telles que $AB = 0$, alors aucune des deux matrices n'est inversible (sinon, par l'absurde, en multipliant à gauche par l'inverse de A ou à droite par l'inverse de B, on constaterait que l'autre matrice est nulle).

Exemple : Le calcul d'inverse de matrices être grandement simplifié si on connait un polynôme annulateur de la matrice A : soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Un petit calcul permet d'obtenir $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et de constater que $A^2 = 2I - A$, ce qu'on peut écrire $A + A^2 = 2I$, ou encore $\frac{1}{2}A(A+I) = I$. Ceci suffit à montrer que A est inversible et que son inverse est $\frac{1}{2}(A+I)$. Autrement dit, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Il est maintenant temps de donner une méthode algorithmique systématique pour déterminer l'inverse d'une matrice carrée donnée (ou constater qu'elle n'est pas inversible le cas échéant). Cet algorithme, connu sous le nom de pivot de Gauss, est un peu lourd à décrire (et à appliquer aussi) mais représente la méthode la plus raisonnable pour calculer les inverses de façon efficace. On retrouvera le même algorithme au paragraphe suivant pour la résolution de systèmes linéaires.

Définition 198. Les **opérations élémentaires** sur les lignes d'une matrice sont les suivantes :

- échange des lignes i et j, noté $L_i \leftrightarrow L_j$
- multiplication d'une ligne par une constante non nulle, noté $L_i \leftarrow aL_i$ $(a \neq 0)$
- combinaison des lignes i et j, noté $L_i \leftarrow L_i + bL_j$ $(b \in \mathbb{K})$, qui n'est rien d'autre qu'une combinaison (d'où le nom) des deux opérations précédentes.

On peut définir de même des opérations élémentaires sur les colonnes, mais nous ne nous servirons que des lignes pour le pivot de Gauss.

Proposition 204. Les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice A correspondent à un produit à gauche par une matrice (inversible) donnée par le tableau suivant :

Opération sur les lignes du système	Produit de la matrice A par :
Échange $L_i \leftrightarrow L_j$	$\begin{array}{c} \\ \\ \\ (L_i) \\ \\ \\ \\ (L_j) \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & 1 & & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & & 1 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Produit par un réel $L_i \leftarrow \alpha L_i$	$\begin{array}{c} \\ \\ \\ (L_i) \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \alpha & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Combinaison linéaire $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$	$\begin{array}{c} \\ \\ (L_i) \\ \\ (L_j) \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \cdots & \alpha & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Théorème 56. Toute matrice inversible peut être transformée par une succession d'opérations élémentaires sur ses lignes en la matrice identité I_n.

Démonstration. Nous n'allons pas prouver ce théorème fondamental, mais simplement donner une méthode algorithmique pour effetuer la transformation. notons toutefois que ce théorème donne effectivement un moyen de calculer l'inverse de la matrice A. Si on effectue une succession d'opérations correspondant à des matrices B_1 ; B_2 ; $\dots$; B_k pour obtenir finalement la matrice I_n, on aura donc $B_k B_{k-1} \dots B_1 A = I_n$, ce qui prouve que la matrice A est inversible, d'inverse $A^{-1} = B_k \dots B_1$. Il suffit donc de reprendre les mêmes opérations élémentaires (dans le même ordre) à partir de la matrice identité pour obtenir la matrice A^{-1}. □

Algorithme du pivot de Gauss : Pour inverser une matrice carrée A, on effectue successivement les opérations suivantes :

- Si besoin est, on échange la ligne L_1 avec une ligne L_i sur laquelle le coefficient a_{i1} est non nul (s'il n'y a pas de tel coefficient non nul, la matrice contient une colonne nulle et ne peut pas être inversible).

- À l'aide de combinaisons du type $L_i \leftarrow a_{11}L_i + a_{i1}L_1$, on annule tous les coefficients a_{i1}, pour $i \geqslant 2$ (on peut le faire car a_{11}, qui sera appelé pivot de l'opération, est désormais non nul).
- On reprend l'algorithme sur la sous-matrice formée des $n-1$ dernières lignes jusqu'à obtenir une matrice triangulaire supérieure.
- Si la matrice triangulaire obtenue a un coefficient diagonal nul, elle n'est pas inversible, et la matrice A non plus.
- Si tous les coefficients diagonaux sont non nuls, on annule les coefficients au-dessus de la diagonale à l'aide de pivots situés sur la diagonale, en commençant par annuler la dernière colonne (à l'aide du coefficient a_{nn}), puis l'avant-dernière (à l'aide de $a_{n-1,n-1}$) etc, de façon à ne pas faire réapparaitre de coefficients non nuls ailleurs que sur la diagonale.
- On obtient ainsi une matrice diagonale, il ne reste qu'à multiplier chaque ligne par une constante pour trouver l'identité.
- On reprend les mêmes opérations (ou on les effectue en parallèle) en partant de la matrice identité pour déterminer A^{-1}.

Nous allons calculer l'inverse de la matrice suivante en utilisant le pivot de Gauss : à gauche, les opérations sur la matrice A, à droite les mêmes opérations à partir de I pour obtenir l'inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow -L_2$$

Conclusion de ce long calcul : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Remarque 179. On peut interpréter l'inversion de matrice en termes de réciproque d'applications de $\mathbb{K}^n$ dans lui-même. Par exemple, le calcul que nous venons d'effectuer prouve que l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+2y-z; 2x+4y-z; -2x-5y+3z) \end{array}$ est bijective, de réciproque $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (7x-y+2z; -4x+y-z; -2x+y) \end{array}$. En effet, si on note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, l'application f peut se décrire plus simplement sous la forme $f(X) = AX$, et g par $g(X) = A^{-1}X$. Il est alors immédiat que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont toutes deux égales à l'identité. Nous reviendrons longuement sur ce genre de calcul quand nous verrons le lien entre applications linéaires sur un espace vectoriel et matrices.

12.3.2 Systèmes linéaires

Définition 199. Une **équation linéaire** à n inconnues x_1, x_2, ..., x_n est une équation du type $a_1x_1 + \dots a_nx_n = b$, avec $(a_1, \dots, a_n, b) \in \mathbb{K}^{n+1}$.

Définition 200. Un **système** de p équations linéaires à n inconnues est constitué de p équations du type précédent. On le note habituellement de la façon suivante :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{p1}x_1 & + & a_{p2}x_2 & + & \dots & a_{pn}x_n & = & b_p \end{array}\right.$$

Remarque 180. Autrement dit, on note a_{ij} le coefficient de l'inconnue x_j dans la i-ème équation. Cette notation fait évidemment le lien avec la notation matricielle, comme on va le préciser plus loin.

Définition 201. Une **solution** d'un système de p équations à n inconnues est un n-uplet de réels $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ vérifiant simultanément les p équations du système.

Définition 202. Un système est **incompatible** s'il n'admet aucune solution. Un système est appelé **système de Cramer** s'il admet exactement une solution.

Exemple : Le système suivant est un système incompatible :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & 3z & = & 7 \\ 2x & - & 5y & + & z & = & -4 \\ 3x & - & 3y & - & 2z & = & 1 \end{array}\right.$$

En effet, si l'on effectue la somme des deux premières lignes et que l'on soustrait la troisième, on obtient $0 = 2$, ce qui est impossible.

Définition 203. Un système linéaire est **homogène** si tous les coefficients apparaissant dans son second membre (ceux que nous avons noté b_i un peu plus haut) sont nuls. Le **système homogène associé** à un système d'équation linéaires est le système obtenu en remplaçant chaque second membre par 0.

Définition 204. La **matrice associée** au système est la matrice de ses coefficients $A = (a_{ij})$. Si on note les inconnues sous forme de matrice-colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, et le second membre également : $X = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, le système est alors simplement équivalent à l'équation matricielle $AX = B$.

Définition 205. Un système linéaire est **carré** s'il possède autant d'équations que d'inconnues, ce qui revient à dire que la matrice qui lui est associée est carrée. De même, un système est dit **triangulaire** si la matrice associée est triangulaire (généralement triangulaire supérieure).

Théorème 57. Un système linéaire carré est de Cramer si et seulement si sa matrice associée A est inversible. Dans ce cas, l'unique solution du système est donnée par $X = A^{-1}B$.

Remarque 181. Autrement dit, le fait qu'un système ait une solution unique ou non ne dépend que des coefficients de chaque équation, mais pas de son second membre.

Démonstration. Il y a un sens évident : si la matrice est inversible, il suffit de multiplier l'égalité $AX = B$ à gauche par A^{-1} pour obtenir le résultat. L'autre sens découlera de l'application de l'agorithme du pivot de Gauss pour la résolution des systèmes. □

Définition 206. Deux systèmes linéaires sont **équivalents** s'ils ont les mêmes solutions.

Définition 207. Les **opérations élémentaires** sur les lignes d'un système sont les mêmes que celle que nous avons définies sur les matrices.

Proposition 205. Les opérations élémentaires sur les lignes d'un système le transforment en système équivalent.

Algorithme du pivot de Gauss sur les systèmes : L'algorithme est rigoureusement le même que pour l'inversion des matrices, à ceci près qu'on a beaucoup moins de travail. En effet, il suffit de transformer le système en système triangulaire, et de « remonter » ensuite le système pour le résoudre.

Exemple : nous allons résoudre un système à 4 équations et 4 inconnues en suivant scrupuleusement l'algorithme décrit :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & + & y & - & 3z & + & 2t & = & 7 \\ x & - & 2y & + & z & - & t & = & -9 \\ 2x & - & 3y & - & 2z & + & t & = & -4 \\ -x & & & + & 5z & - & 3t & = & -11 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_1 - 3L_2 \\ L_3 \leftarrow 2L_1 - 3L_3 \\ L_4 \leftarrow L_1 + 3L_4 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & + & y & - & 3z & + & 2t & = & 7 \\ & & 7y & - & 6z & + & 5t & = & 34 \\ & & 11y & & & + & t & = & 26 \\ & & y & + & 12z & - & 7t & = & -26 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow 11L_2 - 7L_3 \\ L_4 \leftarrow L_2 - 7L_4 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & + & y & - & 3z & + & 2t & = & 7 \\ & & 7y & - & 6z & + & 5t & = & 34 \\ & & & & -66z & + & 48t & = & 192 \\ & & & & -90z & + & 54t & = & 216 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow 90L_3 - 66L_4 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & + & y & - & 3z & + & 2t & = & 7 \\ & & 7y & - & 6z & + & 5t & = & 34 \\ & & & & -66z & + & 48t & = & 192 \\ & & & & & & 756t & = & 3024 \end{array}\right.$$

En remontant le système, on obtient $t = 4$, puis $-66z = 192-48t = 0$, donc $z = 0$; $7y = 34+6z-5t = 14$, donc $y = 2$, et enfin $3x = 7 - y + 3z - 2t = -3$, donc $x = -1$. Le système a donc une unique solution : $\mathcal{S} = \{(-1; 2; 0; 4)\}$.

On ne peut qu'être un peu frustré d'avoir fait des calculs si compliqués pour une solution aussi simple. On peut en fait les réduire grandement en utilisant le pivot de façon plus subtile, c'est-à-dire en choisissant un bon pivot à chaque étape. Par exemple :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & + & y & - & 3z & + & 2t & = & 7 \\ x & - & 2y & + & z & - & t & = & -9 \\ 2x & - & 3y & - & 2z & + & t & = & -4 \\ -x & & & + & 5z & - & 3t & = & -11 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 2y & + & z & - & t & = & -9 \\ 3x & + & y & - & 3z & + & 2t & = & 7 \\ 2x & - & 3y & - & 2z & + & t & = & -4 \\ -x & & & + & 5z & - & 3t & = & -11 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow 3L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow 2L_1 - L_3 \\ L_4 \leftarrow L_1 + L_4 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 2y & + & z & - & t & = & -9 \\ & & -7y & + & 6z & - & 5t & = & -34 \\ & & -y & + & 4z & - & 3t & = & -14 \\ & & -2y & + & 6z & - & 4t & = & -20 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftrightarrow L_3 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{cases} x - 2y + z - t = -9 \\ -y + 4z - 3t = -14 \\ -7y + 6z - 5t = -34 & L_3 \leftarrow 7L_2 - L_3 \\ -2y + 6z - 4t = -20 & L_4 \leftarrow 2L_2 - L_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y + z - t = -9 \\ -y + 4z - 3t = -14 \\ 22z - 16t = -64 \\ 2z - 2t = -8 & L_4 \leftarrow L_3 - 11L_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y + z - t = -9 \\ -y + 4z - 3t = -14 \\ 22z - 16t = -64 \\ 6t = 24 \end{cases}$$

On retrouve bien évidemment la même solution que tout à l'heure.

12.4 Déterminants

Définition 208. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, on appelle **déterminant de M** la constante $\det(M) = ad - bc$.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, on appelle **déterminant de M** la constante $\det(M) = aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg$. On note souvent le déterminant $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$.

Remarque 182. Il s'agit d'une définition fort laide du déterminant, qui revient simplement à appliquer la règle de Sarrus. Vous verrez l'an prochain une définition nettement plus sympathique (mais qui utilise quelques connaissances sur les espaces vectoriels), qui a de plus l'avantage de se généraliser à des matrices carrées d'ordre quelconque. Notons tout de même que le déterminant de deux vecteurs du plan coïncide avec le déterminant de la matrice formée des deux matrices-colonnes identifiées aux vecteurs en question, et de même pour trois vecteurs de l'espace.

Théorème 58. Une matrice M est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

Démonstration. Nous ne pouvons évidemment faire qu'une démonstration peu satisfaisante de ce résultat fondamental. D'ailleurs, comme pour les auters résultats de cette partie du cours, nous nous contenterons de le faire pour des matrices d'ordre 2. Considérons donc $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, et étudions plusieurs cas :

- si a et c sont nuls tous les deux, la matrice n'est pas inversible, et elle a pour déterminant $0d - 0b = 0$.
- sinon, on applique le pivot de Gauss (quitte à échanger les deux lignes, ce qui ne change que le signe du déterminant et donc pas le fait qu'il soit nul ou non) : $L_2 \leftarrow cL_1 - aL_2$, pour obtenir la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & bc - ad \end{pmatrix}$. Cette matrice est inversible si et seulement si $a \neq 0$ (ce qui est déjà supposé) et $ad - bc \neq 0$, soit $\det(M) \neq 0$.

□

Proposition 206. Propriétés élémentaires du déterminant.

- $\det(0) = 0$
- $\det(I_n) = 1$
- $\det({}^tA) = \det(A)$
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$

- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- Si A est inversible, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

Démonstration. Les deux premières propriétés découlent immédiatement de la définition du déterminant. La troisième est évidente : pour passer de A à sa transposée on se contente d'échanger b et c (on ne parle que de matrices d'ordre 2 dans ces démonstrations), ce qui ne change pas la valeur du déterminant. Pour la quatrième, $\det(\lambda A) = (\lambda a)(\lambda d) - (\lambda b)(\lambda c) = \lambda^2(ad - bc)$. Pour la cinquième, en notant e, f, g et h les coefficients de B, on aura $AB = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$, donc $\det(AB) = (ae+bg)(cf+dh) - (af+bh)(ce+dg) = acef + adeh + bcfg + bdgh - acef - adfg - bceh - bdgh = adeh + bcfg - adfg - bceh$. D'un autre côté, $\det(A)\det(B) = (ad-bc)(eh-fg) = adeh - adfg - bceh + bcfg$. Les deux quantités sont bien égales. La dernière propriété découle de la précédente : si $A \times A^{-1} = I_n$, on aura $\det(A) \times \det(A^{-1}) = \det(I_n) = 1$. □

Remarque 183. Le déterminant d'une matrice diagonale est simplement le produit de ses éléments diagonaux. En fait, c'est aussi le cas pour une matrice triangulaire.

Proposition 207. Les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice ont l'effet suivant sur son déterminant :

- l'échange de deux lignes change le signe du déterminant.
- le produit d'une ligne par une constante λ multiplie le déterminant de la matrice par la même constante λ.
- une combinaison ne change pas le déterminant de la matrice.

On a exactement les mêmes propriétés pour les opérations sur les colonnes (on peut combiner les deux sans problème dans un calcul de déterminant.

Proposition 208. Développement suivant une ligne d'un déterminant.
$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} D_j$, où D_j désigne le déterminant de la matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue en supprimant de la matrice A la ligne numéro i et la colonne numéro j.

Exemple : Sur une matrice d'ordre 3, on trouvera $\det(A) = -d \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + e \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} - f \begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}$

Exemple : Pour calculer le déterminant $\begin{vmatrix} bc & ac & ab \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, où a, b et c sont trois constantes quelconques, on peut commencer par soustraire la première colonne à chacune des deux autres puis factoriser et enfin développer suivant la dernière ligne : $\begin{vmatrix} bc & ac & ab \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & (a-b)c & (a-c)b \\ a & b-a & c-a \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c) \begin{vmatrix} bc & c & b \\ a & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c) \begin{vmatrix} c & b \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(b-c)$.

Définition 209. Pour une matrice A, on appelle **mineur** d'indice (i,j) le déterminant de la matrice obtenue en supprimant dans A la ligne numéro et la colonne numéro j. On le note $\Delta_{i,j}$. On appelle **cofacteur** d'indice $(i;j)$ le nombre $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$, et **comatrice** de A la matrice constituée de tous les cofacteurs de la matrice A (qui a donc même taille que la matrice A). Elle est notée $\mathrm{com}(A)$.

Proposition 209. Pour toute matrice carrée A, on a $A^t(\mathrm{com}(A)) =^t (\mathrm{com}(A))A = (\det(A))I_n$. Conséquence : si A est inversible, $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}{}^t(\mathrm{com}(A))$.

Démonstration. On va se contenter du cas des matrices d'ordre 2 où le calcul n'est pas compliqué. Les mineurs sont constitués de déterminants de matrices à une seule ligne et une seule colonne, on obtient donc aisément $\mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$. Il ne reste plus qu'à calculer $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = (ad-bc)I_2$. □

Proposition 210. Méthode de Cramer de résolution des systèmes linéaires.
Si on considère un système de Cramer de matrice associée A, les valeurs des inconnues x_i pour l'unique solution du système sont données par les formules $x_i = \dfrac{\det(A_i)}{\det(A)}$, où A_i est la matrice obtenue en remplaçant dans la matrice A la colonne numéro i par la matrice-colonne B du second membre du système.

Démonstration. Ce résultat est très facile à prouver avec une bonne définition du déterminant, en utilisant la multilinéarité de celui-ci. Mais comme nous ne disposons que d'une définition pourrie, nous l'admettrons. □

Exemple : Considérons le système $\begin{cases} 2x - y + 3y = 9 \\ x + 3y - z = -4 \\ -x + y - z = -4 \end{cases}$.

On calcule d'abord $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times (-2) + (-2) + 3 \times 4 = 6$. Il reste ensuite trois autres déterminants à calculer (je vous épargne le détail précis des calculs) : $\det(A_1) = \begin{vmatrix} 9 & -1 & 3 \\ -4 & 3 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 6$; puis $\det(A_2) = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 3 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & -4 & -1 \end{vmatrix} = -6$ et enfin $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 9 \\ 1 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 12$. On en déduit la solution du système : $x = \dfrac{6}{6} = 1$; $y = \dfrac{-6}{6} = -1$ et $z = \dfrac{12}{6} = 2$.

Chapitre 13

Dérivation

Toute littérature dérive du péché.

Charles Baudelaire

Les constantes et e^x sont dans le métro.
Un opérateur différentiel terroriste monte dans la rame,
menaçant de dériver tout le monde.
Alors que les constantes paniquent, e^x se moque de lui :
« Vas-y, dérive, je crains rien ».
L'opérateur répond alors : « Tremble, misérable exponentielle, je suis $\dfrac{d}{dy}$ » !

Introduction

Encore un court chapître d'analyse glissé entre deux gros chapîtres d'algèbre. Comme dans le chapître sur la continuité, nous revenons ici sur des notions que vous avez déjà largement abordées au lycée, et qui plus est que nous avons également revues depuis le début de l'année dans le cadre des fonctions usuelles ou des courbes planes. Pas grand chose de nouveau donc, mais des définitions rigoureuses et un formulaire entièrement démontré, ainsi que, comme dans le cas de la continuité, une section consacrée à quelques théorèmes fondamentaux.

Objectifs du chapitre :

- ne plus hésiter une seconde avant de calculer une dérivée classique (notamment à l'aide de la formule de la dérivée d'une composée).
- maîtriser l'application de l'IAF à l'étude des suites récurrentes.

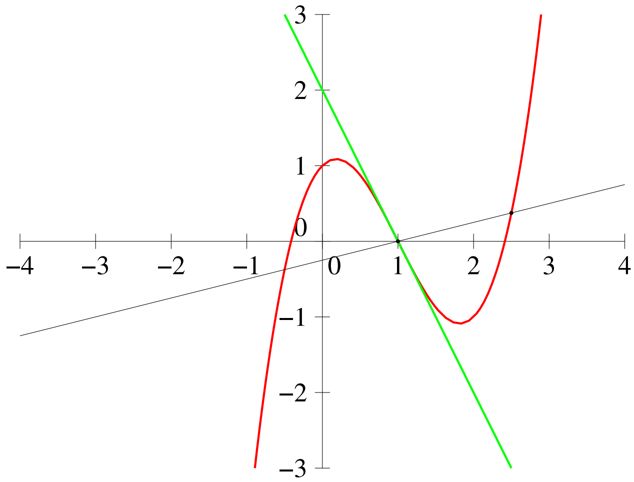
13.1 Définitions et formulaire

13.1.1 Aspect graphique

L'idée cachée derrière le calcul de dérivées, que vous utilisez déjà depuis plusieurs années pour étudier les variations de fonctions, est en gros le suivant : les seules fonctions dont le sens de variation est réellement facile à déterminer sont les fonctions affines, pour lesquelles il est simplement donné par le signe du coefficient directeur de la droite représentant la fonction affine. Pour des fonctions plus complexes, on va donc chercher à se ramener au cas d'une droite en cherchant, pour chaque point de la courbe, la droite « la plus proche » de la courbe autour de ce point. C'est ainsi qu'est née la notion de tangente, à laquelle celle de dérivée est intimement liée. Plus précisément :

Définition 210. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$, le **taux d'accroissement de f en a** est la fonction définie par $\tau_a(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Remarque 184. Le taux d'accroissement n'est pas défini en 0. Pour $h \neq 0$, $\tau_a(h)$ représente le coefficient directeur de la droite passant par les points d'abscisse a et $a+h$ de la courbe représentative de f (droite noire dans le graphique ci-dessous, où $a = 1$ et $h = 1.5$).



Définition 211. Une fonction f est **dérivable** en a si son taux d'accroissement en a admet une limite quand h tend vers 0. On appelle alors **nombre dérivé de f en a** cette limite et on la note $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Remarque 185. En reprenant l'interprétation géométrique précédente, la droite tracée se rapproche quand h tend vers 0 de la tangente à la courbe représentative de f au point de la courbe d'abscisse a. Le nombre dérivé de f en a est donc le coefficient directeur de cette tangente, tracée en vert sur le graphique.

Remarque 186. Pour des raisons pratiques, on aura parfois besoin pour certains calculs d'une définition légèrement différente du nombre dérivé : $f'(a) = \lim\limits_{b \to a} \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, qui est équivalente à la précédénte (en posant $h = b - a$, on se ramène en effet à notre première définition).

Exemples :

- Considérons $f(a) = a^2$ et calculons à l'aide de cette définition la dérivée (ou plutôt pour l'instant le nombre dérivé au point d'abscisse a) de f. Le taux d'accroissement de la fonction carré en a vaut $\tau_a(h) = \dfrac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \dfrac{a^2 + 2ha + h^2 - 1}{h} = 2a + h$. Ce taux d'accroissement a une limite égale à $2a$ quand h tend vers 0, donc f est dérivable en a et $f'(a) = 2a$ (ce qui correspond bien à la formule que vous connaissez).
- Considérons à présent $g(a) = \sqrt{a}$, le taux d'accroissement de g en a vaut $\tau_a(h) = \dfrac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} = \dfrac{(\sqrt{a+h} - \sqrt{a})(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} = \dfrac{a+h-a}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} = \dfrac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}$. Si $a \neq 0$, ce taux d'accroissement a pour limite $\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$, ce qui correspond une nouvelle fois à une formule bien connue. Par contre, $\lim\limits_{h \to 0} \tau_0(h) = +\infty$, ce qui prouve que la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0. On a tout de même une interprétation graphique intéressante dans ce cas : la courbe représentative de la fonction racine carrée admet en son point d'abscisse 0 une tangente verticale.

Définition 212. La fonction f est **dérivable à gauche** en a si son taux d'accroissement admet une limite quand h tend vers 0^-. On note alors $f'_g(a) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. De même, f est **dérivable à droite** en a si $\tau_a(h)$ admet une limite en 0^+ et on note $f'_d(a) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Remarque 187. La fonction f est dérivable en a si et seulement si elle y est dérivable à gauche et à droite et que $f'_d(a) = f'_g(a)$.

Définition 213. Dans le cas où $f'_g(a) \neq f'_d(a)$ (ou si une seule des deux limites existe) on dit que la courbe de f admet une (ou deux) **demi-tangente à droite ou à gauche**. Si $\tau_a(h)$ admet une limite infinie en 0^+ ou en 0^-, on dit que la courbe de f admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse a.

Exemple : Considérons $f(x) = |x|$ et $a = 0$. On a donc $\tau_0(h) = \frac{|h|}{h}$. Si $h > 0$, $\tau_0(h) = \frac{h}{h} = 1$, donc $f'd(0) = 1$; mais si $h < 0$, $\tau_0(h) = \frac{-h}{h} = -1$, donc $f'g(h) = -1$. La fonction valeur absolue n'est donc pas dérivable en 0, mais y admet à gauche une demi-tangente d'équation $y = -x$, et à droite une demi-tangente d'équation $y = x$ (qui sont d'ailleurs confondues avec la courbe).

Définition 214. Une fonction f est **dérivable sur un intervalle** I si elle est dérivable en tout point de I. On appelle alors **fonction dérivée** de f la fonction $f : x \mapsto f'(x)$.

Proposition 211. Soit f une fonction dérivable en a, alors l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en a est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Proposition 212. Si une fonction f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Remarque 188. La réciproque est fausse ! Par exemple la fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ mais pas dérivable en 0.

Démonstration. Si f est dérivable en a, on sait que $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$. Autrement dit, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \underset{0}{=} f'(a)+o(1)$. En multipliant tout par h, on obtient $f(a+h)-f(a) = hf'(a)+o(h)$. Comme $\lim_{h\to 0} f(a) + hf'(a) + o(h) = f(a)$, on a donc $\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$, ce qui prouve que f est continue en a. □

Définition 215. On appelle **développement limité à l'ordre** 1 de f en a l'égalité $f(a+h) \underset{0}{=} f(a) + hf'(a) + o(h)$.

Remarque 189. Cette égalité signifie simplement que, lorsque h est proche de 0, $f(a+h)$ peut être approché par $f(a) + hf'(a)$, qui n'est autre que la valeur prise par la tangente au point d'abscisse $a+h$. On parle d'ordre 1 car on approche f par une fonction qui est un polynome de degré 1. On peut généraliser cette notion en approchant la fonction f par un polynome de degré 2, 3 ou plus (mais il faut alors que f soit deux, trois fois dérivable, etc). On parle alors de développement limité à l'ordre 2, 3, nous reviendrons largement sur ce concept dans un chapître ultérieur.

13.1.2 Opérations

Proposition 213. Soient f et g deux fonctions dérivables en x. Alors $f+g$ est dérivable en x et $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Démonstration. En effet, le taux d'accroissement de $f+g$ en x vaut $\tau_x(h) = \frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$. Autrement dit, c'est la somme des taux d'accroissements de f et de g en x. Sa limite existe donc et est égale à la somme des limites de ces taux d'accroissement, c'est-à-dire que $\lim_{h\to 0} \tau_x(h) = f'(x) + g'(x)$, d'où la formule. □

Proposition 214. Soient f et g deux fonctions dérivables en x, alors fg est dérivable en x et $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

Démonstration. Calculons le taux d'accroissement de la fonction fg en x :
$\tau_x(h) = \dfrac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \dfrac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$
$g(x+h)\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} + f(x)\dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}$. Le premier terme a pour limite $g(x)f'(x)$ quand h tend vers 0 (la fonction g étant dérivable donc continue, $g(x+h)$ tend vers $g(x)$ et le reste est le taux d'accroissement de f en x), et le second a pour limite $f(x)g'(x)$ puisqu'on reconnait le taux d'accroissement de g. On obtient donc bien la formule attendue. □

Proposition 215. Soit g une fonction dérivable en x, et ne s'annulant pas en x, alors $\dfrac{1}{g}$ est dérivable en x et $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(x) = -\dfrac{g'(x)}{g(x)^2}$. Si f est une autre fonction dérivable en x, alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en x et $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$.

Démonstration. Le taux d'accroissement de $\dfrac{1}{g}$ en x vaut $\tau_a(x) = \dfrac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h}$. Il n'est défini que si $g(x+h) \neq 0$, mais on admettra que, si $g(x) \neq 0$ (c'est une des hypothèses de la proposition) et g est continue, alors g ne s'annule pas au voisinage de x. On peut alors réduire au même dénominateur : $\tau_x(h) = \dfrac{1}{g(x+h)g(x)}\dfrac{g(x) - g(x+h)}{h}$. On reconnait à droite l'opposé du taux d'accroissement de g, qui tend donc vers $-g'(a)$, et le dénominateur à gauche tend vers $g(x)^2$ car g est dérivable donc continue en a.
La deuxième formule s'obtient en appliquant simplement la formule de dérivation d'un produit à f et $\dfrac{1}{g}$: $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = f'(x) \times \dfrac{1}{g(x)} - f(x) \times \dfrac{g'(x)}{g(x)^2} = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$. □

Proposition 216. Soient f et g deux fonction dérivables respectivement en x et en $f(x)$, alors la composée $g \circ f$ est dérivable en x et $(g \circ f)'(x) = f'(x).(g'(f(x))$.

Démonstration. L'idée est de séparer le taux d'accroissement de $g \circ f$ pour faire apparaitre ceux de g et de f de la façon suivante : $\dfrac{g \circ f(y) - g \circ f(x)}{y - x} = \dfrac{g \circ f(y) - g \circ f(x)}{f(y) - f(x)} \times \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$. Le premier quotient est le taux d'accroissement de g en $f(x)$, il converge donc vers $g'(f(x))$. Le second est le taux d'accroissement de f en x, qui converge vers x. On en déduit la formule.
Il y a en fait un (gros) problème, c'est que le premier dénominateur à droite peut très bien s'annuler (quand $f(y) = f(x)$) et (contrairement à ce qui se passait pour l'inverse) cela peut se produire aussi près de x que voulu. Une autre façon (correcte, celle-ci) de prouver cette propriété est de passer par les développements limités à l'ordre 1. On sait que $f(x+h) \underset{0}{=} f(x) + hf'(x) + o(h)$, et que $g(y+k) \underset{0}{=} g(y) + kg'(y) + o(k)$. On en déduit que $g \circ f(x+h) = g(f(x) + hf'(x) + o(h))$. En prenant $y = f(x)$ et $k = hf'(x) + o(h)$ (ce qui tend bien vers 0 quand h tend vers 0), on a donc $g \circ f(x+h) = g(f(x)) + (hf'(x) + o(h))g'(f(x)) + o(hf'(x) + o(h)) = g \circ f(x) + hf'(x)g' \circ f(x) + o(h)$ (tout les termes restants sont effectivement négligeables devant h). Comme on sait par ailleurs que $g \circ f(x+h) = g \circ f(x) + h(g \circ f)'(x) + o(h)$, une simple identification donne $(g \circ f)'(x) = f'(x)g' \circ f(x)$. □

Proposition 217. Soit f une fonction dérivable et bijective sur un intervalle I, à valeurs dans J. Alors f^{-1} est dérivable en tout point $y \in J$ tel que $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$, et dans ce cas $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

Remarque 190. Les images des valeurs où la dérivée de f s'annule, qui sont donc les points où la fonction réciproque n'est pas dérivable, correspondent en fait à des endroits où la courbe de f^{-1} admet des tangentes verticales (ce qui se comprend graphiquement puisqu'une tangente horizontale pour f devient après symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$ une tangente verticale pour f^{-1}).

Démonstration. Soit $y \in J$ et $x = f^{-1}(y)$. La taux d'accroissement de f^{-1} en y est $\tau_y(h) = \dfrac{f^{-1}(y+h) - f^{-1}(y)}{h} = \dfrac{f^{-1}(y+h) - x}{h}$. La fonction f étant bijective de I sur J, $y + h$ admet un unique antécédent b sur I. On a donc $f(b) = y + h$ et par ailleurs $f(x) = y$, donc $h = (y + h) - y = f(b) - f(x)$ et $\tau_y(h) = \dfrac{b - x}{f(b) - f(x)}$. En posant $h' = b - x$, on a $\tau_y(h) = \dfrac{h'}{f(x + h') - f(x)}$, avec h' qui tend vers 0 quand h tend vers 0 car la fonction f^{-1} est continue, donc $b = f^{-1}(y + h)$ tend vers $f^{-1}(y) = x$. On reconnait donc la limite quand h tend vers 0 de l'inverse du taux d'accroissement de f en x. Si $f'(x) \neq 0$, on a donc $\lim\limits_{h \to 0} \tau_y(h) = \dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$. Si $f'(x) = 0$, la limite de $\tau_y(h)$ est infinie, on a donc une tangente verticale. □

13.1.3 Dérivées de fonctions usuelles

Nous ne reviendrons sur ce sujet déjà abordé en début d'année. Rappelons simplement qu'une bonne maîtrise de la formule de dérivation d'une réciproque permet de retrouver très rapidement les dérivées des fonctions trigonométriques et hyperboliques réciproques. Naturellement, toutes ces dérivées classiques sont à connaître sur le bout des doigts et peuvent être invoquées sans justification dans les exercices. Dernière chose à ne pas oublier : la plupart des fonction usuelles sont dérivables sur leur ensemble de définition, aux exceptions suivantes près :

- la fonction valeur absolue en 0.
- la fonction racine carrée en 0.
- les fonctions arccos et arcsin en -1 et en 1.
- la fonction Argch en 1.

À l'exception de la valeur absolue, tous les exemples cités donnent des tangentes verticales qui correspondent à des tangentes horizontales de la fonction réciproque.

13.2 Dérivées successives ; convexité

Cette partie du cours a déjà été traitée dans le chapître sur les courbes planes, nous ne reviendrons pas dessus. Elle a toutefois sa place naturelle au sein de ce chapître.

13.3 Théroème des accroissements finis et applications

Proposition 218. Soit f une fonction dérivable sur un segment $[a; b]$ et $x \in]a; b[$. Si x est un point en lequel f atteint un extremum local, alors $f'(x) = 0$.

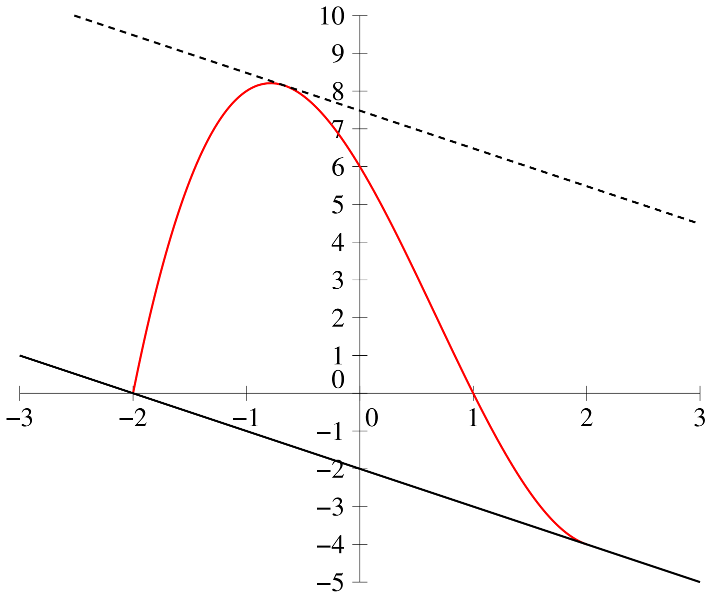
Démonstration. Supposons par exemple qu'il s'agisse d'un maximum (l'autre cas est très similaire). Le taux d'accroissement de f en x vaut $\tau_x(h) = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$. On a au voisinage de x, $f(x+h) \leqslant f(x)$ puisque $f(x)$ est un maximum local. On en déduit que $\forall h < 0$ (et tel que $x + h$ appartienne au voisinage en question), $\tau_x(h) \geqslant 0$, donc $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0^-} \tau_x(h) \geqslant 0$. Mais de même $\forall h > 0$, $\tau_x(h) \leqslant 0$, donc $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0^-} \tau_x(h) \leqslant 0$. Finalement, on a nécessairement $f'(x) = 0$. □

Théorème 59. Théorème de Rolle.
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a; b]$, et telle que $f(a) = f(b)$, alors $\exists c \in]a; b[$, $f'(c) = 0$.

Démonstration. Commençons par éliminer le cas où la fonction f est constante sur $[a;b]$ puisque dans ce cas la dérivée de f est nulle, donc le théorème est manifestement vérifié.
La fonction f étant dérivable, elle est continue sur $[a;b]$, donc y atteint un maximum M et un minimum m. Si on suppose f non constante, l'un des deux, par exemple M (dans l'autre cas, la démonstration est similaire), est distinct de $f(a) = f(b)$, donc atteint en un réel $c \in]a;b[$. D'après la propriété précédente, $f'(c) = 0$. □

Théorème 60. Théorème des accroissements finis.
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a;b]$, alors $\exists c \in]a;b[,\ f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Remarque 191. Autrement dit, il existe un point où la tangente est parallèle à la droite passant par les points $(a;f(a))$ et $(b;f(b))$.



Démonstration. Le principe est de se ramener au théorème précédent. Définissons une deuxième fonction g par $g(x) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x - f(x)$ (ce qui correspond à l'écart entre la courbe représentative de f et la droite passant par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$, à une constante près). Cette fonction est dérivable sur $[a;b]$ puisque f l'est et vérifie $g(b)-g(a) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}b - f(b) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}a + f(a) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) - f(b) + f(a) = 0$, c'est-à-dire que $g(b) = g(a)$. on peut donc appliquer le théorème de Rolle à la fonction g : $\exists c \in]a;b[,\ g'(c) = 0$. Or, $g'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} - f'(c)$, donc on a $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, ce qu'on cherchait à prouver. □

Remarque 192. Ce théorème un peu étrange sert très peu en tant que tel, mais ses applications fondamentales en font un des piliers de l'analyse mathématique. C'est notamment à l'aide du théorème des accroissements finis qu'on démontre le lien entre signe de la dérivée et variations d'une fonction, ce que nous allons faire tout de suite.

Théorème 61. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, alors f est croissante sur I si et seulement si f' est positive sur I, et f est décroissante sur I si et seulement si f' est négative sur I.

Démonstration. Supposons f croissante sur I, et soit $a \in I$, considérons le taux d'accroissement de f en a : $\tau_a(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Ce taux d'accroissement est toujours positif, puisque numérateur et dénominateur sont négatifs quand h est négatif, et positifs sinon ; donc par passage à la limite $f'(a) \geqslant 0$. Réciproquement, si $f'(x) \geqslant 0$ sur I, on a d'après le théorème des accroissements finis, si $x < y$, $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(c) \geqslant 0$, donc $f(y) - f(x) \geqslant 0$, ce qui prouve que f est croissante sur I. La preuve dans le cas de la décroissance est très similaire. □

Théorème 62. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, alors si f' est strictement positive sur I, sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, la fonction f est strictement croissante sur I. De même, si f' est strictement négative sur I, sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, f est strictement décroissante sur I.

Ce deuxième résultat, plus subtil que le précédent, ne sera pas prouvé. Remarquons qu'il n'y a ici qu'une seule implication, une fonction peut être strictement monotone mais avoir une dérivée qui s'annule une infinité de fois (la condition exacte pour l'équivalente est trop technique pour pouvoir être mentionnée).

Remarque 193. Ces théorèmes seront bien entendus utilisés sans être cités lors de l'étude des variations de fonctions, comme vous en avez déjà l'habitude. Mais vous avez désormais une preuve complète de ces résultats très classiques.

Théorème 63. Théorème du prolongement $\mathcal{C}^1$.
Soit f une fonction continue sur un segment $[a; b]$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a; b]$. Si la dérivée f' de la fonction f admet une limite finie l en a, alors f est dérivable en a et $f'(a) = l$.

Démonstration. Considérons le taux d'accroissement de f en a : $\tau_a(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$. D'après le thorème des accroissement finis, on peut écrire $\tau_a(h) = f'(c_h)$, où c_h est une constante (dépendant de h) appartenant à l'intervalle $]a; a+h[$. Si on fait tendre h vers 0, d'après le théorème des gendarmes, c_h aura pour limite a. Alors, les hypothèses du théorème nous permettent d'affirmer que $\lim\limits_{h\to 0} f'(c_h) = l$, ce qui prouve bien que la fonction f est dérivable en a, puisque son taux d'accroissement y tend vers l. □

Exemple : Ce théorème sera souvent appliqué dans le cas où on prolonge une fonction par continuité, pour déterminer si le prolongement effectué est dérivable ou non. Il évite de revenir au calcul du taux d'accroissement (qui est toutefois rarement plus complexe). Considérons la fonction $f : x \mapsto x^2 \ln(x)$. Cette fonction est définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et peut se prolonger par continuité en posant $f(0) = 0$ (par croissance comparée). Par ailleurs, $f'(x) = 2x\ln(x) + x$ a certainement aussi une limite nulle en 0. Le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$ permet alors d'affirmer que la fonction prolongée est dérivable en 0, et que $f'(0) = 0$. Cette information est essentielle pour tracer une allure précise de la courbe au voisinage de 0.

Remarque 194. On pourra également utiliser la variante suivante du théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$: sous les mêmes hypothèses, si la dérivée f' admet en a une limite infinie, alors f n'est pas dérivable en a mais y admet une tangente verticale.

Proposition 219. Inégalité des accroissements finis (IAF).
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a; b]$, et telle que $\forall x \in [a; b]$, $|f'(x)| \leqslant k$ (où $k \in \mathbb{R}$), alors $\forall (y, z) \in [a; b]^2$, $|f(z) - f(y)| \leqslant k|z - y|$.

Démonstration. En effet, on peut écrire $\left|\dfrac{f(z)-f(y)}{z-y}\right| = |f'(c)| \leqslant k$, ce donc découle immédiatement l'inégalité. □

Remarque 195. On peut donner une version légèrement différente de l'IAF, utilisant un encadrement de la dérivée et non une majoration de sa valeur absolue : soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a; b]$, et telle que $\forall x \in [a; b]$, $m \leqslant f'(x) \leqslant M$ (où $(m, M) \in \mathbb{R}^2$), alors $\forall (y, z) \in [a; b]^2$ tels que $y < z$, $m(z - y) \leqslant f(z) - f(y) \leqslant M(z - y)$.

Remarque 196. Ces inégalités ont une interprétation cinématique assez évidente : si on court par exemple deux heures avec une vitesse de pointe de 12 kilomètres par heure, on n'aura sûrement pas parcouru plus de 24 kilomètres.

Application à l'étude de suites récurrentes.
L'IAF permet de prouver la convergence de suites récurrentes sans passer par le théorème de converge monotone, ce qui peut être très pratique dans les cas où la fonction f n'est pas croissante (il n'y a alors pas besoin de séparer l'étude des sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1})). Elle donne de plus des informations sur la distance entre u_n et la limite de la suite.
Prenons par exemple la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3u_n + 2}$. Posons alors $f(x) = \dfrac{1}{3x+2}$. La fonction f est évidemment dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$, de dérivée $f'(x) = \dfrac{-3}{(3x+2)^2}$. La fonction est donc décroissante sur $]-\infty; -2|$ et sur $]-2; +\infty[$. Cherchons les points fixes de f, $f(x) = x \Leftrightarrow 1 = 3x^2 + 2x$. Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 4 + 12 = 16$, et admet deux racines réelles $x_1 = \dfrac{-2-4}{6} = -1$, et $x_2 = \dfrac{-2+4}{6} = \dfrac{1}{3}$. L'intervalle $[0; +\infty[$ est stable par la fonction, on prouve donc par une récurrente immédiate que tous les termes de la suite sont positifs. Sur cet intervalle, on peut majorer la dérivée (ou du moins sa valeur absolue) : si $x \geqslant 0$, $3x + 2 \geqslant 2$, donc $\dfrac{3}{(3x+2)^2} \leqslant \dfrac{3}{4}$. On peut alors appliquer l'IAF en prenant $z = u_n$ et $y = \dfrac{1}{3}$ (on choisira toujours le terme général de la suite et le point fixe qui sera la limite pour appliquer l'IAF dans ce genre de cas). On obtient, puisque $|f'|$ est majorée par $\dfrac{3}{4}$, $\left|f(u_n) - f\left(\dfrac{1}{3}\right)\right| \leqslant \dfrac{3}{4}\left|u_n - \dfrac{1}{3}\right|$, soit $\left|u_{n+1} - \dfrac{1}{3}\right| \leqslant \dfrac{3}{4}\left|u_n - \dfrac{1}{3}\right|$.

Les dernières étapes sont alors toujours les mêmes : on prouve par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|u_n - \dfrac{1}{3}\right| \leqslant \left(\dfrac{3}{4}\right)^n \times \dfrac{1}{3}$. En effet, au rang 0, $\left|u_0 - \dfrac{1}{3}\right| = \dfrac{1}{3}$; et en supposant la propriété vraie au rang n, on peut écrire $\left|u_{n+1} - \dfrac{1}{3}\right| \leqslant \dfrac{3}{4}\left|u_n - \dfrac{1}{3}\right| \leqslant \dfrac{3}{4} \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n \times \dfrac{1}{3} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1} \times \dfrac{1}{3}$ en appliquant successivement l'IAF puis l'hypothèse de récurrence. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$, et comme $\left|u_n - \dfrac{1}{3}\right| \geqslant 0$, le théorème des gendarmes assure que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|u_n - \dfrac{1}{3}\right| = 0$, c'est-à-dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{3}$.

Chapitre 14

Espaces vectoriels

Supposé qu'Euclide et ses prédécesseurs aient considéré
le triangle comme une moitié de carré ou, mieux, d'un parallélogramme :
ils auraient été immédiatement conduits au vecteur,
c'est-à-dire à la structure de l'espace comme espace vectoriel.

Michel Serres

Commment habille-t-on un espace vectoriel ?
Avec une combinaison linéaire !

Introduction

Nous entamons avec ce premier chapître consacré aux espaces vectoriels une partie essentielle de votre programme, consacrée à l'algèbre linéaire. Elle fait logiquement suite au chapître d'introduction sur les structures algébriques et vise à mettre en place une théorie générale permettant de « faire de la géométrie » sur un ensemble. Ceci dit, malgré le terme qui est utilisé, un espace vectoriel ne sera pas nécessairement constitué de vecteurs, du moins au sens où vous comprenez ce mot, mais peut très bien contenir, par exemple, des matrices ou des fonctions. L'essentiel est de bien comprendre que tous les ensembles étudiés ici admettent une structure proche, qui permet de définir des objets et de démontrer des propriétés dans un cadre très général, quitte à ensuite les appliquer sur des cas plus précis. Dans ce premier chapître (et dans le suivant), on se concentrera sur le côté cartésien de la géométrie que vous connaissez dans le plan ou dans l'espace, c'est-à-dire tout ce qui fait intervenir les calculs de coordonnées. Plus tard dans l'année, nous reviendrons sur les propriétés métriques des espaces vectoriels, en ajoutant des notions de longueurs et de distances par exemple. Ce chapître est généralement considéré par les élèves comme difficile, parce que vous n'avez pas (encore) l'habitude de travailler dans le cadre assez formel de l'algèbre linéaire. Pourtant, les calculs effectués sont en général très simples (en gros uniquement des résolutions de systèmes) et les notions abordées ne font que reproduire ce que vous maîtrisez dans le plan ou l'espace. L'essentiel dans ce domaine tout neuf pour vous est de bien comprendre les définitions, et d'être très rigoureux dans l'emploi des notations.

Objectifs du chapitre :

- maîtriser tout le vocabulaire introduit dans ce chapître, et connaître parfaitement les différentes méthodes permettant de faire les calculs classiques (noyau, image, démonstration de la supplémentarité).

- savoir résoudre sans la moindre hésitation les petits systèmes linéaires, et exprimer leurs solutions sous forme vectorielle.
- faire le lien entre calcul matriciel et espaces vectoriels.

14.1 Espaces et sous-espaces vectoriels

14.1.1 Définitions, exemples

Définition 216. Un ensemble E est un **espace vectoriel sur** $\mathbb{K}$ s'il est muni d'une addition $\begin{array}{ccc} E \times E & \to & E \\ (x, y) & \mapsto & x + y \end{array}$ et d'un produit extérieur $\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda, x) & \mapsto & \lambda x \end{array}$ vérifiant les conditions suivantes :

- $(E, +)$ est un groupe commutatif.
- Le produit est compatible avec le produit de $\mathbb{K}$: $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}^2$, $\forall x \in E$, $\lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x$.
- L'élémént neutre $1 \in \mathbb{K}$ est un élément neutre pour le produit extérieur : $\forall x \in E$, $1.x = x$.
- Le produit est doublement distributif par rapport à l'addition : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}^2$, $\forall x \in E$, $(\lambda+\mu).x = \lambda.x + \mu.x$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall x, y \in E^2$, $\lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$.

Remarque 197. Ces conditions peuvent paraitre complexes, mais on ne les vérifie jamais en pratique, et on peut en fait les résumer simplement par le fait qu'il y a deux opérations sur notre ensemble E : une addition, et un produit extérieur, qui vérifient des conditions assez naturelles. En pratique, dans tous les exemples que nous étudierons cette année, on aura toujours $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Définition 217. Les éléments d'un espace vectoriel E sont appelés **vecteurs**, et les éléments de $\mathbb{K}$ par lesquels on peut les multiplier sont appelés **scalaires**.

Exemples :

- L'ensemble des vecteurs du plan (de même que l'ensemble des vecteurs de l'espace), muni de la somme vectoirielle et du produit des vecteurs par les réels, est une espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (encore heureux !).
- L'ensemble des n-uplets de réels $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, muni de la somme terme à terme et du produit par un réel terme à terme est un espace vectoriel réel, noté $\mathbb{R}^n$. On peut identifier l'espace des vecteurs du plan avec $\mathbb{R}^2$ en identifiant un vecteur avec ses coordonnées dans une base du plan.
- L'ensemble des suites réelles est un espace vectoriel réel, la somme de deux suites (u_n) et (v_n) étant la suite $(u_n + v_n)$, et le produit d'une suite (u_n) par un réel λ étant la suite (λu_n). De même, l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel.
- L'ensemble de toutes les fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel, inclus dans celui de toutes les fonctions. L'ensemble de toutes les fonctions de classe $\mathbb{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est aussi un espace vectoriel, inclus dans le précédent.
- L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ des matrices à n lignes et p colonnes est un espace vectoriel (on a prouvé toutes les propriétés de la définition précédente dans le cas des matrices lors de notre chapître consacré au calcul matriciel). Attention toutefois, l'ensemble de toutes les matrices (sans spécification de taille) n'est pas un espace vectoriel (on ne peut pas additionner deux matrices de taille différente).
- L'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n est un espace vectoriel (mais l'ensemble des polynômes de degré exactement n ne serait pas un espace vectoriel). L'ensemble $\mathbb{R}[X]$ de tous les polynômes à coefficients réels est aussi un espace vectoriel.

14.1.2 Familles de vecteurs

Définition 218. Une **famille de vecteurs** dans un espace vectoriel E est un k-uplet $(e_1, \dots, e_k)$ d'éléments de E.

Remarque 198. Attention bien sûr à ne pas confondre une famille de vecteurs de E, et un vecteur qui est souvent lui-même un n-uplet de réels.

Définition 219. Une **combinaison linéaire** d'une famille $(e_1, \dots, e_k)$ de vecteurs de E est un vecteur $x \in E$ qui peut s'écrire sous la forme $x = \sum_{i=1}^{i=k} \lambda_i e_i$, pour un k-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ d'éléments de $\mathbb{K}$.

Exemples : Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, le vecteur $(2, 5, -3)$ est combinaison linéaire des vecteurs $(1, -2, 6)$ et $(-1, 11, -21)$, puisque $3(1, -2, 6) + (-1, 11, -21) = (2, 5, -3)$. Par contre, le vecteur $(0, 9, 2)$ n'est pas combinaison linéaire de ces deux même vecteurs (pour déterminer si un vecteur x donné est combinaison linéaire d'une famille, on écrit le système obtenu en obligeant l'égalité $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_k e_k$).

Dans l'espace vectoriel des matrices à 3 lignes et 3 colonnes $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 8 & 7 & -4 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est telle que A^2 est combinaison linéaire de A et de I, puisque $A^2 = \begin{pmatrix} -7 & -8 & 8 \\ 32 & 25 & -1- \\ 16 & 8 & 1 \end{pmatrix} = 4A - 3I$.

Définition 220. Soit $(e_1, \dots, e_k)$ une famille de vecteurs. L'ensemble des combinaisons linéaires de cette famille est noté $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$.

Définition 221. Une famille $(e_1, \dots, e_k)$ est **génératrice** si tout élément de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de la famille $(e_1, \dots, e_k)$: $\forall x \in E,\ \exists \lambda_1, \dots, \lambda_k,\ x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i$. Autrement dit, $Vect(e_1, \dots, e_k) = E$.

Remarque 199. Pour prouver qu'une famille est génératrice, il faut prouver que l'équation $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i$, qui peut s'écrire comme un système linéaire dont les inconnues sont les coefficients λ_i, admet toujours une solution.

Exemples : Dans $\mathbb{R}_n[X]$, la famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est génératrice par définition même de ce qu'est un polynôme : il peut s'écrire sous la forme $P = \lambda_0 + \lambda_1 X + \cdots + \lambda_n X^n$.
Dans $\mathbb{R}^3$, la famille de trois vecteurs $((1, 0, 1), (0, 1, -1), (1, 1, 1))$ est génératrice. En effet, soit (x, y, z) un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$, on peut écrire $(x, y, z) = \lambda_1(1, 0, 1) + \lambda_2(0, 1, -1) + \lambda_3(1, 1, 1)$ si le système $\begin{cases} \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & x \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & y \\ \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & z \end{cases}$ admet une solution. C'est toujours le cas : en soustrayant la troisième équation à la première, $\lambda_2 = x - z$, puis en reportant dans la deuxième équation $\lambda_3 = y - x + z$, et enfin $\lambda_1 = x - \lambda_3 = 2x - y - z$.

Définition 222. Une famille de vecteurs $(e_1, \dots, e_k)$ est **libre** si aucun de ses éléments n'est combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille (on dit que ses vecteurs sont linéairement indépendants). Autrement dit, si $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i = 0$, alors $\forall i \in \{1, \dots, k\}$, $\lambda_i = 0$. Dans le cas contraire, on dit que la famille de vecteurs est **liée**.

Remarque 200. Pour prouver qu'une famille est libre, il faut vérifier que le système linéaire homogène obtenu en écrivant l'égalité $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i = 0$ est de Cramer (le système a toujours pour solution la solution nulle, la famille est libre seulement s'il n'y a pas d'autre solution).

Exemple : Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $((2, 1, 0), (1, -1, -1), (0, 3, -1))$ est libre car le système

$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - y - z = 0 \\ 3y - z = 0 \end{cases}$ a pour unique solution $(0,0,0)$: en effet, $z = 3y$, $x = y + z = 4y$, donc $2x + y = 5y = 0$, et les trois inconnues sont donc nulles.
Exemple 2 : La famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ déjà citée plus haut est en fait une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
Exemple 3 : Dans l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la famille constituée des quatre fonctions $f_1 : x \mapsto e^x$; $f_2 : x \mapsto e^{2x}$; $f_3 : x \mapsto e^{3x}$ et $f_4 : x \mapsto e^{4x}$ constitue une famille libre. Supposons pour le prouver que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = 0$. Si $\lambda_4 \neq 0$, alors on aura $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \lambda_3 f_3(x) + \lambda_4 f_4(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \lambda_4 e^{4x}$, ce qui est incompatible avec le fait que la fonction est censée être toujours nulle. Une fois que $\lambda_4 = 0$, si on suppose ensuite que $\lambda_3 \neq 0$, on aboutira de même à une contradiction, puis on prouvera ensuite $\lambda_2 = 0$ par la même méthode, et on concluera enfin que les quatre coefficients doivent être nuls.

Définition 223. Une famille de vecteurs est une **base** d'un espace vectoriel E si elle est à la fois libre et génératrice. Autrement dit, tout élément de E peut s'écrire de façon unique comme combinaison linéaire d'éléments de la famille.

Définition 224. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in E$. Les réels λ_i sont appelés **coordonnées** de x dans la base $(e_1, \dots, e_n)$, et les vecteurs $\lambda_i e_i$ **composantes** de x dans cette même base.

14.1.3 Sous-espaces vectoriels

Définition 225. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Un sous-ensemble F de E est un **sous-espace vectoriel** s'il est lui-même un espace vectoriel (muni de l'addition et de la multiplication définies sur E).

Proposition 220. F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si
- $0 \in F$
- $\forall x, y \in F$, $x + y \in F$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall x \in F$, $\lambda.x \in F$.

Remarque 201. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E s'il est non vide et stable par addition et par multiplication par un réel. La proposition est évidente. On peut d'ailleur remplacer les deux dernières conditions par la suivante : $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\forall(x, y) \in F^2$, $\lambda x + \mu y \in F$.

Exemples : L'ensemble des matrices diagonales est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En effet, la somme de deux matrices diagonales est diagonale, et le produit d'une matrice diagonale par un réel est diagonale.

Dans $\mathbb{R}^3$, l'ensemble $F = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel mais $G = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 1\}$ n'en est pas un (il ne contient pas 0, et n'est stable ni par somme ni par produit par un réel !).

$\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ (quelle que soit la valeur de n).

L'ensemble des fonctions solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différente $y'' - 3y' + 2y = 0$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. En effet, la somme de deux solutions d'une équation différentielle homogène, ou le produit d'une solution par un réel, est solution de la même équation.
Exercice : Soit E l'espace vectoriel des suites réelles. Parmi tous les sous-ensembles suivants, déterminer lesquels sont des sous-espaces vectoriels de E.

1. les suites croissantes.
2. les suites monotones.

3. les suites constantes.
4. les suites ayant une limite finie.
5. les suites géométriques.
6. les suites récurrentes linéaires d'ordre 2.
7. Les suites périodiques.

Corrigé de l'exercice

1. Ce n'est pas un sous-ev, le produit d'une suite croissante (et non constante) par -1 étant rarement une suite croissante.
2. Ce n'est pas un sous-ev non plus, car la somme d'une suite croissante et d'une suite décroissante n'est pas toujours monotone (en fait, on en est loin, toute suite réelle peut s'écrire comme somme d'une suite croissante et d'une suite décroissante).
3. C'est un sous-ev.
4. C'est un sous-ev (règles de calcul usuelles sur les limites).
5. Ce n'est pas un sous-ev, la somme de deux suites géométriques n'ayant pas la même raison n'est pas une suite géométrique (mais une suite récurrente linéaire d'ordre 2).
6. Ce n'est pas un sous-ev, pour à peu près la même raison que les suites géométriques : une suite récurrente linéaire d'ordre 2 peut se mettre sous la forme $\alpha r^n + \beta s^n$ (somme de deux suites géométriques) ; si on en additionne deux ayant des racines r et s différentes, on n'a aucune raison d'obtenir une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
7. C'est un sous-ev, si (u_n) est périodique de période p et (v_n) périodique de période q, leur somme sera périodique de période pq (car pq est une période commune à (u_n) et (v_n)). Les autres propriétés sont facilement vérifiées.

Proposition 221. Soit $(e_1, \dots, e_k)$ une famille de vecteurs de E, alors $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ est un sous-espace vectoriel de E. C'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant e_1, e_2, …, e_k (c'est-à-dire que, si F est un sous-espace vectoriel contenant tous les vecteurs de la famille, alors nécessairement $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k) \subset F$). On l'appelle **sous-espace vectoriel engendré** par la famille.

Démonstration. Une somme de deux combinaisons linéaires est bien une combinaison linéaire : $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^{k} \mu_i e_i = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i + \mu_i) e_i$, et de même pour un produit par un réel : $\rho \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{k} (\rho\lambda_i) e_i$, donc $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ est un sous-espace vectoriel de E. De plus, un sous-espace contenant les éléments de la famille contient aussi ses combinaisons linéaires puisqu'un sous-espace est stable par combinaisons linéaires, donc il contient forcément $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$. □

Exemple : L'ensemble des éléments de $\mathbb{R}^3$ de la forme $(2x + y, 3x - 2y, -x)$, x et y étant deux réels, est un sous-espace vectoriel. Il s'agit en fait du sous-espace vectoriel engendré par les deux vecteurs $(2, 3, -1)$ et $(1, -2, 0)$, puisque $(2x + y, 3x - 2y, -x) = x(2, 3, -1) + y(1, -2, 0)$ s'écrit bien comme combinaison linéaire de ces deux vecteurs.
Exemple très important : L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène de k équations à n inconnues est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathbb{R}^n$. On peut d'ailleurs toujours décrire un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ à l'aide d'un tel système d'équations.
Exemple : L'ensemble F des solutions du système $\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & & & - & z & = & 0 \\ x & - & y & + & 3z & = & 0 \end{array}\right.$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Si on résout le système, on trouve facilement que $F = \{(x, 7x, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 7, 2) \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1, 7, 2))$.

Proposition 222. L'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.

Exemple : Dans $\mathbb{R}^3$, on définit F comme l'ensemble des solutions de l'équation $x - y + 2z = 0$, et $G = \text{Vect}((1, 0, -1), (-2, 1, 1))$. Ces deux ensembles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, leur intersection en est donc aussi un. Pour la décrire le plus simplement possible, le mieux est d'écrire les vecteurs de G comme combinaison linéaires, et de leur faire vérifier l'équation définissant F : $x \in G \Leftrightarrow x = (\lambda - 2\mu, \mu, \mu - \lambda)$, pour un certain couple de réels (λ, μ). Le vecteur x appartient aussi à F si $\lambda - 2\mu - \mu + 2\mu - 2\lambda = 0$, soit $-\lambda - \mu = 0$, donc $\mu = -\lambda$. On a alors $x = (3\lambda, -\lambda, -2\lambda)$, dont on déduit que $F \cap G = \text{Vect}((3, -1, -2))$.

Remarque 202. L'union de deux sous-espaces vectoriels n'est par contre en général pas du tout un sous-espace vectoriel. Par exemple, l'union de deux droites non confondues dans $\mathbb{R}^2$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ (ces derniers étant uniquement, outre $\mathbb{R}^2$ tout entier et le sous-espace vectoriel réduit au vecteur nul, les droites passant par l'origine). Ce qui joue en quelque sorte le rôle d'union de sous-espaces vectoriels est la notions que nous allons maintenant définir.

Définition 226. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel E. La **somme** des espaces F et G, notée tout simplement $F + G$, est l'ensemble $F + G = \{(x + y) \mid x \in F, y \in G\}$.

Proposition 223. La somme $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E. C'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant à la fois F et G.

Démonstration. C'est facile : $\lambda(x + y) + \mu(x' + y') = (\lambda x + \mu y) + (\lambda x' + \mu y')$, donc $F + G$ est stable par combinaisons linéaires en supposant que F et G le sont. Par ailleurs, un sous-espace vectoriel contenant F et G contiendra toutes les combinaisons linéaires d'éléments de F et de G, et a fortiori $F + G$. □

Définition 227. Deux sous-espaces vectoriels F et G d'un même espace vectoriel E sont **supplémentaires** s'ils vérifient les deux conditions suivantes :
- $F \cap G = \{0\}$.
- $F + G = E$.

Si F et G sont supplémentaires, on note $F \oplus G = E$.

Remarque 203. Ces deux conditions assurent en fait que tout vecteur de E peut s'écrire comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G (c'est exactement la deuxième condition donnée) et que cette décomposition est unique : en effet, si $x + y = x' + y'$, avec $(x, x') \in F^2$ et $(y, y') \in G^2$, alors $x - x' = y' - y$. Or, $x - x' \in F$ et $y' - y \in G$, ce qui implique en appliquant notre première condition que $x - x' = y - y' = 0$, autrement dit qu'on a écrit deux fois la même décomposition.

Exemple : Dans l'espace, un plan (vectoriel, donc passant par l'origine) et une droite qui n'est pas incluse dans ce plan sont toujours supplémentaires. La notion de supplémentarité signifie en fait que les deux sous-espaces « se complètent bien » pour permettre d'obtenir par combinaisons linéaires l'espace E tout entier. Nous pourrons interpréter plus facilement cette intuition dans un prochain chapître consacré à la dimension des espaces vectoriels (ici, le plan de dimension 2 est supplémentaire d'une droite de dimension 1 dans l'espace qui est de dimension $3 = 2 + 1$).

Exemple : Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, si on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices symétriques et $\mathcal{A}$ celui des matrices antisymétriques, alors $\mathcal{S} \oplus \mathcal{A} = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:
- $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et de même pour $\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$. Plus simplement, on peut aussi dire que la condition $A =^t A$ (ou $A = -^t A$ est stable par combinaisons linéaires).
- $\mathcal{S} \cap \mathcal{A} = \{0\}$, puisque la seule matrice vérifiant $A =^t A = -A$ est la matrice nulle.
- $\mathcal{S} + \mathcal{A} = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, car on peut décomposer une matrice quelconque de la façon suivante : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \frac{b+c}{2} \\ \frac{b+c}{2} & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & \frac{b-c}{2} \\ \frac{c-b}{2} & c \end{pmatrix}$.

14.1.4 Espaces vectoriels classiques

Proposition 224. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$, la famille de vecteurs $((1,0,0,\dots,0);(0,1,0,\dots,0);\dots;(0,\dots,0,1,0,\dots,0);\dots;(0,0,\dots,0,1))$ est une base, appelée **base canonique** de $\mathbb{K}^n$.

Démonstration. Donnons un nom aux vecteurs de la base : $e_i = (0,\dots,0,1,0,\dots,0)$, où le 1 est situé en i-ème position. Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, alors $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, donc la famille est génératrice. Elle est clairement libre, puisque l'égalité $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$ est équivalente à la condition $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$. Il s'agit donc bien d'une base. C'est la base qu'on utilise habituellement pour les calculs dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. □

Proposition 225. Dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la famille constituée des matrices $E_{i,j}$ (pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$), où $E_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \dots & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$, est une base appelée **base canonique** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration. La famille $(E_{i,j})$ est bien génératrice puisque, si $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on a $M = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} m_{i,j} E_{i,j}$. Supposons maintenant qu'une combinaison linéaire des matrices de la famille soit nulle : $\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} \lambda_{i,j} E_{i,j} = 0$. La somme de gauche étant simplement la matrice dont le coefficient d'indice i, j vaut $\lambda_{i,j}$, elle est nulle seulement si tous les $\lambda_{i,j}$ sont nuls, la famille est donc bien libre. □

Remarque 204. Les coordonnées d'une matrice dans cette base canonique sont simplement ses coefficients, lus de gauche à droite et de haut en bas. Remarquons que, comme dans le cas de $\mathbb{K}^n$, la base a été obtenue en mettant successivement des 1 à tous les endroits possibles, et en remplissant avec des 0. C'est un principe que nous allons retrouver dans notre troisième exemple d'espace vectoriel classique.

Proposition 226. Dans $\mathbb{K}_n[X]$, la famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une base appelée **base canonique**.

Démonstration. La famille est génératrice par définition de ce qu'est l'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$. Elle est libre, car si on suppose que $\sum_{i=0}^{n} a_i X^i = 0$, on est face à un polynôme admettant une bonne infinité de racines, ce qui n'est possible que pour le polynôme nul (du moins sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$). □

Remarque 205. Les coordonnées d'un polynôme dans la base canonique sont simplement ses coefficients, donnés par ordre de puissances croissantes.

Définition 228. Une famille **échelonnée** de polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$ est une famille constituée de $n+1$ polynômes de degrés respectifs 0, 1, 2, …, $n+1$.

Proposition 227. Toute famille échelonnée de polynômes est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Démonstration. Procédons par récurrence sur l'entier n. Si $n = 0$, une famille échelonnée de polynômes est réduite à un seul polynôme constant non nul (puisque de degré 0 et pas $-\infty$), qui constitue bien une base de $\mathbb{K}_0[X]$. Supposons la propriété vérifiée au rang n, et considérons une famille de polynômes échelonnée $(P_0, P_1, \dots, P_{n+1})$. Par hypothèse de récurrence, $(P_0, \dots, P_n)$ constitue une base de $\mathbb{K}_n[X]$. Prouvons que notre famille est génératrice : soit $Q \in \mathbb{K}_{n+1}[X]$, on peut écrire $Q = a_{n+1}X^{n+1} + Q_1$, avec $d^\circ(Q_1) \leqslant n$. De même, $P_{n+1} = b_{n+1}X^{n+1} + R$, avec $d^\circ(R) \leqslant n$ et $b_{n+1} \neq 0$ puisque P_{n+1} est supposé de degré $n+1$. On peut alors écrire $Q = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}P_{n+1} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}R + Q_1$. Comme $Q_1 - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}R$ est par construction un polynôme de degré inférieur ou égal à n, on peut l'écrire comme combinaison linéaire de P_0, P_1, …, P_n, donc Q est une combinaison linéaire de notre famille. Prouvons désormais que notre famille est libre : si $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i P_i = 0$, alors $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i + \lambda_{n+1}R = -\lambda_{n+1}b_{n+1}X^{n+1}$. Comme le membre de gauche est de degré au plus n, cela n'est possible que si $\lambda_{n+1} = 0$. Mais alors on a une combinaison linéaire annulant la famille $(P_0, \dots, P_n)$ qui est libre, tous ses coefficients sont nécessairement nuls. Notre famille est donc libre en plus d'être génératrice, c'est une base. □

Proposition 228. L'ensemble S des suites vérifiant la récurrence linéaire $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles. Dans le cas où son équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2, les deux suites géométriques $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ définies par $u_n = r_1^n$ et $v_n = r_2^n$ forment une base de S. Si l'équation caractéristique a une solution double r, les suites définies par $u_n = r^n$ et $v_n = nr^n$ forment une base de S. Si l'équation admet deux racines complexes conjuguées $z_1 = re^{i\theta}$ et $z_2 = re^{-i\theta}$, les suite définies par $u_n = r^n \cos(n\theta)$ et $v_n = r^n \cos(n\theta)$ forment une base de S.

Remarque 206. Cette proposition n'est pas une nouveauté, c'est exactement la même que celle que nous avons déjà vue sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2, exprimée un peu différemment.

Démonstration. L'ensemble S est clairement un sous-espace vectoriel : la somme de deux suites vérifiant la récurrence la vérifie aussi (il suffit d'additionner les équations), de même pour le produit par un réel.
Notons à présent x la suite vérifiant $x_0 = 1$, $x_1 = 0$ et qui appartient à S (donc qui vérifie la récurrence pour $n \geqslant 2$) et y la suite de S vérifiant $y_0 = 0$ et $y_1 = 1$. La famille (x, y) est libre (en effet, les deux suites ne sont pas proportionnelles), mais également génératrice de S. En effet, soit z un élément de S, $a = z_0$ et $b = z_1$, on a en fait $z = ax + by$: cela est vrai pour les deux premiers termes de la suite, et ensuite cela le reste par récurrence double. On en déduit que (x, y) est une base de S.
Plaçons-nous dans le cas de deux racines distinctes : on a déjà prouvé dans le chapître sur les suites que les suites (u_n) et (v_n) étaient dans S. De plus, elles forment une famille libre (elles ont le même premier terme, mais pas le même deuxième terme). Pour prouver qu'elles forment une famille génératrice, il suffit de constater que $u = x + r_1y$ et $v = x + r_2y$, donc $y = \frac{v-u}{r_2 - r_1}$, et $x = \frac{r_2u - r_1v}{r_2 - r_1}$. Puisque toute suite de S peut s'écrire comme combinaison linéaire de x et de y, en remplaçant ces dernières par les formules qu'on vient d'obtenir, elle peut également s'écrire comme combinaison linéaire de u et v, qui forme donc une famille génératrice de S. Puisqu'elle est libre, c'est une base.
Les autres cas sont très similaires. □

14.2 Applications linéaires

14.2.1 Noyau et image

Définition 229. Soient E et F deux espaces vectoriels, une **application linéaire** de E dans F est une application $f : E \to F$ vérifiant les conditions suivantes :

- $\forall (x, y) \in E^2$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$

- $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall x \in E$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$

Remarque 207. Autrement dit, une application linéaire est un morphisme de groupes qui est également compatible avec le produit extérieur.

Proposition 229. Une application $f : E \to F$ est linéaire si et seulement si $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\forall (x, y) \in E^2$, $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$.

Démonstration. Si f vérifie les conditions de la définition, alors $f(\lambda x + \mu y) = f(\lambda x) + f(\mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$ en utilisant successivement les deux propriétés. Réciproquement, en prenant $\lambda = \mu = 1$, on retrouve la première condition ; et en prenant $y = 0$ (qui, rappelons-le, a forcément une image nulle par un morphisme de groupes), on retrouve la deuxième. □

Remarque 208. Autrement dit, une application est linéaire si elle est compatible avec les combinaisons linéaires. On a d'ailleurs plus généralement, pour une application linéaire, $f\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(e_i)$.

Exemples : Bien que les conditions définissant une application linéaire soient assez restrictives, on peut trouver des exemples extrêmement variés dans les différents espaces vectoriels que nous avons commencé à étudier.

- L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (2x - 3y, 4x + y, -x + 2y)$ est une application linéaire.
- L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (2x - 3, 4 + y, -x + 2y)$ n'est pas une application linéaire (on peut constater par exemple qu'en général $f(2x, 2y) \neq 2f(x, y)$).
- L'application $f : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = AM$ est une application linéaire, quelle que soit la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- L'application $f : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = M^2$ n'est pas une application linéaire (en général, $(M + N)^2 \neq M^2 + N^2$).
- Soit E l'ensemble des suites réelles. L'application $f : E \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(u_n) = (u_0, u_8, u_{35})$ est une application linéaire.
- Soit E l'ensemble des fonctions C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. L'application $f : E \to E$ définie par $f(g) = g'$ est une application linéaire.
- Soit E l'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle $[0; 1]$. L'application $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $f(g) = \int_0^1 g(t)\, dt$ est une application linéaire.
- L'application $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[x]$ définie par $f(P) = 2X^2P'' - XP'$ est une application linéaire.

Définition 230. Une application linéaire $f : E \to F$ est aussi appelée **morphisme** de E dans F. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble de toutes les applications linéaires de E dans F.
Une application linéaire $f : E \to E$ est appelée **endomorphisme** de l'espace vectoriel E. On note plus simplement $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
Une application linéaire bijective est appelées **isomorphisme**.
Un endomorphisme bijectif est appelée **automorphisme**. L'ensemble des automorphismes d'un ev E est noté $GL(E)$.

Proposition 230. Si E et F sont deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, c'est aussi le cas de $\mathcal{L}(E, F)$.

Démonstration. La somme de deux applications linéaires est linéaire, l'élement neutre étant l'application nulle, et l'opposé d'une application linéaire étant toujours défini. De plus, les produits par des constantes d'applications linéaires sont linéaires, et les relations de distributivité sont immédiates. □

Définition 231. Le **noyau** d'une application linéaire $f : E \to F$ est l'ensemble $\ker(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0\}$.
L'**image** d'une application linéaire $f : E \to F$ est l'ensemble $\mathrm{Im}(f) = \{y \in F \mid \exists x \in E, f(x) = y\}$.

Remarque 209. Les lettres Ker sont les premières du mot allemand Kernel qui signifie, comme vous auriez pu le deviner, noyau.

Proposition 231. Si $f : E \to F$ est une application linéaire, alors léimage d'un sous-espace vectoriel de E est toujours un sous-espace vectoriel de F ; et l'image réciproque de tout sous-espace vectoriel de F est un sous-espace vectoriel de E.

Corollaire 6. Si $f : E \to F$ est une application linéaire, alors $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E, et $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Démonstration. Soit G un sous-espace vectoriel de E, et $(x, y) \in f(G)^2$, alors $x = f(z)$ et $y = f(w)$, avec $(z, w) \in G^2$. Comme l'application est linéaire, $\lambda x + \mu y = \lambda f(z) + \mu f(w) = f(\lambda z + \mu w) \in f(G)$ puisque $\lambda z + \mu w \in G$ en tant que combinaison linéaire d'éléments du sous-espace vectoriel G. L'image de G est donc stable par combinaison linéaire, c'est un sous-espace vectoriel de G. C'est le même principe pour l'image réciproque : soit H un sous-espace vectoriel de F, et $(z, w) \in f^{-1}(H)$, alors $f(z) = x \in H$ et $f(w) = y \in H$, donc $f(\lambda z + \mu w) = \lambda x + \mu y \in H$, et $\lambda z + \mu w \in f^{-1}(H)$. □

Exemple : Déterminons le noyau de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par $(x, y, z) \mapsto (x - y + z, 3x - 2y + 5z, -x - 3z)$. Les éléments du noyau sont les triplets de réels (x, y, z) solutions du système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 0 \\ 3x & - & 2y & + & 5z & = & 0 \\ -x & & & - & 3z & = & 0 \end{array}\right.$. Le système n'est pas de Cramer ($2L_1 - L_2 = L_3$), les solutions sont les triplets de la forme $(-3z, -2z, z)$, avec $z \in \mathbb{R}$. Autrement dit, $\ker(f) = \mathrm{Vect}((-3, -2, 1))$.

Exemple 2 : L'application $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par $f(P) = P'$ a pour noyau l'ensemble des polynômes constants.

Proposition 232. Une application linéaire f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{0\}$. Une application linéaire $f : E \to F$ est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.

Démonstration. La deuxième propriété est évidente, c'est la définition de la surjectivité. Démontrons donc la première, qui est beaucoup plus intéressante puisqu'elle revient à dire que, pour démontrer qu'une application linéaire est injective, il suffit de démontrer qu'un seul élément bien particulier n'a pas plus d'un antacédent par f. Supposons d'abord le noyau réduit au vecteur nul et montrons que f est injective : soient $(x, y) \in E^2$ tels que $f(x) = f(y)$, alors $f(x - y) = f(x) - f(y) = 0$, donc $x - y \in \ker(f)$, donc $x - y = 0$, c'est-à-dire $x = y$, ce qui prouve bien l'injectivité. Réciproquement, supposons f injective, alors 0 a un seul antécédent par f. Or, le vecteur nul est toujours un antécédent de 0 par une application linéaire. Ceci prouve bien qu'il est le seul élément de E à appartenir à $\ker(f)$. □

Proposition 233. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, alors $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$.

Démonstration. Comme les vecteurs $f(e_1), \ldots, f(e_n)$ appartiennent évidemment à $\mathrm{Im}(f)$, on a nécessairement $\mathrm{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n)) \subset \mathrm{Im}(f)$. De plus, si $y \in \mathrm{Im}(f)$, alors $y = f(x)$ avec $x \in E$, et comme $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, on peut écrire $x = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i e_i$. Alors $y = f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i f(e_i)$, donc $y \in \mathrm{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$, et les deux ensembles sont bien égaux. □

Remarque 210. Attention, en général, $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ n'est pas une base de $\mathrm{Im}(f)$, mais seulement une famille génératrice. Remarquons également qu'une application linéaire est parfaitement déterminée par la simple donnée des images des vecteurs d'une base, puisqu'on peut reconstituer toutes les autres images par combinaisons linéaires.

Exemple 1 : La méthode élémentaire pour calculer une image est d'utilser la définition. Prenons par exemple l'applicaton linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y) = (2x-y, x+2y, -2x+y)$. Un triplet (a,b,c) appartient à $Im(f)$ si et seulement si le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 2x & - & y & = & a \\ x & + & 2y & = & b \\ -2x & + & y & = & c \end{array}\right.$$

admet une solution. Les membres de gauche des deux équations extrêmes étant opposés, il faut nécessairement avoir $a = -c$, et on vérifie facilement que cette condition est suffisante. On a donc $\mathrm{Im}(f) = \{(a,b,-a) \mid a,b \in \mathbb{R}^2\} = Vect((1,0,-1);(0,1,0))$.

Exemple 2 : En pratique, on utilisera plutôt notre dernière proposition, car c'est beaucoup plus rapide ! Reprenons le même exemple. La base canonique de $\mathbb{R}^2$ est constituée des deux vecteurs $(1,0)$ et $(0,1)$, donc l'image est engendrée par $f(1,0) = (2,1,-2)$ et $f(0,1) = (-1,2,1)$. On a donc $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((2,1,-2);(-1,2,1))$ (ce ne sont pas les mêmes vecteurs que tout à l'heure mais on peut vérifier qu'ils engendrent le même espace vectoriel).

Proposition 234. Si f est un isomorphisme de E dans F, alors sa réciproque f^{-1} est un isomorphisme de F dans E.

Démonstration. La seule chose à vérifier est que la réciproque est une application linéaire. Soient donc $(z,w) \in F^2$ et notons $x = f^{-1}(z)$ et $y = f^{-1}(w)$. Par linéarité de f, on peut dire que $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) = \lambda z + \mu w$, donc $f^{-1}(\lambda z + \mu w) = \lambda x + \mu y = \lambda f^{-1}(z) + \mu f^{-1}(w)$, ce qui prouve la linéarité de f^{-1}. □

Remarque 211. $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau : c'est déjà un groupe commutatif pour l'addition, l'identité (qui est évidemment une application linéaire) est élément neutre pour la composition, et la composée de deux applications linéaires est facilement linéaire. L'ensemble des éléments inversibles de cet anneau est $GL(E)$. On se permettre notamment d'utiliser la notation f^2 pour désigner $f\ circf$, et plus généralement f^n pour les composées ultérieures (cette notation n'aura absolument rien à voir avec des puissances qui n'ont de toute façon aucun sens dans un espace vectoriel quelconque). Remarquon que cet anneau n'est pas commutatif, deux endormorphismes n'ayant en général aucune raison de commuter.

14.2.2 Applications linéaires classiques

Nous allons retrouver dans ce paragraphe un premier lien vraiment concret entre algèbre linéaire et géométrie, en étudiant quelques types d'applications linéaires bien particulières, que vous connaissez déjà en géométrie plane depuis longtemps.

Définition 232. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. L'**homothétie de rapport** λ est l'endomorphisme de E de la forme $\lambda\,\mathrm{id}$, où $\lambda \in \mathbb{K}$.

Remarque 212. Cela correspond bien à la notion usuelle d'homothétie de rapport λ, toujours centrée en l'origine quand on travaille dans un espace vectoriel.

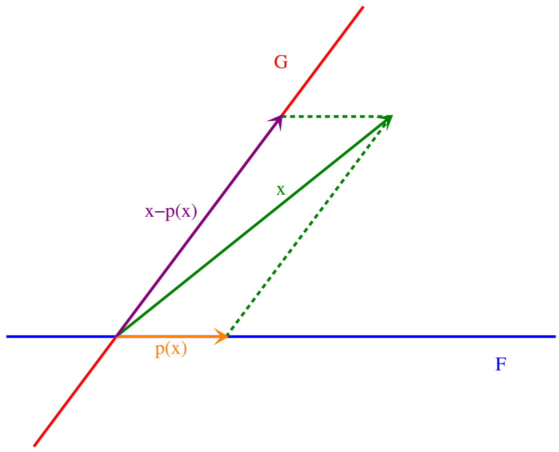
Proposition 235. Si $\lambda \neq 0$, l'homothétie de rapport λ est un automorphisme de E, son automorphisme réciproque est l'homothétie de rapport $\dfrac{1}{\lambda}$.

Démonstration. Une démonstration à la portée de tous : $(\lambda\,\mathrm{id}) \circ \left(\dfrac{1}{\lambda}\,\mathrm{id}\right) = \mathrm{id}$. □

Remarque 213. En tant que multiples de l'identité, les homothéties commutent avec tous les autres endomorphismes de E. On peut d'ailleurs prouver que ce sont les seules applications linéaires dans ce cas.

Définition 233. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un espace vectoriel E. La **projection sur F parallèlement à G** est l'application linéaire $p : x \mapsto x_F$, où on note, pour tout vecteur $x \in E$, x_F l'élément de F obtenu end écomposant x dans $F \oplus G$. Autrement dit, si $x = x_F + x_G$, avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$, alors $p(x) = x_F$.

Remarque 214. L'application est bien linéaire, car la décomposition de $\lambda x + \mu y$ dans $F \oplus G$ est simplement $(\lambda x_F + \mu y_F) + (\lambda x_G + \mu y_G)$. Pour un exemple plus parlant, une projection sur une droite de $\mathbb{R}^2$ parallèlement à une autre droite donne des images construites comme ceci :



Notons qu'il est indispensable de préciser l'espace G parallèlement auquel on projette, il n'y a pour l'instant aucune notion de projection orthogonale dans un espace vectoriel.

Proposition 236. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$, alors p est un projecteur (terme synonyme de projection) si et seulement si $p \circ p = p$. Dans ce cas, avec les notations de la définition,

- $F = \mathrm{Im}(p)$ et $G = \ker(p)$.
- $E = \ker(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$.
- $x \in \mathrm{Im}(p) \Leftrightarrow p(x) = x$.

Démonstration. Si p est un projecteur, on a effectivement $p(p(x)) = p(x_F) = x_F = p(x)$. Avant de montrer la réciproque, prouvons les autres propriétés, qui sont toutes faciles : si $x \in \ker(p)$, alors $x_F = 0$, ce qui est équivalent à dire que $x = x_G \in G$. De même, $\mathrm{Im}(p) \subset F$ est évident, et tout élément de f est sa propre image par p, donc $\mathrm{Im}(p) = F$. L'égalité $E = \ker(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$ découle alors du fait que $E = F \oplus G$. Enfin, $p(x) = x$ équivaut à $x = x_F$, donc $x \in F = \mathrm{Im}(p)$. Revenons alors à notre réciproque : si $p \circ p = p$, notons $F = \mathrm{Im}(p)$ et $G = \ker(p)$. On vérifie facilement que F et G sont supplémentaires : d'une part, si $x \in \ker(p) \cap \mathrm{Im}(p)$, alors $x = p(y)$ et $p(x) = 0$, ce qui implique $p \circ p(y) = 0$, donc $p(y) = x = 0$; d'autre part, on peut toujours écrire $x = p(x) + (x - p(x))$, avec $p(x) \in \mathrm{Im}(p)$, et $x - p(x) \in \ker(p)$ puisque $p(x - p(x)) = p(x) - p \circ p(x) = 0$. On peut donc écrire $x = x_K + x_G$, avec $x_F = p(x)$, ce qui prouve bien que p est le projecteur sur F parallèlement à G. $\square$

Exemple : L'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $p(x, y) = \left(\dfrac{x+y}{2}; \dfrac{x+y}{2}\right)$ est une projection. Le plus simple pour le prouver est de constater que $p \circ p = p$ (c'est ici très rapide). Le noyau de p est constitué des vecteurs pour lesquels $x + y = 0$, autrement dit $F = \ker(p) = \mathrm{Vect}((1, -1))$, et l'image de ceux vérifiant $p(x, y) = (x, y)$, soit $\dfrac{x+y}{2} = x = y$, donc $x = y$. Autrement dit, $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Vect}((1, 1))$.

Remarque 215. Si p est le projecteur sur F parallèlement à G, $q = \mathrm{id} - p$ est le projecteur sur G parallèlement à F. En effet, avec les notations introduites ci-dessus, $q(x) = x_G = x - x_F = (\mathrm{id} - p)(x)$.

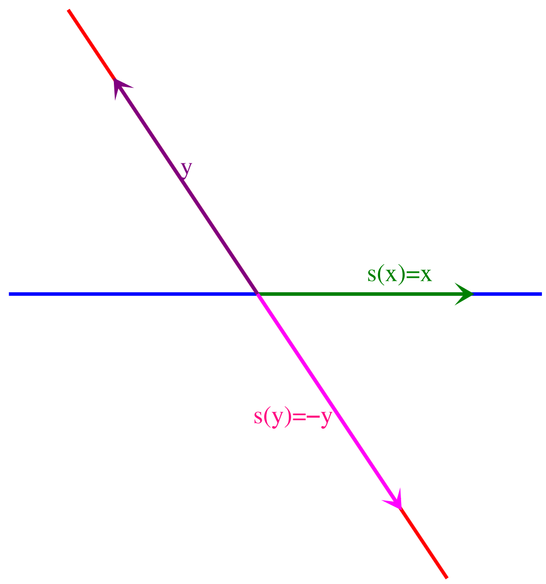
Définition 234. Avec les mêmes hypothèses et notations que dans la définition des projections, la **symétrie par rapport à F parallèlement à G** est l'application linéaire $s : x \mapsto x_F - x_G$.

Proposition 237. Un endomorphisme $s \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie si et seulement si $s \circ s = \mathrm{id}$. Dans ce cas,

- $F = \ker(s - \mathrm{id})$ et $G = \ker(s + \mathrm{id})$.
- $E = \ker(s - \mathrm{id}) \oplus \ker(s + \mathrm{id})$.
- $s = 2p - \mathrm{id}$, en notant p la projection sur F parallèlement à G.

Démonstration. Il est une fois de plus facile de commencer par les dernières propriétés. La condition $s(x) = x$ correspond à $x = x_F \in F$, la condition $s(x) = -x$ correspond à $x = x_G \in G$. La supplémentarité des deux noyaux en découle. Quant à la dernière propriété, elle est immédiate : $(2p - \mathrm{id})(x) = 2x_F - (x_F + x_G) = x_F - x_G = s(x)$. Le fait que s vérifie $s \circ s(x) = x$ est à peu près immédiat, et la réciproque peut se prouver de façon similaire à ce qu'on a fait pour les projections. On prouver que $F = \ker(s - \mathrm{id})$ et $G = \ker(s + \mathrm{id})$ sont supplémentaires : si $x \in F \cap G$, alors $s(x) = x$ et $s(x) = -x$, donc $s \circ s(x) = s(-x) = -s(x) = -x$, soit $x = -x$ puisque $s \circ s = \mathrm{id}$, et $x = 0$; par ailleurs, $x = \dfrac{x + s(x)}{2} + \dfrac{x - s(x)}{2}$, le premier élément vérifie $s\left(\dfrac{x + s(x)}{2}\right) = \dfrac{s(x) + x}{2}$, donc il appartient à F ; le deuxième appartient de même à G. Enfin, $x_F - x_G = \dfrac{x + s(x)}{2} - \dfrac{x - s(x)}{2} = s(x)$, donc s est bien une symétrie. □

Remarque 216. Ces conditions signifient simplement que ce par rapport à quoi on symétrise est laissé fixe par s, et ce parallèlement à quoi on symétrise est envoyé sur son opposé :



Exemple : Dans $\mathbb{R}^3$, on chercher à déterminer une expression analytique de la symétrie par rapport à $F = \mathrm{Vect}((1, 0, 1))$ et parallèlement à $G = \mathrm{Vect}((1, 2, 3); (1, 0, 0))$. Il faudrait déjà commencer par prouver que $F \oplus G = E$. comme nous avons de toute façon besoin de connaître la décomposition d'un vecteur dans $F \oplus G$ pour calculer son image par s, le calcul ne peut pas faire de mal. Considérons donc $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, er cherchons trois réels a, b et c tels que $(x, y, z) = a(1, 0, 1) + b(1, 2, 3) + c(1, 0, 0)$. Il n'est même pas indispensable d'écrire entièrement le système : la deuxième coordonnée donne immédiatement $y = 2b$, soit $b = \dfrac{y}{2}$; puis la troisième donne $a + 3b = z$, soit $a = z - 3b = z - \dfrac{3}{2}y$, et enfin via la première coordonnée $x = a + b + c$, donc $c = x - a - c = x + y - z$. Finalement, le système admet toujours une solution unique, ce qui prouve la supplémentarité de F et de G. Par ailleurs, $s(x, y, z) = a(1, 0, 1) - b(1, 2, 3) - c(1, 0, 0) = \left(z - \dfrac{3}{2}y, 0, z - \dfrac{3}{2}y\right) - \left(\dfrac{1}{2}y, y, \dfrac{3}{2}y\right) - (x + y - z, 0, 0) = (-x - 3y + 2z, -y, z - 3y)$. On vérifie facilement que $s \circ s = \mathrm{id}$ avec cette expression.

Définition 235. Toujours avec les mêmes notations que dans les définitions précédentes, l'**affinité de rapport λ par rapport à F et parallèlement à G** est l'application linéaire $a : x \mapsto x_F + \lambda x_G$.

Remarque 217. Les projections et symétries sont des cas particuliers d'affinités, lorsque $\lambda = 0$ et $\lambda = -1$ respectivement. Si $\lambda \neq 0$, l'affinité est un automorphisme, dont la réciproque est l'affinité de rapport $\dfrac{1}{\lambda}$. Notons aussi que, pour unr affinité a, on a toujours $E = \ker(a - \mathrm{id}) \oplus \ker(a - \lambda\,\mathrm{id})$.

14.2.3 Aspect matriciel

Une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ étant caractérisée par les images des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, ou encore par les coordonnées de ces images dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$, on peut tout savoir d'une application linéaire en connaissant simplement n fois p coordonnées. C'est ce qui va permettre de créer un lien entre applications linéaires et matrices, et de justifier l'introduction de calcul matriciel effectuée dans un précédent chapître, toutes les opérations sur les matrices s'interprétant naturellement en termes d'applications linéaires.

Définition 236. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base d'un espace vectoriel E et $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E. La **matrice de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$** est la matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont la j ème colonne est composée des coordonnées de u_j dans la base $\mathcal{B}$. Autrement dit, si $u_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, alors $M_{i,j} = \lambda_i$.

Définition 237. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_p)$ une base de F (on suppose donc dans tout ce paragraphe que les espaces vectoriels E et F possèdent des bases contituées d'un nombre fini de vecteurs). La **matrice représentative de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$** est la matrice de la famille $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ dans la base $\mathcal{B}'$. On la note $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

Exemple : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = (4x - 3y + z, -2x + y - 5z)$, la matrice de f dans les bases canoniques est $M = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$.

Remarque 218. Dans le cas d'un endomorphisme, on prendra souvent $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$, et on notera simplement la matrice $Mat_{\mathcal{B}}(f)$.

Proposition 238. En gardant les notations précédentes, si on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ la matrice-colonne des coordonnées dans $\mathcal{B}$ d'un élément $x \in E$ et $f(X) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$ celle des coordonnées de son image dans $\mathcal{B}'$, alors $f(X) = MX$, où M est la matrice représentant f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

Démonstration. En effet, on a $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, et par définition de la matrice M, on a $f(e_i) = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} m_{ji} f_j$. On a donc $f(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{p} m_{ji} f_j = \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i m_{ji} \right) f_j$. Or, l'unique terme de la j-ème ligne de la matrice colonne MX vaut précisément $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_{ji} x_i$, donc l'égalité demandée est bien vérifiée. □

Proposition 239. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $\lambda \in \mathbb{K}$, et M la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, alors la matrice de λf dans ces mêmes bases est λM.
De même, si $(f,g) \in \mathcal{L}(E,F)^2$, et M, N leurs matrices respectives, la matrice de $f + g$ est $M + N$.
Plus intéressant, si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$, et M, N leurs matrices respectives, alors la matrice de $g \circ f$ est NM.

Démonstration. En effet, si $f(X) = MX$ et $g(X) = NX$, $\lambda f(X) = \lambda MX$; $f(X) + g(X) = MX + NX = (M + N)X$ et, lorsque cela a un sens, $g \circ f(X) = g(MX) = NMX$. □

Exemple : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ définie par $(x, y, z) \mapsto (x - y, 2x + z)$, et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ définie par $(x, y) \mapsto (x + y, 3x - y, -x + 2y)$. Les matrices respectives de ces deux applications linéaires dans les bases canoniques sont $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Comme $NM = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, on peut en déduire que $g \circ f(x, y, z) = (3x - y + z, x - 3y - z, 3x + y + 2z)$.

Proposition 240. Un endomorphisme est bijectif si et seulement si sa matrice M dans une base $\mathcal{B}$ est inversible. Dans ce cas, la matrice de f^{-1} dans cette même base est M^{-1}.

Démonstration. C'est une application immédiate du dernier point de la proposition précédente : $f \circ f^{-1} = \text{id}$, donc en notant N la matrice de f^{-1} dans la base $\mathcal{B}$, $MN = I$, ce qui signifie exactement que $N = M^{-1}$. □

Il ne nous reste plus qu'à comprendre une chose fondamentale : comment déterminer la matrice de f dans une autre base $\mathcal{C}$ si on la connait dans une base $\mathcal{B}$.

Définition 238. Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\mathcal{C} = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ deux bases d'un même espace vectoriel E, la **matrice de passage** de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{C}$ est la matrice de la famille $\mathcal{C}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Proposition 241. Si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$, alors P est une matrice inversible, et la matrice de passage de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{B}$ est P^{-1}.

Démonstration. La matrice P peut être vue différemment : il s'agit de la matrice de l'application identité dans les bases $\mathcal{C}$ (au départ) et $\mathcal{B}$ (à l'arrivée). En effet, les colonnes de P contiennent exactement les coordonnées des vecteurs g_j dans la base $\mathcal{B}$. Si on note Q la matrice de cette même application identité dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ (qui est aussi la matrice de passage de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{B}$), le produit des deux matrices représentera l'application identité dans la base $\mathcal{C}$, au départ comme à l'arrivée. Mais cette dernière matrice est évidemment la matrice I, donc $QP = I$, ou encore $Q = P^{-1}$. □

Proposition 242. Soit $x \in E$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ la matrice-colonne de ses coordonnées dans une base $\mathcal{B}$, et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ la matrice-colonne de ses coordonnées dans une seconde base $\mathcal{C}$. Alors $X = PY$ (ou $Y = P^{-1}X$), où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$.

Démonstration. Explicitons les hypothèses utiles : $x = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} y_j g_j$ (en gardant les notations utilisées plus haut pour les vecteurs des deux bases), et $g_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i$, donc $x = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} y_j \left(\sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij} y_j \right) e_i$. Par unicité de la décomposition dans une base, on peut en déduire que $x_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} p_{ij} y_j$, soit exactement $X = PY$. □

Théorème 64. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases de E, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F. En notant $M = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$, $N = Mat_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(f)$, P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et Q la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}'$, alors $N = Q^{-1}MP$. En particulier, dans le cas d'un endomorphisme, $Mat_{\mathcal{C}}(f) = P^{-1}\, Mat_{\mathcal{B}}(f)P$, où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.

Démonstration. Sans expliciter les calculs, on peut exploiter les résultats précédents. Soit X la matrice-colonne des coordonnées de x dans la base $\mathcal{C}$, alors PX est la matrice de x dans $\mathcal{B}$, puis MPX représente la matrice de $f(X)$ toujours dans la base $\mathcal{B}$, et enfin $P^{-1}MPX$ est la matrice de $f(x)$ dans la base $\mathcal{C}$. Or, NX représente également les coordonnées de $f(x)$ dans $\mathcal{C}$, donc $NX = P^{-1}MPX$. Comme cela est vrai pour tout vecteur x, en particulier pour ceux de la base canonique, les matrices N et $P^{-1}MP$ représentent la même application linéaire dans $\mathcal{C}$, et sont donc égales. □

Exemple : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ ayant pour matrice dans la base canonique $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, et notons $\mathcal{B} = ((1,1,-1);(1,0,-1);(1,-1,0))$. Vérifions que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$: si $(x,y,z) = a(1,1,-1) + b(1,0,-1) + c(1,-1,0)$, alors $a - c = y$ et $-a - b = z$, donc $-b - c = y + z$. Comme par ailleurs $a + b + c = x$, on trouve en additionnant $a = x + y + z$, puis $c = a - y = x + z$, et $b = -a - z = -x - y - 2z$. Autrement dit, la matrice de passage de la base canonique vers $\mathcal{C}$ est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On peut calculer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$: $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. On peut d'ailleurs s'en rendre compte autrement, en calculant directement les images des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ par l'application f : $f(1,1,-1) = (1,1,-1)$; $f(1,0,-1) = (2,0,-2) = 2(1,0,-1)$ et $f(1,-1,0) = (3,-3,0)$, ce qui explique que la matrice soit effectivement diagonale. Nous venons en fait d'effectuer sans le dire notre première diagonalisation de matrices, mais vous attendrez l'an prochain pour en apprendre (beaucoup) plus sur ce sujet.

Chapitre 15

Intégration

Les mathématiciens sont comme les français :
quoique vous leur dites, ils le traduisent dans leur propre langue,
et le transforment en quelque chose de totalement différent.

Goethe

Qu'est-ce qu'un dilemme ?
Un lemme qui sert à prouver deux théorèmes !

Introduction

Dernier gros chapître d'analyse fondamentale reprenant des notions que vous avez déjà largement abordées au lycée avec ce chapître consacré à l'intégration. Comme pour la continuité et la dérivation, le but sera de donner une construction précise et rigoureuse de la notion géométrique d'intégrale (quoiqu'un peu incomplète dans le cas de l'intégrale), puis ensuite d'énoncer les théorèmes fondamentaux, mais également de pratiquer le calcul intégral, qui nécessite hélas un certain bagage technique. Les calculs explicites d'intégrales sont un savoir-faire à acquérir absolument, et font intervenir quantité de techniques pas toujours évidentes à manier.

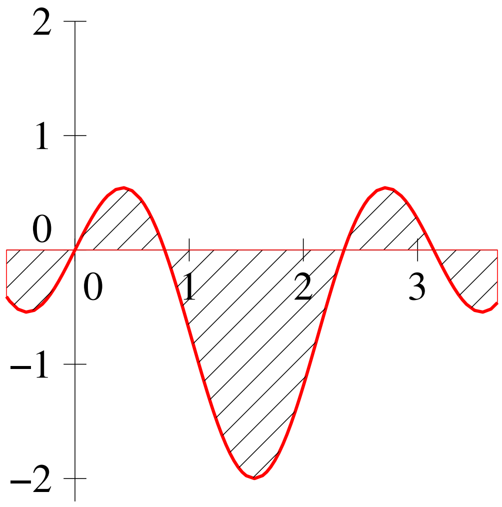
Objectifs du chapitre :

- comprendre comment la notion de primitive est reliée à la notion nettement plus géométrique de calcul d'aire.
- maîtriser parfaitement les techniques de l'intégration par partie et du changement de variables.
- savoir calculer des intégrales plus techniques : fractions rationnelles, fonctions trigonométriques, racines carrées.

15.1 Construction de l'intégrale

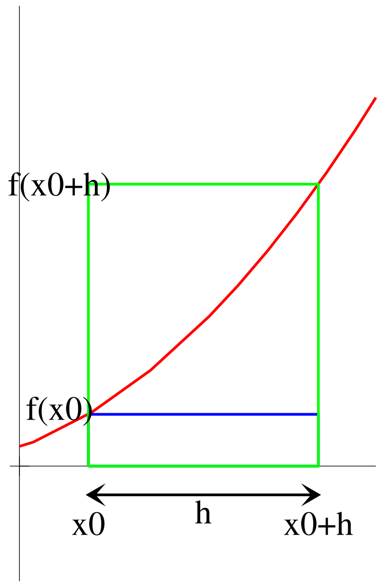
Avant de nous lancer dans le cours proprement dit, essayons de faire un petit calcul mal justifié permettant de comprendre comment ça fonctionne. L'intégration, comme vous le savez sûrement, a pour but de calculer des aires. Cette notion géométrique d'aire est loin d'être facile à définir et pose des problèmes de calcul effectif. Pour cela, comme vous le savez aussi, on recourt pour les calculs d'intégrale à la notion de primitive, qui est en quelque sorte l'opération inverse de la dérivation. Mais quel est le lien entre les deux ? Pour le comprendre, le plus simple est de se ramer à des calculs d'aires de formes géométriques très élémentaires : les rectangles.

Soit donc f une fonction définie et continue sur un segment $[a;b]$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. On s'intéresse à la fonction $\mathcal{A}$ définie sur $[a;b]$ de la façon suivante : $\mathcal{A}(x_0)$ est l'aire de la portion de plan délimitée par les droites d'équation $x = a$; $x = x_0$; $y = 0$ et par la courbe $\mathcal{C}_f$. L'aire sera comptée positivement lorsque $\mathcal{C}_f$ se trouve au-dessus de l'axe des abscisses, négativement dans le cas contraire.



Proposition 243. La fonction $\mathcal{A}$ est dérivable sur $[a;b]$ et a pour dérivée la fonction f.

Démonstration. (non rigoureuse) Calculons le taux d'accroissement de $\mathcal{A}$ entre x_0 et x_0+h (où h est un réel positif). Par définition, la quantité $\mathcal{A}(x_0+h)-\mathcal{A}(x)$ est l'aire comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = x_0$ et $x = x_0+h$. Supposons pour la clarté du raisonnement la fonction croissante aux alentours de x_0 (le cas général n'est pas vraiment plus compliqué), on a donc une figure qui ressemble à ceci :



On peut encadrer l'aire qui nous intéresse par celle des deux rectangles de largeur h dessinés sur la figure, l'un ayant pour hauteur $f(x_0)$ et l'autre $f(x_0+h)$. On a donc $hf(x_0) \leqslant \mathcal{A}(x_0+h) - \mathcal{A}(x_0) \leqslant$

$hf(x_0+h)$, ou encore $f(x_0) \leqslant \dfrac{\mathcal{A}(x_0+h)-\mathcal{A}(x_0)}{h} \leqslant f(x_0+h)$. Mais on obtient alors, en faisant tendre h vers 0 et en utilisant le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{\mathcal{A}(x_0+h)-\mathcal{A}(x_0)}{h} = f(x_0)$ (notez qu'on a besoin pour cela de la continuité de la fonction f). En procédant de la même manière pour $h<0$, on montre la dérivabilité de la fonction $\mathcal{A}$, et on a bien $\mathcal{A}'(x_0) = f(x_0)$. □

Le principe de base de cette méthode (tracer des rectangles) est à la base d'une méthode de calcul approché d'intégrales dont nous reparlerons en fin de chapître. En attandant, essayons de définir plus rigoureusement cette fameuse notion d'aire sous une courbe, encore une fois en utilisant des rectangles.

15.1.1 Fonctions en escalier

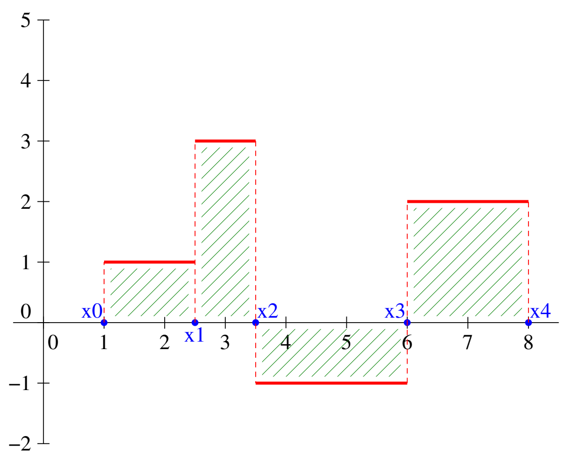
Définition 239. Soit $[a,b]$ une segment, une liste de $n+1$ réels $\tau = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ constitue une **subdivision** du segment $[a,b]$ si $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = a$. Le **pas** de la subdivision τ est le réel strictement positif $h = \min(x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1})$.

Remarque 219. En fait, il serait plus rigoureux de dire que les intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, pour i variant entre 0 et $n-1$, constituent une subdivision de $[a,b]$.

Définition 240. Soient τ et τ' deux subdivisions d'un même intervalle $[a,b]$, alors $\tau \cup \tau'$ est encore une subdivision de $[a,b]$ (en réordonnant les différents réels) notée $\tau \star \tau'$.

Définition 241. Une fonction φ est une **fonction en escalier** sur le segment $[a,b]$ s'il existe une subdivsion $\tau = (x_0, \dots, x_n)$ de $[a,b]$ telle que $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$, $\varphi_{|]x_i, x_{i+1}[}$ est une fonction constante. La subdivision τ est alors appelée **subdivision adaptée** à la fonction en escalier φ.

Remarque 220. Les valeurs prises par la fonction en x_0, x_1 etc n'ont aucune importance, et ne doivent pas nécessairement être égales à l'une des deux valeurs prises sur les intervalles ayant x_i pour borne. Un exemple de fonction en escalier sur le segment $[1,8]$ et de subdivision adaptée à cette fonction (les aires servant à la définition de l'intégrale sont également indiquées) :



Proposition 244. L'ensemble des fonctions en escalier sur un segment est un espace vectoriel.

Démonstration. Nous allons prouver qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de l'ensemble de toutes les fonctions définies sur $[a,b]$. Considérons donc deux fonctions φ et ψ, en escalier sur $[a,b]$, et τ et τ' deux subdivisions adaptées respectivement à τ et à τ'. La subdivision $\tau \star \tau'$ est alors une subdivision adaptée à la fois à φ et à ψ. En effet, chacun des intervalles définis par $\tau \star \tau'$ est inclus dans un des intervalles définis par τ, la fonction φ y est donc constante, et de même pour ψ. Chacune des deux fonctions étant constante sur les intervalles définis par $\tau \star \tau'$, toute combinaison linéaire de φ et ψ le sera aussi, et est donc aussi une fonction en escalier sur $[a,b]$. □

Définition 242. Soit φ une fonction en escalier sur $[a,b]$ et $\tau=(x_0,\dots,x_n)$ une subdivision adaptée à φ, alors l'**intégrale de φ sur le segment** $[a,b]$ est le nombre réel $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)\alpha_k$, où α_k est la valeur constante prise par φ sur l'intervalle $]x_k,x_{k+1}[$. Cette intégrale est notée $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)\ dx$.

Remarque 221. La variable x apparaissant dans la dernière notation introduite est une variable muette (comme l'indice d'une somme par exemple) qui peut être remplacée par n'importe quelle autre variable tant qu'on modifie également le dx qui suit : $\displaystyle\int_a^b \varphi(w)\ dw=\int_a^b \varphi(x)\ dx$.

Proposition 245. L'intégrale d'une fonction en escalier sur un segment ne dépend pas de la subdivision τ choisie.

Démonstration. Soient τ et τ' deux subdivisions adaptées à une même fonction φ, alors $\tau\star\tau'$ est également une subdivision adaptée à φ (nous l'avons démontré un peu plus haut), il suffit alors de constater que l'intégrale donnée par τ et par $\tau\star\tau'$ est identique (ce sera également le cas pour τ' et $\tau\star\tau'$, donc pour τ et τ'). Or, pour passer de τ à $\tau\star\tau'$, on se contente de découper chaque intervalle de τ en (éventuellement) plusieurs intervalles. L'égalité découle alors de la distributivité des sommes : si i réels $y_1,\dots,y_i$ apparaissent entre x_k et x_{k+1}, en notant $y_0=x_k$ et $y_{i+1}=x_{k+1}$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{i}(y_{j+1}-y_j)\alpha_k=\alpha_k\sum_{j=0}^{i}(y_{j+1}-y_j)=\alpha_k(x_{k+1}-x_k)$. □

Proposition 246. L'application $\varphi\mapsto\displaystyle\int_a^b \varphi(x)\ dx$ est une application linéaire. De plus, $\forall c\in[a,b]$, $\displaystyle\int_a^c \varphi(x)\ dx+\int_c^b \varphi(x)\ dx$ (résultat connu sous le nom de relation de Chasles). Enfin, si la fonction φ est positive sur le segment $[a,b]$, son intégrale sur $[a,b]$ est positive (résultat connu sous le nom de positivité de l'intégrale).

Démonstration. En prenant une subdivision adaptée simultanément à deux fonctions en escalier φ et ψ, la linéarité del'intégrale découle une fois de plus de la distributivité dans les sommes. Notons α_k et β_k les valeurs respectives prises par φ et ψ sur les intervalles de la subdivision commune, alors $\displaystyle\int_a^b(\lambda\varphi+\mu\psi)(x)\ dx=\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)(\lambda\alpha_k+\mu\beta_k)=\lambda\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)\alpha_k\mu\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)\beta_k=\lambda\int_a^b\varphi(x)\ dx+\mu\int_a^b\psi(x)\ dx$. La relation de Chasles est une conséquence encore plus simple de l'associativité de la somme (on ajouter c à la subdivision, ce qui ne change pas l'intégrale comme on l'a vu précédemment, et on sépare la somme en deux), et la positivité est carrément triviale : une somme de réels positifs est certainement positive. □

15.1.2 Intégrale d'une fonction continue

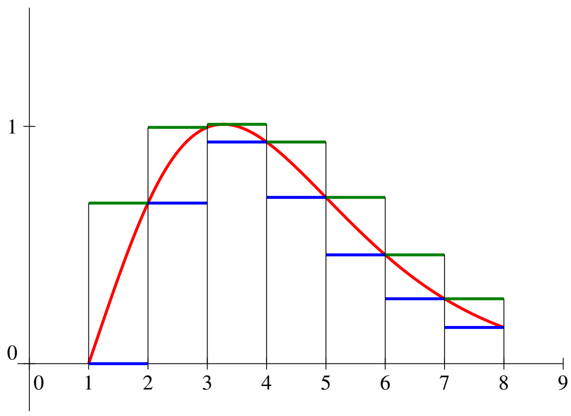
Dans tout ce paragraphe, ainsi que dans la suite du chapître, f désigne une fonction continue sur un segment $[a,b]$.

Théorème 65. Approximation des fonctions continues par des fonctions en escalier.
Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et ε un réel strictement positif. Alors il existe une fonction φ en escalier sur $[a,b]$ telle que $\forall x\in[a,b]$, $\varphi(x)\leqslant f(x)$ et $|f(x)-\varphi(x)|\leqslant\varepsilon$.

Démonstration. Nous admettrons ce résultat, qui est hors programme. Il nécessite en fait le théorème de Heine (hors programme), qui est lui-même une conséquence du théorème de Bolzano-Weierstraß(encore hors-programme, même si celui-là a été énoncé et même démontré dans notre chapître sur les suites). Pour essayer de comprendre l'idée (et ce qui pose problème), un début de raisonnement : f étant supposée continue en a, il existe certainement un intervalle de la forme $[a, x_1]$ sur lequel $|f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$ (c'est la définition de la limite qui nous le donne). On peut poser $\varphi(x) = \inf\limits_{x \in [a, x_1]} f(x)$ sur l'intervalle $[a, x_1]$. Ensuite, de la même manière, on trouve x_2 tel que $|f(x_1) - f(x)| \leqslant \varepsilon$ sur $[x_1, x_2]$, ce qui permet de poser $\varphi(x) = \inf\limits_{x \in [x_1, x_2]} f(x)$ sur $]x_1, x_2]$. Et ainsi de suite, on construit une subdivision τ et une fonction en escalier vérifiant les hypothèses du théorème. Le problème est qu'on n'a aucun contrôle sur le pas de la subdivision créée : on pourrait très bien avoir des intervalles de plus en plus petits, et ne jamais approcher de b, la deuxième borne de notre segment. Le théorème de Heine assure justement que ce ne sera pas le cas, en « renversant » les quantificateurs dans la définition de la continuité : il assure que, si f est continue sur $[a, b]$ et $\varepsilon > 0$, il existe un réel η tel que $\forall (x, y) \in [a, b]^2$, $|x - y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$. Le réel η ne dépend plus de ε, ce qui change tout. $\square$

Théorème 66. En notant $\mathcal{E}^- = \{\varphi | \forall x \in [a, b], \varphi(x) \leqslant f(x)\}$ avec φ en escalier sur $[a, b]$, et $\mathcal{E}^+ = \{\psi | \forall x \in [a, b], \psi(x) \geqslant f(x)\}$ (où ψ est, comme vous l'aurez deviné, en escalier sur $[a, b]$), alors $\sup\limits_{\varphi \in \mathcal{E}^-} \int_a^b \varphi(x)\, dx = \inf\limits_{\psi \in \mathcal{E}^+} \int_a^b \psi(x)\, dx$.

Démonstration. Une petit illustration de ce théorème, qui dit simplement qu'on peut encadrer une fonction continue par deux fonctions en escalier, dont les intégrales peuvent être rendues aussi proches qu'on le souhaite (ici avec un pas constant, une fonction en escalier minorant f en bleu, et une majorant f en vert) :



La démonstration est en fait relativement simple avec le théorème précédent. On peut déjà constater que $\forall \varphi \in \mathcal{E}^-$, $\forall \psi \in \mathcal{E}^+$, $\int_a^b \varphi(x)\, dx \leqslant \int_a^b \psi(x)\, dx$ (c'est par exemple une conséquence de la positivité et de la linéarité de l'intégrale, en constatant que la fonction $\psi - \varphi$ est toujours positive). On en déduit que $\sup\limits_{\varphi \in \mathcal{E}^-} \int_a^b \varphi(x)\, dx \leqslant \inf\limits_{\psi \in \mathcal{E}^+} \int_a^b \psi(x)\, dx$ (au passage cela prouve l'existence de la borne supérieure et de la borne inférieure, car le membre de gauche, par exemple, est majorée par l'intégrale de n'importe quelle fonction en escalier majorant f, et de telles fonctions existent). Ensuite, le théorème assure l'existence d'une fonction $\varphi \in \mathcal{E}^-$ telle que $\forall x \in [a, b]$, $f(x) - \varphi(x) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$ (qui est un nombre strictement positif comme les autres), mais aussi de $\psi \in \mathcal{E}^+$ telle que $\forall x \in [a, b]$, $\psi(x) - f(x) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$ (on applique le théorème à $-f$ et on prend l'opposé de la fonction obtenue). On a donc, $\forall x \in [a, b]$, $0 \leqslant \psi(x) - \varphi(x) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{b-a}$. La fonction $\psi - \varphi$ et a une intégrale positive et majorée par $\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k) \times \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon$. Autrement dit, en appliquant la linéarité de l'intégrale des fonctions en escalier, $\int_a^b \psi(x)\ dx \leqslant \int_a^b \varphi(x)\ dx + \varepsilon$. Cela prouve que $\sup_{\varphi \in \mathcal{E}^-} \int_a^b \varphi(x)\ dx \geqslant \inf_{\psi \in \mathcal{E}^+} \int_a^b \psi(x)\ dx - \varepsilon$. Comme cette inégalité est vraie quelle que soit $\varepsilon > 0$, les deux membres sont nécessairement égaux. □

Définition 243. L'**intégrale de la fonction f sur le segment** $[a, b]$ est le nombre réel $\sup_{\varphi \in \mathcal{E}^-} \int_a^b \varphi(x)\ dx$ $= \inf_{\psi \in \mathcal{E}^+} \int_a^b \psi(x)\ dx$. On le note $\int_a^b f(x)\ dx$.

Proposition 247. La linéarité de l'intégrale est conservée sur l'ensemble des fonctions continues, ainsi que la relation de Chasles et la positivité.

Démonstration. Cette démonstration un peu technique fait intervenir la caractérisation des bornes supérieure et inférieure. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$, λ et μ deux réels, et $\varepsilon > 0$. Par caractérisation de la borne supérieure, il existe une fonction en escalier φ majorée par f sur $[a, b]$ telle que $0 \leqslant \int_a^b f(x) - \varphi(x)\ dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2\lambda}$. De même, il existe une fonction ψ majorée par g telle que $\int_a^b g(x) - \psi(x)\ dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2\mu}$. La fonction $\xi = \lambda\varphi + \mu\psi$ est alors une fonction en escalier majorée par $\lambda f + \mu g$ et telle que $\int_a^b \xi(x)\ dx \geqslant \lambda \int_a^b f(x) + \mu \int_a^b g(x) - \varepsilon$. Comme, par définition, $\int_a^b \xi(x)\ dx \leqslant \int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x)\ dx$, on en déduit que $\int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x)\ dx \leqslant \lambda \int_a^b f(x)\ dx + \mu \int_a^b g(x)\ dx - \varepsilon$. Cela étant vrai quelle que soit la valeur de ε, $\int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x)\ dx \leqslant \lambda \int_a^b f(x)\ dx + \mu \int_a^b g(x)\ dx$. On prouve l'inégalité dans l'autre sens de la même façon, à l'aide de fonctions en escalier majorantes, et on en déduit la linéarité.
La relation de Chasles est plus facile à prouver : si φ minore f sur $[a, b]$, alors la restriction de φ à $[a, c]$ et à $[c, b]$ minore les restrictions de f à chacun des deux intervalles, et $\int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx \geqslant \int_a^b \varphi(x)\ dx + \int_c^b \varphi(x)\ dx = \int_a^b \varphi(x)\ dx$. Comme cela est vrai pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{E}^-$, on en déduit que $\int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx \geqslant \int_a^b f(x)\ dx$. Encore une fois, l'inégalité réciproque se prouve à l'aide de fonction en escalier majorantes, de la même manière.
Le dernier point est de loin le plus facile : si f est positive sur $[a, b]$, la fonction nulle appartient à $\mathcal{E}^-$, et comme son intégrale est nulle, on en déduit que $\int_a^b f(x)\ dx \geqslant 0$. □

Proposition 248. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ telles que $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\ dx \leqslant \int_a^b g(x)\ dx$.

Démonstration. C'est une conséquence des propriétés précédentes : si $f \leqslant g$, alors $g - f \geqslant 0$, donc par positivité de l'intégrale $\int_a^b g(x) - f(x)\ dx$. Il suffit alors d'appliquer la linéarité de l'intégrale pour conclure. □

Remarque 222. Ce résultat signifie simplement qu'on peut intégrer des inégalités. Il sera souvent appliqué dans un cas très particulier où l'une des deux fonctions est constante : si f est majorée par M et minorée par m sur $[a,b]$, alors $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\ dx \leqslant M(b-a)$.

Proposition 249. Soit f une fonction continue et positive sur $[a,b]$, alors f est nulle si et seulement si $\int_a^b f(x)\ dx = 0$.

Proposition 250. Il y a une implication évidente, pour démontrer l'autre sens on procède par contraposée. Supposons que f ne soit pas nulle sur $[a,b]$. Il existe donc un réel $x \in]a,b[$ tel que $f(c) > 0$ (même si le maximum de f est atteint en une borne de l'intervalle, par continuité, f restera strictement positive à l'intérieur). Par continuité, on peut en déduire l'existence d'un intervalle $]c-\eta, c+\eta[$ sur lequel $f(x) \geqslant \frac{f(c)}{2}$. La fonction f est alors minorée par la fonction en escalier φ valant $\frac{f(c)}{2}$ sur $]c-\eta, c+\eta[$ et 0 ailleurs. Cette fonction en escalier ayant pour intégrale $\eta f(c) > 0$, on en déduit que $\int_a^b f(x)\ dx > 0$, ce qui prouve notre deuxième implication.

Proposition 251. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, alors $\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\ dx$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer la propriété précédente : $f \leqslant |f|$, donc $\int_a^b f(x)\ dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\ dx$. Mais comme $-f \leqslant |f|$ également, on peut aussi écrire $-\int_a^b -f(x)\ dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\ dx$. La combinaison des deux inégalités prouve la propriété. Cette propriété est d'ailleurs visuellement évidente, l'intégrale de $|f|$ revient à calculer positivement toutes les aires comprises entre la courbe et l'axe des abscisses (y compris sur les intervalles où f est négative), on obtient forcément une valeur plus grande qu'en calculant la valeur absolue de l'intégrale de f, où certaines portions peuvent être comptées négativement. □

Définition 244. La **valeur moyenne** de f sur $[a,b]$ est le nombre réel $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx$.

Remarque 223. Cette valeur représente la largeur d'un rectangle dont l'aire est égale à celle donnée par l'intégrale de la fonction f, ce qui correspond bien à une notion de valeur moyenne.

Proposition 252. Inégalité de la moyenne.
Si f et g sont continues sur $[a,b]$, alors $\left|\int_a^b f(x)g(x)\ dx\right| \leqslant \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \int_a^b |g(x)|\ dx$.

Démonstration. Il suffit encore une fois d'appliquer la dernière propriété prouvée : $\left|\int_a^b f(x)g(x)\ dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)| \times |g(x)|\ dx$. Comme $|f|$ est majorée par $\sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$, le résultat en découle. □

Proposition 253. Inégalité de Cauchy-Schwarz.
Si f et g sont continues sur $[a,b]$, alors $\left(\int_a^b f(x)g(x)\ dx\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f(x)^2\ dx\right) \times \left(\int_a^b g(x)^2\ dx\right)$. De plus, cette inégalité est une égalité si et seulement si $f = 0$ ou $f = \lambda g$ pour un certain réel λ .

Démonstration. Nous retrouverones ce résultat de manière plus générale dans notre chapître consacré à la géométrie euclidienne. La démonstration en est assez surprenante : pour un réel t quelconque, on pose $P(t) = \int_a^b (f(x) + tg(x))^2 \, dx$. Par linéarité, $P(t) = \int_a^b f(x)^2 \, dx + 2t \int_a^b f(x)g(x) \, dx + t^2 \int_a^b g(x)^2 \, dx$. Autrement dit, $P(t)$ est un polynôme de degré 2 (sauf si f est la fonction nulle, auquel cas l'inégalité est triviale). Or, $P(t)$ étant l'intégrale d'une fonction positive, est toujours positif. Cela implique que son discriminant Δ est négatif. Comme $\Delta = 4\left(\int_a^b f(x)g(x) \, dx\right)^2 - 4\int_a^b f(x)^2 \, dx \int_a^b g(x)^2 \, dx$, l'inégalité en découle immédiatement. Pour avoir égalité dans l'inégalité, il faut que le discriminant soit nul, ce qui implique l'existe d'une valeur de t pour laquelle $\int_a^b (f(x) + tg(x))^2 \, dx = 0$. Comme c'est une intégrale de fonction continue et positive, elle ne peut s'annuler que si $f(x) + tg(x)$ est nulle sur $[a, b]$, ce qui implique $f(x) = -tg(x)$, avec t constant. □

Remarque 224. Tous les résultats énoncés dans ce paragraphe peuvent s'étendre facilement à des fonctions qui ne sont pas tout à fait continues, mais seulement continues par morceaux (c'est-à-dire continues sur tous les intervalles délimités par une certaine subdivision de $[a, b]$). Il suffit pour cela de définir l'intégrale de la fonction comme la sommes des intégrales des fonctions continues sur chacun des intervalles de la subdivision, en parfaite cohérence avec la relation de Chasles. La construction de l'intégrale que nous avons donnée fonctionne d'ailleurs pour une classe de fonctions plus large que les fonctions continues, qu'on appelle fonctions réglées (mais que nous n'étudierons pas cette année). Il existe d'autres façons de définir rigoureusement l'intégrale, celle que nous avons étudiée est l'intégrale de Riemann, et il existe notamment une intégrale de Lebesgue qui permet de définir l'intégrale sur une classe de fonctions encore nettement plus large, appelées fonctions mesurables. Bref, même si ça ne vous saute pas aux yeux, nous avons fait au plus simple !

Remarque 225. On peut également définir assez facilement des intégrales de fonctions continues sur un segment et à valeurs complexes : si $f(x) = g(x) + ih(x)$, avec g et h deux fonctions continues à valeurs réelles, alors on pose $\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b g(x) \, dx + i \int_a^b h(x) \, dx$. Par exemple, on peut calculer $\int_0^\pi e^{ix} \, dx = \int_0^\pi \cos(x) \, dx + i \int_0^\pi \sin(x) \, dx = [\sin(x)]_0^\pi + i[-\cos(x)]_0^\pi = 2i$ (après, à vous de voir si vous arrivez à donner une signification intéressante à ce résultat).

15.1.3 Primitives

Définition 245. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que F est une **primitive** de f sur I si la fonction F est dérivable sur I et vérifie $F' = f$.

Exemple : Sur n'importe quel intervalle, la fonction $x \mapsto 1$ a pour primitive $x \mapsto x$, mais aussi $x \mapsto x + 2$; $x \mapsto x - \sqrt{127}$ etc. Sur l'intervalle $\mathbb{R}^{+*}$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ a pour primitive $x \mapsto \ln(x)$.

Proposition 254. Si F est une primitive de f sur l'intervalle I, la fonction $x \mapsto F(x) + k$ ($k \in \mathbb{R}$) est également une primitive de f. Réciproquement, si G est une primitive de f, la fonction $G - F$ est constante (autrement dit, il existe une constante k pour laquelle $G = F + k$).

Démonstration. C'est essentiellement évident : si $F' = f$, alors $(F + k)' = f$ donc $F + k$ est une primitive de f. Et si F et G sont deux primitives de f, on a $(G - F)' = f - f = 0$. Il reste tout de même à expliquer pourquoi les seules fonctions dont la dérivée est nulle sont les fonctions constantes. C'est une conséquence du théorème des accroissements finis : soient x et y deux réels appartenant à I, alors il existe un réel $c \in]x, y[$ tel que $\frac{(G - F)(y) - (G - F)(x)}{y - x} = f(c) - f(c) = 0$, donc $(G - F)(y) = G - F(x)$, et ce quels que soient x et y. □

Proposition 255. Soit f continue sur I et $a \in I$, alors la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$ est une primitive de f sur I. Il s'agit de l'unique promitive de f sur I s'annulant en a.

Démonstration. L'unicité est évidente : si deux primitives de f s'annulent en a, puisqu'elles diffèrent d'une constante, cette constante et nécessairement nulle. La première partie du théorème revient à prouver rigoureusement le résultat donné dans l'introduction de ce chapître. Fixons un réel $x \in I$ et considérons un autre réel $h > 0$ tel que $[a, a+h[\subset I$, on peut alors écrire $F(x_0+h) = \displaystyle\int_a^{x_0+h} f(t)\ dt = \int_a^{x_0} f(t)\ dt + \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0) + (f(t) - f(x_0))\ dt = F(x_0) + hf(x_0) + \int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0))\ dt$. Fixons $\varepsilon > 0$. La fonction f étant continue en x_0, il existe un réel $\eta > 0$ tel que, $\forall t \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$, $|f(t) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$. En intégrant cette inégalité entre x_0 et x_0+h, on obtient $\left|\displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h} f(t) - f(x_0)\ dt\right| \leqslant \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|\ dt \leqslant h\varepsilon$. Autrement dit, $\displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h} f(t) - f(x_0)\ dt \underset{h\to 0}{=} o(h)$. En reprenant notre calcul initial, $F(x_0 + h) = F(x_0) + hf(x_0) + o(h)$, ce qui constitue un développement limité à l'ordre 1 en x_0 de F et prouve que F est dérivable en x_0 et surtout que $F'(x_0) = f(x_0)$. On a bien prouvé que la fonction F était une primitive sur I de f. □

Corollaire 7. Toute fonction continue sur un segment y admet une primitive.

Remarque 226. Elle en admet même une infinité, qui diffèrent toutes d'une constante, mais toutes les primitives ne peuvent pas nécessairement se mettre sous la forme précédente puisqu'elles ne s'annulent pas nécessairement sur I. Ce résultat permet notamment de justifier la définition de la fonction ln comme **la** primitive de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{+*}$ s'annulant en 1. Il est tellement important qu'il est parfois désigné sous la dénomination de théorème fondamental de l'analyse.

Définition 246. Pour une fonction F continue sur un segment $[a, b]$, on note $[F(x)]_a^b$ le réel $F(b) - F(a)$.

Exemple : La détermination de primitive sera bien sûr la technique privilégiée pour le calcl explicite d'intégrales. Par exemple, $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{x}\ dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = \frac{2}{3}(2^{\frac{3}{2}} - 1) = \frac{4\sqrt{2} - 2}{3}$.

Exemple : Il faudra également être capable de reconnaître immédiatement les dérivées de composées les plus classiques, qui permettent de calculer directement des intégrales pas toujours évidentes à repérer. Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 2te^{t^2}\ dt = [e^{t^2}]_0^1 = e - 1$.

Pour conclure ce paragraphe, un petit tableau des primitives et formules utiles à connaître. Rien de nouveau bien entendu, puisque ce tableau est simplement obtenu en « retournant » celui des dérivées classiques. D'autres primitives peuvent être considérées comme classique, comme par exemple celle de la tangente qui s'obtient simplement en écrivant $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ et en repérant une dérivée de ln, mais elles sont volontairement omises car on les retrouvera (et on détaillera donc le calcul) systématiquement dans les exercices. Dans la dernière colonne du tableau, f (ou g) désigne une fonction continue quelconque, et F (ou G) une de ses primitives.

Fonction	*Primitive*	*Fonction*	*Primitive*	*Fonction*	*Primitive*
x^a	$\dfrac{x^{a+1}}{a+1}$	$\mathrm{ch}(x)$	$\mathrm{sh}(x)$	kf	kF
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert)$	$\mathrm{sh}(x)$	$\mathrm{ch}(x)$	$f+g$	$F+G$
e^x	e^x	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$u'f(u)$	$F(u)$
$\ln(x)$	$x\ln(x)-x$	$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\mathrm{Argth}(x)$	$f'f$	$\dfrac{f^2}{2}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$\dfrac{f'}{f}$	$\ln\lvert f\rvert$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\mathrm{Argch}(x)$	$f'e^f$	e^f
		$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\mathrm{Argsh}(x)$		

Exemple : étude d'une fonction définie par une intégrale. Un type d'exercices très classique (et donc à maîtriser) consiste à faire étudier une fonction définie par une intégrale à bornes variables. Même si on ne sait pas intégrer la fonction sous l'intervalle, on pourra toujours réussir à calculer explicitement la dérivée de la fonction à étudier, comme dans l'exemple suivant : $\varphi(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{sh}(t)}{t}\,dt$. La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\mathrm{sh}(t)}{t}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$, $\varphi(x)$ sera donc défini si $\forall t \in [x, 2x]$, $t \neq 0$. C'est le cas si $x \neq 0$, donc $\mathcal{D}_\varphi = \mathbb{R}^*$.
Étudions les variations de φ : en notant F une primitive de f sur l'un des deux intervalles $\mathbb{R}^{+*}$ ou $\mathbb{R}^{-*}$, on peut écrire $\varphi(x) = F(2x) - F(x)$, donc en dérivant $\varphi'(x) = 2f(2x) - f(x) = \dfrac{2\,\mathrm{sh}(2x)}{2x} - \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{x} = \dfrac{\mathrm{sh}(2x) - \mathrm{sh}(x)}{x}$. La fonction sh étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{sh}(2x) - \mathrm{sh}(x)$ est du signe de x (si $x \geqslant 0$, $2x \geqslant x$, mais si $x < 0$, $2x < x$), donc $\varphi'(x) \geqslant 0$ sur chacun des deux intervalles.
On peut compléter l'étude par des calculs de limite. Ici, la fonction f ayant pour limite $+\infty$ en $+\infty$ (par croissance comparée), on peut certainement trouver un réel $x_0 > 0$ à partir duquel $f(x) \geqslant 1$. On peut alors écrire $\forall x \geqslant x_0$, $\varphi(x) \geqslant \displaystyle\int_x^{2x} f(t)\ dt \geqslant \int_x^{2x} 1\ dt = x$, dont on déduit aisément que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$. On prouve de même que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = -\infty$. Le plus difficile est de calculer les limites en 0 (de chaque côté, la technique est la même). On sait que $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(t) = 1$, donc, en fixant un réel $\varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$, $\forall t \in]0, \eta]$, $1 - \varepsilon \leqslant f(t) \leqslant 1 + \varepsilon$. En intégrant ces inégalités, on obtient que, $\forall x \in \left]0, \dfrac{\eta}{2}\right]$ (pour avoir $[x, 2x] \subset]0, \eta]$), $x(1-\varepsilon) \leqslant \varphi(x) \leqslant x(1+\varepsilon)$. Cela suffit pour prouver, en appliquant le théorème des gendarmes, que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \varphi(x) = 0$ (et de même en 0^-). On obtient finalement le très simplement tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$0 \,\Vert\, 0$	$\nearrow$	$+\infty$

On peut même prolonger φ par continuité en posant $\varphi(0) = 0$ pour en faire une bijection croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice : étude d'une suite d'intégrales. Encore un sujet classique, pour lequel il faut connaitre les méthodes classiques. On définit une suite (I_n) par $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\ dt$.

1. Calculer les valeurs de I_0, I_1 et I_2.
2. Déterminer la monotonie de la suite (I_n), et en déduire la convergence de la suite.
3. En écrivant $1 - I_n$ sous la forme d'une intégrale, déterminer la limite de $1 - I_n$, puis prouver que $\lim_{n \to +\infty} I_n = 1$.

1. On calcule donc $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{2}\, dt = \frac{1}{2}$; puis $I_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\, dt = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2)$; et enfin $I_2 = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt = [\arctan(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$. Notons que les valeurs suivantes des termes d ela suite seraient nettement plus techniques à calculer. on est notamment complètement incapables de donner une expression explicite pour I_n.
2. Calculons donc $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^{n+1}} - \frac{1}{1+t^n}\, dt = \int_0^1 \frac{t^n - t^{n+1}}{(1+t^{n+1})(1+t^n)}\, dt$. Cette intégrale est celle d'une fonction positive sur $[0,1]$ (le dénominateur est clairement positif, et sur $[0,1]$, $t^{n+1} \leqslant t^n$), donc $I_{n+1} - I_n \geqslant 0$, ce qui prouve la croissance de la suite (In). Une façon légèrement différente de rédiger ce calcul est de procéder par inégalités successives sur les fonctions intervenant sous l'intégrale, pour finir par intégrer les inégalités obtenues. La suite (I_n) est par ailleurs majorée, car $\frac{1}{1+t^n} \leqslant 1$ sur $[0,1]$ (quelle que soit la valeur de n), donc $I_n \leqslant \int_0^1 1\, dt = 1$. Elle converge donc.
3. Calculons $1 - I_n = \int_0^1 1\, dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t^n}\, dt = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\, dt$. Par la même majoration que tout à l'heure, $1 - I_n \leqslant \int_0^1 t^n\, dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$. Par ailleurs, $1 - I_n \geqslant 0$ puisque $I_n \leqslant 1$. Une simple application du théorème des gendarmes permet alors de conclure que $\lim_{n \to +\infty} 1 - I_n = 0$, ce qui revient bien à dire que $\lim_{n \to +\infty} I_n = 1$.

15.2 Techniques de calcul

15.2.1 Intégration par parties

Théorème 67. Intégration par parties.
si u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a,b]$, alors $\int_a^b u(t)v'(t)\, dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\, dt$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la formule de dérivation d'un produit : uv est une primitive de $u'v + uv'$, donc $[uv]_a^b = \int_a^b u'(t)v(t) + u(t)v'(t)\, dt$, et la formule en découle par linéarité. □

Remarque 227. Cette formule peut paraitre peu intéressante dans la mesure où on se contente de remplacer une intégrale de produit par une autre intégrale de produit, mais elle est en fait extrêmement importante en pratique. Elle sera très souvent utilisée dans le cas d'un calcul d'intégrale de produit peu évident, que l'on souhaite transformer un produit plus simple. Il faut bien comprendre que lors d'un intégration par parties (qu'on abrégera systématiquement en IPP), l'une des deux fonctions du produit est dérivée et l'autre intégrée. On essaiera donc de prendre pour u des fonctions qui se simplifient en dérivant (par exemple $u(t) = t$, ou $u(t) = \ln(t)$), et pour v' des fonctions qui ne se compliquent pas trop quand on intègre (par exemple $v'(t) = e^t$).

Exemple : On peut calculer une primitive de la fonction ln à l'aide d'une IPP. Prenons la primitive qui s'annule en 1, et qui est donc définie par $F(x) = \int_1^x \ln(t)\ dt$. Il n'y a pas de produit, ce qui peut sembler rédhibitoire pour une IPP. Ce n'est en fait pas un problème, on pose simplement $u(t) = \ln(t)$ et $v'(t) = 1$, ce qui donne $u'(t) = \frac{1}{t}$ et $v'(t) = t$. On obtient alors $F(x) = [t\ln(t)]_1^t - \int_1^x \frac{t}{t}\ dt = x\ln(x) - (x-1)$. On prend plus classiquement $x \mapsto x\ln(x) - x$ comme primitive de ln (qui ne diffère de la précedente que d'une constante).

Exemple : On souhaite calculer $I = \int_0^1 x^2 e^x\ dx$. On fait une première IPP en posant $u(x) = x^2$, donc $u'(x) = 2x$, et $v'(x) = v(x) = e^x$, ce qui donne $I = [x^2e^x]_0^1 - \int_0^1 2xe^x\ dx = e - 2\int_0^1 xe^x\ dx$. On peut effectuer une deuxième IPP en posant cette fois-ci $u(x) = x$, donc $u'(x) = 1$, et toujours $v'(x) = v(x) = e^x$, ce qui donne $I = e - 2[xe^x]_0^1 + 2\int_0^1 e^x\ dx = e - 2e + 2[e^x]_0^1 = e$.

15.2.2 Changement de variable

Théorème 68. Changement de variable.
Soit f une fonction continue sur le segment $[\varphi(a), \varphi(b)]$, où φ effectue une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $[a,b]$ vers $[\varphi(a), \varphi(b)]$. Alors $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\ dt = \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)\ du$.

Démonstration. C'est cette fois-ci une conséquence directe de la formule de dérivation d'une composée : $\varphi' \times f \circ \varphi$ a pour primitive $F \circ \varphi$ (où F est une primitive quelconque de f), donc $\int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)\ du = [F \circ \varphi(u)]_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\ dt$. □

Remarque 228. En pratique on n'utilise pas vraiment la formule telle quelle. Si on dispose d'une intégrale $\int_a^b f(x)\ dx$ avec une fonction compliquée et qu'on souhaite remplacer une partie de la fonction par une nouvelle variable allégée, on « pose » $t = \varphi(x)$, et on effectue alors les modification suivantes dans notre intégrale :

- on remplace les bornes a et b par $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$.
- on remplace dans l'intégrale $f(x)$ par $f \circ \varphi(t)$ (autrement dit, on remplace tous les x par des t).
- on modifie le dx en $\varphi'(t)dt$ (on écrira simplement $dx = \varphi'(t)dt$ même si c'est un abus de notation).

Ces modification reviennent bien à appliquer la formule donnée dans le théorème.

Exemple : Un calcul extrêmement classique faisant intervenir un changement de variable, celui de $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ dx$. On pose $x = \sin(t)$, ou si vous préférez $t = \arcsin(x)$. On remplace alors les bornes par $\arcsin(0) = 0$ et $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$; $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2(t)} = \sqrt{\cos^2(t)} = \cos(t)$ (car $\cos(t) \geqslant 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$) ; et $dx = \cos(t)\ dt$. On obtient $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\ dt$. On peut alors utiliser la formule de duplication $\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$ pour écrire $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2}\ dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$. Rien de surprenant dans ce résultat pusiqu'on vient de calculer l'aire d'un quart de cercle de rayon 1.

Remarque 229. C'est à l'aide de la formule de changement de variable qu'on peut prouver de façon rigoureuse les résultats suivants, qui sont géométriquement évidents : si f est une fonction impaire,

$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$ (en faisant le changement de variable $t = -x$, on constate que cette intégrale est égale à son propre opposé) ; et si f est une fonction paire, $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int_{-a}^{a} f(x)\, dx$ (même technique).

15.2.3 Fractions rationnelles

Définition 247. Une **fraction rationnelle** est un quotient de polynômes.

Théorème 69. Décomposition en éléments simples.
Soit $F(X) = \dfrac{P(X)}{Q(X)}$ une fraction rationnelle, et $Q(X) = \prod_{i=1}^{k}(X - a_i)^{\alpha_i}\prod_{j=1}^{p}(X^2 + b_jX + c_j)^{\beta_j}$ la décomposition en produit de polynômes irréductibles de Q (on peut toujours le supposer unitaire quitte à changer le coefficient dominant de P). Alors F peut se décomposer de manière unique sous la forme $F(X) = R(X) + \sum_{i=1}^{k}\sum_{l=1}^{\alpha_i} \dfrac{\lambda_{i,l}}{(X-a_i)^{\alpha_i}} + \sum_{j=1}^{p}\sum_{m=1}^{\beta_j} \dfrac{\mu_{j,m}X + \nu_{j,m}}{(X^2 + b_jX + c_j)^{\beta_j}}$, où $R \in \mathbb{R}[X]$, et tous les coefficients $\lambda_{i,l}$, $\mu_{j,m}$ et $\nu_{j,m}$ sont des réels.

Démonstration. Ce théorème n'étant pas explicitement à votre programme, nous ne le démontrerons pas. Il faut en fait essqyer de comprendre comment ça fonctionne, car vous êtes tout de même censés savoir faire des décomposition en éléments simples en pratique. Prenons le cas le plus simple où Q est un polynôme à racines simples, sans facteurs du second degré. Si on note a_1, a_2, …, a_n ses racines, on peut alors simplement écrire $F(x) = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\lambda_i}{X - a_i}$. Autrement dit, le produit qui était présent au dénominateur a été séparé en somme de dénominateurs distincts. Les choses se compliquent dans deux cas :

- Il y a une racine multiple. Dans ce cas, au lieu d'avoir une simple constante divisée par $(X-a_i)^2$ par exemple (dans le cas d'une racine double), on aura deux termes de la forme $\dfrac{\lambda_1}{X - a_i} + \dfrac{\lambda_2}{(X - a_i)^2}$. Pensez simplement que le fait d'avoir du degré 2 en bas impose la présence de deux constantes. Plus la multiplicité sera élevée, plus il y a aura de termes dans la décomposition faisant intervenir la racine multiple.
- Si on travaille sur $\mathbb{R}$ (ce qui sera toujours notre cas), il peut y avoir un facteur de degré 2 à discriminant négatif, qu'on ne peut pas factoriser plus. Pas grave, il comptera comme un terme normal, mais au lieux d'avoir une constante au numérateur, on aura un polynôme de degré 1 (c'est encore cohérent avec le fait qu'il faille deux constantes pour gérer un dénominateur de degré 2). Si jamais ce terme apparait avec une multiplicité (combinaison des deux cas problématiques), on aura comme précédemment une paire de constantes à trouver pour chaque puissance jusqu'à celle correspondant à la multiplicité.

□

Techniques de calcul : Pour effectuer en pratique une décomposition en éléments simples, il est utile de connaître quelques petites techniques, qui évitent de recourir au calcul brutal consistant à mettre au même dénominateur tous les termes pour identifier.

- Dans le cas de dénominateurs de degré 1 (racines simples ou premier terme correspondant à une racine multiple) de la forme $X - a$, on peut multiplier les deux membres par $X - a$ puis évaluer l'égalité pour $X = a$. Par exemple, pour effectuer la décomposition de $F(X) = \dfrac{2X+3}{X^2 - X - 2}$, on commence par factoriser le dénominateur sous la forme $(X + 1)(X - 2)$ (il y a une racine évidente). Le théorème de décomposition nous assure alors que $F(X) = \dfrac{a}{X+1} + \dfrac{b}{X-2}$.

Multiplions l'égalité par $X+1$: cela donne $\frac{2X+3}{X-2} = a + \frac{b(X+1)}{X-2}$. En prenant $X = -1$, on trouve alors $-\frac{1}{3} = a$. De même, enmultipliant l'égalité par $X-2$ on trouve $\frac{2X+3}{X+1} = \frac{a(X-2}{X+1} + b$, donc $b = \frac{7}{3}$ en prenant $X = 2$. Conclusion : $\frac{2X+3}{X^2-X-2} = -\frac{5}{X+1} + \frac{7}{3(X-2)}$.

- S'il y a des termes de degré supérieur, on peut obtenir une équation sur les coefficients en évaluant l'égalité pour une valeur simple de X (souvent $X = 0$) sans multiplication préalable. On peut également obtenir une équation en regardant la limite ou un équivalent quand X tend vers $+\infty$, en multipliant au besoin par X ou X^2 pour faire apparaître des limites non nulles. Prenons par exemple $F(X) = \frac{X^3}{(X-1)^2(X-2)^2}$. D'après le théorème, $F(X) = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X-2} + \frac{d}{(X-2)^2}$. Les coefficients b et d se calculent comme précédemment : $\frac{X^3}{(X-2)^2} = a(X-1) + b + \frac{c(X-1)^2}{X-2} + \frac{d(X-1)^2}{(X-2)^2}$ donne $1 = b$ pour $X = 1$; et $\frac{X^3}{(X-1)^2} = \frac{a(X-2)^2}{X-1} + \frac{b(X-2)^2}{(X-1)^2} + c(X-2) + d$ donne $d = 8$ pour $X = 2$. On obtient facilement une relation entre a et c en posant $X = 0$: $0 = -a + b - \frac{c}{2} + \frac{d}{4}$, donc $-a + 1 - \frac{c}{2} + 2 = 0$, ou encore $c + 2a = 6$. Il nous faut une autre information, qu'on peut trouver en multipliant par X avant de prendre la limite en $+\infty$: $\lim_{X \to +\infty} \frac{X^4}{(X-1)^2(X-2)^2} = 1$ (le dénominateur est équivalent à $X^2 \times X^2 = X^4$), et $\lim_{X \to +\infty} \frac{aX}{X-1} + \frac{bX}{(X-1)^2} + \frac{cX}{X-2} + \frac{dX}{(X-2)^2} = a + c$. On en déduit que $a + c = 1$, donc $c = 1 - a$. En reportant dans l'autre équation, $1 + a = 6$, donc $a = 5$ puis $c = -4$. Conclusion : $F(X) = \frac{5}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} - \frac{4}{X-2} + \frac{8}{(X-2)^2}$.
- Un dernier exemple : $F(X) = \frac{1}{X^3+1}$. On commence toujours par factoriser le dénominateur $X^3 + 1 = (X+1)(X^2 - X + 1)$, le deuxième facteur ayant un discriminant négatif, on ne peut pas aller plus loin. On va donc tenter de réduire F sous la forme $F(X) = \frac{a}{X+1} + \frac{bX+c}{X^2-X+1}$. En multipliant par $X+1$ et en évaluant en -1, on trouve sans problème $a = \frac{1}{3}$. Pour le reste, il nous faut deux informations supplémentaires. On peut regarder en 0 pour trouver $1 = a + c$, soit $c = 1 - a = \frac{2}{3}$. Enfin, on peut multiplier par X et regarder la limite en $+\infty$, ce qui donne $0 = a + b$, soit $b = -a = -\frac{1}{3}$. Conclusion : $\frac{1}{X^3+1} = \frac{1}{3(X+1)} - \frac{X-2}{3(X^2-X+1)}$.

Intégration des éléments simples : C'est bien de savoir réduire en éléments simples, mais si le but est de calculer une intégrale, il faudra bien sûr ensuite être capable d'intégrer chacun de ces éléments « simples ». Les termes en $\frac{\lambda}{X-a}$ ne posent aucun problème, ayant une primitive en ln. Les racines multiples ne posent pas plus de problème, on les intègre directement en tant que fonctions puissances.

Par contre, les termes d'ordre 2 (avec multiplicité ou non) sont plus compliqués. Le but est de se ramener à une fonction dont on connait bien une primitive, à savoir $\frac{1}{1+x^2}$. Pour cela, on essaie d'isoler un morceau qui s'intègre, puis pour le reste, on met le dénominateur sous forme canonique, puis on bidouille les constantes à coup de changements de variable. Reprenons notre exemple $\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{3(x+1)} - \frac{x-2}{3(x^2-x+1)}$. Tentons de calculer l'intégrale I de 0 à 1 de cette fonction. Le premier morceau ne pose pas de problème : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{3(x+1)}\,dx = 3\ln(2)$. Pour l'autre morceau, $\dfrac{x-2}{x^2-x+1} = \dfrac{\frac{1}{2}(2x-1)-\frac{3}{2}}{x^2-x+1}$, donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx = \frac{1}{2}[\ln(x^2-x+1)]_0^1 - \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx = 0 - \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{4}{3} \times \frac{1}{(\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2}))^2+1}\,dx = -2\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)\right]_0^1 = -\sqrt{3}\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = -\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$. On peut maintenant conclure le calcul : $I = 3\ln(2) + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{\pi\sqrt{3}}{3} = 3\ln(2) + \dfrac{\pi\sqrt{3}}{9}$.

Enfin, pour les termes de degré 2 et d'ordre multiple, on procède par récurrence en intégrant par parties. Par exemple, $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ peut bien sûr se calculer directement : $I = [\arctan(x)]_0^1 = \dfrac{\pi}{4}$, mais aussi par une IPP, en posant $u(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, soit $u'(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$, et $v'(x) = 1$, donc $v(x) = x$, pour trouver $I = \left[\dfrac{x}{1+x^2}\right]_0^1 + \displaystyle\int_0^1 \frac{2x^2}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{2(1+x^2)}{(1+x^2)^2} - 2 \times \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2} + 2I - 2\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$. On en déduit que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}I = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}$.

15.2.4 Règles de Bioche

Ces règles permettent de définir le changement de variable le plus efficace dans le cas d'une intégrale trigonométrique.

Définition 248. L'**élément différentiel** de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ est la quantité $f(x)dx$. Lors d'un changement de variable $t = \varphi(x)$, cet élément différentiel est transformé en $f(\varphi(x))\varphi'(x)dt$.

Proposition 256. Soit $I = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ une intégrale faisant intervenir des fonctions trigonométriques. Les règles de Bioche préconisent les changements de variables suivants :

- si l'élément différentiel est invariant par le changement de variable $x \mapsto -x$, alors on pose $t = \cos(x)$.
- si l'élément différentiel est invariant par le changement de variable $x \mapsto \pi - x$, alors on pose $t = \sin(x)$.
- si l'élément différentiel est invariant par le changement de variable $x \mapsto \pi + x$, alors on pose $t = \tan(x)$.
- si aucun des trois cas précédents ne se réalise, on pose $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

Remarque 230. Il est en fait assez facile de retenir les trois cas : la fonction cos est invariante par le changement $x \mapsto -x$ puisqu'elle est paire, sin est invariante par $x \mapsto \pi - x$ puisque $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ et tan est invariante par $x \mapsto \pi + x$ puisqu'elle est π-périodique. Il faut surtout faire attention au fait que c'est bien l'élément différentiel qui doit être invariant et pas seulement la fonction f : ça ne change rien quand on fait $x \mapsto \pi + x$ mais dans les deux autres cas il y a un changement de signe.

Proposition 257. Soit x un réel qui n'est pas égal à π modulo 2π. En posant $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$, on a les relations suivantes : $\sin(x) = \dfrac{2t}{1+t^2}$; $\cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\tan(x) = \dfrac{2t}{1-t^2}$ quand cette valeur est définie. Par ailleurs, on aura $dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt$.

Démonstration. Ces relation expliquent l'intérêt du changement de variable $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$: il transformera systématiquement les intégrales de fonctions trigonométriques en fractions rationnelles de la variables t, qu'on sait théoriquement toujours intégrer. Pour les démontrer, il est plus simple de partir du résultat : $\dfrac{2t}{1+t^2} = \dfrac{2\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})}}{1+\frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})}} = \dfrac{2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})+\sin^2(\frac{x}{2})} = \sin(x)$ d'après la formule de duplication du sinus. De même $\dfrac{1-t^2}{1+t^2} = \dfrac{\sin^2(\frac{x}{2})-\cos^2(\frac{x}{2})}{\sin^2(\frac{x}{2})+\cos^2(\frac{x}{2})} = \cos(x)$, cette fois-ci à l'aide d'une des formules que l'on connait bien pour le cosinus de l'angle double. La dernière formule pour la tangente s'obtient bien sûr par un simple quotient. La formule pour dx est une simple application de la dérivation de la tangente : $dt = \dfrac{1}{2}\left(1+\tan^2\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)dx = \dfrac{1+t^2}{2}dx$, ce qui correspond bien à ce qui était demandé. □

Exemple : On souhaite calculer $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+\cos(x)}\,dx$. Si on tente d'appliquer les règles de Bioche, aucune ne fonctionne (les deux derniers changements de variables transforment le dénominateur en $2-\cos(x)$, le premier ne le change pas mais change le signe du dx), on va donc poser $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ pour obtenir $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2+\frac{2t}{1+t^2}} \times \frac{2}{1+t^2}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^2}\,dt$. Cette dernière intégrale se calcule à l'aide des méthodes vues sur les fractions rationnelles : $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dt = \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{1}{(\frac{2}{\sqrt{3}}(t+\frac{1}{2}))^2+1}\,dt =$
$$\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)\right)\right]_0^1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\arctan(\sqrt{3})-\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$$

Remarque 231. Les règles de Bioche peuvent s'appliquer de la même manière aux fonctions faisant intervenir des cosinus et des sinus hyperboliques. On remplace sous l'intégrale les ch par des cos, les sh par des sin etc et on cherche un changement de variable laissant invariant l'élément différentiel. On pourra alors poser, dans les trois cas répéertoriés plus haut, $t = \mathrm{ch}(x)$, $t = \mathrm{sh}(x)$ ou $t = \mathrm{th}(x)$ (naturellement, pour le calcul explicite ensuite, on remet des fonctions hyperboliques partout et pas des cosinus et sinus ordinaires). En désespoir de cause, on pourra toujours poser $t = \mathrm{th}\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

15.2.5 Racines carrées

Ca paragraphe sera beaucoup plus court que les précédents, puisque dans le cas de racines carrées (ou autres puissances fractionnaires qu'on n'arrive pas à intégrer directement), on se contentera en général de tenter un changement de variables où on pose $t = \sqrt{g(x)}$, la fonction qui apparait dans notre intégrale. S'il y a plusieurs racines dans l'intégrale, on effectue un changement de variable qui fasse disparaitre toutes les racines.

Exemple : On cherche à calculer $I = \displaystyle\int_1^{64} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx$. On pose $t = \sqrt[6]{x}$, de façon à avoir $\sqrt{x} = t^3$ et $\sqrt[3]{x} = t^2$. Par ailleurs, $x = t^6$ implique $dx = 6t^5dt$, donc $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{6t^5}{t^3+t^2}\,dt = \int_1^2 \frac{6t^3}{1+t}\,dt$. La division euclidienne de $6t^3$ par $1+t$ donne $6t^3 = (1+t)(6t^2-6t+6)-6$, donc $I = 6\displaystyle\int_1^2 t^2-t+1-\frac{1}{1+t}\,dt =$
$$6\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln(1+t)\right]_1^2 = 6\left(\frac{7}{3}-\frac{3}{2}+1-\ln 3+\ln 2\right) = 6\left(\frac{11}{6}+\ln\left(\frac{2}{3}\right)\right) = 11+6\ln\left(\frac{2}{3}\right).$$

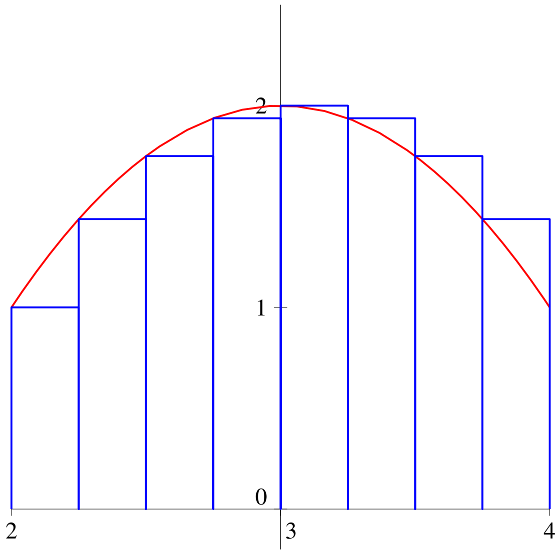
15.3 Calcul numérique d'intégrales

Dans les deux premières parties de ce chapître, nous nous sommes uniquement intéressés au calcul exact d'intégrales, qui constituera de toute façon la totalité des questions que vous pourrez avoir sur le sujet à vos écrits de concours. Mais si vous demandez à votre calculatrice préférée (pour

Maple, c'est un peu plus compliqué, puisqu'il sait faire du calcul formel, donc par exemple du calcul de primitives) de vous donner la valeur d'une intégrale, elle va procéder de façon bien différente. Les méthodes d'intégration numérique ont pour but de créer des suites approchant la valeur d'une intégrale donnée, en maîtrisant l'erreur commise (si on ne connait pas l'erreur, le calcul ne sert à rien), et de préférence avec le moins de calculs possibles. Nous allons en présenter trois, la première n'étant qu'une redite de choses vus dès la présentation de ce chapître.

15.3.1 Méthode des rectangles

Principe : On approche la courbe par des rectangles de largeur constante (en nombre fixé à l'avance) et de hauteur égale à l'image d'un des réels de chaque intervalle. Ainsi, en prenant un entier naturel non nul n et en posant $h = \dfrac{b-a}{n}$, on peut par exemple effectuer l'approximation suivante : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$, où $x_k \in \left[a + \dfrac{k(b-a)}{n}, a + \dfrac{(k+1)(b-a)}{n}\right]$ (en pratique on prend habituellement $x_k = a + \dfrac{k(b-a)}{n}$, soit la valeur à gauche de l'intervalle, ou $x_k = a + \dfrac{(k+1)(b-a)}{n}$, soit la valeur à droite).



Définition 249. Une **somme de Riemann de pas** h pour la fonction f sur le segment $[a, b]$ est une somme de la forme $S_n(f) = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$, avec les mêmes notations que ci-dessus.

Remarque 232. On peut en fait définir des sommes de Riemann de pas non constant. Dans ce cas, la valeur du pas est lé plus grand écart entre deux valeurs euccessives de la subdivision, comme pour les fonctions en escalier.

Théorème 70. Les sommes de Riemann convergent vers l'intégrale de f : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(f) = \int_a^b f(x)\,dx$. De plus, si la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a, b]$, alors $|I - S_n(f)| \leqslant \dfrac{M(b-a)^2}{2n}$, où $M = \displaystyle\sup_{x\in[a,b]} |f'(x)|$.

Démonstration. Nous ne prouverons le théorème que dans le cas où la fonction est de classe $\mathcal{C}^1$. Posons $a_k = a + \dfrac{k(b-a)}{n}$, et majorons l'erreur intervalle par intervalle : $\left|\displaystyle\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,dt - \frac{b-a}{n} f(x_k)\right| =$

$\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\ dt - \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x_k)\ dt\right| \leqslant \int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(t)-f(x_k)|\ dt$. Or, la fonction f ayant sa dérivée majorée en valeur absolue par M sur $[a_k, a_{k+1}]$, l'inégalité des accroissements finis nous assure que $\forall t \in [a_k, a_{k+1}]$, $|f(t) - f(x_k)| \leqslant M|t - x_k| \leqslant M(t - a_k)$. On peut alors majorer notre erreur par $\int_{a_k}^{a_{k+1}} t - a_k\ dt = \left[\frac{t^2}{2} - a_k t\right]_{a_k}^{a_{k+1}} = \frac{a_{k+1}^2}{2} - a_k a_{k+1} - \frac{a_k^2}{2} + a_k^2 = \frac{a_{k+1}^2 - 2a_k a_{k+1} + a_k^2}{2} = \frac{(a_{k+1} - a_k)^2}{2} = \frac{(b-a)^2}{2n^2}$. L'erreur maximale commise sur $[a_k, a_{k+1}]$ est donc de $\frac{M(b-a)^2}{2n^2}$, et l'erreur totale commise sur l'intervalle $[a, b]$ vaut au maximum n fois l'erreur précédente (puisque l'intervalle a été découpé en n morceaux), soit $\frac{M(b-a)^2}{2n}$. On a bien prouvé que $|I - S_n(f)| \leqslant \frac{M(b-a)^2}{2n}$, ce qui suffit à prouver la convergence de $S_n(f)$ vers I puisque notre majorant tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. □

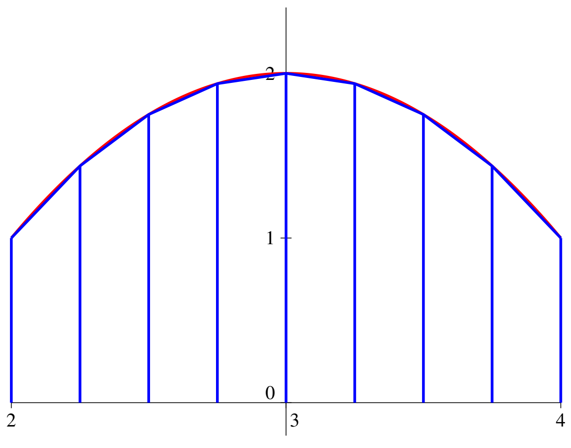
Remarque 233. Les sommes de Riemann seront très souvent utilisées avec $a = 0$ et $b = 1$, et des valeurs de x_k à gauche ou à droite pour chaque intervalle. On obtient alors la formulation simplifiée : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\ dx.$

Exemple : On utilise parfois les sommes de Riemann de façon pour trouver la limite de suites définies par des sommes, en utilisant leur convergence vers une intégrale qu'on sait calculer (c'est donc le processus complètement inverse de celui présenté dans cette partie de cours. Ainsi, si on pose $u_n = \sum k = 1^n \frac{n}{n^2 + k^2}$, on peut écrire $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{1}{1 + \frac{k^2}{n^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$, où $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$.

D'après le théorème sur les sommes de Riemann, $\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\ dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2)$.

15.3.2 Méthode des trapèzes

Principe : Comme dans le cas de la méthode des rectangles, on découpe l'intervalle d'intégration en n segments de largeur $h = \frac{b-a}{n}$, mais sur chaque segment, on approche désormais l'intégrale par l'aire du trapèze passant par les deux points de la courbe d'abscisse a_k et a_{k+1}. Autrement dit, on effectue l'approximation $I \simeq \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(a_k) + f(a_{k+1})}{2} = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)}{2} + \frac{f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)\right)$.



Remarque 234. La différence entre cette méthode et celle des trapèzes est extrêmement minime en termes de calculs, puisqu'il suffit de calculer $n + 1$ valeurs de la fonction f (au lieu de n) et calculer une somme (là encore avec une seule addition supplémentaire). Pourtant, comme nous allons le voir, l'erreur commise est nettement plus faible.

Théorème 71. En notant T_n la valeur approchée de I obtenue à l'aide de la méthode des trapèzes, $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = \int_a^b f(x)\ dx$. De plus, si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$, alors $|I - T_n| \leqslant \dfrac{M_2(b-a)^3}{12n^3}$, où $M_2 = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)|$.

Démonstration. L'idée est la même que dans le cas de la méthode des trapèzes, mais on a besoin pour le calcul d'un équivalent de l'IAF faisant intervenir la dérivée seconde. Cet équivalent est donné par la formule de Taylor-Lagrange que nous verrons prochainement, elle permet de prouver que l'écart entre $f(x)$ et la valeur donnée par le trapèze est majoré par $(a_{k+1}-x)(x-a_k)\dfrac{M_2}{2}$ sur l'intervalle $[a_k, a_{k+1}]$. Comme dans la démonstration précédente, il suffit alors de calculer $\int_{a_k}^{a_{k+1}} (a_{k+1}-t)(t-a_k)\ dt = \int_{a_k}^{a_{k+1}} -t^2 + a_k t + a_{k+1}t - a_k a_{k+1}\ dt = \left[-\dfrac{t^3}{3} + \dfrac{a_k t^2}{2} + \dfrac{a_{k+1}t^2}{2} - a_k a_{k+1} t\right]_{a_k}^{a_{k+1}} = -\dfrac{a_{k+1}^3}{3} + \dfrac{a_k a_{k+1}^2}{2} + \dfrac{a_{k+1}^3}{2} - a_k a_{k+1}^2 + \dfrac{a_k^3}{3} - \dfrac{a_k^3}{2} - \dfrac{a_{k+1}a_k^2}{2} + a_k^2 a_{k+1} = \dfrac{a_{k+1}^3 - 3a_{k+1}^2 a_k + 3a_k^2 a_{k+1} - a_k^3}{6} = \dfrac{(a_{k+1}-a_k)^3}{6} = \dfrac{(b_a)^3}{6n^3}$. En découle une erreur sur $[a_k, a_{k+1}]$ inférieure à $\dfrac{M_2(b-a)^3}{12n^3}$. Comme précédemment, cette majoration sera multipliée par n pour obtenir l'erreur maximale sur l'intervalle $[a,b]$ tout entier, qui vaut donc $\dfrac{M_2(b-a)^3}{12n^2}$. □

15.3.3 Méthode de Simpson

Principe : La méthode des rectangles approchait la courbe par une constante sur chaque intervalle, la méthode des trapèzes par une fonction affine, l'étape logique suivante est d'approcher à l'aide d'un morceau de parabole, passant par les points d'abscisse a_k, a_{k+1} et $\dfrac{a_k + a_{k+1}}{2}$ (il faut trois points pour déterminer une parabole. Nous ne ferons pas les calculs, mais nous contenterons de donner la fomule d'approximation donnée par la méthode de Simpson : $I \simeq \dfrac{b-a}{6n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(a_k) + 4f\left(\dfrac{a_k + a_{k+1}}{2}\right) + f(a_{k+1})$. Cette méthode donnes des valeurs approchées de I qui convergent encore plus rapidement que les deux méthodes précédentes. Pour s'en convaincre, un dernier petit calcul :

Proposition 258. Si f est une fonction polynômiale de degré 2, la méthode de Simpson donne une valeur exacte de l'intégrale de f (sans même avoir besoin de découper l'intervalle).

Démonstration. Contentons-nous de vérifier que cela fonctionne pour $f(x) = x^2$. Calculons donc $(b-a)\left(a^2 + b^2 + 4\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\right) = (b-a)(a^2+b^2+a^2+2ab+b^2) = 2(b-a)(a^2+b^2+ab) = 2(ba^2+b^3+ab^2-a^3-ab^2-a^2b) = 2(b^3-a^3)$. Cette valeur est bien égale à $6\int_a^b x^2\ dx = 6\times\dfrac{b^3-a^3}{3}$. □

Chapitre 16

Dimension des espaces vectoriels

J'ai simplement pensé à l'idée d'une projection, d'une quatrième dimension invisible,
autrement dit que tout objet de trois dimensions, que nous voyons froidement,
est une projection d'une chose à quatre dimensions, que nous ne connaissons pas.

Marcel Duchamp

Un mathématicien et un ingénieur assistent à une conférence sur les processus physiques intervenant dans les espaces de dimension 9*. Le mathématicien est assis et apprécie beaucoup la conférence, pendant que l'ingénieur fronce les sourcils et semble complètement embrouillé. À la fin, l'ingénieur demande au matheux :*
« Comment fais-tu pour comprendre tout cela ? » « C'est simple ! D'abord tu visualises le processus en dimension n, et ensuite il suffit de prendre $n = 9$. »

Introduction

Ce deuxième chapître consacré aux espaces vectoriels n'est en fait qu'une sorte de complément au premier, visant à définir rigoureusement la notion de dimension déjà évoquée dans le précédent chapître, et à donner de nouvelles méthodes permettant d'alléger les calculs et démonstrations classiques en algèbre linéaire. Peu de notions nouvelles en vue, si ce n'est celle de rang qui est centrale en algébre linéaire en dimension finie.

Objectifs du chapitre :

- savoir utiliser des arguments de dimension pour simplifier les démonstrations d'algèbre linéaire.
- comprendre et utiliser efficacement le théorème du rang.

16.1 Espaces vectoriels de dimension finie

16.1.1 Définitions

Définition 250. Un espace vectoriel E est **de dimension finie** s'il admet une famille génératrice finie.

Proposition 259. Soit $(e_1, \dots, e_k)$ une famille libre de vecteurs de E, et $e_{k+1} \notin \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$, alors la famille $(e_1, e_2, \dots, e_{k+1})$ est une famille libre.
Si au contraire la famille $(e_1, \dots, e_{k+1})$ est génératrice et $e_{k+1} \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$, alors la famille $(e_1, \dots, e_k)$ est encore génératrice.

Démonstration. Supposons qu'une combinaison linéaire annule la famille : $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i e_i = 0$, alors $\lambda_{i+1} e_{i+1} = -\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i$. Le membre de droite appartenant sûrement à $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$, l'égalité n'est possible que si $\lambda_{k+1} = 0$. mais alors le membre de droite est nul, ce qui implique par liberté de la famille $(e_1, \dots, e_k)$ que tous les coefficients λ_i sont nuls. La famille $(e_1, \dots, e_{k+1})$ est donc bien libre. Prouvons maintenant la deuxième propriété : d'après l'hypothèse, $e_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i$. La famille étant par ailleurs génératrice, on peut écrire, pour tout vecteur x, que $x = \sum_{i=1}^{k+1} \mu_i e_i = \sum_{i=1}^{k} (\mu_i + \lambda_i) e_i$ en remplaçant e_{k+1} par sa valeur. La famille $(e_1, \dots, e_k)$ est donc génératrice. □

Théorème 72. Théorème de la base incomplète.
Soient $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_k)$ et $\mathcal{G} = (f_1, \dots, f_p)$ deux familles respectivement libre et génératrice d'un même espace vectoriel E, alors on peut compléter la première famille en une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E à l'aide de vecteurs $(e_{k+1}, \dots, e_n)$ appartenant à la famille $\mathcal{G}$.

Démonstration. La démonstration de ce théorème fondamental est en fait très constructive : on fait la liste des vecteurs de la famille $\mathcal{G}$, un par un, et on essaie de les ajouter à la famille $\mathcal{F}$ (éventuellement déjà un peu augmentée). À chaque vecteur, s'il est dans l'espace vectoriel engendré par la famille dont on dipose au moment de l'ajout, on l'oublie, sinon on l'ajoute à la famille. D'après la proposition précédente, la famille ainsi obtenue sera nécessairement libre puisqu'obtenue en ajoutant à la famille libre $\mathcal{F}$ des vecteurs n'appartenant jamais à l'espace vectoriel engendré par les précédents. Elle est par ailleurs génératrice car obtenue à partir de $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ en supprimant des vecteurs appartenant quand à eux à l'espace engendré par d'autres vecteurs de la famille. C'est donc une base. □

Remarque 235. Ceette démonstration donne un algorithme pratique pour compléter une famille libre de n'importe quel espace usuel en base : on prend les vecteurs de la base canonique et on tente de les ajouter l'un après l'autre à notre famille.

Proposition 260. Lemme de Steinitz. Soit $(e_1, \dots, e_k)$ une famille génératrice d'un espace vectoriel E et $(f_1, \dots, f_{k+1})$ une autre famille du même espace vectoriel E, alors la famille $(f_1, \dots, f_{k+1})$ est nécessairement liée.

Démonstration. On procède par récurrence sur k. Pour $k = 0$, c'est vrai, la première famille étant vide, elle ne peut engendrer que l'espace vectoriel $E = \{0\}$, donc la deuxième famille contient un vecteur qui est le vecteur nul, et cette famille est liée (oui, le vecteur nul tout seul constitue une famille liée). Supposons la propriété vraie au rang k, et ajoutons un vecteur à chaque famille. La famille $(e_1, \dots, e_{k+1})$ étant supposée génératrice, $f_j = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_{i,j} e_i$ pour tout entier $j \leqslant k+2$. Si tous les coefficients $\lambda_{k+1,j}$ sont nuls, alors tous les vecteurs de la deuxième famille sont combinaisons linéaires de $(e_1, \dots, e_k)$, on peut appliquer directement l'hypothèse de récurrence pour conclure que $(f_1, \dots, f_{k+1})$ est liée, ce qui ne risque pas de s'améliorer si on ajouter f_{k+2}. Sinon, supposons par exemple, quitte à réordonner les vecteurs de la deuxième famille, que $\lambda_{k+1,k+2} \neq 0$, on pose alors, pour tout entier $i \leqslant k+1$, $g_i = f_i - \dfrac{\lambda_{k+1,i}}{\lambda_{k+1,k+2}} f_{k+2}$, de façon à annuler la coordonnée suivant x_{k+1}. La famille $(g_1, \dots, g_{k+1})$ est alors constituée de vecteurs dans $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$, par hypothèse de récurrence, elle est liée. Cela signifie qu'il y a une relation linéaire du type $\sum_{j=1}^{k+1} \mu_j \left(f_i - \dfrac{\lambda_{k+1,i}}{\lambda_{k+1,k+2}} f_{k+2} \right) = 0$. Quitte à tout développer, il s'agit d'une relation liant les vecteurs $(f_1, \dots, f_{k+2})$, qui forment donc une famille liée. □

Théorème 73. Dans un espace vectoriel E de dimension finie, il existe au moins une base finie. Toutes les bases finies ont par ailleurs le même nombre d'éléments, appelé **dimension** de l'espace vectoriel. On la note en général $\dim(E)$.

Démonstration. Par définition, un espace de dimension finie contient une famille génératrice finie. Il contient par ailleurs des familles libres, par exemple la famille libre. Le théorème de la base incomplète assure alors qu'on peut construire une base finie de E. Supposons désormais qu'il existe deux bases de cardinal différent, notons $\mathcal{B}$ celle contenant le moins de vecteurs (on notera n le nombre de vecteurs de $\mathcal{B}$). La famille $\mathcal{B}$ étant génératrice, le lemme de Steinitz assure que toute famille de $n+1$ vecteurs est liée. En particulier, n'importe quelle sous-famille de $n+1$ vecteurs de la base $\mathcal{C}$ est liée, ce qui est absurde pour une base. Toutes les bases ont donc bien le même nombre d'éléments. □

Exemples : Parmi les espaces vectoriels classiques, $\mathbb{K}^n$ est un espace de dimension n sur $\mathbb{K}$; $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension $n+1$; $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de dimension np, tout comme $\mathcal{L}(E,F)$ quand E et F sont de dimensions respectives n et p. Attenion tout de même, $\mathcal{C}$ est un espace vectoriel complexe de dimension 1, mais aussi un espace vectoriel réel de dimension 2, puisque $\mathbb{C} = \{a+ib \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}(1,i)$, et $(1,i)$ est une famille libre sur $\mathbb{R}$ (mais pas sur $\mathbb{C}$).

Proposition 261. Dans un espace vectoriel de dimension n :

- Toute famille libre possède au maximum n vecteurs.
- Toute famille génératrice possède au minimum n vecteurs.
- Toute famille libre de n vecteurs est une base.
- Toute famille génératrice de n vecteurs est une base.

Démonstration. En effet, une famille libre peut, d'après le théorème de la base incomplète, être complétée en une base de E, qui contiendra nécessairement n vecteurs. il faut donc qu'on soit parti d'une famille de moins de n vecteurs. Par ailleurs, si la famille avait déjà n vecteurs, la complétion sera vite faite, on ne rajoute rien (sinon on aura strictement plus de n vecteurs), la famille était donc déjà une base. De même pour une famille génératrice, on peut trouver une base incluse dans la famille en appliquant le théorème de la base incomplète avec la famille libre vide. La fin du raisonnement est alors complètement symétrique de ce qu'on vient de faire pour une famille libre. □

Proposition 262. Tout espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.
Deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes si et seulement si ils ont même dimension.

Démonstration. Il suffit de choisir une base de E et d'envoyer ses éléments sur ceux de la base canonique de $\mathbb{K}$, puisque l'application transorme une base en une base, c'est un isomorphisme. La deuxième propriété est alors immédiate, si deux espaces ont même dimension, ils sont tous deux isomorphes à $\mathbb{K}^n$, donc isomorphes (la réciproque est triviale). □

Exemple : Il suffira désormais de prouver qu'un famille est libre **ou** génératrice pour prouver qu'elle est une base d'un espace vectoriel usuel, ce qui simplifie grandement les démonstrations. En général, on prouve la liberté, ce qui est plus facile. Ainsi, la famille $((1,2);(-3,7))$ est libre dans $\mathbb{R}^2$ et contient deux vecteurs, c'est donc une base.

16.1.2 Sous-espaces vectoriels et dimension.

Proposition 263. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E, alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.

Démonstration. Les familles libres de F étant aussi des familles libres de E, elles ne peuvent pas avoir plus de n élemnts. Prenons une famille libre dans F qui soit de cardinal le plus grand possible. Cette famille est alors forcément génératrice de F, puisque dans le cas contraire, on pourrait trouver un vecteur n'appartenant pas à l'espace engendré par notre famille, et, en l'ajoutant à la famille, créer une famille toujours libre mais contenant plus d'éléments que la famille libre maximale ! L'espace F est donc de dimension finie, et la base qu'on vient d'en construire contient moins de n vecteurs, d'où l'inégalité sur les dimensions. □

Remarque 236. On aura $F = E$ si et seulement si $\dim(F) = \dim(E)$, ce qui permet de simplifier les preuves d'égalité entre espaces vectoriels quand on a des informations sur leurs dimensions (on peut procéder par simple inclusion et non plus par double inclusion).

Théorème 74. Formule de Grassmann.
Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels d'un même espace E, alors $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$. En particulier, si F et G sont supplémentaires dans E, alors $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.

Démonstration. Cette formule nous rappelle diablement celle du cardinal d'une union de deux ensembles. C'est en fait tout à fait logique, puisqu'elle s'identifie exactement à une formule de cardinal d'union si on considère des bases de chacun des espaces vectoriels concernés. Nous allons d'ailleurs la prouver en suivant le même schéma, c'est-à-dire en commençant par le cas particulier où F et G sont supplémentaires. Notons $(f_1, \dots, f_k)$ une base de F et $(g_1, \dots, g_p)$ une base de G et prouvons que $(f_1, \dots, f_k, g_1, \dots, g_p)$ est une base de E (l'égalité des dimensions en découlera immédiatement). Soit $x \in E$, comme F et G sont supplémentaires, on peut décomposer x en $x_F + x_G$ (avec les notations classiques utilisées dans notre précédent chapître sur les espaces vectoriels). Par ailleurs, $x_F = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i$, et $x_G = \sum_{j=1}^{p} \mu_j g_j$. Le vecteur x s'écrit donc comme combinaison linéaire de la famille $(f_1, \dots, f_k, g_1, \dots, g_p)$, qui est donc génératrice. Reste à prouver qu'elle est libre, supposons que $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i + \sum_{j=1}^{p} \mu_j g_j = 0$, on peut écrire $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i = -\sum_{j=1}^{p} \mu_j g_j$. Le membre de gauche est dans F, celui de droite dans G, l'intersection de ces deux sous-espaces est réduite à $\{0\}$ puisqu'ils sont supplémentaires, les deux membres sont donc nuls. Mais les familles $(f_1, \dots, f_k)$ et $(g_1, \dots, g_p)$ étant libres, cela implique la nullité de tous les coefficients de la combinaison linéaire, et donc la liberté de la famille.

Passons au cas général. Notons F' un supplémentaire de $F \cap G$ dans F et G' un supplémentaire de $F \cap G$ dans G (de tels supplémentaires existent, il suffit de compléter une base de $F \cap G$ en base de F ou de G et de conserver les vecteurs ajoutés pour en obtenir une base d'après la première partie de la démonstration). On peut certainement affirmer que $\dim(F) = \dim(F') + \dim(F \cap G)$ et $\dim(G) = \dim(G') + \dim(F \cap G)$. Par ailleurs, F' et G sont supplémentaires dans $F + G$. En effet, leur intersection est réduite à $\{0\}$ puisqu'un vecteur de l'intersection appartiendrait à la fois à F' et à $F \cap G$, qui sont supplémentaires dans F, et leur somme est bien égale à $F + G$: un vecteur pouvant s'écrire sous la forme $x_F + x_G$ peut encore se décomposer en $x_{F'} + x_{F \cap G} + x_G$, avec $x_{F \cap G} + x_G \in G$. Toujours en appliquant notre formule dans le cas particulier démontré, $\dim(F+G) = \dim(F') + \dim(G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$. □

Remarque 237. La formule de Grassmann permet encore une fois de réduire considérablement le travail à effectuer, cette fois-ci pour prouver que deux sous-espaces sont supplémentaires. Il suffit en effet de prouver, au choix :

- que $F \cap G = \{0\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.
- que $F + G = E$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

Exemple : Si on reprend l'exemple traité dans le chapître précédent des matrices symétriques et antisymétriques dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, une fois obtenues les dimensions 6 et 3 respectives des deux sous-espaces, prouver que leur intersection est nulle suffit (et c'est facile). Plus généralement, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les matrices symétriques forment un sous-espace de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$, les antisymétriques un sous-espace de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$, et ils sont toujours supplémentaires (la somme des dimensions vaut bien n^2, et seule la matrice nulle est à la fois symétrique et antisymétrique).

Définition 251. Dans un espace vectoriel de dimension n, un **hyperplan** est un sous-espace de dimension $n - 1$.

16.2 Rang

Définition 252. Soit $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_k)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E, on appelle **rang de la famille** $\mathcal{F}$ la dimension de $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$.

Remarque 238. La famille est libre si et seulement si son rang est égal au nombre de vecteurs qu'elle contient.

Définition 253. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, le **rang de** f, s'il existe, est la dimansion de l'image de f. On le note $\text{rg}(f)$.

Remarque 239. Pour faire le lien avec la définition précédente, $\text{rg}(f) = \text{rg}(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$, où $(e_1, \dots, e_n)$ est une base quelconque de E. Pour être très rigoureux, cette égalité ne peut avoir de sens que si E est de dimension finie, alors que le rang de f peut être défini même si E n'est pas de dimension finie.

Théorème 75. Théorème du rang.
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, où E est un espace vectoriel de dimension finie, alors $\text{rg}(f)+\dim(\ker(f)) = \dim(E)$.

Remarque 240. Le théorème du rang n'affirme absolument pas que le noyau et l'image de f sont supplémentaires, c'est faux en général (voir l'exemple suivant la démonstration).

Démonstration. L'idée est de démontrer qu'à défaut d'être supplémentaire de $\ker(f)$, $\text{Im}(f)$ est isomorphe à tout supplémentaire de $\ker(f)$ (et donc a la même dimension, ce qui prouve immédiatement le théorème). Soit donc G un supplémentaire de $\ker(f)$ (dont l'existence est assurée, rappelons-le, par le théorème de la base incomplète). Montrons que $f_{|G}$ est un isomorphisme de G sur $\text{Im}(f)$. Soit $x \in \ker(f_{|G})$, on a donc $f(x) = 0$, soit $x \in \ker(f)$. Cet espace étant supplémentaire de G, leut intersection est réduite au vecteur nul, donc $x = 0$. Soit maintenant $y \in \text{Im}(f)$, donc $y = f(x)$, avec $x \in E$. Ce vecteur x peut se décomposer en $x_G + x_K$, avec $x_G \in G$ et $x_K \in \ker(f)$. Comme $f(x_K) = 0$, $y = f(x) = f(x_G) \in \text{Im}(f_{|G})$, ce qui prouve que $\text{Im}(f) = \text{Im}(f_{|G}$. L'aplication f restreinte à G est bel et bien un isomorphisme, le théorème en découle. □

Exemple : Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
Les deux premières colonnes de la matrice étant identiques et les deux dernières opposées, on constate aisément que $\text{Im}(f) = \text{Vect}((1, -1, 0, 0); (0, 0, 1, -1))$, donc f est de rang 2. La détermination du noyau amène de même à un système constitué de deux paires d'équations identiques, et $\ker(f) = \{(x, -x, z, z) \mid (x, z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((1, -1, 0, 0); (0, 0, 1, 1))$. Le noyau est également de dimension 2 (encore heureux, sinon le théorème du rang serait mis en défaut), mais noyau et image ne sont pas supplémentaires. On peut s'amuser ici à calculer $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. On trouve alors $\text{Im}(f^2) = \text{Vect}((0, 0, -1, 1))$ et $\ker(f^2) = \text{Vect}((1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0); (0, 0, 1, 1))$. Cette fois-ci, les deux sous-espaces sont supplémentaires. D'ailleurs, les composées suivantes de f ont les mêmes noyaux et images de f^2. On peut prouver plus généralement que, pour tout endormorphisme f d'un espace de dimension finie, les noyaux et images de f^k finissent par se stabiliser sur des sous-espaces supplémentaires.

Corollaire 8. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, où E est un espace vectoriel de dimension finie, f est bijectif si et seulement si il est injectif ou surjectif.

Démonstration. En effet, si par exemple f est injectif, $\dim(\ker(f)) = 0$, donc en appliquant le théorème du rang $\text{rg}(f) = \dim(E)$, ce qui assure que $\text{Im}(f) = E$, et donc que f est également surjectif. C'est à peu près la même chose si on suppose f surjectif. □

Remarque 241. Une conséquence pas évidente du tout de ce résultat est une propriété énoncée sans démonstration sur les matrices : s'il existe une matrice N telle que $MN = I$ ou $NM = I$, alors automatiquement les matrices N et M commutent et M est inversible. En effet, si on note f l'application linéaire dont M est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$, la condition $NM = I$ (par exemple) assure que $g \circ f = \mathrm{id}$, ce qui implique l'injectivité de f (sinon $g \circ f$ ne pourrait pas l'être), donc sa bijectivité.

Exemple : La remarque précédente ne s'applique absolument pas en dimension infinie. Si on note f l'application définie sur l'ensemble de toutes les suites réelles par $f(u_n) = v_n$, où $v_n = u_{n+1}$ (décalage de tous les termes de la suite vers la gauche, en supprimant le premier). L'application f est surjective mais pas injective. En fait, en notant $g(u_n) = w_n$, avec $w_0 = 0$ et $\forall n \geqslant 1$, $w_n = u_{n-1}$, on a $f \circ g = \mathrm{id}$, mais $g \circ f \neq \mathrm{id}$ (on transforme le premier terme de la suite en 0). L'application g, quant à elle, est injective mais pas surjective.

Exemple : Soient x_0, x_1, …, x_n des réels deux à deux distincts et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ l'endomrophisme défini par $f(P) = (P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_n))$. Le noyau de f est réduit au polynôme nul car c'est le seul polynôme de degré inférieur ou égal à n pouvant avoir $n+1$ racines distinctes. Par conséquent, f est un isomorphisme. Cela prouve que, pour tous réels a_0, a_1, …, a_n, il existe un unique polynôme de degré n (au plus) tel que $\forall i \in \{0, \dots, n\}$, $P(x_i) = a_i$. Ces polynômes sont appelées polynômes interpolateurs de Lagrange. On peut en fait les expliciter : $L(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$. En effet, chacun des produits s'annule pour toutes les valeurs de x_j sauf pour x_i où il vaut 1 à cause de la division par $x_i - x_j$.

Définition 254. Une **forme linéaire** sur un espace vectoriel E est une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

Proposition 264. Si E est de dimension finie, le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan de E.

Démonstration. Il n'y a pas beaucoup de choix pour le rang d'une forme linéaire : soit il est nul, et f est alors l'application nulle ; soit il vaut 1, et d'après le théorème du rang on a alors $\dim(\ker(f)) = n - 1$. □

Exemple : La trace est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n^(\mathbb{K})$. L'ensemble des matrices de trace nulle est donc un hyperplan (de dimension $n^2 - 1$ dans ce cas) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 255. Le **rang d'une matrice** $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est le rang de la famille constituée des vecteurs-colonnes de la matrice M (coordonnées prises par exemple dans la base canonique).

Remarque 242. Autrement dit, le rang de M est le rang de l'application linéaire qu'elle représente dans les bases canoniques (ou dans n'importe quelles autres bases).

Proposition 265. Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de rang n si et seulement si elle est inversible.

Démonstration. En effet, M est de rang n si l'application linéaire associée est de rang n, donc bijective. □

Théorème 76. Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de rang r si et seulement si $M = QJ_rP$, où P et Q sont deux matrices inversibles, et $J_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \dots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & \dots & & 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec r fois 1 et $n - r$ fois 0 sur la diagonale.

Théorème 77. C'est en fait facile à prouver. Soit f l'application associée à M dans la base canonique. Puisque $\text{rg}(f) = r$, son noyau est de dimension $n - r$. On peut construire une base de E de la forme $(e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$, où $(e_{r+1}, \dots, e_n) \in \ker(f)^{n-r}$. On sait alors (démonstration du théorème du rang) que $f_{|\text{Vect}(e_1,\dots,e_r)}$ est un isomorphisme sur $\text{Im}(f)$. En particulier, $(f(e_1), \dots, f(e_r))$ est une famille libre de E, qu'on peut compléter en base. Dans ces deux bases, l'application f a par construction pour matrice J_r. En notant P et Q les matrices de passage idoines (de la base canonique vers la première base pour P, de la deuxième base vers la base canonique pour Q), les formules de changement de base assurent que $M = QJ_rP$.

Proposition 266. Le rang d'une matrice est invariant par opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes de la matrice.

Démonstration. C'est assez immédiat si on songe que le rang représente la dimension de l'image de l'application linéaire associée. Un échange de colonnes échange deux images sans rien changer à sa dimension. Un produit par une constante non nulle d'une colonne ne modifie sûrement pas l'espace engendré par le vecteur correspondant. Et remplacer dans une famille génératrice un vecteur par une combinaison linéaire de lui-même et d'autres vecteurs de la famille ne modifie pas non plus la dimension de l'espace vectoriel engendré. Il est plus délicat de comprendre pourquoi le rang n'est pas modifié par opérations sur les lignes, ce qui découle du fait qu'une matrice a toujours le même rang que sa transposée. Nous admettrons cette partie de la preuve. □

Exemple : On peut donc calculer le rang en appliquant une sort de pivot de Gauss à notre matrice, jusqu'à la transformer en matrice diagonale (et même en J_r). En pratique, on se contente souvent de mélanger opérations sur les lignes et les colonnes jusqu'à obtenir une matrice dont le rang est évident. Ainsi, $\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$ en effectuant les opérations $C_1 \leftarrow C_1 + C_4$ et $C_3 \leftarrow C_3 - 3C_4$.

Chapitre 17

Développements limités

La mathématique est une science dangereuse :
elle dévoile les supercheries et les erreurs de calcul.

Galilée

L'ordinateur peut faire plus de calculs que le cerveau
de l'homme car il n'a que ça à faire.

Perles du bac.

Introduction

Enfin du nouveau en analyse cette année. Les développements limités constituent un outil tellement fondamental pour les calculs de limites autres études locales de fonctions que vous ne pourrez plus vous en passer une fois que vous les aurez découverts ! L'idée est fort simple : approcher localement (c'est-à-dire au voisinage d'un réel donné) une fonction suffisamment régulière (c'est-à-dire dérivable un certain nombre de fois) par une fonction polynômiale. Des outils techniques essentiels, les différentes formules de Taylor, permettent d'effectuer cette approximation. Tout le chapître est de toute façon essentiellement technique puisque le but est avant tout de savoir calculer ces développements limités, ce qui nécessite l'ingurgitation d'un formulaire assez conséquent. Pour vous rassurer, nous verrons tout de même aussi dans ce dernier chapître d'analyse pure de l'année des applications recouvrant à peu près tous les domaines étudiés jusqu'ici.

Objectifs du chapitre :

- comprendre les différences entres les diverses versions de la formule de taylor, et en maîtriser les hypothèses.
- connaître par coeur les développements limités usuels.
- savoir repérer les situation où les développements limités peuvent être utiles, sans tomber dans l'excès de calculs dispensables.

17.1 Formules de Taylor

La première formule de Taylor que nous allons voir concerne les polynômes. Ici, pas question d'approximation, puisqu'un polynôme est évidemment simplement égal à lui-même, mais l'idée est de comprendre qu'il existe plusieurs façons différentes de décrire un même polynôme. L'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ étant de dimension $n+1$, on peut décrire un polynôme de degré n en donnant $n+1$ réels. On peut le faire d'au moins trois façons :

- donner les coefficients du polynôme. C'est la façon la plus classique de procéder, mais l'information donnée est finalement assez peu commode à exploiter autrement que très globalement (que signifie le fait qu'un polynôme de degré 8 a un coefficient de degré 3 égal à 5 ? Essentiellement rien).
- donner les valeurs du polynôme en $n+1$ réels distincts (cf la remarque sur les polynômes interpolateurs de Lagrange dans notre chapître sur la dimension des espaces vectoriels). Cela donne une information très concrète mais éparpillée à $n+1$ endroits différents.
- la troisième méthode que nous allons voir concentre réellement toute l'information au même endroit, puisque la formule de Taylor reconstitue le polynôme à partir des valeurs de ses différentes dérivées en un même réel a.

Théorème 78. Formule de Taylor pour les polynômes.
Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$, alors $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^(k)(a)}{k!}(X-a)^k$.

Démonstration. Commençons par prouver la formule dans le cas particulier où $P(X) = P_i(X) = X^i$. Dans ce cas, les dérivées du polynôme sont données par $P'(X) = iX^{i-1}$, $P''(X) = i(i-1)X^{i-2}$, ..., $P^{(k)}(X) = i(i-1)\dots(i-k+1)X^{i-k} = \dfrac{i!}{(i-k)!}X^{i-k}$ (une récurrence est nécessaire pour prouver ce résultat tout à fait rigoureusement, on s'en passera). On en déduit que $P^{(k)}(a) = \dfrac{i!}{(i-k)!}a^{i-k}$, puis que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^(k)(a)}{k!}(X-a)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{i!}{(i-k)!k!}a^{i-k}(X-a)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{i}{k}(X-a)^k a^{i-k} = (X-a+a)^i = X^i$ en reconnaissant la formule du binôme de Newton. Certains termes de la somme ne sont pas définis (quand $k > i$), ce qui ne pose pas de problème en considérant qu'ils sont nuls par convention. Pour prouver la formule pour un polynôme quelconque, on procède ensuite par linéarité : $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i P_i$ (où les a_i sont les coefficients de P), donc $P(X) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i P_i(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{k=0}^{n} \frac{P_i^(k)(a)}{k!}(X-a)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(X-a)^k \sum_{i=0}^{n} a_i P_i^{(k)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(X-a)^k P^{(k)}(a)$ par linéarité des dérivées k-èmes. □

Une fois cette première formule de Taylor démontrée, on va tenter de l'appliquer telle quelle à des fonctions qui ne sont plus des polynômes. Le résultat ne sera bien sûr plus une égalité, et toute la difficulté sera d'arriver à comprendre ce que vaut le reste une fois la partie polynômiale isolée. C'est l'objet des trois autres formules de Taylor que nous allons maintenant aborder.

Théorème 79. Formule de Taylor avec reste intégral.
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I et $a \in I$, alors $\forall x \in I$,
$f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(-t)^n}{n!} f^{(n+1)(t)}\ dt.$

Démonstration. Pour comprendre (et même simplement retenir) cette formule, écrivons-là pour $n = 0$: $f(x) = f(a) + \displaystyle\int_a^x f'(t)\ dt$. En effet, cette égalité est pratiquement évidente puisque l'intégrale vaut $f(x) - f(a)$. Comment faire maintenant pour transformer le f' en f'' dans l'intégrale et obtenir la formule au rang suivant ? Tout simplement en faisant une IPP. On pose $u(t) = f'(t)$, soit $u'(t) = f''(t)$, et $v'(t) = 1$. La seule subtilité consiste à choisir $v(t) = t - x$, qui est bien une primitive de v', et on trouve exactement la formule au rang 1. Plus généralement, la formule se prouve par récurrence. L'initialisation a déjà été prouvée, pour l'hérédité, on va faire une IPP en posant $u(t) = f^{(n+1)}(t)$, donc $u'(t) = f^{(n+2)}(t)$; et $v'(t) = \dfrac{(x-t)^n}{n!}$, soit $v(t) = -\dfrac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$. On trouve alors $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)(t)}\right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+2)}(t)\,dt$. Le crochet valant $\dfrac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a)$, on trouve bien la formule au rang $n+1$. □

Définition 256. Le polynôme $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$ est le **polynôme de Taylor d'ordre n de f en a**, noté $T_n(X)$. La différence $f(x) - T(x) = \displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$ est le **reste intégral d'ordre n de f en a**, noté $R_n(x)$.

Théorème 80. Formule de Taylor-Lagrange.
Sous les mêmes hypothèses que pour la formule de Taylor avec reste intégral, on a la majoration $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}M_{n+1}$, où $M_{n+1} = \sup\limits_{t\in I}|f^{n+1}(t)|$.

Démonstration. Il suffit de majorer le reste intégral obtenu dans le précédent théorème. On majore $|f^{n+1}(t)|$ par M_{n+1}, et il reste à calculer $\displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,dt = \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_a^x = \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$. □

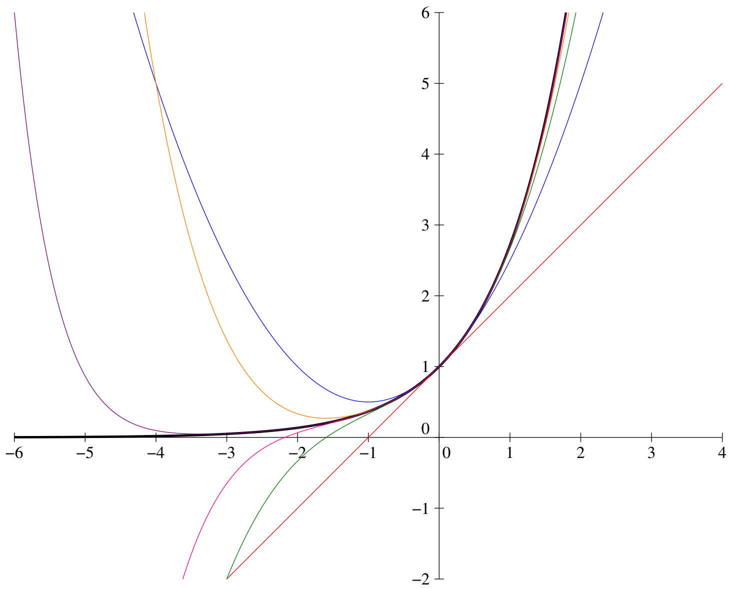
Théorème 81. Formule de Tayolor-Young.
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et $a \in I$, alors $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o(x-a)^n$.

Démonstration. Le résultat découle immédiatement de la formule de Taylor-Lagrange dans le cas où la fonction est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, mais malheureusement, on ne l'a supposée que $\mathcal{C}^n$. Pas grave, appliquons donc Taylor avec reste intégral à l'ordre précédent : $R_{n-1}(x) = \displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)\,dt = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}(t)}{(n-1)!}f^{(n)}(a)\,dt + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}(f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a))\,dt$. La première intégrale vaut exactement $\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$, soit le dernier terme du polynôme de Taylor d'ordre n. Ne reste plus qu'à prouver que la deuxième intégrale (on la notera J) est un $o(x-a)^n$. Or, la fonction étant de classe $\mathcal{C}^n$, en fixant une valeur de $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage de a sur lequel $|f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)| \leqslant \varepsilon$. Sur ce voisinage, on aura $|J| \leqslant \varepsilon\dfrac{(x-a)^n}{n!}$. Le $n!$ étant constant (seul x varie ici) et ε pouvant être choisi arbitrairement petit, on retrouve exactement $J = o(x-a)^n$. □

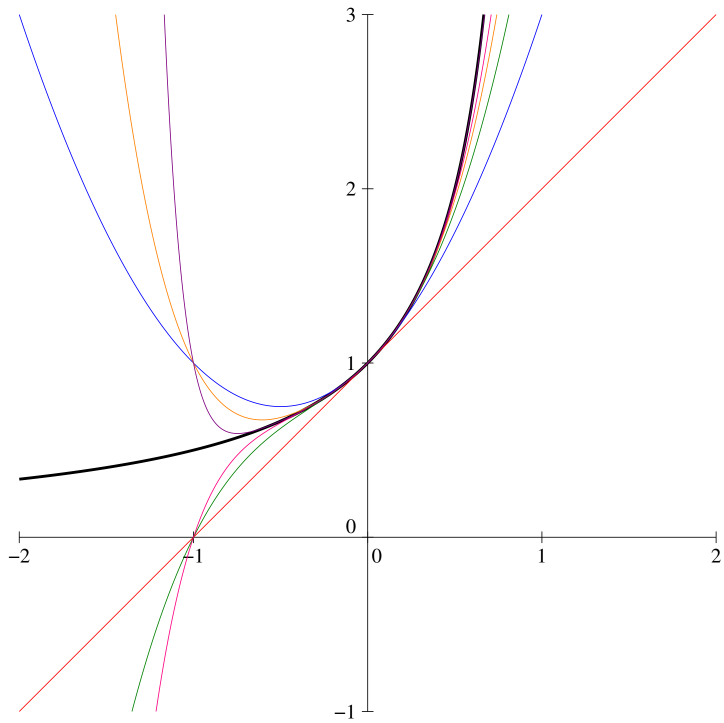
Remarque 243. Les trois formules de Taylor ue nous venons de voir (celle sur les polynômes est un peu à part) se resssemblent, mais ont chacune leur spécificité qui les rend toutes indispensables dans certaines situations :

- la formule de Taylor-Young est de loin celle que vous utiliserez le plus souvent, c'est la moins précise mais c'est elle qui va nous permettre d'obtenir les développements limités. Elle met vraiment l'accent sur le caractère local des formules de Taylor.
- au contraire, l'inégalité de Taylor-Lagrange est la seule permettant d'obtenir des informations globalement, c'est-à-dire sur tout l'intervalle I. Elle sera notamment utilisée pour prouver des convergences de suites sur tout l'intervalle I.
- la formule de Taylor avec reste intégral est la plus fondamentale dans la mesure où c'est la seule à donner une version exacte du reste. À partir de là, tous les calculs restent possibles, et on s'en servira parfois pour obtenir des majorations du reste plus fines ou différentes de celle donnée par Taylor-Lagrange.

Exemple 1 : Appliquons la formule de Taylor-Young à la fonction exponentielle, pour $a = 0$, à l'ordre n. Les dérivées sont évidemment vite calculées puisqu'elles sont toutes identiques, et valent 1 en 0. On en déduit que $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$. Graphiquement, les polynômes $T_0(X) = 1$, $T_1(X) = 1 + X$, $T_2(X) = 1 + X + \frac{1}{2}X^2$ etc, sont les polynômes dont les courbes sont les plus proches possibles de la courbe de l'exeponentielle en 0 pour chaque degré. En pratique, ces courbes vont « coller » à celle de l'exponentielle de plus en plus longtemps au voisinage de 0. On peut prouver la convergence de $T_n(x)$ vers e^x quelle que soit la valeur de x, mais ce n'est pas notre but cette année (et ça ne découle en tout cas pas du tout de la formule de taylor-Young). Une petite illustration avec les premiers polynômes de Taylor (T_1 en rouge, T_2 en bleu, T_3 en vert, T_4 en orange, T_5 en rose, T_{10} en violet, la courbe de l'exponentielle étant en noir) :



Exemple 2 : Effectuons les mêmes calculs sur la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{1-x}$. On calcule $g'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ (le $-$ de la dérivée du dénominateur compense le $-$ de la dérivation de l'inverse), $g''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$, et on conjecture (et on prouve par récurrence) que $g^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$. En particulier, $g^{(n)}(0) = n!$, et la formule de Taylor-Young donne alors $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$. Ce n'est pas une grande surprise, on sait depuis qu'on a appris à étudier des suites géométriques que $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} + O(x^{n+1})$. Ici, bien évidemment, la suite $T_n(x)$ ne peut pas converger vers $\frac{1}{1-x}$ pour toute valeur de x puisqu'on aura déjà de gros problèmes quand $x = 1$. En fait, la formule de la somme géométrique permet de prouver facilement que la convergence n'a lieu que si $x \in]-1, 1[$. Une illustration graphique, avec les mêmes codes couleurs que pour l'exponentielle :



17.2 Développements limités

17.2.1 Définitions

Définition 257. Une fonction f admet un **développement limité à l'ordre** n **en** a si $f(x) \underset{x \to a}{=} P(x-a) + o(x-a)^n$, où $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Le polynôme P est alors appelé **partie régulière** du développement limité, et ce qui se cache derrière le $o(x-a)^n$ est le **reste** du développement limité. On notera souvent $DL_n(a)$ pour désigner un développement limité à l'ordre n en a.

Remarque 244. On omettra souvent de préciser que x tend vers 0 quand on écrit un développement limité en 0, ce qui sera de loin le cas le plus fréquent.

Proposition 267. Si f admet un $DL_n(a)$, sa partie régulière est unique.

Démonstration. En effet, si f admettait deux développements limités avec des parties régulières P_1 et P_2 distinctes, on aurait par soustraction des deux développements $0 = P_1(x-a) - P_2(x-a) + o(x-a)^n$, autrement dit $P_1(x-a) - P_2(x-a) = o(x-a)^n$. Le polynôme $P_1 - P_2$ étant de degré au plus n, ce ci n'est possible que s'il est nul. □

Corollaire 9. Si f est une fonction paire, son $DL_n(0)$ ne contient que despuissances paires de x. De même, si f est impaire, son $DL_n(0)$ ne contiendra que des puissances impaires de x.

Démonstration. Soit $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$ le $DL_n(0)$ de f (dans le cas d'une fonction paire. Comme $-x$ tend certainement vers 0 quand x tend vers 0, on peut écrire $f(-x) = a_0 - a_1 x + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$. En soustrayant les deux égalités et en utilisant le fait que $d(x) - f(-x) = 0$ pour une fonction paire, on trouve $0 = 2a_1 x + \cdots + 2a_{2k+1} x^{2k+1} + o(x^n)$. Or, la fonction nulle a évidemment pour développement limité en 0 le développement suivant : $0 = 0 + o(x^n)$. Par unicité du DL, on en déduit que $a_1 = \cdots = a_{2k+1} = 0$. Le raisonnement pour une fonction impaire est le même en faisant une somme au lieu de la différence. □

Proposition 268. Si f admet un $DL_n(a)$, alors f admet des $DL_k(a)$ pour tout entier $k \leqslant n$, obtenus par **troncature** du $DL_n(a)$, c'est-à-dire en gardant dans la partie régulière du $DL_n(a)$ les termes jusqu'à $a_k(X-a)^k$.

Démonstration. C'est évident, tous les termes suivants sont des $o(X-a)^k$, donc peuvent être intégrés dans un $o(X-a)^k$ global, ce qui donne bien un $DL_k(a)$ de f. □

Remarque 245. Attention tout de même à ne pas se dire simplement qu'on garde dans la partie régulière les termes de degré inférieur ou égal à k, ce n'est pas vrai si on travaille sur des développements limités ailleurs qu'en 0.

Proposition 269. Une fonction f admet un DL_0 en a si et seulement si elle est continue en a.
Une fonction f admet un DL_1 en a si et seulement si elle est dérivable en a.
Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ en a, alors f admet un DL_n en a, de partie régulière $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$.

Démonstration. Tout a déjà été fait ! Dire que f est continue en a signifie bien que $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + o(1)$, dire que f est dérivable en a est équivalent à avoir $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$, et le troisième point est une conséquence immédiate de la formule de Taylor-Young. Attention tout de même, dans ce dernier cas, la réciproque n'est pas du tout vraie, il existe des fonctions qui admettent par exemple des DL à tout ordre en 0 sans être de classe $\mathcal{C}^\infty$. □

17.2.2 Formulaire, première partie

Théorème 82. Toutes les fonctions usuelles suivantes admettent des DL à tout ordre en 0, donnés par les formules suivantes :

- $\displaystyle e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$
- $\displaystyle \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$
- $\displaystyle \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n) = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$
- $\displaystyle \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} + o(x^n) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$
- $\displaystyle \mathrm{ch}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots + \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n+1})$
- $\displaystyle \mathrm{sh}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots + \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+2})$
- $\displaystyle \cos(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n+1})$
- $\displaystyle \sin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+2})$
- $\displaystyle (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + o(x^n) = 1 + \frac{\alpha}{2}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{6}x^2 + \dots$
$\displaystyle + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$ (α désignant ici un réel quelconque).

Démonstration. Toutes ces formules découlent immédiatement de la formule de Taylor-Young, mais on peut éviter certains calculs. Les deux premières formules ont déjà été prouvées dans la première partie du cours. La troisième est obtenue à partir de la deuxième en remplaçant simplement x par $-x$. Pour $\ln(1+x)$, pas vraiment d'autre choix pour nous que de reprendre la formule de Taylor, même si les calculs seront en fait très rapides : en posant $f(x) = \ln(1+x)$, on a $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$. Comme le

DL de $\dfrac{1}{1+x}$ assure que $\left(\dfrac{1}{1+x}\right)^{(n)}(0) = (-1)^n n!$, on en déduit que $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!$, et comme $f(0) = 0$, on trouve bien $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!}x^k + o(x^n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k} + o(x^n)$.

Le DL de la fonction ch découle immédiatement du fait que $\operatorname{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, ou si on préfère du fait que les dérivées de ch sont périodiquement sh qui s'annule en 0 et ch qui vaut 1 en 0. Ensuite, $\operatorname{sh}(x) = e^x - \operatorname{ch}(x)$ donne immédiatement le DL de sh. Pour les fonctions trigonométriques, on peut utiliser les dérivées (on a cette fois-ci une périocité 4 sur les dérivées, qui s'annulent une fois sur deux et valent alternativement 1 et -1 le reste du temps) ou pour faire plus savant utiliser le fait que $\cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$. Bon, bien sûr, cela suppose qu'on sache faire des développements limités de fonctions complexes, mais ça ne pose en fait aucun problème. La dernière formule nécessite vraiment de revenir à la formule de Taylor mais n'est pas difficile à obtenir. Si on pose $f(x) = (1+x)^\alpha$, alors $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$ etc. On fait une récurrence si on tient à être très rigoureux. □

Exemple : Si la dernière formule donne parfois des calculs peu digestes, il est indispensable de connaître par coeur les premiers termes du développement limité de $x \mapsto \sqrt{1+x}$ (qui correspond à $\alpha = \frac{1}{2}$) : $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + o(x^4)$.

17.2.3 Opérations sur les développements limités

Proposition 270. Si f et g admettent des $DL_n(a)$, alors $f + g$ admet un $DL_n(a)$ dont la partie principale est la somme de celles de f et de g.

Démonstration. C'est complètement évident, la somme de deux $o(x-a)^n$ étant bien sûr un $o(x-a)^n$. □

Exemple : Le DL_5 de la fonction $x \mapsto e^x + \cos(x)$ en 0 est $e^x + \cos(x) = 2 + x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)$.

Proposition 271. Si f et g admettent des $DL_n(a)$, alors fg admet un $DL_n(a)$ dont la partie principale est la troncature du produit de celles de f et de g.

Démonstration. Là encore, c'est à peu près évident : si $f(x) = P(x-a) + o(x-a)^n$ et $g(x) = Q(x-a) + o(x-a)^n$, alors $f(x)g(x) = P(x-a)Q(x-a) + o(x-a)^n$, les différents termes du produit à part PQ faisant tous apparaitre des $o(x-a)^n$. Si on fait passer dans le o ce qui est un $o(x-a)^n$ dans le produit PQ, on trouve le résultat souhaité. □

Exemple : En pratique, on se contente de développer le produit des polynômes en omettant d'écrire les termes de degré supérieur à l'ordre recherché pour le DL. Ainsi, le DL_5 en 0 de la fonction $x \mapsto e^x \cos(x)$ est $e^x \cos(x) = \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5\right)\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4\right) + o(x^5) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{12}x^5 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{24}x^5 + o(x^5) = 1 + x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{30}x^5 + o(x^5)$.

Remarque 246. Pas de propriété très rigoureuse à énoncer dans le cas d'une composée de deux fonctions, mais en pratique, on sait calculer le $DL_n(a)$ de $g \circ f(x)$ en $f(a)$ en remplaçant dans le $DL_n(g)$ en $f(a)$, la valeur de x par celle de $f(x)$. Attention tout de même, comme on travaillera essentiellement avec des DL en 0, à ne pas composer par une fonction qui n'a pas une limite nulle quand x tend vers 0 !

Exemple : En pratique, on ne se gênera pas pour faire des abus de notations en écrivant des o à l'intérieur de fonctions. On ne change pas une équipe qui gagne, cherchons donc le $DL_5(0)$ de $x \mapsto e^{\cos(x)}$. On commence par écrire $e^{\cos(x)} = e^{1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^5)} = e \times e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^5)}$. Maintenant que ce qui est dans la deuxième exponentielle tend vers 0 (notons-le u), on peut lui appliquer le DL de l'exponentielle, pour obtenir $e^{\cos(x)} = e\left(1+u+\dfrac{1}{2}u^2\right)+o(x^5)$ (inutile d'aller plus loin pour obtenir un DL_5 à la fin, puisque $u \sim -\dfrac{1}{2}x^2$, donc u^3 sera déjà inclus dans un $o(x^5)$. On peut expliciter : $e^{\cos(x)} = e\left(1-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{24}x^4+\dfrac{1}{8}x^4\right)+o(x^5) = e-\dfrac{e}{2}x^2+\dfrac{e}{6}x^4+o(x^5)$ en se débarassant bien sûr de tous les termes d'ordre plus grand que 5.

Remarque 247. Dans le cas de quotients, on essaiera toujours de les écrire sous la forme $\dfrac{u(x)}{1+v(x)}$, avec v de limite nulle, ce qui permet de composer v par $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ dont on connait le DL, puis d'effectuer un produit de DL.

Exemple : Calculons donc, pour boucler la boucle, un $DL_5(0)$ de $x \mapsto \dfrac{e^x}{\cos(x)}$. On commence par écrire $\dfrac{1}{\cos(x)} = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^5)}$. En notant $u = -\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{24}x^4$, on applique le DL de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ pour trouver $\dfrac{1}{\cos(x)} = 1-u+u^2+o(x^5) = 1+\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{24x^4}+\dfrac{1}{4}x^4+o(x^5) = 1+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{5}{24}x^4+o(x^5)$. Il ne reste plus qu'à faire le produit par l'exponentielle : $\dfrac{e^x}{\cos(x)} = \left(1+x+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{1}{24}x^4+\dfrac{1}{120}x^5+o(x^5)\right)\left(1+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{5}{24}x^4+o(x^5)\right) = 1+x+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{1}{24}x^4+\dfrac{1}{120}x^5+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}x^3+\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{1}{12}x^5+\dfrac{5}{24}x^4+\dfrac{5}{24}x^5+o(x^5) = 1+x+x^2+\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^4+\dfrac{3}{10}x^5+o(x^5)$.

Proposition 272. Si f admet un $DL_n(a)$ et F est une primitive de f, alors F admet un $DL_{n+1}(a)$, dont la partie principale est la primitive de la partie principale de f prenant pour valeur $F(a)$ en a.

Démonstration. Nous admettrons ce résultat un peu technique. La difficulté consiste à prouver que quand on dérive un $o(x-a)^{n+1}$, on obtient toujours un $o(x-a)^n$, ce qui nécessite le théorème des accroissements finis. □

Proposition 273. Soit f une fonction admettant un $DL_n(a)$, et telle que sa dérivée f' admette un $DL_{n-1}(a)$, alors la partie principale du $DL_{n-1}(a)$ de f' est la dérivée de celle du $DL_n(a)$.

Démonstration. Résultat également admis. Attention aux hypothèses, il se peut très bien hélas que f admette un DL_n sans que f' admette un DL_{n-1}. □

Exemple : Pour terminer ce paragraphe sur les différentes techniques à maîtriser pour les calculs de développements limités, nous allons calculer de trois façons différentes le $DL_5(0)$ de la fonction tangente.

Exemple : Trois méthodes différentes pour calculer le $DL_5(0)$ de la fonction tangente.

- Première possibilité, faire le DL du quotient $\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$. On a déjà vu plus haut que $\dfrac{1}{\cos(x)} = 1+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{5}{24}x^4+o(x^5)$, il ne reste plus quà faire le produit : $\tan(x) = \left(x-\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{1}{120}x^5\right)\times\left(1+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{5}{24}x^4\right)+o(x^5) = x-\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{1}{120}x^5+\dfrac{1}{2}x^3-\dfrac{1}{12}x^5+\dfrac{5}{24}x^5+o(x^5) = x+\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{2}{15}x^5+o(x^5)$.

- Deuxième possibilité : partir de $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$, et intégrer un DL_4. On part de $\frac{1}{\cos^2(x)} = \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4\right)^2 + o(x^4) = 1 + \frac{1}{4}x^4 + x^2 + \frac{5}{12}x^4 + o(x^4) = 1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$. Comme $\tan(0) = 0$, l'intégration donne $\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$.
- Troisième possibilité : exploiter la relation $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$. On sait que la fonction tangente est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et impaire, elle admet donc un $DL_5(0)$ de la forme $\tan(x) = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^6)$. On en déduit d'une part que $\tan'(x) = a + 3bx^2 + 5cx^4 + o(x^5)$, et d'autre part que $1 + \tan^2(x) = 1 + a^2x^2 + 2abx^4 + o(x^5)$. Par identification de ces deux DL, on trouve les relations $a = 1$, puis $3b = a^2 = 1$, donc $b = \frac{1}{3}$, et enfin $5c = 2ab = \frac{2}{3}$, soit $c = \frac{2}{15}$. Bien sûr, les trois méthodes donnent le même développement.

17.2.4 Formulaire, deuxième partie

Théorème 83. Toutes les fonctions usuelles suivantes admettent des DL à tout ordre en 0, donnés par les formules suivantes :

- $\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$
- $\text{th}(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$
- $\arctan(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2k+2}) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1} + o(x^{2k+2})$
- $\text{Argth}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2k+2}) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + \frac{1}{2k+1}x^{2k+1} + o(x^{2k+2})$
- $\arcsin(x) = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \times 3}{2 \times 5}\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$
  $= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^6)$
- $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x) = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{40}x^5 + o(x^6)$
- $\text{Argsh}(x) = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \times 3}{2 \times 5}\frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n\frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$
  $= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^6)$

Démonstration. Je crois qu'on n'a pas besoin de plus de démonstration pour la tangente. La tangente hyperbolique s'obtient par les mêmes méthodes, seuls certains signes changent, ça vous fera un bon exercice. Toutes les autres fonctions s'obtiennent en intégrant. On sait que $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n+1})$, ce qui donne par intégration la formule annoncée en tenant compte du fait que $\arctan(0) = 0$. Idem pour Argth avec des signes positifs partout. Pour arcsin un peu plus compliqué : $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} + o(x^{2n+1})}$, et il n'est pas évident de trouver une formule simple pour ce développement. Contentons-nous de le faire à l'ordre 4 : $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}(x^2+x^4) - \frac{1}{8}(x^2+x^4)^2 + o(x^5) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^5) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^4)$, qui donne bien la formule annoncée en intégrant. Comme $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$, aucun calcul nécessaire pour celui-ci. Enfin, Argsh est très similaire à arcsin, les signes négatifs en moins. Il n'y a évidemment pas Argch dans la liste car la fonction n'est tout simplement pas définie en 0 (et en 1, elle admet une tangente verticale, donc pas de DL non plus). $\square$

17.3 Applications

Pas de proposition ni de théorème dans cette dernière partie de chapître, le but est simplement de faire une petite liste des calculs les plus classiques pour lesquels un recours à des développements limités pourra vous permettre d'aller beaucoup plus loin (ou plus vite) que ce que vous ne faisiez avant. Les techniques utilisées doivent tout de même être parfaitement connues.

17.3.1 Calculs de limites

Exemple : Calcul de $\lim_{x \to +\infty} \left(x \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right)^{x^2}$.

Voici un exemple typique de calcul de limite nécessitant les DL. On commence bien sûr par passer à l'exponentielle : $f(x) = e^{x^2 \ln(x \sin(\frac{1}{x}))}$ (en notant f la fonction dont on cherche la limite). On sait que $\sin \left(\frac{1}{x} \right) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$, donc $\lim_{x \to +\infty} x \sin \left(\frac{1}{x} \right) = 1$. Cela assure que la fonction f est bien définie au voisinage de $+\infty$, mais ne permet pas de calculer la limite puisqu'il reste dans l'exponentielle une belle forme indéterminée. Tentons alors de faire un DL de tout ça : $\sin \left(\frac{1}{x} \right) \underset{x \to +\infty}{=} \frac{1}{x} - \frac{1}{6x^3} + o \left(\frac{1}{x^3} \right)$, donc $x \sin \left(\frac{1}{x} \right) = 1 - \frac{1}{6x^2} + o \left(\frac{1}{x^2} \right)$. On peut désormais repasser simplement aux équivalents : $\ln \left(x \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right) \sim -\frac{1}{6x^2}$ (puisque celle quantité tend vers 0), et $x^2 \ln \left(x \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right) \sim -\frac{1}{6}$. Autrement dit, on obtient la conclusion suivante : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = e^{-\frac{1}{6}}$. Il va de soi qu'obtenir une telle valeur par une autre méthode serait bien compliqué.

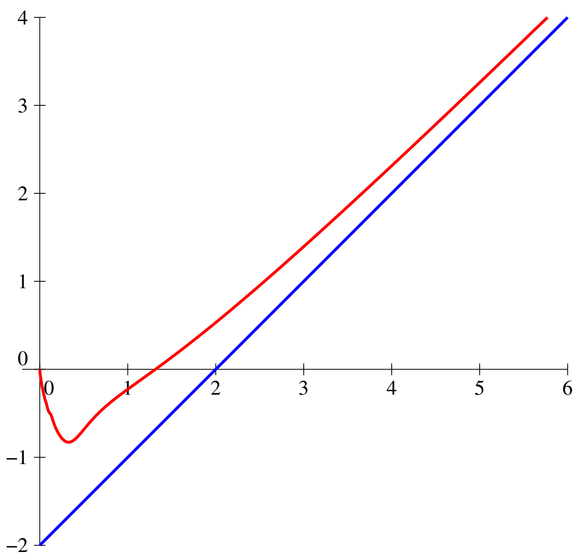
17.3.2 Étude locale de fonctions

Exemple : Étude de $f : x \mapsto \frac{x^2}{x+1} e^{\sin(\frac{1}{x})} - 2x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$ au voisinage de $+\infty$.

L'étude locale d'une fonction consiste à déterminer pour cette fonction l'existence d'une tangente (si on est au voisinage d'une valeur finie) ou d'une asymptote, et de donner la position relative de la droite et de la courbe dans le voisinage considéré. Tous ces calculs sont très souvents faisables sans recours aux développements limités, mais les DL présentent le grand avantage de pouvoir tout faire en un seul calcul. Ainsi, pour l'étude d'une fonction au voisinage de 0, un DL à l'ordre 2 donnera l'équation de la tangente et la position relative via le signe du terme d'ordre 2 (éventuellement d'ordre 3 si celui d'ordre 2 s'annule).

En $+\infty$, une difficulté s'ajoute, il faut se ramener en 0 pour pouvoir utiliser des DL et donc effectuer en général le changement de variable $X = \frac{1}{x}$. Ici, $f(x) = \frac{1}{X(X+1)} e^{\sin(X)} - \frac{2}{X} \ln(1+X)$. Pour avoir des fonctions définies en 0 et pouvoir effectuer un DL, on multiplie tout par X : $Xf(x) = \frac{e^{\sin(X)}}{1+X} - 2\ln(1+X) = (e^{X - \frac{1}{6}X^3 + o(X^4)})(1 - X + X^2 - X^3 + o(X^3)) - 2 \left(X - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{3}X^3 + o(X^3) \right) = \left(1 + X - \frac{1}{6}X^3 + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{6}X^3 + o(X^3) \right) (1 - X + X^2 - X^3 + o(X^3)) - 2X + X^2 - \frac{2}{3}X^3 + o(X^3) = 1 - X + X^2 - X^3 + X - X^2 + X^3 + \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X^3 - 2X + X^2 - \frac{2}{3}X^3 + o(X^3) = 1 - 2X + \frac{3}{2}X^2 - \frac{7}{6}X^3 + o(X^3)$.

Il se trouve que le terme d'ordre 3 est ici inutile, mais mieux vaut être prudent en général. En tout cas, $f(x) = \frac{1}{X} - 2 + \frac{3}{2}X + o(X) = x - 2 + \frac{3}{2x} + o \left(\frac{1}{x} \right)$. Cette égalité prouve que la droite d'équation $y = x - 2$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$, et comme de plus $f(x) - (x-2) \sim \frac{3}{2x}$, qui est positif au voisinage de $+\infty$, la courbe sera située au-dessus de son asymptote (dans un voisinage de $+\infty$ qui reste évidemment indéterminé ! C'est imprécis, mais on serait bien incapable d'étudier plus précisément la fonction f dans ce cas).



17.3.3 Développements asymptotiques de suites

Exemple : Développement asymptotique d'une suite implicite.
Pour tout entier naturel n, on définit le réel u_n comme étant l'unique solution positive de l'équation $x^4 + x^3 = n$. Cette équation admet effectivement une solution unique puisque la fonction $g : x \mapsto x^4 + x^3$, qui est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, effectue une bijection de $[0, +\infty[$ sur lui-même. Déterminer un développement asymptotique de la suite consiste à en trouver un équivalent, puis un équivalent de la différence entre u_n et son équivalent, et ainsi de suite, pour obtenir une valeur approchée de u_n comme somme de termes d'ordres de grandeur décroissants. Ce n'est pas un développement limité à proprement parler car ces termes ce seront pas nécessairement des puissances successives entières de la variable comme dans le cas d'un DL.
Dans notre cas, on peut commencer par remarquer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. En effet, en notant g^{-1} la réciproque de g sur $[0, +\infty[$, $u_n = g^{-1}(n)$, et d'après le théorème de la bijection, $\lim\limits_{n\to+\infty} g^{-1}(n) = +\infty$. En découle que $u_n^3 = o(u_n^4)$, ou encore que $u_n^4 + u_n^3 \sim u_n^4$. Comme par définition $u_n^4 + u_n^3 + n$, on en déduit que $u_n^4 \sim n$, soit $u_n \sim n^{\frac{1}{4}}$. Pour obtenir cet équivalent, on a en fait utilisé que $u_n^4 = \dfrac{n}{1 + \frac{1}{u_n}} = \dfrac{n}{1 + o(1)}$. On dispose maintenant d'une information supplémentaire, qui nous permet de refaire le calcul à un ordre plus précis (n'oubliez pas pour le calcul que $\dfrac{1}{u_n}$ tend vers 0, ce qui permet d'utiliser les DL classiques du cours) : $u_n^4 = \dfrac{n}{1 + \frac{1}{u_n}} = \dfrac{n}{1 + n^{-\frac{1}{4}} + o(n^{-\frac{1}{4}})} = n(1 - n^{-\frac{1}{4}} + o(n^{-\frac{1}{4}})) = n - n^{\frac{3}{4}} + o(n^{\frac{3}{4}})$. Il ne reste plus qu'à passer tout ça à la puissance $\dfrac{1}{4}$: $u_n = (n - n^{\frac{3}{4}} + o(n^{\frac{3}{4}}))^{\frac{1}{4}} = n^{\frac{1}{4}} \times (1 - n^{-\frac{1}{4}} + o(n^{-\frac{1}{4}}))^{\frac{1}{4}} = n^{\frac{1}{4}} \left(1 - \dfrac{1}{4}n^{-\frac{1}{4}} + o(n^{-\frac{1}{4}})\right) = n^{\frac{1}{4}} - \dfrac{1}{4} + o(1)$.
On peut reprendre le calcul pour obtenir un terme de plus :
$\dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{n^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{4} + o(1)} = \dfrac{1}{n^{\frac{1}{4}}} \times \dfrac{1}{1 - \frac{1}{4}n^{-\frac{1}{4}} + o(n^{-\frac{1}{4}})} = n^{-\frac{1}{4}} \left(1 + \dfrac{1}{4}n^{-\frac{1}{4}} + o(n^{-\frac{1}{4}})\right) = n^{-\frac{1}{4}} + \dfrac{1}{4}n^{-\frac{1}{2}} + o(n^{-\frac{1}{2}})$. On enchaîne : $u_n^4 = \dfrac{n}{1 + \frac{1}{u_n}} = \dfrac{n}{1 + n^{-\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}n^{-\frac{1}{2}} + o(n^{-\frac{1}{2}})} = n\left(1 - n^{-\frac{1}{4}} - \dfrac{1}{4}n^{-\frac{1}{2}} + n^{-\frac{1}{2}} + o(n^{-\frac{1}{2}})\right) = n\left(1 - n^{-\frac{1}{4}} + \dfrac{3}{4}n^{-\frac{1}{2}} + o(n^{-\frac{1}{2}})\right)$. On passe une dernière fois le tout à la puissance $\dfrac{1}{4}$: $u_n = n^{\frac{1}{4}} \times \left(1 - \dfrac{1}{4}n^{-\frac{1}{4}} + \dfrac{3}{16}n^{-\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{4} \times \left(-\dfrac{3}{4}\right) \times \frac{1}{2}n^{-\frac{1}{2}} + o(n^{-\frac{1}{2}})\right) = n^{\frac{1}{4}} \times \left(1 - \dfrac{1}{4}n^{-\frac{1}{4}} + \dfrac{3}{32}n^{-\frac{1}{2}} + o(n^{-\frac{1}{2}})\right)$.

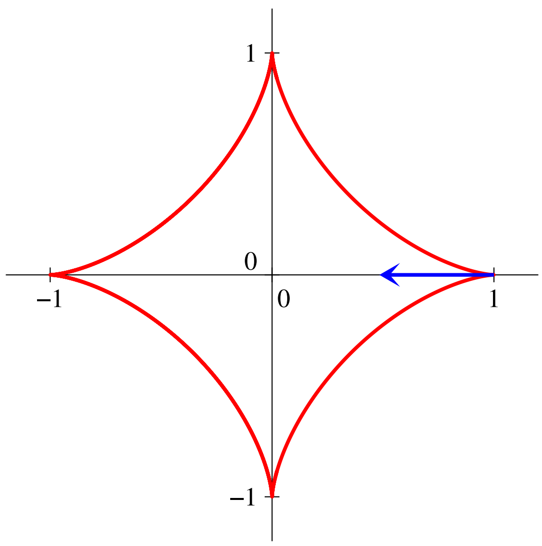
Conclusion de ce sublime calcul : $u_n = n^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{4} + \frac{3}{32n^{\frac{1}{4}}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}\right)$.

17.3.4 Points stationnaires de courbes paramétrées

Exemple : Étude des points stationnaires de l'astroïde $\begin{cases} x(t) &= \cos^3(t) \\ y(t) &= \sin^3(t) \end{cases}$.

Encore un exemple de calcul qu'on sait très bien faire sans développements limités, mais pour lequel on pourra gagner du temps. En effet, déterminer la nature d'un point stationnaire suppose de connaître les valeurs des différentes dérivées de x et de y au point considéré. pour cela, pas besoin de calculer explicitement les dérivées successives, un DL nous donnera directement les valeurs via l'identification avec la formule de Taylor-Young.

Ici, on va se concentrer sur le point stationnaire en $(1, 0)$ obtenu pour $t = 0$. Comme ça, on n'aura que des DL en 0 à faire. Allons-y : $\cos^3(t) = \left(1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + o(t^4)\right)^3 = 1 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{8}t^4 + o(t^4)$. En découle que $x'(0) = 0$ (ce n'est pas une surprise), $x''(0) = -3$ (attention à ne pas oublier les $k!$ du dénominateur dans la formule de Taylor), $x'''(0) = 0$ et $x^{(4)}(0) = 3$. De même, on calcule $\sin^3(t) = \left(t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^4)\right)^3 = t^3 + o(t^4)$. C'est encore plus simple : la seule dérivée non nulle est $y'''(t) = 6$. En particulier, le vecteur dérivé seconde en 0 est horizontal, ce qui donne la direction de la tangente, et le vecteur dérivé tierce est vertical, donc non colinéaire au précédent. Nous sommes en présence d'un point de rebroussement de première espèce.



Chapitre 18

Géométrie euclidienne

Si quelqu'un, en l'éveil de son intelligence, n'a pas
été capable de s'enthousiasmer pour une telle architecture,
alors jamais il ne pourra réellement s'initier à la recherche théorique.

Albert Einstein, à propos de la géométrie euclidienne.

Plus j'y pense, plus je me dis qu'il n'y a aucune raison
pour que le carré de l'hypoténuse soit égal à la somme
des carrés des deux autres côtés.

Frédéric Dard.

Introduction

Pour ce dernier chapître d'algèbre de l'année (mais oui, déjà), nous allons en quelque sorte boucler la boucle puisque nous reviendrons sur des notions déjà abordées largement en début d'année en reconstruisant la géométrie du plan et de l'espace. Ces domaines constituaient en fait le fondement de notre travail sur les espaces vectoriels, puisque ces derniers ont permis de généraliser les notions de bases, de coordonnées et de calcul vectoriel que nous avions largement pratiqué dans ces cas particuliers. Il est maintenant temps de constater qu'on peut effectivement faire de la géométrie dans à peu près tous les espaces vectoriels comme on le fait dans ces espaces usuels. Pourquoi presque ? Parce qu'il nous manque tout de même une notion fondamentale pour cela, la notion d'orthogonalité de vecteurs dont découle tout l'aspect métrique du travail géométrique, c'est-à-dire les calculs de distance notamment. C'est l'objet de notre début de chapître : définir rigoureusement et de façon très générale la notion de produit scalaire dont découle l'orthogonalité. Nous pourrons ensuite compléter notre vocabulaire et nos techniques de calculs dans des espaces vectoriels très généraux, avant de revenir dans le plan et dans l'espace pour une étude beaucoup plus précise qu'en début d'année, en utilisant notamment l'outil matriciel.

Objectifs du chapitre :

- savoir faire des calculs « géométriques » (normes, distances, projections) dans n'importe quel espace euclidien.
- comprendre le procédé de Gram-Schmidt et savoir l'appliquer sans hésitation, y compris sur des produits scalaires « exotiques ».

- connaître les différents types d'isométries euclidiennes et affines dans le plan et dans l'espace, et savoir déterminer les caractéristiques d'une isométrie à partir de sa matrice ou de son expression analytique.

18.1 Géométrie euclidienne

Certaines notions géométriques, comme le parallélisme que nous évoquerons dans la deuxième partie de ce chapître, sont intrinsèques à la structure d'espace vectoriel. D'autres, au contraire, nécessitent d'ajouter une structure supplémentaire pour être définies. c'est le cas de la notion fondamentale en géométrique vectorielle de norme et de distance, qui découle de celle de produit scalaire. Dans tout le chapître, E désignera un espace vectoriel réel (on peut très bien définir la plupart des notions sur des espaces vectoriels complexes ou même encore plus généraux, mais ça ne nous servirait à rien pour l'instant).

18.1.1 Produits scalaires et normes

Définition 258. Une **forme bilinéaire sur** E est une application $\varphi : E \times E \to E$ telle que $\forall (x,y,z) \in E^3$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\varphi(\lambda x + \mu y, z) = \lambda \varphi(x,z) + \mu \varphi(y,z)$ (linéarité à gauche) et $\varphi(x, \lambda y + \mu z) = \lambda \varphi(x,y) + \mu \varphi(x,z)$ (linéarité à droite).

Définition 259. Une application $\varphi : E \times E \to E$ est un **produit scalaire** si elle est :
- bilinéaire.
- symétrique : $\forall (x,y) \in E^2$, $\varphi(y,x) = \varphi(x,y)$.
- positive : $\forall x \in E$, $\varphi(x,x) \geqslant 0$, et définie : $\varphi(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Remarque 248. Il existe plusieurs notations courantes pour les produits scalaires. Dans ce cours, nous prendrons toujours la plus économique en notant $\varphi(x,y) = x.y$, mais on croise aussi régulièrement (x,y), $< x,y >$ ou encore $< x|y >$ (surtout en physique pour cette dernière).

Exemples : L'application $((x,y);(x',y')) \mapsto xx' + yy'$ est bien entendu un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$, appelé produit scalaire usuel puisque c'est celui qu'on utilise la plupart du temps (et dont on a déjà vu les propriétés en début d'année). Mais ce n'est sûrement pas le seul. Par exemple, $\varphi((x,y);(x',y')) = 2xx' + 4yy' + xy' + yx'$ définit également un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$:
- φ est symétrique de façon à peu près immédiate.
- $\varphi((\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2);(x',y')) = \lambda \varphi((x_1,y_1),(x',y')) + \mu \varphi((x_2,y_2),(x',y'))$ par un calcul immédiat, donc φ est linéaire à gauche. Étant symétrique, elle est aussi linéaire à droite, donc bilinéaire.
- $\varphi((x,y);(x,y)) = 2x^2 + 4y^2 + 2xy = x^2 + 3y^2 + x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + 3y^2 + (x+y)^2$ est toujours positif, et ne peut s'annuler que si $x = y = x + y = 0$, donc φ est bien définie positive.

De même sur $\mathbb{R}^3$, ou plus généralement sur $\mathbb{R}^n$, si $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$, l'application $(x,y) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ définit un produit scalaire usuel, qui est loin d'être le seul possible. Pour donner des exemples plus exotiques mais d'usage fréquent, signalons que $(f,g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)\ dt$ définit par exemple un produit scalaire sur l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur le segment $[0,1]$; ou encore que $(A,B) \mapsto \mathrm{Tr}({}^tAB)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (si vous faites le calcul, vous constaterez que ce dernier produit scalaire est en fait le produit scalaire usuel obtenu en identifiant $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^{n^2}$).

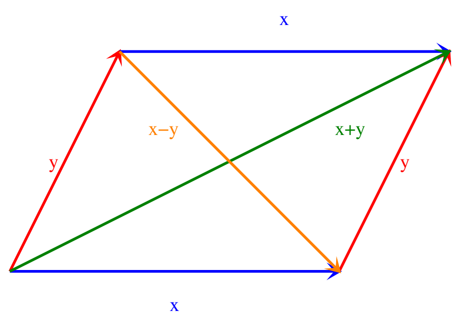
Définition 260. Un **espace euclidien** $(E,.)$ est un esapce vectoriel de dimension finie E muni d'un produit scalaire (noté .).

Dans toute la suite du cours, E sera supposé euclidien.

Définition 261. Soit $x \in E$, la **norme de** x est le réel positif $\|x\| = \sqrt{x.x}$. Si $(x, y) \in E^2$, on appelle **distance de** x **à** y le réel positif $d(x, y) = \|y - x\|$.

Proposition 274. Régles de calcul sur les normes.
- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
- $\forall (x, y) \in E^2$, $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ (identité du parallélogramme).
- $\forall (x, y) \in E^2$, $x.y = \dfrac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$ (identité de polarisation).

Démonstration.
- C'est une conséquence évidente du caractère défini du produit scalaire.
- En effet, $\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x).(\lambda x)} = \sqrt{\lambda^2}(x.x) = |\lambda| \|x\|$ par bilinéarité du produit scalaire.
- C'est encore une conséquence de la bilinéarité : $\|x+y\|^2 = (x+y).(x+y) = x.x+x.y+y.x+x.x = \|x\|^2 + 2x.y + \|y\|^2$. De même, $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2x.y + \|y\|^2$. En additionnant les deux égalités, on trouve la formule du parallélogramme. Elle est ainsi nommée car on peut l'interpréter de la façon suivante : dans un parallélogramme, la somme des carrés des longueurs des deux diagonales est égale à la somme des carrés des longueurs des quatre côtés.



- Cela découle des calculs effectués à la question précédente : $\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 4x.y$, d'où l'identité.

□

Remarque 249. Cette dernière identité est très importante d'un point de vue théorique, puisqu'elle signifie qu'on peut reconstituer le produit scalaire à partir de la connaissance de la norme. Autrement dit, une norme donnée ne peut être associée qu'à un seul produit scalaire.

Théorème 84. Inégalité de Cauchy-Schawarz.
$\forall (x, y) \in E^2$, $|x.y| \leqslant \|x\| \times \|y\|$.

Démonstration. Il s'agit bel et bien de la même inégalité de Cauchy-Schwarz que celle vue dans le chapître d'intégration, et elle se démontre de la même manière : on pose $P(t) = \|x + ty\|^2 = \|x\|^2 + 2t(x.y) + t^2\|y\|^2$, le trinôme est toujours positif donc a un discriminant négatif, l'inégalité en découle. □

Théorème 85. Inégalité triangulaire.
$\forall (x, y) \in E^2$, $|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Démonstration. Là encore, la démonstration est la même que dans le cas de $\mathbb{C}$ que nous avons vu en début d'année, nous nous épargnerons donc une nouvelle démonstration technique. □

Remarque 250. Les cas d'égalité de ces deux inégalités restent les mêmes que dans les cas particuliers vus auparavant (en terme plus vectoriels, on dira qu'il y a égalité si $y \in \text{Vect}(x)$ ou $x \in \text{Vect}(y)$).

18.1.2 Orthogonalité

Définition 262. Un vecteur $x \in E$ est **unitaire** (ou **normé**) si $\|x\| = 1$. Deux vecteurs $(x, y) \in E^2$ sont **orthogonaux** si $x.y = 0$.

Exemple : La notion d'orthogonalité dépend évidemment du produit scalaire choisi. Si on se place sur $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $P.Q = \int_0^1 P(t)Q(t)\ dt$, alors les polynômes $P(X) = 1$ et $Q(X) = 1 - 2X$ sont orthogonaux : en effet, $P.Q = \int_0^1 1 - 2t\ dt = [t - t^2]_0^1 = 0$.

Théorème 86. Théorème de Pythagore.
Deux vecteurs x et y sont orthogonaux si et seulement si $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du calcul effectué plus haut : $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2x.y + \|y\|^2$. □

Définition 263. Une famille de vecteurs non nuls $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_n)$ de E est **orthogonale** si $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, $i \neq j \Rightarrow e_i.e_j = 0$. Elle est **orthonormale** si de plus $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\|e_i\| = 1$. Si la famille $\mathcal{F}$ est une base, on parlera de **base orthogonale** ou de **base orthonormale**.

Proposition 275. Une famille orthogonale est nécessairement libre.

Démonstration. Supposons que la famille ne soit pas libre, c'est-dire que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$, alors, en notant $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, on a bien sûr $\|x\| = 0$, mais par ailleurs, pas bilinéarité, $x.x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 e_i.e_i$ (tous les autres sont nuls par orthogonalité de la famille). Cette somme qui est constituée uniquement de termes positifs ne peut être nulle que si $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\lambda_i^2 = 0$ (par hypothèse, $e_i \neq 0$, donc $(e_i.e_i) \neq 0$ par définition du produit scalaire). Finalement, notre combinaison linéaire est la combinaison nulle, ce qui prouve la liberté de la famille. □

Proposition 276. Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale, alors

- $\forall x \in E$, $x = \sum_{i=1}^{n} (x.e_i)e_i$ (autrement dit, les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$ sont les réels $x.e_i$, qu'on notera plus simplement x_i).
- $\forall x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.
- $\forall (x, y) \in E^2$, $x.y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Démonstration.
- On peut certainement décomposer le vecteur x dans la base $\mathcal{B}$, notons x_i ses coordonnées. On a donc $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Calulons alors $x.e_j = \sum_{i=1}^{n} x_i(e_i.e_j) = x_j$ puisque $e_i.e_j$ est nul si $j \neq i$, et vaut 1 si $j = i$.
- Même type de calcul : $\|x\|^2 = x.x = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j (e_i.e_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.
- Même calcul que ci-dessus avec des y_j au lieu des x_j !

□

Définition 264. Soit F un sous-espace vectoriel de E, l'**orthogonal de** F est l'ensemble $\{x \in E \mid \forall y \in F, x.y = 0\}$. On le note $F^\perp$. Plus généralement, deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont dits **orthogonaux** si $\forall (x, y) \in F \times G$, $x.y = 0$.

Proposition 277. Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $F^\perp$ est également un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. On peut faire une démonstration très théorique mais tout à fait correcte. Pour tout vecteur $y \in F$, l'ensemble des vecteurs x orthogonaux à y est un sous-espace vectoriel de E car c'est le noyau de l'application linéaire $x \mapsto x.y$ (elle est linéaire par bilinéarité du produit scalaire). L'orthogonal de Fr étant l'intersection de tous ces sous-espaces vectoriels lorsque y parcourt F, c'est bien un sous-espace vectoriel de E. □

Remarque 251. On peut en fait définir l'orthogonal, non seulement pour un sous-espace de E, mais pour n'importe quel sous-ensemble F de E. Dans ce cas, on vérifie facilement que $F^\perp = \mathrm{Vect}(F)^\perp$, ce qui prouve au passage que l'orthogonal reste un sous-espace vectoriel de E.

Théorème 87. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille libre de E, alors il existe une unique famille orthonormale $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ telle que $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_i) = \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_i)$, et $f_i.e_i > 0$.

Démonstration. La démonstration de ce résultat est presque plus importante que le résultat lui-même. Nous allons construire explicitement la famille $\mathcal{C}$ en appliquant une méthode connue sous le nom de **procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt**. Elle fonctionne par étapes de la façon suivante :

- On pose $f_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|}$ (autrement dit, on norme simplement le vecteur e_1).
- On pose $f_2' = e_2 - (e_2.f_1)f_1$, puis on norme le vecteur f_2' pour obtenir f_2.
- Plus généralement, à l'étape i, on pose $f_i' = e_i - \displaystyle\sum_{k=1}^{i-1}(e_i.f_k)f_k$, puis on norme le vecteur f_i' pour obtenir f_i.

La famille est construite pour être orthonormale, on le prouve par récurrence sur i. C'est certainement vrai au rang 1, puisqu'une famille d'un seul vecteur est toujours orthogonale, et que $\left\|\dfrac{e_1}{\|e_1\|}\right\| = 1$. Supposons la famille $(f_1, \dots, f_i)$ orthonormale, alors $\forall k \in \{1, \dots, i\}$, $f_{i+1}'.f_k = e_{i+1}.f_k - (e_{i+1}.f_k)(f_k.f_k) = 0$ puisque les autres termes s'annulent par hypothèse, et que $f_i.f_i = 1$. Le fait de normer ensuite le vecteur f_i' ne change pas le caractère orthogonal, donc la famille sera bien orthonormale. De plus, par construction, $f_{i+1} \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_i, e_{i+1})$. En faisant l'hypothèse de récurrence que $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_i) = \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_i)$, on trouve alors $f_{i+1} \in \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_i, e_{i+1})$, et on en déduit facilement que $e_{i+1} \in \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_i, f_{i+1})$, d'où l'égalité des espaces vectoriels engendrés. Enfin, par construction, $f_i'.e_i = \|e_i\| > 0$, et le fait de normer ne change pas le signe.
L'unicité de la famille découle des propriétés des bases orthonormales, on démontre par récurrence que les seuls vecteurs orthogonaux simultanément à f_1, ..., f_i sont les vecteurs proportionnels à f_{i+1}', et l'unicité découle alors de la condition sur la norme et du produit scalaire positif avec e_{i+1}. Nous ne rentrons pas plus dans les détails de cette deuxième partie technique de la démonstration. □

Corollaire 10. On peut compléter toute famille orthonormale de E en une base orthonormale. En particulier, il existe toujours des bases orthonormales dans un espace euclidien E.

Démonstration. On sait déjà qu'on peut compléter la famille en une base de E (c'est le théorème de la base incomplète classique). On applique alors le procédé de Gram-Schmidt à cette base, les premiers vecteurs qui constituaient la famille orthonormale ne seront pas modifiés et on obtiendra donc une base orthonormale dont les premiers éléments sont les vecteurs de notre famille. Si on applique Gram-Schmidt à une base quelconque de E, on trouvera des bases orthonormales. □

Exemple : Essayons de déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$, pour le produit scalaire $P.Q = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\ dt$. Pour cela, on part de la base canonique $(1, X, X^2)$. Puisque $1.1 = \displaystyle\int_0^1 1\ dt = 1$, notre premier vecteur est déjà normé. Calculons alors $X.1 = \int_0^1 t\ dt = \frac{1}{2}$, on pose alors $P_2' = X - (X.1) \times 1 = X - \frac{1}{2}$, puis on norme le vecteur : $P_2'.P_2' = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2\ dt = \int_0^1 t^2 - t + \frac{1}{4}\ dt = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$. On posera donc $P_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}X - \frac{1}{4\sqrt{3}}$. Enfin, on calcule $X^2.1 = \int_0^1 t^2\ dt = \frac{1}{3}$, et $X^2.P_2 = \frac{1}{\sqrt{12}}X^2.\left(X - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{12}}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{12\sqrt{12}}$. On va donc poser $P_3 = X^2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{144}\left(X - \frac{1}{2}\right) = X^2 - \frac{1}{144}X - \frac{95}{288}$. On peut calculer si on y tient vraiment $P_3'.P_3'$, mais les calculs sont passablement ignobles. Bref, même si la méthode de Gram-Schmidt est imparable en théorie, il ne faudra pas être surpris en pratique de devoir faire de gros calculs.

Proposition 278. Soit F un sous-espace vectoriel de E, alors F et $F^\perp$ sont deux sous-espaces vectoriel supplémentaires de E.

Démonstration. Considérons une base orthonormale $(f_1, \dots, f_k)$ de F et complétons-là en une base orthonormale $(f_1, \dots, f_n)$ de E, alors $(f_{k+1}, \dots, f_n)$ est une base (orthonormale) de $F^\perp$. En effet, soit $x \in E$, notons $x = \sum_{i=1}^n x_i f_i$, la base étant orthonormale, $x_i = x.f_i$ et x est donc orthogonal à tous les vecteurs $f_1, \dots, f_k$ si et seulement si il appartient à $\mathrm{Vect}(f_{k+1}, \dots, f_n)$. Comme $x \in F^\perp \Leftrightarrow x \in \{f_1, \dots, f_k\}^\perp$, notre affirmation en découle. Puisque les deux sous-espaces contiennent des bases dont la réunion forme une base de E, ils sont supplémentaires (leur somme est nécessairement égale à E, et $\dim(F) + \dim(F^\perp) = n$). □

Définition 265. Le sous-espace $F^\perp$ est appelé **supplémentaire orthogonal de** F.

Théorème 88. Théorème de représentation de Riesz.
Soit $f; E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire, alors il existe unique vecteur $a \in E$ tel que, $\forall x \in E$, $f(x) = x.a$.

Démonstration. Commençons par prouver l'unicité, en supposant comme souvent qu'il existe deux vecteurs a et b convenables. On a alors $\forall x \in E$, $x.a = x.b$, donc $x.(a - b) = 0$. C'est en particulier vrai pour $a - b$ lui-même, qui vérifie alors $\|a - b\|^2 = 0$, ce qui n'est possible que si $a = b$. Pour l'existence, le plus simple est d'utiliser de la dimension. On sait que l'ensemble F de toutes les formes linéaires sur E est isomorphe à l'ensemble des matrices réelles à 1 ligne et n colonnes, donc $\dim(F) = n$. Notons $\varphi : E \to F$ l'application $a \mapsto f_a$, où $f_a(x) = x.a$. L'application f_a est certainement linéaire car le produit scalaire est bilinéaire, de plus $a \mapsto f_a$ est elle-même linéaire : $f_{\lambda a + \mu b}(x) = (\lambda a + \mu b).x = \lambda(a.x) + \mu(b.x) = \lambda f_a(x) + \mu f_b(x)$. L'application φ étant une application linéaire entre deux espaces de même dimension n, elle sera surjective si (et seulement si) elle est injective. Or, si on suppose $\varphi(a) = 0$, c'est-à-dire $f_a = 0$, on a donc $\forall x \in E$, $x.a = 0$. En particulier, $a.a = 0$, ce qui implique $a = 0$. L'application φ est donc bien injective, et surjective (par la même occasion on a prouvé la bijectivité, ce qui rend inutile le début de notre démonstration). □

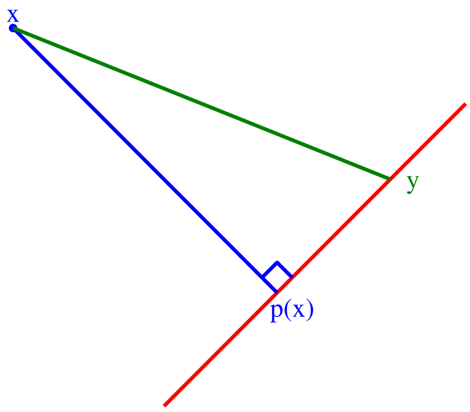
18.1.3 Projections et symétries orthogonales

Définition 266. Un endomorphisme de E est une **projection orthogonale** s'il s'agit d'un projecteur p pour lequel $\ker(p) \perp \mathrm{Im}(p)$. De façon équivalente, une projection orthogonale est une projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $(\mathrm{Im}(p))^\perp$ puisqu'on sait déjà que $\ker(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont supplémentaires pour un projecteur. L'image $p(x)$ du vecteur x par p est alors appelé **projeté orthogonal de** x **sur** $\mathrm{Im}(p)$.

Remarque 252. Si $(e_1, \dots, e_k)$ est une base de $\mathrm{Im}(p)$, alors $p(x) = \sum_{i=1}^k (x.e_i)e_i$.

Proposition 279. Soit F un sous-espace vectoriel de E. En notant $d(x,F) = \inf_{y \in F} d(x,y)$ la distance de x à F, alors cette distance est atteinte en un unique point, qui est le projeté orthogonal de x sur F.

Démonstration. Considérons un vecteur $y \in F^{\perp}$ et faisons le petit schéma suivant :



Les vecteurs $y - p(x)$ et $x - p(x)$ sont orthogonaux. En effet, $y - p(x) \in F^{\perp}$ puisque les deux vecteurs y et $p(x)$ appartiennent à $F^{\perp}$. Par ailleurs, $x - p(x) \in \ker(p) = F$. On en déduit via le théorème de Pythagore que $\|y - x\|^2 = \|x - p(x)\|p^2 + \|y - p(x)\|^2 \geqslant \|p(x) - x\|^2$. Cela prouve d'une part que la distance de x à $p(x)$ est bien minimale, et par ailleurs que $p(x)$ est l'unique point pour lequel elle est atteinte puisque, si $y \neq p(x)$, l'inégalité est stricte. □

Définition 267. Un endomorphisme de E est une **symétrie orthogonale** s'il s'agit d'une symétrie s pour laquelle $\ker(s - \mathrm{id}) \perp \ker(s + \mathrm{id})$. On l'appelle alors **symétrie orthogonale par rapport à** $\ker(s - \mathrm{id})$.

Définition 268. Une **réflexion** est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

18.1.4 Endomorphismes orthogonaux

Définition 269. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est appelé **endomorphisme orthogonal** ou **isométrie** si $\forall (x,y) \in E^2$, $u(x).u(y) = x.y$. On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de l'espace euclidien E.

Remarque 253. Un endomorphisme est donc orthogonal s'il conserve le produit scalaire, ce qui est une condition naturelle. Attention tout de même au vocabulaire, une symétrie orthogonale est un endomorphisme orthogonal, mais pas une projection orthogonale ! En effet, pour une projection p, on peut trouver des vecteurs x non nuls pour lesquels $p(x) = 0$, et dans ce cas $x.x \neq p(x).p(x)$.

Proposition 280. Un endomorphisme est orthogonal si et seulement s'il conserve la norme : $u \in \mathcal{O}(E) \Leftrightarrow \forall x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$.

Démonstration. En effet, si u est orthogonal, on aura toujours $u(x).u(x) = x.x$, donc $\|u(x)\| = \|x\|$. La réciproque découle de l'identité de polarisation. Cette propriété explique le terme d'isométrie, ce sont des applications qui conservent les longueurs. □

Proposition 281. Un endomorphisme orthogonal est nécessairement bijectif.

Démonstration. Pour un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, être bijectif ou injectif est équivalent. Or, si $u(x) = 0$, d'après la propriété précédente, on aura $\|x\| = 0$, donc $x = 0$, ce qui prouve l'injectivité et donc la bijectivité de u. □

Théorème 89. Le groupe $(\mathcal{O}(E), \circ)$ est un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$.

Démonstration. On vient de voir que $\mathcal{O}(E) \subset GL(E)$. De plus, $\mathcal{O}(E)$ est stable par composition (si deux endomorphismes conservent la norme, leur composée la conserve aussi), contient l'élément neutre de $GL(E)$ (qui est l'application identité), et est également stable par passage à l'inverse (si u conserve la norme, u^{-1} aussi). □

Proposition 282. Un endomorphisme u est orthogonal si et seulement s'il vérifie, au choix, l'une des deux conditions suivantes :

- L'image par u de toute base orthonormale de E est une base orthonormale.
- L'image par u d'une base orthonormale fixée de E est une base orthonormale.

Démonstration. La première caractérisation implique évidemment la deuxième. Supposons que l'image d'une certaine base orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$ soit une autre base orthonormale $(f_1, \dots, f_n)$. Choisissons un vecteur $x \in E$, et notons respectivement $(x_1, \dots, x_n)$ ses coordonnées dans notre première base. On sait alors que $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. Or, par linéarité de u, $u(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$, et comme la deuxième base est aussi orthonormale, $\|u(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \|x\|^2$. Ceci prouve que u conserve la norme, c'est donc un endomorphisme orthogonal. démontrons enfin que l'orthogonalité de u implique la première caractérisation pour achever notre preuve. Supposons donc que u est orthogonal, et soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale quelconque de E. Notons $f_i = u(e_i)$, comme u conserve la norme on peut affirmer que $\|f_i\| = \|e_i\| = 1$. De plus, si $i \neq j$, $f_i.f_j = u(e_i).u(e_j) = e_i.e_j = 0$. La base $(f_1, \dots, f_n)$ est donc également orthonormale. □

Définition 270. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **orthogonale** si elle est la matrice représentative d'un endomorphisme u dans une base orthonormale. On note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble de toutes les matrices orthogonales.

Proposition 283. $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow {}^tAA = I$.

Démonstration. Supposons que ${}^tAA = I$, et notons u l'endormorphisme représenté par A dans une base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ orthonormale. Dire que ${}^tAA = I$ signifie deux choses : pour chaque colonne de A, la somme des carrés des éléments de la colonne est égale à 1 (c'est le calcul qu'on fait pour obtenir $({}^tAA)_{ii}$, ce qui revient à dire que $u(e_i)$ est un vecteur de norme 1 ; et si on effectue le calcul $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk}$ pour $i \neq j$, on obtient 0, ce qui revient cette fois-ci à dire que $u(e_i)$ et $u(e_j)$ sont orthogonaux. Autrement dit, l'image de notre base orthonormale est une base orthonormale, donc u est orthogonal. La réciproque se fait exactement de la même façon. □

Remarque 254. Attention dans la définition des matrices orthogonales à ne pas oublier qu'on doit se placer dans une base orthonormale. Dans une base qualconque, la matrice d'une application orthogonale peut ressembler à n'importe quoi (d'inversible tout de même puisque u est bijectif). Au passage, notre dernière propriété confirme que A est une matrice inversible, et même que son inverse est sa transposée.

Exemple : La matrice $A = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & -1 & -4 \\ -1 & 8 & -4 \\ 4 & 4 & -7 \end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale. Pour le vérifier, on peut évidement calculer ${}^tAA$, mais on peut aussi utiliser le petit truc suivant : on vérifie que les colonnes « sont de norme 1 » et « orthogonales entre elles » comme expliqué dans la démonstration ci-dessus. Ici, $\frac{1}{9}\|(8, -1, 4)\| = \frac{1}{9}\sqrt{64 + 1 + 16} = 1$ et de même pour les deux autres colonnes ; et $(8, -1, 4).(-1, 8, 4) = -8 - 8 + 16 = 0$, et de même pour les deux autres produits scalaires de colonnes.

Proposition 284. Une matrice A est orthogonale si et seulement si ses vecteurs-colonnes forment une base orthonormale de E. De même pour les vecteurs-lignes.

Démonstration. On vient de voir que c'est une autre façon de dire exactement la même chose que dans la proposition précédente. Si ça marche pour les colonnes, ça marche pour les lignes, car A est orthogonale si et seulement si ${}^tA$ l'est (cela découle de l'égalité ${}^tAA = I$). □

Proposition 285. La matrice de passage entre deux bases orthonormales est une matrice orthogonale.

Proposition 286. En effet, elle est la matrice dans la première base de l'application qui transforme cette première base orthonormale en la deuxième, orthonormale aussi. Puisque cette application tranforme une base orthonormale en une autre base orthonormale, elle est orthogonale, et sa matrice dans une base orthonormale est donc orthogonale.

Proposition 287. Si $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors $\det(A) = \pm 1$. L'ensemble des matrices orthogonales de déterminant 1 est noté $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$, l'ensemble de celles de déterminant -1 est noté $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$ (non, n'insistez pas, il n'y a pas d'équivalent à la notation $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ dans ce cas-là).

Démonstration. On sait que ${}^tAA = I$, et que $\det({}^tA)\det(A)$, donc $\det(A)^2 = \det(I) = 1$, la propriété en découle. □

Définition 271. Une isométrie est **directe** si sa matrice dans une base orthonormale appartient à $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$, elle est **indirecte** sinon.

Remarque 255. Cette définition est une arnaque puisqu'on n'a pas prouvé que la matrice de u dans n'importe quelle base orthonormale a toujours le même déterminant. En fait, c'est plus général que ça : le déterminant de la matrice représentative d'un endomorphisme (orthogonal ou pas) ne dépend pas de la base choisie (orthonormale ou pas) puisque $\det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \det(A)$. Pour les fans de nomenclature, l'ensemble des isométries directes est noté $\mathcal{SO}(E)$ ou $\mathcal{O}^+(E)$ et appelé groupe spécial orthogonal. Vous l'aurez deviné, l'ensemble des isométries indirectes est noté $\mathcal{O}^-(E)$.

18.1.5 Isométries du plan

Dans ce paragraphe et dans le suivant, on supposera $\mathbb{R}_2$ (ou $\mathbb{R}_3$) muni du produit scalaire usuel.

Théorème 90. Toute matrice $A \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ peut s'écrire sous la forme $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, où $\theta \in \mathbb{R}$. L'application f ayant pour matrice A dans n'importe quelle base orthonormale est appelée **rotation d'angle** θ.

Démonstration. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$. On peut traduire l'égalité ${}^tAA = I$ par le système d'équations suivant : $\left\{\begin{array}{ccccc} a^2 & + & b^2 & = & 1 \\ ac & + & bd & = & 0 \\ b^2 & + & d^2 & = & 1 \end{array}\right.$ (deux des équations obtenues sont identiques). On a de plus la condition $\det(A) = ad - bc = 1$. La dernière équation permet de poser $c = \cos(\theta)$ et $d = \sin(\theta)$, et la première de poser $a = \cos(\alpha)$ et $b = \sin(\alpha)$, pour deux réels α et θ. La deuxième condition devient alors $\cos(\alpha)\cos(\theta) + \sin(\alpha)\sin(\theta) = 0$, soit $\cos(\alpha - \theta) = 0$, et celle sur le déterminant donne de même $\sin(\theta - \alpha) = 1$. Autrement dit, on aura $\alpha = \theta + \frac{\pi}{2}$, et donc $\cos(\alpha) = \cos(\theta)$ et $\sin(\alpha) = -\sin(\theta)$, ce qui donne bien la matrice annoncée. □

Remarque 256. La matrice d'une rotation dans le plan est indépendante de la base orthonormale choisie. Bien évidemment, dans une base qui n'est pas orthonormale, la matrice peut changer.

Définition 272. Un **retournement** est une rotation plane d'angle $\theta = \pi$.

Remarque 257. C'est ce que vous avez appelé pendant des années une symétrie centrale, terme que nous n'utiliseront plus jamais même si l'application f est de fait dans ce cas une symétrie.

Proposition 288. $(\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}), \circ)$ est un groupe commutatif.

Démonstration. Plus généralement, $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. En effet, il est stable par composition, la composée de deux isométries directes étant necssairement directe (si on prend les matrices dans une base orthonormale fixée, le produit de deux matrices de déterminant 1 a un déterminant 1). Par contre, la commutativité est très spécifique à la dimension 2. Soient deux matrices de rotation correspondant à des rotations d'angle respectif θ et φ. Alors $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\varphi) - \sin(\theta)\sin(\varphi) & -\cos(\theta)\sin(\varphi) - \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \cos(\theta)\sin(\varphi) + \sin(\theta)\cos(\varphi) & -\sin(\theta)\sin(\varphi) + \cos(\theta)\cos(\varphi) \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\varphi) & -\sin(\theta+\varphi) \\ \sin(\theta+\varphi) & \cos(\theta+\varphi) \end{pmatrix}$. Nous venons brillamment de prouver que la composition de deux rotations planes (centrée en l'origine du repère) est une rotation d'angle égal à la somme des angles des deux rotations. Faire le produit dans l'autre sens donnera donc la même chose, ce qui prouve la commutativité du groupe. notons au passage que la réciproque de la rotation d'angle θ sera la rotation d'angle $-\theta$ (puisque leur composée a un angle nul, donc est égale à l'identité). □

Proposition 289. Soit $x \in \mathbb{R}^2$ un vecteur unitaire, et u une rotation plane d'angle θ, alors $u(x).x = \cos(\theta)$ et $\det(u(x), x) = \sin(\theta)$.

Démonstration. Si on complète x en une base orthonormale du plan (x, y), on aura $u(x) = \cos(\theta)x - \sin(\theta)y$, puis $u(x).x = (\cos(\theta), -\sin(\theta)).(1, 0) = \cos(\theta)$ (en prenant les coordonnées dans la base (x, y), et $\det(x, u(x)) = \sin(\theta)$. □

Remarque 258. Cette propriété est surtout utile dans l'autre sens : à partir de l'image d'un unique vecteur (unitaire ou non), on peut déterminer facilement l'angle d'une rotation plane.

Théorème 91. Toute matrice $A \in \mathcal{O}_2^-(\mathbb{R})$ peut s'écrire sous la forme $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$. L'application u ayant pour matrice A dans une base orthonormale est une réflexion.

Démonstration. La preuve que la matrice peut se mettre sous cette forme est identique à celle vue pour les isométries directes, à un changement de signe près à un endroit, nous nous épargnerons les calculs. Il est facile de constater que u est une symétrie (nécessairement orthogonale) en calculant $A^2 = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) & 0 \\ 0 & \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) \end{pmatrix} = I$. C'est nécessairement une symétrie par rapport à une droite vectorielle, donc une réflexion. En effet, si le sous-espace par rapport auquel on symétrise n'est pas une droite, il s'agit soit de $\{0\}$ et alors $u = -\,\mathrm{id}$, soit de $\mathbb{R}^2$ et $u = \mathrm{id}$. Dans les deux cas, u ne serait pas une isométrie indirecte. □

Remarque 259. Dans le cas des réflexions, la matrice de u n'est pas du tout la même dans toutes les bases orthonormales. Par ailleurs, l'angle θ est beaucoup moins facile à interpréter géométriquement que dans le cas d'une rotation.

Remarque 260. Toute rotation dans le plan peut s'écrire comme composée de deux réflexions. En effet, $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & \sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & -\cos(-\theta) \end{pmatrix}$.

18.1.6 Isométries de l'espace

Définition 273. Tout élément de $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ est appelé **matrice de rotation** dans l'espace.

Théorème 92. Soit u une isométrie directe de l'espace, alors $F = \ker(u - \mathrm{id})$ est de dimension 1. Si (v, w) est une base orthonormale de $F^\perp$, alors la matrice de u dans la base orthonormale $(v, w, v \wedge w)$ est $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Démonstration. Nous ne ferons pas la preuve de ce résultat dans l'espace. On ne peut pas s'en sortir avec des calculs brutaux comme dans le plan, il faut donc une preuve plus technique. □

Définition 274. Une isométrie directe ayant pour matrice A dans une base orthonormale est appelée **rotation d'axe dirigé par $v \wedge w$ et d'angle θ**.

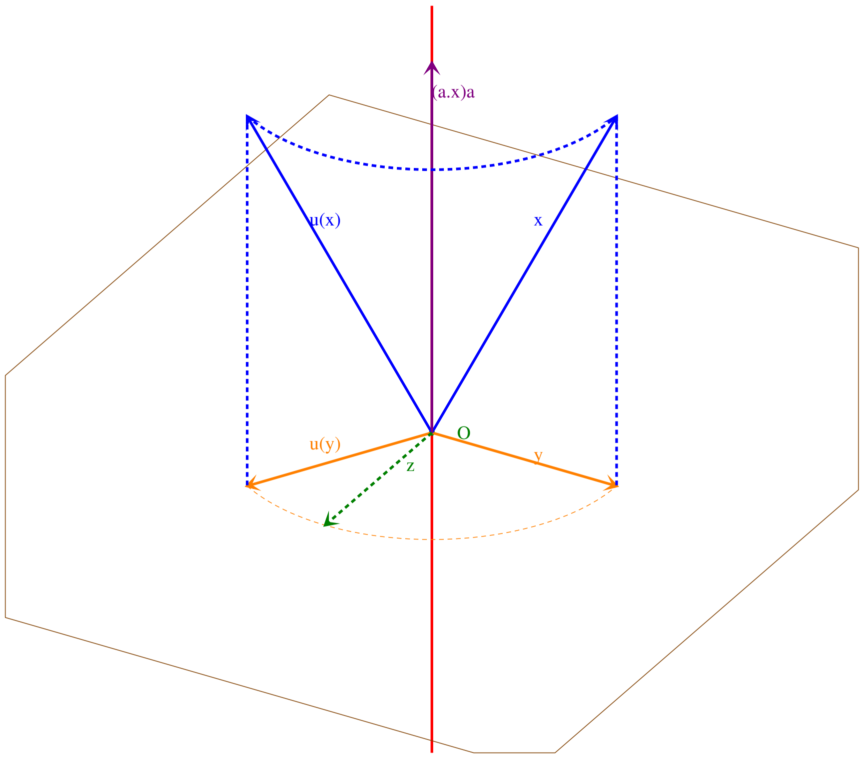
Remarque 261. Une rotation spatiale reste assez facile à visualiser : l'axe ne bouge pas, et le plan orthogonal à l'axe subit une rotation d'angle θ (autrement dit, on tourne d'un angle θ autour de l'axe). Voir le schéma plus bas. Notons quand même que la définition est un peu douteuse, car l'angle de la rotation dépend du vecteur choisi pour diriger l'axe. En effet, si on prend le vecteur opposée, l'angle va être également changé en son opposé.

Proposition 290. La composée de deux rotations dans l'espace est une rotation.

Démonstration. En effet, comme dans le plan, la composée reste une isométrie directe, donc une rotation. Mais pour le coup, ça n'a rien de géométriquement évident (et en particulier, l'angle de la rotation composée n'est pas évident à déterminer à partir de ceux des deux rotations). □

Proposition 291. Soit u la rotation d'axe $F = \mathrm{Vect}(a)$, avec a unitaire, et d'angle θ, alors $\forall x \in \mathbb{R}^3$, $u(x) = \cos(\theta)x + \sin(\theta)a \wedge x + (1 - \cos(\theta))(a.x)a$.

Remarque 262. Dans le cas particulier où $x \in F^\perp$, on trouve plus simplement $u(x) = \cos(\theta)x + \sin(\theta)(a \wedge x)$, on peut donc retrouver facilement l'angle de la rotation, quasiment comme dans le cas d'une rotation plane, à l'aide des relations $x.u(x) = \cos(\theta)$ et $\det(x, u(x), a) = \sin(\theta)$ (en choisissant un vecteur x unitaire). Sur la figure ci-dessous, l'axe de la rotation est en rouge, le plan orthogonal en marron, le vecteur noté z est $y \wedge a$.



Démonstration. La projection de x sur l'axe de la rotation est simplement donnée par $(a.x)a$. Posons $y = x - (a.x)a$, alors $(y, y \wedge a)$ est une base orthogonale directe de $F^\perp$ constituée de deux vecteurs de même norme. De plus, $y \wedge a = (x - (a.x)a) \wedge a = x \wedge a$ puisque $a \wedge a = 0$. On en déduit que $u(y) = \cos(\theta)y - \sin(\theta)(x \wedge a)$, donc $u(x) = u(y + (a.x)a) = \cos(\theta)y + \sin(\theta)(a \wedge x) + (a.x)a$ (puisque a est laissé fixe par la rotation). Autrement dit, $u(x) = \cos(\theta)x - \cos(\theta)(a.x)a + \sin(\theta)(a \wedge x) + (a.x)a$, ce qui est bien la formule donnée. □

Exemple : Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique par la matrice $M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. La matrice est orthogonale puisque $\frac{1}{3}\|(2,2,1)\| = \frac{1}{3}\sqrt{4+4+1} = 1$; $\frac{1}{3}\|(-2,1,2)\| = 1$; $\frac{1}{3}\|(1,-2,2)\| = 1$; $(2,2,1).(-2,1,2) = -4+2+2 = 0$; $(2,2,1).(1,-2,2) = 0$ et $(-2,1,2).(1,-2,2) = 0$. Il s'agit donc de la matrice d'une isométrie.

On calcule ensuite le déterminant pour déterminer si l'isométrie est directe : $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 3 \times 3 + 3 \times 6 = 27$, donc $\det(A) = \frac{1}{3^3} \times 27 = 1$. Il s'agit d'une isométrie directe, donc d'une rotation.

On cherche ensuite l'axe de la rotation, en déterminant simplement $\ker(u - \mathrm{id})$. quitte à tout multiplier par 3, on doit résoudre le système $\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & 2y & + & z & = & 3x \\ -2x & + & y & + & 2z & = & 3y \\ x & - & 2y & + & 2z & = & 3z \end{array}\right.$. La deuxième équation donne $z = x + y$, et la dernière donne $2y = x - z$, soit $2y = -y$. Manifestement, cela implique $y = 0$, puis $z = x$; la première équation donne alors $3x = 3x$, donc $\ker(u - \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}((1,0,1))$, qui est bien une droite F.

On choisit maintenant un vecteur unitaire $x \in F^\perp$. Ce n'est pas bien compliqué ici, il suffit de prendre $x = (0,1,0)$. On peut alors calculer, en notant θ l'angle de la rotation, $\cos(\theta) = x.u(x)$.

Puisque $u(0,1,0) = \frac{1}{3}(2,1,-2)$, on trouve $\cos(\theta) = \frac{1}{3}$. En posant $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$ (vecteur directeur unitaire de l'axe), on peut ensuite calculer $\det(x, u(x), a) = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$. On en déduit que $\sin(\theta) = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$, donc $\theta = -\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$. Seul le signe de $\sin(\theta)$ était nécessaire pour conclure, mais l'avantage de l'avoir calculé explicitement est de pouvoir vérifier que $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = \frac{1}{9} + \frac{8}{9} = 1$. On peut en tout cas désormais affirmer que u est la rotation d'axe $\mathrm{Vect}((1,0,1))$ et d'angle $\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$.

Remarque 263. Un autre moyen de vérifier la cohérente des calculs est d'utiliser la trace de la matrice. En effet, celle-ci est invariante par changement de repère, donc est égale à $2\cos(\theta)+1$ dans n'importe quel repère. Ici, on pouvait donc calculer dès le départ $\mathrm{Tr}(A) = \frac{5}{3} = 2\cos(\theta) + 1$, et en déduire que $\cos(\theta) = \frac{1}{3}$.

Théorème 93. (Hors-programme). Si u est une réflexion dans l'espace, elle a pour matrice dans une base orthonormale bien choisie $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. De plus, toute isométrie indirecte de l'espace est la composée d'une rotation (éventuellement égale à id) et d'une réflexion.

Remarque 264. On peut toujours écrire dans l'espace une rotation comme composée de deux réflexions (c'est exactement le même calcul que dans le plan, en ajoutant un 1 en bas à droite de la matrice et des 0 ailleurs sur la dernière ligne et la dernière colonne). Il existe donc trois types d'isométries vectorielles dans l'espace :

- les réflexions, qui laissent tout un plan fixe et sont indirectes.
- les produits de deux réflexion, qui sont des rotations, laissent une droite fixe et sont directes.
- les produits de trois réflexions ne laissent que le vecteur nul invariant et sont indirectes.

Ainsi, dans l'espace, $-\mathrm{id}$ est une isométrie indirecte qui est un produit de trois réflexions (par exemple par rapport aux trois axes du repère canonique). Ce n'est absolument pas la rotation d'angle π autour de l'origine, cette application n'étant pas une rotation avec la définition que nous avons prise. Pour les plus curieux, le théorème précédent se généralise en dimension n, où les isométries peuvent toujours être écrites comme produit d'au plus n réflexions.

18.2 Géométrie affine

La différence entre la géométrie affine et la géométrie vectorielle est très simple : en géométrie vectorielle, on ne travaille qu'avec des vecteurs, alors qu'en géométrie affine, on parlera de points. Mais dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ (seuls exemples que nous étudierons réellement), la différence entre les deux notions est minime, pusiqu'on repérer les vecteurs comme les points à l'aide de coordonnées. Le seul détail qui va faire une différence entre cette partie du cours et tout ce qu'on a déjà fait sur les espaces vectoriels, c'est la notion d'origine du repère. Dans le cadre vectoriel, l'origine O du prepère ne peut pas être modifiée ; en géométrie affine, au contraire, on pourra chenger d'origine.

18.2.1 Espaces affines

Définition 275. Soit E un espace vectoriel (quelconque) et $u \in E$, la **translation de vecteur** u **dans** E est l'application $t_u : x \mapsto x + u$.

Remarque 265. Cette application n'est absolument pas une application linéaire (sauf dans le cas très particulier $u = 0$).

Proposition 292. La translation t_u est une bijection de réciproque t_{-u}. Muni de la composition, l'ensemble des translations de E est un groupe.

Démonstration. C'est évidemment trivial, puisque $t_{-u}(t_u(x)) = x + u - u = x$. □

Définition 276. Soit F un sous-espace vectoriel de E et $u \in E$, l'ensemble $A = \{u + x \mid x \in F\} = t_u(F)$ est appelé **sous-espace affine de E de direction F**. Une base de F sera alors appelée **ensemble de vecteurs directeurs de F**.

Exemple : N'importe quel plan de $\mathbb{R}^3$, passant par l'origine ou non, est un sous-espace affine. De même pour toute droite de $\mathbb{R}^3$. En fait, les seuls sous-espaces affines de $\mathbb{R}^3$, outre $\mathbb{R}^3$ lui-même, sont les points, les droites et les plans.
Nous avons également déjà croisé des sous-espaces affines dans des espaces nettement plus compliqués : ainsi, l'ensemble des solutions d'une équationd différentielle linéaire (non homogène) est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^\infty(I)$ (I étant l'intervalle de définition de l'équation). C'est exactement ce que signifie la méthode « solution particulière + solution de l'équation homogène » que nous utilisons pour résoudre ce genre d'équations. Les solutions de l'équation homogène forment un sous-espace vectoriel, qu'on translate via la solution particulière.

Définition 277. Un élément d'un sous-espace affine A est appelé **point** et usuellement noté M. On utilisera les notations un peu abusives suivantes : $M + u$ pour désigner $t_u(M)$ (M restant bien évidemment un élément de E même si on le voit ici comme un point) ; ou $M + F$ pour désigner le sous-espace affine de direction F contenant M (il est unique), qu'on appelle aussi **sous-espace affine passant par M et de direction F** ; on notera également, si $N = t_u(M)$, $u = N - M$, ou encore plus classiquement $u = \overrightarrow{NM}$ (notation qu'on utilisera en fait très peu).

Remarque 266. Si deux points M et N appartiennent à un même sous-espace affine A, alors le vecteur $\overrightarrow{MN}$ appartient à sa direction F. C'est même une équivalence.

Définition 278. Soient A et B deux sous-espaces affines de direction respective F et G, A est **parallèle à** B si $F \subset G$.

Remarque 267. Attention, cette définition, même si elle correspond bien à la notion intuitive de parallélisme, a la particularité de ne pas être symétrique. Ainsi, si on considère une droite et un plan « parallèles » dans l'espace (c'est-à-dire qu'un vecteur directeur de la droite peut être complété en base du plan), on dira que la droite est parallèle au plan, mais on ne peut pas dire que le plan est parallèle à la droite.

Proposition 293. Soient A et B deux sous-espaces affines de E, de directions respectives F et G, alors $A \cap B$ est, soit vide, soit un sous-epace affine de E de direction $F \cap G$.

Démonstration. Supposons donc que $A \cap B \neq \emptyset$, et soit $M \in A \cap B$. Alors, $\forall x \in F \cap G$, $M + x \in A \cap B$, donc $M + (F \cap G) \subset A \cap B$. Réciproquement, si $N \in A \cap B$, comme $M \in A \cap B$ également, $M - N \in F$ et $M - N \in G$, donc $M - N \in F \cap G$ et $N = M + (M - n) \in M + (F \cap G)$. Finalement, $A \cap B = M + (F \cap G)$, qui est bien un sous-espace affine de direction $F \cap G$. □

18.2.2 Applications affines

Définition 279. Une application $f : E \to E$ est une **application affine** s'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\forall (M, N) \in E^2$, $\overrightarrow{f(M)f(N)} = u(\overrightarrow{MN})$. De façon équivalente, $\forall M \in E$, $\forall x \in E$, $f(M + x) = f(M) + u(x)$.

Remarque 268. Nous avons décidé par souci de simplicité de nous restreindre à des endomorphismes affines pour ce cours, mais on définit de même des application affines d'un espace vectoriel vers un autre.

Démonstration. L'équivalence entre les deux définitions est assez immédiate. La première condition peut s'écrire $f(N) - f(M) = u(\overrightarrow{MN})$, ce qui correspond exactement à la deuxième condition en posant $x = \overrightarrow{MN}$ (et donc $M + x = N$). Le passage dans l'autre sens se fait de la même façon en posant $N = M + x$. □

Remarque 269. Si f est une application affine, l'application linéaire u est unique (en effet, $u(x) = f(x) - f(0)$ pour tout vecteur x). Par ailleurs, f est uniquement déterminée par la connaissance de u et de $f(0)$. L'application u est parfois appelée **partie linéaire** de f.

Exemple : L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (2x-y+3, x-3y+2)$ est une application affine, de partie linéaire $u : (x, y) \mapsto (2x - y, x - 3y)$. En fait, la remarque précédente permet de comprendre que toute application affine sera de la même forme que f : une application linéaire à une constante près pour chaque coordonnée.

Proposition 294. Les applications affines conservent le parallélisme, l'alignement, et les barycentres.

Démonstration. Pour le parallélisme, c'est assez simple : si A et B sont deux sous-espaces affines de directions respectives F et G, alors $f(A)$ et $f(B)$ sont des sous-espaces affines de direction $u(F)$ et $u(G)$ (mais si, c'est évident : $f(A) = f(M + F) = f(M) + f(0) + u(F)$, idem pour B). Et comme $u(F) \subset u(G)$ si $F \subset G$, la conservation du parallélisme en découle. Nous n'avons pas vraiment défini clairement les notions d'alignement et de barycentres, mais les résultats les concernant ne sont pas plus compliquées. Hop, on passe les détails techniques. □

Théorème 94. Soit f une application affine, X un vecteur-colonne de E et $f(X)$ son image par f, alors il existe une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice-colonne $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (indépendantes de X) telles que $f(X) = AX + B$.

Démonstration. C'est une conséquence triviale du fait que $f(x) = f(0) + u(x)$: la matrice A est la matrice représentative de u, et B est simplement la matrice-colonne des coordonnées de $f(0)$. □

Remarque 270. On reconnait dans le forme $f(X) = AX + B$ les équations de fonctions affines de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, qui sont effectivement un cas très particulier d'applications affines dans un espace vectoriel de dimension 1.

Définition 280. Un **isomorphisme affine** est une application affine bijective.

Proposition 295. Une application affine f est bijective si et seulement si sa partie linéaire u est bijective. Dans ce cas, f^{-1} est une application affine de partie linéaire u^{-1}.

Démonstration. C'est essentiellement trivial, puisque f est simplement la composée de u par une translation qui est bijective. Si $f = t_x \circ u$, alors $f^{-1} = u^{-1} \circ t_{-x}$. □

Proposition 296. L'ensemble des isomorphismes affines de E, muni de la composition, est un groupe.

Remarque 271. Les translations sont tout simplement les isomorphismes affines dont la partie linéaire est l'identité. Elles forment un sous-groupe du groupe des isomorphismes affines.

Définition 281. Une **homothétie de centre** M **et de rapport** λ est une application affine h telle que $\forall N \in E$, $h(N) - h(M) = \lambda(N - M)$.

Proposition 297. Les homothéties affines sont exactement les applications affines dont la partie linéaire est une homothétie vectorielle, c'est-à-dire de la forme $\lambda\,\mathrm{id}$.

Démonstration. C'est encore une fois à peu près évident : par définition, $h(N) = h(M) + \lambda(N - M)$, donc la partie linéaire de h est $\lambda\,\mathrm{id}$. □

Définition 282. Une **projection affine** est une application affine dont la partie linéaire est un projecteur. Une **symétrie affine** est une application affine dont la partie linéaire est une symétrie.

Remarque 272. Ce sont en fait de très mauvaises définitions. Il vaudrait mieux définir une projection comme une application qui, une fois deux sous-espaces affines A et B fixés dont les directions sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, associe à un point $M = \Omega + x_F + x_G$, où $\Omega \in A \cap B$, $x_F \in F$ et $x_G \in G$, le point $p(M) = \Omega + x_F$. Pour cela, il faudrait prouver que la décomposition donnée est unique, et on retrouve alors facilement la caractérisation donnée ci-dessus en définition. Même chose pour les symétries.

18.2.3 Isométries affines

Pour tout ce dernier paragraphe, on se place désormais dans un espace euclidien E (qui va vite être restreint aux cas de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ munis du produit scalaire usuel).

Définition 283. Une application $f : E \to E$ est une **isométrie affine** si f conserve les distances : $\forall (M, N) \in E^2$, $f(M)f(N) = MN$.

Remarque 273. En géométrie affine, on utilise plus volontiers pour les distances la notation MN que la notation $d(M, N)$. La définition reste évidemment la même : $MN = \|M - N\|$. Notons par ailleurs que, dans la définition d'une isométrie affine, f n'est pas supposée être une application affine. Mais le théorème suivant va régler ce petit souci.

Théorème 95. Une application $f : E \to E$ est une isométrie affine si et seulement si f est une application affine dont la partie linéaire est une isométrie.

Démonstration. La partie réciproque est évidente : si la partie linéaire conserve les normes (donc les distances), f aussi, une translation étant clairement une isométrie. Dans l'autre sens, posons $\forall x \in E$, $u(x) = f(x) - f(0)$. Cette application étant la composée de f par une translation, elle conserve les distances, donc les normes. Par identité de polarisation, elle conserve alors également le produit scalaire : $\forall (x, y) \in E^2$, $u(x).u(y) = x.y$. Fixons alors une base orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$ de E. Son image par u est nécessairement une base orthonormale $(f_1, \dots, f_n)$ puisque u conserve le produit scalaire et la norme. Posons alors, pour un vecteur quelconque $x \in E$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. On sait que $x_i = x.e_i$. Par conservation du produit scalaire, on a alors $u(x).u(e_i) = x_i$, donc $u(x).f_i = x_i$, et ce quel que soit l'indice i. Ceci implique que $u(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$. Comme l'égalité est vraie pour tout vecteur x, l'application u est bien linéaire, ce qui achève notre preuve. □

Définition 284. Un **déplacement** est une isométrie affine dont la partie linéaire est une isométrie directe. Un **antidéplacement** est une isométrie affine dont la partie linéaire est une isométrie indirecte. Une **similitude directe** est la composée d'un déplacement par une homothétie (affine) de rapport strictement positif (appelé **rapport** de la similitude). Une **similitude indirecte** est de même la composée d'un antidéplacement par une homothétie de rapport strictement positif.

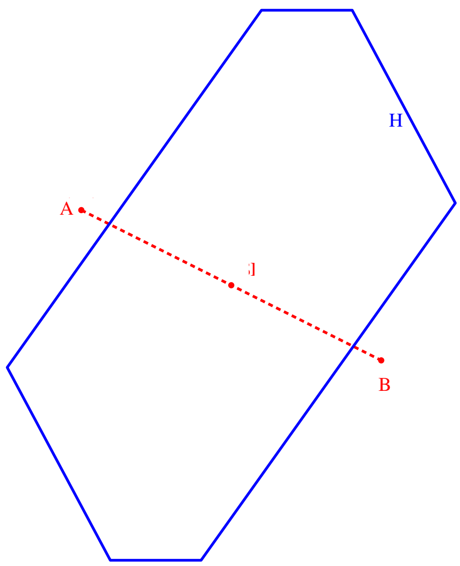
Remarque 274. De façon équivalente, une similitude est une application affine dont la partie linéaire est de la forme λu, avec $\lambda > 0$ et $u \in \mathcal{O}(E)$.

Définition 285. Une **projection orthogonale affine** est une application affine dont la partie linéaire est une projection orthogonale. On définit de même les symétries orthogonales et les réflexions affines.

Remarque 275. Les symétries orthogonales affines sont des isométries affines, mais ce n'est bien sûr pas le cas des projections orthogonales qui ne sont pas bijectives. Toutes ces applications correspondent bien à l'intuition qu'on peut en avoir.

Proposition 298. Soient A et B deux points distincts de E, il existe une unique réflexion s telle que $s(A) = B$ et $s(B) = A$. L'hyperplan (affine) H par rapport auquel s'effectue cette réflexion est appelé **hyperplan médiateur du segment** $[AB]$. Il est constitué de tous les points équidistants de A et de B.

Démonstration. On démontre facilement, comme dans le cas du plan (où l'hyperplan médiateur d'un segment devient beaucoup plus simplement la droite médiatrice de ce segment) que $MA = MB$ est équivalent à $(B - A).(M - I) = 0$, où $I = \frac{A+B}{2}$ est le milieu du segment $[AB]$ (laissé en exercice de manipulation des normes). L'hyperplan médiateur est alors simplement caractérisé par le fait qu'il passe par I et est dirigé par l'orthogonal de la droite (vectorielle) dirigée par $B - A$ (étant supplémentaire d'une droite, ce sous-espace est bien un hyperplan). La réflexion par rapport à cet hyperplan envoie alors facilement A sur B et vice-versa, et elle est unique car une telle réflexion doit nécessairement laisser stable l'hyperplan médiateur. Bref, nous ne ferons pas de démonstration détaillée. □



Définition 286. Une **rotation** du plan ou de l'espace est un déplacement admettant au moins un point fixe.

Théorème 96. Classification des déplacements du plan.
Les seuls déplacements du plan sont les translations et les rotations. Plus précisément, si f est un déplacement de partie linéaire u :

- Soit $u = \text{id}$, alors f n'a pas de point fixe et est une translation.
- Soit $u \neq \text{id}$, alors f admet un unique point fixe Ω et est la rotation de centre Ω dont l'angle est donné par celui de u.

Démonstration. Le cas $u = \text{id}$ a déjà été traité. Si $u \neq \text{id}$, u est donc nécessairement une rotation du plan. Dans ce cas, en notant $(x', y') = f(x, y)$, on sait que $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Le point $M(x, y)$ est donc un point fixe de f si (x, y) est solution du système $\begin{cases} (1 - \cos(\theta))x & + & \sin(\theta)y & = & a \\ -\sin(\theta)x & + & (1 - \cos(\theta))y & = & b \end{cases}$. Ce système a pour déterminant $(1-\cos(\theta))^2+\sin^2(\theta) = 2 - 2\cos(\theta) \neq 0$ puisqu'on a supposé $u \neq \text{id}$. Le système est donc de Cramer et admet toujours une solution unique correspondant à un point fixe Ω de l'application f. On peut alors écrire, $\forall M \in E$, $f(M) = f(\Omega) + u(M - \Omega) = \Omega + u(M - \Omega)$. L'application u étant une rotation, f est effectivement la rotation de centre Ω et d'angle θ. □

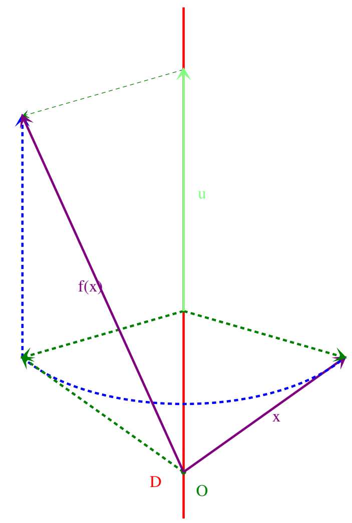
Exemple : Soit $f : (x, y) \mapsto \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) + 1; \frac{1}{\sqrt{2}}(y - x)\right)$. La partie linéaire de f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ (si ça ne vous saute pas aux yeux, révisez votre trigonométrie de base). Pour déterminer son centre, on cherche tout simplement le point fixe de f en résolvant le système (quitte à tout multiplier par $\sqrt{2}$: $\left\{\begin{array}{rcl} x + y + \sqrt{2} & = & \sqrt{2}x \\ y - x & = & \sqrt{2}y \end{array}\right.$. La deuxième équation donne $x = (1-\sqrt{2})y$, ou encore $y = \dfrac{1}{1-\sqrt{2}}x = -(1+\sqrt{2})x$ la première devient alors $-\sqrt{2}x + \sqrt{2} = \sqrt{2}x$, soit $x = \dfrac{1}{2}$. En découle $y = -\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$. L'application f est donc la rotation de centre $\Omega\left(\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

Théorème 97. Classification des similitudes directes dans l'espace.
Toute similitude directe du plan de rapport $\lambda \neq 1$ est la composée d'une rotation affine et d'une homothétie de rapport λ de même centre. ce centre commun est l'unique point fixe de la similitude.

Démonstration. Nous ne ferons pas cette démonstration qui ressemble à la précédente (il faut là aussi vérifier qu'il existe un unique point fixe via un calcul de déterminant, le reste en découle facilement). Rappelons tout de même que nous avons vu en début d'année comment caractériser une similitude à partir de son écriture complexe, les notations ont changé mais le principe reste le même. □

Définition 287. Un **vissage** dans l'espace est la composée d'une rotation affine de $\mathbb{R}^3$ par une translation dans la direction de l'axe de la rotation.

Sur la figure, on effectue un vissage f d'axe D et de vecteur u : le vecteur x est d'abord tourné autour de l'axe (pointillés bleus circulaires), puis translaté dans la direction de l'axe.



Théorème 98. Classification des déplacements dans l'espace.
Les seuls déplacements dans l'espace sont les translations, les rotations affines et les vissages. Plus précisément, si f est un déplacement de partie linéaire u :

- Soit $u = \mathrm{id}$, alors f n'a pas de point fixe et est une translation.
- Soit $u \neq \mathrm{id}$ (u est alors une rotation), et f admet des points fixes, alors l'ensemble des points fixes de f est une droite D et f est une rotation d'axe D, d'angle égal à celui de u.
- Soit $u \neq \mathrm{id}$ et f n'admet pas de point fixe, alors f est un vissage d'axe dirigé par l'axe de u, et d'angle égal à celui de u.

Démonstration. Comme dans le cas des isométries vectorielles, on se passera de toute démonstration dans l'espace. On oubliera également la classification des similitudes directes dans l'espace. □

Exemple : Considérons l'application affine dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = \dfrac{1}{3}(-2x-2y+z+4; x-2y-2z-2; 2x-y+2z+8)$. Sa partie linéaire u a pour matrice dans la base canonique $A =$

$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. On vérifie sans problème que A est une matrice orthogonale : $\|(-2,-2,1)\| = \|(1,-2,-2)\| = \|(2,-1,2)\| = 9$, et $(-2,-2,1).(1,-2,-2) = (-2,-2,1).(2,-1,2) = (1,-2,-2).(2,-1,2) = 0$. On calcule ensuite $\begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}` + 3\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3\times 3 + 3\times 6 = 27$, donc $\det(A) = \frac{1}{3^3}\times 27 = 1$. On en déduit que u est une rotation de l'espace.

Cherchons l'axe et l'angle de cette rotation : on résoud le système $\begin{cases} -2x - 2y + z = 3x \\ x - 2y - 2z = 3y \\ 2x - y + 2z = 3z \end{cases}$.
La dernière équation donne $2x = y+z$, et la deuxième $x = 5y+2z$, donc $10y+4z = y+z$, soit $z = -3y$, et donc $2x = -2y$, soit $x = -y$. On reporte dans la première équation : $2y-2y-3y = -3y$ est toujours vérifie, donc $\ker(u - \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}((1,-1,3))$. Pour déterminer l'angle, on prend un vecteur x unitaire et orthogonal à l'axe, par exemple $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$. Son image par u est $u(x) = \frac{1}{3\sqrt{2}}(-4,-1,1))$. on en déduit que $\cos(\theta) = x.u(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{3\sqrt{2}} \times (-5) = -\frac{5}{6}$; puis en prenant comme vecteur directeur unitaire de l'axe $a = \frac{1}{\sqrt{11}}(1,-1,3)$, $\sin(\theta) = \frac{1}{6\sqrt{11}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{6\sqrt{11}}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - \frac{1}{6\sqrt{11}}\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{6\sqrt{11}}(-2+13) = \frac{\sqrt{11}}{6}$ (on vérifie aisément que $\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta) = 1$). Finalement, vous serez très heureux de constater que l'angle de la rotation est $\theta = \arccos\left(-\frac{5}{6}\right)$.

Nous sommes malheureusement loin d'être au bout de nos peines. Il faut savoir si f est une rotation ou un vissage, et pour cela déterminer si f a des points fixes. On résout donc le système $\begin{cases} -2x - 2y + z + 4 = 3x \\ x - 2y - 2z - 2 = 3y \\ 2x - y + 2z + 8 = 3z \end{cases}$. On peut heureusement reprendre les calculs déjà effectués précédemment : $2x = y+z-8$, et $x = 5y+2z+2$, donc $10y+4z+4 = y+z-8$, soit $z = -3y-4$. On en déduit $x = -y-6$, et on reporte dans la première équation : $2y+12-2y-3y-4 = -3y$, ce qui n'est manifestement jamais vérifié. Il n'y a donc pas de point fixe, c'est un vissage.

Il ne reste plus qu'à déterminer l'axe et la translation du vissage. Pour cela, on peut utiliser le fait que, si M appartient à l'axe, $f(M) - M$ est un vecteur colinéaire à $(1,-1,3)$. On obtiendra ainsi à la fois un point de l'axe, et le coefficient de colinéarité nous donnera la valeur du multiple à mettre devant $(1,-1,3)$ pour obtenir le vecteur de translation. Notons-le λ : on résoud le dernier système $\begin{cases} -2x - 2y + z + 4 = 3x + 3\lambda \\ x - 2y - 2z - 2 = 3y - 3\lambda \\ 2x - y + 2z + 8 = 3z + 9\lambda \end{cases}$. On peut encore une fois exploiter les mêmes calculs : $2x = y+z+9\lambda-8$ et $x = 5y+2z+2-3\lambda$, donc $10y+4z+4-6\lambda = y+z+9\lambda-8$, soit $z = -3y-4+5\lambda$. On en déduit $x = -y-6+7\lambda$, puis en reportant dans la première équation $2y+12-14\lambda-2y-3y-4+5\lambda+4 = -3y-18+21\lambda+3\lambda$, soit $30 = 33\lambda$. Autrement dit, $\lambda = \frac{10}{11}$. Pour trouver un point sur l'axe, on peut par exemple choisir $y = 0$ et trouver alors $z = -4+5\lambda = \frac{6}{11}$ et $x = -6+7\lambda = \frac{4}{11}$.

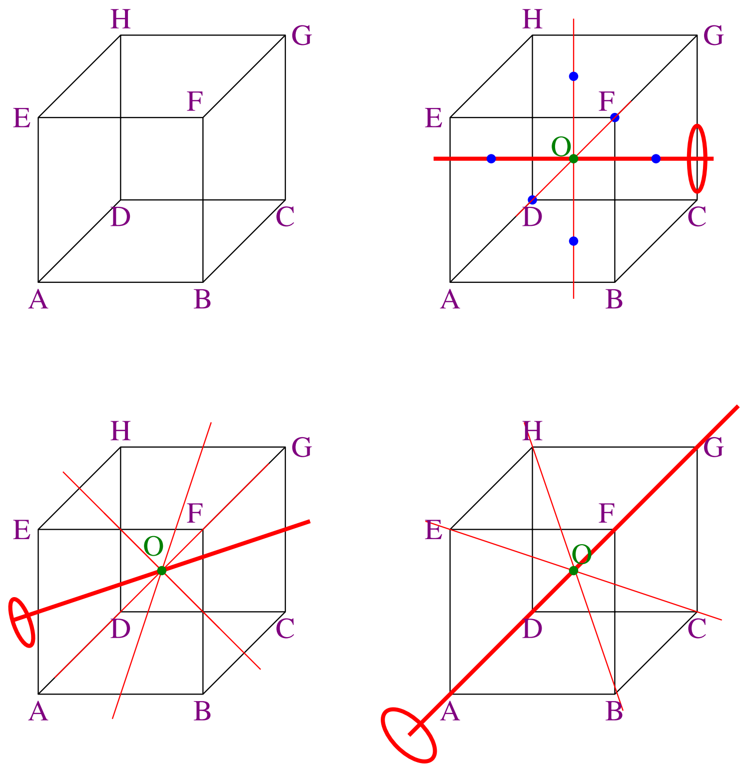
On peut enfin conclure : f est un vissage d'axe D passant par $M\left(\frac{4}{11}, 0, \frac{6}{11}\right)$ et dirigé par $(1,-1,3)$, d'angle $\theta = \arccos\left(-\frac{5}{6}\right)$, et de vecteur $\frac{10}{11}(1,-1,3)$.

Isométries du cube : Considérons un cube fixé (de côté 1 par exemple, mais peu importe), on cherche à déterminer toutes les isométries du cube, c'est-à-dire les isométries de l'espace laissant le cube globalement invariant (chaque point du cube est envoyé sur un point du même cube). On peut déjà déterminer leur nombre : par une telle isométrie, chaque sommet du cube est nécessairement envoyé sur un sommet du cube (car le point situé de l'aute côté de la grande diagonale passant par ce sommet est à une distance qui ne peut être atteinte sur le cube qu'entre deux sommets opposés) ; de plus, deux sommets ne peuvent pas être envoyés au même endroit (sinon les distances ne seraient pas respectées), donc l'isométrie effectue une permutation des sommets. Il n'y a en fait qu'une toute petite proportion de permutations possibles. Pour l'image d'un premier sommet (par exemple A sur la figure ci-dessous), on a huit possibilités (chacun des huit sommets du cube). Mais une fois l'image de A fixé, le sommet voisin B ne peut plus avoir que trois images distinctes, les trois sommets adjacents à l'image de A (par exemple si A reste fixe, B ne peut être envoyé que sur B, D ou E). Une fois les images de A et B fixées, D n'a plus que deux images possibles (si A et B restent fixes, il doit être envoyé sur D ou E), et on n'a plus le choix pour E. Une fois les images de ces quatre points choisies, on connait l'image d'un repère orthonormal par l'isométrie, qui est donc unique. Conclusion : il y a $8 \times 3 \times 2 = 48$ isométries du cube.

Un tout petit peu de théorie des groupes permet de se convaincre que, parmi les 48 isométries, 24 sont directes et 24 indirectes. En effet, il en existe au moins une d'indirecte (par exemple une réflexion par rapport au plan passant par les milieux des quatre arêtes parallèles $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$ et $[DH]$), notons-là f. Notons par ailleurs I l'ensemble de toutes les isométries du cube, qui est assez clairement un groupe pour la loi $\circ$. L'application de I dans lui-même définie par $u \mapsto f \circ u$ est alors une bijection de I, qui envoie chaque isométrie directe sur une isométrie indirecte (puisqu(on multipli le déterminant par -1, et chaque isométrie indirecte sur une isométrie directe. Il y en a donc autant de chaque catégorie, soit 24.

Contentons-nous d'essayer de faire la liste des 24 isométries directes, qui sont donc des rotations ou des vissages. En fait, il ne peut pas y avoir de vissage : par conservation des barycentres, le centre du cube est toujours un point fixe d'une isométrie du cube, et un vissage n'a pas de point fixe. Nous avons donc 24 rotations à trouver, dont voici la liste :

- l'identité, qu'il faudra prendre soin de ne pas compter plusieurs fois.
- les rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$, π et $\frac{3\pi}{2}$ autour de chaque axe passant par les centres de deux faces opposées (par exemple la droite (PQ), où P est le centre de $(ABCD)$ et Q le centre de $(EFGH)$). Comme il existe trois paires de faces opposées, cela fait $3\times 3 = 9$ rotations distinctes.
- les rotations d'angle π autour de chaque axe passant par les milieux de deux arêtes parallèles opposées (par exemple la droite (IJ), où I est le milieu de $[AE]$ et J celui de $[CG]$). Comme il y a six paires d'arêtes opposées, celà fait six rotations supplémentaires.
- les rotations d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$ (ce sont les plus dures à visualiser) autour des grandes diagonales du cube. Par exemple, en prenant la diagonale (AG), les points B, D et E sont tous trois situés à la même distance de la diagonale, et dans un même plan orthogonal à cette diagonale (ils forment un triangle équilatéral dans ce plan), on peut les permuter circulairement par les deux rotations indiquées. Idem pour les sommets C, F et H. Puisqu'il y a quatre grandes diagonales, nous tenons les $2 \times 4 = 8$ rotations qui nous manquaient.



Sur cette illustration, certains des axes de rotation se superposent, ce qui peut expliquer que vous en comptiez moins que ce qui est annoncé ci-dessus.

Chapitre 19

Étude métrique des courbes planes

Ne t'inquiète pas si tu as des difficultés en maths,
je peux t'assurer que les miennes sont bien plus importantes !

Albert Einstein.

Les mathématiques ne constituent pas à proprement parler une science.

Claude Allègre (qui n'est pas à proprement parler un scientifique).

Introduction

Ce petit chapître est un complément à celui que nous avions déjà consacré aux courbes planes beaucoup plus tôt dans l'année. Nous avions alors appris à tracer des courbes définies par différents types d'équation, et à gerer tout ce qui concernait l'aspect géométrique de ces courbes (tangentes et points stationnaires notamment). Dans ce nouveau chapître, nous allons nous consacrer entièrement à un autre aspect de l'étude des courbes, l'aspect métrique. Ainsi, le principal objectif du chapître est d'apprendre à calculer la longueur d'une courbe. Mais nous pousserons également jusqu'à la définition (et le calcul) de notions plus géométrique, notamment la courbure qui constituera en quelque sorte notre objectif final.

Objectifs du chapitre :

- savoir calculer une longueur, une abscisse curviligne, une courbure.
- comprendre les implications géométriques des calculs cités juste au-dessus.

19.1 Longueur d'une courbe

Dans tout ce chapître, nous nous intéresserons à des courbes paramétrées, qui peuvent très bien être définies par une équation cartésienne ou une équation polaire. Nous étudierons même quelques exemples de courbes de fonctions $f : I \to \mathbb{R}$, qu'on peut facilement paramétrer à l'aide de leur abscisse (autrement dit, on pose $x(t) = t$ et $y(t) = f(t)$).

Définition 288. Un **arc de classe** $\mathcal{C}^k$ est une fonction $f : U \to \mathbb{R}^2$ dont les deux fonctions coordonnées x et y sont de classe $\mathcal{C}^k$.

Remarque 276. Cette définition, contrairement à ce qu'on pourrait penser à première vue, n'exclut pas les arcs définis par une équationf polaire : si $t \mapsto \rho(t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$, alors $x : t \mapsto \rho(t)\cos(t)$ et $y : t \mapsto \rho(t)\sin(t)$ le seront aussi.

Définition 289. Deux arcs paramétrés f et g de classe $\mathcal{C}^k$ sont **$\mathcal{C}^k$-équivalents** si $g = f \circ \varphi$, où $\varphi : J \to I$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$, et dont la réciproque est $\mathcal{C}^1$. En notant Γ le support de l'arc paramétré, on dit alors que φ effectue un **paramétrage admissible** de Γ. On dira de plus que f et g ont **même orientation** si φ est strictement croissante.

Remarque 277. Nous n'allons pas trop insister sur ces notions un peu techniques, mais on peut quand même donner une interprétation simple du vocabulaire : deux paramétrages équivalents sont simplement deux paramétrages correspondant au parcours de la même courbe Γ. Qu'est-ce qui distingue alors les deux ? Tout simplement le sens dans lequel on parcourt la courbe (d'où la dernière définition ; remarquons que la bijection φ est nécessairement strictement croissante ou strictement décroissante puisqu'elle est $\mathcal{C}^1$), mais aussi la vitesse à laquelle on parcourt la courbe.

Exemple : Le paramétrage le plus classique du cercle trigonométrique est la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0, 2\pi] & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (\cos(t), \sin(t)) \end{array} \right.$. Mais on peut très bien aussi choisir $x(t) = \cos(2t)$ et $y(t) = \sin(2t)$, en restreignant t à l'intervalle $[0, \pi]$, parcourant manifestement le même cercle, mais deux fois plus vite. Naturellement, la notion de longueur parcourue (de façon très élémentaire, le temps multiplié par la vitesse) va devoir prendre en compte la vitesse de parcours.

Définition 290. L'arc f est **régulier** sur I si $\overrightarrow{f'(t)}$ ne s'annule jamais sur I. Il est **birégulier** si $\overrightarrow{f'(t)}$ et $\overrightarrow{f''(t)}$ forment toujours une base de $\mathbb{R}^2$.

Remarque 278. La birégularité implique la régularité, puisqu'on aura du mal à construire une base avec un vecteur nul. Si vous n'avez pas tout oublié de notre premier chapître consacré aux courbes planes, vous noterez que la birégularité implique que tous les points de la courbes sont des points ordinaires. Si j'amais, dans la suite du chapître, nous voulons travailler avec des courbes contenant des points stationnaires, on se contentera simplement de les exclure de nos intervalles de travail.

Proposition 299. La notion de birégularité est indépendante du changement de paramètre admissible.

Démonstration. Faisons-le pour la régularité. Si on pose $g = f \circ \varphi$, en notant (x, y) les fonctions coordonnées de f, et (u, v) celles de g, on aura $u' = (x \circ \varphi)' = \varphi' \times x' \circ \varphi$, et de même $v' = \varphi' \circ y' \circ \varphi$. Comme φ' ne peut pas s'annuler (sinon sa réciproque ne serait pas $\mathcal{C}^1$), $(u'(t), v'(t)) = 0 \Leftrightarrow (x'(\varphi(t), y'(\varphi(t)) = 0$. S'il y a un point stationnaire pour un paramétrage, il y en a donc aussi un pour l'autre (pas pour la même valeur du paramètre, bien sûr). Pour la birégularité, il faut calculer un peu plus : $u'' = \varphi'' \times x' \circ \varphi + \varphi'^2 \times x'' \circ \varphi$ (et similairement pour v''). On peut alors calculer $\det((u', v'); (u'', v'')) = u'v'' - u''v' = (\varphi' \times x' \circ \varphi)(\varphi'' \times y' \circ \varphi + \varphi'^2 \times y'' \circ \varphi) - (\varphi' \times y' \circ \varphi)(\varphi'' \times x' \circ \varphi + \varphi'^2 \times x'' \circ \varphi) = \varphi'^3 \times \det((x' \circ \varphi, y' \circ \varphi), (x'' \circ \varphi, y'' \circ \varphi))$ (les deux autres termes s'annulent). Encore une fois, s'il y a un point qui n'est pas birégulier pour un des paramétrages, ce sera également le cas pour l'autre. □

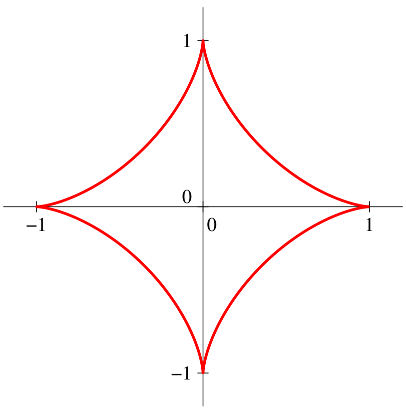
Définition 291. La **longueur** de l'arc paramétré $f : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^2$ est le réel $L = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} \|\overrightarrow{f'(t)}\|\, dt$.

Remarque 279. Cette notion est elle aussi indépendante du paramétrage admissible, il s'agit cette fois-ci d'une application immédiate de la formule de changement de variable pour les intégrales (d'après les calculs effectués dans la démonstration précédente, $\|\overrightarrow{g'(t)}\| = \varphi'(t)\|\overrightarrow{f'(\varphi(t))}\|$. Par ailleurs, ce calcul est cohérent avec la notion intuitive de longueur : on multiplie la vitesse (la norme de la dérivée) par le temps, ici infinitésimal, et on additionne sur tout l'intervalle.

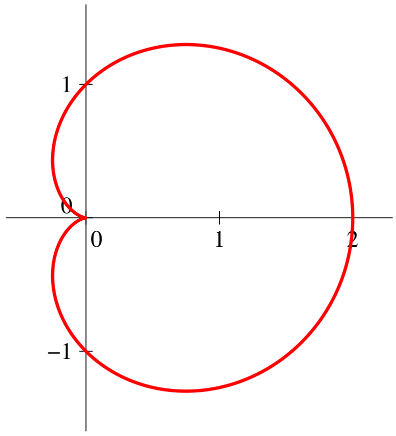
Exemples : Commençons par du très élémentaire, avec la longueur du cercle trigonométrique. Si on prend le paramétrage habituel $(\cos(t), \sin(t))$, on a $\overrightarrow{f'(t)} = (-\sin(t), \cos(t))$, qui est toujours de norme 1. Il suffit donc de constater que $L = \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi$. Et si on change le paramétrage en $(\cos(2t), \sin(2t))$? Dans ce cas, la dérivée a pour norme 2 (on multiplie les deux dérivées par 2), mais on intègre seulement sur $[0, \pi]$, donc on retrouve une longueur égale à 2π.
Plus rigolo, calculons la longueur d'une ellipse de paramétrage $(a\cos(t), b\sin(t))$. Par définition, $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\cos^2(t) + b^2\sin^2(t)}\, dt$. On peut écrire cette intégrale de beaucoup de façons différentes, mais assez curieusement, on ne sait pas la calculer de façon exacte. Il s'agit d'une intégrale elliptique, qui a été longuement étudiée par des générations de mathématiciens, et qui prouve que les calculs de longueur ne sont pas toujours aisés à réaliser.

Méthode : On peut être un tout petit peu plus explicite au niveau de la formule selon le type de paramétrage définissant la courbe.

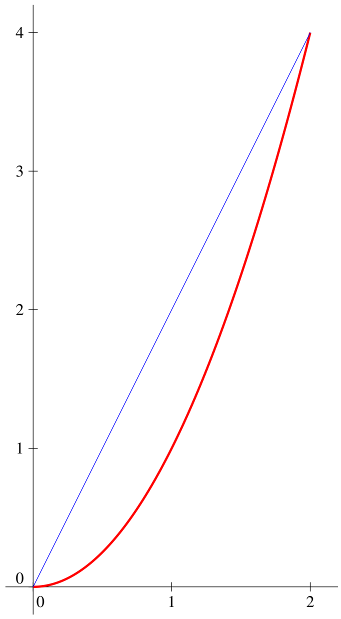
- Si la courbe est donnée par un paramétrage cartésien $(x(t), y(t))$, alors $L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$.
  Ainsi, si on veut calculer la longueur d'une astroïde définie par $x(t) = \cos^3(t)$ et $y(t) = \sin^3(t)$, on commence par constater que, par symétrie, la longueur totale de la courbe sera égale à quatre fois la longueur obtenue sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (théoriquement, on devrait calculer sur l'intervalle ouvert puisque les points aux bornes sont des points stationnaires, mais ça ne change rien pour le calcul de l'intégrale). Ensuite, on calcule $x'(t) = -3\sin(t)\cos^2(t)$ et $y'(t) = 3\cos(t)\sin^2(t)$, puis $L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9\sin^2(t)\cos^4(t) + 9\cos^2(t)\sin^4(t)}\, dt$ $= 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2(t)\cos^2(t)(\cos^2(t) + \sin^2(t))}\, dt = 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\cos(t) = 6\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t)\, dt =$ $3[-\cos(2t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 3(1+1) = 6$. C'est un petit peu moins que le périmètre du cercle trigonométrique, ce qui parait assez raisonnable comme ordre de grandeur.



- Si la courbe est définie par une équation polaire, alors $L = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2}\, d\theta$. En effet, on sait que le vecteur tangent à une courbe définie de cette façon est $\overrightarrow{f'(\theta)} = \rho'(\theta)u_\theta + \rho(\theta)v_\theta$, qui a bien pour norme $\sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2}$ puisque (u_θ, v_θ) est une base orthonormale du plan. Par exemple, si on considère la cardioïde d'équation $\rho(\theta) = 1 + \cos(\theta)$, après avoir constaté une symétrie par rapport à l'axe des abscisses et calculé $\rho'(\theta) = -\sin(\theta)$, on calculera $L = 2\int_0^{\pi} \sqrt{(1+\cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta)}\, d\theta = 2\int_0^{\pi} \sqrt{1 + 2\cos(\theta) + \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)}\, d\theta =$ $2\sqrt{2}\int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos(\theta)}\, d\theta$. Or, on sait (formule de duplication) que $\cos(\theta) = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1$, donc $\sqrt{1+\cos(\theta)} = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ (qui est positif sur notre intervalle). On en déduit que $L = 4\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\, d\theta = 8\left[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]_0^{\pi} = 8$.



- Si la courbe est celle d'une fonction f d'une variable usuelle, alors $L = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+f'(x)^2}\, dx$. En effet, via le paramétrage $x(t) = t$ et $y(t) = f(t) = f(x)$, on aura $x'(t) = 1$ et $y'(t) = f'(x)$, donc $L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+f'(x)^2}\, dx$. Par exemple, si on souhaite calculer la longueur d'un arc de parabole d'équation $y = x^2$ entre ses points d'abscisse 0 et d'ascisse 2, on calcule $\int_0^2 \sqrt{1+4x^2}\, dx$. cette intégrale n'est pas vraiment triviale, commençons par faire une IPP en posant $u(x) = \sqrt{1+4x^2}$, soit $u'(x) = \frac{8x}{2\sqrt{1+4x^2}} = \frac{4x}{\sqrt{1+x^2}}$, et $v'(x) = 1$, soit $v(x) = x$, pour obtenir $L = [x\sqrt{1+4x^2}]_0^2 - \int_0^2 \frac{4x^2}{\sqrt{1+4x^2}}\, dx = 2\sqrt{17} - \int_0^2 \frac{1+4x^2}{\sqrt{1+4x^2}}\, dx + \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}\, dx = 2\sqrt{17} - L + \left[\frac{1}{2}\operatorname{Argsh}(2x)\right]_0^2 = 2\sqrt{17} - L + \frac{1}{2}\operatorname{Argsh}(4)$. On en déduit que $L = \sqrt{17} + \frac{1}{4}\operatorname{Argsh}(4) \simeq 4.65$. En comparant avec la longueur du segment de droite joignant les deux extrémités de l'arc, qui vaut $\sqrt{20} \simeq 4.47$, l'ordre de grandeur est correct.



Définition 292. Un paramétrage $f : I \to \mathbb{R}^2$ d'une courbe Γ est **normal** si $\forall t \in I$, $\|f'(t)\| = 1$.

Remarque 280. Un paramétrage normal est simplement un paramétrage pour lequel on parcourt la courbe à vitesse constante égale à 1.

Définition 293. Une **abscisse curviligne** est un paramétrage de la forme $s : t \mapsto \displaystyle\int_{t_0}^{t} \|\overrightarrow{f'(u)}\|\, du$, où $t_0 \in I$.

Proposition 300. Si f est un paramétrage quelconque, alors $f \circ s^{-1}$ est un paramétrage admissible normal.

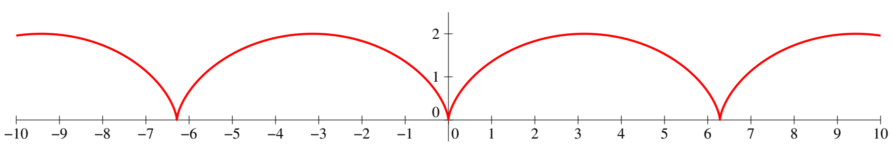
Démonstration. Commençons par constater que $s'(t) = \|\overrightarrow{f'(t)}\| > 0$, donc s est une bijection $\mathcal{C}^1$ de dérivée strictement positive, le paramétrage $g = f \circ s^{-1}$ est donc admissible. De plus, $\overrightarrow{g'(t)} = \dfrac{1}{s' \circ s^{-1}(t)} \times \overrightarrow{f'(s^{-1}(t))}$, qui est de norme 1 puisque $s'(s^{-1}(t)) = \|\overrightarrow{f'(s^{-1}(t))}\|$. Le paramétrage est donc normal. □

Remarque 281. Si f est un paramétrage normal, le calcul de la longueur des arcs devient extrêmement facile puisque $L = s(t_1) - s(t_0)$ (on intègre la constante 1 entre t_0 et t_1). Par exemple, le paramétrage classique du cercle $(\cos(t), \sin(t))$ est un paramétrage normal.

Remarque 282. À défaut de savoir calculer facilement une abscisse curviligne, on sait déterminer facilement sa dérivée :

- pour une courbe en coordonnées cartésiennes, $\dfrac{ds}{dt} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$.
- pour une courbe en coordonnées polaires, $\dfrac{ds}{d\theta} = \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2}$.

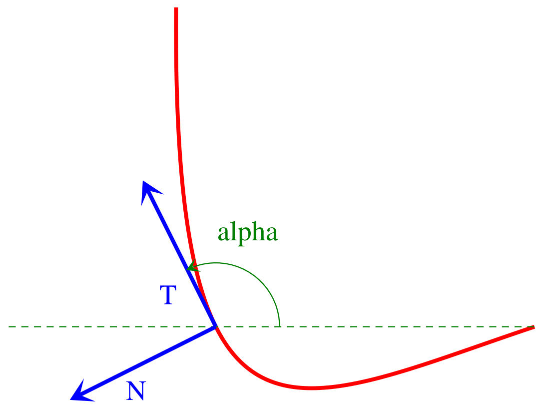
Exemple : Considérons une cycloïde de paramétrage cartésien $(t - \sin(t), 1 - \cos(t))$. On calcule $x'(t) = 1 - \cos(t)$, $y'(t) = \sin(t)$, donc $\dfrac{ds}{dt} = \sqrt{(1 - \cos(t))^2 + \sin^2(t)} = \sqrt{2 - 2\cos(t)} = 2\left|\cos\left(\dfrac{\pi + t}{2}\right)\right| = 2\left|\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)\right|$. On sait calculer une primitive de cette fonction : $s(t) = 4\left|\cos\left(\dfrac{t}{2}\right)\right|$.



19.2 Courbure

Définition 294. Soit f un arc paramétré et M le point correspondant à la valeur t du paramètre. Le **repère de Frénet** au point M est le repère $(M, \overrightarrow{T(t)}, \overrightarrow{N(t)})$, où $\overrightarrow{T(t)} = \dfrac{\overrightarrow{f'(t)}}{\|\overrightarrow{f'(t)}\|}$ est le vecteur tangent unitaire à la courbe en M, et $\overrightarrow{N(t)}$ est le vecteur normal unitaire à la courbe (autrement dit, le repère de Frénet est orthonormal direct).

Remarque 283. Ce repère ne dépend pas du paramétrage admissible choisi. Dans le cas d'un paramétrage normal s, on obtient beaucoup plus simplement $\overrightarrow{T(s)} = \overrightarrow{f'(s)} = (x'(s), y'(s))$ et $\overrightarrow{N(s)} = (-y'(s), x'(s))$. On se permettra l'abus de notation suivant, fréquemment utilisé en physique : $\overrightarrow{T(t)} = \dfrac{\frac{d\overrightarrow{f}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \dfrac{d\overrightarrow{f}}{ds}$ (nous utiliserons sans le préciser d'autres notations de ce type dans la suite de ce cours).



Proposition 301. En coordonnées cartésiennes, $\overrightarrow{T(t)} = \dfrac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}\overrightarrow{i} + \dfrac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}\overrightarrow{j}$, et $\overrightarrow{N(t)} = -\dfrac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}\overrightarrow{i} + \dfrac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}\overrightarrow{j}$.

En coordonnées polaires, $\overrightarrow{T(\theta)} = \dfrac{\rho'(\theta)}{\sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2}}\overrightarrow{u_\theta} + \dfrac{\rho(\theta)}{\sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2}}\overrightarrow{v_\theta}$ et $\overrightarrow{N(\theta)} = -\dfrac{\rho(\theta)}{\sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2}}\overrightarrow{u_\theta} + \dfrac{\rho'(\theta)}{\sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2}}\overrightarrow{v_\theta}$

Démonstration. C'est une conséquence directe de la définition. □

Exemple : Pour une cardioïde d'équation $\rho(\theta) = 1 + \cos(\theta)$, alors $\rho'(\theta) = -\sin(\theta)$, on a déjà calculé plus haut que $\sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2} = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$, donc $\overrightarrow{T(\theta)} = -\dfrac{\sin(\theta)}{1\cos(\frac{\theta}{2})}\overrightarrow{u_\theta} + \dfrac{1+\cos(\theta)}{2\cos(\frac{\theta}{2})}\overrightarrow{v_\theta}$. Je vous épargne la valeur de $\overrightarrow{N(\theta)}$.

Théorème 99. Si f est un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$, il existe une fonction $\alpha : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ telle que $\begin{cases} \overrightarrow{T(t)} & = & (\cos(\alpha(t)), \sin(\alpha(t))) \\ \overrightarrow{N(t)} & = & (-\sin(\alpha(t)), \cos(\alpha(t))) \end{cases}$

Démonstration. Nous ne démontrerons pas ce résultat technique. Contentons-nous de constater que la fonction α représente l'angle entre la tangente à l'arc et l'horizontale (cf figure ci-dessus). □

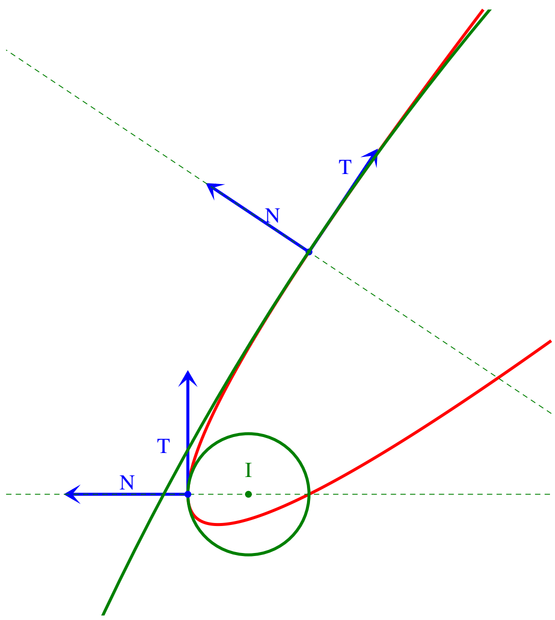
Définition 295. La **courbure** de l'arc en son point de paramètre s (s étant un paramétrage normal) est le réel $c(s) = \dfrac{d\alpha}{ds}$. Alternativement, pour un autre paramétrage, $c(t) = \dfrac{\frac{d\alpha}{dt}}{\frac{ds}{dt}}$.

Proposition 302. On a les relations suivantes : $\dfrac{d\overrightarrow{T}}{ds} = c\overrightarrow{N}$ et $\dfrac{d\overrightarrow{N}}{ds} = -c\overrightarrow{T}$ (relations de Frénet).

Démonstration. En prenant un paramétrage normal, $\overrightarrow{T(s)} = (\cos(\alpha(s)), \sin(\alpha(s)))$, donc $\overrightarrow{T'(s)} = (-\alpha'(s)\sin(\alpha(s)), \alpha'(s)\cos(\alpha(s))) = \alpha'(s)\overrightarrow{N(s)} = c(s)\overrightarrow{N(s)}$. □

Définition 296. Le **rayon de courbure** en un point régulier est le réel $R(t) = \dfrac{1}{c(t)}$.
Le **centre de courbure** est le point $I(t)$ défini par $\overrightarrow{MI(t)} = R\overrightarrow{N(t)}$, où M est le point de la courbe correspondant à la valeut t du paramètre.
Le **cercle de courbure**, ou **cercle osculateur** est le cercle de centre $I(t)$ et de rayon $|R(t)|$.

Remarque 284. Le cercle osculateur passe évidemment par le point de la courbe de paramètre t, on peut en fait prouver qu'il s'agit du cercle « le plus proche » de la courbe au point $M(t)$. Il est important de comprendre le sens géométrique des dernières notions définies : la courbure, en tant que dérivée de l'angle entre la courbe et l'horizontale, représente comme son nom l'indique la tandance de la courbe à tourner plus ou moins rapidement. Plus la courbure est élevée (en valeur absolue), plus on tourne. Le rayon de courbure, inversement proportionnel à la courbure, sera très grand quand la courbure est très faible, ce qui correspond bien, puisqu'il colle à la courbe, au fait que la courbe est très rectiligne quand la courbure est faible. Sur la figure ci-dessous, on a indiqué le repère de Frénet (en bleu), ainsi que le centre de courbure I et le cercle osculateur (en vert) en deux points d'une même courbe paramétrée (en rouge). Pour le deuxième point, la courbure étant très faible (donc le rayon de courbure très grand), le centre de courbure est trop éloigné pour être sur la figure, et on n'a représenté qu'une petit partie du cercle osculateur.

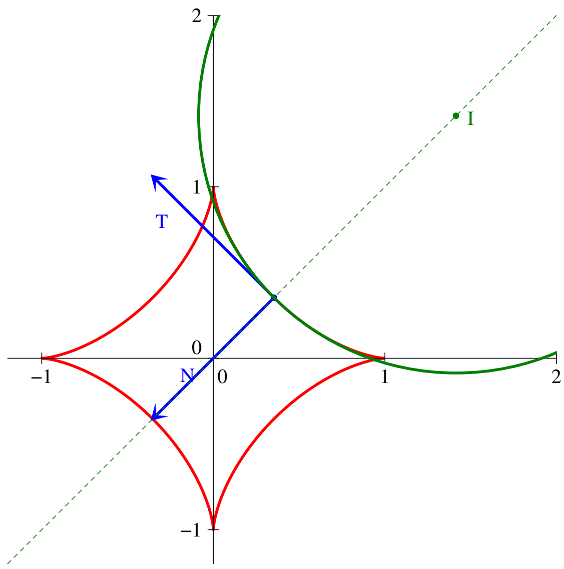


Méthode : En pratique, pour calculer la courbure en coordonnées cartésiennes, on calcule d'abord $\dfrac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2 + y'^2}$, puis on essaye de déterminer $\alpha(t)$ en constatant que $\tan(\alpha) = \dfrac{y'}{x'}$ (ça devrait être géométriquement évident). Si α n'est pas possible à expliciter (ce qui arrivera hélas souvent), ce n'est pas grave, on dérive pour obtenir la relation $(1+\tan^2(\alpha))\dfrac{d\alpha}{dt} = \dfrac{y''x' - y'x''}{x'^2}$. Or, $1+\tan^2(\alpha) =$

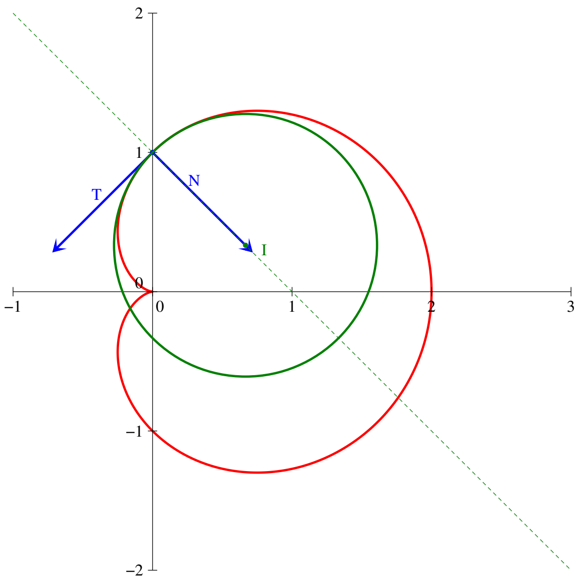
$1+\dfrac{y'^2}{x'^2}=\dfrac{x'^2+y'^2}{x'^2}$, en simplifiant les dénominateurs on trouve donc $\dfrac{d\alpha}{dt}=\dfrac{y''x'-y'x''}{x'^2+y'^2}$. Il ne reste plus qu'à conclure : $c=\dfrac{\frac{d\alpha}{dt}}{\frac{ds}{dt}}=\dfrac{x'y''-x''y'}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{\det(\overrightarrow{f'(t)},\overrightarrow{f''(t)})}{\|\overrightarrow{f'(t)}\|^3}$. Bien sûr, j'aurais pu vous donner directement cette formule pour le calcul de la courbure, mais d'une part elle n'est pas à votre programme (elle le sera l'an prochain), et surtout il est important de maîtriser la logique et l'enchaînement des calculs.

On peut aussi obtenir une formule dans le cas des coordonnées polaires. On commence par calculer $\dfrac{ds}{d\theta}=\sqrt{\rho^2+\rho'^2}$. Ensuite, on constate que $\alpha=\theta+V$, avec $\tan(V)=\dfrac{\rho}{\rho'}$ (cette formule ne devrait pas poser de problème dans la mesure où on a déjà travaillé avec l'angle V dans notre premier chapître consacré aux courbes planes). Comme ci-dessus, on peut dériver pour obtenir $(1+\tan^2(V))\dfrac{dV}{d\theta}=\dfrac{\rho'^2-\rho\rho''}{\rho'^2}$, donc $(\rho'^2+\rho^2)\dfrac{dV}{d\theta}=\rho'^2-\rho\rho''$. On en déduit que $\dfrac{d\alpha}{d\theta}=1+\dfrac{dV}{d\theta}=\dfrac{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''}{\rho'^2+\rho^2}$, puis $c=\dfrac{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''}{(\rho^2+\rho'^2)^{\frac{3}{2}}}$. Là encore, il est nettement plus constructif de comprendre les calculs que d'apprendre par coeur la formule.

Exemple 1 : Calculons la courbure de l'astroïde définie par $\overrightarrow{f(t)}=(\cos^3(t),\sin^3(t))$. On a déjà calculé plus haut que $\dfrac{ds}{dt}=\dfrac{3}{2}\sin(2t)$ (on se contentera de faire le calcul sur le quart de courbe sur lequel on avait déjà calculé la ongueur pour ne pas avoir de problèmes de signe). Par ailleurs, $\tan(\alpha(t))=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=\dfrac{3\cos(t)\sin^2(t)}{-3\sin(t)\cos^2(t)}=-\tan(t)$. On peut donc prendre $\alpha(t)=-t$, en tout cas on obtient $\dfrac{d\alpha}{dt}=-1$ sans avoir à faire de calcul compliqué. reste à conclure : $c=\dfrac{\frac{d\alpha(t)}{dt}}{\frac{ds}{dt}}=-\dfrac{2}{3\sin(2t)}$ et $R=-\dfrac{3}{2}\sin(2t)$. Le signe négatif n'est pas surprenant : sur le morceau de courbe considéré, la normale sera dirigée vers l'intérieur de la courbe, alors que le centre de courbure est manifestement à l'extérieur. Notons que, lorsqu'on se rapproche des points stationnaires en 0 et en $\dfrac{\pi}{2}$, la courbure devient infinie. Un exemple concret : en $\dfrac{\pi}{4}$, $c=-\dfrac{2}{3}$ et $R=-\dfrac{3}{2}$. Illustrations sur la figure ci-dessous, avec le repère de Frénet, le centre de courbure et le cercle osculateur au point de paramètre $\dfrac{\pi}{4}$:



Exemple 2 : Un calcul en polaire pour terminer, avec la courbure de la cardioïde définie par $\rho(\theta) = 1 + \cos(\theta)$. On a déjà vu plus haut que $\dfrac{ds}{d\theta} = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$. On utilise ensuite $\tan(V) = \dfrac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)} = \dfrac{1+\cos(\theta)}{-\sin(\theta)} = -\dfrac{2\cos^2(\frac{\theta}{2})}{2\sin(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\theta}{2})} = -\dfrac{1}{\tan(\frac{\theta}{2})} = \tan\left(\dfrac{\pi+\theta}{2}\right)$. En particulier, $\dfrac{dV}{d\theta} = \dfrac{1}{2}$, donc $\dfrac{d\alpha}{d\theta} = \dfrac{3}{2}$, puis $c = \dfrac{3}{4\cos(\frac{\theta}{2})}$ et $R = \dfrac{4}{3}\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$. Ici, la courbure devient infinie quand on approche du point stationnaire de la cardioïde. Un exemple concret : pour $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, on obtient $c = \dfrac{3}{2\sqrt{2}}$ et $R = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. Une dernière illustration :



Chapitre 20

Fonctions à deux variables

Il faut avoir beaucoup étudié pour savoir peu.

MONTESQUIEU.

Étudie, non pour savoir plus, mais pour savoir mieux.

SÉNÈQUE.

Il n'y a pas de problèmes, il n'y a que des professeurs.

JACQUES PRÉVERT.

Introduction

Pour ce dernier chapître de l'année, nous allons faire un rapide survol des techniques d'étude et de calcul reliées aux fonctions à deux variables que vous approfondirez l'an prochain. Au programme, des choses que vous avez pour la plupart déjà croisées en physique ou en SII : calcul de dérivées partielles, calus d'intégrales doubles, et un tout petit peu de champs de vecteurs.

Objectifs du chapitre :

- savoir calculer des dérivées partielles et déterminer des points critiques.
- comprendre l'intérêt des intégrales doubles et de la formule de Green-Riemann pour le calcul d'aires.

20.1 Continuité, dérivées partielles

20.1.1 Aspect graphique

Définition 297. Une **fonction à deux variables** est une application $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, où $\mathcal{D}$ est une sous-ensemble du plan $\mathbb{R}^2$ appelé **domaine de définition** de la fonction f.

Exemples : La fonction $f : (x, y) \mapsto x^3 + 2x^2y + xy^3 - 4y^2$ est une fonction à deux variables définie sur $\mathbb{R}^2$ tout entier. La fonction $g : (x, y) \mapsto \ln(x + y - 1)$ est une fonction définie sur l'ensemble des couples (x, y) vérifiant $x + y - 1 > 0$, qui se trouve être le demi-plan supérieur ouvert délimité par la droite d'équation $y = 1 - x$. La fonction $h : (x, y) \mapsto \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ est définie à l'intérieur du cercle de centre O et de rayon 2.

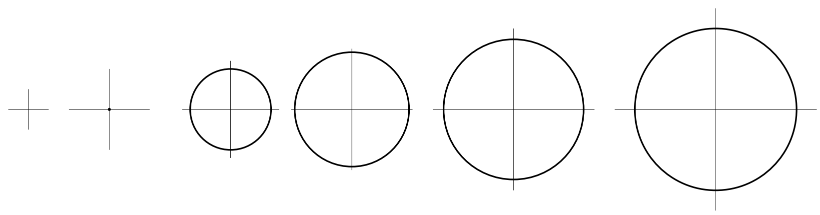
Définition 298. La **surface représentative** d'une fonction à deux variables dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ vérifiant $z = f(x, y)$.

Remarque 285. Une fonction à deux variables n'est donc pas représentée par une courbe. Il est très difficile en général de visualiser ce genre de représentations graphiques, c'est pourquoi on en est souvent réduit à étudier les coupes de la surface par des plans simples.

Définition 299. Soit k un réel et f une fonction de deux variables, la **ligne de niveau** k de la fonction f est l'ensemble des couples (x, y) vérifiant $f(x, y) = k$.

Remarque 286. Il s'agit donc de la coupe de la surface représentative de f par le plan « horizontal » d'équation $z = k$. La plupart du temps, une ligne de niveau n'est pas la courbe représentative d'une fonction à une variable.

Exemple : Considérons la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$, sa ligne de niveau k est définie par l'équation $x^2 + y^2 = k$. Il s'agit donc du cercle de centre O et de rayon $\sqrt{k}$ quand k est positif, la ligne de niveau est vide sinon. Voici une représentation des lignes de niveau pour k entier compris entre -1 et 4. Il ne reste plus qu'à les relier mentalement pour imaginer l'allure de la surface représentative de f.



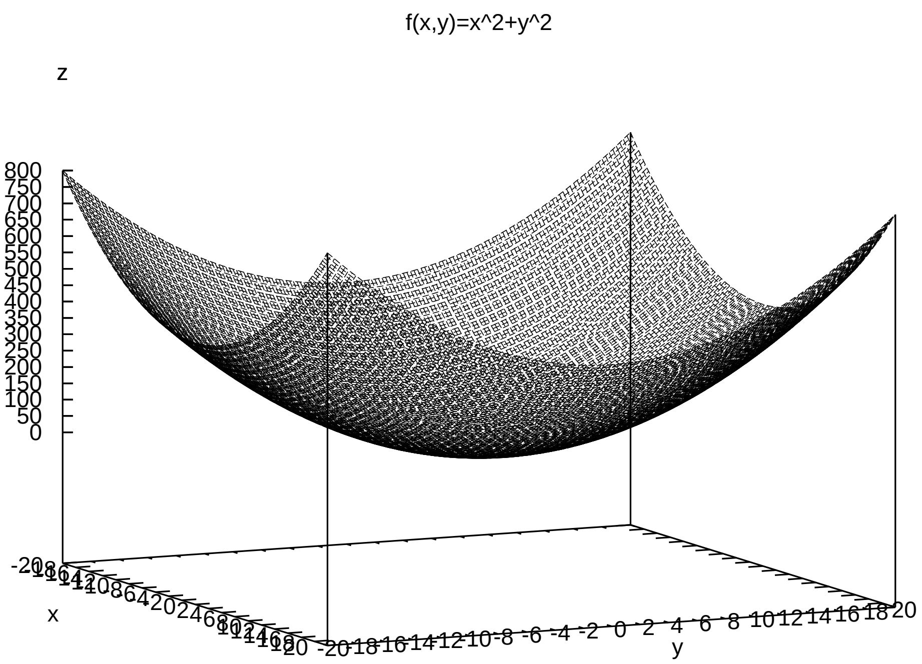
Définition 300. Soit $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ à deux variables, les **applications partielles** associées sont les deux fonctions à une variable $f_x : x \mapsto f(x, y)$ et $f_y : y \mapsto f(x, y)$.

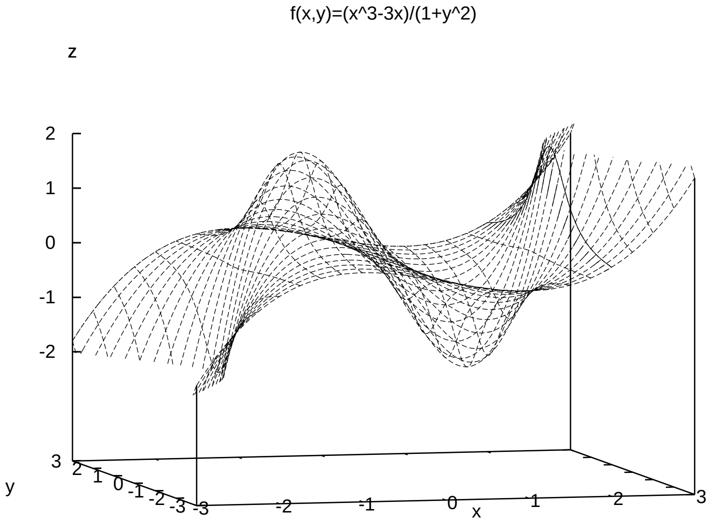
Remarque 287. Les applications partielles sont donc données par la même équation que la fonction f elle-même, seul le statut de x et de y change : au lieu d'avoir deux variables, l'une d'elles est désormais fixée (sa valeur dépend du point (x, y) en lequel on regarde les applications partielles). Par exemple, si $f(x, y) = x^2 - 3xy + y^3$, on dira que l'application partielle obtenue en fixant $y = 1$ est la fonction d'une variable $x \mapsto x^2 - 3x + 1$ (on a posé $y = 1$ dans l'équation de f), ou que l'application partielle obtenue en fixant $x = 2$ est la fonction $y \mapsto 4 - 6y + y^3$. Tracer les représentations graphiques de ces applications partielles revient à tracer la coupe de la surface représentative de f par les plans d'équation respective $y = 1$ et $x = 2$ (plans « verticaux » si on oriente le repère de façon habituelle).

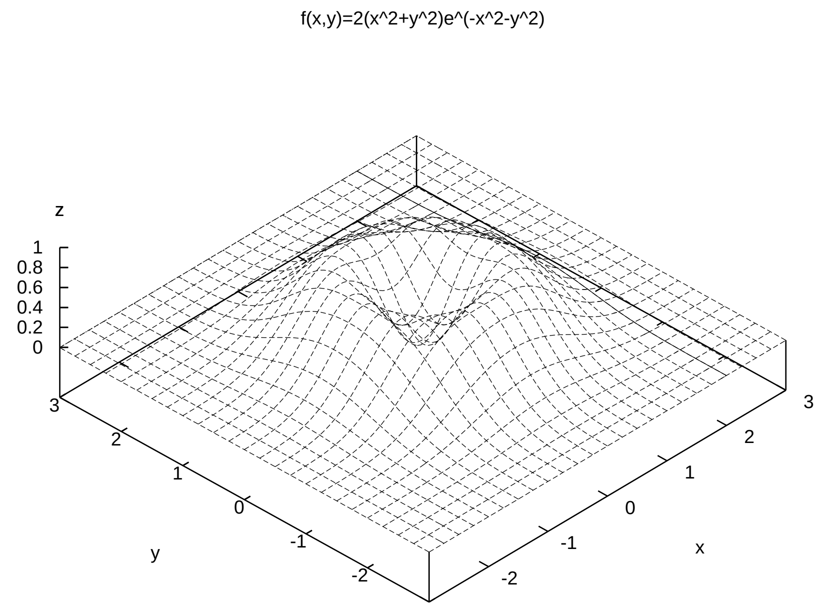
Remarque 288. Les courbes des applications partielles et les lignes de niveau permettent de reconstituer l'intégralité de la surface. Reprenons notre fonction $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$. On a déjà vu que ses lignes de niveau étaient des cercles. Les applications partielles sont toutes représentées par des paraboles. En particulier, à l'origine, elles ont pour équation $x \mapsto x^2$ et $y \mapsto y^2$ (donc les courbes en sont identiques). D'où l'allure globale de la surface, appelée paraboloïde de révolution car elle est obtenue en faisant « tourner » une parabole autour de l'axe (Oz), premier exemple du paragraphe suivant.

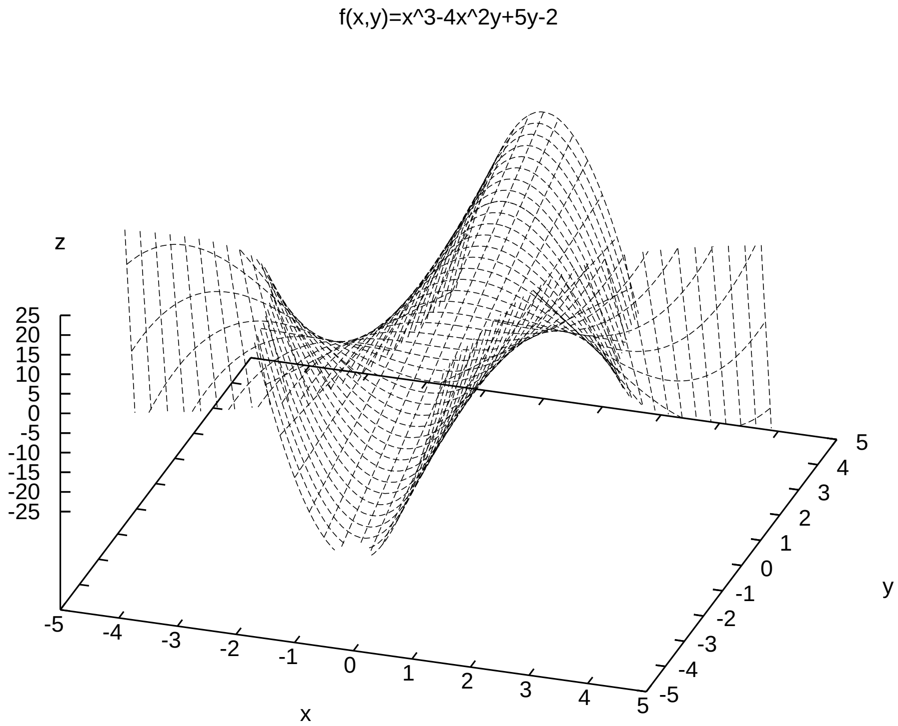
20.1.2 Exemples de surfaces

Juste quelques surfaces tracées à l'ordinateur pour avoir une idée de ce à quoi ça peut ressembler.




f(x,y)=(x^3-3x)/(1+y^2)
z
2
1
0
-1
-2
3 2 1 0 -1 -2 -3
y
-3 -2 -1 0 1 2 3
x


f(x,y)=2(x^2+y^2)e^(-x^2-y^2)
z
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
3 2 1 0 -1 -2
y
-2 -1 0 1 2 3
x



20.1.3 Continuité

Définition 301. Une fonction $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}^2$ admet en un point $M(a, b)$ une **limite finie** $l \in \mathbb{R}$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$, $0 < \|(x, y) - (a, b)\| < \eta \Rightarrow |f(x, y) - f(a, b)| < \varepsilon$.

Remarque 289. Cette définition est exactement la même que pour une fonction à une variable, en remplaçant les valeurs absolues par des normes. De fait, la valeur absolue est bien la distance associée au produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}$. On peut très facilement généraliser cette notion de continuité à des fonctions à n variables, pour tout entier naturel n non nul.

Définition 302. Une **boule ouverte** de centre (a, b) et de rayon $r > 0$ dans $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble $\mathcal{B} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y) - (a, b)\| < r\}$. Un sous-ensemble U de $\mathbb{R}^2$ est un **ouvert** si $\forall (x, y) \in U$, il existe un rayon $r > 0$ tel que la boule ouverte de centre (x, y) et de rayon r soit entièrement incluse dans U. Un **voisinage** de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant (x, y).

Remarque 290. Un ouvert de $\mathbb{R}^2$ est donc voisinage de chacun de ses points, c'est-à-dire qu'il contient une boule ouverte autour de chaque point. Intuitivement, un ouvert est un ensemble qui n'a pas de « bord ». Nous ne rentrerons pas plus dans les détails de la passionnante branche des mathématiques qui s'appelle la topologie. Sachez simplement que les ouverts sont les ensembles sur lesquels il est le plus facile d'étudier des fonctions à plusieurs variables, et qu'on supposera ainsi la plupart du temps que nos fonctions sont définies sur des ouverts, sans plus de précision.

Proposition 303. Si $f(x, y) \leqslant k\|(x, y)\|$ sur un voisinage de l'origine, alors $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$.

Démonstration. Il suffit de prendre $\eta = \dfrac{\varepsilon}{k}$ dans la définition de la limite. Notons qu'il suffit que nos inégalités soient valables sur un voisinage de l'origine, puisqu'elle le seront alors sur une boule ouverte de rayon r centrée en l'origine ; si jamais η fait déborder nos valeurs de cette boule ouverte, on prend r à la place de η et la définition restera vérifiée. □

Exemple : Soit $f : (x,y) \mapsto \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$. La limite de cette fonction à l'origine n'a rien d'évident a priori, mais devient plus simple après un passage en coordonnées polaire, en utilisant la propriété précédente : $f(\rho,\theta) = \dfrac{\rho\cos(\theta) \times \rho^2\sin^2(\theta)}{\rho^2} = \rho\cos(\theta)\sin^2(\theta)$. En particulier, $|f(x,y)| \leqslant \rho = \|(x,y)\|$, ce qui prouve que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Remarque 291. À l'aide des définitions données plus haut, on peut donner une définition plus simple mais plus technique de la limite : $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l$ si pour tout voisinage I de l (dans $\mathbb{R}$, donc tout intervalle ouvert contenant l), il existe un voisinage V de (a,b) tel que $f(V) \subset I$. On peut en fait pousser les choses beaucoup plus loin : en définissant les ouverts de $\mathbb{R}$ de la même façon que ceux de $\mathbb{R}^2$ (voisinages de chacun de leurs points), une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est continue (partout) si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert de $\mathbb{R}$ par f est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Théorème 100. Tout fonction à deux variables obtenue comme somme produit, quotient ou composée de fonctions continues est continue sur son ensemble de définition.

Démonstration. Comme dans le cas des fonctions à une variable, c'est très long et complètement inintéressant, nous admettons ce résultat. □

Théorème 101. Caractérisation séquentielle de la limite.
$\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l \Leftrightarrow$ pour toutes suites de réels (x_n) et (y_n) convergeant respectivement vers a et b, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n,y_n) = l$.

Démonstration. La démonstration est la même que dans le cas de fonctions à une variable (en un peu plus technique), on admet aussi. □

Exemple : Comme dans le cas des fonctions à une variable, on se sert surtout de la contraposée de la première implication : si on peut trouver deux couples de suites (x_n,y_n) et (x'_n,y'_n) ayant les mêmes limites mais pour lesquelles $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n,y_n) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(x'_n,y'_n)$, alors f ne peut pas être continue au point considéré. Ainsi, si $f(x,y) = \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, on constate aisément que $f\left(\dfrac{1}{n}, -\dfrac{1}{n}\right) = 0$ mais $f\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{\frac{2}{n}}{\frac{\sqrt{2}}{n}} = \sqrt{2}$, ce qui empêche la fonction d'avoir une limite en l'origine.

Proposition 304. Si f est continue en un point (a,b), ses deux applications partielles sont continues respectivement en b et en a.

Démonstration. C'est évident en constatant que $|x-a| \leqslant \|(x,y)-(a,b)\|$ (et de même pour y), on peut prendre la même valeur de η pour les deux définitions de la continuité. □

Remarque 292. La réciproque de ce résultat est malheureusement fausse (on ne peut pas ramener la continuité d'une fonction à deux variables à celle de fonctions à une variable). Ainsi, la fonction $f : (x,y) \mapsto \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, prolongée par $f(0,0) = 0$, n'est pas continue en 0 (on peut utiliser la caractérisation séquentielle de la limite : $f\left(\dfrac{1}{n}, 0\right) = 0$ et $f\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{2}$), et pourtant ses applications partielles qui sont toutes les deux nulles sont tout ce qu'il y a de plus continu.

20.1.4 Dérivées partielles

Définition 303. La fonction f est **dérivable en** (a,b) **dans la direction du vecteur** $h \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ si le taux d'accroissement $\tau(t) = \dfrac{f((a,b)+th) - f(a,b)}{t}$ admet une limite finie l quand t tend vers 0.

Exemple : Reprenons $f(x,y) = x^2+y^2$, et cherchons à déterminer certaines de ses dérivées directionnelles au point $(1,0)$. Si on pose $h = (h_x, h_y)$, on aura $\dfrac{f((1,0)+th) - f(1,0)}{t} = \dfrac{(1+th_x)^2 + t^2h_y^2 - 1}{t} = \dfrac{2th_x + t^2(h_x^2+h_y^2)}{t}$, qui a pour limite en 0 la valeur $2h_x$. Ainsi, par exemple, la dérivée suivant le vecteur $(1,0)$ vaudra 2, celle suivant le vecteur $(0,1)$ vaudra 0, et celle suivant le vecteur $(1,1)$ vaudra 2. Ces dérivées ont une interprétation géométriques proche de ce que vous connaissez sur les fonctions à une variable : elles représentent le coefficient directeur de la droite tangente à la surface représentative de f dans la direction du vecteur h (il y a en général une infinité de tangentes à une surface en un même point). Si vous préférez, il s'agit du nombre dérivé de la fonction à une variable dont la courbe est obtenue en coupant notre surface par un plan contenant l'axe (Oz) et le vecteue h. Attention à un détail un peu surprenant : la valeur de la limite dépend de la norme du vecteur h. Ainsi, en prenant $h = (2,0)$, on obtiendrait une valeur égale à 4 dans la même direction que le vecteur $(1,0)$, il faut donc prendre des vecteurs normés pour avoir une interprétation géométrique cohérente.

Définition 304. Les **dérivées partielles de** f **en** (a,b) sont ses dérivées suivant les vecteurs $(1,0)$ et $(0,1)$. On les note $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$.

Remarque 293. Ce sont également les dérivées ordinaires des applications partielles au point (a,b). Notons que l'existence de dérivées partielles, et même l'existence de dérivées dans toutes les directions, ne suffit même pas à assurer la continuité de f en (a,b).

Définition 305. La fonction f est **de classe** $\mathcal{C}^1$ en (a,b) si f y est continue, et $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ y sont définies et continues.

Proposition 305. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ en (a,b), elle y admet une dérivée suivant tout vecteur $h = (h_x, h_y)$, égale à $h_x \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) + h_y \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$.

Démonstration. La démonstration de ce résultat nécessite le théorème fondamentale que nous allons désormais énoncer. □

Définition 306. La fonction f **admet un développement limité d'ordre** 1 **en** (a,b) si $f((a,b)+(h_x,h_y)) \underset{(x,y)\to(a,b)}{=} f(a,b) + l(h) + o(\|h\|)$, où l est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

Remarque 294. Si cette histoire d'application linéaire vous embête, dites-vous simplement qu'on peut écrire $l(h) = \alpha h_x + \beta h_y$, où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Théorème 102. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ en (a,b), alors f y admet un DL_1 de la forme $f((a,b) + (h_x,h_y)) = f(a,b) + h_x \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) + h_y \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) + o(\|h\|)$.

Démonstration. Ce théorème technique est admis. On peut par contre en déduire facilement la propriété précédente (il suffit d'écrire le calcul). □

Proposition 306. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ en (a,b), elle y est continue.

Démonstration. En effet, tous les termes à part $f(a,b)$ dans le développement limité ont une limite nulle quand h tend vers $(0,0)$. □

Définition 307. On note dx l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ définie par $dx : (h_x, h_y) \mapsto h_x$. De même, dy est défini par $d_y : (h_x, h_y) \mapsto h_y$. On appelle par ailleurs **différentielle en** (a, b) **de** f l'application linéaire l de son développement limité d'ordre 1, qu'on note aussi $df_{(a,b)}$. Autrement dit, $f((a, b)+h) = f(a, b) + df_{(a,b)}(h) + o(\|h\|)$.
Avec les notations précédentes, on peut écrire que $df_{(a,b)} = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$.

Définition 308. Le **gradient de** f **en** (a, b) est le vecteur $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\right)$. On le note $\mathrm{grad}_{(a,b)}(f)$ ou encore $\nabla_{(a,b)}(f)$ (le symbole se lit **nabla**). On peut ajouter une flèche sur chacune des deux notations pour souligner le caractère vectoriel du gradient.

Proposition 307. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ en (a, b), alors $df_{(a,b)}(h) = grad_{(a,b)}(f).h$.

Proposition 308. Cela découle immédiatement des définitions de la différentielle (et de la caractérisation à l'aide des dérivées partielles vue plus haut) et du gradient.

Théorème 103. Toute fonction obtenue comme somme, produit, quotient ou composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition.

Démonstration. Vous vous en doutez sûrement, ce théorème sera admis. Notons au passage que les formules de dérivation de sommes, produits et autres que vous connaissez bien restent valables pour les dérivées partielles de fonctions à deux variables. Seules les composées posent problème (on ne peut de toute façon pas composer deux fonctions à deux variables, mais par exemple une fonction à deux variables par une fonction à une variable, nous reparlerons de ce genre de choses un peu plus loin dans le cours). □

Définition 309. La fonction f admet un **minimum global** (respectivement **maximum global**) en (a, b) si $\forall (x, y) \in \mathcal{D}_f$, $f(x, y) \geqslant f(a, b)$ (resp. $f(x, y) \leqslant f(a, b)$).
La fonction f admet un **minimum local** (respectivement **maximum local**) en (a, b) s'il existe une boule ouverte $\mathcal{B}$ de rayon r centrée en (a, b) telle que $\forall (x, y) \in \mathcal{B}$, $f(x, y) \geqslant f(a, b)$ (resp. $f(x, y) \geqslant f(a, b)$).

Remarque 295. La définition d'extremum local que nous venons de donner exclut la possibilité d'un extremum atteint ailleurs qu'à l'intérieur d'un ouvert, vous verrez plus en détail l'an prochain les problèmes posés par cette approche.

Théorème 104. Si f admet un extremum local en (a, b), alors $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$ (ou alternativement $df_{(a,b)} = 0$).

Démonstration. La preuve est en fait très simple : si (a, b) est un extremum local pour f, alors a et b représentent des extrema locaux pour les deux applications partielles de f, donc annulent nécessairement leurs dérivées, qui coïncident justement avec les dérivées partielles de f. □

Définition 310. Un **point critique** pour la fonction f est un point (a, b) vérifiant $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$.

Remarque 296. Un point critique est donc un extremum potentiel, mais attention, la réciproque du théorème n'est pas vraie. Vous verrez l'an prochain des techniques précises pour déterminer la nature exacte d'un point critique, mais en attendant, il faudra se débrouiller avec les moyens du bord.

Exemple 1 : $f(x, y) = x^2+y^2+2x-y+1$. On cherche à déterminer les extrema de f. La fonction est bien sûr de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, et $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x+2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y-1$. Le seul point critique est donc le point $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$, qui annule les deux dérivées partielles. Comme $f\left(-1, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$, le plus simple pour déterminer si le point critique est un extremum global (ou même local), le plus simple est de calculer $f(x,y)+\frac{1}{4}$ et de déterminer son signe : $f(x,y)+\frac{1}{4}=x^2+2x+1+y^2-y+\frac{1}{4}=(x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\geqslant 0$. On en déduit que $f(x,y)\geqslant f\left(-1,\frac{1}{2}\right)$, donc que le point critique correspond à un minimum local.

Exemple 2 : $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$. On cherche là aussi les extrema. On commence là aussi par le calcul des dérivées partielles : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3(x^2-y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=3(y^2-x)$. Les points critiques vérifient donc $x^2=y$ et $y^2=x$. En mettant la première équation au carré, $x^4=y^2=x$, donc $x=0$ ou $x=1$ (l'équation $x^4=x$ se factorisant sous la forme $x(x^3-1)=0$). Si $x=0$ alors $y=0$, et si $x=1$, alors $y=1$. Les deux points critiques sont donc $(0,0)$ et $(1,1)$. En $(0,0)$, il est facile de se rendre compte qu'il ne peut pas y avoir d'extremum local puisque les applications partielles $x\mapsto x^3$ et $y\mapsto y^3$ n'en ont pas. En $(1,1)$, c'est plus compliqué, on va essayer d'utiliser la même technique que dans l'exemple précédent, en calculant $f(1+h,1+k)-f(1,1)$ et en cherchant à déterminer son signe au voisinage de $(0,0)$ (s'il y a un extremum, il ne peut être que local, puisqu'on a déjà signalé qu'il y avait une application partielle de la forme $x\mapsto x^3$ qui n'est ni majorée ni nimorée). Puisque $f(1,1)=-1$, on calcule donc $(1+h)^3+(1+k)^3-3(1+h)(1+k)+1=1+3h+3h^2+h^3+1+3k+3k^3+k^3-3-3h-3k-3hk+1=(3+h)h^2+(3+k)k^2-3hk=(3+h)\left(h-\frac{3k}{2(3+h)}\right)^2+\left(3+k-\frac{9}{4(3+h)}\right)k^2\geqslant 0$ si h et k sont suffisamment proches de 0 (pour le premier terme, il est positif dès que $h\geqslant -3$, et le deuxième également si, par exemple, h et k sont tous deux compris entre -1 et 1). Il y aura donc un minimum local en $(1,1)$.

20.1.5 Dérivées partielles secondes

Définition 311. Les **dérivées partielles secondes** d'une fonction f à deux variables sont (si elles sont définies) les dérivées partielles des dérivées partielles de f. On note $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a,b)$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a,b)$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(a,b)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a,b)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a,b)$.

Définition 312. La fonction f est **de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert** U si f, ses deux dérivées partielles et ses quatre dérivées partielles secondes sont toutes continues sur U.

Exemples : Si nous reprenons notre premier exemple $f(x,y)=x^2+y^2$, on calcule très facilement $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y$, puis $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=2$, les deux autres dérivées partielles secondes (celles qui sont appelées dérivées croisées pusiqu'elles mélangent une dérivation par rapport à x et une par rapport à y) sont nulles.

Pour un exemple un peu moins facile au niveau des calculs, prenons $g(x,y)=\frac{2xy+x-1}{y^2+1}$. La fonction est définie sur $\mathbb{R}^2$, et on calcule dans un premier temps $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{2y+1}{y^2+1}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{2x(y^2+1)-2y(2xy+x-1)}{(y^2+1)^2}=\frac{-2xy^2-2xy+2x-2y}{(y^2+1)^2}$; et dans un deuxième temps $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\frac{2(y^2+1)-2y(2y+1)}{(y^2+1)^2}=\frac{-2y^2-2y+2}{(y^2+1)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{-2y^2-2y+2}{(y^2+1)^2}$ et enfin $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\frac{(-4y-2)(y^2+1)^2-4y(y^2+1)(-2y^2-2y+2)}{(y^2+1)^4}=\frac{-4y^3-4y-2y^2-2+8y^3+8y^2-8y}{(y^2+1)^3}$ $=\frac{4y^3+6y^2-12y}{(y^2+1)^3}$. On note au passage que les deux dérivées partielles croisées sont égales. Ce n'est pas un hasard.

Théorème 105. Théorème de Schwarz.
Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U, alors $\forall (x,y) \in U$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$.

Démonstration. Vous commencez à avoir l'habitude, on admettra ce résultat (vraiment pas évident à démontrer d'ailleurs). □

Théorème 106. Toute fonction obtenue comme somme, produit, quotient ou composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur son ensemble de définition.

20.1.6 Équations aux dérivées partielles

Une équation aux dérivées partielles est en gros l'équivalent pour des fonctions à plusieurs variables (deux en ce qui nous concerne dans ce chapître, mais on peut facilement généraliser) des équations différentielles pour les fonctions à une variable. Il s'agit donc d'équations dont les inconnues sont des fonctions à deux variables, et qui font intervenir les dérivées partielles de ces fonctions. Même si le principe est le même, les équations aux dérivées partielles (EDP) forment un domaine d'étude infiniment plus vaste, varié et complexe que les équations différentielles ordinaires. Elles interviennent dans énormément de domaines, en premier lieu la physique (équations de Maxwell par exemple). Notre but n'est certainement pas ici d'initier une étude systématique et complète de ce genre d'équations, mais plus modestement de donner un tout petit exemple qui vous donnera un premier aperçu des méthodes que vous approfondirez un peu l'an prochain.

Théorème 107. Soit f une fonction à deux variables, et u et v deux fonctions (à une variable) de classe $\mathcal{C}^1$ sur un certain intervalle I. On suppose également que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $u(I) \times v(I)$, et on pose $g : t \mapsto f(u(t), v(t))$. La fonction g (qui est une fonction à une variable) est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $\forall t \in I$, $g'(t) = u'(t)\dfrac{\partial f}{\partial x}(u(t), v(t)) + v'(t)\dfrac{\partial f}{\partial y}(u(t), v(t))$.

Théorème 108. Soient (u, v) deux fonctions à deux variables de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U, et f une fonction à deux variables de classe $\mathcal{C}^1$ sur $x(U) \times y(U)$, alors $g : (x,y) \mapsto f(u(x,y), v(x,y))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et :

- $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) \times \dfrac{\partial f}{\partial u}(u,v) + \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) \times \dfrac{\partial f}{\partial v}(u,v)$.
- $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) \times \dfrac{\partial f}{\partial u}(u,v) + \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) \times \dfrac{\partial f}{\partial v}(u,v)$.

Démonstration. Ces théorèmes ne sont pas si difficiles que ça à prouver, mais comme ce n'est pas du tout notre objectif ici, on s'en dispensera (il faut bien laisser un peu de travail pour les collègues l'an prochain). Ces résultats sont extrêmement utiles dans la mesure où énormément d'équations aux dérivées partiellespeuvent se résoudre en effectuant des changements de variables, c'est-à-dire en faisant apparaître des composées. □

Exempple : équation des ondes $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$.
On cherche donc les fonctions à deux variables (notées x et t) vérifiant l'équation précédente. Pour cela, on va poser $u = x - t$ et $v = x + t$, et $f(x,t) = g(x-t, x+t) = g(u,v)$. En appliquant les résultats précédents, on calcule successivement $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) + \dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v)$ (les dérivées partielles de u et de v par rapport à x sont égales à 1), et $\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t) = -\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) + \dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v)$; puis (en omettant les variables pour alléger un peu les notations) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}$ (les dérivées croisées sont égales car la fonction est nécessairement de classe $\mathcal{C}^2$), et de même $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} - \dfrac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} - \dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} - 2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}$. En reportant dans l'équation initiale, on

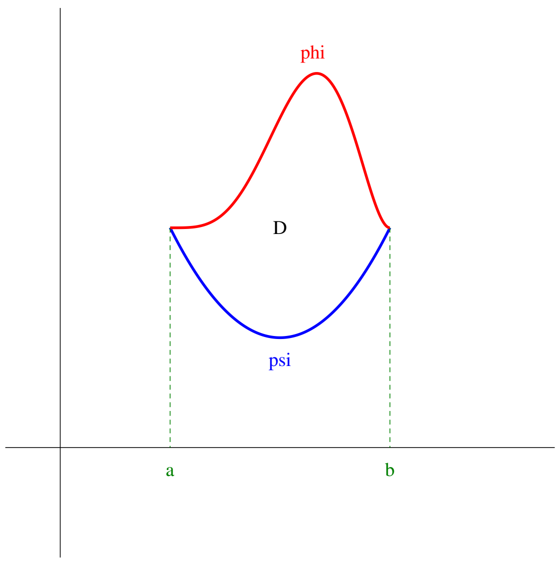
trouve alors que $4\dfrac{\partial g^2}{\partial u \partial v} = 0$. Vous savez résoudre l'équation différentielle $f''(x) = 0$? Ce n'est pas beaucoup plus compliqué ici, on commence par exemple par intégrer par rapport à la variable u pour obtenir $\dfrac{\partial g}{\partial v} = k(v)$. Attention ici, la primitive sera une fonction constante par rapport à la variable u mais peut très bien déprendre de v. En notant K une primitive de la fonction k (qui est une fonction de l'unique variable v), on trouve alors $g(u, v) = K(v) + l(u)$, où K et l sont sûrement des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$. Réciproquement, on vérifie aisément que toute fonction pouvant s'écrire sous la forme $K(u)+l(v)$ est solution de l'équation initiale. Autrement dit, toutes les fonctions de la forme $f(x, t) = K(x - t) + l(x + t)$ sont solution de l'équation des ondes. On remarque en particulier qu'il y a énormément plus de solutions pour une équation de ce type que pour une équation différentielle ordinaire d'ordre 2.

20.2 Intégrales doubles

Une intégrale double, comme vous pouvez vous en douter, est une intégrale de fonction à deux variables, qui correspond à un calcul géométrique de volume situé sous une surface représentative. Pour calculer ce genre d'intégrales doubles, que vous avez déjà du croiser en physique, il faudrait théoriquement mettre en place une théorie de l'intégration qui ressemble à celle que nous avons construite pour les fonctions à une variable, en partant du fait qu'on sait assez facilement calculer des volumes de parallélépipèdes (qui sont l'équivalent des rectangles avec une dimension supplémentaire). Mais comme c'est nettement plus compliqué que pour les intégrales simples, et que nous ne voulons de toute façon que donner un petit aperçu, nous allons faire beaucoup plus simple.

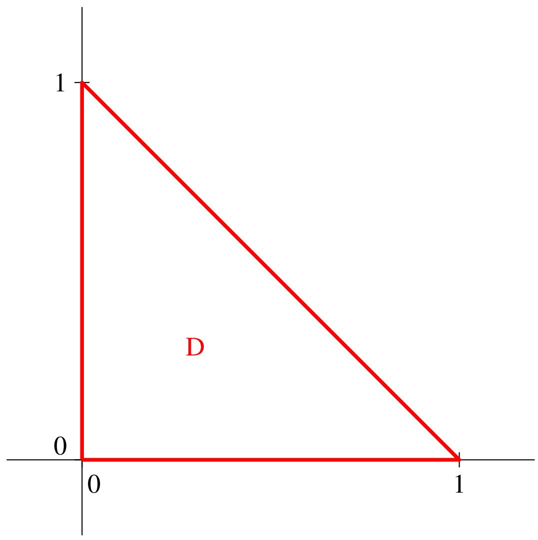
Remarque 297. Le cas le plus simple est celui où on intègre notre fonction à deux variables sur un rectangle : $\displaystyle\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y)\ dx\ dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\ dy\right)\ dx$.

Théorème 109. Théorème de Fubini.
Si le domaine de l'intégration double $\mathcal{D}$ est contitué de deux segments de droite verticaux situé en $x = a$ et $x = b$ (qui peuvent très bien être réduits à des points), et de deux courbes représentatives de fonction $\varphi(x)$ et $\psi(x)$, alors $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} f(x, y)\ dx\ dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\ dy\right)\ dx$.



Remarque 298. Présenté ainsi, ce théorème est bien sûr une arnaque totale, puisque le membre de gauche n'a absolument pas été défini (de fait, le théorème nous servira donc de définition). Notons quand même qu'on peut inverser le rôle des deux intégrations (suivant x et suivant y) dans la remarque précédant le théorème mais pas dans la formulation du théorème de Fubini. Par contre, on peut énoncer un résultat très similaire pour un domaine d'intégration constitué de deux segments horizontaux et de deux courbes représentatives de fonctions de la variable y.

Exemple : On veut calculer $I = \iint_{\mathcal{D}} x^2 + y \; dx \; dy$, où $\mathcal{D}$ est décrit par les inégalités $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $0 \leqslant y \leqslant 1 - x$, qu'on peut représenter ainsi :



Le calcul est alors assez élémentaire : $I = \int_0^1 \int_0^{1-x} x^2 + y \; dy \; dx = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{1}{2} y^2 \right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 x^2(1-x) + \frac{(1-x)^2}{2} \; dx = \int_0^1 -x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} \; dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \right]_0^1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

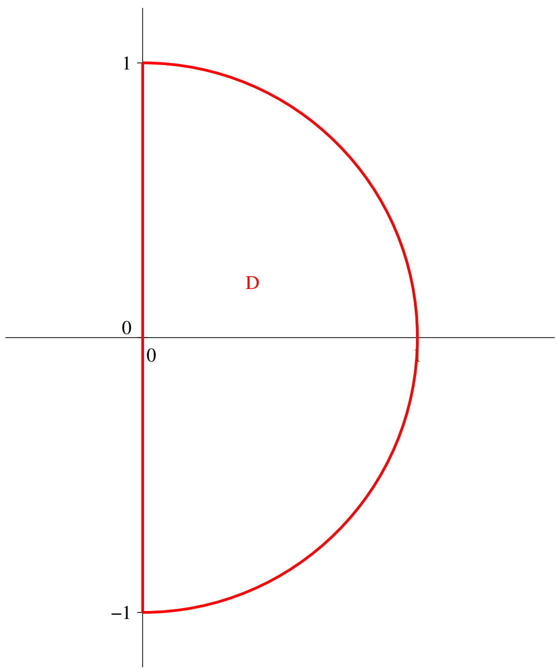
Proposition 309. L'intégration rouble est une application linéaire sur l'espace vectoriel des fonctions à deux variables continues sur un domaine $\mathcal{D}$. De plus, elle vérifie la relation de Chasles sur chacune des deux variables, et la propriété de positivité (une fonction toujours positive sur $\mathcal{D}$ a une intégrale double positive sur $\mathcal{D}$).

Démonstration. Nous n'allons rien démontrer de tout cela, contentons-nous de constater que les calculs pratiques d'intégrales doubles seront très similaires à ceux d'intégrales simples (notamment quand on veut sortir une constante de l'intégrale). □

Théorème 110. Changement de variables dans une intégrale double.
Le principe est le même que pour les intégrales simples : il faut modifier le domaine d'intégration (ce qui peut être nettement plus délicat qu'un simple changement de bornes), tout ce qui se trouve sous l'intégrale, et surtout transformer l'élément différentiel $dx \; dy$. C'est ce dernier point qui est compliqué à mettre en place. Sans énoncer un théorème général que vous verrez l'an prochain, voici deux cas particuliers utiles pour les calculs pratiques :

- Changement de variable affine $u = ax + by + \alpha$ et $v = cx + dy + \beta$. On posera alors $dx \; dy = (ad - bc) \; du \; dv$ (ce que je viens d'écrire est un abus de notation mais vous comprenez ce que ça signifie en pratique).
- Changement de variable polaire $(x, y) \mapsto (\rho, \theta)$. On posera alors $dx \; dy = \rho \; d\rho \; d\theta$.

Exemple : On souhaite calculer $I = \iint_{\mathcal{D}} x^2 + y^2 \; dx \; dy$, où $\mathcal{D}$ est le demi-disque trigonométrique situé « à droite » de l'axe des ordonnées :

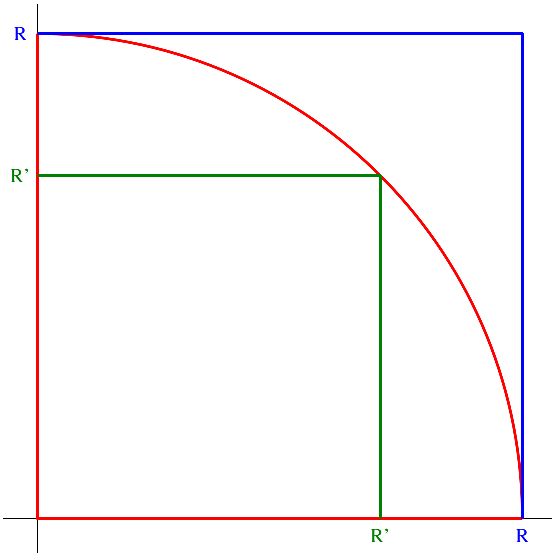


Cet ensemble est plus facile à décrire en coordonnées polaires (même si en l'occurence on peut s'en sortir sans) : il est simplement décrit par les inégalités $0 \leqslant \rho \leqslant 1$ et $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$. Autrement dit, en appliquant le théorème précédent (et en constatant bien évidemment que $x^2 + y^2 = \rho^2$), $I = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \rho^2 \times \rho \; d\rho \; d\theta = \pi \int_0^1 \rho^3 \; d\rho = \frac{\pi}{4}$ (comme la fonction ne dépend pas de θ, on peut directement sortir une constante égale à la largeur de l'intervalle d'intégration suivant la variable θ).

Remarque 299. Les intégrales doubles, bien qu'étant par définition des calculs de volume, peuvent être utilisées pour déterminer des aires. Il suffit pour cela d'intégrer la fonction constante égale à 1, l'aire du domaine sera alors simplement multipliée par 1 pour donner le volume calculé par l'intégrale double. Autrement dit, l'aire du domaine $\mathcal{D}$ peut être obtenue en calculant $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} 1 \; dx \; dy$. Une application classique de ce résultat, combiné à un changement de variables polaire, est le calcul de l'aire d'un secteur angulaire centré en O et délimité par les demi-droites $\theta = \theta_0$ et $\theta = \theta_1$, ainsi que par la courbe polaire d'équation $\rho = \rho(\theta)$. L'aire en question vaut $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} 1 \; dx \; dy = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \int_0^{\rho(\theta)} \rho \; d\rho \; d\theta = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \rho(\theta)^2 \; d\theta$.

Exemple : Calcul de l'intégrale de Gauss $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \; dx$.

Je sens les protestations poindre : c'est une intégrale simple, et surtout c'est une intégrale impropre (bornes infinies) que nous ne sommes pas censés savoir calculer. Ce n'est pas bien grave, on va définir $I_R = \displaystyle\int_0^R e^{-x^2} \; dx$ et admettre que $I = 2 \lim\limits_{R \to +\infty} I_R$ (le facteur 2 venant du fait qu'on a pris une intégrale entre 0 et R plutôt qu'entre $-R$ et R en utilisant la parité de la fonction intégrée). Puisqu'il faudrait quand même faire intervenir des intégrales doubles un jour ou l'autre, posons maintenant $J_R = \displaystyle\iint_{\mathcal{D}} e^{-x^2-y^2} \; dx \; dy$, où $\mathcal{D}$ est le quart de disque de rayon R centré en O correspondant aux angles compris entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$ sur le disque trigonométrique. Ce quart de disque est compris entre les carrés $\left[0, \dfrac{R}{\sqrt{2}}\right]^2$ et $[0, R]^2$. Vous ne suivez plus rien ? Le petit schéma suivant devrait suffire à vous convaincre (on a noté $R' = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$) :



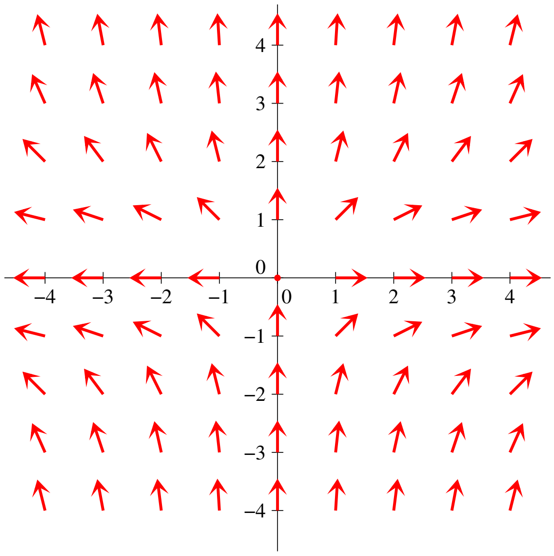
En constatant alors que $\displaystyle\iint_{[0,R]^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_0^R e^{-x^2}\,dx \times \int_0^R e^{-y^2}\,dy = I_R^2$ (et de même bien sûr sur l'autre carré), on peut en déduire que $I^2_{\frac{R}{\sqrt{2}}} \leqslant J_R \leqslant I_R^2$. Or, l'intégrale double J_R se calcule facilement à l'aide d'un changement de variable polaire : le quart de disque est aisément décrit, et $\displaystyle J_R = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R \rho e^{-\rho^2}\,d\rho\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{1}{2}e^{-\rho^2}\right]_0^R = \frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2})$. En particulier, $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} J_R = +\infty$. Via le théorème des gendarmes, on en déduit en utilisant l'encadrement obtenu plus haut que $\underset{R\to+\infty}{I}{}^{2}_{R} = \dfrac{\pi}{4}$, soit $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} I_R = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Conclusion : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$.

20.3 Champs de vecteurs

Nous avons étudié des fonctions à une variable, c'est-à-dire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; à deux variables, c'est-à-dire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, reste dans ce dernier paragraphe à dire quelques mots des champs de vecteurs, c'est-à-dire des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Pourquoi ce nom de champ de vecteurs ? Tout simplement parce qu'une telle fonction étant fort difficile à représenter graphiquement, on utilise l'astuce suivante pour avoir une idée de son allure : on représente dans $\mathbb{R}^2$ des vecteurs dont les coordonnées sont les valeurs de la fonction en question sur certains points. C'est finalement la même approche que ce lorsqu'on essaye d'obtenir l'allure d'un graphe de fonction en situant quelques points de la courbe (sauf que là on ne reliera rien du tout ensuite).

Définition 313. Un **champ de vecteur** $\overrightarrow{F}$ est une fonction $\overrightarrow{F} : U \to \mathbb{R}^2$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On notera dans tout ce paragraphe $\overrightarrow{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$.

Exemple : Voici l'allure du champ de vecteurs $\overrightarrow{F}(x,y) = (x, y^2)$ (pour qu'il n'y ait pas chevauchement des différents vecteurs représentés, on les dessinera tous de norme $\dfrac{1}{2}$; autrement dit, on ne représentera en fait que la direction des vecteurs).



Définition 314. Le champ de vecteurs $(P(x,y), Q(x,y))$ **dérive d'un potentiel scalaire** V s'il existe une fonction à deux variables V de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $P(x,y) = \dfrac{\partial V}{\partial x}$ et $Q(x,y) = \dfrac{\partial V}{\partial y}$.

Remarque 300. Autrement dit, $(P(x,y), Q(x,y)) = \mathrm{grad}_{(x,y)}(V)$. On parle d'ailleurs aussi de champ de gradient pour un champ de vecteurs dérivant d'un potentiel scalaire. Le terme potentiel est issu de la physique, où les champs gravitationnel, électrique ou magnétique dérivient tous de fonctions appelées potentiel gravitationnel, électrique ou magnétique.

Théorème 111. Si $(P(x,y), Q(x,y))$ est un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ (c'est-à-dire que P et Q sont toutes deux de classe $\mathcal{C}^1$) sur un ouvert étoilé U, alors (P,Q) dérive d'un potentiel scalaire si et seulement si $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial P}{\partial x}$.

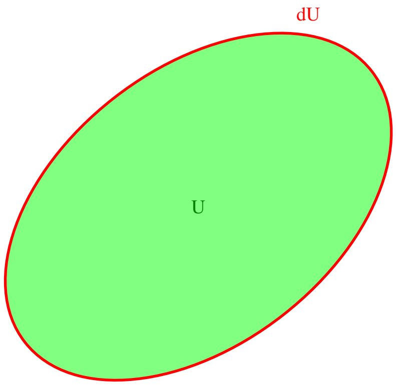
Remarque 301. Ce théorème, que nous ne démontrerons pas, présente en quelque sorte une réciproque au théorème de Schwarz sur les dérivées croisées. Le terme ouvert étoilé apparaissant dans l'énoncé n'a pas été défini : il s'agit d'un ouvert contenant un point tel que le segment reliant ce point à n'importe quel autre point de l'ouvert est inclus entièrement dans l'ouvert (je vous laisse faire une figure si ça vous amuse).

Exemple : Le champ de vecteurs défini par $P(x,y) = 2xy$ et $Q(x,y) = x^2 + y^2$ dérive d'un potentiel scalaire puisque $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2x$. Est-on capable de déterminer le potentiel V correspondant ? Oui, il suffit de partir de la condition $\dfrac{\partial V}{\partial x} = P(x,y)$ et d'intégrer par rapport à x pour obtenir $V(x,y) = x^2y + k(y)$, où k est une fonction a priori quelconque, et de dériver cette éaglité pour l'identifier à $Q(x,y)$: $Q(x,y) = \dfrac{\partial V}{\partial y}(x,y) = x^2 + k'(y)$, donc $k'(y) = y^2$. Autrement dit, on peut choisir $V(x,y) = x^2y + \dfrac{1}{3}y^3$ (le potentiel scalaire est défini à une constante près).

Définition 315. Soit Γ une courbe plane paramétrée sur le segment $[a,b]$ par $t \mapsto (x(t), y(t))$ et (P,Q) un champ de vecteur, la **circulation du champ le long de la courbe** Γ est l'intégrale $\displaystyle\int_a^b P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)\, dt$. On note de façon un peu abrégée cette intégrale sous la forme $\displaystyle\oint_\Gamma P\, dx + Q\, dy$.

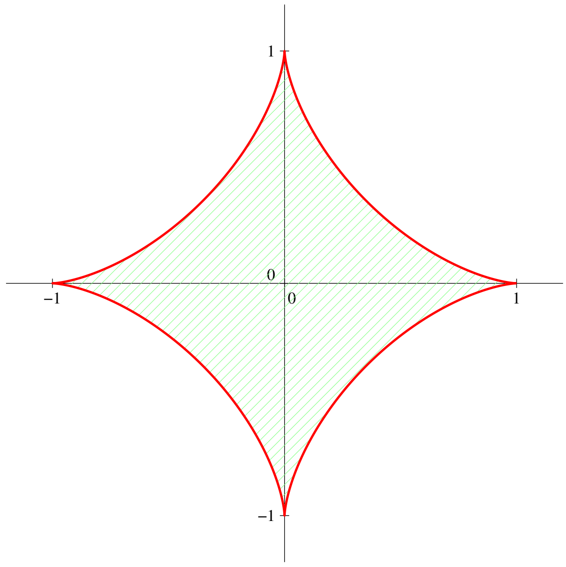
Remarque 302. Cette notion s'interprète bien si on pense en termes physiques. Si le champ de vecteurs dérive d'un potentiel et correspond à une force exercée sur un mobile se balladant sur la courbe Γ, la circulation correspond au travail fourni par la force lors du déplacement.

Théorème 112. Formule de Green-Riemann.
Soit (P,Q) un champ de vecteur de classe $\mathcal{C}^1$ défini sur un ouvert U, dont le bord est une courbe Γ paramétrée par $t \mapsto (x(t),y(t))$, alors $\displaystyle\iint_U \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\ dx\ dy = \int_a^b P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)\ dt$. Autrement dit, $\displaystyle\iint_U \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \oint_{\partial U} P\ dx + Q\ dy$, en notant ∂U la frontière de l'ouvert U.



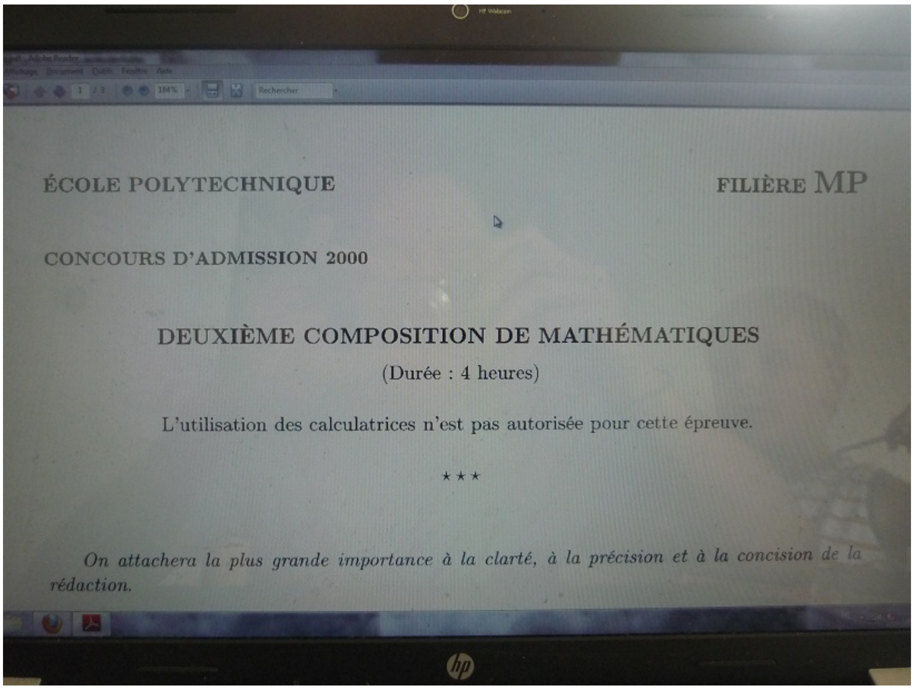
Application : calcul d'aires. On a vu plus haut qu'on pouvait calculer l'aire de l'ouvert U à l'aide d'une intégrale double sur U de la fonction constante égale à 1. La formule de Green-Riemann permet de ramener ce calcul à une intégrale simple, il suffit pour cela de déterminer un champ de vecteurs pour lequel $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 1$. Pour cela, les solutions les plus simples sont $(P,Q) = (x,0)$ et $(P,Q) = (0,-y)$, qui mènent aux formules suivantes : avec les mêmes notations pour le bord que dans le théorème de Green-Riemann, l'aire de l'ouvert U peut être calculée des deux façons suivantes : $\displaystyle\int_a^b x(t)y'(t)\ dt$ ou $\displaystyle -\int_a^b x'(t)y(t)\ dt$. On peut également combiner les deux (cela donne souvent des formules plus simples) et calculer l'aire par la formule $\displaystyle\frac{1}{2}\int_a^b x'(t)y(t) - x(t)y'(t)\ dt$.

Exemple : Calculons l'aire $\mathcal{A}$ intérieure à l'astroïde d'équation paramétrique $(\cos^3(t), \sin^3(t))$. On calcule aisément $x'(t) = -3\cos^2(t)\sin(t)$ et $y'(t) = 3\sin^2(t)\cos(t)$, donc $\displaystyle\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos^3(t) \times 3\sin^2(t)\cos(t) + 3\cos^2(t)\sin(t) \times \sin^3(t)\ dt = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2(t)\cos^2(t)(\cos^2(t)+\sin^2(t))\ dt$ $\displaystyle= \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2(t)\cos^2(t)\ dt$. Utilisons ensuite un peu de trigonométrie : comme $\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$, $\cos^2(t) = \dfrac{\cos(2t)+1}{2}$, et $\sin^2(t) = 1 - \cos^2(t) = \dfrac{1-\cos(2t)}{2}$. On en déduit que $\displaystyle\mathcal{A} = \frac{3}{8}\int_0^{2\pi} 1 - \cos^2(2t)\ dt = \frac{3}{8}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(4t)}{2}\ dt = \frac{3}{16}\left[t - \frac{1}{4}\sin(4t)\right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{8}$.


1
0
−1
0
1
−1

Deuxième partie

Exercices



Ah, voilà une bonne source d'inspiration pour ma prochaine feuille d'exercices !

Et comme Roupoil ne peut quand même pas s'empêcher de faire son kéké au moins une fois dans ce bilan, je signale que cette épreuve ne devait pas être si difficile puisque lorsque j'ai passé le concours, on m'a mis 19,5 sur ce sujet alors que j'ai fait n'importe quoi sur toute une partie.

TD n°1 : Fonctions

PTSI B Lycée Eiffel

7 septembre 2012

Exercice 1

Étudier le plus complètement possible les fonctions suivantes :

- $f(x) = x\ln(x+1)$
- $g(x) = \dfrac{x^2-3}{x+2}$
- $h(x) = \cos(2x) - 2\cos(x)$

Exercice 2

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit sur $[1;+\infty[$ la fonction f_n par $f_n(x) = \sqrt{x+1}e^{-nx}$, et on note $\mathcal{C}_n$ sa courbe représentative.

1. Étudier la fonction f_1, et dresser son tableau de variations.
2. Calculer la dérivée f_n' de la fonction f_n. En déduire que la fonction f_n admet un maximum global sur son domaine de définition, dont on donnera la valeur. Quelles sont les limites de l'abscisse et de la valeur du maximum lorsque n tend vers $+\infty$?
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to -1} f_n'(x)$. Que peut-on en déduire sur la courbe $\mathcal{C}_n$?
4. Montrer que toutes les courbes $\mathcal{C}_n$ admettent deux points communs que l'on précisera, ainsi qu'une asymptote horizontale commune.
5. Calculer l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_n$ en son point d'abscisse 0.
6. Déterminer la position relative de $\mathcal{C}_n$ et de $\mathcal{C}_{n+1}$.
7. Tracer dans un même repère une allure des courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$.

Exercice 3

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x+1-(2x+1)\ln x$ et $g(x) = \dfrac{\ln x}{x^2+x}$.

1. Étudier le plus complètement possible la fonction f. On notera α l'unique réel vérifiant $f(x) = 0$. Donner une valeur approchée de α.
2. Déterminer les variations de g et calculer $g(\alpha)$ en fonction de α.
3. Déterminer les limites de g et tracer sa courbe représentative, ainsi que sa tangente au point de la courbe d'abscisse 1.
4. On note, pour tout réel $\lambda \geqslant 1$, $I(\lambda) = \displaystyle\int_1^\lambda g(x)\,dx$. Montrer que $I(\lambda) \leqslant \displaystyle\int_1^\lambda \frac{\ln x}{x^2}\,dx$.
5. Calculer cette dernière intégrale et en déduire une majoration de $I(\lambda)$.

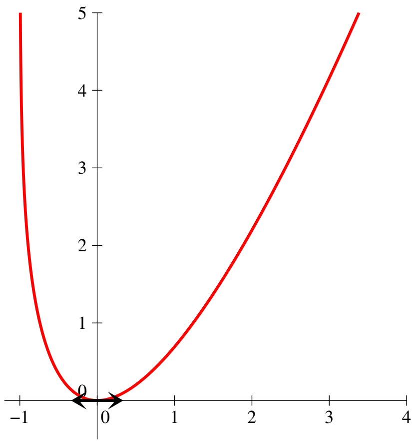
Corrigé du TD n°1

Exercice 1

- La fonction f est définie, continue et dérivable sur l'intervalle $]-1;+\infty[$. Elle a pour limite $+\infty$ en -1 (produit d'un terme tendant vers -1 par un terme tendant vers $-\infty$) et $+\infty$ en $+\infty$ (pas de forme indéterminée). De plus, sa dérivée est donnée par $f'(x) = \ln(x+1) + \dfrac{x}{x+1}$. Étudier le signe d'une somme de ce genre n'est a priori pas du tout évident, mais on est ici sauvés par une intéressante coïncidence : le terme $\ln(x+1)$ change de signe pour $x = 0$ (c'est négatif avant, positif après) et $\dfrac{x}{x+1}$ également. Du coup, quand $x < 0$, on a une somme de deux termes négatifs, et la dérivée est donc négative sur $]-1;0]$. Par contre, tout est positif si $x > 0$, et la dérivée est donc positive sur $[0;+\infty[$. Comme $f(0) = 0$, on peut dresser le tableau de variations suivant :

x	-1	0	$+\infty$
f	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

  Ne reste plus qu'à tracer une jolie courbe :

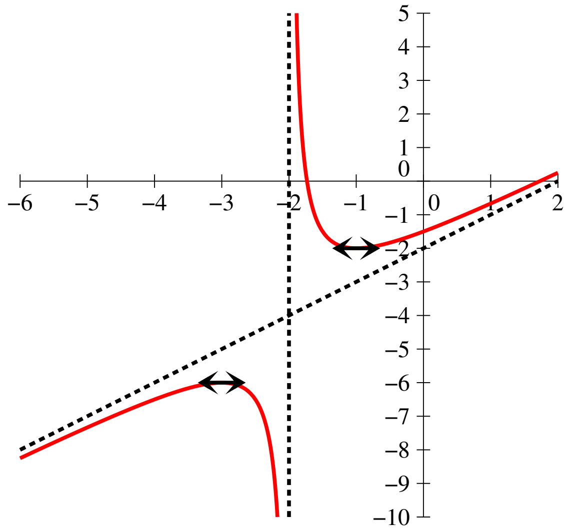


- La fonction g est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$. Comme le numérateur tend vers 1 en -2, on obtient sans difficulté $\lim\limits_{x\to-2^-} g(x) = -\infty$, et $\lim\limits_{x\to-2^+} g(x) = +\infty$, d'où la présence d'une asymptote verticale. Du côté des infinis, on peut faire un calcul commun, en utilisant la règle du quotient des termes de plus haut degré : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x} = +\infty$ (et symétriquement en $-\infty$). Les plus courageux réussiront à diagnostiquer la présence d'une asymptote oblique : $\dfrac{x^2-3}{x+2} = \dfrac{x^2-4+1}{x+2} = \dfrac{(x-2)(x+2)+1}{x+2} = x-2+\dfrac{1}{x+2}$. Le terme $\dfrac{1}{x+2}$ ayant une limite nulle en $+\infty$ et en $-\infty$, on peut conclure à la présence d'une asymptote oblique d'équation $y = x-2$ des deux côtés.
  La fonction est évidemment dérivable sur son domaine de définition, de dérivée $g'(x) = \dfrac{2x(x+2)-(x^2-3)}{(x+2)^2} = \dfrac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}$. Elle est du signe de x^2+4x+3, trinôme dont le discriminant vaut $\Delta = 16-12 = 4$, et qui admet donc deux racines $x_1 = \dfrac{-4+2}{2} = -1$, et $x_2 = \dfrac{-4-2}{2} = -3$. Pour compléter le tableau de variations, on calcule les valeurs de $f(-3) = -6$ et $f(-1) = -2$. On peut aussi constater que $f(x) = 0$ pour $x = \pm\sqrt{3}$, et que

$f(0) = -\dfrac{3}{2}$ si on le souhaite.

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
g	$-\infty$	$\nearrow$	-6	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

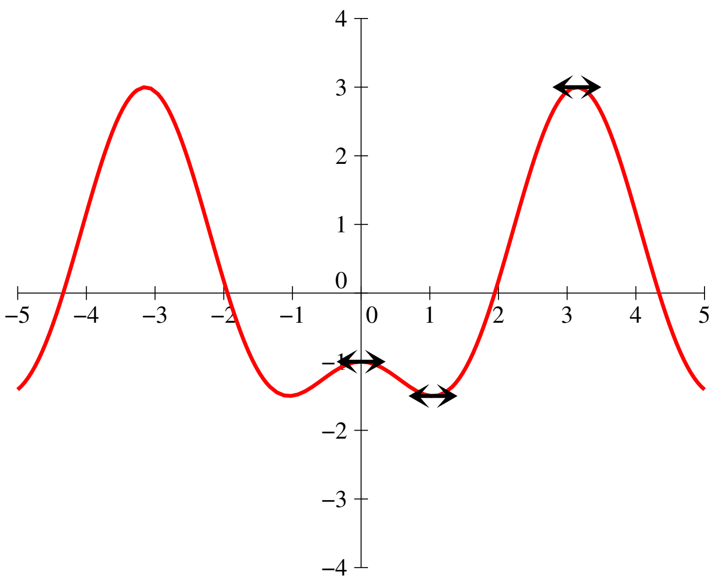
On indique bien évidemment les asymptotes sur la courbe :



- La fonction h est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Comme pour toute fonction trigonométrique, on cherche à voir si la fonction n'est pas périodique. Elle l'est, de période 2π, puisque $h(x+2\pi) = \cos(2x+4\pi) - 2\cos(x+2\pi) = \cos(2x) - 2\cos(x)$. Elle est de plus paire, puisque la fonction cos est elle-même paire. On peut donc se contenter d'étudier h sur l'intervalle $[0;\pi]$, et de compléter la courbe ensuite. Sa dérivée est donnée par $h'(x) = -2\sin(2x) + 2\sin(x) = 2(\sin(x) - 2\sin(x)\cos(x)) = 2\sin(x)(1 - 2\cos(x))$. Sur $[0;\pi]$, le sinus est toujours positif, reste à déterminer le signe de $1 - 2\cos(x)$. Cette expression est positive lorsque $\cos(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$, ce qui, sur l'intervalle $[0\pi]$, se produit sur $\left[\dfrac{\pi}{3};\pi\right]$. La dérivée change donc de signe en $\dfrac{\pi}{3}$, qui est un minimum local de la fonction de valeur $h\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) - 2\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2} - 1 = -\dfrac{3}{2}$. On peut également calculer $f(0) = 0$ et $f(\pi) = 1 - (-2) = 3$ pour compléter le tableau de variations de h :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
h	0	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	3

En complétant par symétrie par rapport à (Oy) (il y a donc un maximum local en 0), et pas invariance par translation de vecteur $2\pi\overrightarrow{i}$, on obtient une courbe ressemblant à ceci :



Exercice 2

1. Au vu de l'énoncé, $f_1(x) = \sqrt{x+1}e^{-x}$, la fonction est dérivable sur $]-1;+\infty[$, de dérivée $f_1'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}e^{-x} - \sqrt{x+1}e^{-x} = \dfrac{1-2(x+1)}{2\sqrt{x+1}}e^{-x} = \dfrac{-1-2x}{2\sqrt{x+1}}e^{-x}$. Cette dérivée est du signe de $-2x-1$, et s'annule donc pour $x = -\dfrac{1}{2}$, valeur pour laquelle la fonction admet un maximum égal à $\sqrt{\dfrac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\dfrac{e}{2}}$. Par ailleurs, $f_1(-1) = 0$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = 0$ (il y a une forme indéterminée, mais l'exponentielle l'emporte sur la racine carrée). D'où le tableau de variations suivant :

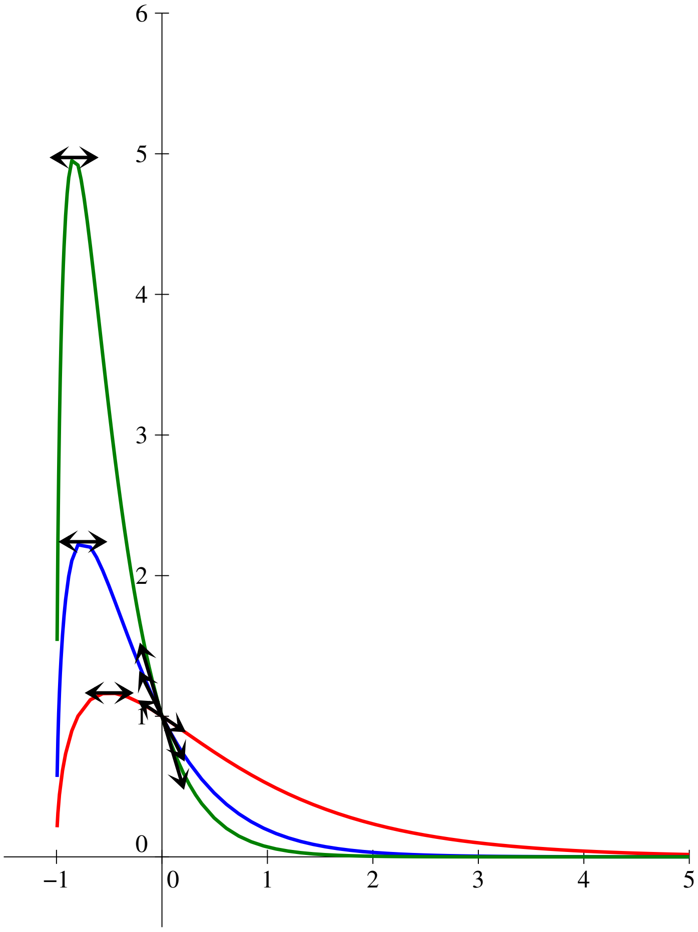
x	-1	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
f_1	0 ↗	$\sqrt{\frac{e}{2}}$	↘ 0

2. C'est le même calcul que ci-dessus : $f_n'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}e^{-nx} - n\sqrt{n+1}e^{-nx} = \dfrac{1-2n(x+1)}{2\sqrt{n+1}}e^{-nx}$. Cette dérivée est du signe de $1-2n(x+1)$, équation de droite s'annulant quand $x+1 = \dfrac{1}{2n}$, soit $x = \dfrac{1}{2n} - 1$. La fonction y admet bien un maximum (la dérivée est positive avant et négative après), de valeur $f_n\left(\dfrac{1}{2n} - 1\right) = \sqrt{\dfrac{1}{2n}}e^{-\frac{1}{2}+n} = \dfrac{e^n}{\sqrt{2ne}}$. Lorsque n tend vers $+\infty$, $\dfrac{1}{2n} - 1$ a pour limite -1, et la valeur du maximum tend vers $+\infty$ (encore une fois, l'exponentielle l'emporte). Autrement dit, le maximum se situe de plus en plus près de -1, et de plus en plus haut.

3. En -1, le numérateur de la dérivée a pour limite e^n, et le dénominateur tend vers 0, donc $\lim\limits_{x\to-1} f_n'(x) = +\infty$. Les courbes $\mathcal{C}_n$ auront toutes une tangente verticale en -1.

4. Toutes les courbes passent bien sûr par le point $(-1;0)$, mais aussi par le point $(0;1)$. De plus, par croissance comparée, toutes les fonctions ont une limite nulle en $+\infty$, donc toutes les courbes admettent l'axe des abscisses pour asymptote horizontale.

5. On a déjà vu à la question précédente qu'on a toujours $f_n(0) = 1$. De plus, $f_n'(0) = \frac{1-2n}{2} = \frac{1}{2} - n$. La tangente en 0 a donc pour équation $y = \left(\frac{1}{2} - n\right) x + 1$ (la pente de la tangente est de plus en plus négative).
6. $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \sqrt{n+1}e^{-(n+1)x} - \sqrt{x+1}e^{-nx} = \sqrt{x+1}e^{-nx}(e^{-x} - 1)$. Cette différence est du signe de $e^{-x} - 1$, qui s'annule en 0, est positive entre -1 et 0 et négative ensuite. La courbe $\mathcal{C}_{n+1}$ est donc au-dessus de $\mathcal{C}_n$ sur $[-1; 0]$ et en-dessous sur $[0; +\infty[$.
7. Voici les courbes, $\mathcal{C}_\infty$ en rouge, $\mathcal{C}_2$ en bleu et $\mathcal{C}_3$ en vert, ainsi que les tangentes en 0 :



Exercice 3

1. Commençons par rappeler que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^*$ et calculons les limites aux bornes de ce domaine de définition. On a $\lim\limits_{x \to 0^+} (2x+1)\ln(x) = -\infty$ (pas de forme indéterminée ici) donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$. En $+\infty$, on peut factoriser par x : $f(x) = x\left(1 + \frac{1}{x} - 2\ln(x) - \frac{\ln(x)}{x}\right)$. La parenthèse a pour limite $-\infty$ (le seul terme ayant une limite infinie est $-2\ln(x)$, rappelons que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$), donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

   Passons à l'étude des variations : $f'(x) = 1 - 2\ln(x) - 2 - \frac{1}{x} = -1 - 2\ln(x) - \frac{1}{x}$, dont le signe n'a rien d'évident. Dérivons donc une deuxième fois : $f''(x) = -\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{1-2x}{x^2}$. On obtient alors le tableau suivant :

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$\nearrow$	$2\ln 2 - 3 < 0$	$\searrow$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\searrow$	$-\infty$

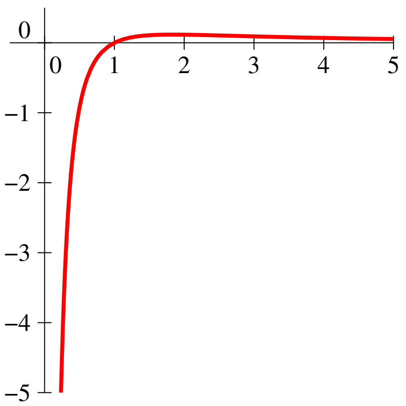
La fonction étant strictement décroissante et prenant des valeurs des deux signes, elle s'annule exactement une fois. Pour obtenir une valeur approchée (grossière) de α, calculons quelques valeurs : $f(1) = 2$; $f(2) = 3 - 5\ln 2 \simeq -0.5$, donc α est légèrement inférieur à 2. Si on tient à obtenir une meilleure approximation, on peut procéder par dichotomie (ou plus simplement par balayage) en s'aidant d'une calculatrice.

2. Calculons donc la dérivée de g : $g'(x) = \dfrac{x + 1 + (2x+1)\ln(x)}{(x^2+x)^2} = \dfrac{f(x)}{(x^2+1)^2}$. De plus, on a $g(\alpha) = \dfrac{\ln(\alpha)}{\alpha^2+\alpha} = \dfrac{\alpha+1}{(2\alpha+1)(\alpha^2+\alpha)} = \dfrac{1}{\alpha(2\alpha+1)}$ puisque, α étant la valeur d'annulation de f, on a $\ln(\alpha) = \dfrac{\alpha+1}{2\alpha+1}$. Remarquons qu'en prenant $\alpha \simeq 2$, on obtient $g(\alpha) \simeq \dfrac{1}{10}$. Le tableau de variations de g est donc

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{\alpha(2\alpha+1)}$	$\searrow$	0

(les limites seront calculées à la question suivante).

3. Sans difficulté, $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$ et comme pour $x \geqslant 1$, $0 \geqslant g(x) \geqslant \dfrac{\ln(x)}{x}$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Quand à l'équation de la tangente au point d'abscisse 1, comme $g(1) = 0$ et $g'(1) = \dfrac{f(1)}{4} = \dfrac{1}{2}$, elle est $y = \dfrac{1}{2}(x-1) = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$. On obtient l'allure suivante pour la fonction :



4. C'est en fait tout simple, on a déjà remarqué que, si $x \geqslant 1$, $g(x) \leqslant \dfrac{\ln(x)}{x^2}$, donc $\displaystyle\int_1^\lambda g(x)\ dx \leqslant \int_1^\lambda \frac{\ln(x)}{x^2}\ dx$ (attention tout de même, il est important d'avoir $\lambda \geqslant 1$ pour que l'inégalité soit valable sur l'intervalle d'intégration).
5. On va effectuer une intégration par parties : en posant $u(x) = \ln(x)$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x^2}$, on a $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = -\dfrac{1}{x}$, donc $\displaystyle\int_1^\lambda \frac{\ln(x)}{x^2}\ dx = \left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]_1^\lambda + \int_1^\lambda \frac{1}{x^2}\ dx = -\frac{\ln(\lambda)}{\lambda} + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\lambda = \frac{-\ln(\lambda)}{\lambda} + 1 - \frac{1}{\lambda} \leqslant 1$. L'aire sous la courbe à droite de l'abscisse 1 est donc plus petite que 1.

Feuille d'exercices n°1 : Fonctions usuelles

PTSI B Lycée Eiffel

11 septembre 2012

Quantificateurs

Exercice 1 (* à **)

Parmi les propositions suivantes, déterminer lesquelles sont vraies et lesquelles sont fausses. On essaiera de justifier les affirmations vraies, et de donner des contre-exemples aux affirmations fausses :

- $\forall x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 2$
- $\exists x \in \mathbb{N},\ 2 < x < 4$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant x$
- $\forall x > 0,\ \exists y > 0,\ y < x$
- $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists p \in \mathbb{N},\ p = 2n$
- $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists p \in \mathbb{N},\ n = 2p$
- $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists p \in \mathbb{N},\ n(n+1) = 2p$
- $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x < y^2$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y > 0,\ y = \ln(x)$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \neq x,\ \exists z \in \mathbb{Q},\ x < z < y$

Exercice 2 (*)

Donner la négation (sous forme quantifiée) de chacun des énoncés de l'exercice 1.

Logarithmes et exponentielles

Exercice 3 (*)

Déterminer, parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont paires ou impaires :

- $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^3+3x}$
- $g(x) = \ln(\sqrt{1+x^2})$
- $h(x) = e^{-2x^3+x-1}$
- $i(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

Exercice 4 (* à ***)

Résoudre les équations et inéquations suivantes (dans $\mathbb{R}$) :

1. $x - 1 \leqslant \sqrt{x+2}$
2. $\ln(x+2) + \ln(x-3) = 2\ln(2)$
3. $e^{2x} - 4e^x + 3 < 0$
4. $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$
5. $\ln\left(\dfrac{x^2-x+1}{x-2}\right) \geqslant 0$

6. $5^x - 5^{x+1} + 2^{3x-1} = 0$
7. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$
8. $x^{\frac{1}{4}} + 2x^{\frac{5}{3}} - 3 = 0$
9. $2^{x+1} + 4^x \geqslant 15$

Exercice 5 (** à ***)

Étudier le plus complètement possible les fonctions suivantes (on cherchera notamment à tracer une courbe représentative soignée) :

- $f(x) = \ln(1 + x + x^2)$
- $g(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$
- $h(x) = \dfrac{e^{2x}}{x^2-1}$
- $i(x) = x^{\frac{1}{x}}$
- $j(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{2a-x}}$, a étant une constante positive fixée.

Trigonométrie

Exercice 6 (*)

À l'aide des formules d'addition et de duplication, déterminer les valeurs des lignes trigonométriques des angles $\dfrac{\pi}{12}$ et $\dfrac{\pi}{24}$.

Exercice 7 (** à ***)

Résoudre les équations suivantes :

1. $\tan(2x) = 1$
2. $\sin\left(x + \dfrac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{x}{4}\right)$
3. $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)\cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$
4. $\sin(3x)\cos^3(x) + \sin^3(x)\cos(3x) = \dfrac{3}{4}$
5. $\arcsin(x) = \arccos(2x)$

Exercice 8 (**)

Exprimer, pour un réel x pour lequel cela a un sens, $\tan(4x)$ en fonction de $\tan(x)$. En déduire que $\dfrac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\dfrac{1}{5}\right) - \arctan\left(\dfrac{1}{239}\right)$ (cette formule, connue sous le nom de formule de Machin, permit au mathématicien du même nom de déterminer les 100 premières décimales du nombre π au début du 18ème siècle).

Montrer par le même type de méthode que $\dfrac{\pi}{4} = \arctan\left(\dfrac{1}{2}\right) + \arctan\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

Exercice 9 (**)

Simplifier les expressions suivantes :

- $\arccos\left(\cos\left(\dfrac{507\pi}{3}\right)\right)$

- $\cos(\arcsin(x))$
- $\cos^2\left(\frac{1}{2}\arctan(x)\right)$
- $\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$

Exercice 10 (***)

Étudier et tracer les courbes des fonctions suivantes :
- $f(x) = \sin(x) + \sin(2x)$
- $g(x) = \arccos(\cos(3x))$
- $h(x) = \cos^3(x) + \sin^3(x)$
- $i(x) = \arccos\left(\frac{\sqrt{x}}{1+x}\right)$

Exercice 11 (**)

1. À l'aide de considérations géométriques, montrer que, $\forall h \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$, $\sin(h) \leqslant h \leqslant \tan(h)$.
2. En déduire que, sous les mêmes hypothèses, $h\cos(h) \leqslant \sin(h) \leqslant h$, puis calculer $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h}$.
3. En déduire les limites quand h tend vers 0 de $\frac{\sin^2(h)}{h}$, puis de $\frac{1-\cos(h)}{h}$.
4. Retrouver à partir de ce dernier résultat la formule donnant la dérivée de la fonction cos.
5. Démontrer de même que la dérivée de la fonction sin est la fonction cos.

Fonctions hyperboliques

Exercice 12 (* à **)

Résoudre les équations suivantes :
- $4\cosh(x) + 3\sinh(x) - 4 = 0$
- $2\arctan(\mathrm{th}(x)) = \arctan(\sinh(2x))$ (on pourra passer par un calcul de dérivée)

Exercice 13 (*)

Démontrer les formules suivantes (analogues pour les fonctions hyperboliques des formules de trigo que vous connaissez bien) :
- $\sinh(x+y) = \sinh(x)\ \cosh(y) + \cosh(x)\ \sinh(y)$
- $\sinh(x-y) = \sinh(x)\ \cosh(y) - \cosh(x)\ \sinh(y)$
- $\cosh(x+y) = \cosh(x)\ \cosh(y) + \sinh(x)\ \sinh(y)$
- $\cosh(x-y) = \cosh(x)\ \cosh(y) - \sinh(x)\ \sinh(y)$
- $\tanh(x+y) = \frac{\tanh(x) + \tanh(y)}{1 + \tanh(x)\ \tanh(y)}$
- $\tanh(x-y) = \frac{\tanh(x) - \tanh(y)}{1 - \tanh(x)\ \tanh(y)}$
- $\sinh(2x) = 2\sinh(x)\ \cosh(x)$
- $\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x)$
- $\tanh(2x) = \frac{2\tanh(x)}{1+\tanh^2(x)}$

Exercice 14 (***)

En posant $t = \text{Argch}(x)$ et en calculant e^t en fonction de x, exprimer la fonction Argch à l'aide de la fonction ln. Exprimer de même les fonction Argsh et Argth.

Corrigé de la feuille d'exercices n°1

Quantificateurs

Exercice 1 (* à **)

- Cette première proposition est évidemment fausse, un des nombreux contre-exemples est donné par $x = -45$.
- C'est vrai, il en existe même un seul, $x = 3$.
- C'est faux, les nombres strictement compris entre 0 et 1 ne vérifient pas cette inégalité.
- C'est vrai, on peut toujours prendre $y = \frac{x}{2}$ par exemple. Si on restreint la proposition aux nombres rationnels, elle reste vrai (bien qu'il y ait des « trous » dans l'ensemble des rationnels) ; avec les nombres entiers, ça ne fonctionne plus, 1 étant le plus petit entier strictement positif.
- C'est vrai, quand on multiplie un nombre entier par 2, on tombe toujours sur un nombre entier.
- C'est faux, il faut que n soit un entier pair pour que ça fonctionne (c'est même une caractérisation des entiers pairs).
- C'est vrai, le produit de deux entiers consécutifs est toujours un entier pair. En effet, soit n est pair, soit n est impair et $n + 1$ sera pair. Dans les deux cas, $n(n + 1)$ sera le produit d'un entier pair par un autre entier, c'est toujours un nombre pair.
- C'est vrai, il suffit de prendre une valeur de x strictement négative.
- C'est faux, l'énoncé n'a aucun sens quand $x > 0$. Il faudrait inverser le rôle de x et y pour que ça devienne vrai.
- Comme c'est écrit, c'est faux, puisque je n'ai pas précisé que $y > x$, ce qui pose problème dans l'encadrement final. Toutefois, en remplaçant $\forall y \neq x$ par $\forall y > x$, l'énoncé est vrai mais pas évident à prouver. Il existe nécessairement un entier n pour lequel $\frac{1}{n} < y - x$, puisque $\frac{1}{n}$ tend vers 0 et $y - x > 0$. Notons alors p le plus grand entier naturel (dans le cas où x et y sont positifs) pour lequel $\frac{k}{n} \leqslant x$. Un tel entier existe cette fois-ci car $\frac{k}{n}$ tend vers $+\infty$ quand k tend vers $+\infty$. Par définition de k, $\frac{k+1}{n} > x$, mais on ne peut pas avoir $\frac{k+1}{n} > y$, sinon les inégalités $\frac{k}{n} < x < y < \frac{k+1}{n}$ impliqueraient $\frac{1}{n} > y - x$. Le nombre rationnel $\frac{k+1}{n}$ est donc strictement compris entre x et y.

Exercice 2 (*)

C'est extrêmement mécanique et peu palpitant :

- $\exists x \in \mathbb{R},\ x < 2$
- $\forall x \in \mathbb{N},\ x \in]-\infty; 2] \cup [4; +\infty[$
- $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < x$
- $\exists x > 0,\ \forall y > 0,\ x \leqslant y$
- $\exists n \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N},\ p \neq 2n$
- $\exists n \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N},\ n \neq 2p$
- $\exists n \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N},\ n(n+1) \neq 2p$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y^2 \leqslant x$
- $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y > 0,\ y \neq \ln(x)$
- $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \neq x,\ \forall z \in \mathbb{Q},\ z \leqslant x$ ou $z \geqslant y$

Logarithmes et exponentielles

Exercice 3 (*)

- La fonction f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-\sqrt{3};0;\sqrt{3}\}$ et impaire, son numérateur étant pair et son dénominateur impair.
- La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ et paire.
- La fonction h n'est ni paire ni impaire. Par exemple, $h(1) = e^{-2}$ et $h(-1) = e^0 = 1$. Même si l'expression contenue dans l'exeponentielle avait été celle d'une fonction impaire (par exemple en enlevant le -1), la fonction ne serait ni paire ni impaire.
- La fonction i est définie sur $]-1;1[$ et impaire : $i(-x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = -\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -i(x)$, en utilisant la relation $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$.

Exercice 4 (* à ***)

1. Commençons par constater que l'inéquation ne peut avoir de sens que si $x \geqslant -2$. Lorsque $x \in [-2;1]$, l'inéquation sera certainement vérifiée puisque le membre de gauche est alors négatif, et le membre de droite positif. Reste le cas $x > 1$, où on peut se permettre de tout élever au carré puisque les deux membres de l'inégalité sont alors positifs : on obtient $x^2-2x+1 \leqslant x+2$, soit $x^2 - 3x - 1 \leqslant 0$. Ce trinome a pour discriminant $\Delta = 9 + 4 = 13$, et s'annule donc en deux valeurs $x_1 = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$ et $x_2 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$. Le trinome est négatif entre ses racines, donc sur l'intervalle $[x_1;x_2]$. Comme $x_1 < 1$ et $x_2 > 1$, on en déduit concernant notre inéquation initiale que $\mathcal{S} = \left[-2;\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right]$.
2. L'équation n'a de sens que si $x+2$ et $x-3$ sont tous les deux strictement positifs, donc lorsque $x > 3$. On peut alors regrouper les termes du membre de gauche pour obtenir $\ln((x+2)(x-3)) = \ln(2^2)$, d'où en prenant l'exponentielle des deux côtés $x^2 - x - 6 = 4$, soit $x^2 - x - 10 = 0$. Ce trinome a pour discriminant $\Delta = 1 + 40 = 41$ (mais pourquoi est-ce que je vous ai mis des valeurs à la noix pour chaque inéquation, moi ?). Il y a donc deux solutions, $x_1 = \frac{1-\sqrt{41}}{2}$ qui est très inférieure à 3, donc non valide, et $x_2 = \frac{1+\sqrt{41}}{2}$, qui convient parfaitement. Conclusion : $\mathcal{S} = \left\{\frac{1+\sqrt{41}}{2}\right\}$.
3. On doit avoir ici le réflexe du changement de variable $X = e^x$, qui transforme notre inéquation en $X^2-4X+3 < 0$, gentil trinome dont le discriminant vaut $\Delta = 16-12 = 4$ (enfin une valeur sympa), et admet donc deux racines $X_1 = \frac{4-2}{2} = 1$ et $X_2 = \frac{4+2}{2} = 3$. Notre inéquation est donc vérifiée lorsque $1 < e^x < 3$, soit pour $0 < x < \ln(3)$. Conclusion : $\mathcal{S} =]0;\ln(3)[$.
4. Pour résoudre une équation du troisième degré, il convient d'en trouver une racine « évidente » pour se ramener à ce qu'on sait faire. Ici, $x = 1$ est une telle racine puisque $1 - 2 - 5 + 6 = 0$. On peut donc factoriser $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ sous la forme $(x-1)(ax^2+bx+c) = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$. Par odentification des coefficients, on obtient $a = 1$; $b - a = -2$, soit $b = -1$; $c - b = -5$ soit $c = -6$. On a donc $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-1)(x^2-x-6)$. Il ne reste qu'à chercher quand le deuxième facteur s'annule. C'est un trinome de discriminant $\Delta = 1 + 24 = 25$, qui admet pour racines $x_1 = \frac{1+5}{2} = 3$ et $x_2 = \frac{1-5}{2} = -2$. Finalement, $\mathcal{S} = \{-2;1;3\}$.
5. Cette inéquation n'a de sens que si $\frac{x^2-x+1}{x-2} > 0$. Le numérateur de cette fraction a pour

discriminant $\Delta = 1 - 4 < 0$, il est toujours strictement positif. L'inéquation peut donc se résoudre lorsque $x > 2$. Dans ce cas, en passant à l'exponentielle, on doit avoir $\dfrac{x^2 - x + 1}{x - 2} \geqslant 1$, soit $\dfrac{x^2 - x + 1 - (x-2)}{x - 2} \geqslant 0$. Le dénominateur étant d'après l'étude précédente strictement positif, reste à déterminer le signe du numérateur $x^2 - 2x + 3$. Ce trinome a pour discriminant $\Delta = 4 - 12 < 0$. Le numérateur est donc strictement positif, et $\mathcal{S} =]2; +\infty[$.

6. Commençons par modifier un peu l'écriture de cette équation : $2^{3x-1} = 5^x(5-1) = 4 \times 5^x$, donc en prenant le ln de chaque côté (on peut, tout cela est toujours strictement positif), $(3x - 1)\ln(2) = \ln(4) + x\ln(5)$, soit $x(3\ln(2) - \ln(5)) = 3\ln(2)$. Finalement, $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{3\ln(2)}{3\ln(2) - \ln(5)}\right\}$.

7. Cette équation ne peut avoir de sens que si $x > 0$. si on passe alors au ln, on obtient $\sqrt{x}\ln(x) = x\ln(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{2}x\ln(x)$, soit $\sqrt{x}\ln(x)\left(1 - \dfrac{1}{2}\sqrt{x}\right) = 0$. Les valeurs annulant ce produit sont 0 (valeur interdite ici), 1 et 4, donc $\mathcal{S} = \{1; 4\}$.

8. On ne sait pas du tout résoudre ce genre d'équations, mais une petit astruce permet de s'en sortir : la fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{4}} + 2x^{\frac{5}{3}} - 3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, donc l'équation ne peut avoir au plus qu'une seule solution. Ca tombe bien, $x = 1$ est solution évidente, donc $\mathcal{S} = \{1\}$.

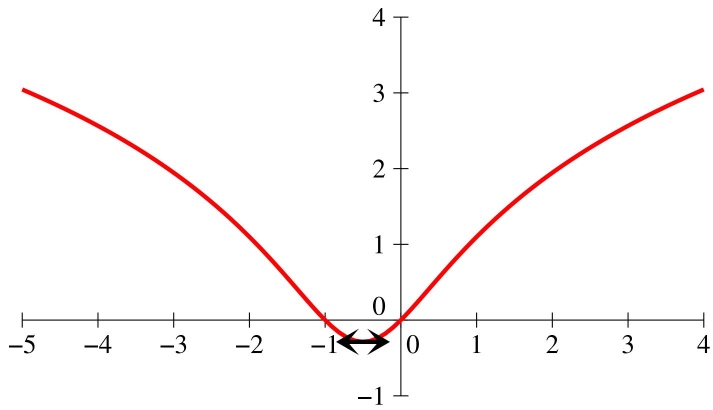
9. Écrivons tout cela sous la forme $2 \times 2^x + 2^{2x} - 15 \geqslant 0$. En posant $X = 2^x$, on se ramène à $X^2 + 2X - 15 \geqslant 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 4 + 60 = 64$, et admet donc deux racines $X_1 = \dfrac{-2+8}{2} = 3$ et $X_2 = \dfrac{-2-8}{2} = -5$. Les solutions de l'inéquation initiale vérifient donc $2^x \leqslant -5$ ou $3 \leqslant 2^x$. La première condition n'est jamais vérifiée puisque $2^x \geqslant 0$, celle de droite revient à dire que $x\ln(2) \geqslant \ln(3)$, soit $x \geqslant \dfrac{\ln(3)}{\ln(2)}$. Conclusion : $\mathcal{S} = \left[\dfrac{\ln(3)}{\ln(2)}; +\infty\right[$.

Exercice 5 (** à ***)

- La fonction f est définie lorsque $1 + x + x^2 > 0$. Ce trinome a pour discriminant $\Delta = 1 - 4 < 0$, il est toujours positif, donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = \dfrac{1 + 2x}{1 + x + x^2}$. Comme on vient de le voir, le dénominateur de ce quotient est positif, donc f' est du signe de $1 + 2x$, et f a notamment un minimum en $-\dfrac{1}{2}$, de valeur $\ln\left(1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}\right) = \ln\left(\dfrac{5}{4}\right)$. Enfin, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} 1 + x + x^2 = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$. D'où le tableau de variations suivant :

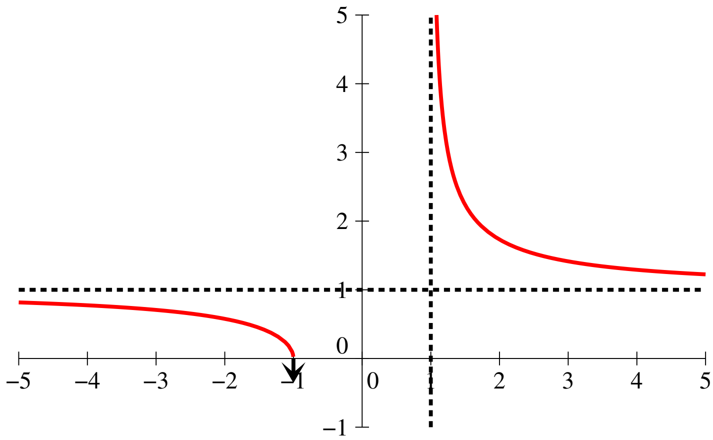
x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	$\ln(\frac{5}{4})$	$\nearrow$	$+\infty$

Pas d'asymptote oblique ici, comme ce sera souvent le cas avec des fonctions à base de ln.



- La fonction g est définie sur $]-\infty;-1]\cup]1;+\infty[$ (un petit tableau de signe vous convaincra si ça ne vous semble pas évident, faites par ailleurs attention au sens des crochets). Sur cet ensemble, ses variations sont les mêmes que $x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$ (puisque la fonction racine carrée est croissante), qui a pour dérivée $\dfrac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{-2}{(x-1)^2} < 0$ (bien sûr, on peut aussi calculer la dérivée de g directement, on aura simplement des termes supplémentaires qui sont toujours positifs). La fonction g est donc décroissante sur $]-\infty;-1]$ et sur $]1;+\infty[$. On peut également constater que g n'est pas dérivable en -1, et que $\lim\limits_{x\to-1} g'(x) = -\infty$, ce qui implique la présence d'une tangente verticale à la courbe en -1. Comme $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x+1}{x-1} = 1$ (quotient des termes de plus haut degré), on aura $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = 1$. En -1, pas de limite, g est définie et $g(-1) = 0$. Par contre en 1, $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x+1}{x-1} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to1^+} g(x) = +\infty$. Il y a donc une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ valable en $+\infty$ comme en $-\infty$, et une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

x	$-\infty$		-1	1		$+\infty$
g	1	$\searrow$	0	$+\infty$	$\searrow$	1

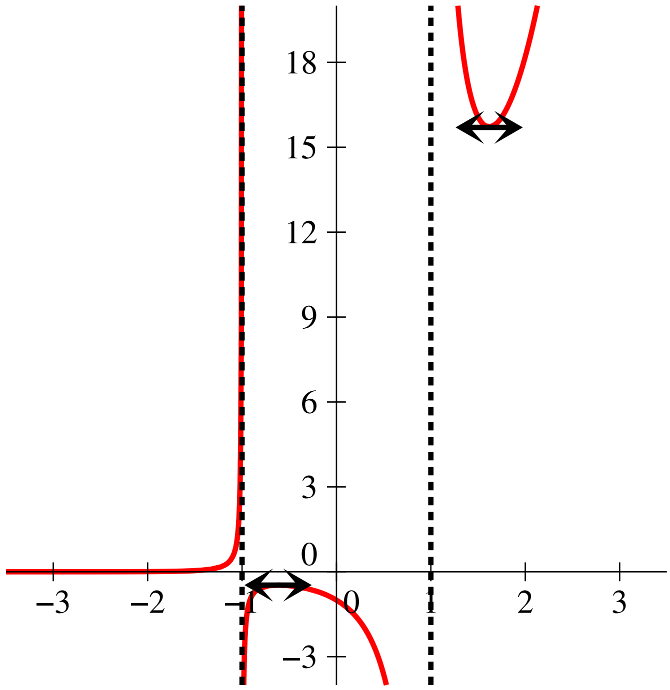


- La fonction h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$, de dérivée $h'(x) = \dfrac{2e^{2x}(x^2-1) - 2xe^{2x}}{(x^2-1)^2} = \dfrac{2e^{2x}(x^2-x-1)}{(x^2-x-1)^2}$. Cette dérivée est du signe de $x^2 - x - 1$, trinome dont le discriminant vaut $\Delta = 1 + 4 = 5$, qui s'annule en deux valeurs $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ (qui est compris entre -1 et 1) et

$x_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (qui est plus grand que 1). La fonction h admet donc un maximum en x_1 et un minimum en x_2, dont on ne cherchera exceptionnellement pas à expliciter les valeurs car ça ne se simplifie vraiment pas. Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$; et sans croissance comparée, $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 0$. La présence d'une asymptote oblique en $+\infty$ est peu probable ici. Comme par ailleurs e^{2x} est strictement positif, et $x^2 - 1$ est positif en-dehors de ses racines, on trouve $\lim\limits_{x\to-1^-} h(x) = \lim\limits_{x\to1^+} h(x) = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to-1^+} h(x) = \lim\limits_{x\to1^-} h(x) = -\infty$.

x	$-\infty$		-1		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		1		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
h	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$h(x_1)$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$h(x_2)$	$\nearrow$	$+\infty$

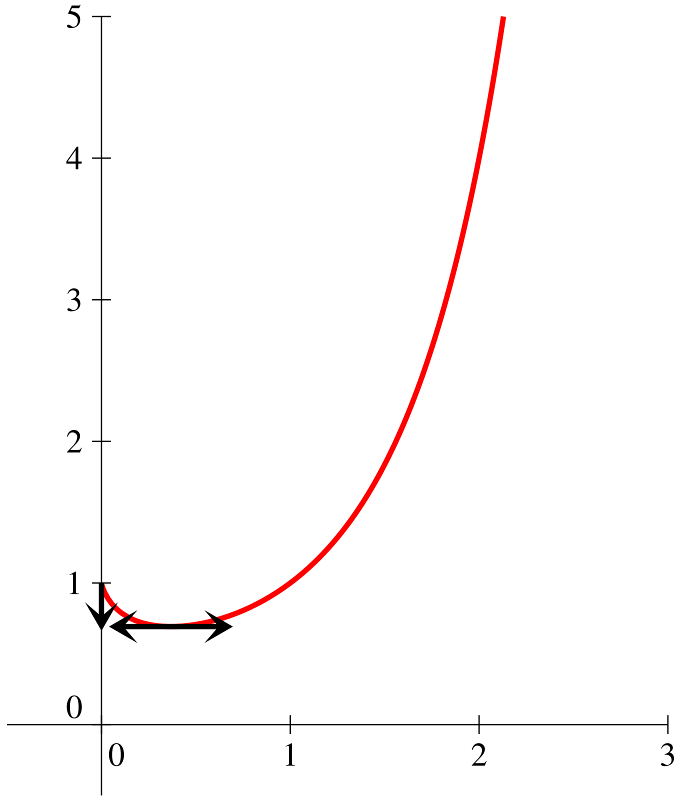
La courbe n'est ici pas très pratique à tracer sur une feuille, le minimum étant à une hauteur assez élevée.



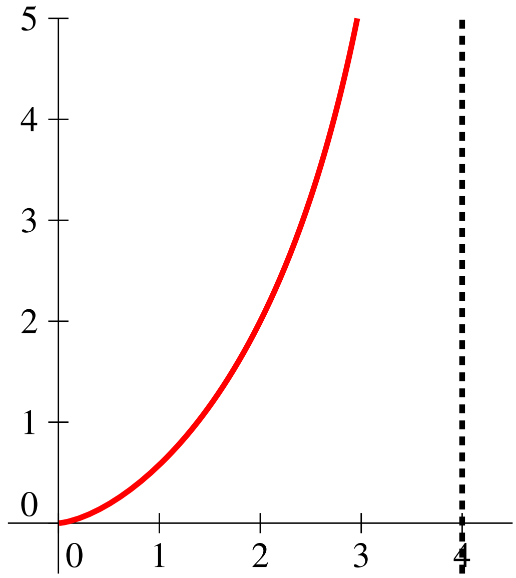
- Cette fonction ayant fait l'objet d'une étude détaillée dans le cours, je ne vais pas me répéter ici. Pour en avoir une autre, je vais par contre ajouter l'tude de la fonction k définie par $k(x) = x^x$. Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$, on peut la mettre sous la forme $k(x) = e^{x\ln(x)}$. Elle est dérivable, de dérivée $k'(x) = (\ln(x)+1)e^{x\ln(x)}$. Cette dérivée s'annule lorsque $\ln(x) = -1$, soit $x = \dfrac{1}{e}$, où elle admet un minimum de valeur $\dfrac{1}{e^{\frac{1}{e}}}$. De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = +\infty$, et en utilisant la croissance comparée $\lim\limits_{x\to0} x\ln(x) = 0$, donc $\lim\limits_{x\to0} k(x) = 1$. D'où le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
k	1	$\searrow$	$\frac{1}{e^{\frac{1}{e}}}$	$\nearrow$	$+\infty$

On peut ici constater assez facilement que $\lim\limits_{x\to0} k'(x)) = -\infty$ en reprenant le calcul de la limite de k en 0. Il y a donc une tangente verticale à la courbe en 0.



- La fonction j est définie si $\dfrac{x^3}{2a-x} \geqslant 0$, soit lorsque $x \in [0; 2a[$. La fonction vérifie évidemment $j(0) = 0$, et $\lim\limits_{x \to 2a} j(x) = +\infty$. La fonction racine carrée étant croissante, j a les mêmes variations que $x \mapsto \dfrac{x^3}{2a-x}$, qui a pour dérivée $\dfrac{3x^2(2a-x)+x^3}{(2a-x)^2} = \dfrac{6ax^2-2x^3}{(2a-x)^2} = \dfrac{2x^2(3a-x)}{(2a-x)^2}$, toujours positive sur $[0; 2a]$. La fonction j est donc strictement croissante, et on n'a pas grand chose de plus à dire sur cette fonction ! Un exemple de courbe lorsque $a = 2$:



Trigonométrie

Exercice 6 (*)

En constatant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, on peut simplement appliquer les formules d'addition pour obtenir $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. On obtient de même $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, puis en effectuant le quotient $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$.

Pour $\frac{\pi}{24}$, pas vraiment d'autre choix que de passer par les formules de duplication : $2 \times \frac{\pi}{24} = \frac{\pi}{12}$, donc $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{24}\right) - 1$. On en déduit que $\cos\left(\frac{\pi}{24}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + 1\right)} = \sqrt{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+4}{8}}$. En exploitant ensuite la relation $\cos^2 + \sin^2 = 1$, on trouve $\sin\left(\frac{\pi}{24}\right) = \sqrt{\frac{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}}$, puis enfin $\tan\left(\frac{\pi}{24}\right) = \sqrt{\frac{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}}$, ce qu'on peut essayer de simplifier si on a du temps à perdre (mais on n'obtient rien de très simple).

Exercice 7 (** à ***)

1. Cela se produit si $2x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, soit $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$, ce qu'on note également $x \equiv \frac{\pi}{8}\left[\frac{\pi}{2}\right]$.
2. $\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{x}{4}\right) \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - x - \frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{x}{4}\right) \Leftrightarrow -x - \frac{\pi}{4} \equiv \frac{x}{4}[2\pi]$ ou $-x - \frac{\pi}{4} \equiv -\frac{x}{4}[2\pi] \Leftrightarrow \frac{5x}{4} \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$ ou $\frac{3x}{4} \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$, donc $\mathcal{S} = \left\{-\frac{\pi}{5} + k\frac{8\pi}{5}, -\frac{\pi}{3} + k\frac{3\pi}{5} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
3. Il suffit d'utiliser la formule de transformation produit/somme : $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\cos(2x) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(2x) = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ ou $2x \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$, donc $\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{6} + k\pi, -\frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
4. Beaucoup moins compliqué que ça n'en a l'air, il suffit d'y croire :
$$\begin{array}{rrcl} & \sin(3x)\cos^3(x) + \sin^3(x)\cos(3x) & = & \frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow & (3\sin(x) - 4\sin^3(x))\cos^3(x) + \sin^3(x)(4\cos^3(x) - 3\cos(x)) & = & \frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow & \sin(x)\cos^3(x) - \sin^3(x)\cos(x) & = & \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow & \sin(x)\cos(x)(\cos^2(x) - \sin^2(x)) & = & \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{2}\sin(2x)\cos(2x) & = & \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow & \sin(4x) & = & 1 \end{array}$$
On a donc $4x \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
5. L'équation ne peut avoir de sens que si $x \in [-1; 1]$ et $2x \in [-1; 1]$, donc $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$. On peut ensuite prendre le sin de chaque côté de l'équation. Comme $\arccos(x) \in [0; \pi]$, $\sin(\arccos(x)) > 0$, et $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos(x))} = \sqrt{1 - x^2}$. Quant au sinus de $\arcsin(2x)$, il vaut évidemment $2x$, ce qui donne la condition nécessaire $2x = \sqrt{1 - x^2}$. Les solutions de l'équation sont donc forcément positives et vérifient, en élevant au carré l'égalité précédente, $4x^2 = 1 - x^2$,

soit $x^2 = \dfrac{1}{5}$, donc $x = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ (la solution négative ayant déjà été exclue). Cette valeur est bien inférieure à $\dfrac{1}{2}$, donc $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right\}$.

Exercice 8 (**)

Il suffit d'appliquer une deuxième fois la formule de duplication des tangentes : $\tan(4x) = \tan(2x+2x) = \dfrac{2\tan(2x)}{1-\tan^2(2x)} = \dfrac{\frac{4\tan(x)}{1-\tan^2(x)}}{1 - \frac{4\tan^2(x)}{(1-\tan^2(x))^2}} = \dfrac{4\tan(x)(1-\tan^2(x))}{1-6\tan^2(x)+\tan^4(x)}$.

Appliquons la formule à $x = \arctan\left(\dfrac{1}{5}\right)$ (qui a évidemment pour tangente $\dfrac{1}{5}$) pour obtenir $\tan(4x) = \dfrac{\frac{4}{5}\times(1-\frac{1}{25})}{1-\frac{6}{25}+\frac{1}{625}} = \dfrac{20\times 24}{625-150+1} = \dfrac{480}{476} = \dfrac{120}{119}$. Calculons maintenant $\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \arctan\left(\dfrac{1}{239}\right)\right) = \dfrac{1+\frac{1}{239}}{1-\frac{1}{239}} = \dfrac{240}{238} = \dfrac{120}{119}$. Ca vous rappelle quelque chose ? Les deux angles $4\arctan\left(\dfrac{1}{5}\right)$ et $\dfrac{\pi}{4} - \arctan\left(\dfrac{1}{239}\right)$ ont la même tangante, et ils sont tous les deux positifs et plus petits que $\dfrac{\pi}{2}$ (pour le deuxième c'est évident, pour le premier, il faut vérifier que $\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right) > \dfrac{1}{5}$), ce qui permet de conclure à l'égalité des deux angles, ce qui prouve la formule de Machin. Pour être complets, calculons donc les lignes trigonométriques de $\dfrac{\pi}{8}$ en utilisant que $2\times\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\pi}{4}$. On en déduit par exemple que $2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{8} - 1\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, donc $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{2}+2}{4}$, donc $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$. On aura ensuite $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \sqrt{1-\cos^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right)} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. On obtient enfin $\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{\dfrac{6-4\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{3-2\sqrt{2}}$ (qui pour les plus curieux peut se simplifier en $\sqrt{2}-1$). En tout cas, ce nombre a pour carré $3-2\sqrt{2}$, dont on veut prouver qu'il est supérieur à $\dfrac{1}{25}$, ce qui revient à dire que $74-50\sqrt{2} > 0$, soit $\sqrt{2} < \dfrac{37}{25}$. En élevant au carré, on a bien $2 < \dfrac{1\ 369}{625}$, donc tout va bien (ouf !).

La deuxième formule est plus simple : $\tan\left(\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right) + \arctan\left(\dfrac{1}{3}\right)\right) = \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}} = \dfrac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1$. Comme on sait par ailleurs que $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1 > \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{3}$, il est facile de voir que $\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right) + \arctan\left(\dfrac{1}{3}\right) < \dfrac{\pi}{2}$, ce qui achève la démonstration de l'égalité.

Exercice 9 (**)

- On sait bien sûr que $\arccos(\cos(x)) = x$ seulement si $x \in [0;\pi]$. Mais on sait aussi que $\cos\left(\dfrac{507\pi}{3}\right) = \cos(169\pi) = -1$, donc $\arccos\left(\cos\left(\dfrac{507\pi}{3}\right)\right) = \pi$. Bon, c'eût été un peu plus intéressant en prenant autre chose qu'un multiple de π, mais le principe reste le même.
- Cette expression n'est bien sûr définie que si $x \in [-1;1]$, et puisque $\arcsin(x) \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$, son cosinus est nécessairement positif. On peut alors écrire $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1-x^2}$.
- On sait que $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$, donc $\cos^2\left(\dfrac{1}{2}x\right) = \dfrac{1}{2}(\cos(x)+1)$. Or, $\cos^2(\arctan(x)) =$

$\dfrac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \dfrac{1}{1+x^2}$, donc $\cos(\arctan(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, et $\cos^2\left(\dfrac{1}{2}\arctan(x)\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}} + \dfrac{1}{2}$.

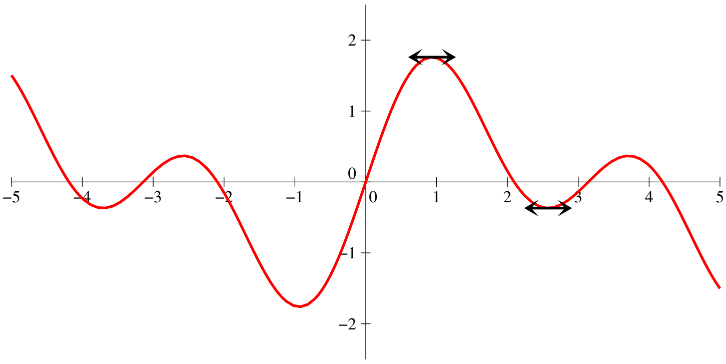
- Ici, rien d'évident ne sautant aux yeux, on peut tenter une autre tactique consistant à dériver l'expression. Posons donc $f(x) = \arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$, alors $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{1+u(x)^2}$, avec $u(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$. On a donc $1+u(x)^2 = 1+\dfrac{1-x}{1+x} = \dfrac{2}{1+x}$, et $u'(x) = \dfrac{\frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2}}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} = -\dfrac{1}{1+x}\sqrt{\dfrac{1}{(1+x)(1-x)}}$. Finalement $f'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$. On reconnait une dérivée usuelle, et on en déduit que $f(x) = \dfrac{1}{2}\arccos(x)+k$, où k est une constante réelle. Calculons $f(0) = \arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$. Or, $\dfrac{1}{2}\arccos(0) = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{4}$. La constante k est donc nulle, et $\arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right) = \dfrac{1}{2}\arccos(x)$ (ce qu'on peut obtenir directement par des arguments trigonométriques).

Exercice 10 (***)

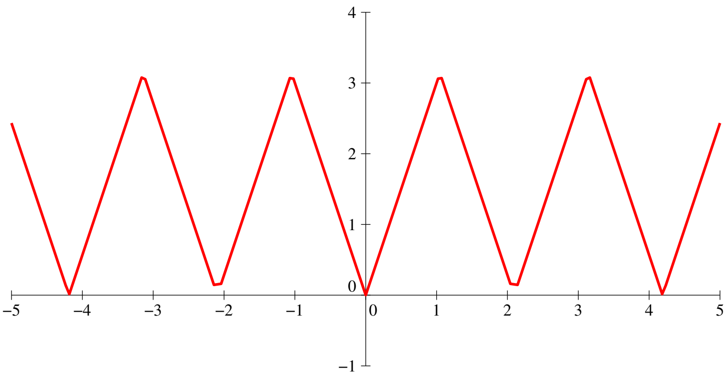
- La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et impaire. On va donc restreindre son étude à l'intervalle $[0;\pi]$. Elle est dérivable, de dérivée $f'(x) = \cos(x)+2\cos(2x) = \cos(x)+2(2\cos^2(x)-1) = 4\cos^2(x)+\cos(x)-2$. En posant $X = \cos(x)$, on se ramène à l'étude du signe du trinome $4X^2+X-2$, qui a pour discriminant $\Delta = 1+32 = 33$, et admet donc pour racines $X_1 = \dfrac{-1+\sqrt{33}}{8}$ et $X_2 = \dfrac{-1-\sqrt{33}}{8}$. Ces valeurs n'étant certainement pas des cosinus d'angles remarquables, on ne peut que les exprimer à l'aide de la fonction arccos (les deux valeurs sont comprises entre -1 et 1). Comme arccos est une fonction décroissante, $\arccos(X_1) < \arccos(X_2)$, et le tableau de variations ressemble à ceci :

x	0		$x_1 = \arccos(X_1)$		$x_2 = \arccos(X_2)$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow$	0

On peut, si on est vraiment très motivé, chercher à calculer les valeurs du minimum et du maximum, mais on va tomber sur des valeurs affreuses. Par exemple, $f(x_1) = \sin(\arccos(X_1)) + \sin(2\arccos(X_1)) = \sin(\arccos(X_1)) + 2\sin(\arccos(X_1))\cos(\arccos(X_1))$ en appliquant la formule de duplication. Or, $\sin(\arccos(X_1)) = \sqrt{1-\cos^2(\arccos(X_1))}$ (les sinus sont positifs puisqu'on est dans $[0;\pi]$), donc $\sin(\arccos(X_1)) = \sqrt{1-X_1^2}$, avec $X_1^2 = \dfrac{1+33-2\sqrt{33}}{64} = \dfrac{34-2\sqrt{33}}{64}$, soit $\sin(\arccos(X_1)) = \sqrt{\dfrac{30+2\sqrt{33}}{64}} = \dfrac{\sqrt{30+2\sqrt{33}}}{8}$. On obtient alors $f(x_1) = \dfrac{\sqrt{30+2\sqrt{33}}}{8} + 2\dfrac{\sqrt{30+2\sqrt{33}}}{8}\dfrac{\sqrt{33}-1}{8} = \dfrac{\sqrt{30+2\sqrt{33}}}{8} + \dfrac{(\sqrt{33}-1)\sqrt{30+2\sqrt{33}}}{32}$ $= \dfrac{(\sqrt{33}+3)\sqrt{30+2\sqrt{33}}}{32}$. C'est très laid et fort peu expoitable, on se dispensera donc de tenter un calcul du minimum.



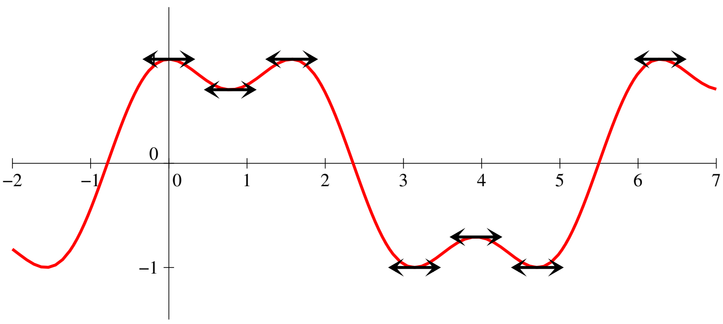
- La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$, car $\cos(3x)$ étant toujours compris entre -1 et 1, on tombe toujours dans l'intervalle de définition de la fonction arccos. La fonction est de plus paire (puisque cos l'est), et $\dfrac{2\pi}{3}$ périodique (comme $x \mapsto \cos(3x)$). On peut donc restreindre l'intervalle d'étude à $\left[0; \dfrac{\pi}{3}\right]$. Or, sur cet intervalle, on constate que $3x \in [0; \pi]$, donc $\arccos(\cos(3x)) = 3x$. La courbe représentative de g sur cet intervalle est donc un segment de droite, et le reste s'en déduit par la symétrie et la périodicité.
  Les plus courageux auront calculé la dérivée : $g'(x) = -3\sin(3x) \times \dfrac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(3x)}} = \dfrac{3\sin(3x)}{\sqrt{\sin^2(3x)}} = 3\dfrac{\sin(3x)}{|\sin(3x)|}$, qui vaut 3 ou -3 selon le signe de $\sin(3x)$. On retrouve alors l'allure de la courbe.



- La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, mais ni paire ni impaire. On va donc restreindre son étude à l'intervalle $[0; 2\pi]$. On peut la dériver : $h'(x) = -3\sin(x)\cos^2(x) + 3\cos(x)\sin^2(x) = 3\sin(x)\cos(x)(\sin(x) - \cos(x))$. Le dernier facteur s'annule en $\dfrac{\pi}{4}$ et en $\dfrac{5\pi}{4}$, ce qui permet d'établir le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		2π
$\cos(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\sin(x)$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0
$\sin(x)-\cos(x)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$h'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
h	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

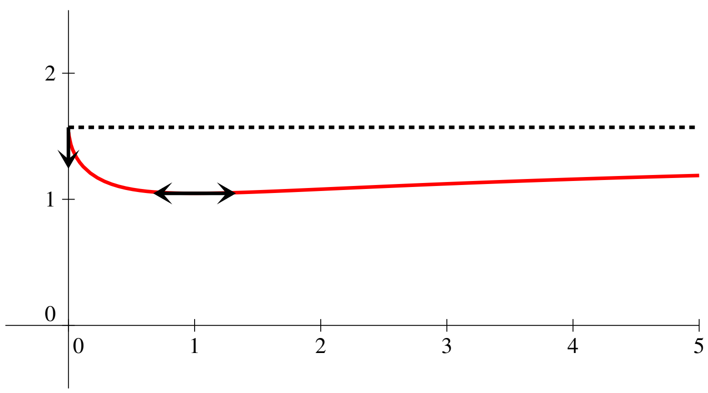
Calcul des valeurs intéressantes : $f(0) = 1^3 + 0^3 = 1$; $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \dfrac{2\sqrt{2}}{8} + \frac{2\sqrt{2}}{8} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; les deniers calculs sont extrêmement similaires. On peut enfin tracer une fort belle courbe :



- La fonction i ne peut être définie que si $x \geqslant 0$ (à cause de la racine carrée) et si $\frac{\sqrt{x}}{1+x} \in [-1;1]$ à cause du arccos. Puisqu'on a déjà supposé $x \geqslant 0$, cela revient à dire qu'on doit avoir $\sqrt{x} \leqslant 1+x$, soit en élevant au carré $x \leqslant 1+2x+x^2$, ce qui est toujours le cas. On a donc $\mathcal{D}_i = \mathbb{R}^+$. On peut dériver la fonction i, ce qui donne $i'(x) = \dfrac{\frac{1+x}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}}{(1+x)^2} \times \dfrac{-1}{\sqrt{1 - \frac{x}{(1+x)^2}}} = -\dfrac{1-x}{2\sqrt{x}(1+x)^2} \times \dfrac{1+x}{\sqrt{(1+x)^2 - x}} = \dfrac{x-1}{2\sqrt{x}(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}$. On peut constater en passant que la fonction i n'est pas dérivable en 0 (il y aura une tangente verticale puisque la dérivée y a une limite infinie), et la dérivée, bien qu'assez laide, est simplement du signe de $x-1$. La fonction admet donc un minimum en 1, de valeur $i(1) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$. Par ailleurs, $f(0) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$, et comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+1} = 0$, on aura également $\lim\limits_{x \to +\infty} i(x) = \frac{\pi}{2}$. On peut donc dresser le tableau de variations suivant :

x	0	1	$+\infty$
i	$\frac{\pi}{2}$ ↘	$\frac{\pi}{3}$	↗ $\frac{\pi}{2}$

Et tracer une dernière et magnifique courbe :



Exercice 11 (**)

1. Reprenez la construction donnée dans le cours, à l'aide du cercle trigonométrique, du sinus et de la tangente. On peut tout interpréter en termes de longueur : $\sin(h)$ (remplacez le x du cours par un h) est la hauteur du triangle intérieur au cercle, dont les sommets sont O, M et le point I de coordonnées $(1,0)$. La valeur de $\tan(h)$ est la hauteur du triangle extérieur au

cercle et tangent extérieurement au point I. Quant à x, c'est par définition la longueur de l'arc de cercle reliant le point I à M. Ainsi, l'aire du petit triangle vaut $\dfrac{1}{2}\sin(h)$, celle du triangle extérieur vaut $\dfrac{1}{2}\tan(h)$, et la portion de disque contenue entre les deux a pour aire $\pi \times \dfrac{h}{2\pi} = \dfrac{h}{2}$. En multipliant tout par 2, on obtient $\sin(h) \leqslant h \leqslant \tan(h)$.

2. L'inégalité de droite a déjà été prouvée. Celle de gauche s'obtient en partant de $h \leqslant \tan(h)$ et en mulptiliant de chaque côté par $\cos(h)$. En divisant tout cela par h, on a alors $\cos(h) \leqslant \dfrac{\sin(h)}{h} \leqslant 1$. Comme $\cos(0) = 1$, $\dfrac{\sin(h)}{h}$ est enacdré par deux expressions tendant vers 1 en 0, donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin(h)}{h} = 1$.

3. Puisque $\sin(0) = 0$, on en déduit facilement que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin^2(h)}{h} = 0$. Or, $\dfrac{\sin^2(h)}{h} = \dfrac{1 - \cos^2(h)}{h} = (1 + \cos(h))\dfrac{1 - \cos(h)}{h}$. Le premier terme ayant pour limite 2 en 0, le deuxième doit nécessairement avoir une limite nulle pour que le produit tende vers 0.

4. Revenons à la définition de la dérivée : le taux d'accroissement du cos en x vaut $\tau_x(h) = \dfrac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h}$. En utilisant les formules d'addition, on trouve $\tau_x(h) = \dfrac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h} = \cos(x)\dfrac{\cos(h) - 1}{h} - \sin(x)\dfrac{\sin(h)}{h}$. Le premier quotient tend vers 0, le deuxième vers 1, donc $\lim\limits_{h \to 0} \tau_x(h) = -\sin(x)$, ce qui donne bien la dérivée que vous connaissez par coeur pour le cosinus.

5. Même principe, cette fois-ci $\tau_x(h) = \dfrac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \dfrac{\cos(x)\sin(h) + \sin(x)\cos(h) - \sin(x)}{h} = \cos(x)\dfrac{\sin(h)}{h} + \sin(x)\dfrac{1 - \cos(h)}{h}$. Les mêmes limites que tout à l'heure permettent de conclure.

Fonctions hyperboliques

Exercice 12 (* à **)

- On se contente de tout écrire à l'aide des exponentielles. Quitte à tout multiplier par 2, cela donne $4(e^x + e^{-x}) + 3(e^x - e^{-x}) - 8 = 0$, soit $7e^x - 8 + e^{-x} = 0$. En posant $X = e^x$ (et en multipliant tout par e^x, on se ramène à l'équation du second degré $7X^2 - 8X + 1 = 0$. Son discriminant vaut $\Delta = 64 - 28 = 36$, et ses solutions sont $X_1 = \dfrac{8+6}{2} = 7$ et $X_2 = \dfrac{8-6}{2} = 1$. On trouve donc deux solutions à l'équation initiale : $x = \ln(1) = 0$, et $x = \ln(7)$.
- Il manquait un tanh dans l'énoncé, d'où la curieuse double parenthèse. Ce qui est à gauche comme ce qui est à droite est défini sur $\mathbb{R}$ tout entier. Puisque l'énoncé nous propose de dériver, posons donc $f(x) = 2\arctan(\tanh(x)) - \arctan(\sinh(2x))$ et dérivons : $f'(x) = 2 \times \dfrac{1}{\cosh^2(x)} \times \dfrac{1}{1 + \tanh^2(x)} - 2\cosh(2x) \times \dfrac{1}{1 + \sinh^2(2x)}$. En utilisant le fait que $1 + \sinh^2(2x) = \cosh^2(2x)$, et que $\cosh^2(x) \times \tanh^2(x) = \sinh^2(x)$, on peut dire que $f'(x) = \dfrac{2}{\cosh^2(x) + \sinh^2(x)} - \dfrac{2}{\cosh(2x)}$. Il ne reste polus qu'à connaitre la formule $\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x)$ pour conclure à la nullité de la dérivée (pour la démonstration de cette dernière formule, voir l'exercice suivant). La fonction f est donc constante, égale à $f(0) = 2\arctan(0) - \arctan(0) = 0$. On a bien démontré l'égalité souhaitée.

Exercice 13 (*)

- On part de ce qui est à droite : $\sinh(x) \times \cosh(y) + \cosh(x) \times \sinh(y) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\dfrac{e^y + e^{-y}}{2} + \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\dfrac{e^y - e^{-y}}{2} = \dfrac{1}{4}(e^{x+y} + e^{x-y} - e^{y-x} - e^{-x-y} + e^{x+y} - e^{x-y} + e^{y-x} - e^{-x-y}) = \dfrac{1}{4}(2e^{x+y} - 2e^{-x-y}) = \dfrac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} = \sinh(x + y)$.
- On évite de refaire tout un calcul, on peut exploiter le résultat précédent : $\sinh(x - y) = \sinh(x + (-y)) = \sinh(x)\cosh(-y) + \cosh(x)\sinh(-y) = \sinh(x)\cosh(y) - \cosh(x)\sinh(y)$ en utilisant la parité de cosh et l'imparité de sinh.
- Même principe : $\cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y) = \dfrac{(e^x + e^{-x})(e^y + e^{-y}) + (e^x - e^{-x})(e^y - e^{-y})}{4} = \dfrac{1}{4}(e^{x+y} + e^{x-y} + e^{y-x} + e^{-x-y} + e^{x+y} - e^{x-y} - e^{y-x} + e^{-x-y}) = \dfrac{2e^{x+y} + 2e^{-x-y}}{4} = \cosh(x+y)$.
- On remplace y par $-y$ dans la formule précédente, le signe de la deuxième partie change, et on obtient cette nouvelle formule.
- Soit on fait un calcul direct, soit on passe par le quotient : $\tanh(x + y) = \dfrac{\sinh(x + y)}{\cosh(x + y)} = \dfrac{\sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)}{\sinh(x)\sinh(y) + \cosh(x)\cosh(y)}$. En divisant le tout par $\cosh(x)\cosh(y)$, on trouve $\tanh(x + y) = \dfrac{\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} + \frac{\sinh(y)}{\cosh(y)}}{\frac{\sinh(x)\sinh(y)}{\cosh(x)\cosh(y)} + 1} = \dfrac{\tanh(x) + \tanh(y)}{1 + \tanh(x)\tanh(y)}$.
- Encore une fois, un simple remplacement de y par $-y$ et l'imparité de tanh donnent la formule.
- C'est un cas particulier de la première formule : $\sinh(2x) = \sinh(x + x) = \sinh(x)\cosh(x) + \cosh(x)\sinh(x) = 2\cosh(x)\sinh(x)$.
- Même principe : $\cosh(2x) = \cosh(x)\cosh(x) + \sinh(x)\sinh(x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x)$. Les plus révéillés remarqueront qu'on peut également donner les formes $\cosh(2x) = 2\cosh^2(x) - 1 = 1 + 2\sinh^2(x)$ en exploitant $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.
- Encore un cas particulier sans grand intérêt, je vous laisse l'écrire par vous-même.

Exercice 14 (***)

Pour le calcul, il peut être utile de constater l'égalité suivante : $\cosh(t) + \sinh(t) = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2} + \dfrac{e^t - e^{-t}}{2} = e^t$. On peut donc écrire ici $e^t = \cosh(t) + \sinh(t) = \cosh(\text{Argch}(x)) + \sinh(\text{Argch}(x))$. Le premier morceau est simplement égal à x, et comme $\sinh(t) = \sqrt{\cosh^2(t) - 1}$ pour les valeurs de t positives (ce qui est le cas de $\text{Argch}(x)$), le deuxième terme est égal à $\sqrt{x^2 - 1}$. Finalement, on a $e^t = x + \sqrt{x^2 - 1}$, soit $\text{Argch}(x) = t = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

Pour Argsh, même principe, on écrit $e^{\text{Argsh}\,x} = \cosh(\text{Argsh}(x)) + \sinh(\text{Argsh}(x)) = \sqrt{1 + x^2} + x$, donc $\text{Argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$.

Enfin, pour Argth, $e^{\text{Argth}(x)} = \cosh(\text{Argth}(x)) + \sinh(\text{Argth}(x)) = \sqrt{\cosh^2(\text{Argth}(x))} + \sqrt{\cosh^2(\text{Argth}(x)) - 1}$. Or, $\cosh^2(\text{Argth}(x)) = \dfrac{1}{1 - \tanh^2(\text{Argth}(x))} = \dfrac{1}{1 - x^2}$. On obtient $e^{\text{Argth}(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} + \sqrt{\dfrac{1}{1 - x^2} - 1} = \dfrac{1 + x}{\sqrt{(1 + x)(1 - x)}} = \sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}}$. Finalement, on conclut que $\text{Argth}(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}} = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right)$. Une expression finalement assez simple, et qui permet de retrouver rapidement la dérivée de cette fonction Argth.

TD n°2 : Fonctions

PTSI B Lycée Eiffel

21 septembre 2012

Voici ce à quoi vous avez échappé pour votre premier devoir de samedi. Cela constituera donc un bon entrainement !

Exercice 1

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+^*$ par $x \mapsto \sqrt{x}(\ln x)^n$ et on note $\mathcal{C}_n$ sa courbe représentative.

1. Étudier les fonctions f_n (limites, variations).
2. Étudier le signe de $f_{n+1} - f_n$ et de $f_{n+2} - f_n$ et en déduire les points d'intersection et les positions relatives de $\mathcal{C}_n$, $\mathcal{C}_{n+1}$ et $\mathcal{C}_{n+2}$.
3. Tracer sommairement dans un même repère les courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$.
4. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 1$ a une unique solution supérieure ou égale à 1, que l'on notera α_n, et que cette solution appartient à $]1; e[$.
5. Montrer que la suite (α_n) est croissante et déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2

On s'intéresse à la fonction trigonométrique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \cos x + \cos(2x) + \cos(3x)$$

1. Déterminer un intervalle d'étude intelligent pour f.
2. Résoudre l'équation $\cos x + \cos(2x) + \cos(3x) = 0$, en déduire le signe de f sur l'intervalle d'étude.
3. Montrer que $f'(x) = -\sin x(12\cos^2 x + 4\cos x - 2)$, en étudier le signe et en déduire les variations de f (on ne cherchera pas à calculer de valeur exacte des minima et maxima locaux).
4. Tracer une allure de la courbe de f (vous pouvez calculer quelques valeurs simples d'images et de nombres dérivés pour compléter l'étude).

Exercice 3

On cherche à étudier la fonction f définie par $f(x) = \arcsin(2x\sqrt{1 - x^2})$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
2. Étudier la parité de f. En déduire un intervalle d'étude le plus restreint possible pour f.
3. Sur quel ensemble la fonction f est-elle dérivable ? Calculer la dérivée de f.
4. En déduire une expression simplifiée de la fonction f (on pourra distinguer plusieurs intervalles).
5. En posant $x = \cos(\theta)$, retrouver directement l'expression de f.

Corrigé du TD n°2

Exercice 1

1. Les fonctions f_n sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$, et $f_n'(x) = \dfrac{(\ln x)^n}{2\sqrt{x}} + \dfrac{n}{x}\sqrt{x}(\ln x)^{n-1} = \dfrac{(\ln x)^{n-1}}{2\sqrt{x}}(2n + \ln x)$. La dérivée s'annule donc en 1 (sauf pour $n = 1$), et $f(1) = 0$; et en e^{-2n} (et $f(e^{-2n}) = e^{-n}(-2n)^n = (\frac{-2n}{e})^n$), et son signe dépend de la parité de n : si n est impair, la dérivée ne change pas de signe en 1, mais si n est pair, si. Par croissance comparée, $\lim\limits_{x \to 0^+} f_n(x) = 0$. On a par ailleurs $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$. On a donc pour n impair :

x	0		e^{-2n}		1		$+\infty$
$f(x)$	0	$\searrow$	$(\frac{-2n}{e})^n$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

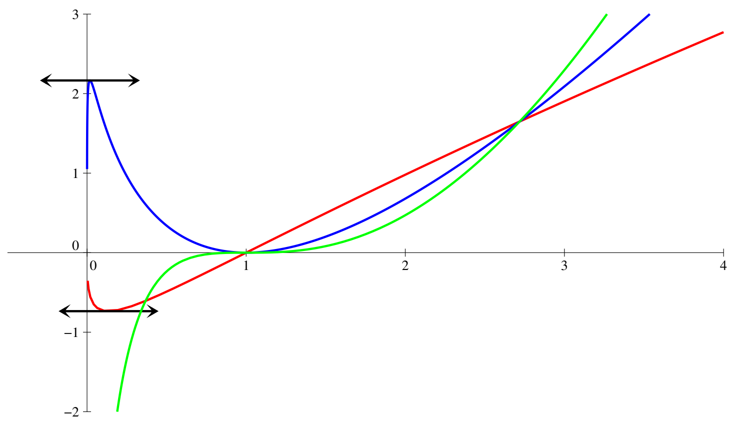
Si n est pair, on obtient :

x	0		e^{-2n}		1		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$(\frac{-2n}{e})^n$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2. Encore un calcul peu subtil : $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \sqrt{x}(\ln x)^n(\ln x - 1)$. Encore une fois, le signe dépend de la parité de n. Si n est impair, cette quantité est négative pour $1 \leqslant x \leqslant e$ (on a alors $\mathcal{C}_{n+1}$ en-dessous de $\mathcal{C}_n$), et positive sinon (on a alors $\mathcal{C}_{n+1}$ en-dessous de $\mathcal{C}_n$). Si n est pair, $\mathcal{C}_{n+1}$ est en-dessous de $\mathcal{C}_n$ si $x \leqslant e$, et au-dessus ensuite.

   De même, $f_{n+2}(x) - f_n(x) = \sqrt{x}(\ln x)^n(\ln^2 x - 1)$. Cette fois-ci il y a annulation en 1, e et $\dfrac{1}{e}$. Si n est impair, $\mathcal{C}_{n+2}$ est en-dessous de $\mathcal{C}_n$ si $x \leqslant \dfrac{1}{e}$ ou si $1 \leqslant x \leqslant e$, et au-dessus sinon ; si n est pair, $\mathcal{C}_{n+2}$ est en-dessous de $\mathcal{C}_n$ si $1 \leqslant x \leqslant e$, au-dessus sinon.
   Dans tous les cas, les courbes se coupent en deux points $(1, 0)$ et $(e, \sqrt{e})$.

3. Un peu de couleur pour aider : $\mathcal{C}_1$ en rouge, $\mathcal{C}_2$ en bleu et $\mathcal{C}_3$ en vert (on ne voit pas le minimum de cette dernière car la valeur est déjà très négative (et l'abscisse du minimum très proche de l'axe).



4. La fonction f_n est strictement croissante et continue sur $[1;+\infty[$, elle y est donc bijective vers son intervalle image $[0;+\infty[$. En particulier, elle y atteint exactement une fois la valeur 1. Notons α_n l'unique antécédent de 1 par f_n. Comme $f(1) < 1 < f(e)$, on a $1 < \alpha_n < e$ (f étant croissante, la réciproque de sa restriction à $[1:+\infty[$ l'est aussi).

5. On a vu plus haut que sur $]1;e[$, $\mathcal{C}_n$ est toujours au-dessus de $\mathcal{C}_{n+1}$, donc $f_{n+1}(\alpha_n) < f_n(\alpha_n) = 1$. On a donc $f_{n+1}(\alpha_n) < f_{n+1}(\alpha_{n+1})$, et on déduit (comme à la question précédente) que (α_n) est croissante. Soit $x < e$, on a alors $\ln x < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (\ln x)^n = 0$, et il existe un entier n_0 pour lequel $\sqrt{x}(\ln x)^{n_0} < 1$ (puisque $\sqrt{x}$ est une constante), c'est-à-dire $f_{n_0}(x) < 1$. On a alors $x < \alpha_{n_0}$, et donc $\forall n \geqslant n_0$, $x < \alpha_n < e$. Comme ceci est vrai quelque soit $x < e$, on peut donc rendre α_n aussi proche de e qu'on le souhaite quitte à rendre n assez grand. La suite α_n a donc pour limite e.

Exercice 2

1. La fonction f est 2π-périodique et paire, puisque cos l'est. On peut donc l'étudier sur $[0;\pi]$.

2. On peut par exemple utiliser une transformation somme/produit sur les deux cosinus extrêmes, soit $\cos x + \cos(3x) = 2\cos(2x)\cos(-x)$. L'équation devient alors $\cos(2x)(1 + 2\cos x) = 0$. On a donc $2x \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ ou $\cos x = -\frac{1}{2}$, soit $x \equiv \frac{\pi}{4}\left[\frac{\pi}{2}\right]$, $x \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$ ou $x \equiv -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

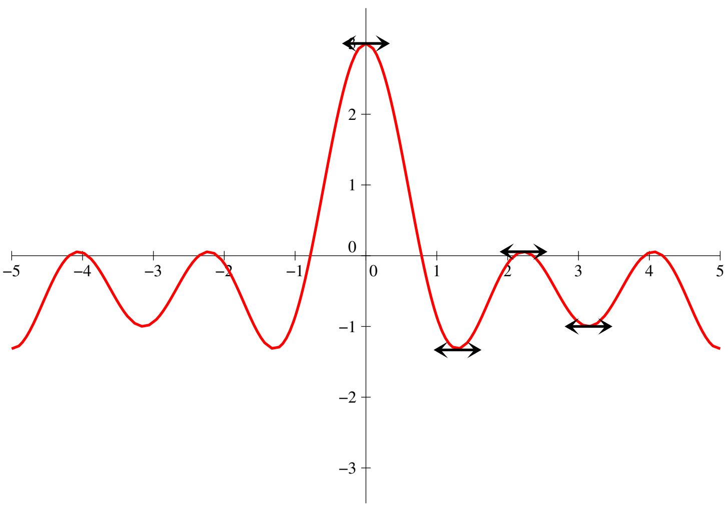
   Si on se restreint à l'intervalle d'étude, f s'annule donc en $\frac{\pi}{4}$, $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{3\pi}{4}$. On en déduit le tableau de signes suivant :

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$\cos(2x)$	1	$+$	0	$-$	-1	$-$		$-$	0	$+$	1
$2\cos x + 1$	3	$+$		$+$	1	$+$	0	$-$		$-$	-1
$f(x)$	3	$+$	0	$-$	-1	$-$	0	$+$	0	$-$	-1

3. C'est un calcul assez facile : $f'(x) = -\sin x - 2\sin(2x) - 3\sin(3x) = -\sin x - 4\sin x\cos x - 3(3\sin x - 4\sin^3 x) = -\sin x(1 + 4\cos x + 9 - 12(1-\cos^2 x)) = -\sin x(12\cos^2 x + 4\cos x - 2)$. Pour en étudier le signe, il faut chercher le signe du trinome $12X^2 + 4X - 2 = 2(6X^2 + 2X - 1)$, qui a pour discriminant $\Delta = 4 + 24 = 28$, et donc pour racines $X_1 = \frac{-2+\sqrt{28}}{12} = \frac{-1+\sqrt{7}}{6}$ et $X_2 = \frac{-1-\sqrt{7}}{6}$. Ces deux valeurs étant comprises entre -1 et 1, ce sont les cosinus de deux angles θ_1 et θ_2 appartenant à $[0;\pi]$. Au vu du tableau de signes de f (ou d'une calcul de valeur approchée des deux cosinus), $\theta_1 \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, et $\theta_2 \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}\right]$. Le facteur $-\sin x$ étant toujours négatif sur $[0,\pi]$, f' sera positive entre θ_1 et θ_2 et négative ailleurs. On a donc un tableau de variations qui ressemble à ceci :

x	0		$\frac{\pi}{4}$		θ_1		$\frac{2\pi}{3}$		θ_2		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f'(x)$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0
$f(x)$	3	$\searrow$	0	$\searrow$	$f(\theta_1)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$f(\theta_2)$	$\searrow$	0	$\searrow$	-2

4. La courbe ressemble à ceci (on peut ajouter à l'étude que, pour $x = \frac{\pi}{2}$, f prend la valeur -1 et f' la valeur 2) :



Exercice 3

On cherche à étudier la fonction f définie par $f(x) = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$.

1. Il faut déjà, bien entendu, avoir $1_x^2 \geqslant 0$ pour que la racine carrée soit définie, c'est-à-dire $x \in [-1;1]$. Il faut ensuite vérifier si $2x\sqrt{1-x^2} \in [-1;1]$, domaine de définition de la fonction arcsin. Comme cela n'a rien d'évident, posons $g(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$, et étudions la fonction g. Cette fonction est impaire, on peut donc se contenter de faire une étude sur $[0;1]$. La fonction g y admet pour dérivée (elle n'est pas dérivable en 1) $g'(x) = 2\sqrt{1-x^2} + 2x \times \dfrac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{2(1-x^2)-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{2-4x^2}{\sqrt{1-x^2}}$. Cette dérivée s'annule en $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, d'où le tableau de variations suivant pour g :

x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$g(x)$	0 $\nearrow$	1	$\searrow$ 0

   La valeur du maximum étant $g\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\sqrt{1-\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$, la fonction g prend des valeurs comprises entre -1 et 1 sur $[-1;1]$, donc $\mathcal{D}_g = [-1;1]$.

2. La fonction étant impaire comme on l'a déjà signalé, f le sera également. On peut donc restreindre à l'intervalle $[0;1]$.

3. Comme la fonction arcsin n'est pas dérivable en 1, et que g prend la valeur 1 en $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, et que par ailleurs g n'est pas dérivable en 1, f est dérivable sur $\left[0;\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right[$ et sur $\left]\dfrac{\sqrt{2}}{2};1\right[$. La dérivée y vaut $f'(x) = g'(x) \times \dfrac{1}{\sqrt{1-g(x)^2}} = \dfrac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}} \times \dfrac{1}{\sqrt{1-4x^2(1-x^2)}} \dfrac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{(1-2x^2)^2}}$. Le quotient $\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ étant positif, f' est du signe de $\dfrac{1-2x^2}{\sqrt{(1-2x^2)^2}} = \dfrac{1-2x^2}{|1-2x^2|}$. On peut donc écrire plus simplement, $\forall x \in \left[0;\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right[$, $f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$, et $\forall x \in \left]\dfrac{\sqrt{2}}{2};1\right[$, $f'(x) = -\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$.

4. On reconnait à un facteur 2 près, les dérivées des fonctions arcsin et arccos. On a donc, $\forall x \in \left[0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$, $f(x) = 2\arcsin(x) + k$, où k est une constante qu'on va déterminer en calculant $f(0)$: $f(0) = \arcsin(0)$, donc $k = 0$, et $f(x) = 2\arcsin(x)$. Sur $\left]\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right[$, on aura $f(x) = 2\arccos(x) + k'$, avec par exemple $f(1) = \arcsin(0) = 0$, alors que $\arccos(1) = 0$, donc k' est également nulle, et $f(x) = 2\arccos(x)$. Symétriquement, les formules sont similaires sur $\left]-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right]$ ($2\arcsin(x)$) et sur $\left[-1; \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ (une légère différence ici, $2\arccos(x) - 2\pi$, due au fait que la fonction arccos n'est pas impaire).
5. Si $x = \cos(\theta)$ (ce qu'on peut toujours écrire pour un x appartenant à l'intervalle $[-1; 1]$), $2x\sqrt{1 - x^2} = 2\cos(\theta)\sqrt{\sin^2(\theta)} = 2\cos(\theta)|\sin(\theta)|$. Comme on sait que $2\cos(\theta)\sin(\theta) = \sin(2\theta)$, on retrouvera bien $f(x) = 2\theta = 2\arccos(x)$ dans le cas où $\sin(\theta) \geqslant 0$ et où de plus $2\theta \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (pour que $\arcsin(\sin(2\theta))$ se simplifie), c'est-à-dire pour $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, ce qui correspond à des valeurs de x comprises entre $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et 1 (c'est bien ce qu'on a obtenu plus haut). Sur les autres intervalles, il y de petits changements de signe et des décalages qui expliquent les formules différentes.

Feuille d'exercices n°2 : Nombres complexes

PTSI B Lycée Eiffel

25 septembre 2012

Exercice 1 (*)

Écrire chacun des nombres complexes suivants sous forme algébrique et/ou trigonométrique.

- $z = (1+2i)^3$
- $z = \dfrac{4}{1-i}$
- $z = (2+i)^2 \times \dfrac{1-i}{4+i}$
- $z = e^{-i\frac{37\pi}{4}}$
- $z = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$
- $z = (1-i\sqrt{3})^{11}$
- $z = (2e^{i\frac{\pi}{3}})^5$
- $z = \left(\dfrac{2+\sqrt{3}+(2\sqrt{3}-1)i}{2-i}\right)^{17}$
- $z = e^{(1+i)\ln(3)}$

Exercice 2 (*)

Pour chacun des nombres complexes a suivants, calculer l'inverse de a et résoudre l'équation $z^3 = a$.

- $a = -8i$
- $a = e^{i\frac{5\pi}{12}}$
- $a = 2 + 11i$
- $a = \dfrac{i+\sqrt{3}}{i-\sqrt{3}}$

Exercice 3 (**)

Pour chacun des problèmes indépendants suivants, on essaira de faire deux résolutions : l'une par le calcul, l'autre géométrique.

1. Déterminer les valeurs de z pour lesquelles z, $\dfrac{1}{z}$ et $1-z$ ont même module.
2. Déterminer les valeurs de z pour lesquelles z, z^2 et z^4 ont des images alignées dans le plan complexe.
3. Trouver tous les nombres complexes z vérifiant $|z| = |z-4|$ et $\arg(z) = \arg(z+1+i)$.
4. Trouver tous les nombres complexes z pour lequels les images de z, i et iz forment un triangle équilatéral dans le plan complexe.

Exercice 4 (* à ***)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 - 2z + 5 = 0$
2. $iz^2 + (2-3i)z + 5i - 5 = 0$
3. $2z^2 + iz + 1 - i = 0$
4. $z^2 = -\overline{z}^2$
5. $z^4 - 2\cos(\theta)z^2 + 1 = 0$
6. $3z^2 - 5|z^2| + 2 = 0$
7. $z^4 = 24i - 7$

8. $\overline{z} = z^n$
9. $4iz^3 + 2(1+3i)z^2 - (5+4i)z + 3(1-7i) = 0$ (cette équation admet une racine réelle)
10. $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$

Exercice 5 (**)

On considère l'équation $(z+1)^5 = (z-1)^5$.

1. Résoudre cette équation de façon bourrine en développant tout.
2. Résoudre cette même équation de façon subtile en utilisant les racines cinquièmes de l'unité.
3. En comparant les deux résultats obtenus, déterminer une valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

Exercice 6 (**)

Si p et q sont deux entiers naturels distincts, à quoi ressemble $\mathbb{U}_p \cap \mathbb{U}_q$?

Exercice 7 (*)

Linéariser les expressions suivantes : $\cos^6(x)$; $\sin^2(x)\cos^3(x)$; $\cos(x)\sin^5(x)$.

Exprimer $\cos(5x)\sin^2(3x)$ en fonction de puissances de $\cos(x)$; exprimer $\sin(2x)+\sin(4x)+\sin(6x)+\sin(8x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

Exercice 8 (***)

Simplifier les sommes suivantes : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$; $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(kx)}{\cos^k x}$; $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}}$.

Exercice 9 (* à **)

Démontrer les propriétés suivantes (questions indépendantes) :

1. Pour tous nombres complexes u et v, $|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$ (identité du parallélogramme).
2. Si $|u| = |v| = 1$ et $uv \neq -1$, alors $\dfrac{u+v}{1+uv} \in \mathbb{R}$.
3. Si $|z| = 1$, on a soit $|1+z| \geqslant 1$, soit $|1+z^2| \geqslant 1$. Peut-on avoir les deux simultanément ?

Exercice 10 (* à **)

Donner toutes les formes possibles de l'équation des cercles suivants (forme complexe factorisée $|z-a| = r$; forme complexe développée $z\overline{z} - \overline{a}z - a\overline{z} + b = 0$; forme cartésienne factorisée $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$; et forme cartésienne développée $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$). Préciser si nécessaire le centre et le rayon du cercle.

- cercle de centre $A(2-i)$ et de rayon 3
- cercle de diamètre $[AB]$, avec $A(-1+2i)$ et $B(3+4i)$
- cercle d'équation complexe développée $z\overline{z} + iz - i\overline{z} - 3 = 0$
- cercle d'équation cartésienne développée $x^2 + y^2 - 2x - 3y + 9 = 0$
- cercle passant par les points $A(1-i)$, $B(-1-i)$ et $C(5i)$
- cercle tangent aux axes réel et imaginaire, et passant par le point $A(6+7i)$

Exercice 11 (* à ***)

On considère dans le plan complexe les points $A(-3+i)$; $B(1-2i)$; $C(1+3i)$ et $D(2+2i)$. Déterminer l'affixe de chacun des objets géométriques suivants :

1. milieu du segment $[BC]$
2. vecteur $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$
3. point d'intersection des droites (AC) et (BD)
4. barycentre du système $((B,1);(C,-2),(D,2))$
5. vecteur directeur (normé) de la droite (CD), vecteur normal (normé) à la droite (AB)
6. points d'intersection du cercle de diamètre $[AD]$ et de la droite (BC)
7. centre de gravité, orthocentre, centres des cercles inscrit et circonscrit du triangle ABD

Exercice 12 (* à **)

Déterminer l'écriture complexe de chacune des transformations géométriques suivantes.

- translation de vecteur $\overrightarrow{u}(3-2i)$
- rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$
- rotation de centre $A(1-2i)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$
- symétrie par rapport à la droite d'équation cartésienne $y = x$
- symétrie par rapport au point $B(3i)$
- homothétie de rapport $\dfrac{1}{2}$ et de centre $C(-2+i)$
- composée de ces deux dernières transformations

Inversement, caractériser géométriquement chacune des applications complexes suivantes.

- $f(z) = \overline{z} - 3$
- $f(z) = (1-i)z + 2i - 1$
- $f(z) = 2\overline{z}$
- $f(z) = 3z - 4i + 2$
- $f(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$
- $f(z) = -i\overline{z} + 2i - 1$

Exercice 13 (**)

On considère l'application du plan complexe dans lui-même $f : z \mapsto z^2 + z + 1$.

1. Déterminer les images par f des nombres 1, $2i - 5$ et $e^{i\frac{\pi}{4}}$.
2. Déterminer les antécedents par f de $1 + i$.
3. Déterminer les nombres complexes invariants par f.
4. Déterminer l'ensemble des nombres complexes ayant une image réelle par f.
5. Déterminer le lieu des points M alignés avec leur image par f et avec 1.

Exercice 14 (**)

On considère l'application $f : z \mapsto \dfrac{z+1}{z-2}$, et on note $A = \mathbb{C}\backslash\{2\}$ et $B = \mathbb{C}\backslash\{1\}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de A vers B. Déterminer une expression simple de sa réciproque f^{-1}.
2. Déterminer l'image réciproque de $\mathbb{U}$ (c'est-à-dire l'ensemble des z tels que $f(z) \in \mathbb{U}$) et celle du disque unité $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}$.

3. Déterminer les nombres complexes $z \in \mathbb{U}$ tels que $f(z) \in \mathbb{U}$.
4. Quel est l'ensemble de définition de l'application $f \circ f$? Est-elle également bijective, et si oui, vers quel ensemble ?

Exercice 15 (***)

On considère dans cet exercice l'application définie sur $\mathbb{C}^*$ par $f(z) = \dfrac{1}{z}$.

1. Montrer que f est bijective de $\mathbb{C}^*$ dans lui-même, et déterminer son application réciproque f^{-1}.
2. Déterminer les nombres complexes z pour lesquels $\mathrm{Re}(f(z)) > 0$. Interpréter géométriquement le résultat obtenu.
3. Montrer sur un exemple que l'application f ne conserve pas les milieux (autrement dit que l'image par f du milieu d'un segment $[AB]$ n'est pas toujours le milieu du segment $[f(A)f(B)]$).
4. Déterminer l'image par f de l'axe réel et de l'axe imaginaire.
5. Montrer plus généralement que l'image par f d'une droite passant par l'origine est toujours une droite passant par l'origine (mais privée du point O).
6. On considère désormais la droite passant par les points $A(1)$ et $B(i)$. Montrer que l'image de tout point de cette droite appartient à un cercle de centre $C\left(\dfrac{1-i}{2}\right)$. Réciproquement, déterminer les points de ce cercle ayant un antécédent par f sur la droite (AB).
7. Généraliser en déterminant l'image d'une droite quelconque du plan complexe (ne passant pas par l'origine).
8. Quelle est l'image par f d'un cercle passant par l'origine ?
9. Déterminer l'image par f du cercle trigonométrique, puis plus généralement celle du cercle de centre O et de rayon r.
10. Déterminer enfin l'image d'un cercle ne passant pas par l'origine et n'étant pas centré en O.

Exercice 16 (****)

On souhaite colorier tout le plan complexe à l'aide de trois couleurs, par exemple le bleu, le rouge et le vert (qui revient en fait à définir une fonction ayant pour ensemble de départ $\mathbb{C}$ et pour ensemble d'arrivée l'ensemble à trois éléments $\{$bleu ; rouge ; vert$\}$). Peut-on effectuer ce coloriage de façon à ce que deux points du plan complexe situés à distance 1 l'un de l'autre soient toujours de couleur différente ?

Corrigé de la feuille d'exercices n°2

Exercice 1 (*)

- Directement en développant via le binome de Newton, $(1+2i)^3 = 1+6i-12-8i = -2i-11$. On ne risque pas de mettre ce nombre sous une forme trigonométrique simple. Si on tient vraiment à essayer de le faire, autant mettre simplement $1+2i$ sous forme exponentielle : $|1+2i| = \sqrt{5}$, donc $1+2i = \sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}i\right) = \sqrt{5}e^{i\arccos(\frac{1}{\sqrt{5}})}$. On en déduit que $(1+2i)^3 = 5\sqrt{5}e^{3i\arccos(\frac{1}{\sqrt{5}})}$.
- En mutipliant par le conjugué, $\dfrac{4}{1-i} = \dfrac{4+4i}{2} = 2+2i = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.
- $\dfrac{(2+i)^2(1-i)}{4+i} = \dfrac{(3+4i)(1-i)(4-i)}{17} = \dfrac{(3+4i)(3-5i)}{17} = \dfrac{29-3i}{17}$. La encore, pas de forme trigonométrique évidente. Si on tient à en donner une, mieux vaut utiliser un arcsin qu'un arccos puisque l'argument sera compris entre $-\dfrac{\pi}{2}$ et 0 (partie imaginaire négative, mais partie réelle positive).
- En additionnant 10π à l'argument, c'est-à-dire $\dfrac{40\pi}{4}$, $e^{-i\frac{37\pi}{4}} = e^{i\frac{3\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$.
- $\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) = \dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.
- Ici, on a intérêt à mettre sous forme trigonométrique : $|1-i\sqrt{3}| = \sqrt{4} = 2$, donc $z_4 = \left(2\left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^{11} = (2e^{-i\frac{\pi}{3}})^{11} = 2^{11}e^{-\frac{11\pi}{3}} = 2048\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1024 + 1024\sqrt{3}i$.
- Le boulot a déjà été mâché : $(2e^{i\frac{\pi}{3}})^5 = 2^5e^{i\frac{5\pi}{3}} = 16 - 16\sqrt{3}i$.
- Commençons par simplifier ce qui se trouve à l'intérieur de la parenthèse : $\dfrac{2+\sqrt{3}+(2\sqrt{3}-1)i}{2-i} = \dfrac{(2+\sqrt{3}+(2\sqrt{3}-1)i)(2+i)}{4+1} = \dfrac{4+2\sqrt{3}-2\sqrt{3}+1+(4\sqrt{3}-2+2+\sqrt{3})i}{5} = 1+\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, donc élevé à la puissance 17 on obtient $2^{17}e^{i\frac{17\pi}{3}} = 2^{17}e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2^{16} - 2^{16}\sqrt{3}i = 65\,536 - 65\,536\sqrt{3}i$.
- Pas vraiment de souci avec une exponentielle quelconque : $e^{(1+i)\ln(3)} = e^{\ln(3)}e^{i\ln(3)} = 3e^{i\ln(3)} = 3\cos(\ln(3)) + 3i\sin(\ln(3))$.

Exercice 2 (*)

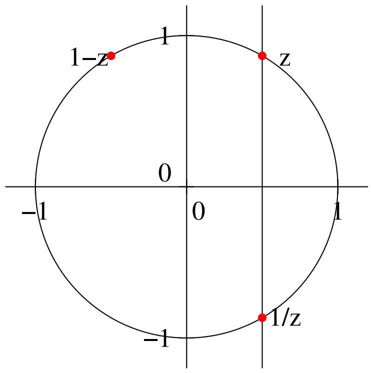
- Pour l'inverse, c'est tranquille $\dfrac{1}{-8i} = \dfrac{1}{8}i$. Pour les racines cubiques, il est toujours préférable de mettre sous forme exponentielle : $-8i = 8e^{-i\frac{\pi}{2}}$, donc les trois racines cubiques sont $2e^{-i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} - i$; $2e^{i(-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3})} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$; et $2e^{i(-\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3})} = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} = -\sqrt{3} - i$.
- Là encore, l'inverse demande simplement de connaitre son cours : $\dfrac{1}{e^{i\frac{5\pi}{12}}} = e^{-i\frac{5\pi}{12}}$ (on ne connait pas de forme algébrique exacte). Pas vraiment de travail à faire non plus pour les racines cubiques, qui sont $e^{i\frac{5\pi}{36}}$; $e^{i(\frac{5\pi}{36}+\frac{2\pi}{3})} = e^{i\frac{29\pi}{36}}$; et $e^{i(\frac{5\pi}{36}+\frac{4\pi}{3})} = e^{i\frac{53\pi}{36}} = e^{-i\frac{19\pi}{36}}$.
- Ici, $\dfrac{1}{2+11i} = \dfrac{2-11i}{125}$. Pour les racines cubiques, on peut évidemment faire les calculs sous forme exponentielle, mais ça ne présente que peu d'intérêt, alors que les solutions ont une forme algébrique simple (au moins l'une d'entre elles). Posons $z = a+ib$, alors $z^3 = a^3 + 3a^2ib - 3ab^2 - ib^3 = a(a^2-3b^2) + ib(3a^2-b^2)$. Si on souhaite trouver une solution à parties réelle et imaginaire entières, 11 étant un nombre premier, on doit prendre $b = \pm 1$. La partie réelle donne alors $a(a^2-3) = 2$, ce qui fonctionne très bien avec $a = 2$. On constate alors que $z = 2+i$ est solution du problème. Les deux autres racines cubiques sont alors $z =$

$(2+i)e^{i\frac{2\pi}{3}} = (2+i)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1+\sqrt{3}i-\frac{1}{2}i-\frac{\sqrt{3}}{2} = -1-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\left(\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right)$; et enfin $z = (2+i)e^{i\frac{4\pi}{3}} = (2+i)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1-\sqrt{3}i-\frac{1}{2}i+\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}-1+i\left(-\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right)$.

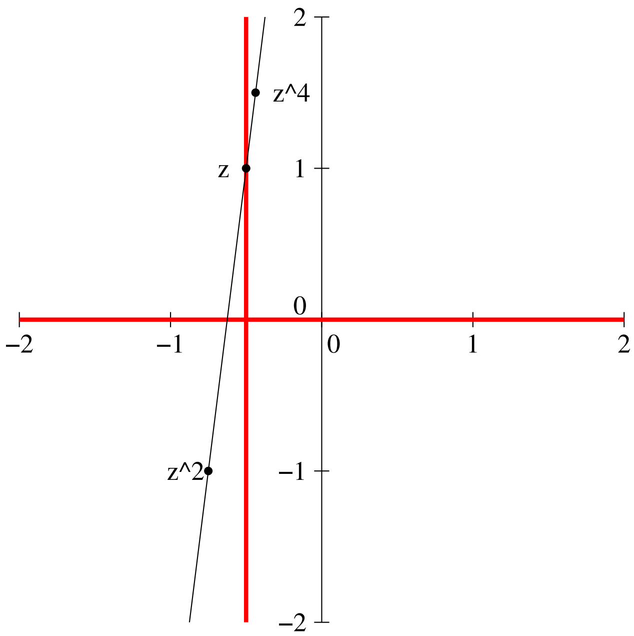
- Commençons par simplifier l'écriture de a : $\frac{i+\sqrt{3}}{i-\sqrt{3}} = \frac{(i+\sqrt{3})^2}{-4} = \frac{-1+3+2i\sqrt{3}}{-4} = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$. On en déduit aisément que $\frac{1}{a} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, et les racines cubiques sont $z_1 = e^{-i\frac{2\pi}{9}}$ (pas de forme algébrique simple), $z_2 = e^{i(-\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi}{3})} = e^{i\frac{4\pi}{9}}$, et $z_3 = e^{i(-\frac{2\pi}{9}+\frac{4\pi}{3})} = e^{i\frac{10\pi}{9}} = e^{-i\frac{8\pi}{9}}$.

Exercice 3 (**)

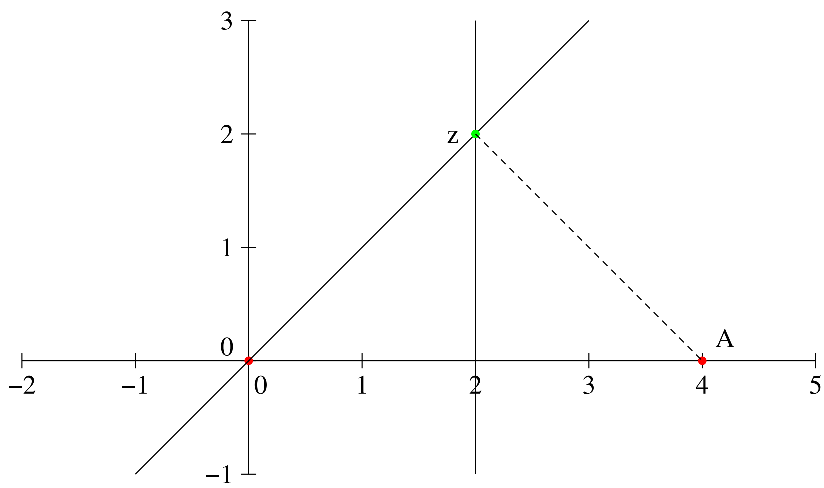
1. On a $|z| = \left|\frac{1}{z}\right| \Rightarrow |z|^2 = 1 \Rightarrow z \in \mathbb{U}$. De plus, si $|z| = |z-1|$, on obtient en élevant le tout au carré $z\overline{z} = (z-1)(\overline{z}-1) = z\overline{z}-z-\overline{z}+1$, ce qui donne après simplification $z+\overline{z} = 1$, soit $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}$. Les deux seuls points du cercle trigonométrique ayant pour abscisse $\frac{1}{2}$ sont $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = e^{-i\frac{\pi}{3}}$, qui sont donc les deux solutions du problèmes posé.
   Une autre façon de résoudre la deuxième équation est l'interprétation géométrique : $|z| = |1-z|$ signifie que la distance entre le point M d'affixe z et l'origine O du repère est la même que la distance entre M et le point A d'affixe 1. Autrement dit, le point M se trouve sur la médiatrice du segment $[OA]$, qui est bien la droite d'équation $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}$. Un schéma avec uniquement la solution $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$:



2. On peut traduire l'hypothèse par le fait que $\frac{z^4-z^2}{z^2-z} \in \mathbb{R}$ (si $z=0$ ou $z=1$, valeurs pour lesquelles le quotient n'est pas défini, les points seront de toute façon alignés puisque confondus). On a donc $\frac{z^2(z+1)(z-1)}{z(z-1)} = z(z+1) \in \mathbb{R}$. Posons $z = a+ib$, on a alors $z(z+1) = a^2+a-b^2+i(2ba+b)$. On obtient donc la condition $b(2a+1) = 0$, soit $b=0$ ou $a = -\frac{1}{2}$. L'ensemble recherché est donc la réunion de la droite réelle et de la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$ (ou en terme de complexes l'ensemble des complexes réels ou de partie réelle égale à $-\frac{1}{2}$). Il est ici difficile de faire une résolution purement géométrique de ce problème. Une solution surlignée sur la figure ci-dessous, correspondant à $z = -\frac{1}{2}+i$.

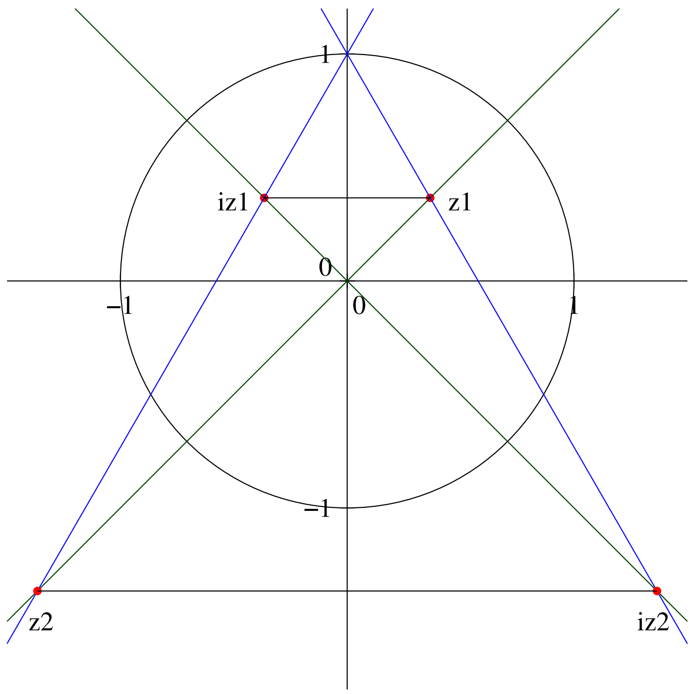


3. On peut s'en sortir uniquement par le calcul : si $|z| = |z-4|$, en élevant au carré, on obtient $z\overline{z} = (z-4)(\overline{z}-4) = z\overline{z} - 4(z+\overline{z}) + 16$, donc $16 = 4(z+\overline{z}) = 8\,\mathrm{Re}\,z$, et $\mathrm{Re}\,z = 2$. Ensuite, en supposant $z \neq 0$, $\arg z = \arg(z+1+i) \Leftrightarrow \arg \dfrac{z+1+i}{z} = 0$, donc $\dfrac{z+1+i}{z} = \lambda$, où $\lambda \in \mathbb{R}_+$, soit $z+1+i = \lambda z \Leftrightarrow z = \dfrac{1+i}{\lambda-1}$. Le seul multiple réel de $1+i$ ayant pour partie réelle 2 étant $2(1+i) = 2+2i$ (qui correspond à $\lambda = \dfrac{3}{2}$), la seule valeur de z convenable est donc $2+2i$.
Il est également possible de raisonner géométriquement. Notons M l'image de z dans le plan complexe, et A celle de 4, alors la condition $|z| = |z-4|$ peut s'écrire sous la forme $|z_M - z_O| = |z_M - z_A| \Leftrightarrow AM = OM$. Le point M doit donc appartenir à la médiatrice du segment $[OM]$, c'est-à-dire la droite d'équation $x = 2$ dans le plan. De plus deux nombres complexes ont même argument si leurs images sont situées sur une même demi-droite d'origine 0. Ici, l'image de $z+1+i$ étant l'image de M par la translation de vecteur d'affixe $1+i$, il ne peut être aligné avec O et M que si le vecteur d'affixe $1+i$ est colinéaire avec $\overrightarrow{OM}$, donc M se situe sur la droite passant par le point d'affixe $1+i$. Cette droite intersecte celle d'équation $x = 2$ en un seul point, d'affixe $2+2i$, qui est donc l'unique solution du problème posé.



4. Les trois points forment un triangle équilatéral si et seulement si $\dfrac{z-i}{iz-i} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\dfrac{z-i}{iz-i} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

Dans le premier cas, on obtient $z - i = ize^{i\frac{\pi}{3}} - ie^{i\frac{\pi}{3}}$, soit $z = i\dfrac{1-e^{i\frac{\pi}{3}}}{1-ie^{i\frac{\pi}{3}}} = e^{i\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-e^{i\frac{\pi}{3}}}{1-e^{i\frac{5\pi}{6}}} = e^{i\frac{\pi}{2}}\dfrac{e^{i\frac{\pi}{6}} \times (-2i\sin\frac{\pi}{6})}{e^{i\frac{5\pi}{12}} \times (-2i\sin\frac{5\pi}{12})} = \dfrac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sin\frac{5\pi}{12}}$ et dans le deuxième $z - i = ize^{-i\frac{\pi}{3}} - ie^{-i\frac{\pi}{3}}$, soit $z = i\dfrac{1-e^{-i\frac{\pi}{3}}}{1-ie^{-i\frac{\pi}{3}}} = e^{i\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-e^{-i\frac{\pi}{3}}}{1-e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\frac{\pi}{2}}\dfrac{e^{-i\frac{\pi}{6}} \times 2i\sin\frac{\pi}{6}}{e^{i\frac{\pi}{12}} \times (-2i\sin\frac{\pi}{12})} = -\dfrac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sin\frac{\pi}{12}}$. Un petit dessin pour voir où tout ça se situe :



On peut en fait résoudre ce problème très géométriquement, je vous ai mis la figure d'abord pour que vous puissiez mieux suivre. Quel que soit le nombre complexe z, le triangle formé par les images de 0, z et iz est isocèle rectangle en 0 (en effet, iz a même module que z, et un argument augmenté de $\dfrac{\pi}{2}$). Il s'agit donc de coller ensemble un triangle isocèle rectangle et un équilatéral ayant un côté commun avec l'hypothénuse du rectangle isocèle. Dans cette construction, la médiatrice du segment reliant z et iz est donc commune avec la droite remarquable issue de i dans le triangle équilatéral. Comme cette médiatrice passe par 0, elle doit donc être confondue avec l'axe imaginaire. Cela implique que z se situe sur une des deux bissectrices des deux Axes (en bleu sur le dessin). De plus, l'angle formé par la droite reliant i et z devra être égal à $\pm\dfrac{\pi}{6}$ (l'axe imaginaire étant bissectrice d'un angle de $\dfrac{\pi}{3}$ dans le triangle équilatéral). Les deux droites correspondantes sont en vert sur la figure, il ne reste plus qu'à prendre les points d'intersection des droites bleues et vertes pour obtenir les points correspondant à z et iz. On peut ensuite faire des calculs trigonométriques savants pour retrouver les affixes exactes de ces points.

Exercice 4 (* à ***)

1. Cette équation à coefficients réels se résout comme vous aviez l'habitude de le faire en Terminale : $\Delta = 4 - 20 = -16 = (4i)^2$, donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées $z_1 = \dfrac{2-4i}{2} = 1 - 2i$, et $z_2 = 1 + 2i$.
2. On applique la méthode générale vue en cours : $\Delta = (2-3i)^2 - 4i(5i-5) = 4-9-12i+20+20i =$

$15 + 8i$. On cherche à déterminer les racines carrées du discriminant, posons $\delta = a + ib$, la condition $\delta^2 = \Delta$ donne en isolant partie réelle et imaginaire les équations $a^2 - b^2 = 15$ et $2ab = 8$. On ajoute la condition sur le module : $|\delta|^2 = a^2 + b^2 = |\Delta| = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{225 + 64} = \sqrt{289} = 17$. En combinant la première et la troisième équation, on a donc $2a^2 = 15 + 17 = 32$, donc $a = \pm 4$, et $2b^2 = 17 - 15 = 2$, soit $b = \pm 1$. Comme a et b sont de même signe à cause de l'équation $2ab = 8$, on peut choisir $\delta = 4 + i$ ou $\delta = -4 - i$. On obtient alors pour l'équation initiale les deux solutions $z_1 = \dfrac{-2 + 3i + 4 + i}{2i} = \dfrac{2 + 4i}{2i} = 2 - i$, et $z_2 = \dfrac{-2 + 3i - 4 - i}{2i} = \dfrac{-6 + 2i}{2i} = 1 + 3i$.

3. Cette fois-ci, le discriminant vaut $\Delta = i^2 - 8(1 - i) = 8i - 9$. En recherchant un $\delta = a + ib$ vérifiant $\delta^2 = \Delta$, on obtient les équations $a^2 - b^2 = -9$ et $2ab = 8$. De plus, la condition sur le module revient à dire que $a^2 + b^2 = |\Delta| = \sqrt{81 + 64} = \sqrt{145}$ (non, ça ne se simplifie pas). Tout cela nous donne $2a^2 = \sqrt{145} - 9$ et $2b^2 = \sqrt{145} + 9$. Comme a et b doivent par ailleurs être de même signe, on peut choisir $\delta = \sqrt{\dfrac{\sqrt{145} - 9}{2}} + i\sqrt{\dfrac{\sqrt{145} + 9}{2}}$. Les solutions de l'équation initiale sont donc $z_1 = \dfrac{-i + \delta}{4}$ et $z_2 = \dfrac{-i - \delta}{4}$, tenter de les écrire entièrement n'a aucun intérêt, on ne simplifiera rien de toute façon.

4. En multipliant par z^2, on obtient $z^4 = -|z|^4$. Un nombre complexe est égal à l'opposé de son mudule si et seulement si il est réel négatif, donc $z^4 \in \mathbb{R}^-$, ou encore $\arg(z^4) \equiv \pi[2\pi]$, d'où $\arg(z) \equiv \dfrac{\pi}{4} \left[\dfrac{\pi}{2}\right]$. L'ensemble des solutions est la réunion des deux bissectrices des axes dans le plan complexe.

   On peut également résoudre plus brutalement en posant $z = a+ib$, on obtient alors $(a+ib)^2 = -(a - ib)^2$, soit $a^2 - b^2 + 2iab = -(a^2 - b^2 - 2iab)$, soit $2(a^2 - b^2) = 0$. On retrouve les deux possibilités $a = b$ et $a = -b$ qui correspondent aux deux bissectrices.

   Dernière méthode revenant au même calcul que la première : on constate que 0 est solution évidente au problème, et on écrit z sous forme exponentielle. On trouve $r^2 e^{2i\theta} = -r^2 e^{-2i\theta} = r^2 e^{-2i\theta + \pi}$. L'égalité des modules est toujours vérifiée, celle des arguments donne la condition $2\theta \equiv -2\theta + \pi[2\pi]$, soit $4\theta \equiv \pi[2\pi]$, donc $\theta \equiv \dfrac{\pi}{4} \left[\dfrac{\pi}{2}\right]$. On retrouve encore une fois les deux bissectrices des axes.

5. Deux méthodes : on pose $Z = z^2$ puis on résout l'équation de degré 2, dont le discriminant vaut $\Delta = 4\cos^2(\theta) - 4 = -4\sin^2(\theta) = (2i\sin(\theta))^2$, et on obtient les solutions $Z_1 = \dfrac{2\cos(\theta) + 2i\sin(\theta)}{2} = e^{i\theta}$, et $Z_2 = e^{-i\theta}$. On peut aussi remarquee que l'équation s'écrit $z^4 - (e^{i\theta} + e^{-i\theta})z^2 + e^{i\theta}e^{-i\theta} = 0$, équation de type « somme-produit », et on en déduit que $Z_1 = e^{i\theta}$ ou $Z_2 = e^{-i\theta}$. Dans les deux cas, les valeurs possibles pour z sont les racines carrées de $e^{i\theta}$ et de $e^{-i\theta}$, c'est-à-dire que $\mathcal{S} = \{e^{i\frac{\theta}{2}}, -e^{i\frac{\theta}{2}}, e^{-i\frac{\theta}{2}}, -e^{-i\frac{\theta}{2}}\}$. Notons tout de même des cas particulier où il n'y a en fait pas quatre solutions disctinctes. Si $\theta \equiv 0[2\pi]$, on n'a que les deux solutions 1 et -1, ce qui est logique puisque dans ce cas l'équation peut se factoriser sous la forme $(z^2 - 1)^2 = 0$. Autre cas particulier, $\theta \equiv \pi[2\pi]$, ou on a pour seules solutions i et $-i$, puisque dans ce cas on a la factorisation $(z^2 + 1)^2 = 0$.

6. On peut ruser en remarquant que $-5|z^2| + 2$ est un réel, donc z^2 soit être réel. Celà ne se produit que si $z \in \mathbb{R}$ ou $z \in i\mathbb{R}$. Dans le premier cas, il faut donc résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $3x^2 - 5x^2 + 2 = 0$, soit $x^2 = 1$, donc $x = \pm 1$. Dans le deuxième cas, $z = ib$, avec $-3b^2 - 5b^2 + 2 = 0$, soit $b^2 = \dfrac{1}{4}$, donc $z = \pm\dfrac{i}{2}$. Finalement, $\mathcal{S} = \{1, -1, \frac{i}{2}, -\frac{i}{2}\}$.

   Encore une fois, on s'en sort très bien de façon purement algébrique, en posant $z = a + ib$: $3(a^2 - b^2 + 2iab) - 5(a^2 + b^2) + 2 = 0$ devient $-2a^2 - 8b^2 + 2 + 6iab = 0$. L'annulation de la partie imaginaire donne immédiatement $ab = 0$, c'est-à-dire $a = 0$ ou $b = 0$. On retrouve les deux cas étudiés ci-dessus, et bien sûr les deux mêmes équations et les mêmes solutions.

7. Il s'agit de calculer les racines quatrièmes d'un nombre complexe, ce pour quoi on sait qu'on peut procéder de manière algébrique ou trigonométrique. Même si je vous ai plutôt conseillé en cours de faire de façon trigonométrique en général, on obtient ici des valeurs exactes par la calcul algébrique (et rien de bon par la méthode trigonométrique, faute de connaitre un angle remarquable ayant pour cosinus $-\dfrac{7}{25}$). Commençons par calculer les racines carrées de $24i-7$: soit $Z = a+ib$ vérifiant $Z^2 = 24i-7$, on aura les deux équations $a^2-b^2 = -7$ et $2ab = 24$, plus la condition sur le module $|Z^2| = a^2+b^2 = |24i-7| = \sqrt{24^2+7^2} = \sqrt{576+49} = \sqrt{625} = 25$. On en déduit que $2a^2 = 25-7 = 18$ et $2b^2 = 25+7 = 32$, donc $a = \pm 3$ et $b = \pm 4$. Comme de plus a et b sont de même signe, on trouve les deux racines $Z_1 = 3+4i$ et $Z_2 = -3-4i$. Restent à calculer les racines carrées de ces deux complexes, par la même méthode. Elle ont chacune pour module 5, dont en posant $z = a+ib$, on obtient dans le premier cas $2a^2 = 5+3 = 8$ et $2b^2 = 5-3 = 2$, et dans le deuxième cas $2a^2 = 2$ et $2b^2 = 8$. Comme a et b sont de même signe dans le premier cas et de signe contraire dans le deuxième, on obtient quatre racines : $\mathcal{S} = \{2+i, -2-i, 1-2i, -1+2i\}$.

8. En multipliant les deux membres de l'équation par z (remarquons au passage que 0 est une solution qu'il faudra penser à rajouter si elle n'apparait pas dans nos calculs), on obtient $|z|^2 = z^{n+1}$. En particulier, z^{n+1} est un nombre réel positif, ce qui implique $\arg z^{n+1} \equiv 0[2\pi]$, donc $\arg z \equiv 0 \left[\dfrac{2\pi}{n+1}\right]$. De plus, en prenant le module de cette même équation, on a $|z|^2 = |z|^{n+1}$, ce qui ne peut se produire que si $z = 1$, sauf dans le cas où $n = 1$, où l'égalité de modules est toujours vérifiée. Dans ce dernier cas, l'équation se réduit en fait à $z = \overline{z}$, dont les solutions sont tous les réels. Si $n > 1$, la combinaisons des deux informations obtenues nous montre que les solutions sont les racines $n+1$-èmes de l'unité, auxquelles on ajoute 0. Je souhaite pour conclure bon courage à ceux qui tenteront de se lancer dans un calcul bourrin en posant $z = a+ib$.

9. Cherchons donc la racine réelle en posant $z = x \in \mathbb{R}$. On doit avoir $4ix^3+2x^2+6ix^2-5x-4ix+3-21i = 0$. En particulier, la partie réelle du membre de gauche étant nulle, on a $2x^2-5x+3 = 0$, équation qui a pour solution évidente 1, et pour deuxième solution $\dfrac{3}{2}$ (en effet, le produit des deux solutions vaut $\dfrac{3}{2}$). Si $x = 1$, la partie imaginaire du membre de gauche de l'équation vaut -15, donc 1 n'est pas solution. Par contre, si $x = \dfrac{3}{2}$, elle vaut $4 \times \dfrac{27}{8} + 6 \times \dfrac{9}{4} - 4 \times \dfrac{3}{2} - 21 = 0$, donc il s'agit bien d'une racine de l'équation. On peut donc factoriser cette équation sous la forme $\left(z - \dfrac{3}{2}\right)(az^2+bz+c) = az^3 + \left(b - \dfrac{3}{2}a\right)z^2 + \left(c - \dfrac{3}{2}b\right)z - \dfrac{3}{2}c$ (les coefficients a, b et c étant ici des nombres complexes ; on peut tout à fait effectuer une division euclidienne dans ce cas également). Par identification des coefficients, on obtient $a = 4i$, $b - \dfrac{3}{2}a = 2+6i$, soit $b = 2+12i$, et $c - \dfrac{3}{2}b = -5-4i$, soit $c = -2+14i$ (et on vérifie que la dernière équation $-\dfrac{3}{2}c = 3-21i$ est bien vérifiée car une erreur de calcul est vite faite avec les nombres complexes). On s'est donc ramenés à l'équation $\left(z - \dfrac{3}{2}\right)\big(4iz^2 + (2+12i)z - 2 + 14i\big) = 0$. Reste à trouver les racines de la parenthèse, on peut tout diviser par 2 pour obtenir un discriminant $\Delta = (1+6i)^2 - 8i(-1+7i) = 1 - 36 + 12i + 8i + 56 = 21 + 20i$. Pour calculer une racine carrée de Δ, on pose $\delta = a+ib$, si $\delta^2 = \Delta$ implique $a^2 - b^2 = 21$, $2ab = 20$, et via la calcul du module $a^2+b^2 = |\Delta| = \sqrt{21^2+20^2} = \sqrt{441+400} = \sqrt{841} = 29$. On en déduit $2a^2 = 50$ et $2b^2 = 8$, soit $a^2 = 25$ et $b^2 = 4$. Comme a et b sont de même signe, on peut choisir $\delta = 5+2i$ ou $\delta = -5-2i$. Enfin, les deux dernières solutions de notre équation sont $z_1 = \dfrac{-1-6i-5-2i}{4i} = -2 + \dfrac{3}{2}i$ et $z_2 = \dfrac{-1-6i+5+2i}{4i} = -1-i$. En conclusion, $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{3}{2}; -1-i; -2+\dfrac{3}{2}i\right\}$.

10. Pour cette dernière je ne résiste pas à tricher un peu en remarquant que $(z+1)(z^4-z^3+z^2-z+1) = z^5-z^4+z^3-z^2+z+z^4-z^3+z^2-z+1 = z^5+1$, donc les solutions de l'équation vérifient $z^5 = -1$, soit $(-z)^5 = 1$, et sont donc les opposés des racines cinquièmes de l'unité, auxquels il faut enlever -1 qui n'était pas solution de l'équation initiale (on l'a rajoutée en multipliant par $z+1$, qui s'annule lorsque $z = -1$). On a donc pour solutions $-e^{i\frac{2\pi}{5}} = e^{i(\frac{2\pi}{5}+\pi)} = e^{i\frac{7\pi}{5}}$; $-e^{i\frac{4\pi}{5}} = e^{i\frac{9\pi}{5}}$; $-e^{i\frac{6\pi}{5}} = e^{i\frac{\pi}{5}}$ et enfin $-e^{i\frac{8\pi}{5}} = e^{i\frac{3\pi}{5}}$.

    Une méthode moins astucieuse est disponible mais tout de même assez brutale, et vous aurez du mal à y penser tous seuls. Commençons par constater que 0 n'est pas solution de l'équation, et divisons-là par z^2, ce qui donne $z^2 - z + 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0$. On peut alors avoir l'idée de faire le changement de variable $Z = z + \frac{1}{z}$. On aurait alors $Z^2 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 = z^2 + \frac{1}{z^2} + 2$. On remarque alors que notre équation s'écrit $Z^2 - 1 - Z = 0$, équation du second degré dont le discriminant vaut $\Delta = 1 + 4 = 5$, et qui admet donc deux racines $Z_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $Z_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Il reste à retrouver les valeurs de z correspondantes, ce qui nécessite encore du calcul. Par exemple, si $Z = Z_1$, on doit résoudre l'équation $z + \frac{1}{z} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, soit en multipliant par z, $z^2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}z + 1 = 0$. Cette nouvelle équation du second degré a pour discriminant $\Delta = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 4 = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} - 4 = \frac{\sqrt{5}-5}{2} < 0$. il y a donc deux racines complexes conjuguées $z_1 = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} + i\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} + i\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$, et $z_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{4} - i\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$. De même, l'équation $z + \frac{1}{z} = Z_2$ a pour discriminant $\Delta = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) - 4 = \frac{-5-\sqrt{5}}{2} < 0$, ce qui amène aux deux autres solutions $z_3 = \frac{1-\sqrt{5}}{4} + i\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$ et $z_4 = \frac{1-\sqrt{5}}{4} - i\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$. En comparant avec les solutions obtenues par la méthode astucieuse plus haut, on peut en déduire les valeurs exactes des cosinus et sinus des multiples impairs de $\frac{\pi}{5}$. Il n'est pas très compliqué de se convaincre que $z_1 = e^{i\frac{\pi}{5}}$, $z_2 = e^{i\frac{9\pi}{5}}$, $z_3 = e^{i\frac{3\pi}{5}}$ et $z_4 = e^{i\frac{7\pi}{5}}$.

Exercice 5 (***)

Vous aurez remarqué que la difficulté de l'exercice a subi une légère inflation depuis la distribution de la feuille d'énoncés. Comme on dit, il n'y a que les imbéciles qui ne changent pas d'avis.

1. On peut en effet tout développer peu subtilement : $z^5 + 5z^4 + 10z^3 + 10z^2 + 5z + 1 = z^5 - 5z^4 + 10z^3 - 10^2 + 5z - 1$. Miracle, ça se simplifie avantageusement pour donner (une fois tout divisé par 2) $5z^4 + 10z^2 + 1 = 0$. On pose $Z = z^2$, et on a $5Z^2 + 10Z + 1 = 0$. Le discriminant de cette équation vaut $\Delta = 100 - 20 = 80$, donc les solutions en sont $Z_1 = \frac{-10+\sqrt{80}}{10} = -1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}$ et $Z_2 = -1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}$. Il ne reste qu'à prendre les racines carrées de ces deux nombres, qui sont des réels négatifs, pour obtenir les solutions de l'équation initiale : $\mathcal{S} = \left\{ i\sqrt{1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}}; -i\sqrt{1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}}; i\sqrt{1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}}; -i\sqrt{1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}} \right\}$.
2. La méthode la plus simple est certainement de constater que 1 n'est pas racine, on peut donc faire le quotient et obtenir $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^5 = 1$, donc $\frac{z+1}{z-1}$ est une racine cinquième de l'unité. On

détermine ensuite facilement les valeurs de z correspondantes : si $\dfrac{z+1}{z-1}=a$, on a $z+1=az-a$, donc $z(a-1)=a+1$, soit $z=\dfrac{a+1}{a-1}$. On remarque que 1 ne donne pas de solution, il n'y a donc que quatre valeurs possibles pour z (c'est normal, l'équation initiale est en fait de degré 4) : $\mathcal{S}=\left\{\dfrac{e^{i\frac{2\pi}{5}}+1}{e^{i\frac{2\pi}{5}}-1};\dfrac{e^{i\frac{4\pi}{5}}+1}{e^{i\frac{4\pi}{5}}-1};\dfrac{e^{i\frac{6\pi}{5}}+1}{e^{i\frac{6\pi}{5}}-1};\dfrac{e^{i\frac{8\pi}{5}}+1}{e^{i\frac{8\pi}{5}}-1}\right\}$.

3. Les solutions obtenues par les deux méthodes sont évidemment identiques, pourtant on ne les a pas sous la même forme, et il n'est même pas immédiat de savoir quelle racine du premier ensemble correspond à quelle racine du deuxième. Pour cela, simplifions les expressions obtenues par la deuxième méthode en factorisant par l'angle moitié : $\dfrac{e^{i\frac{2\pi}{5}}+1}{e^{i\frac{2\pi}{5}}-1}=\dfrac{e^{i\frac{\pi}{5}}(e^{i\frac{\pi}{5}}+e^{-i\frac{\pi}{5}})}{e^{i\frac{\pi}{5}}(e^{i\frac{\pi}{5}}-e^{-i\frac{\pi}{5}})}=\dfrac{2\cos(\frac{\pi}{5})}{2i\sin(\frac{\pi}{5})}=-\dfrac{i}{\tan(\frac{\pi}{5})}$. On obtient de même pour les trois autres solutions $-\dfrac{i}{\tan(\frac{2\pi}{5})}$, $-\dfrac{i}{\tan(\frac{3\pi}{5})}$ et $-\dfrac{i}{\tan(\frac{4\pi}{5})}$. Sachant que la tangente est croissante sur chacun de ses intervalles de définition, et que les valeurs de $\tan\left(\dfrac{3\pi}{5}\right)$ et $\tan\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$ sont négatives, on peut effectuer l'identification suivante : $\dfrac{1}{\tan(\frac{\pi}{5})}=\sqrt{1+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}}$; $\dfrac{1}{\tan(\frac{2\pi}{5})}=\sqrt{1-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}}$; $\dfrac{1}{\tan(\frac{3\pi}{5})}=-\sqrt{1-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}}$, et enfin $\dfrac{1}{\tan(\frac{4\pi}{5})}=-\sqrt{1+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}}$. En particulier, on aura $\tan^2\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)=\dfrac{5}{5-2\sqrt{5}}$, donc $\dfrac{1}{\cos^2(\frac{2\pi}{5})}=1+\tan^2\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)=\dfrac{10-2\sqrt{5}}{5-2\sqrt{5}}$, et $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)=\sqrt{\dfrac{5-2\sqrt{5}}{10-2\sqrt{5}}}=\sqrt{\dfrac{(5-2\sqrt{5})(10+2\sqrt{5})}{100-20}}=\sqrt{\dfrac{30-10\sqrt{5}}{80}}=\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{5}}{8}}$. De façon tout à fait similaire, $\tan^2\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)=\dfrac{5}{5+2\sqrt{5}}$, donc $\dfrac{1}{\cos^2(\frac{4\pi}{5})}=\dfrac{10+2\sqrt{5}}{5+2\sqrt{5}}$, et $\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)=-\sqrt{\dfrac{5+2\sqrt{5}}{10+2\sqrt{5}}}=-\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{8}}$.

Exercice 6 (**)

C'est plus un exercice d'arithmétique qu'un exercice sur les nombres complexes. Commençons par remarquer que, si z est une racine n-ème de l'unité, alors z est aussi une racine k-ème de l'unité pour tous les entiers k multiples de n. En effet, si $k=a\times n$, où a est un nombre entier, et $z^n=1$, alors $z^k=(z^n)^a=1^a=1$. Pour revenir à notre problème, si on note r le pgcd de p et de q, toutes les racines r-èmes de l'unité sont donc à la fois racines p-èmes et q-èmes, donc $\mathbb{U}_r\subset\mathbb{U}_p\cap\mathbb{U}_q$.

La réciproque est un peu plus compliquée si on ne connait pas le théorème de Bezout. Si on a simultanément $z\in\mathbb{U}_p$ et $z\in\mathbb{U}_q$, on a $z^p=z^q=1$ donc pour tous entiers n et m, on a $z^{np-mq}=\dfrac{z^{np}}{z^{mq}}=1$. Or, il existe un couple d'entiers tels que $np-mq$ soit égal à r (c'est ça le théorème de Bezout), donc $z^r=1$. Pour montrer Bezout, on peut passer par l'algorithme d'Euclide : à chaque étape, le nouveau reste obtenu est une combinaison à coefficients entiers des deux restes précédents (il n'y a qu'à écrire la division euclidienne), donc par récurrence facile de p et de q. Comme le dernier reste est égal à r, celui-ci est bien une combinaison à coefficients entiers de p et q.

Conclusion : $\mathbb{U}_p\cap\mathbb{U}_q=\mathbb{U}_{pgcd(p,q)}$.

Exercice 7 (*)

Pour la première, qui est un grand classique, Euler est votre ami :

$$\begin{aligned}
\cos^6(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^6 \\
&= \frac{e^{6ix}+6e^{5ix}e^{-ix}+15e^{4ix}e^{-2ix}+20e^{3ix}e^{-3ix}15e^{2ix}e^{-4ix}+6e^{ix}e^{-5ix}+e^{-6ix}}{64} \\
&= \frac{2\cos(6x)+12\cos(4x)+30\cos(2x)+20}{64} \\
&= \frac{1}{32}\cos(6x)+\frac{3}{16}\cos(4x)+\frac{15}{32}\cos(2x)+\frac{5}{16}
\end{aligned}$$

Pour la deuxième, $\sin^2(x)\cos^3(x) = (1-\cos^2(x))\cos^3(x) = \cos^3(x)-\cos^5(x)$. Or, par la même méthode que ci-dessus, $\cos^5(x) = \frac{1}{16}(\cos(5x)+5\cos(3x)+10\cos(x))$ et $\cos^3(x) = \frac{1}{4}(\cos(3x)+3\cos(x))$, donc $\sin^2(x)\cos^3(x) = -\frac{1}{16}\cos(5x)-\frac{1}{16}\cos(3x)+\frac{1}{8}\cos(x)$.

Enfin pour la dernière linéarisation,

$$\begin{aligned}
\cos(x)\sin^5(x) &= \cos(x)\sin(x)\sin^4(x) \\
&= \frac{1}{2}\sin(2x)\sin^4(x) \\
&= \frac{1}{32}\left(\frac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{2i}\right)(e^{ix}-e^{-ix})^4 \\
&= \frac{1}{32}\frac{(e^{2ix}-e^{-2ix})(e^{4ix}-4e^{2ix}+6-4e^{-2ix}+e^{-4ix})}{2i} \\
&= \frac{1}{32}\frac{e^{6ix}-4e^{4ix}+6e^{2ix}-4+e^{-2ix}-e^{2ix}+4-6e^{-2ix}+4e^{-4ix}-e^{-6ix}}{2i} \\
&= \frac{1}{32}\frac{e^{6ix}-4e^{4ix}+5e^{2ix}-5e^{-2ix}+4e^{-4ix}-e^{-6ix}}{2i} \\
&= \frac{1}{32}(\sin(6x)-4\sin(4x)+5\sin(2x))
\end{aligned}$$

On commence par écrire $\cos(5x) = \mathrm{Re}(e^{i5x}) = \mathrm{Re}(e^{ix})^5 = \mathrm{Re}(\cos(x)+i\sin(x))^5 = \mathrm{Re}(\cos^5(x)+5\cos^4(x)(i\sin(x))+10\cos^3(x)(i\sin(x))^2+10\cos^2(x)(i\sin(x))^3+5\cos(x)(i\sin(x))^4+(i\sin(x))^5)$. On ne garde que les termes réels de la somme pour obtenir

$$\begin{aligned}
\cos(5x) &= \cos^5(x)-10\cos^3(x)\sin^2(x)+5\cos(x)\sin^4(x) \\
&= \cos^5(x)-10\cos^3(x)(1-\cos^2(x))+5\cos(x)(1-\cos^2(x))^2 \\
&= \cos^5(x)-10\cos^3(x)+10\cos^5(x)+5\cos(x)-10\cos^3(x)+5\cos^5(x) \\
&= 16\cos^5(x)-20\cos^3(x)+5\cos(x)
\end{aligned}$$

De l'autre côté, $\sin^2(3x) = 1-\cos^2(3x) = 1-(4\cos^3(x)-3\cos(x))^2 = 1-16\cos^6(x)+24\cos^4(x)-9\cos^2(x)$. Un peu de courage pour la dernière étape :

$$\begin{aligned}
\cos(5x)\sin^2(3x) &= (16\cos^5(x)-20\cos^3(x)+5\cos(x))(-16\cos^6(x)+24\cos^4(x)-9\cos^2(x)+1) \\
&= -256\cos^{11}(x)+384\cos^9(x)-144\cos^7(x)+16\cos^5(x)+320\cos^9(x)-480\cos^7(x) \\
&\quad +180\cos^5(x)-20\cos^3(x)-80\cos^7(x)+120\cos^5(x)-45\cos^3(x)+5\cos(x) \\
&= -256\cos^{11}(x)+704\cos^9(x)-704\cos^7(x)+316\cos^5(x)-65\cos^3(x)+5\cos(x)
\end{aligned}.$$

Je me rends compte en relisant le corrigé que ce calcul peut faire un peu peur !

Attaquons-nous désormais au tout dernier calcul. On peut évidemment tricher en utilisant les formules de duplication, mais ça marche très bien comme ci-dessus :
$\sin(2x) = \mathrm{Im}(e^{ix})^2 = \mathrm{Im}(\cos(x)+i\sin(x))^2 = \mathrm{Im}(\cos^2(x)+2i\cos(x)\sin(x)-\sin^2(x)) = 2\cos(x)\sin(x)$

On fait de même pour $\sin(4x) = \mathrm{Im}(\cos(x)+i\sin(x))^4 = 4\cos^3(x)\sin(x)-4\cos(x)\sin^3(x) = 4\sin(x)(\cos^3(x)-\cos(x)(1-\cos^2(x))) = 4\sin(x)(2\cos^3(x)-\cos(x)) = \sin(x)(8\cos^3(x)-4\cos(x))$.

On enchaine courageusement : $\sin(6x) = \mathrm{Im}(\cos(x)+i\sin(x))^6 = 6\cos^5(x)\sin(x)-20\cos^3(x)\sin^3(x)+6\cos(x)\sin^5(x) = \sin(x)(6\cos^5(x)-20\cos^3(x)(1-\cos^2(x))+6\cos(x)(1-\cos^2(x))^2) = \sin(x)(6\cos^5(x)-20\cos^3(x)+20\cos^5(x)+6\cos(x)-12\cos^3(x)+6\cos^5(x)) = \sin(x)(32\cos^5(x)-32\cos^3(x)+6\cos(x))$.

Enfin, $\sin(8x) = \mathrm{Im}(\cos(x) + i\sin(x))^8 = 8\cos^7(x)\sin(x) - 56\cos^5(x)\sin^3(x) + 56\cos^3(x)\sin^5(x) - 8\cos(x)\sin^7(x) = \sin(x)(8\cos^7(x) - 56\cos^5(x)(1-\cos^2(x)) + 56\cos^3(x)(1-\cos^2(x))^2 - 8\cos(x)(1-\cos^2(x))^3) = \sin(x)(8\cos^7(x) - 56\cos^5(x) + 56\cos^7(x) + 56\cos^3(x) - 112\cos^5(x) + 56\cos^7(x) - 8\cos(x) + 24\cos^3(x) - 24\cos^5(x) + 8\cos^7(x)) = \sin(x)(128\cos^7(x) - 192\cos^5(x) + 80\cos^3(x) - 8\cos(x))$.

Il ne reste plus qu'à brillamment additionner tout ça pour obtenir
$\sin(2x) + \sin(4x) + \sin(6x) + \sin(8x) = \sin(x)(128\cos^7(x) - 160\cos^5(x) + 56\cos^3(x) - 4\cos(x))$.

Exercice 8 (***)

La première somme utilise une reconnaissance de binome de Newton :
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(kx) = \mathrm{Re}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ikx} = \mathrm{Re}(1+e^{ix})^n = \mathrm{Re}(e^{i\frac{x}{2}}(e^{i\frac{x}{2}}+e^{-i\frac{x}{2}}))^n = \mathrm{Re}\left(2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^n e^{i\frac{nx}{2}} = 2^n\cos^n\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{nx}{2}\right)$

La deuxième est tout à fait classique, avec reconnaissance d'une somme géométrique :
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin(kx)}{\cos^k(x)} = \mathrm{Im}\sum_{k=0}^{n}\frac{e^{ikx}}{\cos^k(x)} = \mathrm{Im}\,\frac{1-\frac{e^{i(n+1)x}}{\cos^{n+1}(x)}}{1-\frac{e^{ix}}{\cos(x)}} = \mathrm{Im}\,\frac{\cos(x)-\frac{e^{i(n+1)x}}{\cos^n(x)}}{\cos(x)-\cos(x)-i\sin(x)}$
$\displaystyle= \mathrm{Im}\,i\frac{\frac{\cos^{n+1}(x)-e^{i(n+1)x}}{\cos^n(x)}}{\sin(x)} = \frac{\cos^{n+1}(x)-\cos((n+1)x)}{\sin(x)\cos^n(x)}$

Enfin, la dernière demande un peu plus d'astuce :
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{1-e^{\frac{2ik\pi}{n}}} = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{e^{-i\frac{k\pi}{n}}}{e^{-i\frac{k\pi}{n}}-e^{\frac{ik\pi}{n}}} = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{\cos(\frac{k\pi}{n})-i\sin(\frac{k\pi}{n})}{-2i\sin(\frac{k\pi}{n})} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}1+\frac{i}{\tan(\frac{k\pi}{n})}$. Or, en utilisant la relation $\tan(\pi - x) = \tan x$, tous les les termes de la deuxième partie de la somme s'annulent deux à deux (par exemple, le premier est l'opposé du dernier) donc il ne reste que $\dfrac{n-1}{2}$, qui est la valeur de la somme demandée.

Exercice 9 (* à **)

1. En effet, $|u+v|^2 + |u-v|^2 = (u+v)(\overline{u}+\overline{v}) + (u-v)(\overline{u}-\overline{v}) = |u|^2 + u\overline{v} + v\overline{u} + |v|^2 + |u|^2 - u\overline{v} - v\overline{u} + |v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$.
2. Puisque u et v sont de module 1, on peut poser $u = e^{i\theta}$ et $v = e^{i\theta'}$. On a alors $\dfrac{u+v}{1+uv} = \dfrac{e^{i\theta}+e^{i\theta'}}{1+e^{i(\theta+\theta')}} = \dfrac{e^{i\theta}+e^{i\theta'}}{e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}\times 2\cos\frac{\theta+\theta'}{2}} = \dfrac{e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}}+e^{i\frac{\theta'-\theta}{2}}}{2\cos\frac{\theta+\theta'}{2}} = \dfrac{\cos\frac{\theta-\theta'}{2}}{\cos\frac{\theta+\theta'}{2}}$, qui est bien un nombre réel.
3. Si $|z| = 1$, $z = e^{i\theta}$. Cherchons les valeurs de $\theta \in [-\pi, \pi]$ pour lesquelles $|1+z| \geqslant 1$. Par un calcul classique, $|1+z| = |e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}})| = 2\left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|$. Or, $\left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| \geqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\theta}{2} \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right] [\pi] \Leftrightarrow \theta \in \left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] [2\pi]$. Vérifions que pour les valeurs restantes de θ, $|1+z^2| \geqslant 1$. En effet, on a alors $\theta \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right] [2\pi]$, donc $2\theta \in \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right] [4\pi]$, c'est-àdire que $2\theta \in \left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right] [4\pi]$ donc $|1+z^2| \geqslant 1$ d'après le calcul précédent, puisque $z^2 = e^{2i\theta}$. Les seuls cas pour lesquels les deux inégalités sont vérifiées sont $z_1 = e^{2i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = e^{-2i\frac{\pi}{3}}$.

Exercice 10 (* à **)

- C'est le cas le plus classique de définition d'un cercle qui donne pour équation complexe $|z-2+i|=3$. En élevant au carré et en développant, on obtient $(z-2+i)(\overline{z}-2-i)=9$, soit $z\overline{z}-(2+i)z+(i-2)\overline{z}+5=9$, donc une équation développée de la forme $z\overline{z}-(2+i)z+(i-2)\overline{z}-4=0$. Passons à l'équation cartésienne : en posant $z=x+iy$ dans la dernière équation, $x^2+y^2-(2+i)(x+iy)+(i-2)(x-iy)-4=0$, donc $x^2+y^2-2x-2iy-ix+y+ix+y-2x+2iy-4=0$. Tous les termes imaginaires s'annulent (ce sera toujours le cas) pour donner $x^2+y^2-4x+2y-4=0$. Si on factorise cette équation développée en faisant apparaitre des formes canoniques, cela donne $(x-2)^2-4+(y+1)^2-1-4=0$, soit $(x-2)^2+(y+1)^2=9$. On retrouve bien l'équation d'un cercle de centre $A(2;-1)$ et de rayon $\sqrt{9}=3$.
- Pour changer un peu, utilisons la caractérisation d'un cercle donné par un de ses diamètres : un point M appartient au cercle si et seulement si $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$. En termes de nombres complexes, on a donc l'équation $(\overline{z_M-z_A})(z_M-z_B)\in i\mathbb{R}$, soit, en posant $z=x+iy$, $(x-iy+1+2i)(x+iy-3-4i)\in i\mathbb{R}$. En isolant la partie réelle qui doit être nulle, on tombe sur $x^2-3x+y^2-4y+x-3-2y+8=0$, soit $x^2+y^2-2x-6y+5=0$. On reconnait l'équation cartésienne développées d'un cercle. Factorisons-là : $(x-1)^2-1+(y-3)^2-9+5=0$, soit $(x-1)^2+(y-3)^2=5$. On reconnait un cercle de centre $A(1+3i)$ (qui est bien le milieu du segment $[AB]$) et de rayon $\sqrt{5}$. L'équation complexe sera donc $|z-1-3i|=\sqrt{5}$, soit en développant $(z-1-3i)(\overline{z}-1+3i)=5$, ou encore $z\overline{z}+(3i-1)z-(1+3i)\overline{z}+5=0$.
- On peut factoriser cette équation sous la forme $(z-i)(\overline{z}+i)-1-3=0$, soit $|z-i|^2=4$ et donc $|z-i|=2$. On reconnait un cercle de centre $A(i)$ et de rayon 2. Alternativement, on écrit $z=x+iy$ et on remplace dans l'équation initiale : $(x+iy)(x-iy)+i(x+iy)-i(x-iy)-3=0$ donne $x^2+y^2-2y-3=0$. On peut factoriser cette équation cartésienne à l'aide des formes canoniques : $x^2+(y-1)^2-1-3=0$, soit $x^2+(y-1)^2=4$. On retrouve évidemment le même centre et le même rayon pour le cercle.
- Factorisons cette équation : $(x-1)^2-1+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}+9=0$, soit $(x-1)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2=-\dfrac{23}{4}$. Ce cercle ayant le mauvais goût d'être inexistant, on peut donner n'importe quelle équation complexe, mais par souci de cohérence, on va prendre $\left|z-1-\dfrac{3}{2}i\right|=-\dfrac{23}{4}$. Par contre, on ne peut pas donner aisément d'équation complexe développée, puisque si on élève au carré comme on a l'habitude, on va tomber sur l'équation du cercle de centre $A\left(1+\dfrac{3}{2}i\right)$ et de rayon $\dfrac{23}{4}$, qui lui n'est pas vide du tout.
- On cherche en fait une équation du cercle circonscrit au triangle ABC. Au vu des coordonnées des points A et B, le centre se trouvera sur l'axi imaginaire pur, qui est la médiatrice de $[AB]$. On recherche donc un point $O(ki)$ vérifiant $|z_O-z_B|=|z_O-z_C|$, soit en élevant au carré $|ki+1+i|^2=|ki-5i|^2$. À gauche, celà vaut $1+(k+1)^2=k^2+2k+2$, à droite on a $(k-5)^2=k^2-10k+25$. La valeur k doit donc vérifier $k^2+2k+2=k^2-10k+25$, soit $12k=23$, donc $k=\dfrac{23}{12}$. Quant au rayon, il est donc égal à $5-k$ (la valeur de la distance CO, si vous vous amusez à essayer de recalculer par exemple k^2+2k+2, vous allez vous embêter inutilement), soit à $\dfrac{37}{12}$. On obtient donc la magnifique équation de cercle $\left|z-\dfrac{23}{12}i\right|=\dfrac{37}{12}$. Sous forme développée, $\left(z-\dfrac{23}{12}i\right)\left(\overline{z}+\dfrac{23}{12}i\right)=\dfrac{1\ 369}{144}$, soit $z\overline{z}+\dfrac{23}{12}iz-\dfrac{23}{12}i\overline{z}-\dfrac{840}{144}=0$. Ici, on passe rapidement à l'équation cartésienne en notant que $z-\overline{z}=2\,\mathrm{Im}(z)$, ce qui donne $x^2+y^2-\dfrac{23}{6}y-\dfrac{105}{18}=0$. Refactoriser à l'aide de la forme canonique ramène à $x^2+\left(y-\dfrac{23}{12}\right)^2=\dfrac{1\ 369}{144}$.
- Un cercle tangent simultanément aux deux axes a un centre d'affixe $k+ki$ et un rayon $|k|$, où $k\in\mathbb{R}$ (faites un dessin). Ici, on cherche donc une valeur de k pour laquelle $|6+7i-k-ki|=k$,

soit $(6-k)^2+(7-k)^2=k^2$, donc $36-12k+k^2+49-14k+k^2=k^2$, donc $k^2-26k+85=0$. Cette magnifique équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 676-340=336$, et admet donc deux racines $k_1 = \dfrac{26+\sqrt{336}}{2} = 13+2\sqrt{21}$, et $k_2 = 13-2\sqrt{21}$. Donnons par exemple les équations du premier cercle (ce sera largement suffisant vu l'intérêt des calculs) : $|z-(13+2\sqrt{21})(1+i)| = 13+2\sqrt{21}$. En développant, $(z-(13+2\sqrt{21})(1+i))(\overline{z}-(13+2\sqrt{21})(1-i)) = 253+52\sqrt{21}$, soit $z\overline{z}+(13+2\sqrt{21})(i-1)z-(13+2\sqrt{21})(1+i)\overline{z}+253+52\sqrt{21}=0$. Si on préfère une équation cartésienne, $(x-13-2\sqrt{21})^2+(y-13-2\sqrt{21})^2 = 253+52\sqrt{21}$, que nous ne développerons pas.

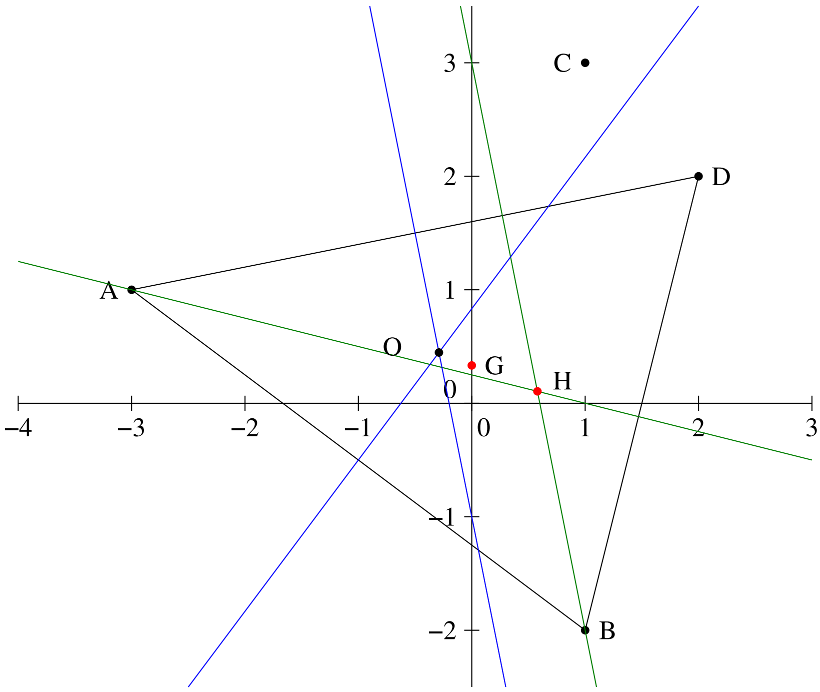
Exercice 11 (* à ***)

1. Du facile pour commencer : $\dfrac{z_B+z_C}{2} = 1+\dfrac{1}{2}i$.
2. Toujours facile : $z_{\overrightarrow{AB-2AC}} = z_B-z_A-2(z_C-z_A) = 4-3i-2(4+2i) = -4-7i$
3. Une façon de décrire les points M appartenant à la droite (AC) est de dire que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AC}$ doivent être colinéaires, autrement dit que $(\overline{z_M-z_A})(z_C-z_A) \in \mathbb{R}$. En écrivant z sous la forme $a+ib$, on a donc $(a-ib+3+i)(4+2i) \in \mathbb{R}$, soit $-4b+4+2a+6=0$, ou encore $a-2b=-5$. De même, M appartient à (BD) si $(\overline{z_M-z_B})(z_D-z_C) \in \mathbb{R}$, soit $(a-ib-1-2i)(1-i) \in \mathbb{R}$, soit encore $-a+1-b-2=0$, donc $-a-b=1$. Il ne reste plus qu'un petit système à résoudre. En additionnant les deux équations, $-3b=-4$ soit $b=\dfrac{4}{3}$, et $a=2b-5=-\dfrac{7}{3}$. Le point d'intersection des deux droites a donc pour affixe $-\dfrac{7}{3}+\dfrac{4}{3}i$.
4. La somme des coefficients du barycentre étant égale à 1, il suffit de calculer $z_B-2z_C+2z_D = 1-2i-2-6i+4+4i = 1-4i$.
5. Un vecteur directeur de la droite est $\overrightarrow{CD}(1-i)$. Comme il a pour norme $\sqrt{2}$, le vecteur $\overrightarrow{u}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)$ est un vecteur directeur normé de (CD). Pour (AB), on a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}(4-3i)$, donc pour vecteur normal $\overrightarrow{n}(3+4i)$. Ce vecteur ayant pour norme $\sqrt{9+16}=5$, le vecteur $\overrightarrow{v}\left(\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i\right)$ est un vecteur normal normé à (AB).
6. Pour le centre de gravité, il suffit de calculer $\dfrac{1}{3}(z_A+z_B+z_D) = \dfrac{1}{3}(-3+i+1-2i+2+2i) = \dfrac{1}{3}i$. Le centre de gravité du triangle a pour affixe $\dfrac{1}{3}i$.

   Pour l'orthocentre, on cherche un point H d'affixe $a+ib$ tel que (AH) soit orthogonale à (BD) et (BH) à (AD). La première condition s'exprime de la façon suivante : $(\overline{z_H-z_A})(z_D-z_B) \in i\mathbb{R}$, soit $(a-ib+3+i)(1+4i) \in i\mathbb{R}$, donc $a+3+4b-4=0$, donc $a+4b=1$. De même, la deuxième condition s'exprime par $(a-ib-1-2i)(5+i) \in i\mathbb{R}$, donc $5a-5+b+2=0$, ce qui donne $5a+b=3$. On résout le petit système, par exemple par substitution : $a=1-4b$, donc $5-20b+b=3$, soit $b=\dfrac{2}{19}$, puis $a=1-4b=\dfrac{11}{19}$. L'orthocentre a donc pour affixe $\dfrac{11}{19}+\dfrac{2}{19}i$.

   Le centre du cercle circonscrit (on va garder le plus dur pour la fin) Ω d'affixe $c+id$ se trouve à égale distance des trois points. La condition $\Omega A = \Omega B$ se traduit (en élevant au carré) par $|c+id+3-i|^2 = |c+id-1+2i|^2$, soit $(c+3)^2+(d-1)^2 = (c-1)^2+(d+2)^2$, donc $c^2+6c+9+d^2-2d+1 = c^2-2c+1+d^2+4d+4$. On obtient finalement la simple équation $8c-6d=-5$ (qui est une équation cartésienne de droite, en l'occurence de la médiatrice du segment $[AB]$; on peut retrouver cette équation en partant du milieu de ce segment et en écrivant une condition d'orthogonalité). De même, la condition $\Omega A = \Omega D$ s'exprime par $|c+id+3-i|^2, = |c+id-2-2i|^2$, soit $c^2+6c+9+d^2-2d+1 = c^2-4c+4+d^2-4d+4$, donc $10c+2d=-2$ (ou encore $5c+d=-1$). Encore un système à résoudre : $d=-1-5c$, donc $8c + 6 + 30c = -5$, ce qui donne $c = -\frac{11}{38}$, puis $d = \frac{17}{38}$. Le centre du cercle circonscrit a pour affixe $-\frac{11}{38} + \frac{17}{38}i$.

Terminons avec le centre $I(e + if)$ du cercle inscrit. Si vous connaissez le résultat qui dit que I est le barycentre des trois sommets du triangle affectés d'un poids égal à la longueur du côté opposé, c'est assez facile. Passer par les angles est franchement compliqué on peut écrire une condition sur les arguments qui finit par donner une ignoble équation du second degré en e et f (ce qui est normal puisqu'un angle a deux bissectrices, l'une intérieure et l'autre extérieure) qu'il faut factoriser, et trier les solutions trouvées. Bref, du boulot pas très rigolo. On peut faire (un peu) plus simple. Normons le vecteur $\overrightarrow{AB}(4-3i)$, pour obtenir une affixe $\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$, et considérons le point B' tel que $\overrightarrow{AB'}$ a pour affixe $\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$, c'est-à-dire $B'\left(-\frac{11}{5} - \frac{2}{5}i\right)$. Ce point B' est situé sur la droite AB, à une distance 1 de A. Effectuons la même opération sur la droite AD : $\| \overrightarrow{AD} \| = \sqrt{26}$, on obtient le point $D'\left(-3 + \frac{5}{\sqrt{26}} + i + \frac{1}{\sqrt{26}}i\right)$. Comme le triangle $AB'D'$ est isocèle en A avec les mêmes directions de côté issus de A que le triangle ABD, la bissectrice issue de A est confondue avec la médiatrice du segment $[B'D']$. Il faut un peu de courage pour en calculer une équation : $IB' = ID'$ donc $\left|e + if + \frac{11}{5} + \frac{2}{5}i\right|^2 = \left|e + if + 3 - \frac{5}{\sqrt{26}} - i - \frac{1}{\sqrt{26}}i\right|^2$, soit $\left(e - \frac{11}{5}\right)^2 + \left(f + \frac{2}{5}\right)^2 = \left(e + 3 - \frac{5}{\sqrt{26}}\right)^2 + \left(f - 1 - \frac{1}{\sqrt{26}}\right)^2$. Après simplification (si j'ose dire), il reste $e\left(\frac{10}{\sqrt{26}} - \frac{52}{5}\right) + f\left(\frac{2}{\sqrt{26}} + \frac{14}{5}\right) = 6 - \frac{28}{\sqrt{26}}$. C'est bien une équation de droite, quoique fort indigeste. On devrait évidemment faire la même chose pour (par exemple) la bissectrice de $\widehat{BAD}$. On connait déjà (au signe près) un vecteur directeur de $\overrightarrow{BA}$, on peut prendre le point $A'\left(\frac{1}{5} - \frac{7}{5}i\right)$. De l'autre côté, on calcule $\| \overrightarrow{BD} \| = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17}$, on obtient alors un point $D''\left(1 + \frac{1}{\sqrt{17}} - 2i + \frac{4}{\sqrt{17}}i\right)$. Je vous épargne la suite des calculs, complètement immondes à effectuer entièrement de façon exacte. On obtient finalement un centre du cercle inscrit dont les coordonnées sont à peu près : $I(0.158 + 0.578i)$. Sur le graphique, je n'ai pas placé les bissectrices pour ne pas surcharger, les hauteurs sont en bleu et les médiatrices en vert, on constate que l'orthocentre, le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit sont alignés.



Exercice 12 (* à **)

Commençons par les équations, normalement c'est assez facile :

- $z' = z + 3 - 2i$
- $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}}z = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z$
- $z' - (1-2i) = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - 1 + 2i)$, soit $z' = iz - i - 2 + 1 - 2i = iz - 1 - 3i$
- On peut s'en sortir assez vite en remarquant que $f(z)$ est de la forme $z' = a\overline{z} + b$, et que par exemple $f(1) = i$ et $f(i) = 1$. On a donc $a + b = i$ et $-ai + b = 1$. En soustrayant les deux équations, $(1+i)a = i - 1$, donc $a = \frac{i-1}{1+i} = \frac{(i-1)(1-i)}{2} = \frac{2i}{2} = i$. On en déduit que $b = 0$ et $z' = i\overline{z}$.
- C'est une rotation d'angle π, donc $z' - 3i = -(z - 3i)$, soit $z' = -z + 6i$.
- Encore du cours : $z' + 2 - i = \frac{1}{2}(z + 2 - i)$, soit $z' = \frac{1}{2}z - 1 + \frac{1}{2}i$.
- Allons-y pour la composée : $z' = \frac{1}{2}(-z + 6i) - 1 + \frac{1}{2}i = -\frac{1}{2}z - 1 + \frac{7}{2}i$.

Pour reconnaitre les transformations, ça peut être un peu plus compliqué :

- On a une composée de réflexion (par rapport à l'axe réel) et de translation (de vecteur d'affixe 3), ça ne se simplifie pas. Ce genre de composition ne peut se simplifier que si la translation est de vecteur orthogonal à l'axe de la réflexion (auquel cas la composée est simplement une réflexion).
- Équation de similitude directe, on cherche le point fixe : $z = (1-i)z + 2i - 1 \Leftrightarrow z = \frac{2i-1}{i} = 2 + i$. Par ailleurs, $|1 - i| = \sqrt{2}$ et $\arg(1-i) = -\frac{\pi}{4}$. L'application f est donc la composée d'une rotation de centre $A(2+i)$ et de rapport $\sqrt{2}$, et d'une rotation de même centre A et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.
- Composée d'une réflexion d'axe réel et d'homothétie de centre 0 et de rapport 2, rien à ajouter.

- Encore une similitude directe, cherchons le point fixe : $z = 3z - 4i + 2 \Leftrightarrow z = \dfrac{2-4i}{-2} = -1+2i$. Calculer le module et l'argument de 3 ne devrait pas poser trop de problème. L'application est donc l'homothétie de centre $A(-1+2i)$ et de rapport 3.
- Posons $g(z) = -iz + 2i - 1$, et cherchons le point fixe de cette isométrie : $z = \dfrac{2i-1}{1+i} = \dfrac{(2i-1)(1-i)}{2} = \dfrac{1+3i}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i$. Par ailleurs, on a évidemment $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$. L'application f est donc la composée d'une rotation de centre $A\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i\right)$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$, et d'une symétrie par rapport à l'axe réel.

Exercice 13 (**)

1. Du simple calcul : $f(1) = 3$; $f(2i-5) = -4 + 25 - 20i + 2i - 5 + 1 = 17 - 18i$; et $f(e^{i\frac{\pi}{4}}) = i + \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i + 1 = \left(1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)(1+i)$.
2. Il faut résoudre l'équation $z^2 + z + 1 = 1 + i$, soit $z^2 + z - i = 0$. Elle a pour discriminant $\Delta = 1 + 4i$. Cherchon une valeur de $\delta = a + ib$ telle que $\delta^2 = \Delta$. L'égalité des parties réelle et imaginaire donne $a^2 - b^2 = 1$ et $2ab = 4$, et celle du module donne $a^2 + b^2 = \sqrt{17}$. On en déduit que $2a^2 = 1 + \sqrt{17}$ et $2b^2 = \sqrt{17} - 1$. Les nombres a et b devant être de même signe, on peut choisir $\delta = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}} + i\sqrt{\dfrac{\sqrt{17}-1}{2}}$. Les antécédents de $1+i$ sont alors au nombre de deux, ce sont les nombres $z_1 = \dfrac{-1+\delta}{2}$ et $z_2 = \dfrac{-1-\delta}{2}$ (expliciter plus n'a absolument aucun intérêt).
3. Il suffit de résoudre l'équation $f(z) = z$, soit $z^2 = -1$. Il y a donc deux points invariants, i et $-i$.
4. En notant $z = a+ib$, on a $f(z) = a^2 - b^2 + 2iab + a + ib + 1$. Cette image a une partie imaginaire nulle si $2ab + b = 0$, soit $b(2a+1) = 0$. On doit donc avoir soit $b = 0$ (c'est-à-dire que z est en fait un nombre réel, ces solutions n'ont rien de surprenant puisque les nombres réels ont de façon évidente une image réelle par f), soit $a = -\dfrac{1}{2}$, ce qui correspond aux nombres complexes de partie imaginaire $-\dfrac{1}{2}$.
5. Cette condition peut se traduire par le fait que $(\overline{f(z)-1})(z-1) \in \mathbb{R}$, soit $(a^2 - b^2 - 2iab + a - ib)(a + ib - 1) \in \mathbb{R}$. La partie imaginaire de ce produit doit donc être nulle, ce qui se traduit par $a^2b - b^3 - 2a^2b + 2ab + ab - ab + b = 0$, soit $b(-b^2 - a^2 + 2a + 1) = 0$. La condition $b = 0$ donne comme tout à l'heure comme solutions tout l'axe réel (encore fois, pas de surprise, si z est réel, 1, z et $f(z)$ sont alignés sur l'axe réel), la parenthèse est une équation de cercle : $a^2 + b^2 - 2a - 1 = 0$ donne $(a-1)^2 - 1 + b^2 - 1 = 0$, c'est-à-dire $(a-1)^2 + b^2 = 2$, soit un cercle de centre $A(1)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

Exercice 14 (**)

1. Le plus simple est d'expliciter l'épplication réciproque : si $Z = \dfrac{z+1}{z-2}$, alors $zZ - 2Z - z - 1 = 0$, soit $z = \dfrac{2Z+1}{Z-1}$. Cette application g, définie sur $\mathbb{C}\backslash\{1\}$, vérifie $f \circ g = id$ et $g \circ f = id$ (sur leurs ensembles de définition respectifs), ce qui prouve que f est bijective de $\mathbb{C}\backslash\{2\}$ vers $\mathbb{C}\backslash\{1\}$.
2. C'est en fait très simple : si $f(z) \in \mathbb{U}$, c'est que $|f(z)| = 1$, soit $|z+1| = |z-2|$. En posant $z = a+ib$ et en élevant tout au carré, on obtient $(a+1)^2 + b^2 = (a-2)^2 + b^2$, donc $2a+1 = -4a+4$,

ce qui donne $a = \frac{1}{2}$. L'image réciproque de $\mathbb{U}$ est donc la droite des complexes de partie réelle $\frac{1}{2}$. Pour obtenir l'image réciproque du disque unité, il suffit de remplacer les égalités par des inégalités, on obtient la condition $a \leqslant \frac{1}{2}$, c'est -à-dire que z appartient à un demi-plan délimité par la droite précédente.

3. Il suffit de choisir parmi les nombres complexes de partie réelle $\frac{1}{2}$ ceux qui ont pour module 1. Il y en a deux, $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

4. Pour que $f(f(z))$ soit défini, on doit avoir $f(z) \neq 2$, c'est-à-dire au vu du calcul de la première question $z \neq \frac{2 \times 2 + 1}{2 - 1} = 5$. L'application $f \circ f$ est donc définie sur $\mathbb{C} \backslash \{2; 5\}$. Elle est évidemment bijective pusique $g \circ g$ sera clairement sa réciproque. L'ensemble vers lequel f est bijective est donc le domaine de définition de $g \circ g$, qui est définie si $g(z) \neq 1$, donc si $z \neq f(1) = -2$. Finalement, $f \circ f$ est bijective de $\mathbb{C} \backslash \{2; 5\}$ vers $\mathbb{C} \backslash \{-2; 1\}$.

Exercice 15 (***)

1. C'est très très simple, la réciproque de f est f elle-même puisque $f(f(z)) = z$ quel que soit z dans $\mathbb{C}^*$.

2. Si on part de $z = a + ib$, on peut écrire $\frac{1}{z} = \frac{a + ib}{a^2 + b^2}$, donc $f(z)$ a une partie réelle strictement positive si $a > 0$, c'est-à-dire si z lui-même a une partie réelle strictement positive. Autrement dit, le demi-plan ouvert situé à droite de l'axe imaginaire pur est globalement invariant par f.

3. Prenons par exemple $A(1)$ et $B(i)$ (on peut choisir encore beaucoup plus simple). Le milieu de AB a pour affixe $\frac{1 + i}{2}$, donc pour image $\frac{2}{1 + i} = \frac{2(1 - i)}{2} = 1 - i$. Pourtant, le milieu du segment $[A'B']$ reliant les images de A et B a pour affixe $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{i}\right) = \frac{1}{2}(1 - i)$. Un mystérieux facteur $\frac{1}{2}$ est apparu, le mileu des images n'est pas l'image du milieu.

4. Il faut bien sûr supprimer 0 de chacun des deux axes. L'application f effectue une bijection de $\mathbb{R}^*$ dans lui-même (c'est une propriété de la fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$. De même, $\frac{1}{ki} \in i\mathbb{R}$, et f est bijective de $i\mathbb{R} \backslash \{0\}$ dans lui-même.

5. Une droite passant par l'origine peut être décrite comme l'ensemble des multiples réels d'un nombre complexe z donné (par exemple tous les multiples réels de $1 + i$ forment la première bissectrice des deux axes). Soit donc une telle droite avec $z = a + ib$ fixé, si k est un réel non nul, $f(kz) = \frac{1}{k(a + ib)} = \frac{a - ib}{k(a^2 + b^2)}$. Toutes ces images sont donc également situées sur une droite, celle constituée de tous les multiples réels de $\overline{z}$. Autrement dit, l'image d'une droite passant par l'origine est la symétrique de cette droite par rapport à l'axe réel.

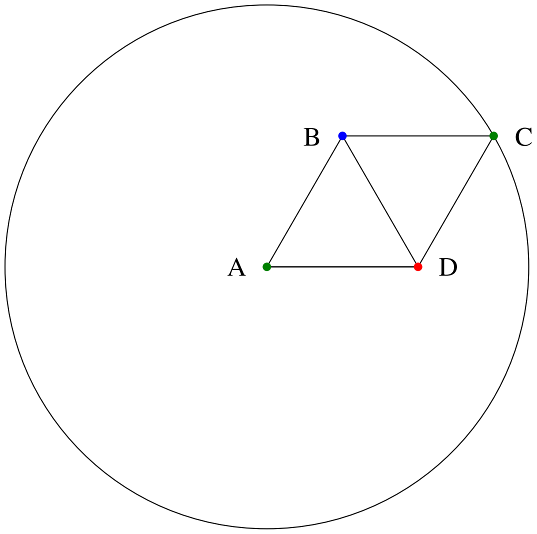
6. Soit M un point d'affixe z appartenant à la droite (AB), on a donc $(\overline{z - z_A})(z - z_B) \in \mathbb{R}$, soit $\overline{z}z - z - i\overline{z} + i \in \mathbb{R}$, soit, en notant $z = a + ib$, $-b - a + 1 = 0$, soit $b = 1 - a$. On a donc $\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib}$. Calculons la distance de cet inverse au point $C\left(\frac{1 - i}{2}\right)$: $\left|\frac{1}{a + ib} - \frac{1 - i}{2}\right| = \left|\frac{2 - (a + ib)(1 - i)}{2(a + ib)}\right| = \left|\frac{2 - a - b + i(-b + a)}{2(a + ib)}\right| = \left|\frac{1 + i(-1 + 2a)}{2(a + ib)}\right|$ en utilisant la relation $b = 1_a$. On obtient donc, en élevant au carré, $\frac{1 + (2a - 1)^2}{4(a^2 + b^2)} = \frac{1 + 1 + 4a^2 - 4a}{4(a^2 + (1 - a)^2)} = \frac{2 - 4a + 4a^2}{8a^2 - 8a + 4} = \frac{1}{2}$. Les points se trouvent donc tous sur le cercle de centre C et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Notons que

$\left|\frac{1-i}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Le cercle en question passe donc par l'origine du repère. Pour déterminer quels sont les points du cercle ayant un antécédent sur la droite, puisque f est sa propre réciproque, il suffit de déterminer les images des points du cercle : $\left|z - \frac{1-i}{2}\right|^2 = \frac{1}{2}$ ce qui donne en multipliant par 2 et en développant, $2z\overline{z} - (1+i)z - (1-i)\overline{z} + 1 = 1$. La simplification est bienvenue, en divisant tout par $z\overline{z}$ (on a déjà exclu 0), on trouve $2 - \frac{1+i}{\overline{z}} - \frac{1-i}{z} = 0$. Posons $Z = f(z) = \frac{1}{z}$, on a donc $2 - (1+i)\overline{Z} - (1-i)Z = 0$. Ecrivons maintenant $Z = a + ib$, on a donc $2 - (1+i)(a - ib) - (1-i)(a + ib) = 0$, soit $2 - a + ib - ia - b - a - ib + ia - b = 0$, soit $2 - 2a - 2b = 0$. On retrouve exactement l'équation de la droite dont on est partis plus haut.

7. Il est plus simple de partir de l'équation d'un cercle passant par l'origine, de la forme $|z - z_D|^2 = |z_D|^2$, où D est le centre du cercle. En développant, on trouve $z\overline{z} - z_D\overline{z} - \overline{z_D}z = 0$ (le reste se simplifie). En posant $Z = \frac{1}{z}$ et en faisant la même manipulation que ci-dessus, on trouve donc $1 - z_D Z - \overline{z_D Z} = 0$. Autrement dit $1 = 2\,\mathrm{Re}(z_D Z)$, soit en notant $Z = a + ib$ et $z_D = x + iy$, $2ax - 2by = 1$. C'est l'équation d'une droite (qui ne peut pas passer par l'origine), et toute droite ne passant pas par l'origine peut se mettre sous cette forme. Comme f est sa propre réciproque, l'image d'une droite ne passant pas par l'origine est donc toujours un cercle passant par l'origine.
8. On a déjà répondu à cette question lors du calcul précédent, c'est une droite ne passant pas par l'origine.
9. On sait que $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$. L'image du cercle trigonométrique est le cercle trigonométrique lui-même. Pour un cercle de centre r centré en l'origine, on considère des nombres complexes z de la forme $re^{i\theta}$, qui ont des inverses de la forme $\frac{1}{r}e^{-i\theta}$. L'image du cercle est donc également un cercle de centre O, mais de rayon $\frac{1}{r}$.
10. Partons de son équation $z\overline{z} - a\overline{z} - \overline{a}z + k = 0$ (où k est un réel non nul quand le cercle ne passe pas par l'origine). En divisant tout par $z\overline{z}$ et en posant $Z = \frac{1}{z}$, on obtient $1 - aZ - \overline{a}\overline{Z} + kZ\overline{Z} = 0$, soit $k\left|Z - \frac{\overline{a}}{k}\right|^2 = k'$, où k' est toujours une constante (mais plus égale à k). On retombe donc sur une équation de cercle de centre d'afixe $\frac{\overline{a}}{k}$. en tout cas, l'image d'un cercle qui ne passe pas par l'origine est un cercle (ne passant pas par l'origine non plus pusiqu'en appliquant la réciproque égale à f il faut retomber sur le cercle initial). Globalement, on a prouvé dans cet exercice que l'ensemble des droites et des cercles du plan est globalement invariant par cette opération d'inversion.

Exercice 16 (****)

Le coloriage est impossible. Effectuons un raisonnement par l'absurde, supposons un tel coloriage réalisé et considérons un losange $ABCD$ dont les quatre côtés ont pour longueur 1, la petite diagonale pour longueur 1 également et la grande diagonale pour longueur $\sqrt{3}$ (il suffit pour cela d'accoler deux triangles équilatéraux). Supposons par exemple que les sommets A et C soient opposés par la grande diagonale. Si A est par exemple colorié en vert, B et D doivent être de couleur non verte puisqu'à distance 1 de A, et de couleur différente puisqu'eux-même sont à distance 1 l'un de l'autre. Ils sont donc coloriés en bleu et rouge. Cela impose à C d'être de couleur verte puisqu'il est à distance 1 de B et D. Ainsi, on voit que les deux points A et C, qui sont à distance $\sqrt{3}$ l'un de l'autre, sont de même couleur. Cette construction permet de prouver que deux points à distance $\sqrt{3}$ seront toujours de la même couleur, car on peut les placer comme sommets opposés par la grande diagonale d'un losange tel qu'étudié ci-dessus. Considérons maintenant un cercle de rayon $\sqrt{3}$. Tous les points de ce cercle sont de la même couleur que le centre du cercle au vu du raisonnement précédent, donc sont tous de la même couleur. Or, sur ce cercle, on peut certainement trouver deux points à distance 1 l'un de l'autre. Ces deux points étant de la même couleur, on est en contradiction avec notre hypothèse, qui est donc irréalisable.



Feuille d'exercices n°3 : Géométrie plane

PTSI B Lycée Eiffel

5 octobre 2012

Exercice 1 (*)

On se place dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et on considère le point $\Omega(1;-1)$ ainsi que les vecteurs $\vec{u}$ de coordonnées $(1;2)$ et $\vec{v}$ de coordonnées $(-2;3)$.

1. Montrer que $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère. Est-il orthonormal ?
2. Soient $A(5,6)$ et $\vec{z}$ le vecteur de coordonnées $(-3;-3)$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Calculer leurs coordonnées dans $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$.
3. Déterminer une équation dans $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ du cercle de centre 0 et de rayon 1.

Exercice 2 (***)

Soit ABC un triangle, on note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$, ainsi que p le demi-périmètre du triangle : $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

1. Démontrer la relation d'Al-Kashi $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{BAC})$.
2. En déduire la valeur de $\sin(\widehat{BAC})$ en fonction de a.
3. Prouver la relation des sinus $\dfrac{a}{\sin(\widehat{BAC})} = \dfrac{b}{\sin(\widehat{ABC})} = \dfrac{c}{\sin(\widehat{ACB})}$.
4. Démontrer la formule de Héron $\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, où $\mathcal{A}$ désigne l'aire du triangle ABC.

Exercice 3 (*)

Dans un parallélogramme $ABCD$, prouver la relation $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$.

Exercice 4 (**)

Démontrer à l'aide d'un calcul de produit scalaire que les hauteurs d'un triangle non aplati sont concourantes.

Exercice 5 (**)

Soit ABC un triangle vérifiant $AB = 1$. On se place dans un repère orthonormal dont l'origine est le point A et le premier vecteur $\overrightarrow{AB}$. On note (x, y) les coordonnées du point C dans ce repère.

1. Calculer les coordonnées de l'isobarycentre G du triangle ABC.
2. Calculer les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABC.
3. Calculer les coordonnées du centre du cercle circonscrit O du triangle ABC.

4. Vérifier que $\overrightarrow{GH} = 2\overrightarrow{OG}$.
5. Montrer que les symétriques de H par rapport aux côtés du triangle appartiennent à son cercle circonscrit.
6. Montrer que les symétriques de H par rapport aux milieux du triangle appartiennent également à son cercle circonscrit.

Exercice 6 (*)

Déterminer toutes les équations possibles (cartésienne, polaire, paramétrique, normale) de chacune des droites suivantes :

- droite d'équation cartésienne $2x - y + 3 = 0$.
- droite passant par les points $A(1;2)$ et $B(5;10)$.
- droite orthogonale à la précédente et passant par $C(-1,3)$.
- droite passant par $D(1,1)$ et ayant pour vecteur normal $\overrightarrow{n}(1,-2)$.

Exercice 7 (**)

On se place dans un repère orthonormal du plan. Pour tout réel a, on définit la droite D_a d'équation $(1-a^2)x + 2ay + (a^2 - 2a - 3) = 0$. Déterminer tous les points par lesquels passe au moins une droite de la famille. Déterminer tous les points par lesquels passent deux droites perpendiculaires de la famille.

Exercice 8 (*)

Dans un repère orthonormal direct, on considère les points $A(-1,-1)$, $B(2,3)$ et $C(3,-3)$.

1. Calculer l'aire du triangle ABC.
2. En déduire la distance de A à la droite (BC).
3. Déterminer une équation de la droite (AB).
4. En déduire la longueur de la hauteur issue de C, et retrouver ainsi l'aire du triangle ABC.

Exercice 9 (***)

On considère trois points non alignés dans le plan, et une droite (d) coupant respectivant les droites (BC), (AC) et (AB) en A', B' et C'. Par le point A', on mène les parallèles à (AB) et (AC) qui coupent respectivement en D et E la parallèle à (BC) passant par A. On souhaite prouver que les droites $(B'D)$ et $(C'E)$ sont parallèles, et on se place pour cela dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

1. Faire une figure.
2. Que peut-on dire des coordonnées de B' et de C' dans le repère choisi ?
3. Déterminer en fonction de ces coordonnées une équation de (d), de (BC), puis les coordonnées des points A', D et E.
4. Conclure à l'aide d'un calcul de déterminant.

Exercice 10 (**)

Soit ABC un triangle tel que $AB = a$, $BC = 2a$ et $AC = a\sqrt{2}$.

1. Que peut-on dire du triangle ABC ?
2. Déterminer $\{M \mid -4MA^2 + 3MB^2 + MC^2 = 6a^2\}$.
3. Déterminer $\{M \mid -4MA^2 + 3MB^2 + MC^2 = 0\}$.

Exercice 11 (*)

Donner une équation polaire de chacun des cercles suivants, et préciser leur centre et leur rayon :

- $x^2 + y^2 - 3x - 3y = 0$
- $x^2 + y^2 - \sqrt{12}x + 2y = 0$

Exercice 12 (**)

Dans un repère orthonormal direct, on définit la droite D par l'équation $x + y + 1 = 0$ et, pour tout réel λ, le cercle $\mathcal{C}_\lambda$ d'équation $x^2 + y^2 - 2\lambda x + 2y + 2 = 0$. Décrire le cercle $\mathcal{C}_\lambda$ en fonction du paramètre λ puis étudier l'intersection de D et de $\mathcal{C}_\lambda$.

Exercice 13 (*)

Dans un repère orthonormal, on considère pour un réel $\lambda > 0$ les deux cercles de centre $(\lambda, 0)$ tangent à l'axe (Oy) et de centre (λ, λ) tangent à l'axe (Ox). Déterminer les coordonnées des points d'intersection de ces cercles, et leur lieu losrsque λ décrit $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 14 (**)

Soit $\mathcal{C}$ le cercle d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$, et $A(4; 4)$. On peut mener par le point A deux tangents au cercle $\mathcal{C}$. Calculer la distance entre les points d'intersection de ces tangentes et de $\mathcal{C}$.

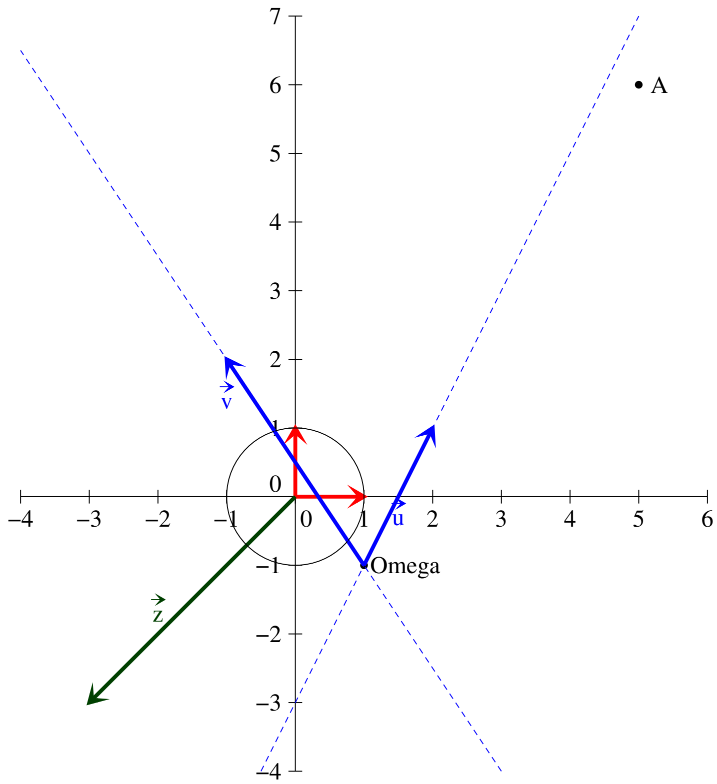
Exercice 15 (***)

On utilise dans ce problème la notation $\overline{AB}$ pour désigner la mesure algébrique du segment $[AB]$. Soit $\mathcal{C}$ un cercle du plan de centre O et de rayon R, et M un point du plan, on appelle alors puissance de M par rapport à $\mathcal{C}$ le réel $p_\mathcal{C}(M) = OM^2 - R^2$.

1. Supposons que M appartienne à une droite D coupant $\mathcal{C}$ en deux points A et B. On note A' le point diamétralement opposé à A sur $\mathcal{C}$, montrer que $\overline{MA}.\overline{MB} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'} = p_\mathcal{C}(M)$.
2. Supposons M extérieur au cercle $\mathcal{C}$ et notons S et T les points de contact de $\mathcal{C}$ avec ses tangentes issues de M. Indiquer une méthode pour construire S et T à la règle et au compas.
3. Montrer que $MT^2 = MS^2 = p_\mathcal{C}(M)$.
4. Montrer que quatre points A, B, C et D tels que (AB) et (CD) ne soient pas parallèles (elles se coupent alors en un point noté N) sont cocycliques si et seulement si $\overline{NA}.\overline{NB} = \overline{NC}.\overline{ND}$.
5. On considère désormais deux cercles non concentriques $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, de centres respectifs O et O' et on note Δ l'ensemble des points M vérifiant $p_\mathcal{C}(M) = p_{\mathcal{C}'}(M)$.
   (a) Soit I le milieu de $[OO']$, montrer que $M \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{OO'}.\overrightarrow{IM} = k$, où k est une constante à préciser.
   (b) En déduire la nature de Δ (appelée axe radical des deux cercles).
   (c) Déterminer l'axe radical de deux cercles dans le cas où ils sont sécants en deux points A et B.
   (d) Déterminer l'axe radical de deux cercles quand ils sont tangents en un point A.
   (e) Justifier que si trois cercles $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$ ont des leurs centres O, O' et O'' non alignés, les trois axes radicaux définis à partir de ces trois cercles sont concourants en un point R, appelé centre radical des trois cercles.
   (f) Décrire une construction géométrique de l'axe radical de deux cercles disjoints, faisant intervenir un troisième cercle sécant aux deux premiers.

Corrigé de la feuille d'exercices n°1

Exercice 1 (*)



1. Il suffit de vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires : $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 3 + 4 = 7$, donc $(\Omega, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est un repère du plan. De plus, $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = -2 + 6 = 4$, donc $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas orthogonaux, le repère n'est pas orthonormal (les deux vecteurs ne sont d'ailleurs pas non plus normés).

2. Essayons d'exprimer les coordonnées du point A dans l'ancien repère de deux façons différentes. D'une part, par définition des coordonnées d'un point, on a $\overrightarrow{OA} = 5\overrightarrow{i} + 6\overrightarrow{j}$. D'autre part, on peut passer par l'intermédiaire du point Ω et utiliser la définition des coordonnées dans le nouveau repère : en notant (x, y) les coordonnées de A dans $(\Omega, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on peut écrire $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega A} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + x(\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}) + y(-2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}) = (1 + x - 2y)\overrightarrow{i} + (-1 + 2x + 3y)\overrightarrow{j}$. Les coordonnées d'un point dans un repère étant unique, on peut identifier les deux formules pour obtenir les équations $\left\{\begin{array}{rcl} 5 & = & 1 + x - 2y \\ 6 & = & -1 + 2x + 3y \end{array}\right.$.
   Reste à résoudre ce système, en effectuant l'opération $2L_1 - L_2$ on obtient $4 = 3 - 7y$, soit $y = -\dfrac{1}{7}$, puis on trouve $x = 4 + 2y = \dfrac{26}{7}$. Les nouvelles coordonnées du point A sont donc $\left(\dfrac{26}{7}; -\dfrac{1}{7}\right)$.
   Pour le vecteur $\overrightarrow{z}(-3, -3)$, les calculs sont exactement les mêmes jusqu'à la résolution du système, qui ressemble cette fois-ci à $\left\{\begin{array}{rcl} -3 & = & 1 + x - 2y \\ -3 & = & -1 + 2x + 3y \end{array}\right.$. Par la même opération que tout à l'heure, on obtient cette fois-ci $-3 = 3 - 7y$, soit $y = \dfrac{6}{7}$, puis $x = -4 + 2y = -\dfrac{16}{7}$, ce qui donne pour coordonnées $\left(-\dfrac{16}{7}; \dfrac{6}{7}\right)$.

3. Si on reprend plus généralement les calculs de la question précédente, en notant (a, b) les

coordonnées d'un point M dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et (x, y) ses coordonnées dans $(\Omega, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on aura toujours les relations $\left\{\begin{array}{rcl} a & = & 1+x-2y \\ b & = & -1+2x+3y \end{array}\right.$. L'équation de notre cercle dans l'ancien repère est $a^2+b^2-1=0$, qui se transforme donc en $(1+x-2y)^2+(-1+2x+3y)^2-1=0$, soit $1+x^2+4y^2+2x-4y-4xy+1+4x^2+9y^2-4x-6y+12xy-1=0$. En regroupant on trouve l'équation $5x^2+13y^2+8xy-2x-10y+1=0$, on ne reconnait plus vraiment une équation cartésienne de cercle, ce qui est normal quand on n'est plus dans un repère orthonormal (en fait, il s'agit d'une équation d'ellipse dans un repère orthonormal).

Exercice 2 (***)

1. C'est une simple application des propriétés du produit scalaire : $a^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})^2 = BA^2+AC^2+2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = c^2+b^2-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = c^2+b^2-2AB.AC.\cos(\widehat{BAC}) = b^2+c^2-2bc\cos(\widehat{BAC})$.

2. En fait, on ne peut pas exprimer le sinus uniquement en fonction de a. Le mieux qu'on puisse faire, c'est écrire $\sin(\widehat{BAC}) = \sqrt{1-\cos^2(\widehat{BAC})} = \sqrt{(1-\cos(\widehat{BAC}))(1+\cos(\widehat{BAC}))} = \sqrt{\left(1-\dfrac{a^2-b^2-c^2}{2bc}\right)\left(1+\dfrac{a^2-b^2-c^2}{2bc}\right)} = \dfrac{1}{2bc}\sqrt{(2bc-a^2+b^2+c^2)(2bc+a^2-b^2-c^2)} = \dfrac{1}{2bc}\sqrt{((b+c)^2-a^2)(a^2-(b-c)^2)}$.

3. On peut remarquer, de par la définition de l'aire d'un triangle, que $\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{1}{2}bc\sin(\widehat{BAC})$, donc $\dfrac{a}{\sin(\widehat{BAC})} = \dfrac{abc}{2\mathcal{A}_{ABC}}$. De même, $\dfrac{b}{\sin(\widehat{CBA})} = \dfrac{c}{\sin(\widehat{BCA})} = \dfrac{abc}{2\mathcal{A}_{ABC}}$, d'où l'égalité demandée.

4. Reprenons les formules précédentes : $\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{1}{2}bc\sin(\widehat{BAC}) = \dfrac{1}{4}\sqrt{((b+c)^2-a^2)(a^2-(b-c)^2)} = \dfrac{1}{4}\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)} = \dfrac{1}{4}\sqrt{2p(2p-2a)(2p-2c)(2p-2b)}$ $= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, en utilisant que $a+b+c=2p$.

Exercice 3 (*)

On peut encore utiliser le produit scalaire : $AC^2+BD^2 = (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})^2+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})^2 = AB^2+BC^2+2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+BC^2+CD^2+2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD}$. Comme $ABCD$ est un parallélogramme, $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$, donc $2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD} = 0$, et $BC^2 = DA^2$, d'où la formule demandée.

Exercice 4 (*)

Cet exercice a subi une déflation de son niveau de difficulté.
Considérons donc un triangle ABC et notons H le point de concours des hauteurs issues de A et de B dans ce triangle, c'est-à-dire un point vérifiant $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0$ et $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0$. On veut prouver que H appartient aussi à la hauteur issue de C, c'est-à-dire que $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB} = 0$. Calculons donc $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AH}).\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{CB}$. le dernier terme étant nul, il reste $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}$. Le dernier terme est à nouveau nul, les deux premiers sont opposés, il ne reste donc rien, et on peut passer à l'exercice suivant.

Exercice 5 (**)

Commençons avant tout par donner les coordonnées des trois sommets du triangle : $A(0,0)$, $B(1,0)$ et $C(x,y)$.

1. Jusque-là, facile : G a pour abscisse $\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}=\dfrac{1+x}{3}$ et pour ordonnée $\dfrac{y}{3}$.
2. La hauteur issue de C dans le triangle est simplement constituée des points d'abscisse x. Le point H a donc pour coordonnées (x,y_H), avec par exemple $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0$, soit $x(x-1)+y_Hy=0$, soit $y_H=\dfrac{x(1-x)}{y}$.
3. La médiatrice du segment $[AB]$ est simplement constituée des points d'abscisse $\dfrac{1}{2}$, notons donc y_O l'ordonnée du centre du cercle circonscrit. On peut par exemple écrire $\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{AC}=0$, où $I\left(\dfrac{x}{2},\dfrac{y}{2}\right)$ est le milieu du segment $[AC]$. Cela donne la condition $\dfrac{x-1}{2}\times x+\left(\dfrac{y}{2}-y_0\right)\times y=0$, soit $x^2-x+y^2-2yy_O=0$, donc $y_O=\dfrac{x(x-1)}{2y}+\dfrac{y}{2}$. On en conclut que $O\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{x(x-1)}{2y}+\dfrac{y}{2}\right)$.
4. Le vecteur $\overrightarrow{GH}$ a pour abscisse $x-\dfrac{1+x}{3}=\dfrac{2x-1}{3}$, et pour ordonnée $\dfrac{x(1-x)}{y}-\dfrac{y}{3}=\dfrac{3x-3x^2-y^2}{3y}$. Le vecteur $2\overrightarrow{OG}$ a pour abscisse $2\left(\dfrac{1+x}{3}-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{2+2x}{3}-1=\dfrac{2x+1}{3}$, et pour ordonnée $2\left(\dfrac{y}{3}-\dfrac{x(x-1)}{2y}-\dfrac{y}{2}\right)=\dfrac{2y^2-3x(x-1)-3y^2}{3y}=\dfrac{3x-3x^2-y^2}{3y}$. Les deux vecteurs ont les mêmes coordonnées, ils sont donc égaux.
5. Le symétrique de H par rapport au côté $[AB]$ a pour coordonnées $\left(x,\dfrac{x(x-1)}{y}\right)$ puisque la droite (AB) est ici confondue avec l'axe des abscisses du repère. Le cercle circonscrit a pour rayon $R=OA=\sqrt{x_O^2+y_O^2}=\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{x^2(x-1)^2}{4y^2}+\dfrac{x(x-1)}{2}+\dfrac{y^2}{4}}$. Calculons donc le carré de la distance du premier symétrique au centre O du cercle circonscrit : $\left(\dfrac{1}{2}-x\right)^2+\left(\dfrac{x(x-1)}{2y}+\dfrac{y}{2}-\dfrac{x(x-1)}{y}\right)^2=\left(\dfrac{1}{2}-x\right)^2+\left(\dfrac{y}{2}-\dfrac{x(x-1)}{2y}\right)^2=\dfrac{1}{4}-x+x^2+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{x(x-1)}{2}+\dfrac{x^2(x-1)^2}{4y^2}=\dfrac{1}{4}-\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{x^2(x-1)^2}{4y^2}=R^2$, le point appartient bien au cercle.
Pour les deux autres symétriques, on peut s'épargner bien du souci en constatant que la propriété en question ne dépend pas du repère choisi, et même pas du fait qu'on a décrété au départ $AB=1$ (si $AB=k$, on multiplie les coordonnées de toutes les points par k, les distances sont multipliées également par k, et la conclusion reste la même). En partant d'un repèe centré en B et ayant $\overrightarrow{BC}$ pour vecteur de base, on montrerait ainsi identiquement que le symétrique de H par rapport à (BC) est sur le cercle circonscrit, et de même pour le troisième symétrique.
Si on tient vraiment à faire les calculs, ça se complique un peu. Faisons-les pour le symétrique par rapport à (AC). La droite (AC) a pour équation $y_M=\dfrac{y}{x}x_M$ (en notant (x_M,y_M) les coordonnées d'un point du plan, x et y étant déjà pris pour C). La hauteur issue de B dans ABC a pour équation $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC}=0$, soit $(x_M-1)x+y_My=0$. Le point d'intersection D de la hauteur et de la droite vérifie donc $(x_D-1)x+\dfrac{y^2}{x}x_D=0$, soit $x_D=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$, et donc $y_D=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$. En notant H' le symétrique de H par rapport à (AC), on doit avoir $\overrightarrow{DH'}=\overrightarrow{HD}$, soit $x_{H'}=2x_D-x_H=\dfrac{2x^2}{x^2+y^2}-x$; et pour ordonnée $y_{H'}=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}-\dfrac{x(1-x)}{y}$. Il ne reste

plus qu'à calculer $OH'^2 = \left(\frac{2x^2}{x^2+y^2} - x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2xy}{x^2+y^2} - \frac{x(1-x)}{y} - \frac{x(x-1)}{2y} - \frac{y}{2}\right)^2$

$$= \frac{4x^4}{(x^2+y^2)^2} + x^2 + \frac{1}{4} - \frac{4x^3}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{x^2+y^2} + x + \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$+\frac{x^2(x-1)^2}{4y^2} + \frac{y^2}{4} + \frac{2x^2(x-1)}{x^2+y^2} - \frac{2xy^2}{x^2+y^2} - \frac{x(x-1)}{2}$$

$$= \frac{4x^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2x^3 - 2x^2 - 2xy^2 - 4x^3 - 2x^2}{x^2+y^2} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{2}x + \frac{y^2}{4} + \frac{x^2(x-1)^2}{4y^2}$$

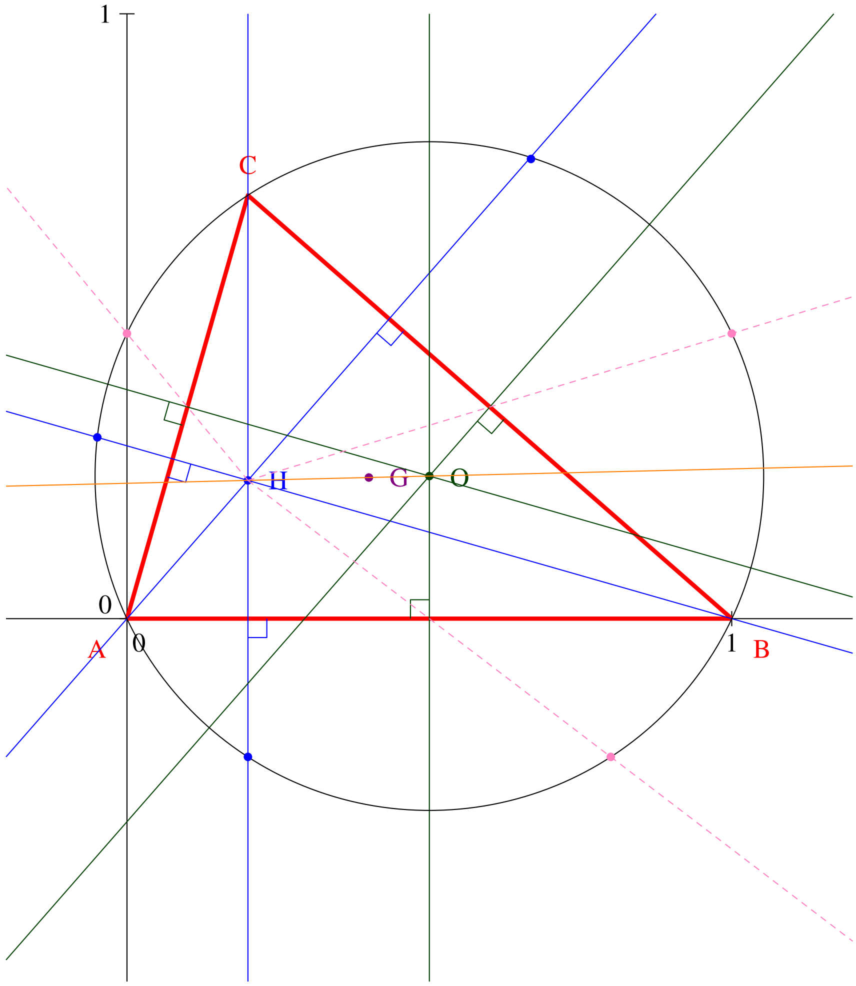
$$= \frac{-2x(y^2+x^2)}{x^2+y^2} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{2}x + \frac{y^2}{4} + \frac{x^2(x-1)^2}{4y^2}$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4} - \frac{x}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{x^2(x-1)^2}{4y^2} = OA^2.$$

Les plus masochistes d'entre vous montreront que ça marche également pour le troisième symétrique.

6. Comme dans la question précédente, on peut se contenter de faire le symétrique de H par rapport au milieu de $[AB]$. Ledit milieu a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, donc le symétrique de H aura pour coordonnées $\left(1-x, \frac{x(x-1)}{y}\right)$ (si ça ne vous semble pas évident, vous les retrouverez en écrivant $\overrightarrow{HI} = \overrightarrow{IH'}$), donc le carré de sa distance à O vaut $\left(\frac{1}{2} - x\right)^2 + \left(\frac{x(x-1)}{2y} - \frac{y}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - x + x^2 + \frac{x^2(x-1)^2}{4y^2} + \frac{y^2}{4} - \frac{x(x-1)}{2} = \frac{1}{4} - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2(x-1)^2}{4y^2} + \frac{y^2}{4} = OA^2$. Là encore, les courageux peuvent faire les calculs pour les deux derniers symétriques (c'est un peu moins pénible que ci-dessus).

Sur la magnifique dessin ci-dessous, les points O, G et H sont alignés sur la droite orange, les symétriques de H par rapport aux côtés (points bleus, situés sur les hauteurs de la même couleur), et par rapport aux milieux (points roses, les médiatrices sont en vert) sont tous situés sur le cercle circonscrit au triangle (en noir).



Exercice 6 (*)

- On a déjà une équation cartésienne, on peut obtenir l'équation normale en divisant par $\sqrt{2^2+(-1)^2} = \sqrt{5}$, ce qui donne $-\frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y = \frac{3}{\sqrt{5}}$ (on a également changé le signe pour trouver la forme standard avec un coefficient positif à droite). Comme on ne connait pas vraiment d'angle dont le cosinus vaut $-\frac{2}{\sqrt{5}}$ et le sinus $\frac{1}{\sqrt{5}}$, on peut juste constater que l'angle en question va se trouver entre $\frac{\pi}{2}$ et π, on peut donc prendre $\theta_0 = \arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ pour trouver une équation polaire $r = \frac{3}{\sqrt{5}\cos(\theta-\theta_0)}$. Enfin, $(2,-1)$ est un vecteur normal à (d), donc $(1,2)$ un vecteur directeur. Par ailleurs, le point $A(0,3)$ appartient à la droite, qui est donc décrite par le système d'équations paramétriques $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& t \\ y &=& 3+2t \end{array}\right.$.
- Un point $M(x,y)$ appartient à (d) si et seulement si $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$, soit $8(x-1)-4(y-2) = 0$, donc $8x-4y = 0$, ce qu'on peut simplifier en $2x-y=0$ (en effet, on peut deviner en regardant les coordonnées de A et B que $y=2x$ est une équation de la droite). On peut en déduire directement un système d'équations paramétrique : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& t \\ y &=& 2t \end{array}\right.$. L'équation normale s'obtient comme ci-dessus, $\frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}}y = 0$, et comme la droite passe par l'origine, on a comme

équation polaire $\theta \equiv \theta_0 \equiv \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) [\pi]$.

- La droite précédente avait pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}(4,8)$, un point $M(x,y)$ appartient à notre nouvelle droite si $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AB} = 0$, soit $4(x+1)+8(y-3) = 0$, donc $4x+8y-20 = 0$. On peut diviser tout cela par 4 pour obtenir $x+2y-5 = 0$. On commence à avoir l'habitude des divisions par $\sqrt{5}$, celà donne $\frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y = \sqrt{5}$. L'équation polaire n'aura une fois de plus aucun intérêt. Pour le paramétrage, on peut prendre comme vecteur directeuR $(8,-4)$, ce qui donne $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & -1+8t \\ y & = & 3-4t \end{array}\right.$.
- On obtient directement une équation cartésienne : $(x-1)-2(y-1) = 0$, soit $x-2y+1 = 0$. L'équation normale correspondante est $-\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ (non, je ne fais pas une obsession sur le nombre $\sqrt{5}$). On zappe l'équation polaire, une équation paramétrique possible est $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1+2t \\ y & = & 1+t \end{array}\right.$.

Exercice 7 (**)

On se place dans un repère orthonormal du plan. Pour tout réel a, on définit la droite D_a d'équation $(1-a^2)x+2ay+(a^2-2a-3) = 0$. Déterminer tous les points par lesquels passe au moins une droite de la famille. Déterminer tous les points par lesquels passent deux droites perpendiculaires de la famille.

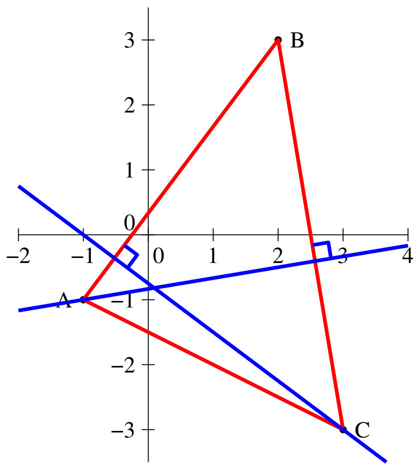
Exercice 8 (*)

1. Un simple calcul de déterminant suffit : $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})| = \frac{1}{2}\left|\begin{array}{cc} 3 & 4 \\ 4 & -2 \end{array}\right| = \frac{1}{2}|-6-16| = 11$.

2. On sait par ailleurs que $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \times AH \times BC$, où H est le projeté orthogonal de A sur (BC). Autrement dit, $d(A,(BC)) = AH$. Comme $BC = \sqrt{1^2+(-6)^2} = \sqrt{37}$, on en déduit que $d(A,(BC)) = \frac{22}{\sqrt{37}}$.

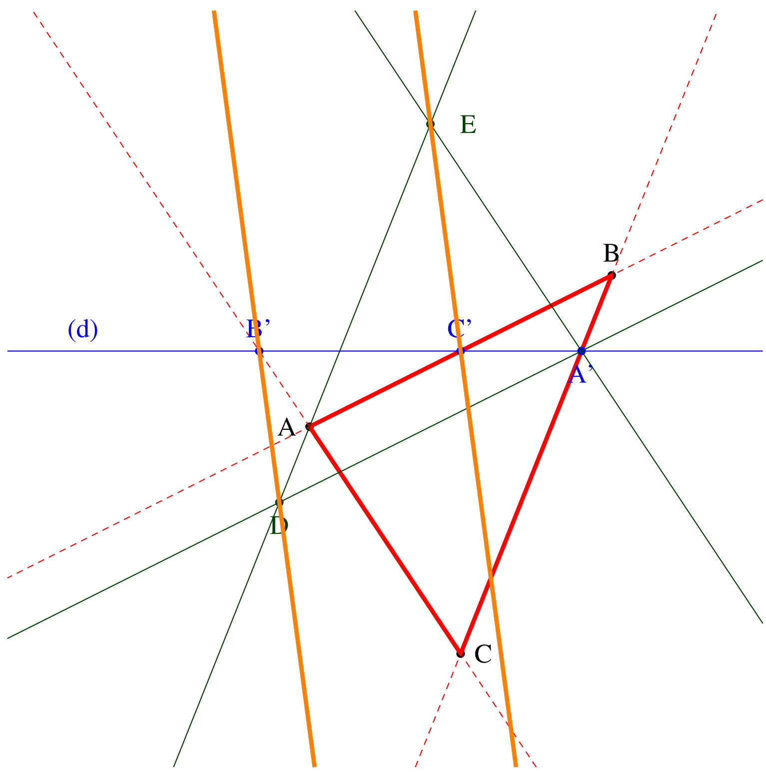
3. Un point $M(x,y)$ appartient à (AB) si et seulement si $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$, soit $\left|\begin{array}{cc} x+1 & 3 \\ y+1 & 4 \end{array}\right| = 0$, ce qui se traduit par $4(x+1)-3(y+1) = 0$, donc en développant $4x-3y+1 = 0$.

4. La longueur de la hauteur correspond à $d(C,(AB)) = \frac{|4\times 3 - 3\times -3+1|}{AB} = \frac{22}{\sqrt{9+16}} = \frac{22}{5}$. On retrouve pour l'aire du triangle $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \times \frac{22}{5} \times AB = 11$.



Exercice 9 (***)

1. On obtient sans difficulté du premier coup une figure de ce type :



2. Le point B' appartenant à la droite (AC), il a une abscisse nulle, on peut donc écrire $B'(0, \beta)$. De même, $C' \in (AB)$ donc $C'(\gamma, 0)$.

3. Un point $M(x, y)$ appartient à la droite (d) si et seulement si $\det(\overrightarrow{B'M}, \overrightarrow{B'C'}) = 0$, soit $\begin{vmatrix} x & \gamma \\ y - \beta & -\beta \end{vmatrix} = 0$, ce qui donne l'équation cartésienne $-\beta x - \gamma(x - \beta) = 0$, ou encore $\beta x + \gamma y - \beta\gamma = 0$. La droite (BC) a plus simplement pour équation $x + y = 1$. Le point A' étant à l'intersection de ces deux droites, on peut écrire $y_{A'} = 1 - x_{A'}$, et inclure dans l'autre équation pour obtenir la condition $\beta x_{A'} + \gamma - \gamma x_{A'} - \beta\gamma = 0$, ce qui donne $\dfrac{\gamma(1 - \beta)}{\gamma - \beta}$.

On en tire ensuite $y_{A'} = 1 - x_{A'} = \dfrac{\beta(\gamma-1)}{\gamma-\beta}$.

Pour le point D, on utilise les parallélismes donnés par l'énoncé. Comme $(AD)//(BC)$, on a la condition $\det(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}) = 0$, qui donne $x_D + y_D = 0$. Un peu plus compliqué, $(A'D)//(AB)$ donne $y_D - y_{A'} = 0$, soit $y_D = y_{A'} = \dfrac{\beta(\gamma-1)}{\gamma-\beta}$, et $x_D = -y_D = \dfrac{\beta(1-\gamma)}{\gamma-\beta}$. On procède de même pour le point E : $(AE)//(BC)$ donne, comme pour le point D, $x_E + y_E = 0$. Et $(A'E)//(AC)$ donne $x_E - x_{A'} = 0$, soit $x_E = x_{A'} = \dfrac{\gamma(1-\beta)}{\gamma-\beta}$, puis $y_E = -x_E = \dfrac{\gamma(\beta-1)}{\gamma-\beta}$.

4. Calculons donc $\det(\overrightarrow{B'D}, \overrightarrow{C'E}) = \begin{vmatrix} \dfrac{\beta(1-\gamma)}{\gamma-\beta} & \dfrac{\gamma(1-\beta)}{\gamma-\beta} - \gamma \\ \dfrac{\beta(\gamma-1)}{\gamma-\beta} - \beta & \dfrac{\gamma(\beta-1)}{\gamma-\beta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\beta(1-\gamma)}{\gamma-\beta} & \dfrac{\gamma(1-\gamma)}{\gamma-\beta} \\ \dfrac{\beta(\beta-1)}{\gamma-\beta} & \dfrac{\gamma(\beta-1)}{\gamma-\beta} \end{vmatrix} =$ $\dfrac{\beta\gamma(1-\gamma)(\beta-1) - \beta\gamma(\beta-1)(1-\gamma)}{\gamma-\beta} = 0$, ce qui prouve le parallélisme des droites $(B'D)$ et $(C'E)$.

Exercice 10 (**)

Soit ABC un triangle tel que $AB = a$, $BC = 2a$ et $AC = a\sqrt{2}$.

1. Que peut-on dire du triangle ABC ?
2. Déterminer $\{M \mid -4MA^2 + 3MB^2 + MC^2 = 6a^2\}$.
3. Déterminer $\{M \mid -4MA^2 + 3MB^2 + MC^2 = 0\}$.

Exercice 11 (*)

Les deux cercles passent par l'origine, leur rayon est donc égal à la distance de l'origine au centre.

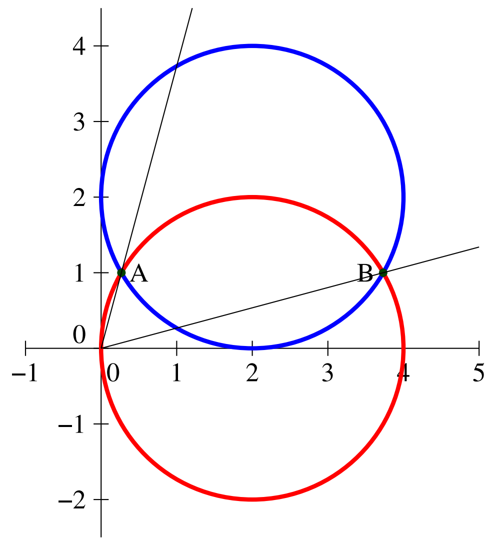
- On peut factoriser en $\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{2}$. Le cercle a donc pour centre $A\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$, et pour rayon $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$. La point A ayant pour coordonnées polaires $\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}, \dfrac{\pi}{4}\right)$, une équation polaire du cercle est $r = 3\sqrt{2}\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$. On peut également reprendre les coordonnées cartésiennes du centre (ou développer l'équation précédente) pour obtenir $r = 3\cos(\theta) + 3\sin(\theta) = 3(\cos(\theta) + \sin(\theta))$.
- Factorisons donc : $(x - \sqrt{3})^2 + (y+1)^2 = 4$, il s'agit du cercle de centre $A(\sqrt{3}, -1)$ et de rayon 2. On peut donner comme première équation polaire $r = 2\sqrt{3}\cos(\theta) - \sin(\theta)$, puis en factorisant $r = 4\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos(\theta) - \dfrac{1}{2}\sin(\theta)\right) = 4\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

Exercice 12 (**)

Factorisons l'équation du cercle : $(x-\lambda)^2 + (y+1)^2 = \lambda^2 - 1$. Le cercle est donc vide lorsque $\lambda \in]-1; 1[$, réduit au point $(1, -1)$ ou $(-1, -1)$ lorsque $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$ respectivement, et c'est un cercle de centre $A_\lambda(\lambda, -1)$ et de rayon $\sqrt{\lambda^2 - 1}$ sinon. Pour savoir le nombre de points d'intersection avec la droite, on peut calculer la distance $d(\Omega, D) = \dfrac{|\lambda - 1 + 1|}{\sqrt{2}} = \dfrac{|\lambda|}{\sqrt{2}}$. Le carré de cette distance, $\dfrac{\lambda^2}{2}$, est plus petit que le carré du rayon du cercle si $1 \leqslant \dfrac{\lambda^2}{2}$, soit $|\lambda| \geqslant \sqrt{2}$. Cherchons dans ce cas les coordonnées du ou des points d'intersection, notons $M(x, y)$ un tel point, on aura $y = -1 - x$, donc en reportant dans l'équation du cercle $(x - \lambda)^2 + (-x)^2 = \lambda^2 - 1$, soit $2x^2 - 2\lambda x + 1 = 0$. Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 4\lambda^2 - 8 = 4(\lambda^2 - 2)$. La condition de positivité est celle obtenue plus haut, et on a dans ce cas deux solutions $x_1 = \dfrac{2\lambda + 2\sqrt{\lambda^2 - 2}}{4} = \dfrac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 2}}{2}$, et $x_2 = \dfrac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 2}}{2}$. Les ordonnées correspondantes sont $y_1 = -1 - x_1$ et $y_2 = -1 - x_2$ (ça n'a pas grand intérêt de développer plus). Le cercle et la droite sont tangents dans deux cas : si $\lambda = \sqrt{2}$, $x_1 = x_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $y_1 = -1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; si $\lambda = -\sqrt{2}$, $x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - 1$.

Exercice 13 (*)

Le premier cercle a pour rayon λ, et donc pour équation $(x - \lambda)^2 + y^2 = \lambda^2$. Le deuxième a également pour rayon λ (il sera aussi tangent à l'axe (Oy)), et a pour équation $(x-\lambda)^2+(y-\lambda)^2 = \lambda^2$. Les deux centres sont distants de λ, les deux cercles vont toujours avoir deux points d'intersection. La première équation de cercle se ramène à $x^2+y^2 = 2\lambda x$. On peut développer la deuxième pour obtenir $x^2+y^2-2\lambda x-2\lambda y+\lambda^2 = 0$. En reprenant la première condition, on a donc $-2\lambda y+\lambda^2 = 0$, soit $y = \dfrac{\lambda}{2}$. On doit alors avoir (équation du premier cercle) $(x - \lambda)^2 = \dfrac{3\lambda^2}{4}$, soit $x = \lambda \pm \dfrac{\sqrt{3}\lambda}{2}$. Les deux points d'intersection sont donc $A\left(\left(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\lambda; \dfrac{1}{2}\lambda\right)$ et $B\left(\left(1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\lambda; \dfrac{1}{2}\lambda\right)$. Le point A se trouve donc sur la droite d'équation $x = (2 - \sqrt{3})y$, et le point B sur la droite d'équation $x = (2 + \sqrt{3})y$. Plus précisément, puisque $\lambda > 0$, les points d'intersection parcourront les demi-droites ouvertes issues de O ayant ces équations. Les demi-droites sont en noir dans la figure ci-dessous, on a tracé les deux cercles lorsque $\lambda = 2$:

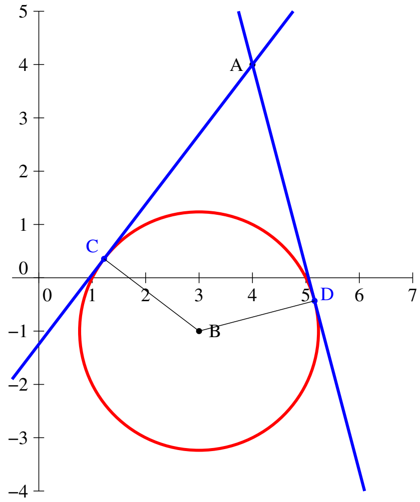


Exercice 14 (**)

En fait, le point A aurait du avoir pour coordonnées $(4, -4)$, les calculs sont alors moins laids. Mais faisons avec ce qui était inscrit sur la feuille.

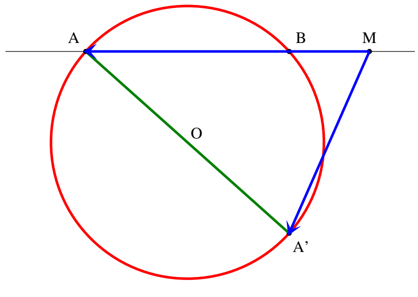
On peut toujours factoriser l'équation du cercle : $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 5$, cercle de centre $B(3, -1)$ et de rayon $\sqrt{5}$. Le point $M(x, y)$ est un point du cercle par lequel passe une tangente issue de A s'il vérifie l'équation du cercle, et la condition $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$, soit $(x - 4)(x - 3) + (y - 4)(y + 1) = 0$. En développant, on obtient $x^2 + y^2 - 7x - 3y + 8 = 0$. Comme par ailleurs

$x^2 + y^2 = 6x - 2y - 5$ (équation du cercle), on trouve $x + 5y - 3 = 0$, soit $x = 3 - 5y$. Remplaçons dans l'équation de cercle initiale : $(3 - 5y - 3)^2 + (y + 1)^2 = 5$ donne $25y^2 + y^2 + 2y + 1 = 5$, soit $26y^2 + 2y - 4 = 0$, ou encore $13y^2 + y - 2 = 0$. Cette équation a pour discriminant $\Delta = 1 + 104 = 105$, et admet donc deux solutions $y_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{105}}{26}$, et $y_2 = \dfrac{-1 - \sqrt{105}}{26}$. Cela donne pour x les valeurs correspondantes $x_1 = 3 - 5y_1 = \dfrac{83 - 5\sqrt{105}}{26}$, et $x_2 = \dfrac{83 + 5\sqrt{105}}{26}$. Il y a donc deux points convenables : $C\left(\dfrac{83 - 5\sqrt{105}}{26}, \dfrac{-1 + \sqrt{105}}{26}\right)$, et $D\left(\dfrac{83 + 5\sqrt{105}}{26}, \dfrac{-1 - \sqrt{105}}{26}\right)$. Il ne reste plus aux courageux qu'à calculer la distance entre les deux points (au carré pour commencer) : $(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2 = \left(\dfrac{10\sqrt{105}}{26}\right)^2 + \left(\dfrac{-2\sqrt{105}}{26}\right)^2 = \dfrac{25 \times 105 + 105}{13^2} = \dfrac{26 \times 105}{13^2} = \dfrac{210}{13}$, donc la distance cherchée vaut $\sqrt{\dfrac{210}{13}} \simeq 4.02$. À vous de vérifier la crédibilité de ce résultat sur la figure ci-dessous :

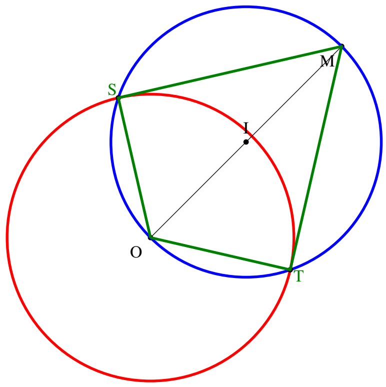


Exercice 15 (***)

1. On sait que le triangle $AA'B$ est rectangle en B, puisque le point B appartient au cercle de diamètre $[AA']$. Autrement dit, le point B est le projeté orthogonal de A' sur (AM), donc $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'} = \overline{MA}.\overline{MB}$. Or, $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'} = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA'}) = OM^2 + \overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OA'}$. Les points A et A' étant diamétralement opposés sur un cercle de centre O, on a $\overrightarrow{OA'} = -\overrightarrow{OA}$. Le développement précédent se simplifie donc (les dex termes du milieu s'annulent) en $OM^2 - OA^2 = OM^2 - R^2$.



2. Une tangente étant orthogonale au rayon joignant le centre du cercle au point de tangence, les triangles OMS et OMT sont rectangles en S et T respectivement. Les points S et T appartiennent donc au cercle de diamètre $[OM]$. Comme ce dernier ne peut couper le cercle $\mathcal{C}$ en plus de deux points, S et T sont donc définis parfaitement comme les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et du cercle de diamètre $[OM]$, ce qui se construit très bien à la règle et au compas (il suffit de trouver le milieu de $[OM]$).



3. C'est une application immédiate du théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OMS (ou OMT) : $OM^2 = OT^2 + MT^2$, soit $MT^2 = OM^2 - OT^2 = OM^2 - R^2 = p_{\mathcal{C}}(M)$.
4. Si les points sont cocycliques, la puissance du point N par rapport au cercle les contenant tous les quatre est à la fois égale à $\overline{NA}.\overline{NB}$ et à $\overline{NC}.\overline{ND}$ d'après la première question, d'où l'égalité demandée. Réciproquement, si on suppose que $\overline{NA}.\overline{NB} = \overline{NC}.\overline{ND}$, notons $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC, on peut alors écrire $p_{\mathcal{C}}(N) = \overline{NA}.\overline{NB}$ (toujours en utilisant la première question), donc notre hypothèse implique $p_{\mathcal{C}}(N) = \overline{NC}.\overline{ND}$. Or, on sait que $p_{\mathcal{C}}(N) = \overline{NC}.\overline{NE}$, où E est le deuxième point d'intersection de la droite (CN) avec le cercle $\mathcal{C}$ (encore et toujours la première question). On en déduit que $\overline{ND} = \overline{NE}$, avec D et E situés sur la même droite. Celà n'est possible que si D et E sont confondus, ce qui prouve que D appartient au cercle circonscrit à ABC et donc que les quatre points sont cocycliques.
5. (a) Partons du deuxième membre de l'équivalence, on utilise le fait que $\overrightarrow{IM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{O'M})$ pour obtenir la condition $(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MO'}).(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{O'M}) = 2k$, soit en développant $OM^2 - O'M^2 = 2k$ (les deux autres termes se simplifient). On trouve donc $OM^2 = O'M^2 + 2k$, ce qui est équivalent à $p_{\mathcal{C}}(M) = p_{\mathcal{C}'}(M)$ à condition d'avoir $2k = R^2 - R'^2$, soit $k = \frac{1}{2}(R^2 - R'^2)$.

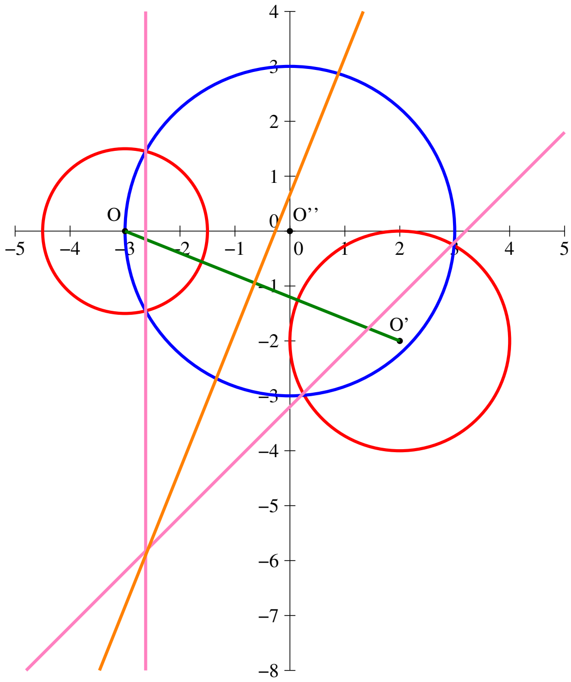
   (b) En utilisant les résultats du cours sur les lignes de niveau du produit scalaire, l'axe radical sera une droite perpendiculaire à $\overrightarrow{OO'}$.

   (c) Si les cercles sont sécants en deux points, on aura nécessairement $\Delta = (AB)$. En effet, A et B sont tous deux sur l'axe radical (un point appartenant à un cercle a une puissance nulle par rapport à celui-ci), et l'axe est une droite, c'est nécessairement (AB).

   (d) Cette fois-ci, le point de tangence appartient à la droite, et Δ est perpendiculaire à (OO'), donc Δ est la tangente commune aux deux cercles.

   (e) Notons donc Δ et Δ' les axes radicaux de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{C}'$ (pour Δ) ; et de $\mathcal{C}'$ et de $\mathcal{C}''$ (pour Δ'). Ces deux droites ne sont pas parallèles puisqu'elles sont respectivement perpendiculaires à (OO') et à $(O'O'')$ et que les trois centres sont supposés non alignés. Elles se coupent donc en un point R. Ce point appartenant à Δ, il vérifie $p_{\mathcal{C}}(R) = p_{\mathcal{C}'}(R)$. De même, comme il est sur Δ', il vérifie aussi $p_{\mathcal{C}'}(R) = p_{\mathcal{C}''}(R)$. On en conclut aisément que $p_{\mathcal{C}}(R) = p_{\mathcal{C}''}(R)$, et donc que R appartient au troisième axe radical.

(f) Il suffit de prendre un troisième cercle plus ou moins aléatoire, sécant aux deux premiers. On construit les axes radicaux de ce cercle avec chacun de deux cercles dont on est parti (facile pour des cercles sécants, il suffit de tracer la droite reliant les points d'intersection, cf la question c), ils se coupent en un point R. Comme ce point appartient à l'axe radical de nos deux cercles (question e), ce dernier est la droite perpendiculaire à (OO') passant par R (et si R se trouve sur (OO'), ce n'est vraiment pas de pot, mais on change le troisième cercle et ça ne durera pas).



TD n°3 : Complexes

PTSI B Lycée Eiffel

11 octobre 2012

Problème 1

On considère dans ce problème l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = 2z(1-z)$.

1. Déterminer les points du plan complexe invariants par l'application f.
2. Déterminer les antécédents par f de -4, ainsi que ceux de $2+2i$.
3. Déterminer les nombres complexes ayant une image réelle par f. Déterminer l'image de l'axe réel par f.
4. Déterminer une condition pour que deux nombres complexes z_1 et z_2 aient la même image par f. Interpréter ce résultat géométriquement.
5. Quels sont les nombres complexes ayant au moins un antécédent par f ? Et ceux en ayant exactement un ?
6. Montrer que si $z \in i\mathbb{R}$, son image se situe sur la parabole d'équation cartésienne $x = \dfrac{y^2}{2}$.
7. On cherche désormais à expliciter l'image par f du cercle trigonométrique $\mathbb{U}$.
   (a) Soit $z = e^{i\theta}$, avec $\theta \in [0;\pi]$. Calculer le module et l'argument de $f(z)$.
   (b) Placer dans le plan complexe les points correspondant à $f(e^{i\theta})$ pour $\theta = 0$, $\theta = \dfrac{\pi}{6}$, $\theta = \dfrac{\pi}{3}$, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$, $\theta = \dfrac{5\pi}{6}$ et $\theta = \pi$. Tracer à partir de ces points une allure de l'image du demi-cercle trigonométrique supérieur.
   (c) Montrer que l'on peut obtenir l'image du demi-cercle inférieur à partir de la précédente en effectuant une transformation géométrique simple. En déduire l'allure de $f(\mathbb{U})$.

Problème 2

On définit dans ce problème le birapport de quatre nombres complexes a, b, c et d comme le nombre $[a, b, c, d] = \dfrac{(a-b)(c-d)}{(c-b)(a-d)}$. On dira que quatre points (ou leurs affixes complexes) sont cocycliques s'ils appartiennent à un même cercle ou s'ils sont alignés.

1. À quoi correspond, géométriquement, $\arg\left(\dfrac{a-b}{c-b}\right)$? En déduire une condition simple pour que trois points soient alignés.
2. Montrer que, si a, b, c et d sont alignés, alors $[a, b, c, d] \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que, si a, b, c et d appartiennent à un même cercle de centre $\omega(z)$ et de rayon r, $[a, b, c, d] \in \mathbb{R}$ (on pourra noter α, β, γ et δ les arguments des nombres $a-z$, $b-z$, $c-z$ et $d-z$).
4. En déduire que quatres points cocycliques A, B, C et D dans le plan vérifient $\widehat{ABC} \equiv \widehat{ADC}[\pi]$.
5. On suppose que a, b et c sont réels. Montrer que, si $[a, b, c, d] \in \mathbb{R}$, alors $d \in \mathbb{R}$.
6. On pose pour les dernières questions $f(z) = i\dfrac{1+z}{1-z}$. Montrer que $z \in \mathbb{U} \Leftrightarrow f(z) \in \mathbb{R}$.

7. Montrer que, $[f(a), f(b), f(c), f(d)] = [a, b, c, d]$ (quand cela a un sens).
8. Montrer que, si a, b et c sont des nombres complexes de module 1 (distincts de 1), et si $[a, b, c, d] \in \mathbb{R}$, alors $d \in \mathbb{U}$. que se passe-t-il si l'un des quatres nombres est égal à 1 ?

On peut en fait plus généralement démontrer que si $[a, b, c, d] \in \mathbb{R}$, les points a, b, c et d sont nécessairement cocycliques.

Corrigé du TD n°3

Problème 1

1. On doit donc résoudre l'équation $f(z) = z$, c'est-à-dire $z = 2z(1-z)$, ou encore $z(1-2+2z) = 0$. On trouve donc deux valeurs possibles : $z = 0$ et $z = \dfrac{1}{2}$.
2. Commençons par résoudre $f(z) = -4$, soit $-2z^2 + 2z + 4 = 0$. Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 4 + 32 = 36$, et admet deux racines $z_1 = \dfrac{-2+6}{-4} = -1$, et $z_2 = \dfrac{-2-6}{-4} = 2$.
   Passons à $f(z) = 2 + 2i$, qui donne $-2z^2 + 2z - 2 - i = 0$, qu'on peut écrire plus simplement $z^2 - z + 1 + i = 0$. Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 1 - 4(1+i) = -3 - 4i$. Cherchons $\delta = a + ib$ tel que $\delta^2 = \Delta$, on obtient les deux équations $a^2 - b^2 = -3$ et $2ab = -4$. On peut ajouter la condition sur le module $a^2 + b^2 = \sqrt{9+16} = 5$. En additionnant et soustrayant comme d'habitude, $2a^2 = 2$, soit $a = \pm 1$ et $2b^2 = 8$, soit $b = \pm 2$. Comme a et b doivent être de signe contraire, on peut prendre $\delta = 1 - 2i$. On obtient alors comme antécédents $z_1 = \dfrac{1+1-2i}{2} = 1 - i$, et $z_2 = \dfrac{1-1+2i}{2} = i$.
3. Allons-y peu subtilement. Si on pose $z = a + ib$, on a $f(z) = 2(a+ib)(1-a-ib) = 2(a - a^2 - iab + ib - iab + b^2)$, qui est réel si $b - 2ab = 0$, soit $b(1-2a) = 0$. On peut donc avoir $b = 0$ (c'est-à-dire que z est un réel), ou $a = \dfrac{1}{2}$ (droite parallèle à l'axe imaginaire).
   Calculer l'image de l'axe réel est étrangement plus compliqué, on a toujours $f(x) = 2x(1-x)$, mais avec cette fois-ci $x \in \mathbb{R}$. On peut donc étudier cette fonction avec les techniques classiques sur les fonctions d'une variable réelle. Ainsi, $f'(x) = -4x + 2$ s'annule en $x = \dfrac{1}{2}$, comme $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1\left(1 - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$, on obtient pour f le tableau de variations suivant :

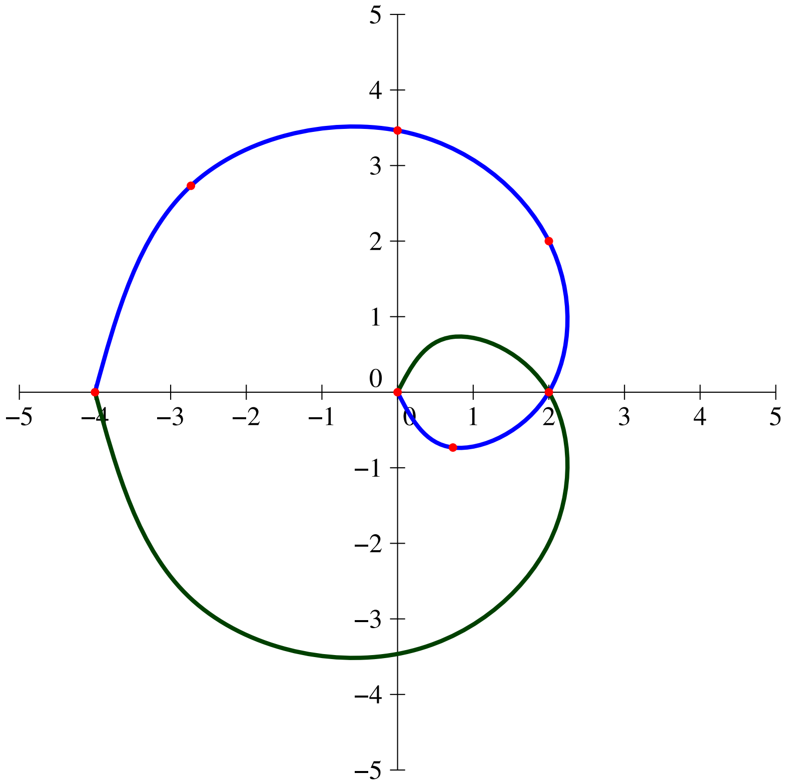
x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
f	$-\infty$ $\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$ $-\infty$

   La fonction f prend donc sur l'axe réel toutes les valeurs réelles inférieures à $-\dfrac{1}{2}$. Autrement dit, $f(\mathbb{R}) = \left]-\infty; \dfrac{1}{2}\right]$.
4. Examinons la condition $f(z_1) = f(z_2)$: $2z_1 - 2z_1^2 = 2z_2 - 2z_2^2$, soit en divisant tout par deux $z_1 - z_2 = z_1^2 - z_2^2 = (z_1 - z_2)(z_1 + z_2)$. Si on exclut le cas peu intéressant $z_1 = z_2$, on peut diviser par $z_1 - z_2$ pour obtenir $1 = z_1 + z_2$, soit $z_2 = 1 - z_1$. Autrement dit, $z_2 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} - z_1$, ce qui signifie que les points d'affixe z_1 et z_2 sont symétriques par rapport au point d'affixe $\dfrac{1}{2}$.
5. L'équation $f(z) = a$, où $a \in \mathbb{C}$, est une équation de second degré, elle auta toujours des solutions. Tout nombre complexe a donc au moins un antécédent par f. Le nombre a aura un seul antécédent si l'équation $2z - 2z^2 = a$ a un discriminant nul, soit $4 - 8a = 0$, donc $a = \dfrac{1}{2}$. Le nombre réel $\dfrac{1}{2}$ est donc le seul à avoir un unique antécédent (en l'occurence lui-même).
6. Calculons donc $f(ib) = 2ib(1 - ib) = 2b^2 + 2ib$. En notant $x = 2b^2$ et $y = 2b$, on constate que $\dfrac{y^2}{2} = \dfrac{4b^2}{2} = 2b^2 = x$. Le point d'affixe $f(ib)$ est donc bien situé sur la parabole d'équation

$x = \dfrac{y^2}{2}$.

7. (a) Calculons $f(e^{i\theta}) = 2e^{i\theta}(1 - e^{i\theta}) = 2e^{i\theta}e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}) = 2e^{i\frac{3\theta}{2}}\left(-2i\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right)$ $= 4\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e^{-i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{3\theta}{2}} = 4\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{3\theta-\pi}{2}}$. En particulier, on trouve un module égal à $4\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ (en prenant $\theta \in [0; 2\pi]$ pour toujours avoir un sinus de l'angle moitié positif) et un argument de $\dfrac{3\theta - \pi}{2}$.

(b) Pour $\theta = 0$, $f(e^{i\theta}) = f(1) = 0$; pour $\theta = \dfrac{\pi}{6}$, le module vaut $4\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \sqrt{6} - \sqrt{2}$ et l'argument $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{2} - \pi\right) = -\dfrac{\pi}{4}$. On peut aussi calculer directement $f(e^{i\frac{\pi}{6}}) = \sqrt{3} - 1 + i(1 - \sqrt{3})$. Pour $\theta = \dfrac{\pi}{3}$, on a un module $4\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 2$, et un argument de $\dfrac{1}{2}(\pi - \pi) = 0$, donc $f(e^{i\frac{\pi}{3}}) = 2$. Ensuite, si $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, module $2\sqrt{2}$ et argument $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3\pi}{2} - \pi\right) = \dfrac{\pi}{4}$, donc $f(e^{i\theta}) = 2 + 2i$. On enchaine avec $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$, module $2\sqrt{3}$, argument $\dfrac{1}{2}(2\pi - \pi) = \dfrac{\pi}{2}$, soit $f(e^{i\frac{2\pi}{3}}) = 2\sqrt{3}i$. Pour $\theta = \dfrac{5\pi}{6}$, module $\sqrt{6} + \sqrt{2}$, argument $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{15\pi}{6} - \pi\right) = \dfrac{3\pi}{4}$, soit $f(e^{i\frac{2\pi}{3}}) = -\sqrt{3} - 1 + i(\sqrt{3} + 1)$. Enfin, pour $\theta = \pi$, $f(-1) = -4$. Ce qui donne une allure ressemblant à ceci (les points sont en rouge, la courbe en bleu, ça doit ressembler à une sorte de spirale, en vert la symétrique pour l'autre moitié de cercle trigonométrique) :



(c) Il suffit de calculer $f(e^{i(2\pi-\theta)})$: le module est le même que pour $f(e^{i\theta})$, l'argument vaut $\dfrac{3(2\pi - \theta) - \pi}{2} = \dfrac{5\pi - 3\theta}{2} = -\dfrac{3\theta - \pi}{2} + 2\pi$, donc l'argument est opposé à celui de $f(e^{i\theta})$. Autrement dit, les images des points situés en bas du cercle trigonométrique sont les conjugués des images des points du haut. Il suffit donc de faire une symétrie par rapport à l'axe réel pour obtenir la deuxième moitié de l'image du cercle trigonométrique.

Problème 2

1. Si on note les points de la même façon que leur affixe complexe, cet argument correspond à l'angle $(\widehat{ba, bc})$. Les trois points sont donc alignés si cet argument est nul (modulo π), c'est-à-dire si $\dfrac{a-b}{c-b} \in \mathbb{R}$.

2. Si les quatre points sont alignés, chacun des deux rapports $\dfrac{a-b}{c-b}$ et $\dfrac{c-d}{a-d}$ est réel, donc le birapport l'est également.

3. Avec les notations de l'énoncé, on peut écrire que $a = z + re^{i\alpha}$, $b = z + re^{i\beta}$, $c = z + re^{i\gamma}$ et $d = z + re^{i\delta}$. On calcule alors $\dfrac{(a-b)(c-d)}{(c-b)(a-d)} = \dfrac{(re^{i\alpha} - re^{i\beta})(re^{i\gamma} - re^{i\delta})}{(re^{i\gamma} - re^{i\beta})(re^{i\alpha} - re^{i\delta})}$. On peut factoriser par r en haut et en bas (ça se simplifie) et factoriser chaque parenthèse par l'angle moitié de la somme des deux angles présents, par exemple $e^{i\alpha} - e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} - e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}}) = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \times \left(2i\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\right)$.
   On peut donc écrire $[a,b,c,d] = \dfrac{e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \times (2i\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})) \times e^{i\frac{\gamma+\delta}{2}} \times (2i\sin(\frac{\gamma-\delta}{2}))}{e^{i\frac{\gamma+\beta}{2}} \times (2i\sin(\frac{\gamma-\beta}{2})) \times e^{i\frac{\alpha+\delta}{2}} \times (2i\sin(\frac{\alpha-\delta}{2}))}$. Les exponentielles en haut et en bas se simplifient (on a de chaque côté $e^{i\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}}$, tous les $2i$ également, il ne reste plus que $[a,b,c,d] = \dfrac{\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\gamma+\delta}{2})}{\sin(\frac{\gamma+\beta}{2})\sin(\frac{\delta+\beta}{2})}$, qui est certainement un nombre réel.

4. On peut écrire la condition de birapport réel sous la forme $\arg\left(\dfrac{a-b}{c-b}\right) = \arg\left(\dfrac{c-d}{a-d}\right)$, ce qui signifie au vu de la première question que $\widehat{ABC} \equiv \widehat{ADC}[\pi]$.

5. Notons k le birapport des quatre points, on a alors $(a-b)(c-d) = k(c-b)(a-d)$, soit $ac + bd - bc - ad = kac + kbd - kab - kcd$. On peut donc écrire $d = \dfrac{kac - kab + bc - ac}{b - a - kb + kc}$ qui appartient certainement à $\mathbb{R}$.

6. Si $z = e^{i\theta}$, $f(z) = i\dfrac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = i\dfrac{e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}})} = i\dfrac{2\cos(\frac{\theta}{2})}{-2i\sin(\frac{\theta}{2})} = -\dfrac{1}{\tan(\frac{\theta}{2})} \in \mathbb{R}$. Inversement, si $f(z) \in \mathbb{R}$, en notant $z = a+ib$, $\dfrac{1+a+ib}{1-a-ib} \in i\mathbb{R}$, soit $\mathrm{Re}((1+a+ib)(1-a+ib)) = 0$. On obtient donc $1 - a + a - a^2 - b^2 = 0$, soit $a^2 + b^2 = 1$. On retombe bien sur le cercle trigonométrique.

7. Calculons courageusement $[f(a), f(b), f(c), f(d)] = \dfrac{(f(a)-f(b))(f(c)-f(d))}{(f(c)-f(b))(f(a)-f(d))}$
   $$= \frac{(i\frac{1+a}{1-a} - i\frac{1+b}{1-b})(i\frac{1+c}{1-c} - i\frac{1+d}{1-d})}{(i\frac{1+c}{1-c} - i\frac{1+b}{1-b})(i\frac{1+a}{1-a} - i\frac{1+d}{1-d})} = \frac{i^2\frac{(1+a)(1-b)-(1+b)(1-a)}{(1-a)(1-b)}\frac{(1+c)(1-d)-(1+d)(1-c)}{(1-c)(1-d)}}{i^2\frac{(1+c)(1-b)-(1+b)(1-c)}{(1-c)(1-b)}\frac{(1+a)(1-d)-(1+d)(1-a)}{(1-a)(1-d)}}$$
   $$= \frac{(1+a-b-ab-1-b+a+ab)(1+c-d-cd-1-d+c+cd)}{(1+c-b-bc-1-b+c+bc)(1+a-d-ad-1-d+a+ad)}$$
   $$= \frac{4(a-b)(c-d)}{4(c-b)(a-d)} = [a,b,c,d].$$

8. En exploitant les question précédentes, sous les hypothèses statuées, $[f(a), f(b), f(c), f(d)] = [a,b,c,d] \in \mathbb{R}$, avec $f(a)0$, $f(b)$, $f(c) \in \mathbb{R}$ d'après la question 6. La question 5 permet alors d'affirmer que $f(d) \in \mathbb{R}$ ce qui en revenant à la question 6 prouve que $d \in \mathbb{U}$.
   Si par exemple $a = 1$, on multiplie les quatre nombres a, b, c et d par $e^{i\theta}$ (pour un θ choisi de façon à ne plus avoir de nombre égal à 1), ça ne modifie pas le birapport (puisqu'on introduit deux facteurs $e^{i\theta}$ au numérateur et deux au dénominateur), ni le fait que a, b et c soient de

module 1. On en déduit à l'aide du raisonnement précédent que $e^{i\theta}d \in \mathbb{U}$, donc $d \in \mathbb{U}$ comme précédemment.

Feuille d'exercices n°4 : Équations différentielles

PTSI B Lycée Eiffel

19 octobre 2012

Exercice 1 (* à **)

Résoudre les équations différentielles suivantes en précisant à chaque fois le ou les intervalles de résolution choisis :

1. $y' - 2y = \sinh(x) - 2x\cosh(x)$.
2. $ty' + y = \cos(t)$.
3. $y' + y = \dfrac{1}{1+e^t}$.
4. $y' + y = (x^2 - 2x + 2)e^{2x}$.
5. $xy'\ln x - y = 3x^2\ln^2 x$.
6. $y' + 2y = x^2$.
7. $y' + x^2y + x^2 = 0$. Déterminer une solution vérifiant $y(0) = 0$.
8. $\sqrt{1-x^2}y' - y = 1$.
9. $2ty' + y = t^n$ $(n \in \mathbb{N})$.
10. $y' + y = \sin(x) + \sin(2x)$.
11. $y' - 3y = x^2e^x + xe^{3x}$ en imposant de plus $y(0) = 1$.
12. $\cosh(x)y' - \sinh(x)y = \sinh^3(x)$.

Exercice 2 (*)

On cherche les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $x^2y' + xy = 1$. Commencer par résoudre cette équation sur chacun des intervalles $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$. Conclure.

Exercice 3 (**)

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sin(x) + 2\displaystyle\int_0^x e^{x-t}f(t)\ dt$.

Exercice 4 (**)

Résoudre l'équation différentielle $(1+t^2)y' = 4ty + 4t\sqrt{y}$ (on pourra poser $z = \sqrt{y}$ et chercher une équation différentielle plus ordinaire vérifiée par z). Cette équation différentielle est un cas particulier d'équation de Bernoulli.

Exercice 5 (**)

Déterminer les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$, ne s'annulant jamais et vérifiant $y' + 3y + y^2 = 0$ (on pourra poser $z = \dfrac{1}{y}$). Cette équation est un cas particulier d'équation de Ricatti.

Exercice 6 (**)

Résoudre l'équation différentielle $(yy'' - (y')^2)\sin^2 x + y^2 = 0$ (on pourra poser $u = \dfrac{y'}{y}$).

Exercice 7 (*)

On considère l'équation différentielle $y' = y^2 + 1$, avec comme condition initiale $y(0) = 0$. Déterminer une valeur approchée de $y(1)$ en utilisant la méthode d'Euler avec pas $h = \dfrac{1}{4}$, puis $h = \dfrac{1}{10}$. Comparez avec la valeur exacte (si, si, vous la connaissez). Qu'en pensez-vous ?

Exercice 8 (* à ***)

Résoudre les équations différentielles du deuxième ordre suivantes :

1. $y'' + 4y = x^2 - x + 1$.
2. $y'' + y' = 4x^2e^x$, avec $y(0) = e$ et $y'(0) = 0$.
3. $y'' + y' + 2y = (8x + 1)e^x$.
4. $y'' - y = \sinh(x)$.
5. $y'' - 3y' + 2y = (-3t^2 + 10t - 7)e^t$.
6. $y'' - 2y' + 5y = 4e^t \sin(2t)$.

Exercice 9 (**)

On considère l'équation $x^2y'' + 3xy' + y = \dfrac{1}{x^2}$, qu'on cherche à résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}$. En posant $z(x) = y(e^x)$, déterminer une équation différentielle du second ordre à coefficients constants vérifiée par z. En déduire les solutions de l'équation initiale, et prouver qu'il en existe une seule vérifiant $y(1) = y'(1) = 0$. Ce type d'équation est appelé équation d'Euler.

Exercice 10 (**)

Résoudre l'équation différentielle $y'' + 4ty' + (11 + 4t^2)y = 0$ en posant $z(t) = e^{t^2}y(t)$.

Exercice 11 (***)

Résoudre les équations suivantes en effectuant le changement de variable proposé :

1. $4xy'' + 2y' - y = 0$ (on posera $t = \sqrt{x}$).
2. $(1 + x^2)^2y'' + 2x(1 + x^2)y' + 4y = 0$ (on posera $t = \arctan(x)$).
3. $x^2y'' + 3xy' + y = x^2$ (on posera $t = \ln(x)$ et on résoudra seulement sur $\mathbb{R}^{+*}$).

Exercice 12 (***)

Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2f(-x) + x$.

Exercice 13 (***)

Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables vérifiant $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x + y) + f(x - y) = 2f(y)f(x)$ (utiliser une méthode proche de celle vue en cours pour la caractérisation des exponentielles, mais en dérivant deux fois).

Corrigé de la feuille d'exercices n°4

Exercice 1 (* à **)

1. On résout l'équation sur $\mathbb{R}$. L'équation homogène associée $y' - 2y = 0$ a pour solutions les fonctions de la forme $y_h(x) = Ke^{2x}$, avec $K \in \mathbb{R}$.

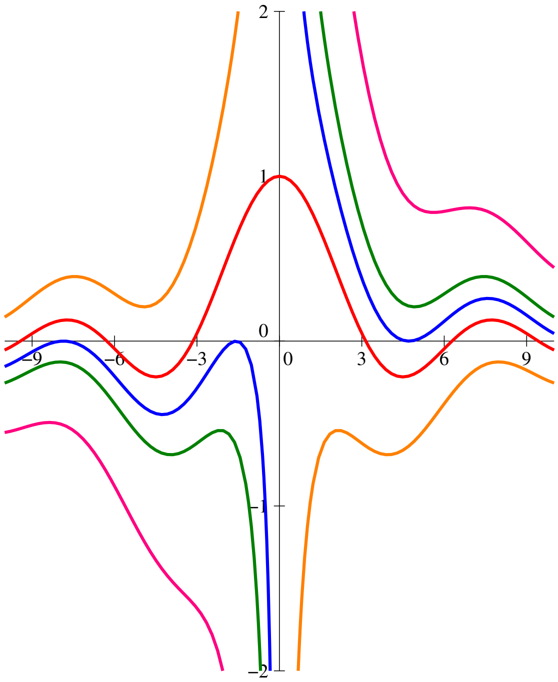
   On peut chercher une solution particulière à l'équation sous la forme $y_p(x) = K(x)e^{2x}$. On a alors $y'(x) = (K'(x) + 2K(x))e^{2x}$, donc y_p est solution si $K'(x) = (\sinh x - 2x\cosh x)e^{-2x} = \dfrac{e^{-x} - e^{-3x}}{2} - xe^{-x} - xe^{-3x}$, soit par exemple $K(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{e^{-t} - e^{-3t}}{2} - te^{-t} - te^{-3t}\, dt = -\frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}e^{-3x} - \frac{1}{6} + [te^{-t}]_0^x - \int_0^x e^{-t}\, dt + \left[t\frac{e^{-3t}}{3}\right]_0^x - \int_0^x \frac{e^{-3t}}{3}\, dt = -\frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{6}e^{-3x} + xe^{-x} + e^{-x} + \frac{x}{3}e^{-3x} + \frac{e^{-3x}}{9} + A = \left(x + \frac{1}{2}\right)e^{-x} + \left(\frac{x}{3} + \frac{5}{18}\right)e^{-3x} + A$, où A est une constante qu'on peut ignorer (on a effectué des intégrations par partie pour les produits de t par des exponentielles). Les solutions complètes sont donc les fonctions $y(x) = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)e^x + \left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{5}{18}\right)e^{-x} + Ke^{2x}$.

   Autre possibilité pour trouver une solution particulière, écrire le second membre sous la forme $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} - x(e^x + e^{-x}) = \left(\dfrac{1}{2} - x\right)e^x - \left(\dfrac{1}{2} + x\right)e^{-x}$ et utiliser le principe de superposition. On cherche d'abord une solution à l'équation $y' - 2y = \left(\dfrac{1}{2} - x\right)e^x$ sous la forme $y_1(x) = (ax+b)e^x$. On a alors $y_1'(x) = (ax+a+b)e^x$, donc y_1 est solution si $(-ax+a-b)e^x = \left(\dfrac{1}{2} - x\right)e^x$, soit $a = 1$ et $b = \dfrac{1}{2}$. On obtient donc $y_1(x) = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)e^x$. De même, on cherche une solution à l'équation $y' - 2y = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)e^{-x}$ sous la forme $y_2(x) = (cx+d)e^{-x}$. On a alors $y_2'(x) = (-cx-d+c)e^{-x}$, et y_2 est solution si $(-3cx+c-3d)e^{-x} = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)e^{-x}$, soit $c = -\dfrac{1}{3}$ et $d = \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{5}{18}$. On obtient donc $y_2(x) = -\dfrac{x}{3} - \dfrac{5}{18}$, ce dont on déduit la même solution particulière que ci-dessus (et bien sûr les mêmes solutions générales).

2. Comme il faut diviser par t pour mettre l'équation sous forme usuelle, la résolution s'effectuera sur les intervalles $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$. On a alors $y' + \dfrac{y}{t} = \dfrac{\cos t}{t}$. L'équation homogène associée est $y' + \dfrac{y}{t} = 0$, dont les solutions sont les fonctions $t \mapsto Ke^{\ln|t|} = \dfrac{K}{t}$, $K \in \mathbb{R}$ (on peut enlever la valeur absolue quitte à changer le signe de la constante sur $\mathbb{R}^{-*}$).

   On cherche ensuite une solution particulière de la forme $y_p(t) = \dfrac{K(t)}{t}$, d'où on tire $\dfrac{K'(t)}{t} = \dfrac{\cos t}{t}$. Une solution particulière est donc la fonction $\dfrac{\sin t}{t}$, et les solutions générales de l'équation sont de la forme $y(t) = \dfrac{\sin t + K}{t}$. Pour tenter de recoller les solutions sur $\mathbb{R}$, il faut savoir que $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$ (c'est par exemple une conséquence du fait qu'il s'agit du taux d'accroissement de la fonction sinus en 0, qui tend donc vers $(\sin)'(0) = \cos(0) = 1$). Il faut alors avoir $K = 0$ pour obtenir une fonction prolongeable en 0 en posant $f(0) = 1$. En admettant que la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ est dérivable en 0, on obtient donc une unique solution définie sur $\mathbb{R}$.

   Quelques courbes de solutions : en rouge pour $K = 0$ (donc la solution définie sur $\mathbb{R}$, en bleu $K = 1$, en vert $K = 2$, en rose $K = 5$ et en orange $K = -2$ (les valeurs négatives de K donnent des courbes symétriques par rapport à l'axe des ordonnées de celles obtenues pour les valeurs positives) :

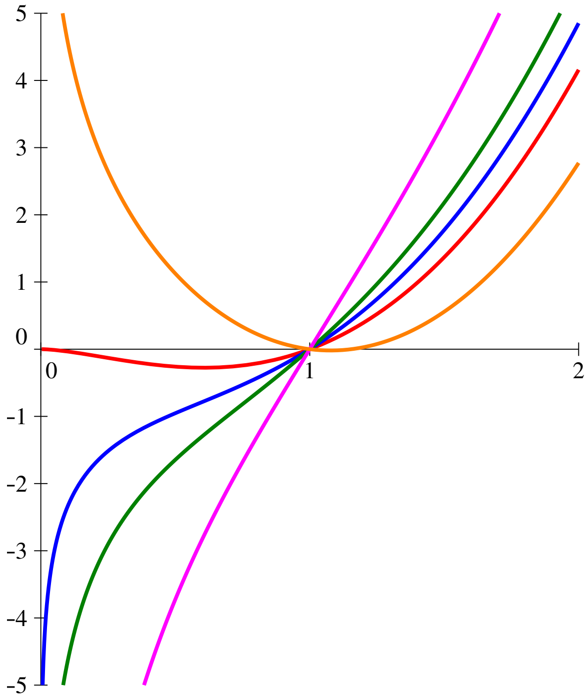


3. On résout l'équation sur $\mathbb{R}$. L'équation homogène associée $y' + y = 0$ a pour solutions les fonctions $y_h : t \mapsto Ke^{-t}$, on recherche donc y_p sous la forme $K(t)e^{-t}$, ce qui nous donne $K'(t)e^{-t} = \dfrac{1}{1+e^t}$, soit $K'(t) = \dfrac{e^t}{1+e^t}$. Le membre de droite étant de la forme $\dfrac{u'}{u}$, on peut prendre comme primitive $K(t) = \ln(1+e^t)$. Les solutions de l'équation complète sont donc de la forme $y : t \mapsto (\ln(1+e^t) + K)e^{-t}$, $K \in \mathbb{R}$.

4. Pour les solutions de l'équation homogène, cf l'équation précédente. Plutôt que d'utiliser la méthode de variation de la constante (qui amène un calcul de primitive par intégration par parties peu agréable), nous allons directement chercher une solution de la forme $y_p(x) = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$. On a donc $y_p'(x) = (2ax^2 + (2a+2b)x + b + 2c)e^{2x}$, et y_p est solution, en factorisant par e^{2x}, si et seulement si $3ax^2 + (2a+3b)x + b + 3c = x^2 - 2x + 2$, soit $a = \dfrac{1}{3}$; $2a + 3b = -2$, donc $b = -\dfrac{8}{9}$; et enfin $b + 3c = 2$, donc $c = \dfrac{26}{27}$. Les solutions de l'équation complète sont donc les fonctions $y : x \mapsto Ke^{-x} + \left(\dfrac{1}{3}x^2 - \dfrac{8}{9}x + \dfrac{26}{27}\right)e^{2x}$.

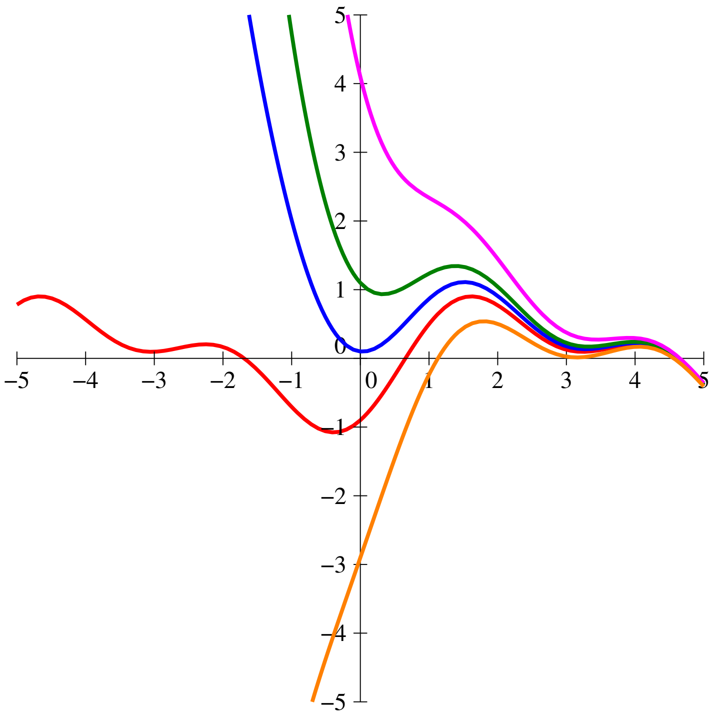
5. Comme il faut diviser par $x \ln x$, on va résoudre sur les intervalles $]0;1[$ et $]1;+\infty[$ (l'équation ne peut pas avoir de sens ailleurs que sur $\mathbb{R}^{+*}$ à cause du ln). On obtient donc $y' + \dfrac{y}{x \ln x} = 3x \ln x$. Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $x \mapsto Ke^{\ln|\ln|x||} = K \ln x$ (à un changement de constante près, cette formule est valable sur les deux intervalles de résolution). On cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = K(x) \ln x$, donc $y_p'(x) = K'(x)\ln(x) + \dfrac{K(x)}{x}$. En reprenant l'équation, y_p est solution si $K'(x) \ln x = 3x \ln x$, on peut donc prendre $K(x) = \dfrac{3}{2}x^2$ et les solutions générales sont les fonctions $y : x \mapsto \left(\dfrac{3}{2}x^2 + K\right) \ln x$. Toutes les solutions se prolongent en 1 en posant $y(1) = 0$. De plus, les solutions sont dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$, de dérivée $y'(x) = 3x \ln(x) + \dfrac{3}{2}x + \dfrac{K}{x}$, qui prend donc la valeur $\dfrac{3}{2} + K$ en 1. On obtient ainsi un recollement uniquement si la constante sur $]0;1[$ est la même que sur $]1;+\infty[$.

Des allures de courbes avec les mêmes conventions pour les couleurs que dans la deuxième équation ci-dessus :



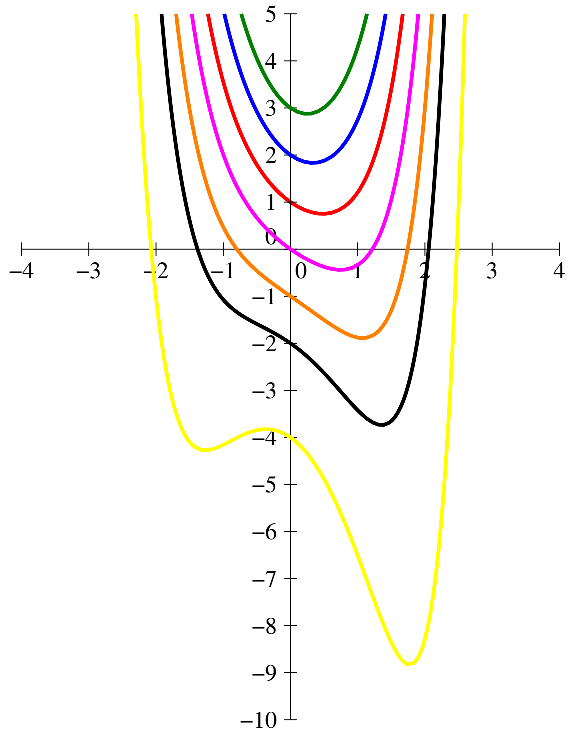
6. Du classique, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $y_h : x \mapsto Ke^{-2x}$. On cherche directement une solution particulière de la forme $y_p(x) = ax^2 + bx + c$. On aura donc $y_p'(x) = 2ax + b$, et y_p sera solution si $2ax + b + 2ax^2 + 2bx + 2c = x^2$, ce qui impose $a = \dfrac{1}{2}$; $2a + 2b = 0$ donc $b = -\dfrac{1}{2}$; et $b + 2c = 0$ donc $c = \dfrac{1}{4}$. On obtient $y_p(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}$, et les solutions de l'équation complète sont les fonctions $y : x \mapsto \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4} + Ke^{-2x}$.
7. On résout sur $\mathbb{R}$. L'équation homogène a pour solutions les fonctions $y_h : x \mapsto Ke^{-\frac{x^3}{3}}$. On ne cherche pas de solution particulière puisqu'il y en a une qui nous saute aux yeux : la fonction constante égale à -1. Les solutions générales sont donc les fonctions $y : x \mapsto Ke^{-\frac{x^3}{3}} - 1$. Si on veut de plus $y(0) = 0$, il faut avoir $K - 1 = 0$, donc $K = 1$. La solution unique au problème de Cauchy posé est donc la fonction $f : x \mapsto e^{-\frac{x^3}{3}} - 1$.
8. On ne peut résoudre que sur l'intervalle $]-1; 1[$. L'équation homogène $y' - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}y = 0$ a pour solutions les fonctions $y_h : x \mapsto Ke^{-\arcsin x}$. Encore une fois, la fonction constante égale à -1 est une solution particulière donc les solutions générales sont de la forme $x \mapsto Ke^{-\arcsin x} - 1$.
9. On résout sur les intervalles $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$. L'équation homogène associée $y' + \dfrac{y}{2t} = 0$ a pour solutions les fonctions $y_h : t \mapsto Ke^{-\ln\left|\frac{t}{2}\right|} = \dfrac{K}{\sqrt{|t|}}$. On cherche y_p sous la forme $\dfrac{K(t)}{\sqrt{|t|}}$, soit $y_p'(t) = \dfrac{K'(x)}{\sqrt{|t|}} - \dfrac{K(t)}{2t\sqrt{|t|}}$, et on obtient $\dfrac{K'(t)}{\sqrt{|t|}} = \dfrac{t^{n-1}}{2}$, donc $K'(t) = \dfrac{1}{2}|t|^{n-\frac{1}{2}}$. Finalement, $y_p(t) = \dfrac{t^n}{2n+1}$ convient (sur chacun des deux intervalles), et les solutions générales de l'équation sont les fonctions $y : t \mapsto \dfrac{t^n}{2n+1} + \dfrac{K}{\sqrt{|t|}}$. Si on souhaite recoller les morceaux en 0, seule la valeur $K = 0$ est possible, et la fonction $t \mapsto \dfrac{t^n}{2n+1}$ est la seule solution définie sur $\mathbb{R}$.

10. L'équation homogène a pour solutions les fonctions $x \mapsto Ke^{-x}$. On va ici utiliser le principe de superposition et commencer par chercher une solution à l'équation $y' + y = \sin(x)$ sous la forme $y_1(x) = a\sin(x) + b\cos(x)$. On a $y_1'(x) = a\cos(x) - b\sin(x)$, donc y_1 est solution si $(a+b)\cos(x) + (a-b)\sin(x) = \sin(x)$. Il suffit donc d'avoir $a + b = 0$ et $a - b = 1$, soit $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$, donc $y_1(x) = \frac{1}{2}(\sin(x) - \cos(x))$. De même, on cherche à trouver une solution de l'équation $y' + y = \sin(2x)$ sous la forme $y_2(x) = a\sin(2x) + b\cos(2x)$, ce qui donne $y_2'(x) = 2a\cos(2x) - 2b\sin(2x)$. On obtient comme tout à l'heure un système, en l'occurence $a - 2b = 1$ et $b + 2a = 0$. Comme $b = -2a$, $5a = 1$ donc $a = \frac{1}{5}$, puis $b = -\frac{2}{5}$, et $y_2(x) = \frac{1}{5}\sin(2x) - \frac{2}{5}\cos(2x)$. Finalement, les solutions de l'équation complète sont les fonctions $y : x \mapsto \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{5}\sin(2x) - \frac{2}{5}\cos(2x) + Ke^{-x}$. Allez, ça fait un moment que je n'ai pas fait joujou avec des tracés de courbes colorées :



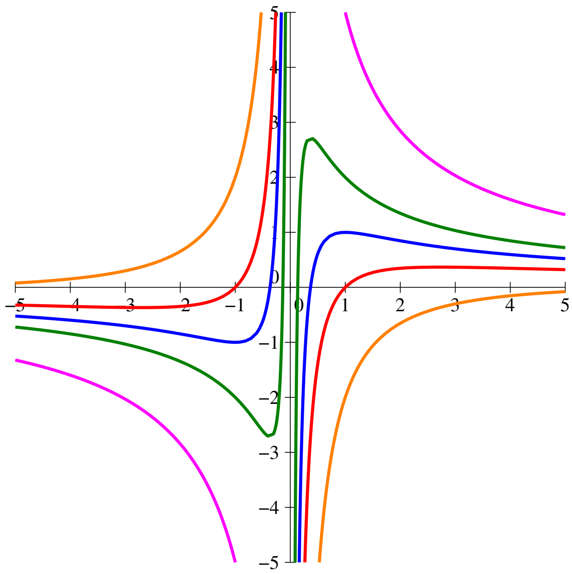
11. L'équation homogène associée a des solutions de la forme Ke^{3x}. On utilise ensuite le principe de superposition en cherchant d'abord une solution à l'équation $y' - 3y = x^2e^x$ sous la forme $y_1(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$. On a alors $y_1'(x) = (2ax + b + ax^2 + bx + c)e^x$, donc y_1 est solution si $((a - 3a)x^2 + (2a + b - 3b)x + (b + c - 3c))e^x = x^2e^x$. Les conditions imposées sont $-2a = 1$, donc $a = -\frac{1}{2}$; $2a - 2b = 0$, donc $b = -\frac{1}{2}$; et $b - 2c = 0$, donc $b = -\frac{1}{4}$, ce qui donne $y_1(x) = \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^x$. De même, on cherche une solution à l'équation $y' - 3y = xe^{3x}$ sous la forme $y_2(x) = (ax^2 + bx + c)e^{3x}$ (il faut prendre un polynôme du second degré car on est dans le cas particulier où l'exponentielle est la même que celle de l'équation homogène). On a donc $y_2'(x) = (2ax + b + 3ax^2 + 3bx + 3c)e^{3x}$, donc y_2 est solution si $((3a - 3a)x^2 + (2a + 3b - 3b)x + b + 3c - 3c)e^{3x} = xe^{3x}$. Les seules conditions sont donc $2a = 1$ et $b = 0$. On peut choisir $y_2(x) = \frac{1}{2}x^2e^{3x}$, et on en déduit que les solutions de l'équation complète sont les fonctions $x \mapsto \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^x + \left(\frac{1}{2}x^2 + K\right)e^{3x}$. Comme $y(0) = -\frac{1}{4} + K$, la solution recherchée est celle obtenue pour $K = \frac{5}{4}$, soit $y(x) = \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^x + \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{4}\right)e^{3x}$.

12. La fonction ch ne s'annulant jamais, cette dernière équation peut se résoudre sur $\mathbb{R}$. Il faut trouver une primitive de la fonction tanh : $x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. Ce quotient est de la forme $\dfrac{u'}{u}$, il a donc pour primitive $\ln(e^x + e^{-x})$, ou encore (elles ne diffèrent que d'une constante) $\ln(\cosh(x))$. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions $y_h : x \mapsto K\cosh(x)$. On va chercher une solution particulière à l'équation complète de la forme $y_p(x) = K(x)\cosh(x)$, ce qui implique $y_p'(x) = K'(x)\cosh(x) + K(x)\sinh(x)$. La fonction est solution de l'équation si $K'(x)\cosh(x) = \dfrac{\sinh^3(x)}{\cosh(x)}$, soit $K'(x) = \dfrac{\sinh^3(x)}{\cosh^2(x)} = \dfrac{(\cosh^2(x) - 1)\sinh(x)}{\cosh^2(x)} = \sinh(x) - \dfrac{1}{\cosh^2(x)}$. On en déduit qu'on peut prendre $K(x) = \cosh(x) - \tanh(x)$, soit $y_p(x) = \cosh^2(x) - \sinh(x)$. Les solutions de l'équation complète sont donc les fonctions $y : x \mapsto \cosh^2(x) - \sinh(x) + K\cosh(x)$. Une dernière série de courbes pour terminer en beauté l'exercice, de haut en bas les courbes correspondant à $K = 2$, $K = 1$, $K = 0$, $K = -1$, $K = -2$, $K = -3$ et $K = -5$:



Exercice 2 (*)

Sur les intervalles précisés, aucun problème : l'équation homogène $y' + \dfrac{y}{x} = 0$ a pour solutions les fonctions $y_h : x \mapsto e^{-\ln|x|} = \dfrac{K}{x}$ (quitte à changer le signe de K sur $\mathbb{R}^{-*}$), et on cherche y_p sous la forme $\dfrac{K(x)}{x}$. On obtient $y_p'(x) = \dfrac{xK'(x) - K(x)}{x^2}$, d'où la condition $\dfrac{xK'(x)}{x^2} = \dfrac{1}{x^2}$, soit $K(x) = \ln|x|$, donc les solutions générales sont de la forme $y(x) = \dfrac{K + \ln|x|}{x}$. Ces fonctions ne sont jamais prolongeables par continuité en 0, il n'y a donc pas de solution définie sur $\mathbb{R}$. Une allure de quelques courbes intégrales de cette équation (comme dans le premier exercice, rouge pour $K = 0$, bleu pour 1, vert pour 2, rose pour 5 et orange pour -2) :



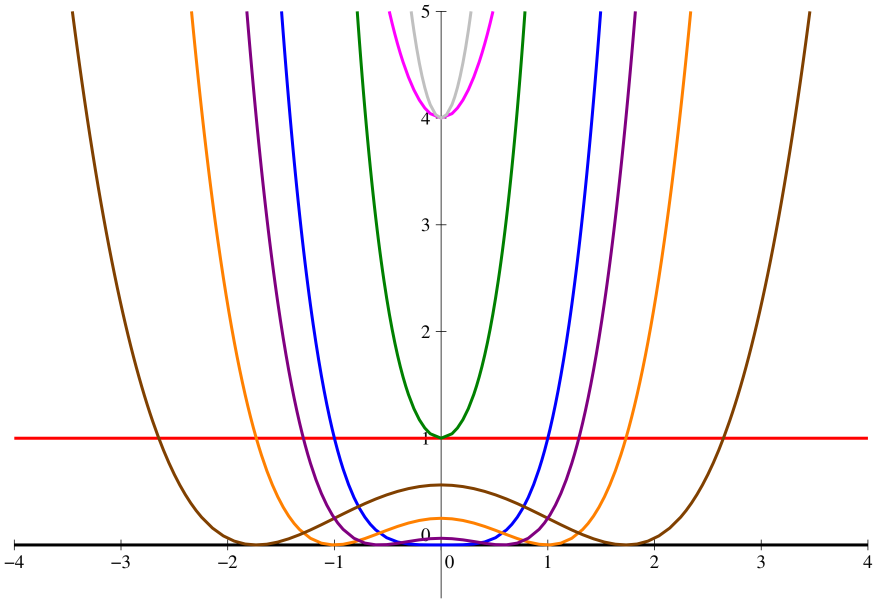
Exercice 3 (**)

Toutes les solutions sont des fonction dérivables sur $\mathbb{R}$, puisque le membre de droite de l'équation est dérivable. On peut par ailleurs écrire l'équation $f(x) = \sin(x) + 2e^x \int_0^x e^{-t} f(t)\ dt$, et dériver pour obtenir $f'(x) = \cos(x) + 2e^x \times e^{-x} f(x) + 2e^x \int_0^x e^{-t} f(t)\ dt$. En reprenantr l'équation initiale, on a donc $f'(x) = \cos(x) + 2f(x) + (f(x) - \sin(x))$, soit $f'(x) - 3f(x) = \cos(x) - \sin(x)$. On est retombé sur une équation linéaire du premier ordre qu'on sait résoudre. L'équation homogène a pour solutions $y_h : x \mapsto Ke^{3x}$, et on peut chercher une solution particulière de la forme $y_p(x) = a\sin(x) + b\cos(x)$, ce qui donne $y_p'(x) = a\cos(x) - b\sin(x)$. La fonction y_p est donc solution si $(a - 3b)\cos(x) - (b + 3a)\sin(x) = \cos(x) - \sin(x)$, ce qui fonctionne si $a - 3b = 1$ et $b + 3a = 1$, soit $b = -\frac{1}{5}$ et $a = \frac{2}{5}$. On peut donc prendre $y_p(x) = \frac{2}{5}\cos(x) - \frac{1}{5}\sin(x)$, ce qui donne comme solutions de l'équation complète les fonctions $f(x) = \frac{2}{5}\cos(x) - \frac{1}{5}\sin(x) + Ke^{3x}$. Le travail n'est pas fini car on a obtenu simplement les fonctions f dont la dérivée vérifie une condition nécessaire pour être solutions du problème initial. Il faut donc vérifier par exemple que $f(0)$ prend la valeur donnée par l'équation initiale pour que nos solutions soient valables. Ici, on doit avoir $f(0) = \sin(0) + \int_0^x e^{x-t} f(t)\ dt = 0$, donc $K + \frac{2}{5} = 0$. cela impose la valeur $K = -\frac{2}{5}$, soit $f(x) = \frac{2}{5}\cos(x) - \frac{1}{5}\sin(x) - \frac{2}{5}e^{3x}$. On vérifie si on le souhaite que cette fonction est effectivement solution, et c'est donc la seule.

Exercice 4 (**)

Posons donc $z = \sqrt{y}$ (ce qui est possible car y doit être à valeurs positives pour satisfaire l'équation), on a alors $y = z^2$, donc $y' = 2zz'$, d'où $2(1 + t^2)zz' = 4tz^2 + 4tz$. On doit donc avoir, pour les points où z ne s'annule pas, $2(1 + t^2)z' - 4tz = 4t$. Il y a une solution particulière évidente à cette équation qui est la fonction constante égale à -1, et l'équation homogène associée $z' - \frac{2t}{1 + t^2} z = 0$ a pour solutions les fonctions de la forme $t \mapsto Ke^{\ln(1+t^2)} = K(1 + t^2)$, donc on obtient $z(t) = K(1 + t^2) - 1$, et $y(t) = (K(1 + t^2) - 1)^2$. Se pose désormais le problème de savoir ce qui se passe lorsque ces solutions s'annulent. On constate que $z(t) = 0$ si $t^2 = \frac{1 - K}{K}$ (si $K = 0$, y est la fonction constante égale à 1). Si $K \notin]0, 1]$, pas de problème, z et y ne s'annulent jamais et on obtient donc des solutions définies sur $\mathbb{R}$. Il existe d'ailleurs une autre solution définie partout, la solution nulle. Regardons maintenant les cas où les fonctions n'annulent. Commençons par le cas particulier $K = 1$, où $y(t) = t^4$. Cette fonction s'annule une seule fois, pour $t = 0$, et elle est solution de l'équation sur $\mathbb{R}$ tout entier (on le vérifie facilement, la dérivée en 0 étant nulle). Si $0 < K < 1$, z et y s'annulent pour $K = \pm\sqrt{\dfrac{1-K}{K}}$, et l'équation initiale devient pour les valeurs où y s'annule $(1+t^2)y' = 0$, donc la dérivée de y doit s'annuler à ces endroits pour que la fonction y reste solution. Or, $y'(t) = 2z(t)z'(t)$ s'annule toujours aux endroits où y s'annule. Les solutions sont donc en fait valables sur $\mathbb{R}$, mais peut-on effectuer des recollements (issus de valeurs différentes de la constante K ? En constatant que, lorsque K varie entre 0 et 1, $\sqrt{\dfrac{1-K}{K}}$ est bijective vers $\mathbb{R}^{+*}$ (je vous le laisse en exercice), il existe une seule solution passant par chacun des deux points où notre solution s'annule. Ou plutôt non, il y en a deux, car la solution nulle convient également. On peut donc effectuer des recollements de ce genre : $y(t) = (K(1+t^2)-1)^2$ sur $\left]-\infty; -\sqrt{\dfrac{1-K}{K}}\right]$, puis $y(t) = 0$ sur $\left[-\sqrt{\dfrac{1-K}{K}}; \sqrt{\dfrac{1-L}{L}}\right]$, et enfin $y(t) = (L(1+t^2)-1)^2$ sur $\left[\sqrt{\dfrac{1-L}{L}}; \right[$. On peut même ajouter à ce type de solutions la partie centrale (entre les deux valeurs d'annulation) de la solution $y(x) = (M(1+t^2)-1)^2$ si $M > L$ et $M > K$.

Regardons tout cela sur un petit graphique. En noir la solution nulle, en rouge la solution pour $K = 1$ (donc constante égale à 1), en bleu $K = 1$ (celle qui s'annule uniquement en 0), en vert $K = 2$, en rose $K = -1$, en gris $K = 3$ (solutions ne s'annulant pas) ; en orange $K = \dfrac{1}{2}$, en marron $K = \dfrac{1}{4}$ et en violet $K = \dfrac{3}{4}$. On peut ainsi, comme décrit plus haut, construire une solution sur $\mathbb{R}$ en prenant le morceau de gauche de la courbe marron (jusqu'à la valeur d'annulation négative), en mettant un petit bout de solution noire (donc égale à 0) jusqu'à atteindre le morceau central (entre les deux valeurs d'annulation) de la solution violette, on suit ce morceau central, on remet un peu de 0, et on finit avec le morceau de droite de la courbe orange. En jetant un oeil aux solutions qui ne s'annulent pas, on voit qu'il y a d'autres recollements possibles en 0. En effet, toutes les solutions ont une dérivée nulle en 0, et celles correspondant à des fonctions z prenant des valeurs opposées auront la même valeur en 0 (à cause du passage au carré). Pour chaque valeur de K supérieure à 1 correspondra une valeu de K négative pour lesquelles on pourra recoller en 0. Ainsi, par exemple, la fonction correspondant à $K = -1$ (courbe rose) sur $\mathbb{R}^-$ et $K = 3$ (courbe grise) sur $\mathbb{R}^+$ est une solution définie sur $\mathbb{R}$ de l'équation.



Exercice 5 (**)

Posons donc $z = \dfrac{1}{y}$, on a alors $y = \dfrac{1}{z}$, donc $y' = -\dfrac{z'}{z^2}$, ce qui nous donne l'équation $-\dfrac{3z'}{z^2} + \dfrac{3}{z} + \dfrac{1}{z^2} = 0$, soit en mettant tout au même dénominateur et en simplifiant par z : $3z' - 3z = 1$. Les solutions de l'équation homogène sont de la forme Ke^t, et la fonction constante égale à $-\dfrac{1}{3}$ est solution particulière évidente, donc $z(t) = Ke^t - \dfrac{1}{3}$. Ces fonctions ne s'annulent pas lorsque $K \leqslant 0$ (elles sont alors toujours négatives), ce qui donnent des solutions définies sur $\mathbb{R}$ pour l'équation initiale de la forme $y(t) = \dfrac{1}{Ke^t - \frac{1}{3}}$, où $K \in \mathbb{R}^-$. On pourrait s'intéresser au recollement des solutions qui s'annulent avec la solution nulle, mais comme ce n'est pas demandé, pourquoi se fatiguer ?

Exercice 6 (**)

En posant $u = \dfrac{y'}{y}$, on a $u' = \dfrac{y''y - y'^2}{y^2}$, donc l'équation devient $y^2(u' \sin^2(x) + 1) = 0$. La fonction y n'ayant pas trop le droit de s'annuler pour que notre changement de variable soit valable, on a $u'(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -\dfrac{\cos^2(x)}{\tan^2(x)}$, donc $u(x) = \dfrac{1}{\tan x} + K$ (vous pouvez ajouer cette primite à votre tableau de primitives usuelles si vous le souhaitez). Revenons à notre changement de variable : $y' - uy = 0$, donc $y' - \left(\dfrac{\cos(x)}{\sin(x)} + K\right) y = 0$. L'équation est homogène, il suffit de trouver une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)} + K$, on peut prendre $\ln|\sin(x)| + Kx$, et obtenir ainsi pour solutions de l'équation initiale les fonctions $y(x) = L|\sin(x)|e^{-Kx}$. Les plus courageux pourront se demander s'il y a des recollements possibles entre différentes valeurs des constantes K et L.

Exercice 7 (*)

On devrait reconnaitre que la fonction y est la fonction tangente. Par la méthode d'Euler avec pas $\dfrac{1}{4}$, on a $y'(0) = 1$, donc la tangente en 0 a pour équation $y = x$, donc $y\left(\dfrac{1}{4}\right) \simeq \dfrac{1}{4}$, puis $y'\left(\dfrac{1}{4}\right) \simeq \dfrac{17}{16}$

etc. En fait, en notant $u_k = f\left(\frac{k}{n}\right)$, en prenant comme pas $\frac{1}{n}$, on a $u_{k+1} = \frac{1}{n}(u_k^2+1)+u_k$ (c'est une conséquence de la forme de l'équation différentielle). Pour $n=4$, on a donc $u_1 = \frac{1}{4}$, $u_2 = \frac{17}{16}$, $u_4 \simeq 1.255$. Pour $n=10$, on a $u_1 = \frac{1}{10}$, $u_2 = \frac{201}{1000}$ puis $u_{10} \simeq 1.396$. Sachant que $\tan 1 \simeq 1.557$, les approximations ne sont pas vraiment extrêmement satisfaisantes.

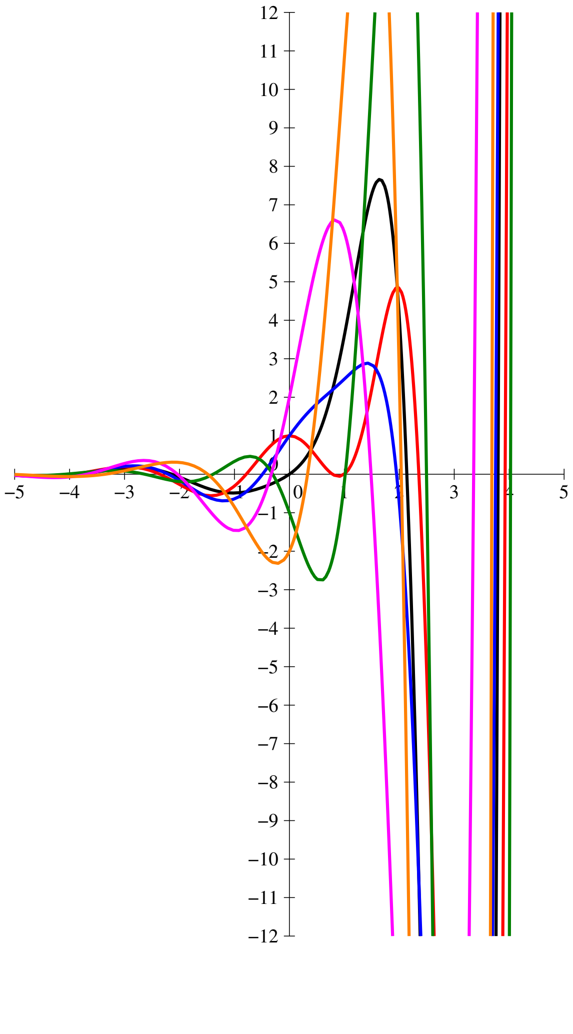
Exercice 8 (* à ***)

1. L'équation caractéristique $r^2+4=0$ ayant pour solution $2i$ et $-2i$, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $y_h : x \mapsto A\cos(2t)+B\sin(2t)$. On cherche une solution particulière y_p de la forme $y_p(x) = ax^2+bx+c$, on a donc $y_p'' = 2a$, et y_p est solution si $4ax^2+4bx+4c+2a = x^2-x+1$, soit $a = \frac{1}{4}$; $4b=-1$ donc $b = -\frac{1}{4}$; et $4c+2a = 1$ donc $c = \frac{1}{8}$. On obtient finalement comme solutions de l'équation complète les fonctions $y(x) = A\cos(2x)+B\sin(2x)+\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}$.
2. L'équation caractéristique $r^2+r=0$ a pour solution 0 et 1, les solutions homogènes sont donc de la forme $y(x) = A+Be^{-x}$ (c'est une fausse équation du second ordre, on a en fait une équation du premier ordre en y'), il faut chercher une solution particulière de la forme $y_p(x) = (ax^2+bx+c)e^x$, donc $y_p'(x) = (ax^2+(2a+b)x+(b+c))e^x$, et $y_p''(x) = (ax^2+(4a+b)x+(2a+2b+c))e^x$. Cette fonction est solution si, après simplification par e^x, $2ax^2+(6a+2b)x+2a+3b+2c = 4x^2$, ce qui nous donne $a=2$; $6a+2b=0$ donc $b=-6$; et $2a+3b+2c=0$ donc $c=7$. On a donc des solutions générales de la forme $y(x) = A+Be^{-x}+(2x^2-6x+7)e^x$. Si on impose de plus $y(0) = A+B+7 = e$ et $y'(0) = -B+1 = 0$, on obtient $B=1$ et $A = e-8$, et la solution est bien unique.
3. L'équation homogène a pour équation caractéristique $r^2+r+2=0$, dont le discriminant est $\Delta = 1-8 = -7$, et les solutions $r_1 = -\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{7}}{2}$, et $r_1 = -\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{7}}{2}$. Les solutions sont donc de la forme $y_h(x) = \left(A\cos\left(\frac{\sqrt{7}x}{2}\right)+B\sin\left(\frac{\sqrt{7}x}{2}\right)\right)e^{-\frac{x}{2}}$. Pour la solution particulière, on va chercher sous la forme $y_p(x) = (ax+b)e^x$, donc $y_p'(x) = (ax+a+b)e^x$ et $y_p''(x) = (ax+2a+b)e^x$, qui est solution si $4ax+3a+4b = 8x+1$, soit $a=2$ et $b = -\frac{5}{4}$. Les solutions de l'équation complète sont donc les fonctions $y : x \mapsto \left(A\cos\left(\frac{\sqrt{7}x}{2}\right)+B\sin\left(\frac{\sqrt{7}x}{2}\right)\right)e^{-\frac{x}{2}} + \left(2x-\frac{5}{4}\right)e^x$.
4. Ici, l'équation caractéristique $r^2-1=0$ a pour solution -1 et 1, donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $y_h : x \mapsto Ae^x+Be^{-x}$. Pour la solution particulière, utilisons le principe de superposition : comme $\sinh(x) = \frac{e^x}{2}-\frac{e^{-x}}{2}$, on va chercher une solution particulière avec second membre $\frac{e^x}{2}$, puis $\frac{e^{-x}}{2}$. Dans les deux cas, l'exposant de l'exponentielle est racine de l'équation caractéristique, il faut donc prendre un polynome de degré 1 en facteur. Posons donc $y_1(x) = (ax+b)e^x$, on a $y_1''(x) = (ax+2a+b)e^x$, et y_1 est solution pour $\frac{e^x}{2}$ si $a = \frac{1}{4}$ (et on prend par exemple $b=0$) donc $y_1(x) = \frac{1}{4}xe^x$. De même, on obtient $y_2(x) = -\frac{1}{4}xe^{-x}$, donc en faisant la différence des deux, une solution particulière de l'équation complète est $y_p : x \mapsto \frac{1}{2}x\cosh(x)$. Finalement, nos solutions de l'équation complète sont les fonctions

$y(x) = Ae^x + Be^{-x} + \dfrac{1}{2}x\cosh(x)$.

5. L'équation caractéristique a pour racines évidentes $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$, donc les solutions de l'équation homogène sont de la forme $Ae^t + Be^{2t}$. Il faut chercher y_p de la forme $(at^3 + bt^2 + ct + d)e^t$ (un peu de courage !), donc $y_p'(t) = (at^3 + (3a+b)t^2 + (2b+c)t + c + d)e^t$ et $y_p''(t) = at^3 + (6a+b)t^2 + (6a+4b+c)t + 2b + 2c + d)e^t$. Cette fonction est solution si $(a-3a+2a)t^3+(6a+b-9a-3b+2b)t^2+(6a+4b+c-6b-3c+2c)t+2b+2c+d-3c-3d+2d = -3t^2+10t-7$, soit $-3at^2+(6a-2b)t+2b-c = -3t^2+10t-7$. On obtient $a = 1$; $6a-2b = 10$ donc $b = -2$; et $2b - c = -7$ donc $c = 3$. Les solutions de l'équation complète sont de la forme $y(t) = (t^3 - 2t^2 + 3t + A)e^t + Be^{2t}$.

6. L'équation caractéristique $r^2 - 2r + 5$ a pour discriminant $\Delta = 4 - 20 = (4i)^2$ et pour racines $r_1 = 1 + 2i$ et $r_2 = 1 - 2i$, donc les solutions de l'équation homogène sont de la forme $t \mapsto (A\cos(2t) + B\sin(2t))e^t$. Pour la solution particulière, on va en chercher une de l'équation $y'' - 2y' + 5y = 4e^te^{2it} = 4e^{(1+2i)t}$ sous la forme $y_p(t) = (at+b)e^{(1+2i)t}$. On a donc $y_p'(t) = ((a+2ia)t+b+2ib+a)e^{(1+2i)t}$ et $y_p''(t) = ((a+4ia-4a)t+b+2ib+a+2ib-4b+2ia+a+2ia)e^{(1+2i)t}$. On a une solution si $(a+4ia-4a-2a-4ia+5a)t-3b+4ib+2a+4ia-2b-4ib-2a+5b = 4$, soit $a = -i$ (quelle simplification spectaculaire !), donc une solution particulière est la fonction $y_p(t) = -ite^{(1+2i)t} = -ie^t(\cos(2t) + \sin(2t))$. Pour obtenir une solution particulière de notre équation initiale, il suffit de prendre la partie imaginaire de la précédente : $\widetilde{y_p}(t) = -t\cos(2t)e^t$. On obtient finalement pour solutions de l'équation complète $y(t) = ((A-t)\cos(2t) + B\sin(2t))e^t$. Je ne donne qu'un exemple de courbes intégrales pour cette dernière équation, avec deux constantes qui peuvent varier indépendemment, c'est beaucoup moins intéressant que dans le cas des équations du premier ordre, mais ça donne une vague idée des allures possibles :



Exercice 9 (**)

On pose donc $y(x) = z(\ln(x))$ (puisqu'on cherche des solutions sur $\mathbb{R}^{+*}$, c'est toujours possible), d'où $y'(x) = \dfrac{1}{x}z'(\ln(x))$ et $y''(x) = -\dfrac{1}{x^2}z'(\ln(x)) + \dfrac{1}{x^2}z''(\ln(x))$. L'équation devient alors $-z'(\ln(x)) + z''(\ln(x)) + 3z'(\ln(x)) + z(\ln(x)) = \dfrac{1}{x^2}$, soit en posant $t = \ln(x)$, $z'' + 2z' + z = e^{-2t}$. L'équation caractéristique associée $r^2 + 2r + 1 = 0$ a pour racine double -1, donc les solutions de l'équation homogène sont de la forme $z_h(t) = (A + Bt)e^{-t}$, et une solution particulière sera de la forme Ke^{-2t}, avec $4K - 4K + K = 1$, donc $K = 1$ convient, soit $z_p(t) = e^{-2t}$. On a donc comme solutions générales les fonctions $z(t) = (A + Bt)e^{-t} + e^{-2t}$, d'où on tire en remplaçant t par $\ln(x)$, $y(x) = \dfrac{A + B\ln x}{x} + \dfrac{1}{x^2}$. En imposant $y(1) = y'(1) = 0$, on a $A + 1 = -A + B - 2 = 0$, d'où $A = -1$ et $B = 1$. La seule fonction solution de ce problème est donc la fonction $x \mapsto \dfrac{x\ln x - x + 1}{x^2}$.

Exercice 10 (**)

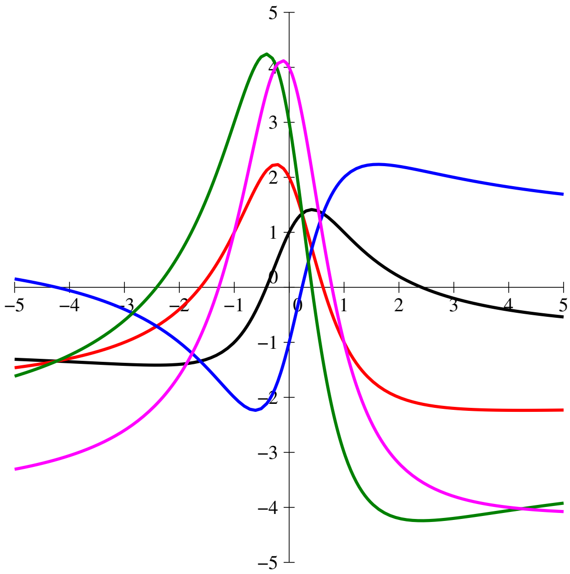
Faisons donc ce que l'énoncé nous conseille, en posant $y(t) = z(t)e^{-t^2}$ (on peut toujours puisque e^{-t^2} ne s'annule jamais), on a alors $y'(t) = (z'(t) - 2tz(t))e^{-t^2}$, puis $y''(t) = (z''(t) - 2z(t) - 2tz'(t))e^{-t^2} - 2t(z'(t) - 2tz(t))e^{-t^2} = (z''(t) - 4tz'(t) + (4t^2 - 2)z(t))e^{-t^2}$. L'équation initiale devient alors, en supprimant le e^{-t^2} en facteur de tous les termes (et qui ne s'annule jamais), $z'' - 4tz' + (4t^2 - 2)z + 4tz' - 8t^2z + (11 + 4t^2)z = 0$, soit $z'' + 9z = 0$. Voilà une équation plus sympathique, dont l'équation caractéristique $r^2 + 9 = 0$ a pour solutions $3i$ et $-3i$. Les solutions sont donc de la forme $A\cos(3t) + B\sin(3t)$, dont on déduit les solutions de l'équation initiale : $y(t) = (A\cos(3t) + \sin(3t))e^{-t^2}$.

Exercice 11 (***)

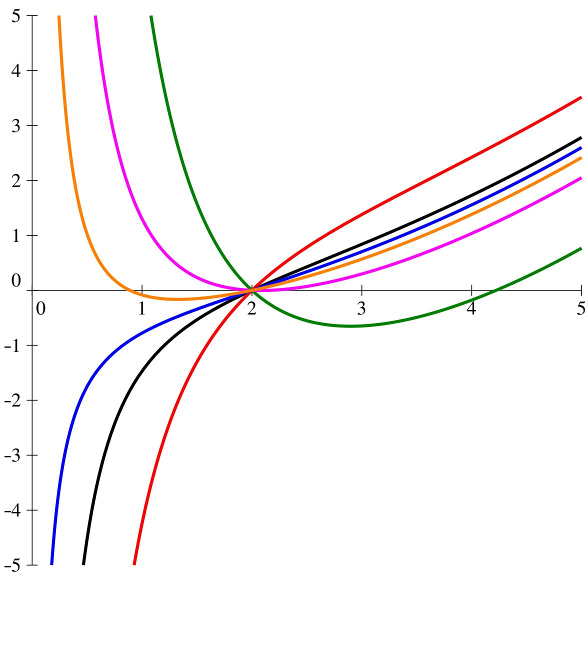
1. L'indication de l'énoncé suppose qu'on travaille sur $\mathbb{R}^+$. De toute façon, la normalisation de l'équation obligera à enlever la valeur $x = 0$. Posons donc $y(x) = z(\sqrt{x})$, ce qui donne $y'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}z'(\sqrt{x})$, puis $y''(x) = -\dfrac{1}{4x\sqrt{x}}z'(\sqrt{x}) + \dfrac{1}{4x}z''(\sqrt{x})$. L'équation initiale peut alors s'écrire $-\dfrac{1}{\sqrt{x}}z'(\sqrt{x}) + z''(\sqrt{x}) + \dfrac{1}{\sqrt{x}}z'(\sqrt{x}) - z(\sqrt{x}) = 0$, soit $z''(t) - z(t) = 0$. Cette équation homogène a coefficients constants a pour équation caractérisrique $r^2 - 1 = 0$, et les fonctions solutions sont donc $z : t \mapsto Ae^t + Be^{-t}$. On en déduit que $y(x) = Ae^{\sqrt{x}} + Be^{-\sqrt{x}}$.

   Les plus courageux regarderont ce qui se passe sur $\mathbb{R}^{-*}$, où on pose cette fois $t = -\sqrt{x}$ et on obtient par un calcul très similaire à celui effectué ci-dessus $z'' + z = 0$, ce qui donne alors $y(x) = C\cos(\sqrt{-x}) + D\sin(\sqrt{-x})$. Existe-t-il des solutions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier ? Oui, on peut recoller les deux types de solution quand $C = \dfrac{A + B}{2}$ (pour avoir la même valeur de y en 0), et $D = \dfrac{A - B}{2}$ (pour avoir la même dérivée en 0). En fait, on aura dans ce cas $y(x) = C\cosh(x) + D\sinh(x)$ sur $[0; +\infty[$.

2. On peut résoudre cette équation sur $\mathbb{R}$ en posant $y(x) = z(\arctan(x))$, ce qui implique $y'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}z'(\arctan(x))$ puis $y''(x) = \dfrac{1}{(1 + x^2)^2}z''(\arctan(x)) - \dfrac{2x}{(1 + x^2)^2}z'(\arctan(x))$. En remplaçant dans l'équation initiale, $z''(\arctan(x)) - 2xz'(\arctan(x)) + 2xz'(\arctan(x)) + 4z(\arctan(x)) = 0$, soit $z''(t) + 4z(t) = 0$. On résout sans difficulté l'équation caractéristique $r^2 + 4 = 0$ (solutions $2i$ et $-2i$) pour prouver que $z(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t)$, donc $y(x) = A\cos(2\arctan(x)) + B\sin(2\arctan(x))$. Quelques exemples de courbes intégrales de cette équation (encore une fois, ça n'a pas grand intérêt) :



3. Faisons donc : $y(x) = z(\ln(x))$ implique $y'(x) = \dfrac{1}{x}z'(\ln(x))$ puis $y''(x) = \dfrac{1}{x^2}z''(\ln(x)) - \dfrac{1}{x^2}z'(\ln(x))$, donc en reportant dans l'équation initiale $z''(\ln(x)) - z'(\ln(x)) + 3z'(\ln(x)) + z(\ln(x)) = x^2$, soit $z''(t) + 2z'(t) + z(t) = e^{2t}$. L'équation caractéristique $r^2 + 2r + 1$ admet -1 comme racine double donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $z_h : t \mapsto (A + Bt)e^{-t}$. On cherche une solution particulière sous la forme $z_p(t) = Ke^{2t}$. On aura alors $z_p'(t) = 2Ke^{2t}$, puis $z''(t) = 4Ke^{2t}$, donc on veut $4K + 4K + K = 1$, soit $K = \dfrac{1}{9}$. Les solutions de l'équation complète sont donc les fonctions $z : t \mapsto (A + Bt)e^{-t} + \dfrac{1}{9}e^{2t}$. On retrouve alors $y(x) = \dfrac{A + B\ln(x)}{x} + \dfrac{1}{9}x^2$. Pour changer un peu, essayons de tracer les courbes intégrales correspondant aux solutions prenant une valeur particulière, par exemple $y(2) = 0$, ce qui implique $\dfrac{A + B\ln(2)}{2} + \dfrac{4}{9} = 0$, soit $A = -\dfrac{8}{9} - B\ln(2)$. On obtient ce genre de courbes :



Exercice 12 (***)

Comme $f'(x) = 2f(-x) + x$, f' est elle-même dérivable, donc f est deux fois dérivable. Dérivons donc l'équation, on obtient $f''(x) = -2f'(-x) + 1 = -2(2f(x) - x) + 1 = -4f(x) + 2x + 1$. La fonction f est donc solution de l'équation différentille $f'' + 4f = 2x + 1$, qui se résout sans difficulté : les solutions homogènes sont de la forme $A\cos(2x) + B\sin(2x)$ et une solution particulière évidente est la fonction $x \mapsto \dfrac{2x+1}{4}$, donc $f(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x) + \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}$.

Exercice 13 (***)

Commençons par remarquer qu'en prenant $x = y = 0$, on a $2f(0) = 2f(0)^2$, donc $f(0)$ ne peut prendre que les valeurs 0 et 1. Mais si $f(0) = 0$, on a $\forall x \in \mathbb{R}$, en prenant $y = 0$, $2f(x) = 0$, donc f est la fonction nulle. Pour la suite, on peut supposer que $f(0) = 1$. Fixons désormais y et dérivons par rapport à x, on obtient $f'(x+y) + f'(x-y) = 2f(y)f'(x)$, puis en dérivant à nouveau $f''(x+y) + f''(x-y) = 2f(y)f''(x)$. De même, en dérivant deux fois par rapport à y, on obtient $f''(x+y) + f''(x-y) = 2f(x)f''(y)$ (il y a deux changement de signe qui se compensent quand on dérive deux fois $f(x-y)$). Puisque le membre de gauche est le même dans les deux équations, on en déduit que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f''(x)f(y) = f(x)f''(y)$, soit en posant $y = 0$, $f''(x) = Kf(x)$, avec $K = f''(0)$.

Si $K = 0$, les solutions possibles sont de la forme $f(x) = ax + b$, avec $b = 1$ puisque $f(0) = 1$. Pour vérifier l'équationn fonctionnelle, on doit alors avoir $a(x+y) + 1 + a(x-y) + 1 = 2(ay+1)(ax+1)$, soit $2(ax+1) = 2(a^2xy + ax + ay + 1)$. Cette équation est vérifiée si $ax(ay+1) = 0$ quelles que soient les valeursz de x et y, ce qui impose manifestement $a = 0$. On trouve donc comme solution possible la fonction constante égale à 1.

Si $K > 0$, l'équation $f'' = Kf$ a pour équation caractéristique $r^2 - K = 0$, qui a deux solutions réelles $\pm\sqrt{K}$, f est alors de la forme $Ae^{Lx} + Be^{-Lx}$, où $L = \sqrt{K} > 0$. La condition $f(0) = 1$ impose $A + B = 1$, et l'équation fonctionnelle devient $Ae^{Lx+Ly} + Be^{-Lx-Ly} + Ae^{Lx-Ly} + Be^{-Lx+Ly} = 2(Ae^{Lx} + Be^{-Lx})(Ae^{Ly} + Be^{-Ly}) = 2(A^2e^{Lx+Ly} + ABe^{Lx-Ly} + ABe^{-Lx+Ly} + B^2e^{-Lx-Ly})$. Cela fonctionne bien si $2A^2 = A$, $2AB = A = B$ et $2B^2 = B$, ce qui donne $A = B = \dfrac{1}{2}$ (seule possibilité compatible avec $A + B = 1$). On obtient alors $f(x) = \dfrac{e^{Lx} + e^{-Lx}}{2} = \cosh(Lx) = \cosh(\sqrt{K}x)$.

Enfin, si $K < 0$, l'équation caractéristique a pour solutions $i\sqrt{-K}$ et $-i\sqrt{-K}$, donc en notant $L = \sqrt{-K}$, on aura $f(x) = A\cos(Lx) + B\sin(Lx)$. La condition $f(0) = 1$ impose immédiatement $A = 1$, puis l'équation devient, en posant par exemple $y = 0$ $2\cos(x) + 2B\sin(x) = 2\cos(x)$, ce qui impose assez clairement $B = 0$. On obtient une dernière famille de solutions de la forme $f(x) = \cos(Lx) = \cos(\sqrt{-K}x)$.

TD n°4 : géométrie dans l'espace.

PTSI B Lycée Eiffel

13 novembre 2012

Exercice 1

On considère dans l'espace les points $A(2, 1, 2)$, $B(1, 1, 3)$, $C(-1, 2, -2)$, $D(3, 0, 8)$ et $E(2, -2, -4)$.

1. Calculer $\overrightarrow{BE} \wedge \overrightarrow{AD}$.
2. Montrer que $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont orthogonaux.
3. Montrer que A, B, C et D sont coplanaires.
4. Déterminer le volume du solide $ABCDE$.

Exercice 2

On se place dans un cube $ABCDEFGH$ de côté 1, placé de façon à avoir $A(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 0)$, $D(0, 1, 0)$ et $E(0, 0, 1)$.

1. Déterminer les coordonnées des quatre sommets restants.
2. Déterminer les longueurs des diagonales de face (par exemple AC) et des grandes diagonales (par exemple AG) du cube.
3. Déterminer la distance de chaque sommet à chaque diagonale de face, et à chaque grande diagonale.
4. Déterminer l'aire des triangles AGH et AFH.
5. Déterminer l'angle formé par chaque diagonale de face avec chaque face, et de même pour les grandes diagonales.
6. Déterminer le volume des tétraèdres $ABFG$, $OFGH$ où O est le centre du cube et $AIJO$, où I est le milieu de $[EF]$, et J le centre de la face (BCF).
7. Montrer que le point $Z\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ est le projeté orthogonal commun des trois points B, D et E sur la diagonale (AG). Calculer les angles formés deux à deux par les vecteurs $\overrightarrow{BZ}$, $\overrightarrow{DZ}$ et $\overrightarrow{EZ}$.

Corrigé du TD n°4

Exercice 1

On considère dans l'espace les points $A(2,1,2)$, $B(1,1,3)$, $C(-1,2,-2)$, $D(3,0,8)$ et $E(2,-2,-4)$.

1. On calcule $\overrightarrow{BE}(1,-3,-7)$ et $\overrightarrow{AD}(1,-1,6)$, donc $\overrightarrow{BE} \wedge \overrightarrow{AD}(-25,13,2)$.

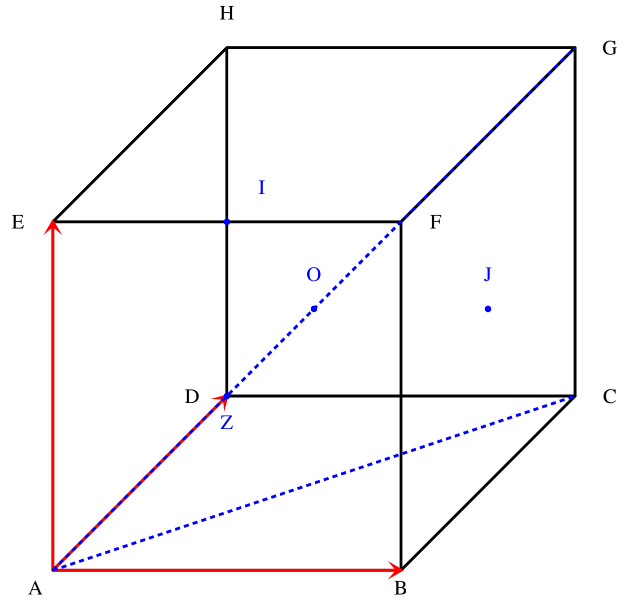
2. On calcule $\overrightarrow{BD}(2,-1,5)$ et $\overrightarrow{CE}(3,-4,-2)$, puis $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{CE} = 6+4-10 = 0$, donc les vecteurs sont bien orthogonaux.

3. On calcule $\overrightarrow{AB}(-1,0,1)$, $\overrightarrow{AC}(-3,1,-4)$ et on connait déjà $\overrightarrow{AD}(1,-1,6)$, ce qui permet de calculer $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 1 \times (-1) + 1 \times (4+3) + 6 \times (-1) = 0$. Les points A, B, C et D sont donc coplanaires.

4. On peut constater que dans le plan (ABC), la relation $2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ permet d'assurer que les points C et D sont de part et d'autre de la droite (AB). Autrement dit, l'aire du quadrilatère $ABCD$ est égale à la somme des aires de ABC et ABD, soit à $\frac{1}{2}(\| \overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC} \| + \| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} \|)$. Il faut multiplier ces aires par la hauteur du solide (puis diviser par 3 puisqu'il s'agit d'une pyramide), c'est-à-dire par la distance du point E au plan (ABC). Cette distance pouvant se calculer, on a tous les éléments pour achever le calcul du volume. Allez, faisons-le, même si je donnerai une meilleure méthode plus bas. On a $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(-1,-7,-1)$ et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}(1,7,1)$ (le fait qu'on obtienne des produits vectoriels opposés n'est pas surprenant au vu de la relation $2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$), donc l'aire du quadrilatère $ABCD$ est égale à $\sqrt{1+49+1} = \sqrt{51}$ (les deux normes sont égales, ce qui simplifie le facteur $\frac{1}{2}$ apparaissant dans l'aire des triangles). Reste à calculer la distance de E au plan (ABC), Comme $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ forme une base du plan (ABC), on peut utiliser la formule $d(E,(ABC)) = \dfrac{|\det(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|}{\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \|}$. On se rend compte qu'on a calculé la norme précédente pour rien puisqu'on va diviser par cette même valeur, et qu'il suffit donc de calculer $|[\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -3 \\ -3 & 0 & 1 \\ -6 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -3 \times (-3) - 1 \times -6 - 4 \times -3 = 27$. En divisant par trois, le volume du solide $ABCDE$ est donc égal à 9.

   On peut également faire un peu plus rapide en utilisant nos connaissances sur les volumes de parallélépipèdes et la linéarité du produit mixte. Le volume du solide $ABCE$ est égal au sixième du volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$, donc à $\dfrac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}]|}{6}$. De même, le volume du solide $ABDE$ vaut de même $\dfrac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{AE}]|}{6}$. En faisant la somme des deux (le fait d'avoir choisi $\overrightarrow{DA}$ et pas $\overrightarrow{AD}$ comme deuxième vecteur dans le deuxième produit mixte assure que les deux produits mixtes sont de même signe, ce qui permet d'additionner les deux valeurs absolues), on peut appliquer la trilinéarité du produit mixte (sur la variable du milieu) pour obtenir la formule $\dfrac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{AE}]|}{6}$. On calcule alors $\overrightarrow{AB}(-1,0,1)$, $\overrightarrow{DC}(4,-2,10)$ et $\overrightarrow{AE}(0,-3,-6)$, puis $|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}]| = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ 1 & 10 & -6 \end{vmatrix} = 0 + 3 \times (-14) - 6 \times 2 = -54$, ce qui donne un volume pour le solide $ABCDE$ égal à $\dfrac{54}{6} = 9$.

Exercice 2



1. On a $C(1,1,0)$, $F(0,1,1)$, $G(1,1,1)$ et $H(1,0,1)$. Si on tient absolument à justifier, on utilise des égalités vectorielles du type $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{DH}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EG}$.

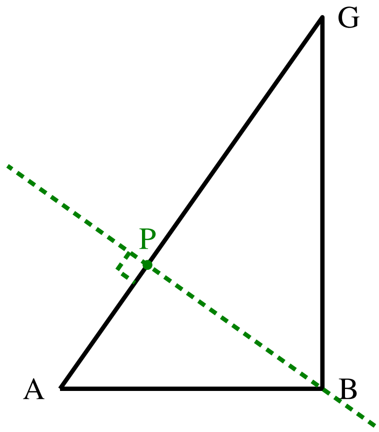
2. Méthode rustique : on applique le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ABC pour obtenir $AC = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, puis dans le triangle rectangle ACG pour obtenir $AG = \sqrt{\sqrt{2}^2 + 1^2} = \sqrt{3}$.

   Méthode sophistiquée : $AC = \parallel \overrightarrow{AC} \parallel = \sqrt{1^2+1^2+0^2} = \sqrt{2}$, et $AH = \parallel \overrightarrow{AG} \parallel = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$.

3. Par exemple pour la diagonale (AC) : A et C sont évidemment à distance 0, E et G à distance 1 puisque leurs projetés respectifs sur la droite sont A et C ; B et D sont à distance $\frac{\sqrt{2}}{2}$ car les triangles ABK et ADK, où K est le milieu de $[AC]$, sont rectangles isocèles. Enfin, les triangles KBF et KDH étant rectangles, un coup de Pythagore permet d'obtenir $KF = KH = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$, qui sont les distances des points F et H à la droite (AC).

   Pour une méthode plus sophistiquée, on utilise la distance d'un point à une droite. Ici, le vecteur directeur $\overrightarrow{AC}$ a pour norme $\sqrt{2}$, et on a par exemple $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (0,0,1)$, donc $d(B,(AC)) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. De même, $\overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{AC} = (-1,1,0)$, donc $d(E,(AC)) = \frac{\sqrt{(-1)^2+1^2}}{\sqrt{2}} = 1$. Enfin, $\overrightarrow{AF}\overrightarrow{AC} = (-1,1,-1)$, donc $d(F,(AC)) = \frac{\sqrt{(-1)^2+1^1+(-1)^2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

   Pour la grande diagonale, méthode rustique : A et G sont à distance nulle, pour B par exemple on se place dans le triangle rectangle ABG et on cherche la hauteur issue de B dans ce triangle, notons P le projeté orthogonal de B sur (AG).



Le triangle a pour aire $\frac{1}{2}AG \times BP = BP\frac{\sqrt{3}}{2}$, mais aussi $\frac{1}{2}AB \times BG = \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc $BP = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Les distances des cinq autres sommets du cube à la droite (AG) sont aussi égales à $\sqrt{\frac{2}{3}}$ (on peut dessiner des situations semblables à celle qu'on vient d'étudier pour chacun d'eux).

Et pour un calcul plus savant, $d(B,(AG)) = \frac{\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AG} \|}{\| \overrightarrow{AG} \|}$, avec $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AG} = (0,-1,1)$, donc $d(B,(AG)) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

4. Le triangle AGH est rectangle en H, son aire vaut $\frac{1}{2}AH \times HG = \frac{\sqrt{2}}{2}$; le triangle AFH est équilatéral de côté $\sqrt{2}$, donc de hauteur $\frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$, donc son aire vaut $\frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

   Méthode sophistiquée : $\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{AH} = (1,0,-1)$, donc l'aire de AGH vaut $\frac{1}{2}\sqrt{1^2+(-1)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; et $\overrightarrow{AF} \wedge \overrightarrow{AH} = (1,1,-1)$ donc l'aire de AFH vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
5. Faisons-le pour (AC) : l'angle avec les faces $(ABCD)$ et $(EFGH)$ est évidemment nul, l'angle avec chacune des quatre autres faces vaut $\frac{\pi}{4}$ car les triangles ABC et ACD sont isocèles rectangles. L'angle formé par la droite (AG) avec chacune des six faces est identique, par exemple avec la face $(ABCD)$ il s'agit de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AG}})$ (car C est le projeté orthogonal de G sur $(ABCS)$), qui vaut $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$, ou si on préfère $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (ce n'est pas un angle remarquable).

   Il n'y a pas de méthode sophistiquée très intéressante ici, on peut toujours déterminer l'angle avec un produit scalaire (ou vectoriel) mais il faut déjà connaitre le projeté de G sur $(ABCD)$.
6. Le tétraèdre $ABFG$ a par exemple pour hauteur $AB = 1$ et pour base le triangle BFG d'aire $\frac{1}{2}$, donc il a pour volume $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$; $OFGH$ a pour hauteur $d(O,(EFGH)) = \frac{1}{2}$ et pour

base le triangle FGH d'aire $\frac{1}{2}$, son volume vaut $\frac{1}{12}$; enfin, pour $AIJO$, on peut remarquer que le plan (IJO) est en fait le plan $(CDEF)$, donc la hauteur issue de A vaut $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (le projeté prthogonal de A sur $(CDEF)$ est le centre de la face $(ADEH)$). La base est ici le triangle OIJ, qui est rectangle en O, avec $OJ = \frac{1}{2}$ et $OI = \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc elle a pour aire $\frac{\sqrt{2}}{8}$. Finalement, le tétraèdre $AIJO$ a pour volume $\frac{1}{24}$.

La méthode sophistiquée consiste à calculer des produits mixtes pour obtenir les volumes de parallélépipèdes, et à les diviser par 6 pour retrouver le volume du tétraèdre. Pour $ABFG$, $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AG}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\times 0 - 1\times 1 + 1\times 0 = -1$, donc $ABFG$ a pour volume $\frac{1}{6}$. Pour $OFGH$, le point O ayant pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $[\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OH}] = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\times 0 + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, donc $OFGH$ a pour volume $\frac{1}{12}$. Enfin, I a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, 0, 1\right)$ et $J\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, donc $[\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AO}] = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\times\left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, donc $AOIJ$ a pour volume $\frac{1}{24}$.

7. On va utiliser directement une méthode sophistiquée pour cette dernière question. Commençopns par constater que le point Z appartient bien à la droite (AG) puisque $\overrightarrow{AZ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$. Vérifions que $(BZ) \perp (AZ)$: $\overrightarrow{BZ} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, donc $\overrightarrow{BZ}.\overrightarrow{AZ} = \frac{2}{3}\times\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = 0$. Le point Z est donc bien le projeté orthogonal de B sur (AG). Les calculs pour D et E sont extrêmement similaires. Pour déterminer les angles, on va passer par un calcul de produit scalaire. Puisque $\overrightarrow{BZ} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ et $\overrightarrow{DZ} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, les deux vecteurs ont pour norme $\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$, donc pour produit scalaire $\frac{2}{3}\times\cos(\widehat{\overrightarrow{ZB}, \overrightarrow{ZD}})$. Or, $\overrightarrow{BZ}.\overrightarrow{DZ} = -\frac{2}{9} - \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = -\frac{1}{3}$. Le cosinus de l'angle (géométrique) recherché vaut donc $-\frac{1}{2}$, l'angle est égal à $\frac{2\pi}{3}$. Les deux autres angles sont les mêmes. On peut d'ailleurs démontrer cette propriété autrement en constatant que le triangle BDE est équilatéral et que Z est son centre.

8. **Question bonus : Montrer que le plan passant par O et perpendiculaire à (AG) a une intersection avec le cube qui est un hexagone régulier.**

Le plan en question a pour vecteur normal $\overrightarrow{AG}(1, 1, 1)$, donc admet une équation cartésienne du type $x + y + z + d = 0$. Comme O appartient au plan, $d = -\frac{3}{2}$, donc l'équation peut être écrite $2x + 2y + 2z - 3 = 0$. Il est alors facile de constater que les points $M_1\left(1, \frac{1}{2}, 0\right)$; $M_2\left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$; $M_3\left(\frac{1}{2}, 0, 1\right)$; $M_4\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)$; $M_5\left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$ et $M_6\left(0, 1, \frac{1}{2}\right)$ appartiennent au plan. Or, ces six points sont des milieux d'arêtes du cube (respectivement de $[BC]$, $[BF]$, $[EF]$, $[DC]$, $[EH]$ et $[DH]$, et on vérifie sans difficulté que les six triangles OM_1M_2, OM_2M_3, OM_3M_5, OM_5M_6, OM_6M_4 et OM_4M_1 sont équilatéraux. Par exemple pour OM_1M_2, on a $OM_1 = \sqrt{\frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $OM_2 = \sqrt{\frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $M_1M_2 = \sqrt{0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. L'hexagone $M_1M_2M_3M_5M_6M_4$ est donc régulier et centré en O, et il constitue l'intersection de notre plan avec le cube.

Feuille d'exercices n°5 : géométrie dans l'espace.

PTSI B Lycée Eiffel

12 novembre 2012

Exercice 1 (*)

Déterminer les coordonnées cartésiennes des points de coordonnées cylindriques $\left(2;\frac{\pi}{3},5\right)$ et $\left(4,\frac{3\pi}{2},-2\right)$; ainsi que celles des points de coordonnées sphériques $\left(\sqrt{6},\frac{4\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)$ et $\left(2,\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$.

Déterminer les coordonnées cylindriques et sphériques du point de coordonnées cartésiennes $(\sqrt{6},\sqrt{2},2\sqrt{2})$.

À quoi ressemble l'ensemble des points ayant pour coordonnées sphériques $r=2$ et $\theta=\frac{\pi}{2}$? Et ceux vérifiant $r=5$ et $\varphi=\frac{\pi}{2}$?

Exercice 2 (*)

Soient $A(0,1,2)$; $B(-1,1,1)$; $C(2;-1;2)$; $D(4;0;-1)$ et $E(1;2;-2)$ cinq points de l'espace.

1. Calculer les distances AB, AD, BC et BE.
2. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{CE}$.
3. Déteminer les produits vectoriels $\overrightarrow{DA}\wedge\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{AE}\wedge\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{DB}\wedge\overrightarrow{CE}$.
4. Calculer les produits mixtes $[\overrightarrow{AE},\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CD}]$ et $[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}]$. En déduire le volume du parallélépipède engendré par $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

Exercice 3 (**)

Prouver la formule du double produit vectoriel : $\overrightarrow{u}\wedge(\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w})=(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w})\overrightarrow{v}-(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})\overrightarrow{w}$.

En déduire l'identité $(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v})\wedge\overrightarrow{w}+(\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w})\wedge\overrightarrow{u}+(\overrightarrow{w}\wedge\overrightarrow{u})\wedge\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$.

Exercice 4 (**)

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs fixés. Déterminer tous les vecteurs $\overrightarrow{x}$ tels que $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{x}=\overrightarrow{v}$.

Exercice 5 (*)

Calculer les déterminants suivants à l'aide de la règle de Sarrus :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \text{ et } \begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ a+c & ac & a^2+c^2 \end{vmatrix}$$

Exercice 6 (**)

Soient A, B et C trois points de l'espace, et I, J et K les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. Montrer que les égalités suivantes sont vérifiées quel que soit le point M :

1. $\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$

2. $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{KC} = \overrightarrow{0}$.
3. $[\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{MJ}, \overrightarrow{MK}] = [\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{MA}]$.

Exercice 7 (**)

Soit les points $A(1;2;3)$, $B(2;-1;2)$ et $C(0;1;-2)$, les droites $D_1 : \left\{\begin{array}{rcrcr} x &=& 3 &-& t \\ y &=& 1 &+& 2t \\ z &=& -1 &+& t \end{array}\right.$, et $D_2 : \left\{\begin{array}{rcrcr} x &=& 1 &+& 3u \\ y &=& &-& 2u \\ z &=& 3 &+& 5u \end{array}\right.$, et les plans $\mathcal{P}_1 : \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x &=& 1 &-& 2t &+& 3u \\ y &=& -2 &+& t &+& u \\ z &=& 4 &-& t &-& 2u \end{array}\right.$, $\mathcal{P}_2 : 2x-y+3z-1=0$, et $\mathcal{P}_3 : x+2z-4=0$.

1. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{P}_1$.
2. Déterminer une équation paramétrique de $\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$.
3. Donner une équation cartésienne du plan contenant les points A, B et C.
4. Déterminer l'intersection de D_1 et de $\mathcal{P}_2$.
5. Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{Q}$ contenant D_1 et tel que D_2 soit parallèle à $\mathcal{Q}$.
6. Déterminer $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$.
7. Déterminer l'intersection de $\mathcal{P}_2$ et de la droite (AB).
8. Donner une équation paramétrique de la droite passant par A, parallèle à $\mathcal{P}_2$ et coupant D_1.
9. Donner une équation cartésienne du plan passsant par C et contenant D_1.
10. Donner une équation paramétrique de la droite, si elle existe, passant par A et sécante avec les deux droites D_1 et D_2.

Exercice 8 (*)

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ les deux plans d'équations respectives $3x-4y+1=0$ et $2x-3y+6z-1=0$. Déterminer tous les points équidistants des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.

Exercice 9 (*)

Calculer les distances suivantes :

- distance du point $A(1,2,1)$ au plan $\mathcal{P} : x-2y+3z=1$.
- distance du point $B(1,2,-1)$ à la droite D d'équation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcrcr} x &=& 1 &+& 3t \\ y &=& 2 &-& t \\ z &=& & & 2t \end{array}\right.$
- distance du point $C(1,0,2)$ à la droite d'équation cartésienne $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x &-& y &+& z &=& 1 \\ x &-& y &+& z &=& -1 \end{array}\right.$.
- distance entre les deux droites D d'équation $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -x &+& y &-& z &=& 1 \\ x &-& y &+& 2z &=& 1 \end{array}\right.$, et D' d'équation $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x &-& y &-& z &=& 0 \\ -x &-& 2y &+& 3z &=& 0 \end{array}\right.$.

Exercice 10 (**)

Soit la droite D d'équation paramètrique $\left\{\begin{array}{rcrcr} x &=& 4 &+& 2t \\ y &=& 3 &+& t \\ z &=& 1 &+& t \end{array}\right.$

1. Calculer la distance $f(t)$ de O au point $M(t)$ de paramètre t de D : déterminer la valeur de t pour laquelle cette distance est minimale. En déduire les coordonnées de H, projection orthogonale de O sur D. Que vaut la distance de O à D ?

2. Montrer que le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x - 2z = 1$ contient la droite D. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{Q}$ contenant D et perpendiculaire à $\mathcal{P}$.
3. Calculer la distance de O à $\mathcal{P}$ et retrouver celle de O à D.

Exercice 11 (** à ***)

Dans un tétraèdre régulier de côté 1, déterminer :

- la hauteur du tétraèdre (distance entre un sommet et son projeté orthogonal sur la face opposée).
- le volume du tétraèdre.
- la distance entre deux arêtes non coplanaires.
- l'angle entre deux faces.

Exercice 12 (*)

Donner une équation cartésienne de chacune des sphères suivantes (en précisant leur centre et leur rayon), et étudier leur intersection avec le plan $\mathcal{P} : x+y+z-3 = 0$, ainsi que leurs intersections deux à deux :

- $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 1 = 0$
- $x^2 + y^2 + z^2 - 4y + 6z + 12 = 0$
- $x^2 + y^2 + z^2 - x + 3y - 2z + \dfrac{17}{4} = 0$

Exercice 13 (**)

Déterminer le centre A et le rayon R de la sphère circonscrite au tétraèdre dont les faces ont pour équations cartésiennes $x + y + z = 0$, $x + y - z = 2$, $x - y + z = 4$ et $-x + y + z = 6$ (on pourra commencer par déterminer les coordonnées des sommets du tétraèdre).

Exercice 14 (***)

Pour tout réel m, on considère l'ensemble $\mathcal{S}_m$ des points qui vérifiant l'équation

$$x^2 - (2m + 2)x + y^2 + (2m - 2)y + z^2 - 4mz - 6m - 4 = 0$$

1. Vérifier que, pour tout m, $\mathcal{S}_m$ est une sphère dont on précisera le centre O_m et le rayon R_m.
2. Quel est le lieu décrit par les centres O_m lorsque m décrit $\mathbb{R}$?
3. Deux sphères de la famille peuvent-elle avoir le même centre ? Le même rayon ? À quelles conditions ?
4. Déterminer l'ensemble des points appartenant simultanément à toutes les sphères $\mathcal{S}_m$.
5. Déterminer l'ensemble des points par lesquels ne passe aucune des sphères $\mathcal{S}_m$.
6. Donner, pout tout réel m, une équation du plan $\mathcal{P}_m$ passant par O_m et perpendiculaire à (OO_m).
7. Déterminer l'ensemble des points appartenant à tous les plans $\mathcal{P}_m$.
8. Caractériser l'intersection $\mathcal{P}_m \cap \mathcal{S}_m$.
9. Montrer que, si $m \neq m'$, $\mathcal{P}_m \cap \mathcal{P}_{m'}$ est une droite dont on donnera une équation paramétrique.
10. Donner une équation de l'ensemble $\mathcal{Q}$ des points par lesquels passe au moins un plan $\mathcal{P}_m$. Le point O appartient-il à $\mathcal{Q}$?

Corrigé de la feuille d'exercices n°5

Exercice 1 (*)

Puisque $2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$ et $2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$, le premier point a pour coordonnées cartésiennes $(1, \sqrt{3}, 5)$. On obtient de même pour le deuxième point $(0, -4, -2)$. Pour les coordonnées sphériques, il faut calculer $z\sqrt{6}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$; puis $x = \sqrt{6} \times \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \times \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sqrt{6} \times \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{4}$; et enfin $y = \sqrt{6} \times \frac{1}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$, ce qui donne comme coordonnées cartésiennes $\left(-\frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{3\sqrt{2}}{4}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$. Pour le deuxième point, on obtient $z = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$; $x = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{2}$ et $y = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, soit des coordonnées $\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$.

Avec les notations du cours, pour le point $M(\sqrt{6}, \sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, on a $\rho = \sqrt{6+2} = 2\sqrt{2}$, donc $\overrightarrow{OM} = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}\overrightarrow{i} + \frac{1}{2}\overrightarrow{j}\right) + 2\sqrt{2}\overrightarrow{k} = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{i} + \frac{1}{2}\overrightarrow{j}\right) + 2\sqrt{2}\overrightarrow{k}$, d'où les coordonnées cylindriques $\left(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{6}, 2\sqrt{2}\right)$. Pour les coordonnées sphériques, on commence par calculer $r = \sqrt{6+2+8} = 4$, donc $\overrightarrow{OM} = 4(\sqrt{6}\overrightarrow{i} + \sqrt{2}\overrightarrow{j}) + 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{k}$. On aura donc $\cos(\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, soit $\varphi = \frac{\pi}{4}$, ensuite $\overrightarrow{OM} = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{i} + \frac{1}{2}\overrightarrow{j}\right) + 4\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\overrightarrow{k} = 4\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\overrightarrow{i} + 4\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\overrightarrow{j} + 4\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\overrightarrow{k}$, ce qui correspond aux coordonnées sphériques $\left(4, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$.

Les points vérifiant $r = 2$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$ sont situés dans le plan contenant les vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$, et à distance 2 de 0, donc il s'agit du cercle de centre 0 et de rayon 2 dans ce plan. De même, la deuxième condition caractérise le cercle de centre 0 et de rayon 5 dans le plan contenant les vecteurs $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$.

Exercice 2 (*)

1. Calculons : $AB = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}$; $AD = \sqrt{16+1+9} = \sqrt{26}$; $BC = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$ et $BE = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$.
2. Calculons : $\overrightarrow{DA} = (-4, 1, 3)$ et $\overrightarrow{BE}(2, 1, -3)$, donc $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BE} = -8+1-9 = -16$; $\overrightarrow{BC} = (3, -2, 1)$ et $\overrightarrow{DE} = (-3, 2, -1)$ donc $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DE} = -9-4-1 = -14$, $\overrightarrow{AE} = (1, 1, -4)$ et $\overrightarrow{BA} = (1, 0, 1)$ donc $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BA} = 1 - 4 = -3$; $\overrightarrow{DB} = (-5, 1, 2)$ et $\overrightarrow{CE} = (-1, 3, -4)$ donc $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{CE} = 5 + 3 - 8 = 0$.
3. Pour changer, calculons : $\overrightarrow{DA} \wedge \overrightarrow{BE} = (-6, 18, -6)$; $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{DE} = (0, 0, 0)$; $\overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{BA} = (1, -5, -1)$ et $\overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{CE} = (-10, -22, -14)$.
4. Pour le premier produit mixte, on peut se contenter de calculer $\overrightarrow{CD} = (2, 1, -3)$ et reprendre un calcul déjà effectué : $[\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD}] = (\overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{BA}).\overrightarrow{CD} = 2 - 5 + 3 = 0$. Pour le deuxième, on calcule $\overrightarrow{AB} = (-1, 0, -1)$, $\overrightarrow{AC} = (2, -2, 0)$ et $\overrightarrow{AD} = (4, -1, -3)$, puis $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 4 \times (-2) + 1 \times 2 - 3 \times (2) = -12$. Le parallélépipède est donc de volume 12.

Exercice 3 (**)

La méthode la plus accessible à notre niveau est un calcul brutal de coordonnées. Notons donc $\overrightarrow{u} = (x, y, z)$, $\overrightarrow{v} = (x', y', z')$ et $\overrightarrow{w} = (x'', y'', z'')$, alors $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} = (y'z'' - z'y'', z'x'' - x'z'', x'y'' - y'x'')$, puis $\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) = (yx'y'' - yy'x'' - zz'x'' + zx'z'', zy'z'' - zz'y'' - xx'y'' + xy'x'', xz'x'' - xx'z'' - yy'z'' + yz'y'')$. De l'autre côté, $(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w})\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})\overrightarrow{w}$ a pour première coordonnée $(xx'' + yy'' + zz'')x' - (xx' + yy' + zz')x'' = yx'y'' + zx'z'' - yy'x'' - zz'x''$ (les termes en $xx'x''$ se simplifient) ; pour deuxième coordonnée $(xx'' + yy'' + zz'')y' + (xx' + yy' + zz')y'' = xy'x'' + zy'z'' - xx'y'' - zz'y''$; et pour dernière coordonnée $(xx'' + yy'' + zz'')z' + (xx' + yy' + zz')z'' = xz'x'' + yz'y'' - xx'z'' - yy'z''$. les coordonnées des deux membres coïncident, ce qui prouve la formule.

Utilisons donc la formule précédente (en faisant attention au fait que la parenthèse est à gauche et pas à droite, ça change tous les signes) : $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{w} + (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) \wedge \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{u}) \wedge \overrightarrow{v} = (\overrightarrow{w}.\overrightarrow{u})\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{w}.\overrightarrow{v})\overrightarrow{u} + (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})\overrightarrow{w} - (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w})\overrightarrow{v} + (\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w})\overrightarrow{u} - (\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u})\overrightarrow{w}$. Ces termes s'annulent deux à deux en utilisant la symétrie du produit scalaire, ce qui prouve la formule.

Exercice 4 (**)

Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires (et non nuls), il ne peut pas y avoir de solution puisque $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{x}$ est un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{u}$. Si $\overrightarrow{u}$ est nul et pas $\overrightarrow{v}$, là encore pas de solution. Si $\overrightarrow{v}$ est nul mais pas $\overrightarrow{u}$, tous les vecteurs colinéaires à $\overrightarrow{u}$ sont solutions. Dernier cas particulier, si les deux vecteurs sont nuls, tout vecteur est solution.

Dans le cas plus intéressant où les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, $\overrightarrow{v}$ doit être orthogonal à $\overrightarrow{u}$ (sinon là encore, on n'aura pas de solution), et $\overrightarrow{v}$ doit être orthogonal à $\overrightarrow{x}$. Le vecteur $\overrightarrow{x}$ appartient donc au plan orthogonal à $\overrightarrow{v}$, dont une base est par exemple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$. Autrement dit, $\overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$. Par linéarité du produit vectoriel, on a donc $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$. Le premier terme étant nul, on veut avoir $\mu\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}$. Comme $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux, $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$ forme une base orthogonale, donc $\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$ est colinéaire à $\overrightarrow{v}$, de sens opposé, et de norme $\| \overrightarrow{u} \|^2 \times \| \overrightarrow{v} \|$. On doit donc avoir $\mu = -\dfrac{1}{\| \overrightarrow{u} \|^2}$, ce qui donne comme solution tous les vecteurs de la forme $\overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{u} - \dfrac{1}{\| \overrightarrow{u} \|^2}\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$.

Exercice 5 (*)

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\times1\times2+(-1)\times1\times2+3\times2\times1-3\times1\times2-1\times1\times1-(-1)\times2\times2 = 2-2+6-6-1+4 = 3.$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\times5\times9+4\times8\times3+7\times2\times6-7\times5\times3-1\times8\times6-4\times2\times9 = 45+96+84-105-48-72 = 0.$

On pouvait éventuellement s'en rendre compte en constatant que la troisième colonne est égale à deux fois la deuxième moins la première, ce qui signifie que des vecteurs ayant ces coordonnées dans une base orthonormale sont coplanaires.

$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = bc^2 + ca^2 + ab^2 - ba^2 - cb^2 - ac^2$. Les plus courageux constateront que ce déterminant peut se factoriser sous la forme $(a-b)(c-a)(b-c) = (ac - a^2 - bc + ab)(b-c) = abc - a^2b - b^2c + ab^2 - ac^2 + a^2c + bc^2 - abc$ (les deux abc se simplifient).

$\begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ a+c & ac & a^2+c^2 \end{vmatrix} = bc(a+b)(a^2+c^2) + ac(b+c)(a^2+b^2) + ab(a+c)(b^2+c^2) - bc(a+c)(a^2+b^2) - ab(b+c)(a^2+c^2) - ac(a+b)(b^2+c^2) = b^2c^3 + a^3c^2 + b^3a^2 - b^3c^2 - a^3b^2 - a^2c^3$ après simplifications un peu lourdes. On peut cette fois factoriser sous la forme $(ab+bc+ca)(a-b)(c-a)(c-b) = (ab+bc+ca)(bc^2+ca^2+ab^2-ba^2-cb^2-ac^2) = ab^2c^2+a^3bc+a^2b^3-b^2a^3-ab^3c-a^2bc^2+b^2c^3+a^2bc^2+ab^3c-a^2b^2c-b^3c^2-abc^3+abc^3+a^3c^2+a^2b^2c-a^3bc-ab^2c^2-a^2c^3$, et tous les termes autres que ceux de la forme x^2y^3 se simplifient.

Exercice 6 (**)

1. En utilisant les propriétés de bilinéarité et d'antisymétrie du produit vectoriel,
$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{MA} &= \overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MC}\\ &= \overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}+(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AM})\wedge\overrightarrow{MC}\\ &= \overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{MC}\\ &= \overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\\ &= \overrightarrow{MA}\wedge(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\\ &= \overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\\ &= \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\end{aligned}.$$

2. En utilisant le fait que $\overrightarrow{IA}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA})$ (et relations similaires avec les autres milieux), $2(\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{KC}) = \overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA})\wedge\overrightarrow{BA}+(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CA})\wedge\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{BC}$ puisque le produit vectoriel d'un vecteur par lui-même est nul. Après simplifications, il ne reste que $\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{CM})\wedge\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB}\wedge\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{0}$. La formule en découle.

3. $[\overrightarrow{MI},\overrightarrow{MJ},\overrightarrow{MK}] = ((\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AI})\wedge(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AJ})).(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AK})$. Le produit vectoriel est égal à $\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{AI}\wedge\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AI}\wedge\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{AI}\wedge\overrightarrow{AJ}$. Le premier de ces deux produits vectoriels étant orthogonal à $\overrightarrow{MA}$, son produit scalaire avec $\overrightarrow{MA}$ est nul, donc $[\overrightarrow{MI},\overrightarrow{MJ},\overrightarrow{MA}] = (\overrightarrow{AI}\wedge\overrightarrow{AJ}).\overrightarrow{MA} = [\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{MA}]$. Reste le deuxième morceau, égal à $(\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{AI}\wedge\overrightarrow{AJ}).\overrightarrow{AK}$. Le vecteur $\overrightarrow{AI}\wedge\overrightarrow{AJ}$ étant orthogonal à $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$, il est normal au plan (AIJ), c'est-à-dire au plan (ABC), donc son produit scalaire avec $\overrightarrow{AK}$ est nul. Quant au vecteur $\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{IJ}$, comme $\overrightarrow{IJ}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ (c'est le théorème des milieux dans le triangle ABC), il est orthogonal à $\overrightarrow{BA}$, donc à $\overrightarrow{AK}$, et son produit scalaire avec $\overrightarrow{AK}$ est également nul. Finalement, on a bien $[\overrightarrow{MI},\overrightarrow{MJ},\overrightarrow{MK}] = [\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{MA}]$.

Exercice 7 (**)

1. Une façon de faire est de dire que les vecteurs $\overrightarrow{u}=(-2,1,-1)$ et $\overrightarrow{v}=(3,1,-2)$ forment une base du plan, et que le point $M(1,-2,4)$ apparitent au plan. On peut déterminer un vecteur normal à $\mathcal{P}_1$ en calculant $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}=(-1,-7,-5)$, le plan a donc une équation de la forme $-x-7y-5z+d=0$, avec, pour que M appartienne au plan, $-1+14-20+d=0$, soit $d=7$. Une équation cartésienne de $\mathcal{P}_1$ est donc $-x-7y-5z+7=0$.

   Autre méthode, réussir à exprimer t et u dans l'équation paramétrique. Ici, en additionnant les deux dernières lignes, $y+z=2-u$, soit $u=2-y-z$, et en ajoutant le double de la deuxième équation à la dernière, $2y+z=t$. Il ne reste plus qu'à remplacer dans l'équation qu'on n'a pas encore utilisée, la première, pour obtenir $x=1-2t+3u=1-4y-2z+6-3y-3z$, soit $0=7-x-7y-5z$. On retrouve exactement la même équation que par l'autre méthode.

2. On sait que le vecteur $\overrightarrow{n}=(2,-1,3)$ est normal à $\mathcal{P}_2$, et que le vecteur $\overrightarrow{n'}=(1,0,2)$ est normal à $\mathcal{P}_3$, donc leur droite d'intersection sera dirigée par $\overrightarrow{n}\wedge\overrightarrow{n'}=(-2,-1,1)$. On obtient facilement un point de la droite en fixant par exemple $x=0$ dans les deux équations de plan,

ce qui donne rapidement $z = 2$ puis $y = 5$, donc on peut prendre le paramétrage suivant : $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & & - & 2t \\ y & = & 5 & - & t \\ z & = & 2 & + & t \end{array}\right.$.

Autre possibilité, prendre une des variables, par exemple y, comme paramètre (on la renomme t), ce qui donne les deux équations $2x - t + 3z - 1 = 0$ et $x + 2z - 4 = 0$, on élimine ensuite x en soustrayant le double de la deuxième équation à la première : $-t - z + 7 = 0$ donne $z = 7 - t$, puis $x = 4 - 2z = -1 + 2t$. Le paramétrage obtenu est très différent du précédent, mais tout aussi valable, et évite d'avoir à trouver un point de la droite.

3. On décrit classiquement les points $M(x, y, z)$ appartenant au plan comme ceux vérifiant $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM}] = 0$, soit $0 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & x-1 \\ -3 & -1 & y-2 \\ -1 & -5 & z-3 \end{vmatrix} = 14(x-1) - (-6)(y-2) + (-4)(z-3) = 14x + 6y - 4z - 14$, d'où l'équation cartésienne, en divisant tout par 2, $7x + 3y - 2z - 7 = 0$.

4. Il suffit de remplacer les valeurs de x, y et z données par la paramétrage de D_1 dans l'équation de $\mathcal{P}_2$: $2(3-t) - (1+2t) + 3(-1+t) - 1 = 0$, soit $6 - 2t - 1 - 2t - 3 + 3t - 1 = 0$, donc $-t + 1 = 0$. On obtient $t = 1$, soit $x = 2$, $y = 3$ et $z = 0$. Le point recherché a pour coordonnées $(2, 3, 0)$.

5. Le plan $\mathcal{Q}$ contient le point de coordonnées $(3, 1, -1)$ qui est sur D_1. Une base du plan est obtenue en prenant des vecteurs directeurs de D_1 et D_2, donc un vecteur normal au plan sera le vecteur $(-1, 2, 1) \wedge (3, -2, 5) = (12, 8, -4)$. On peut diviser les coordonnées par 4, et trouver une équation de $\mathcal{Q}$ de la forme $3x + 2y - z + d = 0$. Comme $(3, 1, -1)$ appartient au plan, on doit avoir $9 + 2 + 1 + d = 0$, soit $d = -12$. Le plan $\mathcal{Q}$ a pour équation cartésienne $3x + 2y - z - 12 = 0$.

6. Injectons le paramétrage du premier plan dans les équations cartésiennes des deux autres, on obtient les équations $2(1 - 2t + 3u) - (-2 + t + u) + 3(4 - t - 2u) - 1 = 0$, soit $2 - 4t + 6u + 2 - t - u + 12 - 3t - 6u - 1 = 0$, ou encore $8t + u = 15$; et $1 - 2t + 3u + 2(4 - t - 2u) - 4 = 0$, soit $4t + u = 5$. Reste à résoudre le système de deux équations à deux inconnues pour trouver u et t. Par substitution, comme $u = 5 - 4t$, la première équation devient $4t + 5 = 15$, soit $t = \frac{5}{2}$, puis $u = -5$. En reprenant le paramétrage du premier plan, on trouve $x = 1 - 5 - 15 = -19$; $y = -2 + \frac{5}{2} - 5 = -\frac{9}{2}$ et $z = 4 - \frac{5}{2} + 10 = \frac{23}{2}$. Le point d'intersection des trois plans a donc pour coordonnées $\left(-19, -\frac{9}{2}, \frac{23}{2}\right)$.

7. Puisque $\overrightarrow{AB} = (1, -3, -1)$, la droite (AB) admet pour paramétrage $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & 1 & + & t \\ y & = & 2 & - & 3t \\ z & = & 3 & - & t \end{array}\right.$. On peut injecter ce paramétrage dans l'équation de $\mathcal{P}_2$: $2(1+t) - (2-3t) + 3(3-t) - 1 = 0$ donne $2 + 2t - 2 + 3t + 9 - 3t - 1 = 0$, donc $2t + 8 = 0$. Pour $t = -4$, on trouve $x = -3$, $y = 14$ et $z = 7$, qui constituent donc les coordonnées du point d'intersection cherché.

8. On connait déjà un point de la droite, le point A, il faut en trouver un vecteur directeur $\overrightarrow{u}(x, y, z)$. Le fait que la droite est parallèle à $\mathcal{P}_2$ se traduit par le fait que $\overrightarrow{u}$ doit être orthogonal au vecteur normal $\overrightarrow{n}(2, -1, 3)$ de $\mathcal{P}_2$, c'est-à-dire que $2x - y + 3z = 0$. Par ailleurs, si notre droite est sécante avec D_1, on peut trouver un point B sur la droite D_1 pour lequel $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$. Or, $\overrightarrow{AB} = (2-t, 2t-1, -4+t)$ (en reprenant le paramétrage de D_1), donc l'équation $2x - y + 3z = 0$ peut s'écrire $2(2-t) - (2t-1) + 3(-4+t) = 0$, soit $4 - 2t - 2t + 1 - 12 + 3t = 0$, ce qui donne $-t - 7 = 0$, donc $t = -7$. On en déduit que le vecteur $\overrightarrow{u} = (9, -15, -11)$ est directeur de la droite cherchée, qui admet donc pour paramétrage $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & 1 & + & 9t \\ y & = & 2 & - & 15t \\ z & = & 3 & - & 11t \end{array}\right.$.

9. Le point $M(3,1,-1)$ appartenant à D_1, les vecteurs $\overrightarrow{u} = (-1,2,1)$ (vecteur directeur de D_1), et $\overrightarrow{CM} = (3,0,1)$ forment une base du plan cherché. Il admet donc pour vecteur normal $\overrightarrow{n} = (2,4,-6)$, ou encore plus simplement $(1,2,-3)$. Son équation cartésienne est de la forme $x+2y-3z+d=0$, avec C appartenant au plan, soit $2+6+d=0$. Cela donne $d=-8$, et l'équation $x+2y-3z-8=0$.

10. Si cette droite existe, il existe un point M sur D_1 et un point M' sur D_2 pour lesquels $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AM'}$ sont colinéaires (et sont alors des vecteurs directeurs de la droite cherchée). Or, en reprenant les paramétrages des deux droites, $\overrightarrow{AM} = (2-t, 2t-1, t-4)$, et $\overrightarrow{AM'} = (3u, -2-2u, 5u)$. Pour que ces vecteurs soient colinéaires, on doit donc trouver un coefficient k tel que $3u = k(2-t)$, $-2-2u = k(2t-1)$ et $5u = k(t-4)$. en comparant les équations extrêmes (que je multiplie par 5 et 3 pour plus de simplicité), on a $10k - 5kt = 3kt - 12k$, soit $22k = 8kt$, donc $t = \frac{11}{4}$. On réécrit alors les trois équations : $3u = -\frac{3}{4}k$; $-2-2u = \frac{9}{2}k$ et $5u = -\frac{5}{4}k$. Les deux équations extrêmes donnent $u = -\frac{1}{4}k$, celle du milieu devient alors $-2+\frac{1}{2}k = \frac{9}{2}k$, soit $k = -\frac{1}{2}$. Il ne reste plus qu'à en déduire $u = \frac{1}{8}$. Le système admet donc une solution (unique), et la droite recherchée admet par exemple pour vecteur directeur $8\overrightarrow{AM'} = (3,-9,5)$, d'où le paramétrage $\begin{cases} x = 1 + 3s \\ y = 2 - 9s \\ z = 3 + 5s \end{cases}$

Exercice 8 (*)

On va bien évidemment utiliser la formule pour la distance à un plan utilisant l'équation cartésienne. Un point $M(x,y,z)$ est équidistant des deux plans si $\frac{|3x-4y+1|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|2x-3y+6z-1|}{\sqrt{4+9+36}}$, soit $7|3x-4y+1| = 5|2x-3y+6z-1|$. La seule petit difficulté de l'exercice consiste à se rappeler que deux nombres ont même valeur absolue s'ils sont égaux ou opposés, ce qui donne les deux possibilités $7(3x-4y+1) = 5(2x-3y+6z-1)$, soit $11x-13y-30z+12=0$; ou $7(3x-4y+1) = -5(2x-3y+6z-1)$, soit $31x-43y+30z+2=0$. Autrement dit, les points équidistants des deux plans sont situés sur deux autres plans (qui ont la même intersection que les deux plans initiaux), appelés plans bissecteurs des deux plans.

Exercice 9 (*)

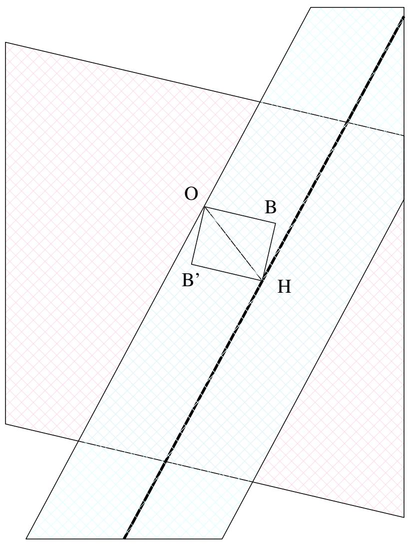
Dans tous les cas, c'est du cours :

- $d(A,\mathcal{P}) = \frac{|1-4+3-1|}{\sqrt{1+4+9}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$.
- La droite passe par le point $M(1,2,0)$, pour lequel $\overrightarrow{BM} = (0,0,1)$, et admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{u} = (3,-1,2)$, donc $d(B,d) = \frac{\| \overrightarrow{BM} \wedge \overrightarrow{u} \|}{\| \overrightarrow{u} \|} = \frac{\| (1,3,0)) \|}{\sqrt{9+1+4}} = \sqrt{\frac{10}{14}} = \sqrt{\frac{5}{7}}$.
- La droite admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{u} = (2,-1,1) \wedge (1,-1,1) = (0,-1,-1)$, et passe par exemple par le point $M(2,3,0)$ (attention, ici on est obligés de prendre $x=2$ pour obtenir des points de la droite, ce qu'on constate en soustrayant les deux équations de plans), pour lequel $\overrightarrow{CM} = (1,3,-2)$. On a donc $d(C,d) = \frac{\| \overrightarrow{CM} \wedge \overrightarrow{u} \|}{\| \overrightarrow{u} \|} = \frac{\| (-5,1,1) \|}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{\frac{27}{2}}$.
- Les droite D admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{u} = (-1,1,-1) \wedge (1,-1,2) = (1,1,0)$, et la droite D' admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{u'} = (2,-1,-1) \wedge (-1,-2,3) = (-5,-5,-5)$. On prendra plutôt $(1,1,1)$ comme vecteur directeur, et on calcule $(1,1,0) \wedge (1,1,1) = (1,-1,0)$. reste à trouver un point sur chaque droite. Pour D', c'est facile, $(0,0,0)$ convient. Pour D, on peut prendre par exemple $(-1,2,2)$ (j'ai imposé $x=1$ pour avoir des conditions très simples,

en l'occurence $y = z$ et $-y + 2z = 2$ dans les deux équations de plan). On calcule alors $d(D, D') = \dfrac{|(1, -1, 0).(-1, 2, 2)|}{\| (1, -1, 0) \|} = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

Exercice 10 (**)

1. Cette distance vaut simplement $\sqrt{(4 + 2t)^2 + (3 + t)^2 + (1 + t)^2}$ $= \sqrt{16 + 16t + 4t^2 + 9 + 6t + t^2 + 1 + 2t + t^2} = \sqrt{6t^2 + 24t + 26}$. Cette distance est minimale lorsque $6t^2 + 24t + 26$ (qui est toujours positif puisque somme de trois carrés) atteint son minimum, c'est-à-dire pour $t = -\dfrac{24}{2 \times 6} = -2$. Le point correspond de la droite vérifie $x = 0$, $y = 1$ et $z = -1$, donc $H(0, 1, -1)$. On ne revient évidemment pas à la grosse racine carrée pour calculer la distance : $d(O, D) = OH = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$.
2. Avec le paramétrage donné pour D, $x - 2z = 4 + 2t - 2(1 + t) = 2$. Hum, il semblerait bien qu'il y ait une légère erreur dans cet énoncé. Remplaçons donc l'équation de $\mathcal{P}$ par $x - 2z = 2$. Le plan $\overrightarrow{P}$ ayant pour vecteur normal $(1, 0, -2)$, un vecteur normal $\overrightarrow{n}(\alpha, \beta, \gamma)$ du plan $\mathcal{Q}$ devra vérifier $\alpha - 2\gamma = 0$ pour être orthogonal à celui de $\mathcal{P}$. Il devra également être orthogonal à un vecteur directeur de D, ce qui implique $2\alpha + \beta + \gamma = 0$. On a donc $\alpha = 2\gamma$ et $\beta = -5\gamma$, on peut choisir $\overrightarrow{n} = (2, -5, 1)$. Le plan $\mathcal{Q}$ a donc une équation de la forme $2x - 5y + z + d = 0$, et il passe par le point $A(4, 3, 1)$ (puisqu'il contient la droite D), donc $8 - 15 + 1 + d = 0$, soit $d = 6$. On obtient finalement l'équation $2x - 5y + z + 6 = 0$
3. Via la formule du cours, $d(O, \mathcal{P}) = \dfrac{|-2|}{\sqrt{1 + 4}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$. De même, on calcule $d(O, \mathcal{Q}) = \dfrac{6}{\sqrt{4 + 25 + 1}} = \dfrac{6}{\sqrt{30}}$. Si on note B et B' les projetés orthogonaux de O sur les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, et B'' celui sur la droite D, le quadrilatère $OBB''B'$ est un rectangle car les deux plans se coupent en D et sont perpendiculaires. Par application du théorème de Pythagore, $d(O, D) = \sqrt{d(O, \mathcal{P})^2 + d(O, \mathcal{Q})^2} = \sqrt{\dfrac{4}{5} + \dfrac{36}{30}} = \sqrt{\dfrac{10}{5}} = \sqrt{2}$.



Exercice 11 (** à ***)

Une façon de faire, pour exploiter les données de notre cours, est de trouver les coordonnées de quatre points formant un tétraèdre régulier dans un repère orthonormal direct. On peut toujours prendre $A(0, 0, 0)$, et $B(1, 0, 0)$. Le point C peut être choisi dans le plan $(A, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, pour que ABC

soit équilatéral on choisira $C\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$. Reste à trouver un point $D(x,y,z)$ à distance 1 des points A, B et C. Il devra certainement vérifier $x=\frac{1}{2}$ (c'est une condition nécessaire pour avoir $DA=DB$, puis $AD^2=\frac{1}{4}+y^2+z^2=1$, soit $y^2+z^2=\frac{3}{4}$; et $CD^2=\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+z^2=1$, soit $y^2-\sqrt{3}y+\frac{3}{4}+z^2=1$. Comme $y^2+z^2=\frac{3}{4}$, on trouve $-\sqrt{3}y=-\frac{1}{2}$, soit $y=\frac{1}{2\sqrt{3}}$. On a alors $y^2=\frac{1}{12}$, donc il faut $z^2=\frac{3}{4}-\frac{1}{12}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$, donc par exemple $z=\sqrt{\frac{2}{3}}$. Le point D a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2\sqrt{3}},\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

- Le plan (ABC) étant confondu avec le plan $z=0$, la hauteur du tétraèdre est simplement la cote du point D, donc $\sqrt{\frac{2}{3}}$.
- La base ABC a pour aire $\frac{1}{2}\times 1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$, donc le volume du tétraèdre vaut $\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{12}$.
- Il s'agit de calculer par exemple la distance entre les droites (AB) et (CD). On peut appliquer la formule du cours : $d((AB),(CD))=\frac{|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{AC}]|}{\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{CD}\|}$. On a $\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$, et $\overrightarrow{CD}=\left(0,\frac{1}{2\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=\left(0,-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$, donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{CD}=\left(0,-\sqrt{\frac{2}{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. La norme de ce vecteur vaut $\sqrt{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}=1$, il suffit donc de calculer $|(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{CD}).\overrightarrow{AC}|=\left|-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Les plus motivés peuvent tenter de calculer cette distance par des moyens géométriques élémentaires.
- En notant $I\left(\frac{1}{2},0,0\right)$ le milieu de $[AB]$, l'angle entre les faces (ABC) et (ABD) correspond à l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{ID}$ (vérifiez si vous ne me croyez pas que ces deux vecteurs sont orthogonaux à (AB), qui est évidemment la droite d'intersection des deux faces). Ces deux vecteurs ont pour coordonnées $\overrightarrow{IC}=\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$ et $\overrightarrow{ID}=\left(0,\frac{1}{2\sqrt{3}},\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$. Ces deux vecteurs ont pour norme $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ce sont des hauteurs de triangles équilatéraux de côté 1, mais on peut le retrouver par le calcul), et pour produit scalaire $\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{4}$. On en déduit que $\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\cos(\widehat{\overrightarrow{IC},\overrightarrow{ID}})=\frac{1}{4}$, donc $\cos(\widehat{\overrightarrow{IC},\overrightarrow{ID}})=\frac{1}{3}$. Les faces forment entre elles un angle (non remarquable) de $\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$.

Exercice 12 (*)

Notons $(\mathcal{S}_1)$, $(\mathcal{S}_2)$ et $(\mathcal{S}_3)$ les trois sphères.

- $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-1=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2-4$, donc $\mathcal{S}_1$ a pour centre $A_1(1,1,1)$ et pour rayon $R_1=2$.
- $x^2+y^2+z^2-4y+6z+12=x^2+(y-2)^2+(z+3)^2-1$, donc $\mathcal{S}_2$ a pour centre $A_2(0,2,-3)$

et pour rayon $R_2 = 1$.

- $x^2+y^2+z^2-x+3y-2z+\dfrac{17}{4} = \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\dfrac{3}{2}\right)^2 + (z-1)^2 - \dfrac{1}{4} - \dfrac{9}{4} - 1 + \dfrac{17}{4} = \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\dfrac{3}{2}\right)^2 + (z-1)^2 + \dfrac{3}{4}$, donc la sphère $\mathcal{S}_3$ est vide. Bon, très bien, ce n'était peut-être pas initialement prévu comme ça, mais ça nous fera moins de travail pour la suite !

Pour les intersections avec $\mathcal{P}$, calculons $d(A_1, \mathcal{P}) = \dfrac{|1+1+1-3|}{\sqrt{1+1+1}} = 0$. Le centre de la sphère est situé sur le plan, donc l'intersection est un cercle de centre A_1 et de rayon 3 (et on est incapable de le décrire mieux que ça). Pour la deuxième sphère, $d(A_2, \mathcal{P}) = \dfrac{|2-3-3|}{\sqrt{3}} = \dfrac{4}{\sqrt{3}} > 1$, donc l'intersection est vide. Passons à l'intersection éventuelle des deux premières sphères : $A_1A_2 = \sqrt{(-1)^2+1^2+(-4)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} > R_1 + R_2$, donc les sphères n'ont pas d'intersection. Cet exercire, en plus d'être facile, est bien décevant !

Exercice 13 (**)

Pour déterminer les coordonnées des quatres sommets, il faut résoudre les quatre systèmes de trois équations à trois inconnus obtenus en gardant trois des quatre équations de plan. Allons-y :

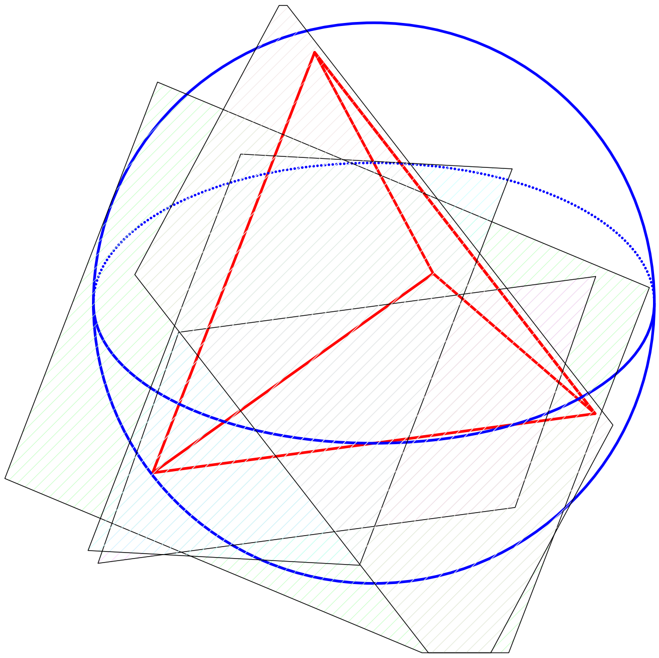
$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & - & z & = & 2 \\ x & - & y & + & z & = & 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & & & 2z & = & -2 \\ 2x & & & & & = & 6 \end{array}$ (on a soustrait les deux premières équations et additionné les deux dernières), d'où un premier sommet $A(3,-2,-1)$.

$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & - & z & = & 2 \\ -x & + & y & + & z & = & 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & & & 2z & = & -2 \\ & & 2y & & & = & 8 \end{array}$ (mêmes opérations que ci-dessus), d'où un deuxième sommet $B(-3,4,-1)$.

$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 4 \\ -x & + & y & + & z & = & 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & & & 2z & = & 10 \\ & & 2y & & & = & -4 \end{array}$ (on a additionné les deux deuxières équations et soustrait les deux premières), d'où un troisième sommet $C(-3,-2,5)$.

$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 2 \\ x & - & y & + & z & = & 4 \\ -x & + & y & + & z & = & 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 2 \\ 2x & & & & & = & 6 \\ & & & & 2z & = & 10 \end{array}$ (on a additionné les deux premières et les deux dernières équations), d'où un dernier sommet $D(3,4,5)$.

Le centre $O(x,y,z)$ de la sphère circonscrite est situé à égale distance des quatre sommets. Pour avoir $OA^2 = OB^2$, on doit avoir $(x-3)^2+(y+2)^2+(z+1)^2 = (x+3)^2+(y-4)^2+(z+1)^2$, soit en simplifiant les carrés qui apparaissent des deux côtés $-6x+4y+2z+14 = 6x-8y+2z+26$, donc $-12x+12y-12 = 0$, soit $y = x+1$; de même, la condition $OA^2 = OC^2$ donne $-6x+4y+2z+14 = 6x+4y-10z+38$, soit $-12x+12z-24 = 0$, donc $z = x+2$. Enfin, la condition $OA^2 = OD^2$ (les autres seront automatiquement vérifiées ensuite) donne $-6x+4y+2z+14 = -6x-8y-10z+50$, soit $12y+12z-36 = 0$, donc $y = 3-z$. En reprenant les deux autres conditions, on a donc $x+1 = 3-x-2$, soit $x = 0$, puis $y = 1$ et $z = 2$. Le centre de la sphère circonscrite est donc le point $O(0,1,2)$, et le rayon vaut par exemple $OA = \sqrt{9+9+9} = 3\sqrt{3}$.



Exercice 14 (***)

Pour tout réel m, on considère l'ensemble $\mathcal{S}_m$ des points qui vérifiant l'équation

$$x^2 - (2m+2)x + y^2 + (2m-2)y + z^2 - 4mz - 6m - 4 = 0$$

1. Ca ressemble en effet beaucoup à une sphère : $(x-(m+1))^2 - (m^2+2m+1) + (y+(m-1))^2 - (m^2-2m+1) + (z-2m)^2 - 4m^2 - 6m - 4 = 0$, soit $(x-(m+1))^2 + (y-(m-1))^2 + (z-2m)^2 = 6m^2 + 6m + 6 = 6(m^2+m+1)$. Le trinôme m^2+m+1 ayant un discriminant négatif, il est toujours positif, donc la sphère n'est jamais vide. On est en présence d'une sphère de centre $O_m(m+1, 1-m, 2m)$ et de rayon $R_n = \sqrt{6(m^2+m+1)}$.
2. Le système $\left\{\begin{array}{ccccc} x & = & 1 & + & m \\ y & = & 1 & - & m \\ z & = & & & 2m \end{array}\right.$ est un système d'équations paramétriques d'une droite, passant par le point $A(1,1,0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(1,-1,2)$.
3. Pour le centre, c'est assez manifestement impossible (si $2m = 2m'$ par exemple, on a automatiquement $m = m'$). Pour le rayon, il faut avoir $m^2 + m + 1 = m'^2 + m' + 1$, soit $m^2 - m'^2 + m - m' = 0$, donc $(m+m')(m-m') + m - m' = 0$ ou encore $(m-m')(m+m'+1)$. Les sphères ont donc même rayon (outre le cas évident $m = m'$) si $m' = -1 - m$. À part pour $m = -1$, il existe donc, pour toute valeur de m, une autre valeur du paramètre pour laquelle le rayon sera le même.
4. On peut écrire l'équation de nos sphères un peu différemment : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4 + 2m(-x+y-2z-3) = 0$. Pour que cette égalité soit vérifiée, à (x,y,z) fixés, indépendamment de la valeur de m, on doit avoir $-x + y - 2z - 3 = 0$, qui est l'équation d'un plan $\mathcal{P}$, et $x^2+y^2+z^2-2x-2y-4 = 0$, soit $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 6$, équation de la sphère de centre A (le même que ci-dessus) et de rayon $\sqrt{6}$. Comme $d(A, \mathcal{P}) = \dfrac{|-1+1-3|}{\sqrt{1+1+4}} = \dfrac{3}{\sqrt{6}} < \sqrt{6}$, cette intersection est un cercle $\mathcal{C}$ qu'on ne cherchera pas à expliciter plus.
5. Pour qu'aucune sphère ne passe par un point, il faut que l'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4 + 2m(-x+y-2z-3) = 0$ ne soit vérifiée par aucune valeur de m, ce qui sera le cas si $-x+y-2z-3 = 0$, autrement dit si notre point appartient à $\mathcal{P}$, mais $x^2+y^2+z^2-2x-2y-4 \neq 0$. L'ensemble recherché est donc $\mathcal{P} \backslash \mathcal{C}$.

6. Le plan $(\mathcal{P}_m)$ admet pour vecteur normal $\overrightarrow{n}_m = \overrightarrow{OO_m} = (m+1, 1-m, 2m)$, donc a une équation de la forme $(m+1)x + (1-m)y + 2mz + d = 0$. Comme il passe de plus par le point O_m, on a $(m+1)^2 + (1-m)^2 + (2m)^2 + d = 0$, soit $m^2 + 2m + 1 + 1 - 2m + m^2 + 4m^2 + d = 0$, donc $d = -6m^2 - 2$. D'où l'équation $(m+1)x + (1-m)y + 2mz - 6m^2 - 2 = 0$.

7. Il faudrait pour cela que le trinome en la variable m qu'on vient d'obtenir s'annule quelle que soit la valeur de m. Comme son coefficient dominant vaut -6, ce trinôme n'est pas nul, c'est donc impossible. Il n'y a aucun point commun à tous les plans $\mathcal{P}_m$.

8. Le point O_m appartenant par définition au plan $\mathcal{P}_m$, cette intersection sera un cercle de centre O_m et de rayon R_m.

9. Dans ce cas, les vecteurs $\overrightarrow{OO_m}$ et $\overrightarrow{OO_{m'}}$ ne peuvent pas être colinéaires, car leur produit vectoriel vaut $(2(1-m)m' - 2(1-m')m; 2m(m'+1) - 2m'(m+1); (m+1)(1-m') - (m'+1)(1-m)) = (2(m'-m), 2(m-m'), 2(m-m'))$, qui est non nul et colinéaire à $(-1, 1, 1)$. Les deux plans se coupent donc suivant une droite dirigée par $(-1, 1, 1)$, reste à trouver un point sur cette droite. En choisissant par exemple $x = 0$, on a les deux équations $(1-m)y + 2mz - 6m^2 - 2 = 0$ et $(1-m')y + 2m'z - 6m'^2 - 2 = 0$. En soustrayant les deux équations, $(m'-m)y + 2(m-m')z = 6(m^2 - m'^2)$, donc $-y + 2z = 6(m+m')$. On injecte dans la première équation : $y + 6m(m+m') - 6m^2 - 2 = 0$, donc $y = 2 - 6mm'$. On en déduit $z = 3(m+m') + 1 - 3mm'$. On peut donc écrire le système paramétrique suivant :
$$\begin{cases} x = & & - & t \\ y = & 2 - 6mm' & + & t \\ z = & 3(m+m') + 1 - 3mm' & + & t \end{cases}$$

10. Il passe au moins un plan par le point de coordonnées (x, y, z) si le trinôme $(m+1)x + (1-m)y + 2mz - 6m^2 - 2 = 0$ admet une solution. On peut l'écrire $6m^2 + m(-x+y-2z) + 2 - x - y$. Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = (-x+y-2z)^2 - 24(2-x-y)$, le point est donc convenable si $\Delta \geqslant 0$, soit $x^2 + y^2 + 4z^2 - 2xy + 4xz - 4yz + 24x + 24y - 48 \geqslant 0$ (ce qui doit être une zone située en dehors d'un ellipsoïde). Ce n'est certainement pas le cas pour l'origine du repère. D'ailleurs, on obtient dans ce cas l'équation $-6m^2 - 2 = 0$, qui n'a effectivement pas de solution réelle.

TD n°5 : révisions pour le DS3.

PTSI B Lycée Eiffel

23 novembre 2012

Exercice 1

Étudier le plus complètement possible (on cherchera notamment les points d'inflexion et les tangentes à la courbe en ces points) la fonction $f : x \mapsto (2x^2 + 2x - 1)e^{-2x}$, et tracer sa courbe représentative le plus soigneusement possible.

Exercice 2

On considère l'équation différentielle $x^2y'' - xy' + y = x^3$.

1. En posant $z = xy' - y$, montrer que z est solution d'une équation différentielle du premier ordre.
2. Résoudre cette équation, et en déduire les solutions de l'équation initiale.
3. Existe-t-il des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de cette équation ?
4. Montrer qu'il existe une unique solution de l'équation vérifiant $y(1) = 1$ et $y'(1) = 0$. Étudier cette solution et tracer une allure de sa courbe représentative.

Exercice 3

On considère l'équation différentielle $4xy'' + 2y' - y = 0$.

1. Résoudre cette équation sur $\mathbb{R}^{+*}$ en posant $t = \sqrt{x}$.
2. Effectuer une résolution similaire sur $\mathbb{R}^{-*}$.
3. Existe-t-il des solutions définies sur $\mathbb{R}$?

Exercice 4

Dans tout cet exercice, on suppose fixé un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ de l'espace. Pour tout réel m, on définit le plan $\mathcal{P}_m$ par l'équation $(4 + m^2)x + (4 - m^2)y - 4mz = m + 8$. On note par ailleurs Δ l'ensemble défini par le système d'équations paramétriques $\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & t \\ y & = & 1 \\ z & = & -\dfrac{1}{4} \end{array} \right.$, où $t \in \mathbb{R}$.

1. Préciser la nature géométrique de Δ, ainsi que ses éléments caractéristiques.
2. Donner un vecteur normal $\overrightarrow{n}_m$ au plan $\mathcal{P}_m$, montrer qu'il n'est jamais nul, et calculer sa norme, en déduire que $\mathcal{P}_m$ est toujours un plan. Pour quelle valeur de m cette norme est-elle minimale ?
3. Pour tout couple de réels distincts (p, m), calculer le produit scalaire $\overrightarrow{n}_m.\overrightarrow{n}_p$. À quelle condition sur m et p les plans $\mathcal{P}_m$ et $\mathcal{P}_p$ sont-ils perpendiculaires ?
4. Montrer que tous les plans $\mathcal{P}_m$ se coupent en un point de Δ.

5. Déterminer la distance de chaque point de l'ensemble Δ à chacun des plans $\mathcal{P}_m$. Que constate-t-on de surprenant ?
6. Déterminer toutes les sphères de rayon $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ centrées sur Δ et tangentes à tous les plans $\mathcal{P}_m$. On note $\mathcal{S}$ celle dont le centre a la plus petit abscisse, donner une équation cartésienne de $\mathcal{S}$.
7. Montrer que la droite D_m passant par $A\left(1, 1, -\dfrac{1}{4}\right)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{n}_m$ est tangente à la sphère $\mathcal{S}$.
8. Montrer que la droite D_m est incluse dans le plan $\mathcal{P}_p$ perpendiculaire à $\mathcal{P}_m$, peut-on retrouver ainsi le résultat de la question précédente ?
9. Déterminer l'intersection du plan d'équation $x = \dfrac{1}{2}$ avec la sphère $\mathcal{S}$ (on donnera les coordonnées du centre, et le rayon).
10. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de ce même plan avec la droite D_m et vérifier qu'il appartient à $\mathcal{S}$. Dans quel ensemble simple ces points sont-ils inclus lorsque m parcourt $\mathbb{R}$?

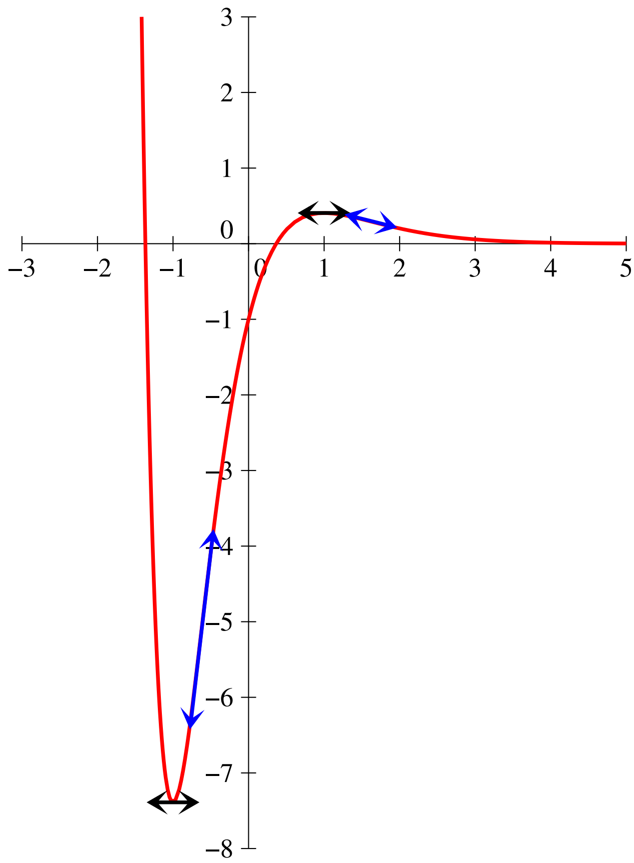
Corrigé du TD n°5

Exercice 1

La fonction f est évidemment définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions usuelles. Par croissance comparée, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, et sans croissance comparée, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. On calcule sans difficulté $f'(x) = (4x+2-2(2x^2+2x-1))e^{-2x} = (-4x^2+4)e^{-2x} = -4(x^2-1)e^{-2x}$; puis $f''(x) = -8xe^{-2x}+(8x^2-8)e^{-2x} = 8(x^2-x-1)e^{-2x}$. La fonction f est donc décroissante sur $]-\infty;-1]$ et sur $[1;+\infty[$, et croissante sur $[-1;1]$, admettant en -1 un minimum de valeur $f(-1) = -e^2$ et en 1 un maximum de valeur $f(1) = \dfrac{3}{e^2}$. Pour la convexité, il faut résoudre l'équation $x^2-x-1=0$, qui admet pour discriminant $\Delta = 1+4 = 5$, et admet pour racines $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. La fonction f est convexe sur $]-\infty, x_1]$ et sur $[x_2,+\infty[$, et concave sur $[x_1,x_2]$. Puisque $x_1^2 = x_1+1$, on peut écrire $f(x_1) = (4x_1+1)e^{-2x_1} = (3-2\sqrt{5})e^{\sqrt{5}-1} \simeq -5.1$; de même, $f(x_2) = (4x_2+1)e^{-2x_2} = (3+2\sqrt{5})e^{-1-\sqrt{5}} \simeq 0.3$. De même, on calcule $f'(x_1) = -4x_1e^{-2x_1} = (2\sqrt{5}-2)e^{\sqrt{5}-1} \simeq 8.5$ et $f'(x_2) = -4x_2e^{-2x_2} = (-2-2\sqrt{5})e^{-1-\sqrt{5}} \simeq -0.25$. On peut regrouper tous ces résultats dans le tableau de variations suivant, en constatant que $x_1 > -1$ et $x_2 > 1$:

x	$-\infty$		-1		x_1		1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$-4x_1e^{-2x_1}$	$+$	0	$-$	$-4x_2e^{-2x_2}$	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$-e^2$	$\nearrow$	$(4x_1+1)e^{-2x_1}$	$\nearrow$	$\frac{3}{e^2}$	$\searrow$	$(4x_2+1)e^{-2x_2}$	$\searrow$	0
$f''(x)$			$+$		0		$-$		0	$+$	
f			convexe				concave			convexe	

Et bien sûr la superbe courbe qui va avec :

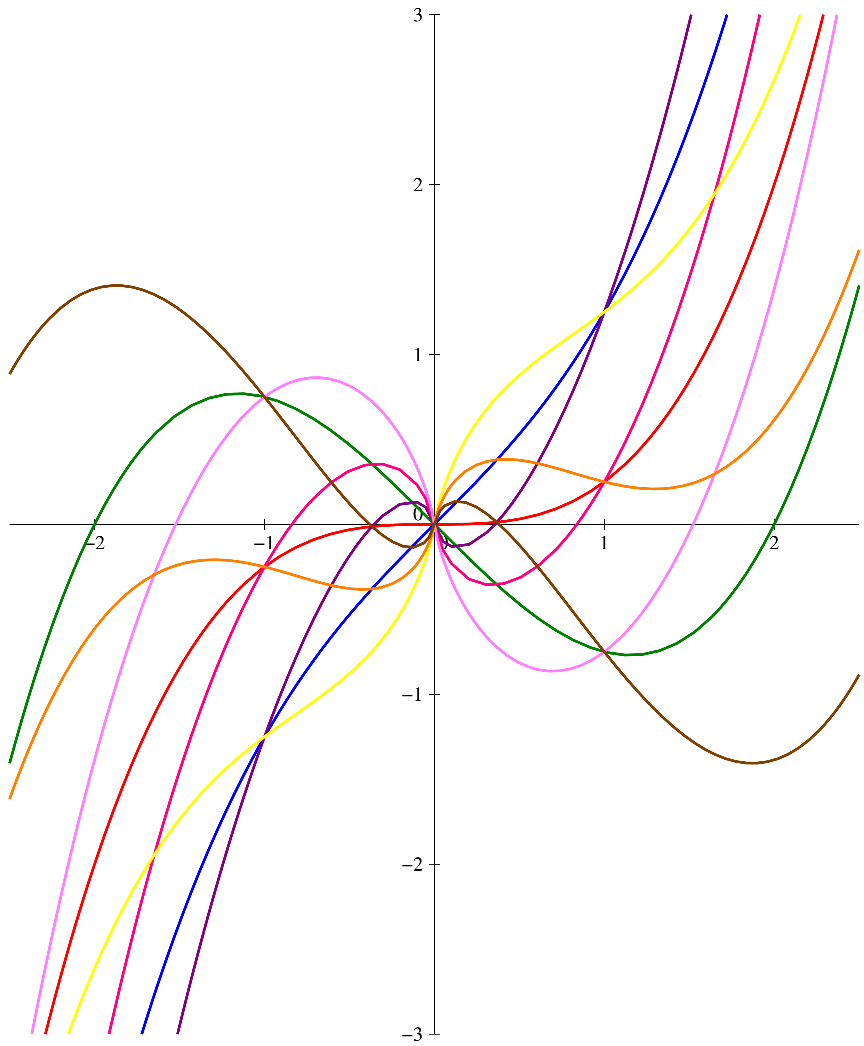


Exercice 2

1. En dérivant simplement, on constate que $z' = y' + xy'' - y' = xy''$, donc $x^2y'' = xz'$, et l'équation initiale peut se mettre sous la forme $xz' - z = x^3$.
2. L'équation homogène associée $z' - \dfrac{z}{x} = 0$ a pour solutions sur $\mathbb{R}^{+*}$ les fonctions $z_h(x) = K_1 e^{\ln(x)} = K_1 x$; et sur $\mathbb{R}^{-*}$ les fonctions $z_h(x) = K_2 e^{\ln(-x)} = K_3 x$ en posant $K_3 = -K_2$. On cherche une solution particulière (sur $\mathbb{R}$) de la forme $z_p(x) = xK(x)$ (variation de la constante), elle vérifie alors $z_p'(x) = K(x) + xK'(x)$, donc $xz_p' - z_p = x^3$ si $xK(x) + x^2K'(x) - xK(x) = x^3$, soit $K'(x) = x$. On peut choisir $K(x) = \dfrac{x^2}{2}$, les solutions de l'équation complète sont alors les fonctions $z : x \mapsto K_1 x + \dfrac{x^3}{2}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, et $z : x \mapsto K_3 x + \dfrac{x^3}{2}$ sur $\mathbb{R}^{-*}$.

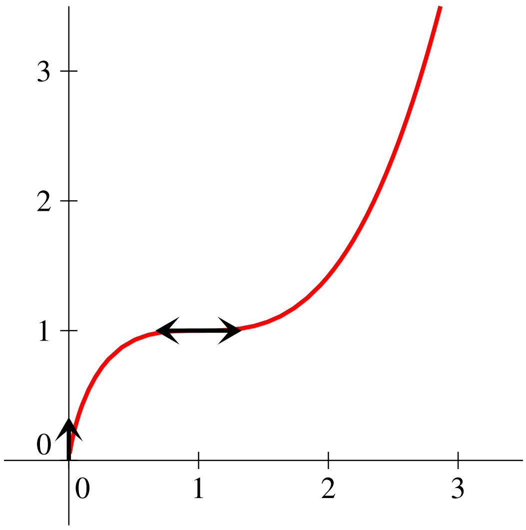
   En revenant à la définition de z, sur $\mathbb{R}^{+*}$, $xy' - y = K_1 x + \dfrac{x^3}{2}$. L'équation homogène est la même que ci-dessus, donc $y_h(x) = L_1 x$. Par la même méthode que ci-dessus, on cherche $y_p(x) = xL(x)$, où $x^2 L'(x) = K_1 x + \dfrac{x^3}{2}$, soit $L'(x) = \dfrac{K_1}{x} + \dfrac{x}{2}$. On peut choisir $L(x) = K_1 \ln(x) + \dfrac{x^2}{4}$, ce qui donne pour les solutions de l'équation initiale $y : x \mapsto L_1 x + K_1 x \ln(x) + \dfrac{x^3}{4}$. On obtient de même sur $\mathbb{R}^{-*}$ les solutions $y : x \mapsto L_3 x + K_3 x \ln(-x) + \dfrac{x^3}{4}$.
3. Toutes les solutions obtenues sur chacun des deux intervalles ont des limites nulles en 0 (par croissance comparée, le terme $Kx \ln|x|$ tend vers 0). Cherchons à déterminer si la dérivée est également prolongeable : sur $\mathbb{R}^{+*}$, $y'(x) = L_1 + K_1 \ln(x) + K_1 + \dfrac{3x^2}{4}$, qui est dérivable en 0 seulement si $K_1 = 0$. Sa dérivée en 0 vaut alors L_1. La dérivée sur $\mathbb{R}^{-*}$ est la même au nom

des constantes près, donc elle existe en 0 et vaut L_2, à condition d'imposer $K_2 = 0$. Il faut avoir $L_1 = L_2$ pour obtenir une solution dérivable sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que ces solutions sont de la forme $x \mapsto Lx + \dfrac{x^3}{4}$. Voici quelques courbes intégrales de notre équation (une même couleur représente un même choix de constante sur les deux intervalles) : en rouge $K = L = 0$, en bleu $K = 0$ et $L = 1$, en vert $K = 0$ et $L = -1$ (ces trois solutions sont dérivables sur $\mathbb{R}$; en violet-rose, trois courbes pour lesquelles $K = 1$ et $L = 1$, $L = 0$, $L = -1$; en jaune-orange-marron les mêmes valeurs de L mais avec $K = -1$:



4. Puisqu'on est sur $\mathbb{R}^{+*}$, la solution est de la forme $y(x) = L_1 x + K_1 x \ln(x) + \dfrac{x^3}{4}$. Les deux conditions imposent $L_1 + \dfrac{1}{4} = 1$, soit $L_1 = \dfrac{3}{4}$; et $L_1 + K_1 + \dfrac{3}{4} = 0$, soit $K_1 = -\dfrac{3}{2}$. L'unique solution valide est donc $y(x) = \dfrac{3}{4}x - \dfrac{3}{2}x\ln(x) + \dfrac{1}{4}x^3$ (qui n'est pas une solution dérivable sur $\mathbb{R}$, on va donc l'étudier uniquement sur $\mathbb{R}^{+*}$). Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0; +\infty[$, de dérivée $y'(x) = \dfrac{3}{4} - \dfrac{3}{2}\ln(x) - \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{4}x^2$. On ne sait pas étudier le signe de cette dérivée, calculons $y''(x) = -\dfrac{3}{2x} + \dfrac{3}{2}x = \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{x^2 - 1}{x}\right)$. On peut alors dresser le tableau de variations suivant, en exploitant le fait que $y'(1) = 0$ (c'est la condition imposée pour la recherche de cette solution), et en ajoutant que $\lim\limits_{x \to 0} y(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = +\infty$ (on factorise par le terme prépondérant $\dfrac{1}{4}x^3$) :

x	0		1		$+\infty$
$y''(x)$		$-$	0	$+$	
y'	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	
$y'(x)$		$+$	0	$+$	
y	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
y		concave		convexe	



Exercice 3

Je vous laisse (re)lire le corrigé de la première question de l'exercice 11 de la feuille d'exercices n°4 sur les équations différentielles, puisqu'il s'agit de la même équation, et que j'avais déjà étudié dans ce corrigé le recollement des solutions.

Exercice 4

1. On reconnait une équation paramétrique de droite, passant par la point $M\left(0, 1, \dfrac{1}{4}\right)$ et de vecteur directeur $(1, 0, 0)$, c'est-à-dire $\overrightarrow{i}$.
2. On peut prendre $\overrightarrow{n}_m = (4+m^2, 4-m^2, -4m)$. Ce vecteur n'est jamais nul car sa première coordonnée ne s'annule jamais, donc l'équation de $\mathcal{P}_m$ est bien une équation de plan. Par ailleurs, $\| \overrightarrow{n}_m \| = \sqrt{(4+m^2)^2 + (4-m^2)^2 + (-4m)^2} = \sqrt{16 + 8m^2 + m^4 + 16 - 8m^2 + m^4 + 16m^2} = \sqrt{2(m^2 + 8m + 16)} = \sqrt{2}(m^2 + 4)$. Cette norme est minimale pour $m = 0$, et vaut alors $4\sqrt{2}$.
3. Calculons donc $\overrightarrow{n}_m . \overrightarrow{n}_p = (4+m^2)(4+p^2) + (4-m^2)(4-p^2) + (-4m)(-4p) = 16 + 4m^2 + 4p^2 + m^2p^2 + 16 - 4m^2 - 4p^2 + m^2p^2 + 16mp = 2(m^2p^2 + 8mp + 16) = 2(mp+4)^2$. Les deux plans sont perpendiculaires si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux, ce qui se produit donc si $mp + 4 = 0$. Le plan correspondant à $m = 0$ n'est perpendiculaire à aucun autre plan de la

famille ; pour tout autre valeur de m, le plan $\mathcal{P}_m$ est perpendiculaire à un unique autre plan de la famille, le plan $\mathcal{P}_p$ pour $p = -\dfrac{4}{m}$ (qui n'est jamais égal à m, puisque de signe opposé).

4. Pour changer de la méthode présentée en TD, cherchons l'intersection de Δ avec le plan $\mathcal{P}_m$ en injectant l'équation paramétrique de la droite dans celle du plan : $(4+m^2)t+4-m^2+m = m+8$ se produit si $(4+m^2)t = 4+m^2$, c'est-à-dire si $t = 1$. Le point d'intersection étant indépendant de m, tous les plans se coupent donc au point $A\left(1, 1, -\dfrac{1}{4}\right)$, qui appartient effectivement à la droite (Δ).

5. Soit $B_t\left(t, 1, -\dfrac{1}{4}\right)$ le point de Δ correspondant à la valeur t du paramètre, sa distance au plan $\mathcal{P}_m$ est donnée par la formule $d(B_t, \mathcal{P}_m) = \dfrac{|t(4+m^2)+4-m^2+m-m-8|}{\| \overrightarrow{n_m} \|}$ $= \dfrac{|t(m^2+4)-(m^2+4)|}{\sqrt{2}(m^2+4)} = \dfrac{|t-1|}{\sqrt{2}}$. Cette distance ne dépend donc pas de m, ce qui signifie que chaque point de la droite Δ est équidistant de tous les plans $\mathcal{P}_m$.

6. Une sphère de rayon $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ sera tangente à tous les plans de la famille si la distance de son centre à chacun de ces plans sera égale à $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. D'après la question précédente, cela se produit lorsque $|t-1| = 1$, c'est-à-dire $t = 0$ ou $t = 2$. On peut donc choisir comme centre le point $B_1\left(0, 1, -\dfrac{1}{4}\right)$, ou le point $B_2\left(2, 1, -\dfrac{1}{4}\right)$. La sphère $\mathcal{S}$ est donc la sphère de centre B_1 et de rayon $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, donc d'équation cartésienne $x^2 + (y-1)^2 + \left(z + \dfrac{1}{4}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$ (inutile de développer, ce sera plus pratique pour la suite sous cette forme).

7. La distance de B_1 à la droite D_m est donnée par la formule $d(B_1, D_m) = \dfrac{\| \overrightarrow{AB_1} \wedge \overrightarrow{n_m} \|}{\| \overrightarrow{n_m} \|}$. Comme $\overrightarrow{AB_1} = (-1, 0, 0)$, on obtient $\overrightarrow{AB_1} \wedge \overrightarrow{n_m} = (0, 4m, m^2-4)$, qui a pour norme $\sqrt{(4m)^2 + (m^2-4)^2} = \sqrt{16m^2 + m^4 - 8m^2 + 16} = \sqrt{m^4 + 8m^2 + 16} = m^2 + 4$. On en déduit que $d(B_1, D_m) = \dfrac{m^2+4}{\sqrt{2}(m^2+4)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Cette distance coïncidant avec le rayon de la sphère, la droite D_m est bien tangente à la sphère $\mathcal{S}$.

8. La droite D_m passe par le point A qui est commun à tous les plans $\mathcal{P}_m$, il suffit donc de vérifier que son vecteur directeur $\overrightarrow{n_m}$ est inclus dans le plan $\mathcal{P}_p$. Or, le plan $\mathcal{P}_p$ étant perpendiculaire à $\mathcal{P}_m$, il contient certainement le vecteur $\overrightarrow{n}_m$ normal au plan $\mathcal{P}_m$. Le plan $\mathcal{P}_p$ contient donc bien la droite D_m.

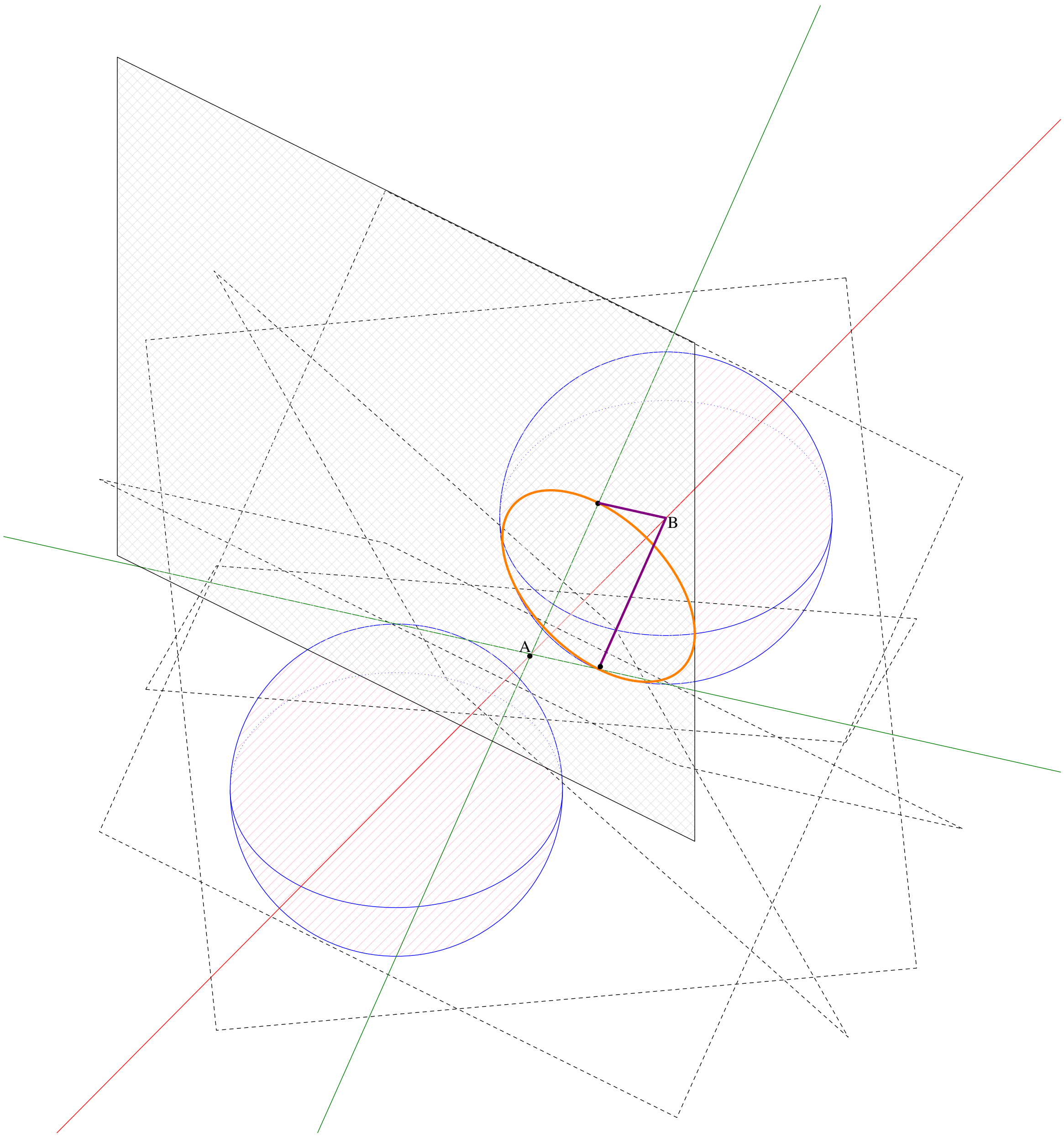
   Résumons ce que nous savons : tous les plans sont tangents à la sphère, donc $\mathcal{P}_p$ contient certainement une droite (et même plusieurs) tangente à la sphère. Parmi celles-ci, il en existe exactement une passant par le point A puisque ce dernier appartient au plan $\mathcal{P}_p$ (il est dans tous les plans de la famille). Il existe par ailleurs certainement une tangente à la sphère dans $\mathcal{P}_p$ dirigée par le vecteur $\overrightarrow{n_m}$, puisque celui-ci est orthogonal à $\overrightarrow{n_p}$. On peut même la décrire : c'est la tangente incluse dans le plan contenant le centre B_1 de la sphère ainsi que ses deux projetés orthogonaux sur les plans $\mathcal{P}_m$ et $\mathcal{P}_p$ (en effet, les deux rayons correspondants de la sphère sont dirigés par $\overrightarrow{n_m}$ et $\overrightarrow{n_p}$ et on sait que ces vecteurs sont orthogonaux, donc la figure formée par ces deux rayons et les deux tabgentes est un rectangle, les tangentes ont donc même vecteur directeur que les rayons). Seul problème : réussir à démontrer que le point A est nécessairement dans ce plan (si ce n'est pas le cas, D_m sera simplement parallèle à notre tangente). Comme ça n'a rien d'évident, on conclura que la méthode de la question précédente est plus sûre.

9. Il suffit d'injecter la condition $x = \dfrac{1}{2}$ dans l'équation de la sphère, ce qui donne $\dfrac{1}{4} + (y-1)^2 +$

$\left(z+\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{2}$, soit $(y-1)^2+\left(z+\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}$. On reconnait un cercle $\mathcal{C}$ de centre $\left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{4}\right)$ (on n'oublie pas qu'on s'est placé dans le plan $x = \frac{1}{2}$), et de rayon $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$.

10. Le point d'intersection C_m doit être tel que $\overrightarrow{AC_m}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{n_m}$ (vecteur directeur de la droite D_m), donc $\overrightarrow{AC_m} = k\overrightarrow{n_m}$ pour un certain réel k. Or, en notant $C_m\left(\frac{1}{2}, y, z\right)$, on a $\overrightarrow{AC_m} = \left(-\frac{1}{2}, y-1, z+\frac{1}{4}\right)$. La comparaison de la première coordonnée avec celle de $\overrightarrow{n_m}$ donne $-\frac{1}{2} = k(m^2+4)$, soit $k = -\frac{1}{2(m^2+4)}$. On en déduit $y-1 = k(4-m^2) = \frac{m^2-4}{2(m^2+4)}$, soit $y = \frac{3m^2+4}{2(m^2+4)}$; et $z+\frac{1}{4} = -4km = \frac{2m}{m^2+4}$, soit $z = \frac{m^2+8m+4}{4(m^2+4)}$. On peut conclure que C_m a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{3m^2+4}{2(m^2+4)}, \frac{m^2+8m+4}{4(m^2+4)}\right)$. Pour vérifier que ce point appartient à $\mathcal{S}$, il suffit de dire que $\overrightarrow{AC_m} = -\frac{1}{2(m^2+4)}\overrightarrow{n_m}$, donc $AC_m = \| \overrightarrow{AC_m} \| = \frac{\| \overrightarrow{n_m} \|}{2(m^2+4)} = \frac{\sqrt{2}(m^2+4)}{2(m^2+4)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Cette distance coïncide avec le rayon de la sphère, le point C_m appartient donc à $\mathcal{S}$. Comme on a vu que l'intersection du plan d'équation $x = \frac{1}{2}$ et de $\mathcal{S}$ était le cercle $\mathcal{C}$, notre point C_m appartient à $\mathcal{C}$. On peut même pousser jusqu'à vérifier que les expression obtenues pour $y-1$ et $z+\frac{1}{4}$ prennent presque toutes les valeurs possibles entre $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$ (pour $y-1$ par exemple, les limites quand m tend vers $+\infty$ et $-\infty$ sont égales à $\frac{1}{2}$, et $y-1$ atteint un minimum pour $m=0$ de valeur $-\frac{1}{2}$), ce qui prouve que les points C_m parcourent tout le cercle $\mathcal{C}$ (qui a pour rayon $\frac{1}{2}$), à l'exception du point vérifiant $y-1 = \frac{1}{2}$ (et $z+\frac{1}{4} = 0$ dans ce cas pour vérifier l'équation du cercle), c'est-à-dire à l'exception du point $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$.

J'ai tenté d'achever ce corrigé par une figure en 3D, je ne suis pas sûr que tout soit lisible, je vous rajoute les légendes que j'ai préféré ne pas mettre directement sur la figure pour ne pas surcharger : en rouge la droite Δ ; en pointillés noirs quelques plans de la famille $\mathcal{P}_m$, qui se coupent au point A ; en bleu rayé de rose les deux sphères de la question 5, $\mathcal{S}$ étant en haut à droite ; en vert deux des droites D_m avec indiqués en noirs leurs points de tangence avec $\mathcal{S}$ (en violet les deux rayons correspondants de la sphère $\mathcal{S}$, le quadrilatère constitués des deux segments violets et des segments reliant les deux poins de tangence et A est un carré) ; en noir hachuré de gris le plan d'équation $x = \frac{1}{2}$; enfin en orange le cercle $\mathcal{C}$.


A
B

Feuille d'exercices n°6 : Courbes planes.

PTSI B Lycée Eiffel

23 novembre 2012

Exercice 1 (*)

Déterminer l'ensemble de définition, puis toutes les asymptotes ou branches infinies des fonctions suivantes, et tracer une allure de leur courbe représentative (on essaiera d'étudier les variations également quand c'est possible) :

- $f_1(x) = \dfrac{x^2 + x\ln x}{x+1}$
- $f_2(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 1}$
- $f_3(x) = \ln(e^x + e^{-x})$
- $f_4(x) = \sqrt{x} + \ln x$
- $f_5(x) = \sqrt{\dfrac{2x+1}{x-1}}$
- $f_6(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$

Exercice 2 (**)

Étudier le plus complètement possible chacune des fonctions suivantes, en précisant notamment la convexité et la présence éventuelle de points d'inflexion (on finira bien évidemment l'étude par la tracé de courbes précises).

- $f : x \mapsto \ln(1 + x^2)$
- $g : x \mapsto e^{\frac{1}{1-x}} + 2x - 3$
- $h : x \mapsto x\sqrt{1 - x^2}$
- $i : x \mapsto \dfrac{2\ln x + 3}{x}$

Courbes paramétrées

Exercice 3 (* à ***)

Pour chacune des fonctions suivantes, tracer le support de l'arc paramétré correspondant, en indiquant les branches infinies, les points stationnaires, ainsi que les tangentes remarquables, et les éventuels points doubles :

1. $\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & \sin(2t) \\ y(t) & = & \cos(3t) \end{array}\right.$ (courbe de Lissajous)
2. $\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & t^2 - 2t \\ y(t) & = & 2t^3 - 3t^2 \end{array}\right.$
3. $\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & \dfrac{3t}{1+t^3} \\ y(t) & = & \dfrac{3t^2}{1+t^3} \end{array}\right.$ (folium de Descartes)
4. $\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & t - \sin(t) \\ y(t) & = & 1 - \cos(t) \end{array}\right.$

5. $\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & \dfrac{\sin(t)}{1+\cos^2(t)} \\ y(t) & = & \dfrac{\sin(t)\cos(t)}{1+\cos^2(t)} \end{array}\right.$

6. $\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & \sin(t) \\ y(t) & = & \dfrac{\cos^2(t)}{2-\cos(t)} \end{array}\right.$

7. $\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & 2t+\dfrac{1}{2t-1} \\ y(t) & = & t^2-\dfrac{1}{2t-1} \end{array}\right.$

8. $\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & 3\cos(t)-\cos(3t) \\ y(t) & = & 3\sin(t)-\sin(3t) \end{array}\right.$ (néphroïde)

9. $\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & \dfrac{t}{t^2-1} \\ y(t) & = & \dfrac{t^2}{t-1} \end{array}\right.$

10. $\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & te^t \\ y(t) & = & \dfrac{e^t}{t} \end{array}\right.$

11. $\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & \sin^3(t) \\ y(t) & = & \cos(t)-\cos^4(t) \end{array}\right.$

Exercice 4 (**)

On considère la courbe d'équation cartésienne $y\ln\left(\dfrac{y}{x}\right)=x^2$. En introduisant le paramètre $t=\dfrac{y}{x}$, décrire cette courbe comme support d'un arc paramétré, puis tracer cette courbe.

Exercice 5 (***)

On considère l'astroïde d'équation $\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & a\cos^3(t) \\ y(t) & = & a\sin^3(t) \end{array}\right.$, avec $a>0$.

1. Tracer la courbe correspondante.
2. Soit $M(t)$ le point de la courbe correspondant à la valeur t du paramètre, $A(t)$ et $B(t)$ les intersections de la tangente à la courbe au point $M(t)$ avec les axes. Déterminer les valeurs de t pour lesquelles ces points sont bien définis, et montrer que dans ca cas la distance $A(t)B(t)$ est constante.
3. Pour un réel $\lambda\in]0;1[$, on définit le point $N(t)$ de façon à avoir $\overrightarrow{ON(t)}=\lambda\overrightarrow{OA(t)}+(1-\lambda)\overrightarrow{OB(t)}$. quelle est la courbe décrite par les points $N(t)$?
4. Déterminer le lieu des points d'où l'on peut mener deux tangentes à l'astroïde qui soient orthogonales. Tracer la courbe correspondante et déterminer son intersection avec l'astroïde.
5. En notant $P(t)$ le projeté orthogonal de l'origine O du repère sur la tangente à l'astroïde au point $M(t)$, déterminer le lieu des points $P(t)$.

Courbes polaires

Exercice 6 (* à ***)

Tracer la courbe représentative de chacune des fonctions polaires suivantes :

1. $\rho(\theta) = \cos(3\theta)$
2. $\rho(\theta) = a(1 + \cos(\theta))$ (cardioïde)
3. $\rho(\theta) = \cos^2(\theta)$
4. $\rho(\theta) = 1 + \tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$
5. $\rho(\theta) = \sin(\theta) + \cos(2\theta)$
6. $\rho(\theta) = \dfrac{\sin(3\theta)}{\sin(\theta)}$
7. $\rho(\theta) = \sqrt{2\cos(2\theta)}$ (lemniscate de Bernoulli)
8. $\rho(\theta) = \dfrac{1}{4 + \cos(3\theta)}$
9. $\rho(\theta) = \dfrac{1}{\cos(\theta)} + \dfrac{1}{\sin(\theta)}$
10. $\rho(\theta) = 1 + \dfrac{1}{\theta - 2}$
11. $\rho(\theta) = 1 + 2\cos(3\theta)$

Exercice 7 (**)

Soit $A(-2, 0)$, déterminer le lieu des projections orthogonales de A sur les tangentes au cercle trigonométrique (et tracer ce lieu).

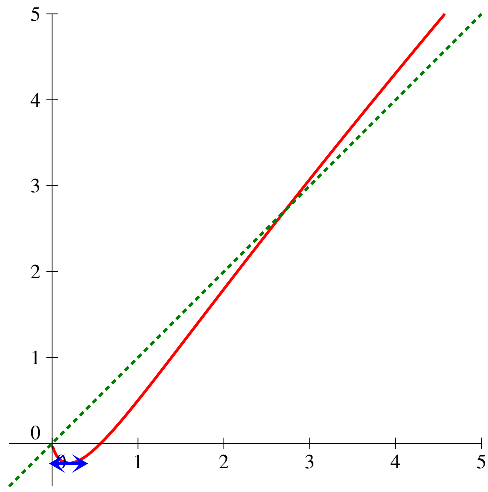
Exercice 8 (**)

On fait rouler, sans glisser, un cercle de rayon 1 sur un cercle de rayon 1. Déterminer le lieu décrit par un point fixé sur le cercle extérieur.

Corrigé de la feuille d'exercices n°6

Exercice 1 (*)

- La fonction f_1 et définie sur $\mathbb{R}_+^*$. En 0^+, la limite de f_1 est égale à 0 puisque le numérateur tend vers 0 (rappelons que $x\ln(x)$ a pour limite 0 en 0 par croissance comparée) et le dénominateur vers 1, donc il n'y a pas d'asymptote verticale. Ensuite, $f_1(x) = \dfrac{x+\ln x}{1+\frac{1}{x}}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = +\infty$, et $\dfrac{f_1(x)}{x} = \dfrac{1+\frac{\ln x}{x}}{1+\frac{1}{x}}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$. Il faut donc calculer $f(x)-x = \dfrac{x+\ln x - x - 1}{1+\frac{1}{x}} = \dfrac{\ln x - 1}{1+\frac{1}{x}}$. On a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x = +\infty$, la courbe de f admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction $y = x$. La dérivée de cette fonction vaut $f_1'(x) = \dfrac{(2x+\ln(x)+1)(x+1)-x^2-x\ln(x)}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2+3x+1+\ln(x)}{(x+1)^2}$. Pas vraiment évident à étudier, on peut toutefois noter g le numérateur et constater que $g'(x) = 2x+3+\dfrac{1}{x} = \dfrac{2x^2+3x+1}{x}$. Le discriminant du numérateur vaut $\Delta = 8-8 = 1$, il s'annule pour $x_1 = \dfrac{-3-1}{4} = -1$, et $x_2 = \dfrac{-3+1}{4} = -\dfrac{1}{2}$, deux valeurs négatives. On en déduit que $g'(x)$ est positif sur $\mathcal{D}_f$, donc g y est croissante. Comme la limite de g en 0 vaut $-\infty$ et que $g(1) = 4$, la fonction g (et donc la fonction f') s'annule une seule fois, entre 0 et 1. La fonction f_1 admettra à cet endroite un minimum. Voici l'allure de la courbe :

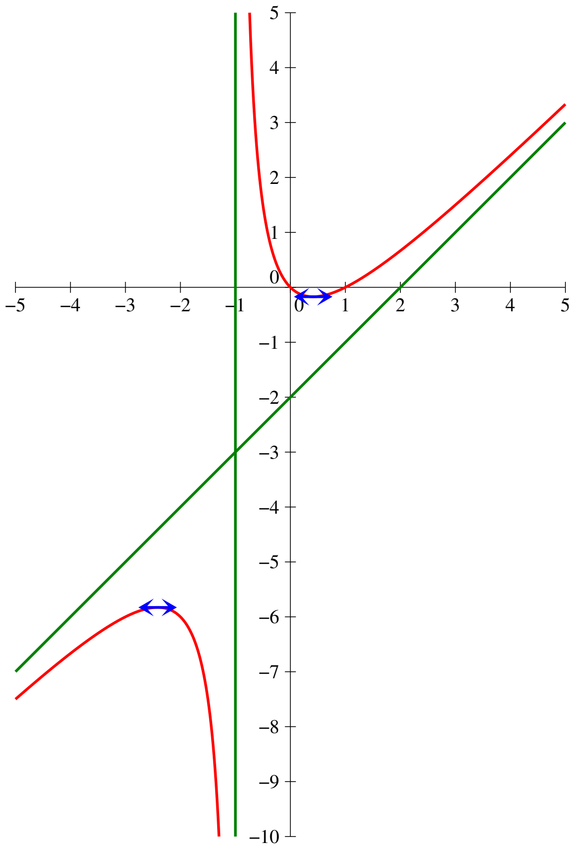


- Un classique : $\mathcal{D}_{f_2} = \mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$. En -1, le numérateur tend vers -4 et le dénominateur vers 0, il y a donc des limites infinies et une asymptote verticale d'équation $x = -1$. Par contre, en 1, numérateur et dénominateur tendent vers 0, on est obligés de factoriser de chaque côté. Pour le numérateur, remarquons que $x^3-2x^2+x = x(x^2-2x+1) = x(x-1)^2$, donc pour $x \neq 1$, $f_2(x) = \dfrac{x(x-1)}{x+1}$, qui a pour limite 0 en 1. Pas de deuxième asymptote verticale donc. Pour les infinis, on peut utiliser le quotient des termes de plus haut degré : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = +\infty$ et de même $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_2(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{x^3} = 1$. Reste à calculer $f_2(x)-x = \dfrac{x^3-2x^2+x-x^3+x}{x^2-1} = \dfrac{-2x^2+2x}{x^2-1}$, qui a pour limite -2 en $+\infty$. Conclusion de tous ces calculs : la droite d'équation $y = x-2$ est asymptote oblique à la courbe en $+\infty$ et en $-\infty$ (où les calculs sont les mêmes).

Pour le calcul de la dérivée il vaut évidemment mieux partir de $f_2(x) = \dfrac{x(x-1)}{x+1}$ pour obtenir $f_2'(x) = \dfrac{(2x-1)(x+1)-(x^2-x)}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$. Le numérateur a pour discriminant $\Delta = 4+4 = 8$, la dérivée s'annule pour $x_1 = \dfrac{-2-2\sqrt{2}}{2} = -1-\sqrt{2}$, et pour $x_2 = \dfrac{-2+2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}-1$. On peut aller jusqu'à calculer $f_2(x_1) = \dfrac{(-1-\sqrt{2})(-2-\sqrt{2})}{-\sqrt{2}} = \dfrac{-4-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}-3$, et $f_2(x_2) = \dfrac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-2)}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}-3$. Ce qui permet de dresser le magnifique tableau de variations suivant :

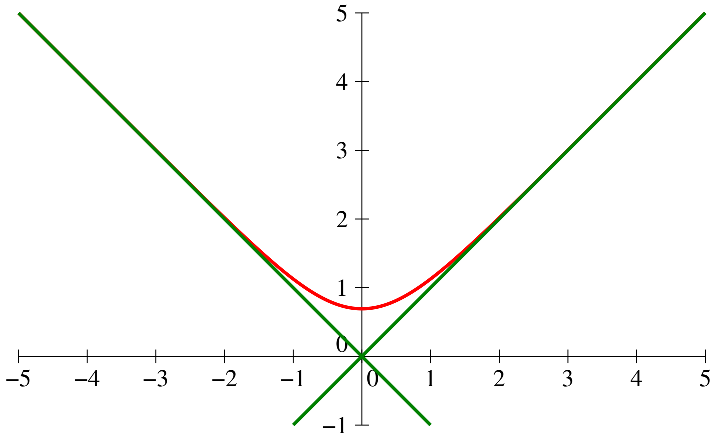
x	$-\infty$		$-\sqrt{2}-1$		-1		$\sqrt{2}-1$		1		$+\infty$
$f_2'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$		$+$	
f_2	$-\infty$	$\nearrow$	$-2\sqrt{2}-3$	$\searrow$	$-\infty \;\Vert\; +\infty$	$\searrow$	$2\sqrt{2}-3$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Et la courbe qui va avec :

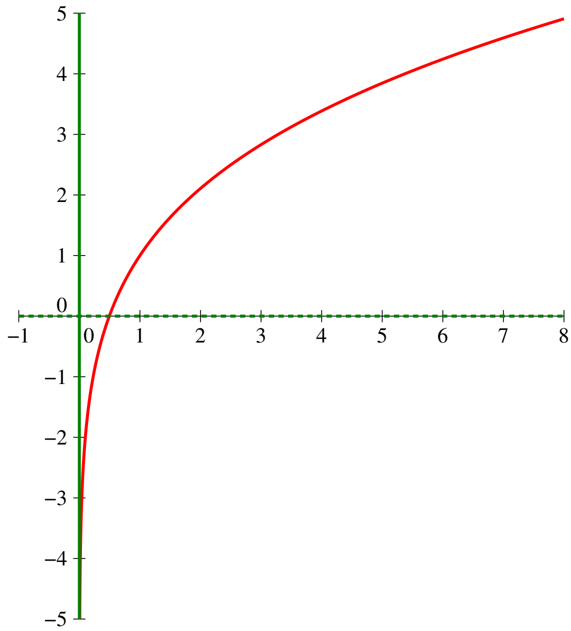


- La fonction f_3 est définie sur $\mathbb{R}$ puisqu'une exponentielle est strictement positive. Il suffit donc de regarder ce qui se passe aux infinis, et on peut commencer par constater que f_3 est paire. La limite en $+\infty$ de f_3 est $+\infty$ et de plus $f_3(x) = \ln(e^x(1+e^{-2x})) = x+\ln(1+e^{-2x})$, donc $\dfrac{f_3(x)}{x} = 1 + \dfrac{\ln(1+e^{-2x})}{x}$, qui a pour limite 1 quand x tend vers $+\infty$. Enfin, $f(x)-x = \ln(1+e^{-2x})$, qui tend vers 0, donc la droite d'équation $y = x$ est aymptote oblique à la courbe en $+\infty$. Par symétrie par rapport à l'axe des abscisses, la droite d'équation $y = -x$ est asymptote oblique en $-\infty$.

On calcule $f_3'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, qui est positive sur $[0; +\infty[$ (et négative sur $]-\infty; 0]$, ce qui est cohérent avec la parité). Il y a donc un minimum en 0 de valeur $f_3(0) = \ln(2)$.

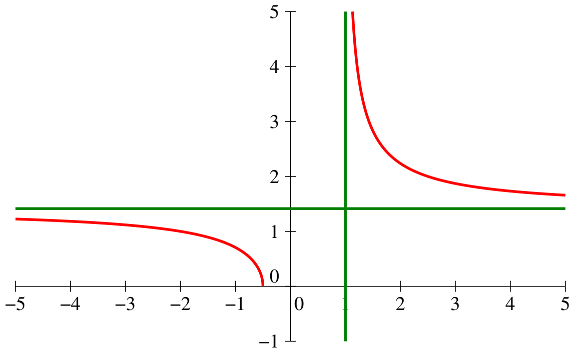


- Le domaine de définition est $\mathbb{R}_+^*$ et il y a une asymptote verticale en 0 (limite $-\infty$). De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_4(x) = +\infty$ et $\dfrac{f_4(x)}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{\ln x}{x}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_4(x)}{x} = 0$. Il y a donc en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Ox).
L'étude des variations ne pose ici aucun problème et ne nécessite même absolument aucun calcul : la fonction est somme de deux fonctions strictement croissantes, elle est donc strictement croissante.

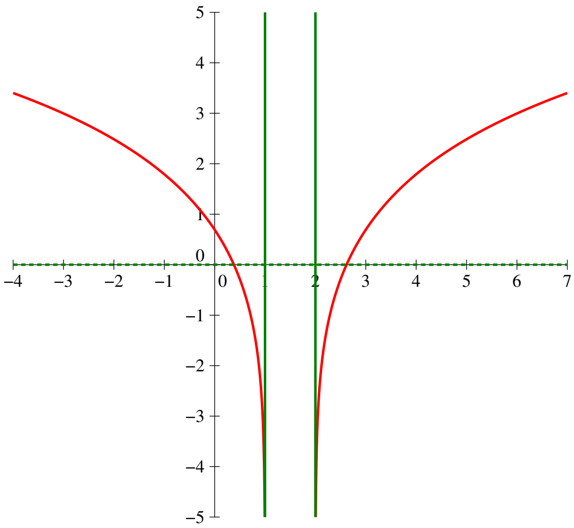


- La fonction f_5 est définie quand $\dfrac{2x+1}{x-1} \geqslant 0$, donc (petit tableau de signe) sur $\left]-\infty; -\dfrac{1}{2}\right] \cup]1; +\infty[$.
En $-\dfrac{1}{2}$, il n'y a rien à faire, la fonction est définie (et prend pour valeur 0), il ne peut pas y avoir d'asymptote verticale. Par contre, en 1, il y a bien une limite infinie, donc une asymptote verticale. Enfin, quand $x \to \pm\infty$, $\dfrac{2x+1}{x-1} \to 2$, donc $\underset{x\to\pm\infty 5}{f}(x) = \sqrt{2}$, il y a donc une asymptote horizontale d'équation $y = \sqrt{2}$.
Par ailleurs, les variations de f_5 sont les mêmes que celles de $x \mapsto \dfrac{2x+1}{x-1}$ (puisque la ra-

cine carrée est strictement croissante), qui a pour dérivée $\dfrac{2(x-1)-(2x+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{-3}{(x-1)^2}$. La fonction f_5 est donc décroissante sur chacun de ses deux intervalles de définition.



- Enfin, f_6 est définie quand $x^2-3x+2>0$, c'est-à-dire en-dehors de ses racines évidentes qui sont 1 et 2, donc $\mathcal{D}_{f_6} =]-\infty;1[\cup]2;+\infty[$. En 1 et 2, la parenthèse tend vers 0 donc la fonction vers $-\infty$, il y a donc deux asymptotes verticales. En $\pm\infty$, la fonction tend vers $+\infty$, et $\dfrac{f_6(x)}{x} = \dfrac{\ln(x^2(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}))}{x} = \dfrac{2\ln x}{x} + \dfrac{1}{x}\ln\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)$. Tout ceci tendant vers 0, il y a une branche parabolique de direction (Ox) de chaque côté.
La fonction ln étant strictement croissante, les variations de f_6 sont les mêmes que celles de $x \mapsto x^2-3x+2$, qui a pour dérivée $2x-3$. La fonction f_6 est donc décroissante sur $]-\infty;-1[$ et croissante sur $]2;+\infty[$.



Exercice 2 (**)

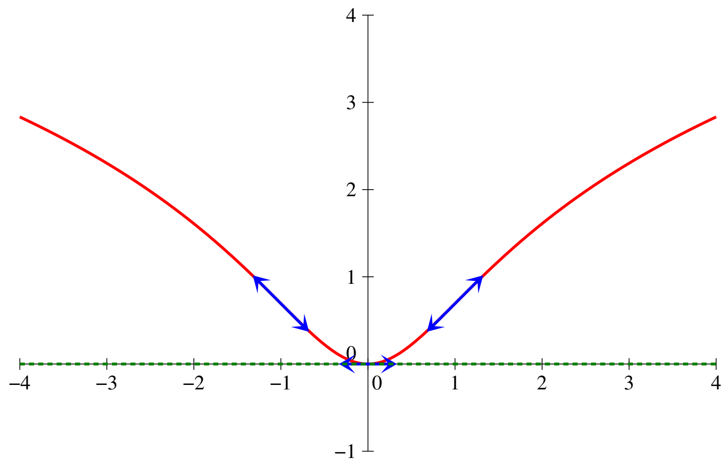
Étude de la fonction f

Comme $1+x^2$ est toujours strictement positif, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et y est $\mathcal{C}^\infty$. On peut également constater que la fonction est paire.

On a sans difficulté $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, et comme $\dfrac{f(x)}{x} \leqslant \dfrac{\ln(2x^2)}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ par croissance comparée. La courbe représentative de f admet donc une branche parabolique de direction (Ox) en $+\infty$. Même conclusion en $-\infty$ en utilisant la parité ou en effectuant des calculs très similaires.

Étudions désormais les variations : $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, donc f est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur

$\mathbb{R}_+$, atteignant en 0 un minimum de valeur $f(0) = \ln(1) = 0$. De plus, $f''(x) = \dfrac{2(x^2+1) - 2x(2x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$. La fonction f a donc deux points d'inflexion pour $x = 1$ et $x = -1$, de hauteur $f(1) = f(-1) = \ln(2)$ et dont les tangentes ont pour pentes respectives $f'(1) = \dfrac{2}{2} = 1$ et $f'(-1) = \dfrac{-2}{2} = -1$. La fonction f est convexe sur $[-1; 1]$ (sa dérivée seconde est alors positive), et concave sur $]-\infty; -1]$ et sur $[1; +\infty[$. Voici une allure de la courbe :

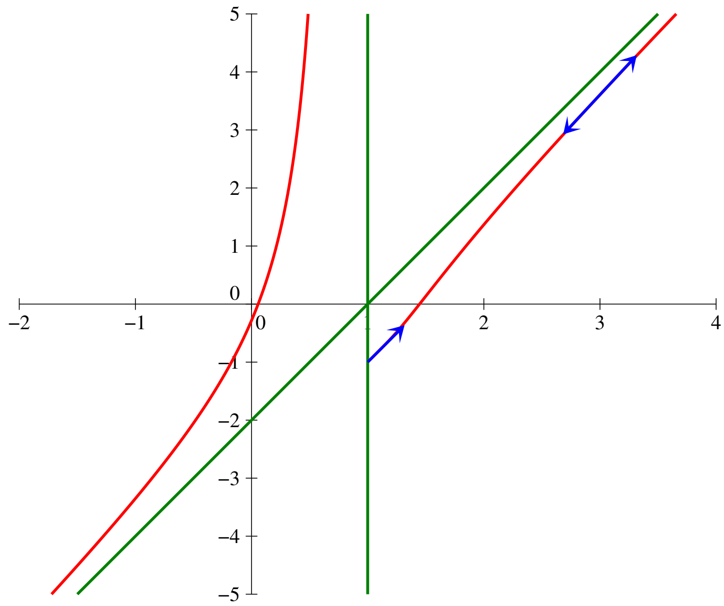


Étude de la fonction g

La fonction g est définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{1-x}} = 1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = 2$ et enfin $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) - 2x = -2$. Il y a donc en $+\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = 2x - 2$. Cette asymptote est d'ailleurs tout aussi valable en $-\infty$ par des calculs similaires.
Du côté de 1 c'est plus compliqué : $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{1}{1-x} = +\infty$, ce dont on déduit $\lim\limits_{x\to1^-} g(x) = +\infty$. Il y a donc une asymptote verticale d'équation $x = 1$. Mais par ailleurs $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{1}{1-x} = -\infty$, ce dont on déduit cette fois que $\lim\limits_{x\to1^+} g(x) = 2 - 3 = -1$. La fonction g est donc prolongeable « par continuité à droite » en posant $g(1) = -1$.

Dérivons désormais : $g'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2} e^{\frac{1}{1-x}} + 2$, qui a le bon gout de toujours être positif. La fonction est donc croissante sur chacun de ses deux intervalles de définition. De plus, g' a pour limite 2 en -1^+ (on a toujours $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{1}{1-x} = -\infty$ et, par croissance comparée, $\lim\limits_{X\to-\infty} X^2 e^X = 0$, donc la composition des limites nous donne une limite nulle pour le premier morceau). Il y aura donc une demi-tangente à droite de pente 2 en notre point prolongé par continuité à droite.
Enfin, $g''(x) = \left(\dfrac{2}{(1-x)^3} + \dfrac{1}{(1-x)^2}\right) e^{\frac{1}{1-x}} = \dfrac{3-x}{(1-x)^3} e^{\frac{1}{1-x}}$. Il y a donc un point d'inflexion pour $x = 3$, et $g(3) = e^{-\frac{1}{2}} + 3 = \dfrac{1}{\sqrt{e}} + 3$; $g'(3) = \dfrac{e^{-\frac{1}{2}}}{4} + 2 = \dfrac{1}{4\sqrt{e}} + 2$. La fonction f est convexe sur $]-\infty; -1[$ et sur $[3; +\infty[$ et concave sur $[1; 3]$ (le dénominateur changeant de signe pour $x = 1$). Avec tout ça, on doit pouvoir tracer une courbe ressemblant à la suivante :

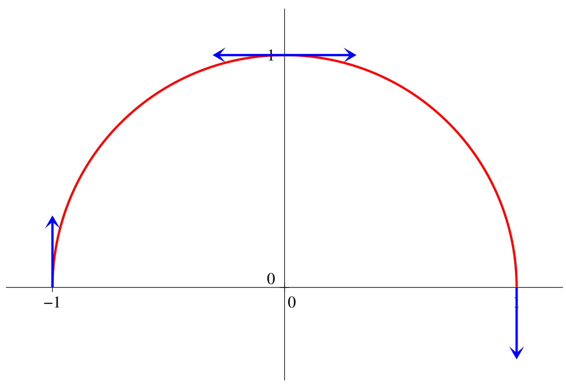


Étude de la fonction h

La fonction donnée dans l'énoncé ayant été étudiée en détail en cours, on va la remplacer par $h(x) = \sqrt{1-x^2}$. Cette fonction est définie sur $[-1;1]$ et $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1;1[$.

Pas de limites à calculer, bornons-nous à constater que $h(-1) = h(1) = 0$.

On a $h'(x) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. La fonction est donc croissante sur $[-1;0]$ et décroissante sur $[0;1]$. On peut par ailleurs constater que la dérivée a une limite infinie en 1 et en -1, ce qui prouve la présence de tangentes verticales en ces points. Il y a un maximum en 0 de valeur $h(0) = 1$. Passons à $h''(x) = \dfrac{-\sqrt{1-x^2} + x \times \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \dfrac{-1+x^2-x^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = -\dfrac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$. La fonction h est donc concave.
Les plus observateurs reconnaitront dans la superbe courbe qui suit un demi-cercle :

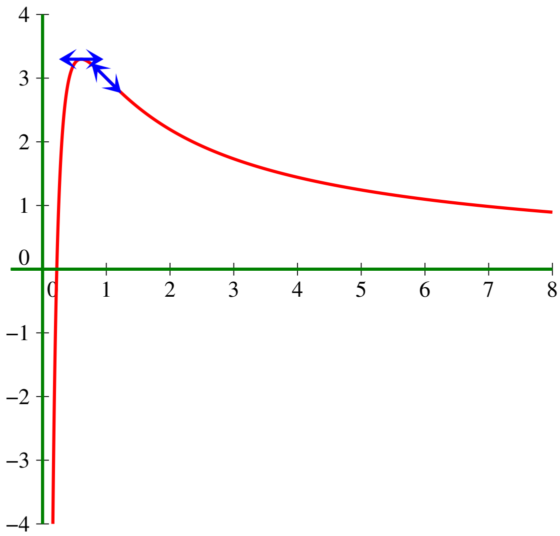


Étude de la fonction i

La fonction i est bien sûr définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;+\infty[$.

La limite de i quand x tend vers 0 est $-\infty$ (non, il n'y a pas de forme indéterminée), il y a donc une asymptote verticale d'équation $x = 0$. Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} i(x) = 0$, donc il y a également une asymptote horizontale (l'axe des abscisses) en $+\infty$.

Comme $i'(x) = \dfrac{2 - (2\ln x + 3)}{x^2} = \dfrac{-1 - 2\ln x}{x^2}$, la fonction i admet un maximum en $x = e^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$, de valeur $i\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right) = (2 \times (-\frac{1}{2}) + 3)\sqrt{e} = 2\sqrt{e}$. De plus, $i''(x) = \dfrac{-2x - 2x(-1 - 2\ln x)}{x^4} = \dfrac{4\ln x}{x^3}$. La fonction admet donc un point d'inflexion pour $x = 1$, et $i(1) = 3$; $i'(1) = -1$. La fonction i est concave sur $]0;1]$ et convexe sur $[1;+\infty[$, avec une courbe ressemblant à ceci :

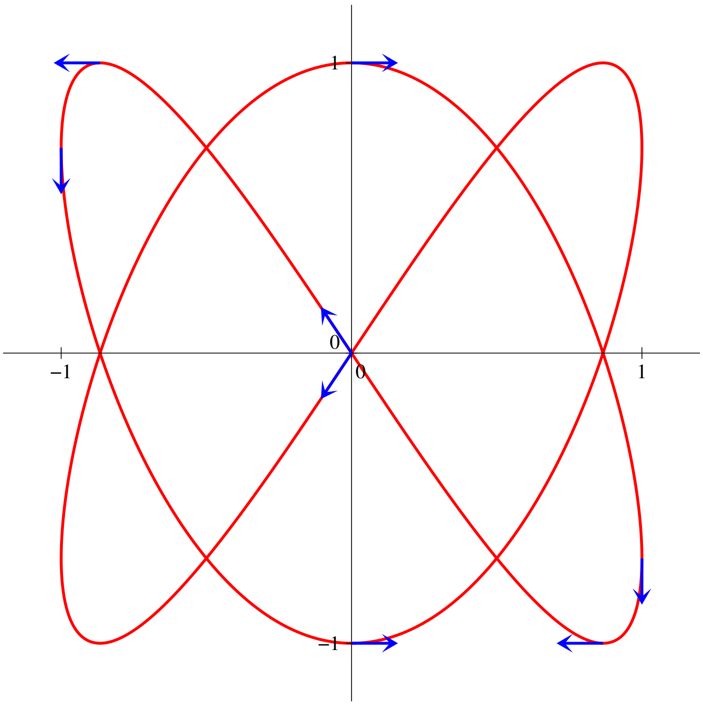


Exercice 3 (* à ***)

1. Les deux fonctions coordonnées sont ici périodiques, de période respective π et $\dfrac{2\pi}{3}$, ce qui nous permet de restreindre l'étude à l'intervalle $[-\pi;\pi]$ (puisque 2π est une période commune aux deux coordonnées). De plus, la fonction x est impaire et la fonction y paire, il y a donc une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées qui permet de restreindre encore l'étude à $[0;\pi]$. Les deux fonctions sont $\mathcal{C}^\infty$, $x'(t) = 2\cos(2t)$ s'annule en $\dfrac{\pi}{4}$ et en $\dfrac{3\pi}{4}$ (sut l'intervalle d'étude) et $y'(t) = -3\sin(3t)$ s'annule en 0, $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{2\pi}{3}$ et π (il n'y a donc pas de point stationnaire). Les divers calculs de valeurs ne posent pas de problème particulier, par exemple $x\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, et $y(t) = \cos(\pi) = -1$. On obtient finalement le tableau suivant (désolé pour les flèches mal fichues pour x, je ne peux pas faire trois flèches décroissantes successives) :

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$x'(t)$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
x	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0
$y'(t)$	0	$-$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	0
y	1	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	-1

Les points doubles sont ici nombreux, on ne fera pas la liste complète, mais on peut tout de même en remarquer un facile : pour $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$, la courbe passe par l'origine du repère. Comme $x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$ et $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$, la tangente à l'origine pour $t = \frac{\pi}{2}$ sera dirigée par le vecteur $(-2, 3)$. De même, pour $\frac{3\pi}{2}$ (qui est en-dehors de notre intervalle d'étude), un vecteur tangent sera $(-2, -3)$. La courbe ressemble à ceci (les tangentes particulières ne sont indiquées que sur l'intervalle $[0; \pi]$, le reste de la courbe étant obtenu par symétrie) :

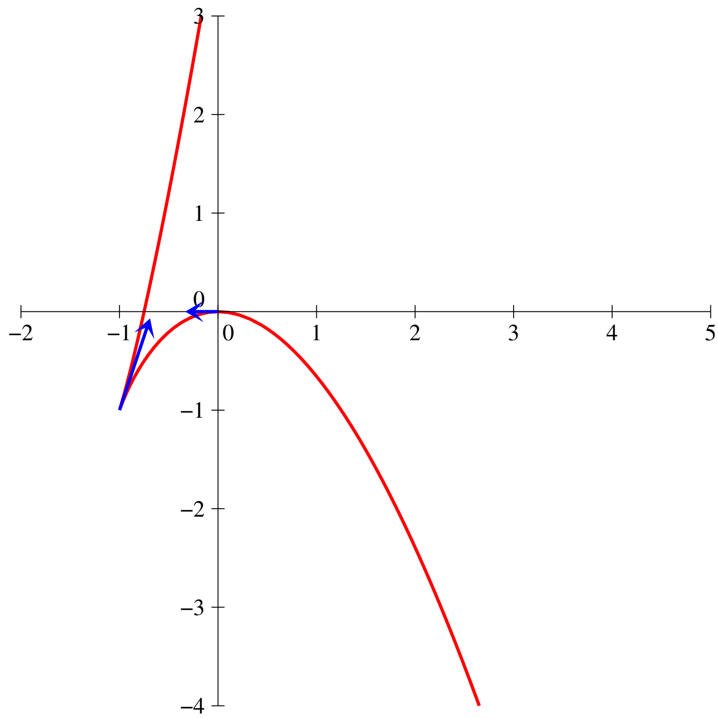


2. Pas de restriction de l'intervalle d'étude ici (les fonctions n'ont aucune parité particulière) mais x et y sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On calcule $x'(t) = 2t - 2$, qui s'annule lorsque $t = 1$; et $y'(t) = 6t^2 - 6t = 6t(t-1)$ qui s'annule pour $t = 0$ et $t = 1$. Il y a donc un point stationnaire pour $t = 1$ (de coordonnées $(-1, -1)$). Puisque $x''(t) = 2$ et $y''(t) = 12t - 6$, qui vaut 6 lorsque $t = 1$, la tangente au point stationnaire sera dirigée par le vecteur $(2, 6)$, ou plus simplement par $(1, 3)$. On peut ici aisément calculer $x'''(t) = 0$ et $y'''(t) = 12$, ce qui permet de constater que le vecteur $\overrightarrow{f'''(1)}$ n'est pas colinéaire au vecteur tangent (il est vertical), le point stationnaire est donc un point de rebroussement de première espèce.

t	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x'(t)$		$-$		$-$	0	$+$	
x	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Il y a ici des branches infinies à étudier. En gardant les termes de plus haut degré, $\lim_{t \to \pm\infty} \frac{y(t)}{x(t)} =$

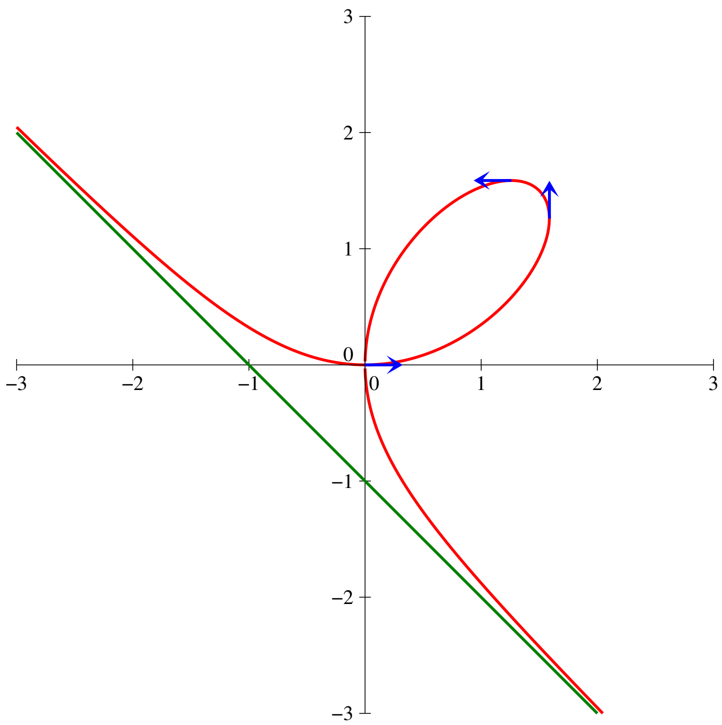
$\pm\infty$, il y a donc une branche parabolique de direction (Oy) des deux côtés. On peut s'intéresser aux éventuels points doubles pour cette courbe : $x(t) = x(u) \Leftrightarrow t^2 - 2t = u^2 - 2u \Leftrightarrow (t-u)(t+u) = 2(t-u)$, soit $t+u = 2$ (en éliminant le cas inintéressant $t = u$). De même, $y(t) = y(u) \Leftrightarrow 2t^3 - 3t^2 = 2u^3 - 3u^2$, ce qui se factoriser également en notant que $t^3 - u^3 = (t-u)(t^2+tu+u^2)$, pour donner $2(t-u)(t^2+tu+u^2) = 3(t+u)(t-u)$. En simplifiant ici aussi les facteur $t-u$, il reste $2(t+u)^2 - 2tu - 3(t+u) = 0$. Comme on a déjà la condition $t+u = 2$, on en déduit que $8 - 2tu - 6 = 0$, soit $tu = 1$. Les réels t et u ont pour produit 1 et pour somme 2, ils sont donc solutions de l'équation $x^2 - 2x + 1 = 0$. Cette équation ayant pour unique solution (double) $t = u = 1$, il n'y a pas de point double.



3. Les deux fonctions sont ici définies et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$. Pas de parité à signaler, on ne peut pas restreindre l'intervalle d'étude. On calcule $x'(t) = \dfrac{3(1+t^3) - 3t^2 \times 3t}{(1+t^3)^2} = \dfrac{3(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}$, qui s'annule lorsque $t^3 = \dfrac{1}{2}$, soit $t = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} 2^{\frac{2}{3}} \simeq 1.59$. Pour ce point, on a $x\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \dfrac{\frac{3}{\sqrt[3]{2}}}{1+\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{2}} = 2^{\frac{2}{3}} \simeq 1.59$, et $y\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \dfrac{2}{2^{\frac{2}{3}}} = \sqrt[3]{2} \simeq 1.26$. Passons à la deuxième coordonnée : $y'(t) = \dfrac{6t(1+t^3) - 3t^2 \times 3t^2}{(1+t^3)^2} = \dfrac{3t(2-t^3)}{(1+t^3)^2}$ s'annule pour $t = 0$ (on est alors à l'origine), et pour $t = \sqrt[3]{2}$, valeur pour laquelle $x(\sqrt[3]{2}) = \dfrac{3\sqrt[3]{2}}{1+2} = \sqrt[3]{2} \simeq 1.26$, et $y(\sqrt[3]{2}) = 2^{\frac{2}{3}} \simeq 1.59$ (autrement dit, ce point est symétrique par rapport à la première bissectrice de celui trouvé pour l'annulation de x'). Il n'y a pas de point stationnaire.

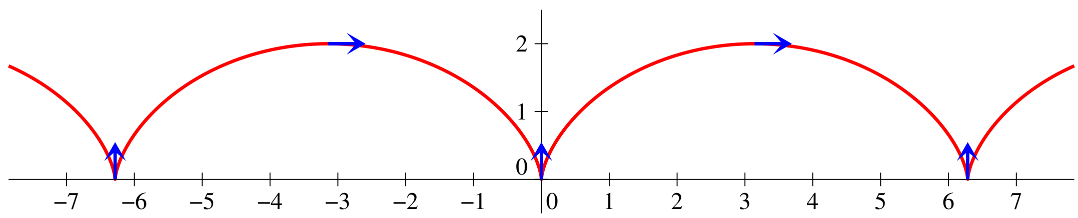
t	$-\infty$		-1		0		$\sqrt[3]{2}$		$2^{\frac{2}{3}}$		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	‖	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
x	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt[3]{2}$	$\nearrow$	$2^{\frac{2}{3}}$	$\searrow$	0
$y'(t)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
y	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$2^{\frac{2}{3}}$	$\searrow$	$\sqrt[3]{2}$	$\searrow$	0

Pas d'asymptote en $\pm\infty$ puisqu'on se rapproche alors simplement de l'origine, par contre on peut étudier ce qui se passe en -1 : $\dfrac{y(t)}{x(t)} = t$ a évidemment pour limite -1, on calcule donc $y(t) + x(t) = \dfrac{3(t+t^2)}{1+t^3} = \dfrac{3t(1+t)}{(1+t)(t^2-t+1)} = \dfrac{3t}{t^2-t+1}$, qui a pour limite $\dfrac{-3}{3} = -1$ quand t tend vers -1. Il y a donc à cet endtroit une asymptote oblique d'équation $y = -x-1$.
Allez, une petite recherche de point doubles pour finir : $x(t) = x(u) \Leftrightarrow t(1+u^3) = u(1+t^3) \Leftrightarrow t-u+tu^3-ut^3 = 0 \Leftrightarrow t-u+tu(u-t)(u+t) = 0$. En éliminant comme d'habitude la possibilité $t = u$, il reste $1 - tu(t+u) = 0$. Pour $y(t) = y(u)$, on obtient $t^2 - u^2 + t^2u^3 - u^2t^3 = 0$, soit $(t-u)(t+u) + t^2u^2(u-t) = 0$, donc $t+u-u^2t^2 = 0$. On déduit de la deuxième équation que $(ut)^2 = t+u$, ce qui donne dans la première $1-(ut)^3 = 0$. On doit alors avoir $ut = 1$, puis $u+t = 1$. Les réels t et u sont donc solutions de l'équation $x^2-x+1 = 0$, qui a le mauvais goût de ne pas avoir de solutions réelles (discriminant négatif). Il n'y a donc pas de point double. On pourrait croire sur la courbe que l'origine est un point double, mais en fait, on ne fait que tendre vers l'origine en $\pm\infty$ (d'où l'absence de tangente verticale à cet endroit), le point n'est vraiment atteint qu'une fois (quand $t = 0$).



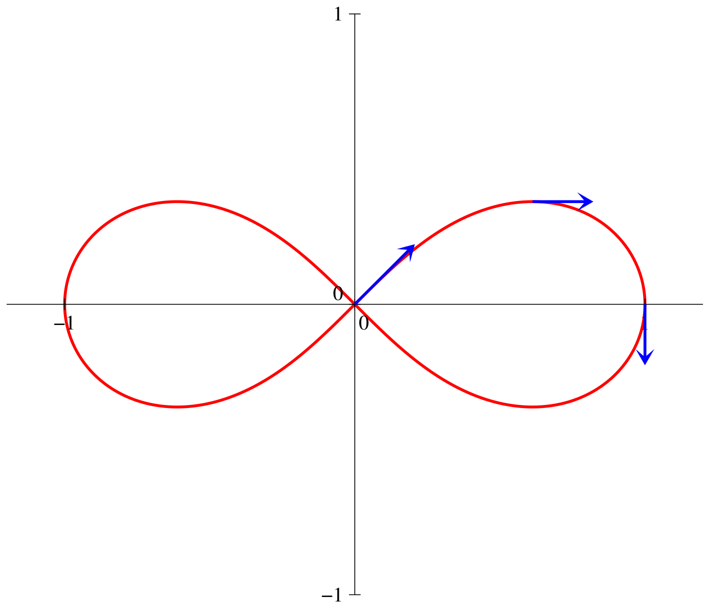
4. Les deux fonctions sont définies et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et on ne peut pas réduire l'intervalle d'étude (x a le mauvais goût de ne pas être périodique) On peut tout de même constater que $x(t+2\pi) =$

$x(t) + 2\pi$, et $y(t + 2\pi) = y(t)$. Cela signifie que la courbe est invariante par translation de vecteur $2\pi\overrightarrow{i}$, ce qui correspond exactement à ce qui se produit pour une fonction 2π-périodique à valeurs dans $\mathbb{R}$. On calcule $x'(t) = 1 - \cos(t)$, qui s'annule lorsque $t = 2k\pi$, mais reste toujours positive puisque $\cos(t) \leqslant 1$; et $y'(t) = \sin(t)$, qui s'annule pour $t = k\pi$, on a alors $x(k\pi) = k\pi$, et $y(k\pi) = 0$ si k est pair, $y(k\pi) = 2$ si k est impair. On a donc un point stationnaire pour tous les multiples de 2π, situé sur l'axe des abscisses. Comme $x''(t) = \sin(t)$ et $y''(t) = \cos(t)$, on aura $x''(2k\pi) = 0$ et $y''(2k\pi) = 1$, ce qui indique la présence d'une tangente verticale pour chaque point stationnaire. Le vecteur dérivé tierce étant horizontal en $2k\pi$, il n'est pas colinéaire au précédent, tous les points stationnaires sont des points de rebroussement de première espèce. Pas de branche infinie à étudier puisque y n'a pas de limite en $\pm\infty$, et pas de point double possible quand x est strictement croissante, on peut directement tracer la courbe (il s'agit de la courbe parcourue par un point fixé sur la roue d'un vélo en mouvement par exemple) :



5. Les deux fonctions sont définies et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Elles sont évidemment 2π-périodiques, ce qui permet de réduire l'intervalle d'étude à $[-\pi, \pi]$. De plus, x et y sont toutes les deux impaires, on peut restreindre l'étude à $[0; \pi]$ et effectuer une symétrie de la courbe par rapport à l'origine. Enfin, $x(\pi - t) = x(t)$ et $y(\pi - t) = -y(t)$, il y a donc une symétrie supplémentaire par rapport à (Ox) qui permet de restreindre encore et de se limiter à $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. On calcule $x'(t) = \dfrac{\cos(t)(1 + \cos^2(t)) + 2\cos(t)\sin^2(t)}{(1 + \cos^2(t))^2} = \dfrac{\cos(t)(1 + \cos^2(t)) + 2\cos(t)(1 - \cos^2(t))}{(1 + \cos^2(t))^2} = \dfrac{\cos(t)(3 - \cos^2(t))}{(1 + \cos^2(t))^2}$, qui ne s'annule qu'en $\dfrac{\pi}{2}$ sur notre intervalle d'étude, et

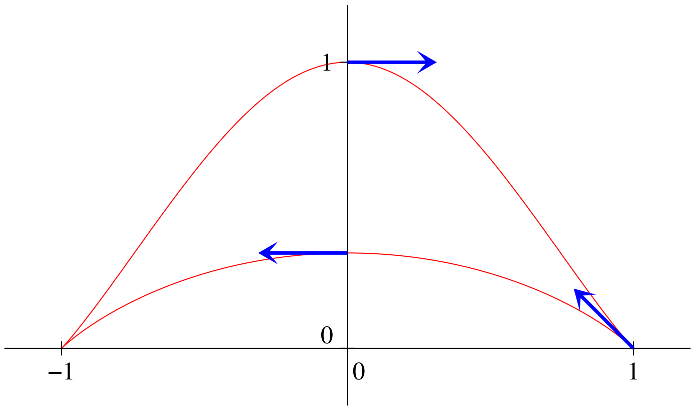
$y'(t) = \dfrac{(\cos^2(t) - \sin^2(t))(1 + \cos^2(t)) + 2\cos^2(t)\sin^2(t)}{(1 + \cos^2(t))^2}$. En posant $X = \cos^2(t)$, $y'(t) = \dfrac{(2X - 1)(1 + X) + 2X(1 - X)}{(1 + X^2)^2} = \dfrac{3X - 1}{(1 + X^2)^2}$. Cette dérivée s'annule donc lorsque $X = \dfrac{1}{3}$, soit $t = \arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$. On a alors $\sin(t) = \sqrt{1 - \cos^2(t)} = \sqrt{1 - \dfrac{1}{3}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$, soit $x(t) = \dfrac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{1 + \frac{1}{3}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{4} \simeq 0.61$; et $y(t) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x(t) = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \simeq 0.35$. Pas de point stationnaire, ni de point double sur notre intervalle, pour compléter un peu le tracé (on n'a que deux points à placer pour l'instant), on peut calculer la tangente pour $t = 0$ (où on est situés à l'origine) : $x'(0) = \dfrac{1}{2}$ et $y'(0) = \dfrac{1}{2}$, donc la tangente à l'origine suit la première bissectrice. On obtient la courbe suivante (lemniscate, on la retrouvera sous forme polaire) :



6. Comme $2 - \cos(t)$ ne risque pas de s'annuler, les deux fonctions sont définies et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Les deux fonctions sont 2π-périodiques ; de plus, x est impaire et y paire, ce qui permet de restreindre l'étude à l'intervalle $[0;\pi]$, puis de compléter la courbe par symétrie par rapport à (Oy). On calcule $x'(t) = \cos(t)$, qui ne s'annule qu'en $\frac{\pi}{2}$ sur notre intervalle d'étude. Profitons-en pour calculer $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ et $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Passons à la deuxième coordonnée : $y'(t) = \frac{-2\sin(t)\cos(t)(2-\cos(t)) + \sin(t)\cos^2(t)}{(2-\cos(t))^2} = \frac{\sin(t)\cos(t)(3\cos(t)-4)}{(2-\cos^2(t))^2}$. La parenthèse du numérateur étant toujours négative, la dérivée s'annule en 0, $\frac{\pi}{2}$ et π. On peut dresser le tableau de variations suivant :

t	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$x'(t)$		$+$	0	$-$	
x	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
$y'(t)$	0	$-$	0	$+$	0
y	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$

Il y a un point stationnaire en $\frac{\pi}{2}$. Comme le calcul des dérivées secondes (sans parler des dérivées tierces pour vérifier qu'il s'agit bien d'un point de rebroussement de première espèce) est pénible, on peut utiliser pour déterminer le vecteur tangent la méthode alternative : $\frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\sin(t)(3\cos(t)-4)}{(2-\cos^2(t))^2}$, qui a pour limite $\frac{-4}{4} = -1$ en $\frac{\pi}{2}$. On en déduit que la tangente au point de rebroussement est dirigée par le vecteur $(-1, 1)$ (pente -1).

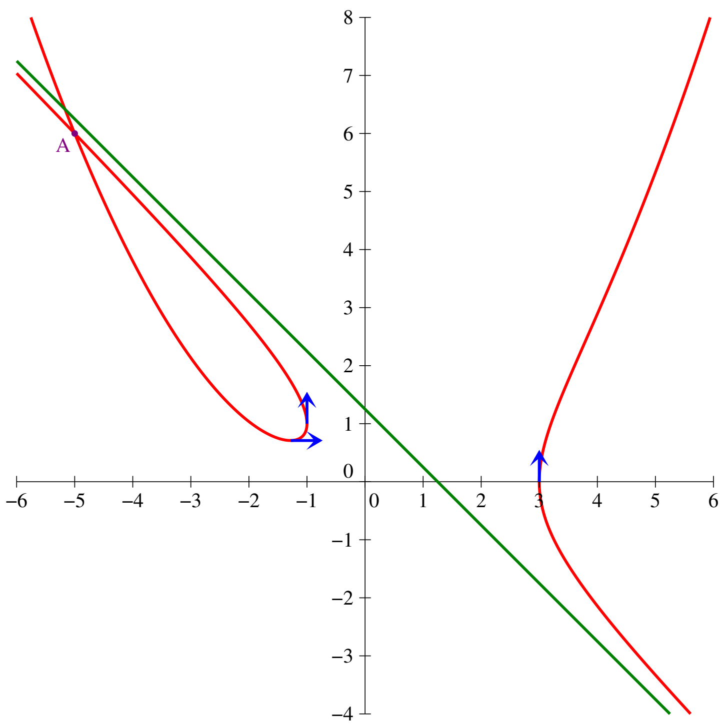


7. Les deux fonctions sont définies et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{2}\right\}$. On calcule $x'(t) = 2 - \frac{2}{(2t-1)^2} = \frac{2(4t^2-4t+1-1)}{(2t+1)^2} = \frac{8t(t-1)}{(2t+1)^2}$, ce qui s'annule pour $t = 0$ et $t = 1$. On en profite pour calculer $x(0) = -1$, $y(0) = 1$; $x(1) = 3$ et $y(1) = 0$. Pour la seconde fonction, $y'(t) = 2t + \frac{2}{(2t-1)^2} = \frac{2(4t^3-4t^2+t+1)}{(2t-1)^2}$. Le numérateur n'a malheureusement pas de racine évidente, le mieux est encore de poser $g(t) = 4t^3 - 4t^2 + t + 1$ et d'essayer d'étudier les variations de g. On calcule donc $g'(t) = 12t^2 - 8t + 1$, tribome dont le discriminant vaut $\Delta = 64 - 48 = 16$, et qui s'annule donc pour $t_1 = \frac{8-4}{24} = \frac{1}{6}$ et $t_2 = \frac{8+4}{24} = \frac{1}{2}$. Comme $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{8} - \frac{4}{4} + \frac{1}{2} + 1 = 1 > 0$, le tableau de variations indique que g s'annulera une seule fois, avant $\frac{1}{6}$ (ensuite, la fonction est décroissante entre $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{2}$, et toujours positive à cause du calcul qu'on vient d'effectuer en $\frac{1}{2}$, puis croissante et donc toujours positive de $\frac{1}{2}$ jusqu'à $+\infty$). Notons α l'unique valeur pour laquelle $g(\alpha) = 0$, on ne peut pas donner de valeur exacte pour α, mais on peut au moins, pour la placer correctement dans le tableau de variations, constater que $g(0) = 1 > 0$, donc $\alpha < 0$. La calculatrice permet d'obtenir les valeurs approchées de $x(\alpha)$ et $y(\alpha)$ présentes dans le tableau de variations. Le calcul des limites ne présente aucune difficulté, d'où le tableau suivant :

t	$-\infty$		α		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$x'(t)$		$+$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
x	$-\infty$	$\nearrow$	-1.28	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$-$	0	$+$		$+$	$\Vert$	$+$		$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0.71	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Pour les branches infinies, on a en mettant tout au même dénominateur, $\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{2t^3-t^2-1}{4t^2-2t+1}$, qui a des limites infinies en $+\infty$ et en $-\infty$. Il y a donc des deux côtés des branches paraboliques de direction (Oy). En $\frac{1}{2}$, en utilisant le calcul précédant, $\frac{y(t)}{x(t)}$ a pour limite $\frac{\frac{2}{8}-\frac{1}{4}-1}{\frac{4}{4}-1+1}=-1$. On calcule donc $y(t)+x(t)=2t+t^2$, qui a pour limite $1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$ en $\frac{1}{2}$. Il y a donc une asymptote oblique d'équation $y=x+\frac{5}{4}$.

Reste la recherche de points doubles. Commençons par écrire que $x(t)=x(u)$: $2t+\frac{1}{2t-1}=2u+\frac{1}{2u-1}$, soit $2(t-u)=\frac{1}{2u-1}-\frac{1}{2t-1}=\frac{2(t-u)}{(2u-1)(2t-1)}$. On simplifie comme toujours par $t-u$, et même ici par $2(t-u)$, et on trouve $4tu-2t-2u+1=1$, soit $2tu-(t+u)=0$. Passons à $y(t)=y(u)$, avec le même type de calcul : $t^2-u^2=\frac{1}{2t-1}-\frac{1}{2u-1}$, soit $(t-u)(t+u)=\frac{-2(t-u)}{(2t-1)(2u-1)}$. On obtient alors $(t+u)(4tu-2(t+u)+1)=-2$. Comme la première condition implique $4tu-2(t+u)=0$, la deuxième devient simplement $t+u=-2$, dont on déduit $2tu=-2$, soit $tu=-1$. Les deux réels t et u sont donc solutions de l'équation $x^2+2x-1=0$, qui a pour discriminant $\Delta=4+4=8$, et admet donc deux racines $t=\frac{-2+2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}-1$, et $u=\frac{-2-2\sqrt{2}}{2}=-1-\sqrt{2}$. On calcule par exemple $x(\sqrt{2}-1)=2\sqrt{2}-2+\frac{1}{2\sqrt{2}-3}=2\sqrt{2}-2+\frac{2\sqrt{2}+3}{8-9}=2\sqrt{2}-2-2\sqrt{2}-3=-5$; et $y(\sqrt{2}-1)=(\sqrt{2}-1)^2-\frac{1}{2\sqrt{2}-3}=2-2\sqrt{2}+1+2\sqrt{2}+3=6$. Le point double est donc le point $A(-5;6)$.

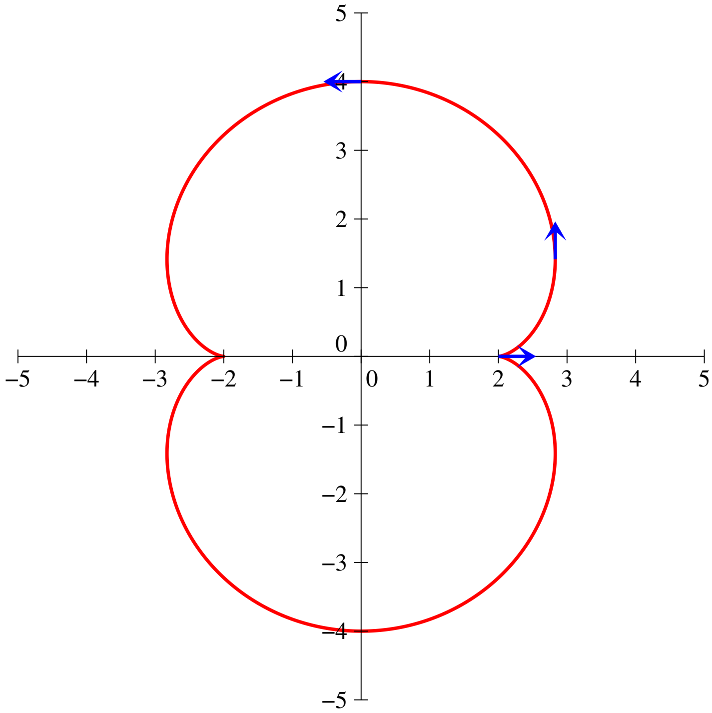


8. Les deux fonctions sont définies et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Elles sont toutes les deux 2π-périodiques, de plus x est paire et y impaire, donc on peut se contenter d'une étude sur $[0;\pi]$, la courbe étant complétée par symétrie par rapport à (Ox). On peut même ajouter que $x(\pi-t)=-x(t)$ et $y(\pi-t)=y(t)$ pour trouver une symétrie par rapport à (Oy) qui permet de se restreindre à $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. On calcule $x'(t)=-3\sin(t)+3\sin(3t)=3(3\sin(t)-4\sin^3(t)-\sin(t))=6\sin(t)(1-2\sin^2(t))$.

Cette dérivée s'annule en 0 et lorsque $\sin(t) = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, c'est-à-dire pour $t = \dfrac{\pi}{4}$ (sur notre intervalle d'étude). Pour l'autre coordonnée, $y'(t) = 3\cos(t) - 3\cos(3t) = 12\cos(t)(1 - \cos^2(t))$. Cette dérivée s'annule en $\dfrac{\pi}{2}$ et lorsque $\cos(t) = \pm 1$, soit en 0. Il y a donc un point stationnaire pour $t = 0$. On peut calculer $x''(t) = -3\cos(t) + 9\cos(3t)$ et $y''(t) = -3\sin(t) + 9\sin(3t)$ pour constater que le vecteur tangent sera horizontal (en effet, $x''(0) = 6$ et $y''(0) = 0$), et le point est un point de rebroussement de première espèce (un calcul similaire montre que $\overrightarrow{f'''(0)}$ est quant à lui vertical). On calcule les valeurs des points intéressants : $x(0) = 3 - 1 = 2$; $y(0) = 0$; $x\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$; $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$; $x\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ et $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 3 + 1 = 4$.
d'où le tableau suivant :

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0	$+$	0	$-$	
x	2	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	0
$y'(t)$	0	$+$		$+$	0
y	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	4

Et la courbe correspondante, dont le nom indique qu'elle est censée ressembler à un rein.



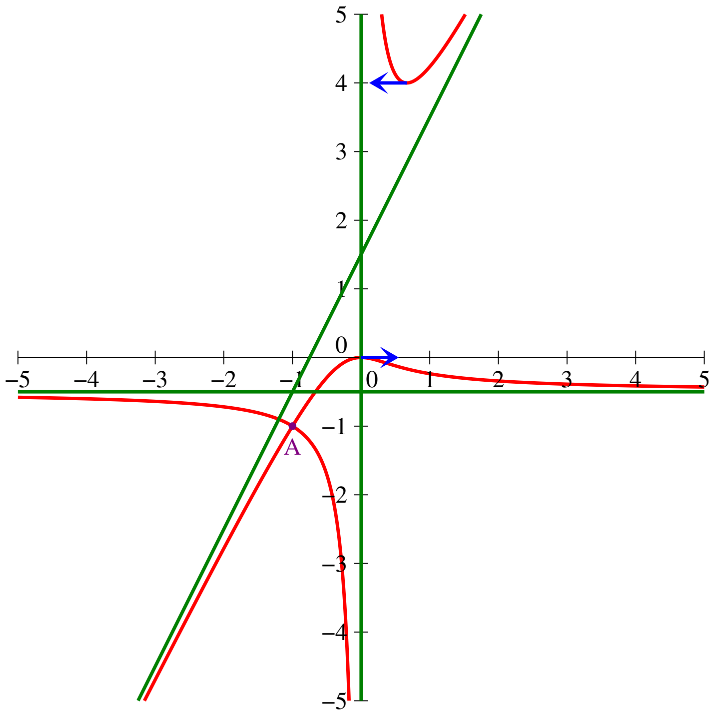
9. La fonction x est définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\backslash\{-1; 1\}$, et y sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$. La fonction x est paire, mais y n'a pas de parité, on ne peut pas retreindre l'intervalle d'étude. On calcule $x'(t) = \dfrac{t^2 - 1 - 2t \times t}{(t^2 - 1)^2} = \dfrac{-1 - t^2}{(t^2 - 1)^2}$, qui ne s'annule jamais (cette dérivée est toujours négative) ; puis $y'(t) = \dfrac{2t(t - 1) - t^2}{(t - 1)^2} = \dfrac{t(t - 2)}{(t - 1)^2}$, qui s'annule pour $t = 0$ et $t = 2$. On en ptofite pour calculer

$x(0) = y(0) = 0$, et $x(2) = \dfrac{2}{3}$, $y(2) = 4$. Il n'y a pas de point stationnaire. Les calculs de limites sont très classiques :

t	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$x'(t)$		$-$	$\Vert$	$-$		$-$	$\Vert$	$-$		$-$	
x	0	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$\dfrac{2}{3}$	$\searrow$	0
$y'(t)$		$+$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$-\dfrac{1}{2}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

On constate que l'axe des ordonnées est asymptote verticale en $-\infty$ et en $+\infty$, et la droite d'équation $y = -\dfrac{1}{2}$ asymptote horizontale quent t tend vers -1. Reste à étudier ce qui se passe en 1, on a alors $\dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{t^2(t^2-1)}{t(t-1)} = \dfrac{t(t+1)(t-1)}{t-1} = t(t+1)$, qui a pour limite 2 quand t tend vers 1. On enchaine donc avec $y(t) - 2x(t) = \dfrac{t^2}{t-1} - \dfrac{2t}{t^2-1} = \dfrac{t^2(t+1)-2t}{t^2-1} = \dfrac{t^3+t^2-2t}{t^2-1}$. Le numérateur se factorisant sous la forme $t(t-1)(t+2)$ (1 est racine évidente, mais on peut aussi passer par un calcul de discriminant après avoir factorisé par t), on obtient $y(t) - 2x(t) = \dfrac{t(t+2)}{t+1}$ qui tend vers $\dfrac{3}{2}$. La droite d'équation $y = 2x + \dfrac{3}{2}$ est donc asymptote oblique à la courbe quand t tend vers 1.

On peut achever l'étude avec la recherche des points doubles. L'équation $x(t) = x(u)$ se met sous la forme $t(u^2-1) = u(t^2-1)$, soit $tu^2 - ut^2 - t + u = 0$. En factorisant par $u - t$ pour éliminer la solution évidente $t = u$, il reste la condition $ut + 1 = 0$. La deuxième condition $y(t) = y(u)$ s'écrit $t^2(u-1) = u^2(t-1)$, soit $t^2u - u^2t + u^2 - t^2$, ce qui donne après factorisation $-tu + u + t = 0$. Puisque $ut = -1$, on a donc $u + t = -1$, et les réels t et u sont solutions de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$. Ce trinome a pour discriminant $\Delta = 1 + 4 = 5$, et admet deux racines $t = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ et $u = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$. En utilisant l'équation dont t et u sont solutions, on constate que pour cette valeur de t, on a $x(t) = \dfrac{t}{t^2-1} = \dfrac{t}{-t} = -1$, et $y(t) = \dfrac{t^2}{t-1} = \dfrac{t^2}{-t^2} = -1$. Le point double a donc pour coordonnées $A(-1, -1)$.

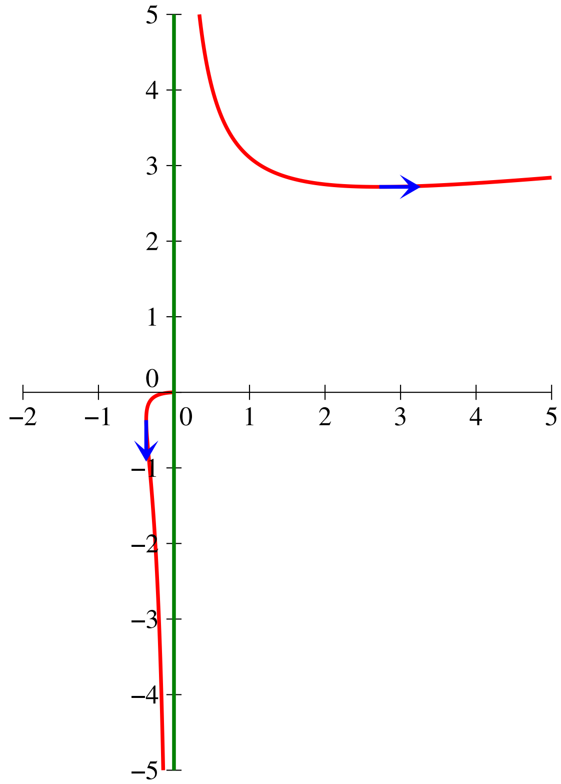


10. Les deux fonctions sont définies et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ (y n'étant évidemment pas définie en 0). On calcule $x'(t) = e^t + te^t = (1+t)e^t$, qui s'annule pour $t = -1$, valeur pour laquelle $x(-1) = -\dfrac{1}{e}$ et $y(-1) = -\dfrac{1}{e}$. Puis $y'(t) = \dfrac{e^t t - e^t}{t^2} = \dfrac{e^t(t-1)}{t^2}$, qui s'annule cette fois-ci pour $t = 1$, avec $x(1) = y(1) = e$.

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x'(t)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x	0	↘	$-\frac{1}{e}$	↗	0	↗	$\frac{1}{e}$	↗	$+\infty$
$y'(t)$		$-$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	0	↘	$-\frac{1}{e}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{1}{e}$	↗	$+\infty$

Les calculs de limites ne présentent pas de difficulté particulière (on a simplement besoin de croissance comparée pour x en $-\infty$). On constate la présence d'une asymptote verticale quand t tend vers 0 (il s'agit simplement de l'axe des ordonnées). Pas d'asymptote en $-\infty$ puisqu'on se rapproche simplement de l'origine. En $+\infty$, on a $\dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{1}{t^2}$ qui tend vers 0, donc il y a une branche parabolique de direction (Ox).

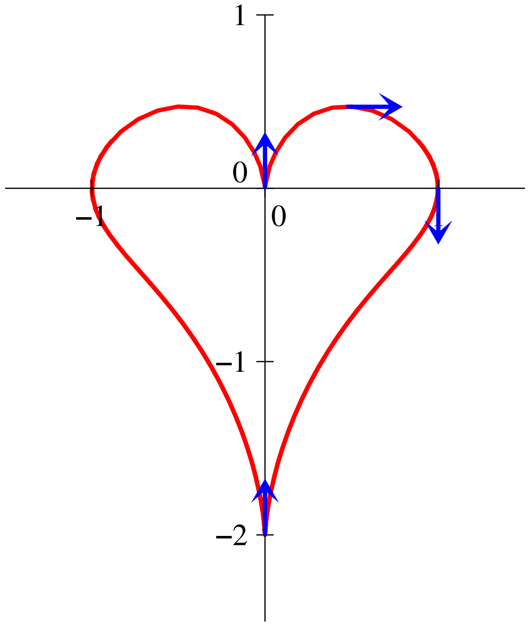
Essayons de rechercher des points doubles, ils doivent vérifier $te^t = ue^u$ et $\dfrac{e^t}{t} = \dfrac{e^u}{u}$. En multipliant la deuxième équation par t^2, on trouve $te^t = \dfrac{t^2}{u}e^u$, ce qui en comparant avec la première équation donne $\dfrac{t^2}{u} = u$, soit $t^2 = u^2$. Si on enlève le cas trivial où $t = u$, il reste donc la possibilité $u = -t$, qui donne alors la condition $te^t = -te^{-t} = -\dfrac{t}{e^t}$. On doit donc avoir $e^t = -\dfrac{1}{e^t}$, ce qui est impossible (les deux membres sont de signe opposé). Il n'y a donc pas de point double.



11. Les deux fonctions coordonnées sont définies sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques. Par ailleurs, x est impaire et y paire, la courbe sera donc symétrique par rapport à (Oy), et on peut restreindre l'intervalle d'étude à $[0;\pi]$. Les deux fonctions sont dérivables, et $x'(t) = 3\cos(t)\sin^2(t)$; $y'(t) = -\sin(t) + 4\sin(t)\cos^3(t) = \sin(t)(4\cos^3(t) - 1)$. Cette dérivée s'annule (outre en 0 et en π) quand $\cos^3(t) = \dfrac{1}{4}$, soit $\cos(t) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$, ce qui correspond à une unique valeur t_0 du paramètre t comprise entre 0 et π (et même entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$ puisque son cosinus est positif). On calcule $y(t_0) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}} - \dfrac{1}{4 \times \sqrt[3]{4}} = \dfrac{3}{4^{\frac{4}{3}}} \simeq 0.47$; et $x(t_0) = \sin^3(t_0) = \sqrt{1 - \cos(t_0)^2}^3 = (1 - 4^{-\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} \simeq 0.47$ (mais ce n'est pas exactement la même valeur que pour l'abscisse). On obtient le tableau de variations suivant :

t	0		t_0		$\frac{\pi}{2}$		π
$x'(t)$	0	$+$		$+$	0	$-$	0
$x(t)$	0	$\nearrow$	0.47	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
$y'(t)$	0	$+$	0	$-$		$-$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	0.47	$\searrow$	0	$\searrow$	-2

Il y a deux points stationnaires, en 0 et en π. Calculons les dérivées suivantes pour déterminer la nature de ces points et les tangentes correspondantes : $x''(t) = -3\sin^3(t) + 6\cos^2(t)\sin(t)$ s'annule en 0 et en π ; $y''(t) = -\cos(t) + 4\cos^4(t) - 12\sin^2(t)\cos^2(t)$, qui vaut 3 en 0 (on aura donc une tangente verticale « vers le haut » en ce point), et 5 en π (où on aura donc également une tangente verticale). On peut vérifier assez facilement que les deux points sont des points de rebroussement de première espèce, calculer la dérivée tierce de x est suffisant (si elle n'est pas nulle en 0 et en π, le vecteur correspondant ne pourra pas être colinéaire avec la tangente verticale). Comme $x'''(t) = -9\sin^2(t)\cos(t) - 12\cos(t)\sin^2(t) + 6\cos^2(t)$, cette dérivée tierce vaut 6 pour nos deux points stationnaires. On peut désormais tracer la courbe :



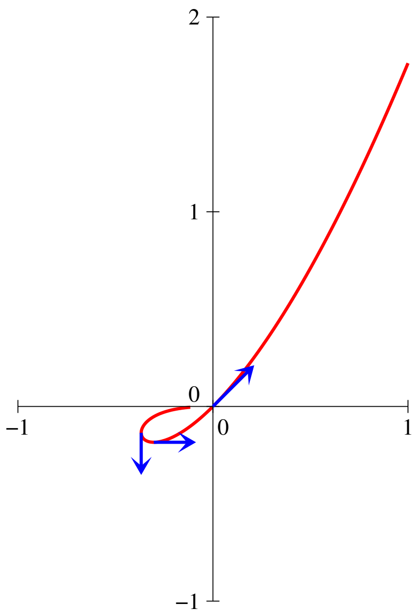
Exercice 4 (**)

Commençons par constater que l'équation ne peut avoir de sens que si $x \neq 0$ et $\dfrac{y}{x} > 0$. On peut en tout cas diviser par x pour obtenir l'équation $x = \dfrac{y}{x}\ln\left(\dfrac{y}{x}\right) = t\ln(t)$. Comme $t = \dfrac{y}{x}$, on a ensuite $y = tx = t^2\ln(t)$. On est bien ramenés à l'étude d'un arc paramétré.

Les deux fonctions coordonnées sont définies et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. On calcule $x'(t) = \ln(t)+1$, qui s'annule pour $t = \dfrac{1}{e}$. On en profite pour calculer $x\left(\dfrac{1}{e}\right) = -\dfrac{1}{e}$ et $y\left(\dfrac{1}{e}\right) = -\dfrac{1}{e^2}$. Pour l'autre coordonnée, $y'(t) = 2t\ln(t)+t = t(1+2\ln(t))$, qui s'annule lorsque $t = e^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$. On a alors $x\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\dfrac{1}{2\sqrt{e}}$, et $y\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\dfrac{1}{2e}$. Il n'y a pas de point stationnaire. Par croissance comparée, les limites des deux fonctions coordonnées sont nulles quand t tend vers 0. On pourrait donc effectuer une sorte de prolongement par continuité en ajoutant l'origine au support de l'arc.

t	0		$\frac{1}{e}$		$\frac{1}{\sqrt{e}}$		$+\infty$
$x'(t)$		$-$	0	$+$		$+$	
x	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$-\frac{1}{2\sqrt{e}}$	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$-$		$-$	0	$+$	
y	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e^2}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2e}$	$\nearrow$	$+\infty$

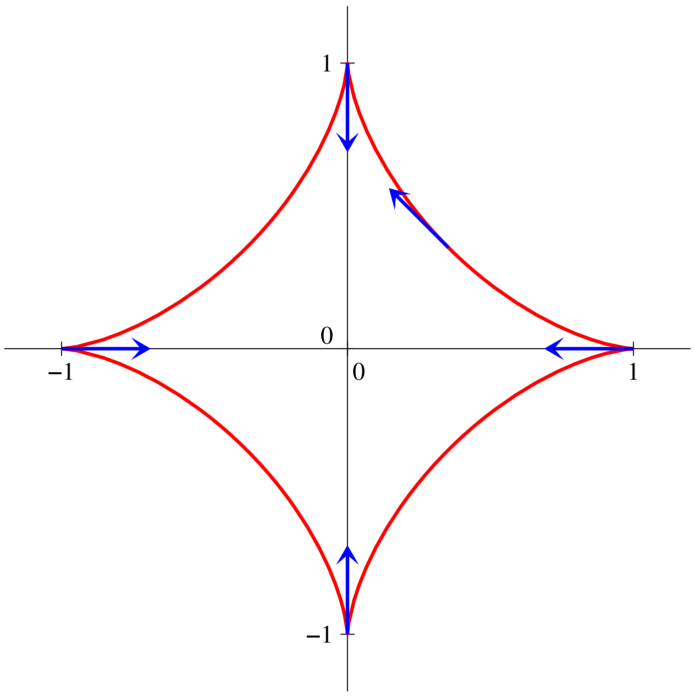
La seule branche infinie potentielle est en $+\infty$, où on a par définition $\dfrac{y(t)}{x(t)} = t$, il y a donc une branche parabolique de direction (Oy). L'étude d'éventuels points doubles n'est pas évidente avec les ln, en fait il n'y en a pas mais on peut constater que, pour $t = 1$, on passe par l'origine du repère. Comme $x'(1) = y'(1) = 1$, on peut même indiquer le vecteur tangent à l'origine.



Exercice 5 (***)

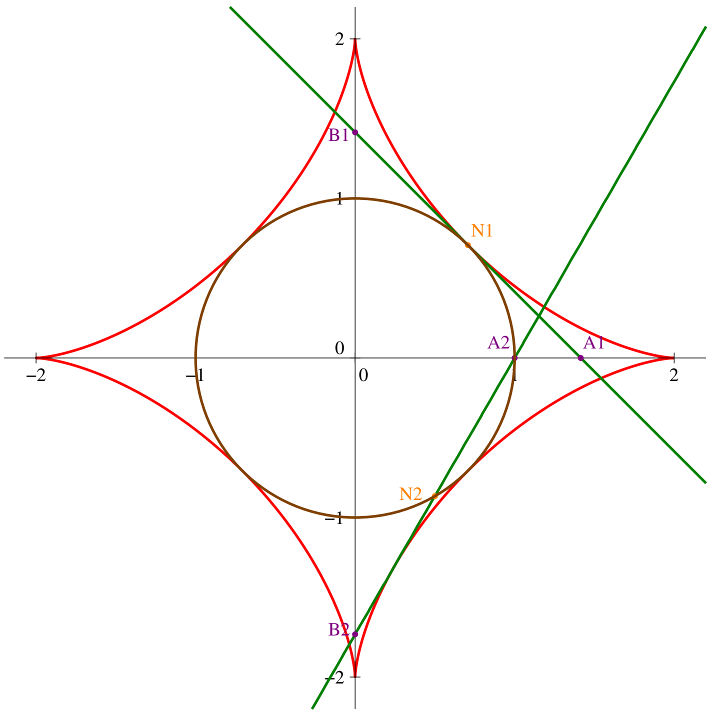
1. L'étude de cette courbe a déjà été faite dans le cours, mais on ne se lasse pas des bonnes choses. Les deux fonctions coordonnées sont 2π-pétiodiques. De plus, x étant paire et y impaire, une symétrie par rapport à (Ox) permet de réduire l'intervalle d'étude à $[0; \pi]$. Encore mieux, $x(\pi - t) = -x(t)$ et $y(\pi - t) = y(t)$, ce qui permet de restreindre encore à $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ et de compléter par symétrie par rapport à (Oy). Les plus motivés iront même jusqu'à ajouter que $x\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = y(t)$ et $y\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = x(t)$, ce qui prouve l'existence d'une symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$ et permet de réduire encore un peu l'intervalle. Quoi qu'il en soit, on a toujours $x'(t) = -3a\cos^2(t)\sin(t)$ et $y'(t) = 3a\sin^2(t)\cos(t)$, x est décroissante de a à 0 et y croissante de 0 à a sur l'intervalle $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, il y a un point de rebroussement de première espèce quand $t = 0$ (je vous laisse revoir les calculs dans le cours), et on peut constater que la

tangente en $\frac{\pi}{4}$ est dirigée par le vecteur $(-1,1)$. Avec tout ça, on obtient la courbe suivante (pour $a=1$) :



2. Les deux points $A(t)$ et $B(t)$ seront bien définis sauf quand la tangente est verticale ou horizontale, ce qui ne se produit qu'aux points stationnaires. Ailleurs, la tangente en $M(t)$ est dirigée par le vecteur $(-3a\cos^2(t)\sin(t), 3a\sin^2(t)\cos(t))$, ou beaucoup plus simplement par le vecteur $(-\cos(t), \sin(t))$. Autrement dit, un vecteur normal à la tangente est le vecteur $(\sin(t), \cos(t))$, et l'équation de la tangente est donc $\sin(t)(x-x_M)+\cos(t)(y-y_M))=0$, soit $\sin(t)x+\cos(t)y = a(\sin(t)\cos^3(t)+\cos(t)\sin^3(t)) = a\sin(t)\cos(t)(\cos^2(t)+\sin^2(t)) = a\sin(t)\cos(t)$ (on peut reconnaitre un $\sin(2t)$ dans le membre de droite mais ça ne sert à rien pour le calcul qu'on va effectuer). Lorsque $x=0$, on trouve donc $\cos(t)y = a\sin(t)\cos(t)$, soit $y = a\sin(t)$. De même, l'intersection de la tangente avec l'axe des abscisses se situe à une abscisse $x = a\cos(t)$. On a donc $A(t)(a\cos(t), 0)$ et $B(t)(0, a\sin(t))$, et $A(t)B(t) = \sqrt{a^2\cos^2(t)+a^2\sin^2(t)} = a$. Des exemples se trouvent sur la figure de la question suivante.

3. Le point $N(t)$ a donc pour coordonnées $(\lambda a\cos(t), (1-\lambda)a\sin(t))$. On reconnait le paramétrage d'une ellipse centrée en O, de demi-axes λa et $(1-\lambda)a$ (le demi-grand axe est λa lorsque $\lambda \geqslant \frac{1}{2}$). En particulier, lorsque $\lambda = \frac{1}{2}$, on constate que le lieu du milieu du segment $[A(t), B(t)]$ est le cercle de centre O et de rayon $\frac{a}{2}$. Ce cercle est dessiné ci-dessous (avec $a=2$), avec la constructions des points A, B et N lorsque $t = \frac{\pi}{4}$ et $t = -\frac{\pi}{3}$.



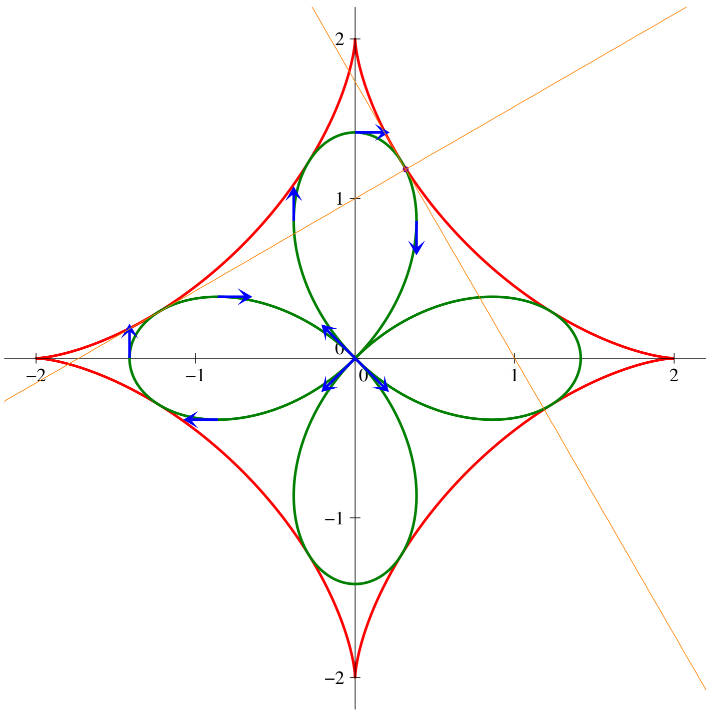
4. En reprenant le calcul des vecteurs normaux (ou directeurs) des tangentes à l'astroïde, on constate que les tangentes correspondant aux valeurs t et t' du paramètre sont orthogonales si $\cos(t)\cos(t') + \sin(t)\sin(t') = 0$, c'est-à-dire si $\cos(t - t') = 0$. On a donc $t - t' \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, soit $t' = t + \frac{\pi}{2}$ (quitte à inverser le rôle de t et de t'). Dans ce cas, $\cos(t') = -\sin(t)$ et $\sin(t') = \cos(t)$, et la tangente à la courbe en t' a pour équation $\cos(t)x - \sin(t)y = -a\sin(t)\cos(t)$ (en reprenant le calcul de la question 2). Un point de coordonnées (x, y) appartient donc aux deux tangentes simultanément si $\left\{\begin{array}{rcl} \sin(t)x + \cos(t)y & = & a\sin(t)\cos(t) \\ \cos(t)x - \sin(t)y & = & -a\sin(t)\cos(t) \end{array}\right.$. En multipliant la première ligne par $\sin(t)$ et la deuxième par $\cos(t)$, et en additionnant la tout, on trouve $(\sin^2(t) + \cos^2(t))x = a(\sin^2(t)\cos(t) - \sin(t)\cos^2(t))$, soit $x = a\sin(t)\cos(t)(\sin(t) - \cos(t))$. De même, en multipliant par $\cos(t)$ en haut, et par $\sin(t)$ en bas, et en soustrayant, on a $y = a\sin(t)\cos^2(t) + a\sin^2(t)\cos(t) = a\sin(t)\cos(t)(\cos(t) + \sin(t))$. Finalement, le lieu recherché est paramétré par les équations $\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & a\sin(t)\cos(t)(\sin(t) - \cos(t)) \\ y(t) & = & a\sin(t)\cos(t)(\cos(t) + \sin(t)) \end{array}\right.$
On ne reconnait rien d'élémentaire dans ces coordonnées, il faut donc étudier la courbe paramétrée correspondante. Les deux fonctions coordonnées sont 2π-périodiques, et $x(\pi + t) = -x(t)$; $y(\pi + t) = -y(t)$, ce qui permet de restreindre l'étude à l'intervalle $[0; \pi]$ avant de compléter la courbe par symétrie par rapport à l'origine (il y a d'autres symétries à trouver pour les plus courageux). On calcule $x'(t) = a\cos^2(t)(\sin(t) - \cos(t)) - a\sin^2(t)(\sin(t) - \cos(t)) + a\sin(t)\cos(t)(\cos(t) + \sin(t)) = a(2\cos^2(t)\sin(t) + 2\sin^2(t)\cos(t) - \cos^3(t) - \sin^3(t)) = a(\cos(t) + \sin(t))(2\cos(t)\sin(t) - \cos^2(t) + \cos(t)\sin(t) - \sin^2(t)) = a(\cos(t) + \sin(t))(3\cos(t)\sin(t) - 1)$. Cette dérivée s'annule lorsque $t = -\frac{3\pi}{4}$ (on a alors $x(t) = -a \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2} = -\frac{a\sqrt{2}}{2}$, et $y(t) = 0$. Elle s'annule également pour les valeurs beaucoup moins sympathiques pour lesquelles $\cos(t)\sin(t) = \frac{1}{3}$, ce qui implique en élevant au carré $(1 - \sin^2(t))\sin^2(t) = \frac{1}{9}$, donc $\sin^2(t)$ est solution de l'équation $X^2 - X + \frac{1}{9} = 0$. Ce trinome a pour discriminant $\Delta = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$, et admet pour racines $X_1 = \frac{1 + \frac{\sqrt{5}}{3}}{2} = \frac{3 + \sqrt{5}}{6}$, et $X_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{6}$. Ces deux nombres sont compris entre 0 et 1, et donnent donc deux valeurs possibles pour $\sin(t)$ (qui est toujours

positif sur notre intervalle d'étude), soit deux autres valeurs d'annulation de x'. Donner des formules exactes est très compliqué et n'est pas indispensable. On sait que pour ces valeurs, $\cos(t)\sin(t) = \dfrac{1}{3}$, donc $(\cos(t)+\sin(t))^2 = \cos^2(t)+\sin^2(t)+2\cos(t)\sin(t) = 1+\dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{3}$, donc $\cos(t)+\sin(t) = \sqrt{\dfrac{5}{3}}$ (les deux valeurs de $\cos(t)$ et $\sin(t)$ sont positives pour avoir un produit égal à $\dfrac{1}{3}$), puis $y(t) = a\sin(t)\cos(t)(\cos(t)+\sin(t)) = \dfrac{a\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$. De même, on calcule $(\sin(t)-\cos(t))^2 = 1-2\sin(t)\cos(t) = \dfrac{1}{3}$, donc $\sin(t)-\cos(t) = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (ici, les deux valeurs sont possibles, elles donneront les abscisses des deux points où x' s'annule), soit $x(t) = \pm\dfrac{a}{3\sqrt{3}}$. On a donc les coordonnées des trois points de la courbe (sur l'intervalle $[0;\pi]$) ayant une tangente verticale (calculs sympathiques, n'est-ce pas ?).

Enchainons avec $y'(t) = a\cos^2(t)(\cos(t)+\sin(t)) - a\sin^2(t)(\cos(t)+\sin(t)) + a\sin(t)\cos(t)(\cos(t)-\sin(t)) = \cos^3(t)-\sin^3(t)+2\cos^2(t)\sin(t)-2\cos(t)\sin^2(t) = (\cos(t)-\sin(t))(\cos^2(t)+\cos(t)\sin(t)+\sin^2(t)+2\sin(t)\cos(t)) = (\cos(t)-\sin(t))(1+3\cos(t)\sin(t))$. De façon très similaire à ce qu'on a fait ci-dessus, on a une racine facile en $\dfrac{\pi}{4}$, pour laquelle on a $x(t)=0$ et $y(t) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, et deux racines nettement moins sympathiques vérifiant $\cos(t)\sin(t) = -\dfrac{1}{3}$. On calcule comme précédemment $(\cos(t)-\sin(t))^2 = \dfrac{5}{3}$, soit $\cos(t)-\sin(t) = -\sqrt{\dfrac{5}{3}}$ (cette fois-ci, $\cos(t)$ est négatif et $\sin(t)$ positif) ; et $\cos(t)+\sin(t) = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, dont on déduit que $x(t) = -\dfrac{a\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$ et $y(t) = \pm\dfrac{a}{3\sqrt{3}}$. Ce sera peut-être plus lisible sur un tableau récapitulatif (les valeurs de t annulant les dérivées sont simplement notées t_1, t_2, t_3 et t_4, leur position par rapport à $\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{3\pi}{4}$ sont imposées par la cohérence des valeurs dans le tableau) :

t	0		t_1		$\frac{\pi}{4}$		t_2		t_3		$\frac{3\pi}{4}$		t_4		π
$x'(t)$	-1	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	1
x	0	↘	$-\frac{a}{3\sqrt{3}}$	↗	0	↗	$\frac{a}{3\sqrt{3}}$	↘	$-\frac{a\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$	↘	$-\frac{a\sqrt{2}}{2}$	↗	$-\frac{a\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$	↗	0
$y'(t)$	1	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	-1
y	0	↗	$\frac{a\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$	↗	$a\frac{\sqrt{2}}{2}$	↘	$\frac{a\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$	↘	$-\frac{a}{3\sqrt{3}}$	↗	0	↗	$\frac{a}{3\sqrt{3}}$	↘	0

Pour terminer l'étude, on peut signaler qu'on repasse par l'origine lorsque $t = \dfrac{\pi}{2}$, avec une tangente dirigée par $(-1,-1)$. Voici la courbe correspondante, avec les tangentes à l'astroide orthogonales tracées depuis un des points de la courbe (qui n'est pas tout à fait sur l'astroïde contrairement à ce que la figure peut laisser croire) :



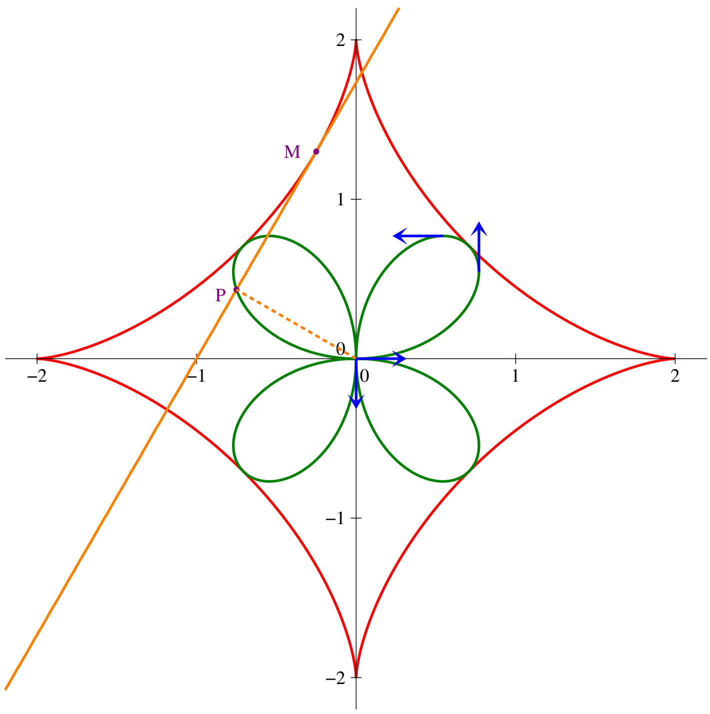
Justement, on nous demande dans l'énoncé de trouver les points communs entre cette courbe et l'astroïde. Au vu de ce qui a été dit sur les tangentes orthogonales, on cherche les valeurs de t pour lesquels le point de l'astroïde appartient à la tangente issue de $M\left(t+\frac{\pi}{2}\right)$ (ou la même chose avec un $-\frac{\pi}{2}$), qui a pour équation $\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)x+\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)y = a\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)$, soit $\cos(t)x-\sin(t)y = -a\cos(t)\sin(t)$. On obtient donc l'équation $a\cos^4(t) - a\sin^4(t) = -a\cos(t)\sin(t)$, soit en simplifiant par a, $(\cos^2(t)+\sin^2(t))(\cos^2(t)-\sin^2(t)) = -\cos(t)\sin(t)$, donc, en multipliant tout par 2, $2\cos(2t) = -\sin(2t)$. Cette condition implique $4\cos^2(2t) = \sin^2(2t) = 1-\cos^2(2t)$, donc $\cos^2(2t) = \pm\frac{1}{5}$. On trouve ainsi des valeurs de t passionnantes comme $\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. Comme on peut le constater sur la figure (et comme les symétries permettent de le prouver), il y a au total huit points d'intersection notre courbe et l'astroide.

5. Le vecteur $\overrightarrow{OP(t)}$ doit être normal à la tangente en $M(t)$, donc $P(t)$ a des coordonnées de la forme $(k\sin(t), k\cos(t))$ vu les calculs menés à la question 2. Comme par ailleurs $P(t)$ appartient à la tangente, il vérifie $k\sin^2(t)+k\cos^2(t) = a\sin(t)\cos(t)$, soit $k = a\sin(t)\cos(t)$. Le point P a donc pour coordonnées $(a\sin^2(t)\cos(t), a\cos^2(t)\sin(t))$.
Là encore, on ne reconnait rien de très évident. Allons-y pour une nouvelle étude de courbe paramétrée. Les deux fonctions coordonnées sont 2π-périodiques, x est paire et y impaire, on peut étudier sur $[0;\pi]$ et compléter par symétrie par rapport à (Ox). De plus, $x(\pi-t) = -x(t)$ et $y(\pi-t) = y(t)$ donc il y a une symétrie par rapport à (Oy) qui permet de réduire à $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ (les plus motivés diviseront encore une fois l'intervalle). On calcule $x'(t) = 2a\sin(t)\cos^2(t) - a\sin^3(t) = 2a\sin(t)(1-\sin^2(t)) - a\sin^3(t) = 2a\sin(t) - 3a\sin^3(t) = a\sin(t)(2-3\sin^2(t))$. Cette dérivée s'annule en 0, mais aussi quand $\sin^2(t) = \frac{2}{3}$. On a alors $\cos(t) = \sqrt{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. On peut alors calculer les coordonnées du point correspondant sur l'arc : $x(t) = a\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2a}{3\sqrt{3}}$, et $y(t) = a\times\frac{1}{3}\times\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$. Passons à la deuxième coordonnée : $y'(t) = -2a\cos(t)\sin^2(t) + a\cos^3(t) = a\cos(t)(3\cos^2(t)-2)$. Cette deuxième dérivée s'annule en $\frac{\pi}{2}$, mais également lorsque

$\cos^2(t) = \dfrac{2}{3}$. On calcule de façon très similaire à ce qu'on vient de faire les coordonnées correspondantes, qui sont d'ailleurs les mêmes, mais inversées. On peut résumer tout cela dans le tableau suivant :

t	0		$\arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$		$\arccos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0	$+$	0	$-$		$-$	
x	0	$\nearrow$	$\frac{2a}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	$\frac{a\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	0
$y'(t)$		$+$		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{a\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$	$\nearrow$	$\frac{2a}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	0

On peut enfin tracer la courbe suivante (j'ai indiqué la construction du point P lorsque $t = \dfrac{2\pi}{3}$). C'est joli non ?



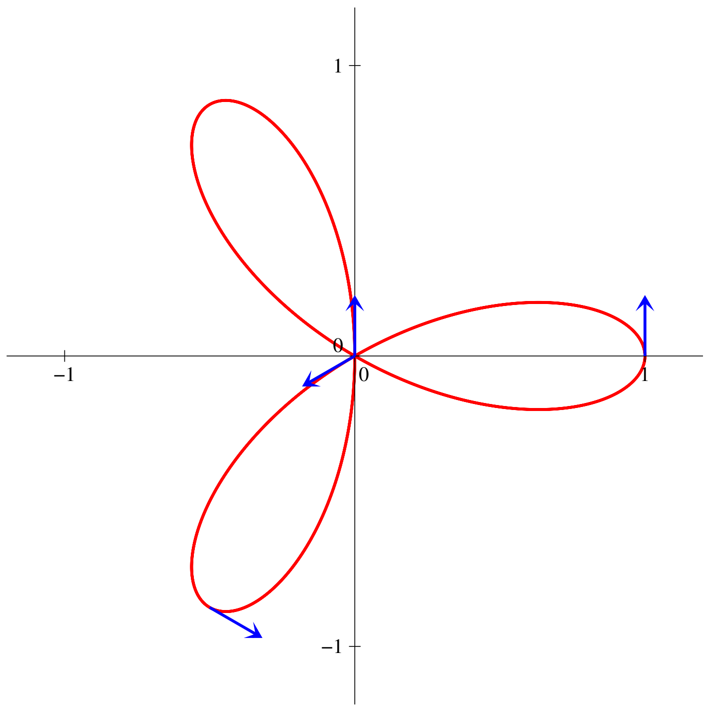
Exercice 6 (* à ***)

1. La fonction est 2π-périodique, on restreint l'étude à $[-\pi;\pi]$. Elle est paire, on peut se contenter de $[0;\pi]$ en complétant par symétrie par rapport à (Ox). De plus, $\rho(\pi-\theta) = \cos(3\pi - 3\theta) = -\cos(3\theta) = -\rho(\theta)$, ce qui indique également une symétrie par rapport à (Ox) et permet surtout de réduire encore l'intervalle à $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$. La fonction est évidemment dérivable, et $\rho'(\theta) = -3\sin(3\theta)$, qui s'annule lorsque $3\theta \equiv 0[\pi]$, soit $\theta \equiv 0\left[\dfrac{\pi}{3}\right]$, donc (sur notre intervalle d'étude)

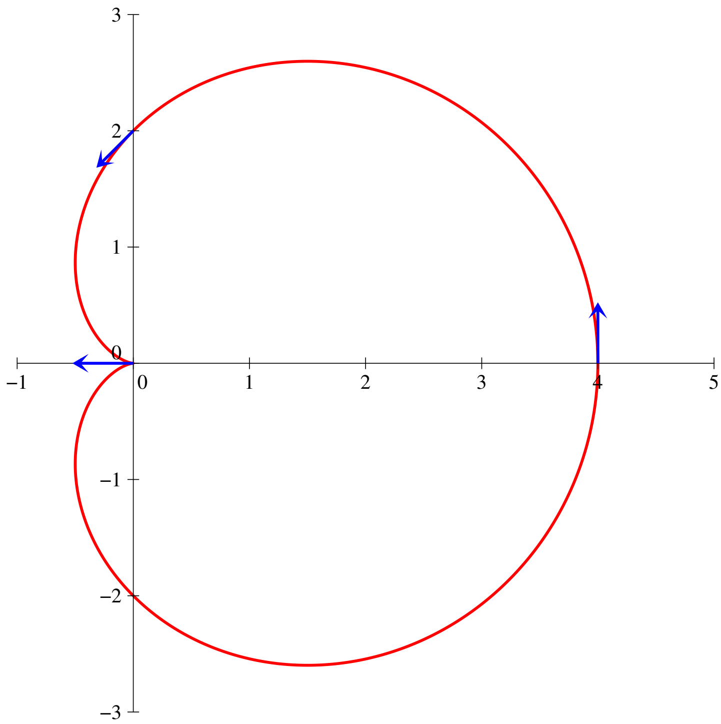
en 0 et en $\frac{\pi}{3}$. La fonction elle-même s'annule en $\frac{\pi}{6}$ et en $\frac{\pi}{2}$. On peut dresser le tableau de variations suivant :

θ	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$\rho'(\theta)$	0	$-$	-3	$-$	0	$+$	3
ρ	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

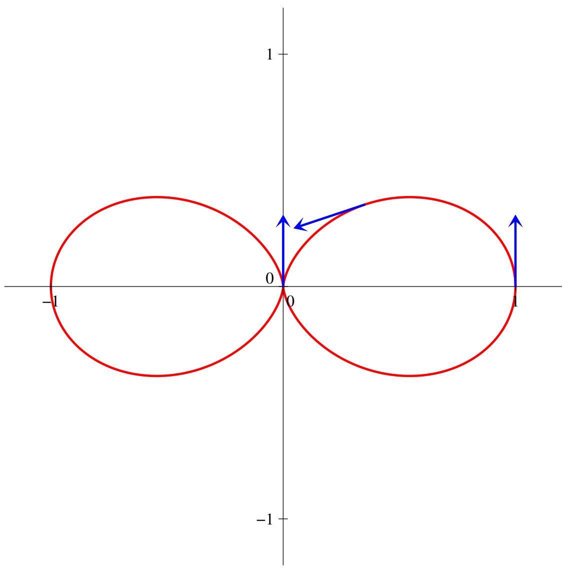
Les quatre points obtenus ont des tangentes radiales ou orthoradiales, il n'y a pas de point stationnaire, on peut tracer tranquillement la courbe :



2. La fonction est 2π-périodique et paire, on étudie sur $[0;\pi]$ et on complètera par symétrie par rapport à (Ox). On calcule $\rho'(\theta) = -a\sin(\theta)$, qui est toujours négative sur $[0;\pi]$, s'annulant en 0 et en π. La fonction elle-même s'annule pour $\theta = \pi$, où on a donc un point stationnaire. La fonction ρ étant toujours positive puisque $1 + \cos(\theta) \geqslant 0$, il n'y a pas de changement de signe, on est en présence d'un point de rebroussement de première espèce. Comme on ne dispose que de très peu de points pour tracer la courbe, on peut regarder ce qui se passe en $\frac{\pi}{2}$: $\rho\left(\frac{\pi}{2}\right) = a$ (en 0, $\rho(0) = 2a$), et $\rho'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -a$. Le vecteur tangent en $\frac{\pi}{2}$ sera donc proportionnel au vecteur $(-1,-1)$ (dans le repère cartésien). Voici la courbe pour $a = 2$:



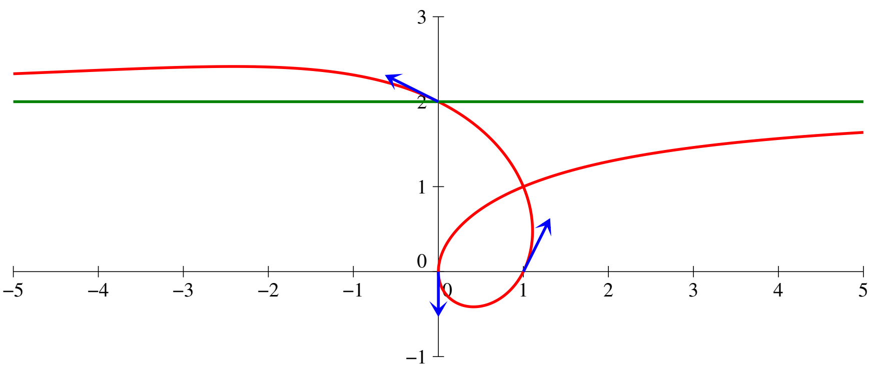
3. La fonction est π-périodique (à cause du carré), donc la courbe sera symétrique par rapport à l'origine. De plus, elle est paire, on peut donc restreindre l'étude à $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et compléter par une symétrie par rapport à (Ox) (en plus de celle par rapport à O). On calcule $\rho'(\theta) = -2\sin(\theta)\cos(\theta)$, qui s'annule en 0 et en $\frac{\pi}{2}$. La fonction elle-même s'annule en $\frac{\pi}{2}$, qui constitue donc un point singulier qui sera un point de rebroussement de première espèce (la fonction étant bien sûr toujours positivs). On a par ailleurs $\rho(0) = 1$, on peut tracer la courbe (le rebroussement n'est pas vraiment apparent car le sens de parcours de la courbe n'est pas évident : entre 0 et π, on parcourt les deux morceaux situés au-dessus de l'axe des abscisses). Comme on manque de point on peut calculer $\rho\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$, et $\rho'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$.



4. Cette fonction n'est pas définie lorsque $\frac{\theta}{2} \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, soit $\theta \equiv \pi[2\pi]$. Elle est par ailleurs 2π-périodique puisque la fonction tan est π-périodique. Pas d'autre symétrie en vue, on va étudier

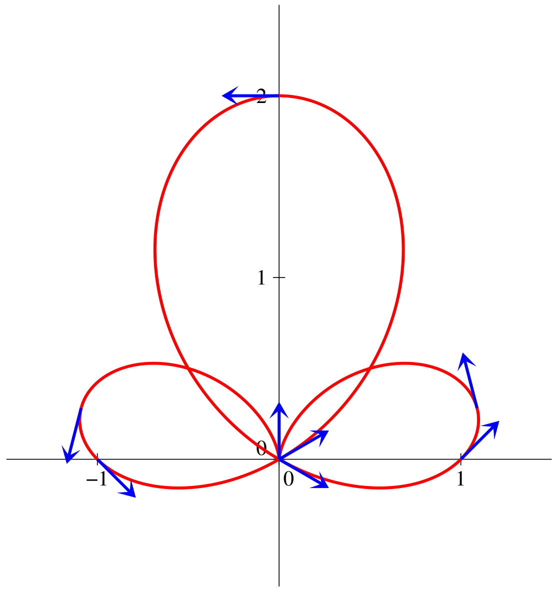
sur $]-\pi;\pi[$. On calcule $\rho'(\theta) = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$, qui est toujours strictement positive. Les limites de la tangente permettent d'obtenir $\lim\limits_{\theta\to\pi^-}\rho(\theta) = +\infty$, et $\lim\limits_{\theta\to-\pi^+}\rho(\theta) = -\infty$. La fonction s'annule donc nécessairement une fois sur notre intervalle d'étude, quand $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = -1$, soit $\frac{\theta}{2} = -\frac{\pi}{4}$, donc $\theta = -\frac{\pi}{2}$. On peut étudier la branche infinie en π (c'est identique en $-\pi$) en calculant $\rho(\theta)\sin(\theta+\pi) = -\sin(\theta)\left(1+\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = -\sin(\theta) - \sin(\theta)\frac{\sin(\frac{\theta}{2})}{\cos(\frac{\theta}{2})}$. En utilisant les formules de duplication, $\sin(\theta) = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$, ce qui permet de simplifier en $-\sin(\theta) - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$, qui a pour limite -2 quand θ tend vers $\pm\pi$. On a donc une asymptote de direction horizontale, à distance -2 de l'axe des abscisses dans la direction de $\overrightarrow{v}_\pi = -\overrightarrow{j}$. Autrement dit, l'asymptote est la droite d'équation $y = 2$.

Pour compléter l'étude, on va indiquer deux points supplémentaires : quand $\theta = 0$, $\rho(0) = 1$ et $\rho'(0) = \frac{1}{2}$. La tangente en 0 est donc dirigée par le vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{u}_0 + \overrightarrow{v}_0 = \frac{1}{2}\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$. Deuxième point pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, on a alors $\rho(\theta) = 1 + \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$, et $\rho'(\theta) = \frac{1}{2}(1+1) = 1$. La tangente en ce point est donc dirigée par $\overrightarrow{u}_{\frac{\pi}{2}} + 2\overrightarrow{v}_{\frac{\pi}{2}} = -2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$.

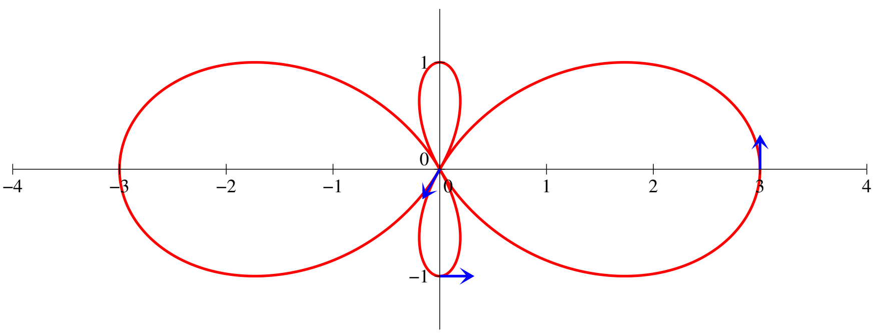


5. La fonction est 2π-périodique mais n'a pas de parité particulière. Il existe une symétrie, mais pas si simple à trouver : $\rho(\pi-\theta) = \rho(\theta)$, ce qui donne une symétrie par rapport à (Oy) et permet de se contenter d'une étude sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ (attention, on ne peut pas prendre $[0;\pi]$ qui est invariant par la symétrie). Nous allons quand même faire l'étude sur $[0;2\pi]$. On calcule $\rho'(\theta) = \cos(\theta) - 2\sin(2\theta) = \cos(\theta) - 4\sin(\theta)\cos(\theta) = \cos(\theta)(1-4\sin(\theta))$. La dérivée s'annule en $\frac{\pi}{2}$ et en $\frac{3\pi}{2}$, mais aussi lorsque $\sin(\theta) = \frac{1}{4}$, ce qui se produit pour deux valeurs $\theta_1 < \frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2} < \theta_2 < \pi$. Pour ces deux valeurs, on a $\rho(\theta) = \sin(\theta) + 1 - 2\sin^2(\theta) = \frac{1}{4} + 1 - \frac{2}{16} = \frac{9}{8}$. On ajoutera les valeurs faciles en 0, π et 2π dans le tableau de variations. Notons par ailleurs que $\rho(\theta) = 0$ lorsque $\sin(\theta)$ est solution de l'équation $X + 1 - 2X^2 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 1+8 = 9$, et admet pour racines $X_1 = \frac{-1-3}{-4} = 1$, et $X_2 = \frac{-1+3}{-4} = -\frac{1}{2}$. Autrement dit, ρ s'annule pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ (qui sera un point stationnaire, en l'occurence un point de rebroussement de première espèce au vu du tableau de variations), et pour $\theta = \frac{7\pi}{6}$ et $\theta = \frac{11\pi}{6}$. Ouf, voilà le tableau :

θ	0		θ_1		$\frac{\pi}{2}$		θ_2		π		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
$\rho'(\theta)$	1	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	-1	$-$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$-$	0	$+$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$+$	1
ρ	1	$\nearrow$	$\frac{9}{8}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{9}{8}$	$\searrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

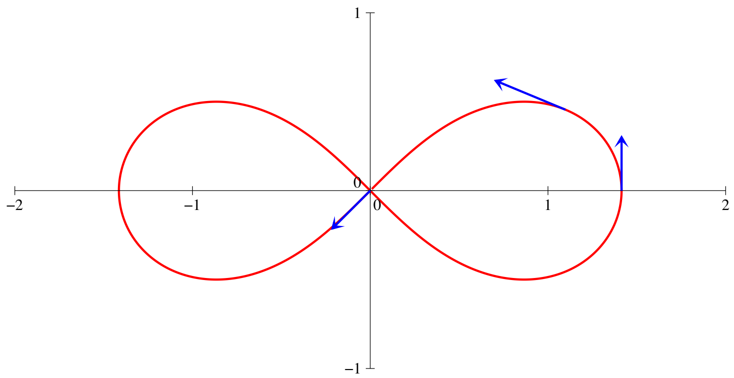


6. En utilisant les formules de triplication, on peut écrire $\rho(\theta) = 3 - 4\sin^2(\theta)$, ce qui prouve que la fonction est toujours définie (et accessoirement simplifie les calculs). La fonction est 2π-périodique et paire, on peut étudier sur $[0; \pi]$ et compléter par symétrie par rapport à (Ox). On a également $\rho(\pi - \theta) = \rho(\theta)$, donc il y a une seconde symétrie, par rapport à (Oy), qui permet de restreindre encore à $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. On calcule $\rho'(\theta) = -8\sin(\theta)\cos(\theta)$, qui est toujours négative sur notre intervalle d'étude, mais s'annule en 0 et en $\frac{\pi}{2}$. La fonction elle-même s'annule en $\frac{\pi}{3}$ (pour cette valeur il est plus facile de regarder les valeurs d'annulation de $\sin(3\theta)$). On calcule $\rho(0) = 3$ et $\rho\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ et on trace la courbe :



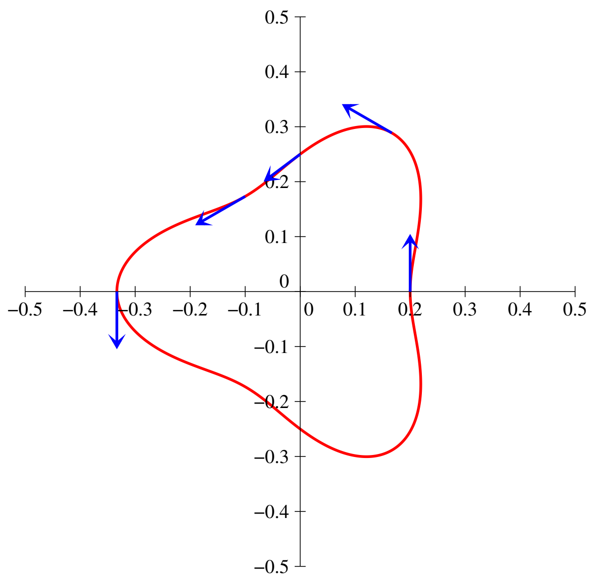
7. Cette fonction est définie lorsque $2\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] [2\pi]$, soit $\theta \in \left[\frac{\pi}{4}\right] [\pi]$. Elle est par ailleurs 2π-périodique et paire, ce qui permet de se restreindre à $[0; \pi]$ (enfin, plutôt aux morceaux dans cet intervalle où la fonction est définie). On peut même exploiter $\rho(\pi - \theta) = \rho(\theta)$ (puisque $\cos(2\pi - 2\theta) = \cos(-2\theta) = \cos(2\theta)$) pour constater que la courbe est en fait symétrique par

rapport à chacun des deux axes, et étudier seulement sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ (inutile d'aller plus loin, ρ n'est pas définie entre $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$). On calcule $\rho'(\theta) = \frac{-4\sin(2\theta)}{2\sqrt{2\cos(2\theta)}} = -\frac{2\sin(2\theta)}{\sqrt{2\cos(2\theta)}}$. Cette dérivée est négative sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right[$, mais n'est pas définie en $\frac{\pi}{4}$. On admettra que pour cette valeur, pour laquelle ρ s'annule, on a tout de même une tangente radiale. La dérivée, quant à elle, s'annule en 0, où on a $\rho(0) = \sqrt{2}$. Pour compléter un peu, on peut calculer $\rho\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{\sqrt{2}}$, et $\rho'\left(\frac{\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{2}}} = -\sqrt{\sqrt{2}}$ (autrement dit, la tangente sera dirigée par $-\overrightarrow{u}_{\frac{\pi}{8}} + \overrightarrow{v}_{\frac{\pi}{8}}$). La courbe obtenue est consituée de l'ensemble des points M du plan vérifiant $MF \times MF' = 1$, en posant $F(1,0)$ et $F'(-1,0)$. C'est par exemple évident pour l'origine pour laquelle on a $MF = MF' = 1$, mais on peut le constater sur le « sommet » $A(0, \sqrt{2})$: on a alors $MF = \sqrt{2}-1$ et $MF' = \sqrt{2}+1$, soit $MF \times MF' = (\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = 2-1 = 1$.



8. La fonction est définie partout, 2π-périodique (et même $\frac{2\pi}{3}$ périodique, mais l'invariance de la courbe par une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ n'est pas vraiment évidente à exploiter) et paire, on va étudier sur $[0;\pi]$ et compléter par symétrie par rapport à (Ox). On calcule $\rho'(\theta) = \frac{3\sin(3\theta)}{(4+3\cos(\theta))^2}$, Cette dérivée est du signe de $\sin(3\theta)$, donc change de signe en 0, $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$ (et π). On calcule sans difficulté $\rho(0) = \frac{1}{5}$, $\rho\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{3}$, $\rho\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{5}$ et $\rho(\pi) = \frac{1}{3}$ (cohérent avec la période $\frac{2\pi}{3}$). La fonction elle-même ne s'annule évidemment jamais, on va ajouter une valeur simple à calculer : $\rho\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4}$ et $\rho'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{3}{16}$.

θ	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$\rho'(\theta)$	0	$+$	0	$-$	$-\frac{3}{16}$	$-$	0	$+$	0
ρ	$\frac{1}{5}$	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	$\frac{1}{5}$	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$

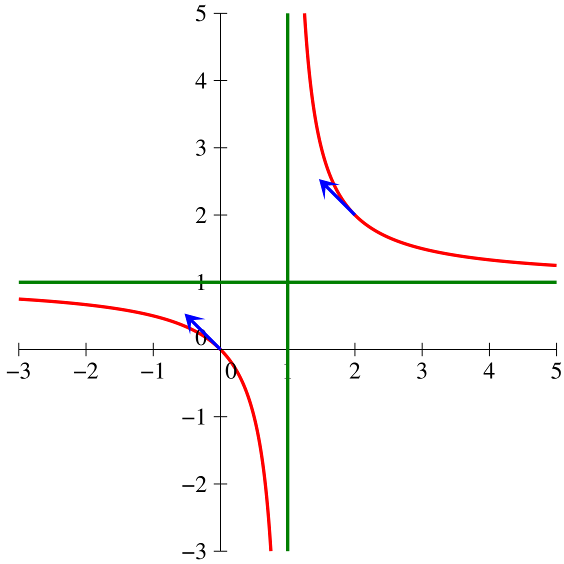


9. La fonction n'est pas définie lorsque le sinus ou le cosinus s'annule donc $\mathcal{D}_\rho = \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Elle est 2π périodique, et $\rho(\theta+\pi) = -\rho(\theta)$, ce qui permet de se restreindre à $[0;\pi]$ (la courbe parcourt ensuite la même trajectoire, même pas besoin de symétrie). On calcule $\rho'(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos^2(\theta)} + \frac{-\cos(\theta)}{\sin^2(\theta)} = \frac{\sin^3(\theta)-\cos^3(\theta)}{\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)}$. Cette dérivée est simplement du même signe que $\sin(\theta)-\cos(\theta)$, elle s'annule en particulier en $\frac{\pi}{4}$ (sur notre intervalle d'étude, c'est la seule valeur), où on a $\rho\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\times\frac{2}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$. La fonction elle-même s'annule quand $\sin(\theta) = -\cos(\theta)$, donc en $\frac{3\pi}{4}$.

   Il y a deux branches infinies à étudier. En 0 (ou en π, c'est la même), on a $\rho(\theta)\sin(\theta) = \tan(\theta)+1$, qui a donc pour limite 1. On en déduit la présence d'une asymptote horizontale d'équation $y=1$. De même, en $\frac{\pi}{2}$, $\rho(\theta)\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) = -\rho(\theta)\cos(\theta) = -1-\frac{1}{\tan(\theta)}$, qui a cette fois-ci pour limite -1. Il y a donc une deuxième asymptote, verticale, d'équation $x=1$ (on est à distance -1 dans la direction de $\overrightarrow{v}_{\frac{\pi}{2}} = -\overrightarrow{i}$).

θ	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$\rho'(\theta)$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	$2\sqrt{2}$	$+$	‖
ρ	‖ $+\infty$	↘	$2\sqrt{2}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$ ‖

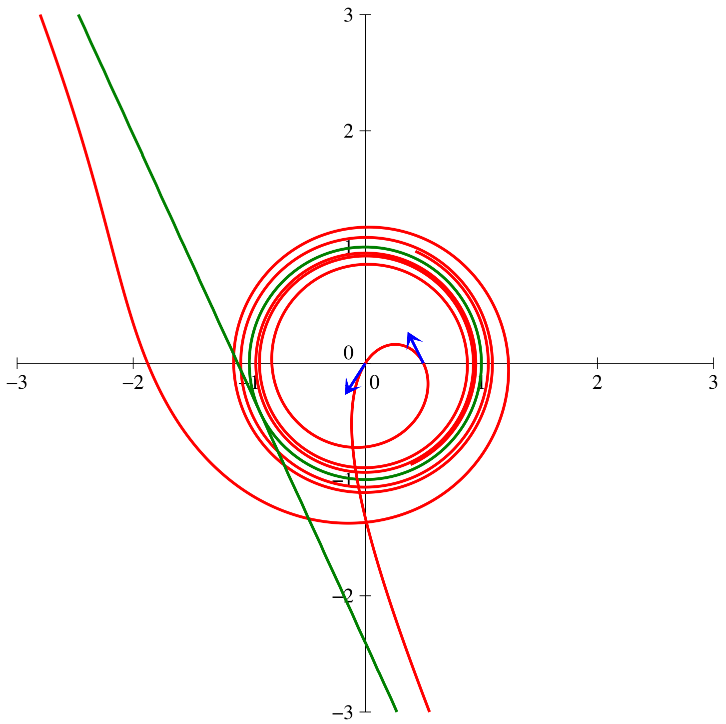
Tout ça ressemble fort à une hyperbole ...



10. Il fallait bien mettre dans le lot une courbe un peu moins ordinaire. La fonction est définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$. Elle a pour dérivée $\rho'(\theta) = -\dfrac{1}{(\theta-2)^2}$, qui est toujours négative. La fonction s'annule par ailleurs lorsque $\theta - 2 = -1$, soit $\theta = 1$ (un radiant, ce qui n'est pas très pratique à placer comme angle). En 0, par exemple, on a $\rho(0) = \dfrac{1}{2}$, et $\rho'(0) = -\dfrac{1}{4}$.

θ	$-\infty$		1		2		$+\infty$
ρ	1	↘	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

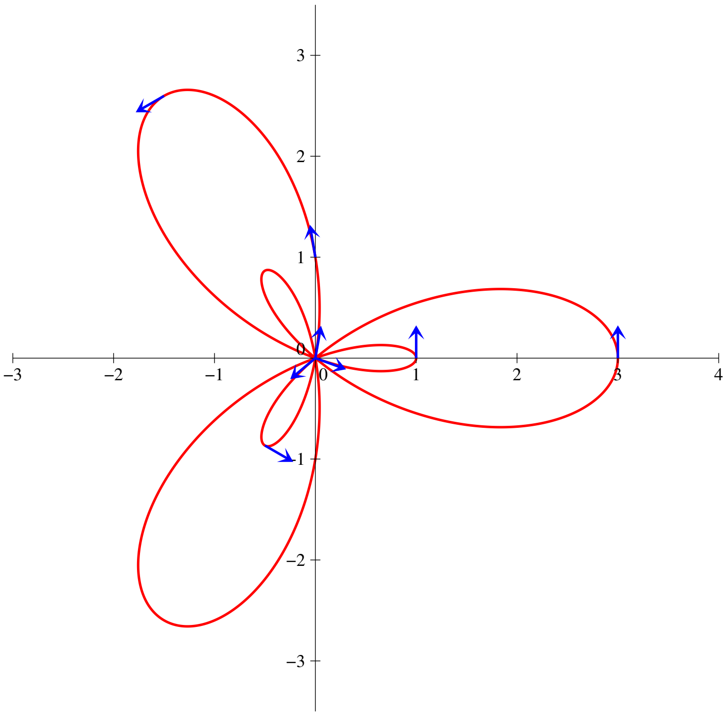
Lorsque θ tend vers 2, on a $\rho(\theta)\sin(\theta-2) = \sin(\theta-2) + \dfrac{\sin(\theta-2)}{\theta-2}$. Le premier terme tend 0 et le second vers 1 (limite classique $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$), il y a donc une asymptote oblique d'équation normale $x\sin(2) - y\cos(2) - 1 = 0$ (attention, dans l'équation normale, l'angle qui apparait dans la formule correspond à l'angle entre l'horizontale et la normale à la droite considérée, d'où ici le signe $-$ devant le terme en y et l'inversion du sin et du cos). On a par ailleurs, en $\pm\infty$, le cercle trigonométrique qui est cercle asymptote à la courbe. Pas facile de faire un tracé raisonnable sans outil informatique sous la main :



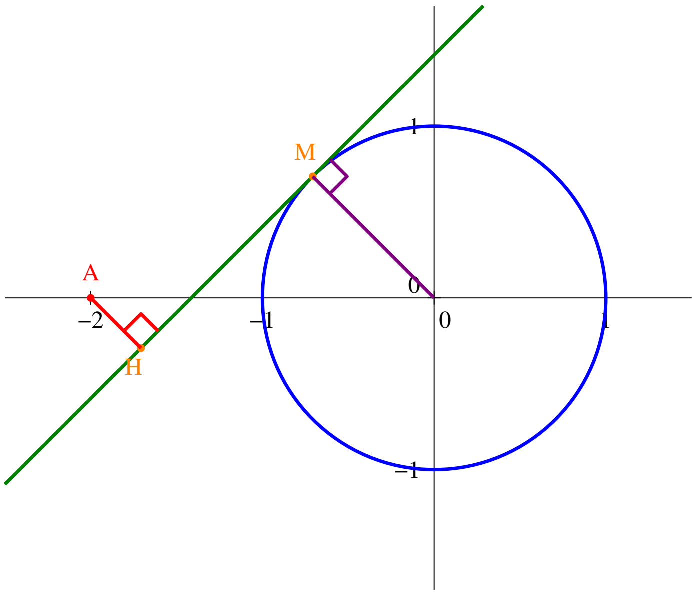
11. La fonction est 2π-périodique (et même un peu moins, comme pour la numéro 8), et paire, on va donc étudier sur $[0;\pi]$ et compléter par symétrie par rapport à (Ox). La dérivée $\rho'(\theta) = -6\sin(3\theta)$ s'annule pour $\theta \equiv 0\left[\frac{\pi}{3}\right]$, la fonction elle-même s'annule lorsque $\cos(3\theta) = -\frac{1}{2}$, donc $3\theta \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$, ce qui donne dans notre intervalle $\theta = \frac{2\pi}{9}$ et $\theta = \frac{8\pi}{9}$; ou bien $3\theta \equiv \frac{4\pi}{3}[2\pi]$, soit $\theta = \frac{4\pi}{9}$ (les autres valeurs sont supérieures à π). On peut dresser le tableau suivant :

θ	0		$\frac{2\pi}{9}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{4\pi}{9}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{8\pi}{9}$		π
$\rho'(\theta)$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0
ρ	3	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

Pour compléter, on peut toujours calculer $\rho\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ et $\rho'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 6$.



Exercice 7 (**)

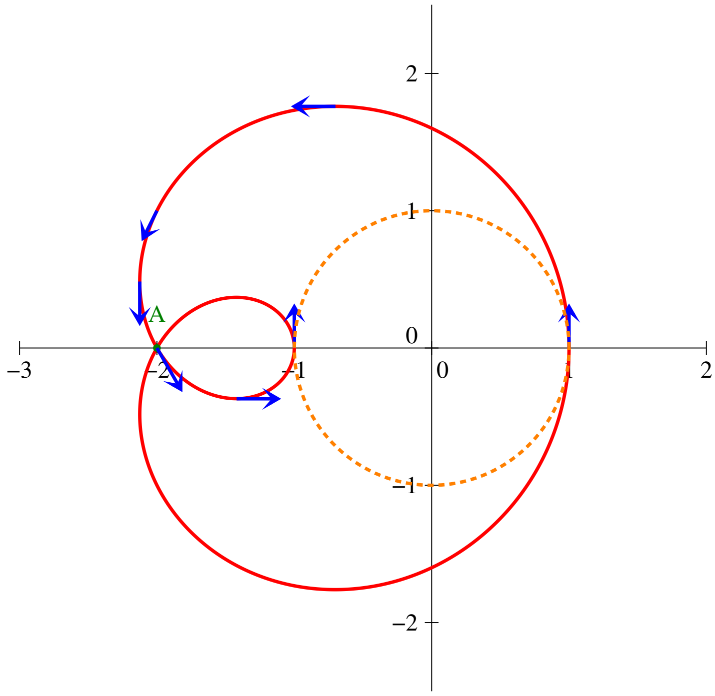


Si on paramètre le cercle trigonométrique par un angle t variant entre 0 et 2π, la tangente en son point de paramètre t a pour équation $x\cos(t) + y\sin(t) = 1$. En notant $H(x, y)$ le projeté orthogonal recherché et $M(\cos(t), \sin(t))$ le point du cercle où on a tracé la tangente, on doit par ailleurs avoir $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{AH}$ qui sont colinéaires (puisque tous deux sont orthogonaux à la direction de la tangente), soit $\det(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{OM}) = (x+2)\sin(t) + y\cos(t) = 0$. Le système constitué des deux équations obtenues se résout aisément, on peut par exemple multiplier la première équation par $\cos(t)$ et la seconde par $\sin(t)$, puis additionner les deux pour trouver $x(\cos^2(t) + \sin^2(t)) + 2\sin^2(t) = \cos(t)$, soit $x = \cos(t) - 2\sin^2(t)$. De même, en multipliant par $\sin(t)$ la première, par $\cos(t)$ la deuxième et en soustrayant, on a cette fois $y = \sin(\theta)(1 + 2\cos(\theta))$. Il ne reste donc plus qu'à étudier la courbe paramétrée $\left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & \cos(t) - 2\sin^2(t) \\ y(t) & = & \sin(t)(1 + 2\cos(t)) \end{array} \right.$. On peut constater qu'on obtient les bonnes coordonnées du point H pour des valeurs simples de t. Par exemple, pour $t = \dfrac{\pi}{2}$, on trouve $H(-2, 1)$, ce qui est normal pusique la tangente au cercle est alors horizontale d'équation $y = 1$.

Les deux fonctions sont évidemment 2π-périodiques. De plus, x est paire et y impaire (ce qui doit vous sembler normal vu la construction effectuée et la position du point A sur l'axe des abscisses), on peut donc étudier sur $[0; \pi]$ et compléter la courbe par symétrie par rapport à (Ox). On calcule $x'(t) = -\sin(t) - 4\sin(t)\cos(t) = -\sin(t)(1 + 4\cos(t))$. Cette dérivée est (sur notre intervalle) du signe opposé à $1 + 4\cos(t)$, elle s'annule en 0 et π mais aussi lorsque $\cos(t) = -\dfrac{1}{4}$ (ce qui se produit une fois sur notre intervalle). On a alors $\sin^2(t) = 1 - \cos^2(t) = \dfrac{15}{16}$, soit $\sin(t) = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$. On en déduit que $x(t) = -\dfrac{1}{4} - 2 \times \dfrac{15}{16} = -\dfrac{17}{8}$, et $y(t) = \dfrac{\sqrt{15}}{4}\left(1 - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{15}}{8} \simeq 0.48$. Ensuite, on passe à $y'(t) = \cos(t)(1 + 2\cos(t)) - 2\sin^2(t) = \cos(t) + 2\cos^2(t) - 2 + 2\cos^2(t) = 4\cos^2(t) + \cos(t) - 2$. En posant $X = \cos(t)$, on a un trinôme de discriminant $\Delta = 1 + 32 = 33$, admettant deux racines $X_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{33}}{8}$, et $X_2 = \dfrac{-1 - \sqrt{33}}{8}$. Ces valeurs absolument réjouissantes donnent deux possibilités d'annulation pour $y(t)$ (elles sont toutes les deux entre -1 et 1 puisque $\sqrt{33} \in [5; 6]$), en des valeurs t_1 et t_2 qui elle-mêmes nous donnent deux points de la courbe ayant des tangentes horizontales, de coordonnées approximatives (faire des calculs exacts est ici vraiment sans intérêt) $(-0.7, 1.76)$ et $(-1.42, -0.37)$.

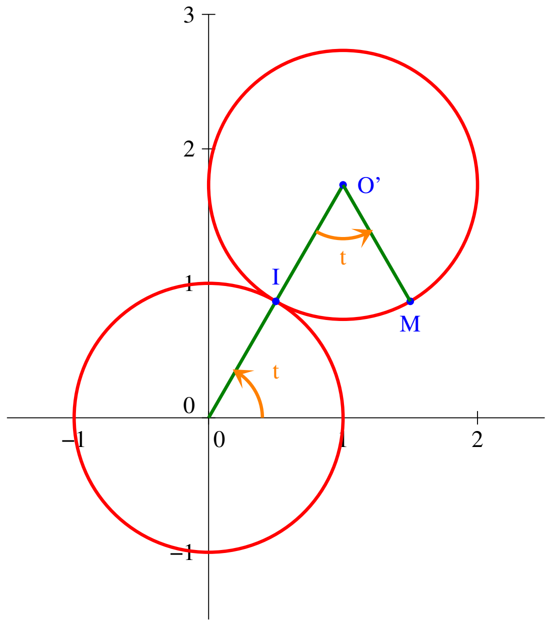
t	0		t_1		$\arccos\left(-\dfrac{1}{4}\right)$		t_2		π
$x'(t)$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0
x	1	$\searrow$	-0.7	$\searrow$	$-\dfrac{17}{8}$	$\nearrow$	-1.42	$\nearrow$	-1
$y'(t)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	0	$\nearrow$	1.76	$\searrow$	0.48	$\searrow$	-0.37	$\nearrow$	0

On peut ajouter le vecteur tangent pour $t = \dfrac{\pi}{2}$ (où on a déjà vu que la courbe passait par le point $(-2, 1)$) : $x'(t) = -1$ et $y'(t) = -2$, donc la tangente est dirigée par $(-1, -2)$. On peut aussi constater qu'on passe par le point A lorsque $t = \dfrac{2\pi}{3}$, et qu'on a alors $x'(t) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $y'(t) = -\dfrac{3}{2}$. La tangente est donc dirigée par $(\sqrt{3}, -3)$. Voici une allure de la courbe finale :



Exercice 8 (**)

Pour fixer les choses, on va prendre pour le cercle fixe le cercle trigonométrique, et on va supposer que le cercle mobile se situe initialement à droite du cercle trigonométrique (ayant donc pour centre $(2,0)$), et que le point M dont on cherche à étudier le mouvement est initialement le point de tangence des deux cercles (donc le point de coordonnées $(1,0)$). On utilise le paramétrage classique du cercle trigonométrique $x = \cos(t)$ et $y = \sin(t)$, et on peut alors tracer la figure suivante (ici avec $t = \dfrac{\pi}{3}$) :

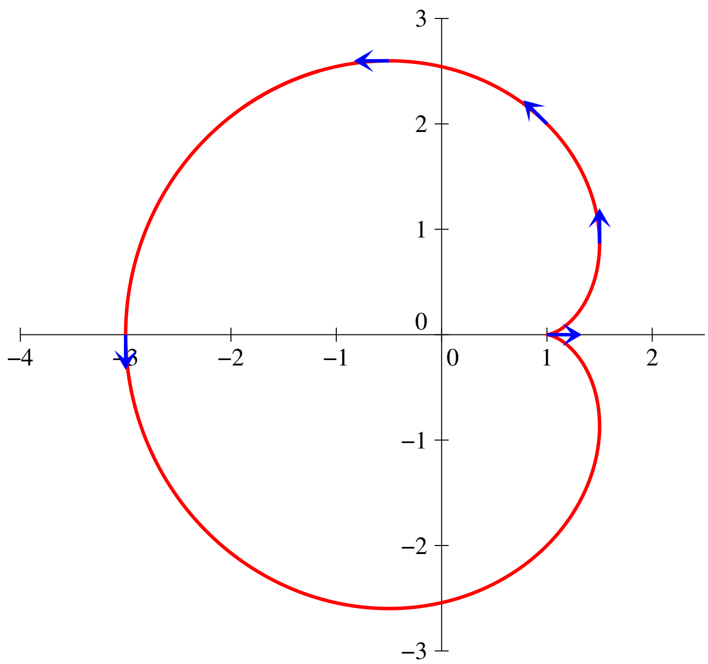


En notant I le milieu du segment reliant le centre des deux cercles, on aura $I(\cos(t), \sin(t))$ et $O'(2\cos(t), 2\sin(t))$. Par ailleurs, puisqu'on roule sans glisser, l'angle $(\widehat{\overrightarrow{O'I}, \overrightarrow{O'M}}) = t$. Autrement dit, $(\widehat{\overrightarrow{O'M}, \overrightarrow{i}}) = (\widehat{\overrightarrow{O'I}, \overrightarrow{i}}) + t = t - \pi + t = 2t - \pi$. On en déduit les coordonnées du point $M(2\cos(t) + \cos(2t - \pi), 2\sin(t) + \sin(2t - \pi))$. Il ne reste plus qu'à étudier la courbe paramétrée définie par les équations $\begin{cases} x(t) = 2\cos(t) - \cos(2t) \\ y(t) = 2\sin(t) - \sin(2t) \end{cases}$.

Les deux fonctions sont 2π-périodiques (c'est normal, les deux cercles ayant même rayon, ils ont même périmètre, donc après avoir effectué le tour du cercle fixe, le cercle qui bouge revient exactement dans sa position initiale). Par ailleurs, x est paire et y impaire, il y aura donc une symétrie par rapport à l'axe des abscisses qui permet de restreindre l'étude à $[0; \pi]$. On calcule $x'(t) = -2\sin(t) + 2\sin(2t) = 2\sin(t)(2\cos(t) - 1)$. Cette dérivée s'annule en 0, en $\frac{\pi}{3}$ et en π, valeurs pour lesquelles on a respectivement $M(1; 0)$; $M\left(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $M(-3; 0)$. De plus, $y'(t) = 2\cos(t) - 2\cos(2t) = 2(\cos(t) + 1 - 2\cos^2(t))$. En posant $X = \cos(t)$, cette dérivée s'annule lorsque $2X^2 - X - 1 = 0$, donc $X = 1$ (solution évidente) ou $X = -\frac{1}{2}$. Cela correspond à $t = 0$ ou $t = \frac{2\pi}{3}$ (et donc $M\left(-\frac{1}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$). Pour $t = 0$, il y a un poins stationnaire, on peut calculer $x''(t) = -2\cos(t) + 4\cos(2t)$ (qui vaut 2 en 0), et $y''(t) = -2\sin(t) + 4\sin(2t)$, qui s'annule en 0. Il y a aura donc une tangente horizontale et un point de rebroussement de première espèce (la dérivée tierce s'annulera pour x mais pas pour y).

t	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$x'(t)$	0	$+$	0	$-$		$-$	0
x	1	↗	$\frac{3}{2}$	↘	$-\frac{1}{2}$	↘	-3
$y'(t)$		$+$		$+$	0	$-$	
y	0	↗	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	0

On peut aussi placer pour compléter le point correspondant à $t = \frac{\pi}{2}$. On a alors $M(1, 2)$, et $x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$; $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$, donc la tangente en ce point sera dirigée par le vecteur $(-1, 1)$.


3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−3
−2
−1
0
1
2

Feuille d'exercices n°7 : Coniques.

PTSI B Lycée Eiffel

5 décembre 2012

Exercice 1 (* à **)

Déterminer une équation cartésienne réduite des coniques suivantes :

- ellipse de foyers $F(2,0)$ et $F'(-2,0)$, et de directrices $D : x = 3$ et $x = -3$.
- hyperbole de foyers $F(1,0)$ et $F'(-1,0)$ et d'excentricité 2.
- ellipse d'excentricité $\frac{1}{3}$ et de paramètre $p = 1$.
- hyperbole d'asymptotes $D : y = \frac{1}{2}x$ et $D' : y = -\frac{1}{2}x$, de sommet $A\left(\frac{3}{2},0\right)$ et $A'\left(-\frac{3}{2},0\right)$.

Exercice 2 (**)

Démontrer les propriétés suivantes des paraboles (on prendra la parabole d'équation $y^2 = 2px$ dans un repère orthonormal fixé). On note M un point de la parabole distinct du sommet, et H son projeté orthogonal sur la directrice.

1. La tangente à la parabole en M coupe sa tangente au sommet au milieu du segment $[FH]$.
2. Deux tangentes à la parabole qui sont perpendiculaires se coupent sur la directrice.
3. Les droites horizontales se réfléchissent sur la parabole en droites passant par son foyer (par réflexion, on entend que la normale à la parabole au point d'intersection de la droite incidente et de la parabole est bissectrice de la droite incidente et de la droite réfléchie).

Exercice 3 (**)

On considère une ellipse de foyers F et F', et D une droite passant par F et coupant l'ellipse en deux points M et P. Montrer que la quantité $\frac{1}{FM} + \frac{1}{FP}$ est indépendante du choix de la droite D, et déterminer le minimum de $\frac{1}{FM^2} + \frac{1}{FP^2}$ quand la droite varie.

Exercice 4 (** à ***)

Démontrer les propriétés suivantes des ellipses (on considèrera une ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ dans un repère orthonormal fixé).

1. Si M est un point de l'ellipse, et T la tangente à l'ellipse en M, la quantité $d(F,T) \times d(F',T)$ est indépendante du choix de M.
2. Si M est un point de l'ellipse, et P et P' les points d'intersection de la tangente en M avec les tangentes aux sommets A et A', alors $AP \times A'P'$ est indépendant du choix de M.
3. Une droite passant par un des foyers de l'ellipse est réfléchie sur l'ellipse en une droite passant par l'autre foyer.

4. Si M et P sont deux points de l'ellipse pour lesquels la tangente en M est parallèle à (OP), l'aire du triangle OPM est indépendante du choix des points M et P.

Exercice 5 (*)

Montrer qu'une hyperbole a deux asymptotes perpendiculaires si et seulement si $a = b$, ou $e = \sqrt{2}$. Une telle hyperbole est appelée **hyperbole équilatère**.

Exercice 6 (** à ***)

Démontrer les propriétés suivantes des hyperboles :

1. Si un point M de l'hyperbole a pour projetés H et H' sur les deux asymptotes, $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MH'}$ ne dépend pas du choix de M.
2. Si on note P le projeté orthogonal de F sur la tangente à l'hyperbole en M, ce point P se situe sur le cercle tangent à l'hyperbole en ses deux sommets.
3. Une droite passant par un des foyers de l'hyperbole est réfléchie sur l'hyperbole en une droite passant par l'autre foyer.
4. Si on note $\mathcal{C}$ le cercle de centre F et de rayon $2a$, les points extérieurs à $\mathcal{C}$ équidistants de F' et de $\mathcal{C}$ sont situés sur l'hyperbole.

Exercice 7 (*)

Reconnaitre les coniques suivantes à partir de leur équation polaire :

- $r = \dfrac{3}{2 + \cos(\theta)}$
- $r = \dfrac{4}{1 + \cos(\frac{\theta}{3})}$
- $r = \dfrac{1}{2 + \sin(\theta)}$
- $r = \dfrac{2}{2 + \cos(\theta) + \sin(\theta)}$
- $r = \dfrac{1}{1 + 2\cos(\theta) + 3\sin(\theta)}$

Exercice 8 (** à ***)

Déterminer la nature de chacune des coniques suivantes, et donner ses éléments caractéristiques :

1. $4x^2 + y^2 + 6x - 4y + 12 = 0$
2. $2x^2 + y^2 + \sqrt{3}xy = 1$
3. $4x^2 - y^2 = 0$
4. $x^2 + 6xy + y^2 + 4\sqrt{2}x = 0$
5. $x^2 - 4x + 6y - 2 = 0$
6. $x^2 + y^2 + xy - 1 = 0$
7. $xy = 4$
8. $x^2 - 2xy + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0$

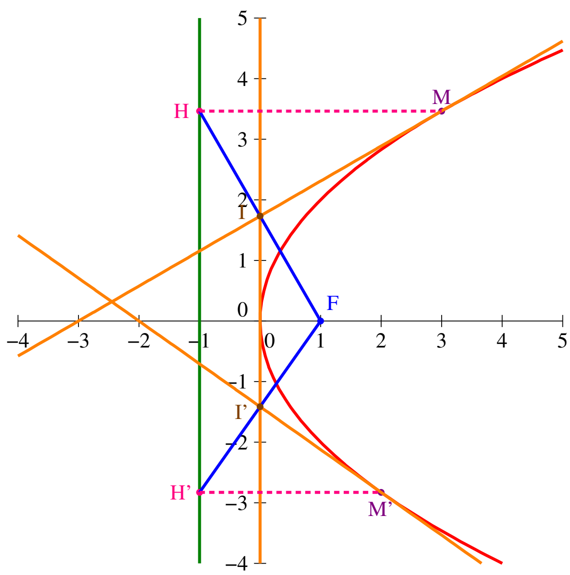
Corrigé de la feuille d'exercices n°7

Exercice 1 (* à **)

- Avec les notations du cours, cette ellipse vérifie $c = 2$ et $\dfrac{a^2}{c} = 3$. On en déduit que $a^2 = 6$, soit $a = \sqrt{6}$, puis $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{2}$. L'ellipse a donc pour équation réduite $\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{2} = 1$.
- Toujours avec les notations du cours, $c = 1$ et $e = \dfrac{c}{a} = 2$, donc $a = \dfrac{1}{2}$. On calcule ensuite $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. L'hyperbole a donc pour équation réduite $4x^2 - \dfrac{4y^2}{3} = 1$.
- On a cette fois $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{3}$, et $p = a(1 - e^2) = 1$. On a donc $a = \dfrac{p}{1 - e^2} = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{9}} = \dfrac{9}{8}$, puis $c = ae = \dfrac{3}{8}$. On calcule alors $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{\dfrac{81}{64} - \dfrac{9}{64}} = \dfrac{6\sqrt{2}}{8} = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$. L'équation réduite est alors $\dfrac{64x^2}{81} + \dfrac{8y^2}{9} = 1$.
- On peut cette fois-ci affirmer que $\dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{2}$, et $a = \dfrac{3}{2}$. On en déduit immédiatement que $b = \dfrac{3}{4}$, donc l'équation réduite est $\dfrac{4x^2}{9} - 4y^2 = 1$.

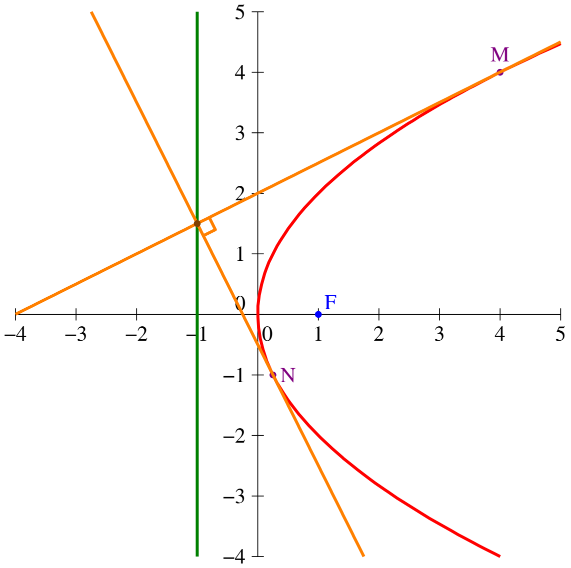
Exercice 2 (**)

1. En notant $M(x_M, y_M)$, puisque F a pour coordonnées $\left(\dfrac{p}{2}; 0\right)$ et $H\left(-\dfrac{p}{2}; y_M\right)$ (la directrice est verticale d'équation $x = -\dfrac{p}{2}$), le milieu du segment $[FH]$ est le point $I\left(0; \dfrac{y_M}{2}\right)$.
   De l'autre côté, la tangente en M a pour équation $yy_M = p(x + x_M)$, et celle au sommet est simplement l'axe des ordonnées. Leur intersection est donc obtenue lorsque $x = 0$, on a alors $y = \dfrac{px_M}{y_M}$. Or, le point M appartenant à la parabole, il vérifie $y_M^2 = 2px_M$, donc $\dfrac{px_M}{y_M} = \dfrac{y_M^2}{2y_M} = \dfrac{y_M}{2}$, et le point d'intersection coïncide bien avec I.

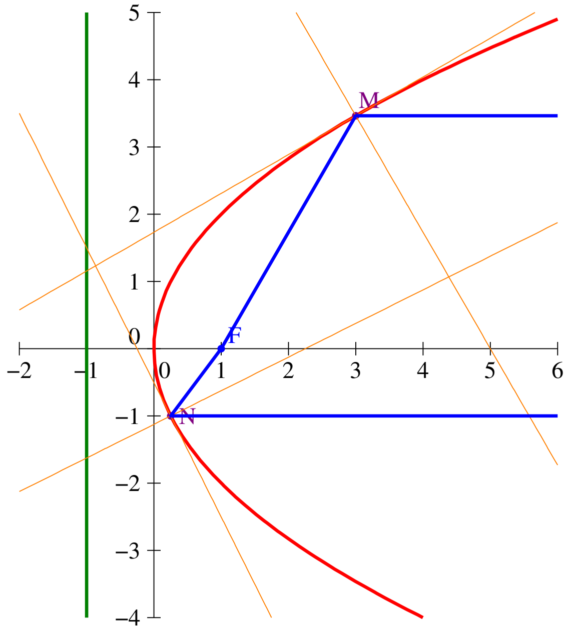


2. Notons M et N les deux points de la parabole dont sont issues les tangentes. Les équations de ces tangentes sont $yy_M = p(x + x_M)$ et $yy_N = p(x + x_N)$. Elles se coupent en un point vérifiant

$\dfrac{x+x_M}{y_M} = \dfrac{x+x_N}{y_N}$, ou encore $y_N x + y_N x_M = y_M x + y_M x_N$, soit $x = \dfrac{y_M x_N - y_N x_M}{y_N - y_M}$. Par ailleurs, les deux tangentes ont pour vecteurs normaux respectifs $(-p, y_M)$ et $(-p, y_N)$, elles sont donc perpendiculaires si $p^2 + y_N y_M = 0$, soit $y_N y_M = -p^2$. Enfin, les deux points étant sur la parabole, on a $x_M = \dfrac{y_M^2}{2p}$ et $x_N = \dfrac{y_N^2}{2p}$, ce qui donne finalement $x = \dfrac{y_M y_N^2 - y_N y_M^2}{2p(y_N - y_M)} = \dfrac{y_M y_N}{2p} = \dfrac{-p^2}{2p} = -\dfrac{p}{2}$. Le point d'intersection est donc effectivement situé sur la directrice.



3. Faisons les choses un peu à l'envers. Soit donc $M(x_M, y_M)$ un point de la parabole. La droite horizontale passant par ce point a pour équation $y = y_M$. La droite reliant le foyer à l'origine a pour équation $\left(x - \dfrac{p}{2}\right) y_M - y\left(x_M - \dfrac{p}{2}\right) = 0$ (c'est ce qu'on obtient en écrivant la condition $\det(\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FM}) = 0$, où $A(x, y)$ est un point quelconque du plan). On peut écrire cette deuxième équation sous la forme $xy_M - yx_M + \dfrac{p}{2}(y - y_M) = 0$. Cette droite a pour vecteur directeur $\left(x_M - \dfrac{p}{2}; y_M\right)$, dont la norme vaut $\sqrt{x_M^2 - px_M + \dfrac{p^2}{4} + y_M^2} = \sqrt{x_M^2 + px_M + \dfrac{p^2}{4}} = \left|x_M + \dfrac{p}{2}\right|$ en utilisant le fait que M est un point de la parabole. La distance d'un point $A(x, y)$ à la droite (FM) est donc égale à $\left|\dfrac{xy_M - yx_M + \frac{p}{2}(y - y_M)}{x_M + \frac{p}{2}}\right|$. Comme la distance de ce même point à la droite horizontale d'équation $y = y_M$ vaut simplement $|y - y_M|$, ces deux distances sont égales si $\left|xy_M - yx_M + \dfrac{p}{2}(y - y_M)\right| = \left|\left(x_M + \dfrac{p}{2}\right)(y - y_M)\right|$. Les deux possibilités donneront les équations des deux bissectrices, prenons par exemple le cas où les deux membres (sans valeur absolue) sont égaux, on a alors $xy_M - yx_M = x_M y - x_M y_M$, soit $2yx_M = y_M(x + x_M)$. Comme $2x_M = \dfrac{y_M^2}{p}$, cela revient à dire que $\dfrac{yy_M}{p} x + x_M$, ce qui est exactement l'équation de la tangente à la parabole au point M. L'autre équation serait celle de la normale (les deux bissectrices étant évidemment orthogonales). Il existe des méthodes plus rapides pour faire ce calcul mais celle-ci a le mérite d'être élémentaire et d'utiliser plein de connaissances que vous avez acquises ces dernières semaines. Sur la figure ci-contre, deux « rayons » et leur réflexion vers le foyer :



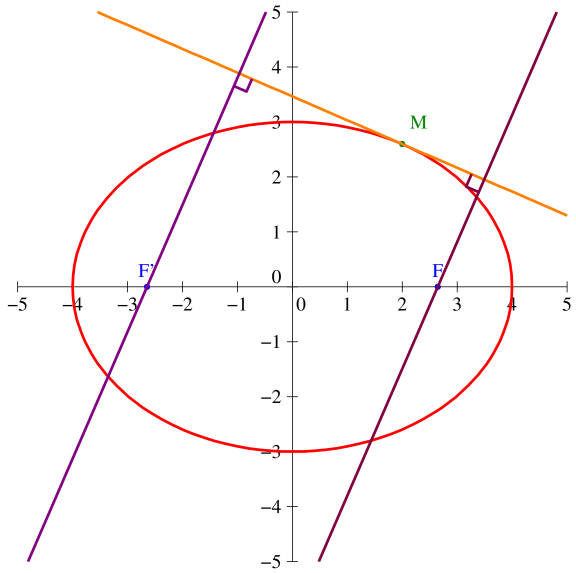
Exercice 3 (**)

Si vous avez trouvé cet exercice affreusement difficile, c'est que vous n'avez sûrement pas trouvé l'astuce qui le simplifie énormément : utiliser l'équation polaire. On peut tout de même y penser quand on voit que le problème fait intervenir la distance de points de l'ellipse à un des foyers, qui est très facile à exprimer quand on se place en coordonnées polaires avec un foyer comme origine du repère. On sait justement que dans ce cas, si on prend par exemple F comme foyer, et l'axe focal comme axe des abscisses, l'ellipse a pour équation $r = \dfrac{p}{1 - e\cos(\theta)}$. Une droite passant par F a pour équation polaire $\theta = \theta_0[\pi]$, les deux points d'intersection avec l'ellipse correspondent donc aux valeurs θ_0 et $\theta_0+\pi$ du paramètre. On a donc $\dfrac{1}{FM}+\dfrac{1}{FP} = \dfrac{1-e\cos(\theta_0)}{p}+\dfrac{1-e\cos(\theta_0+\pi)}{p}$. Les deux cosinus étant opposés, il reste simplement $\dfrac{1}{FM}+\dfrac{1}{FP} = \dfrac{2}{p}$, qui est effectivement indépendant de la droite choisie. Bon courage pour tenter de retrouver ce résultat par un calcul en coordonnées cartésiennes, c'est tout bonnement ignoble. Notons tout de même que la valeur constante était prévisible, en prenant comme droite passant par F la droite orthogonale à l'axe focal (droite verticale dans le repère habituel), on sait alors que les deux points d'intersection avec l'ellipse sont à distance p du foyer, ce qui donne bien $\dfrac{2}{p}$ pour la somme des inverses. Alternativement, on peut prendre l'axe focal comme droite particulière, les points d'intersection avec l'ellipse sont alors les deux sommets et les distances au foyer valent $a-c$ et $a+c$, donc $\dfrac{1}{FM}+\dfrac{1}{FP} = \dfrac{1}{a-c}+\dfrac{1}{a+c} = \dfrac{2a}{a^2-c^2} = \dfrac{2a}{b^2} = \dfrac{2}{p}$.

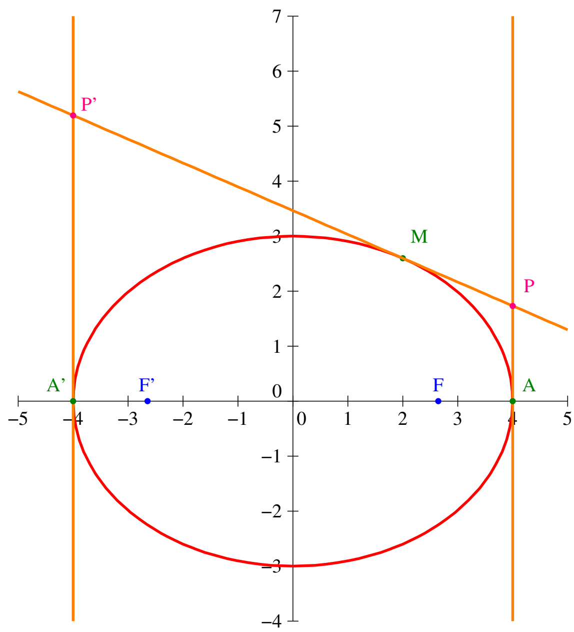
Pour calculer $\dfrac{1}{FM^2}+\dfrac{1}{FP^2}$, on part évidemment aussi de l'expression polaire : $\dfrac{(1-e\cos(\theta_0))^2}{p^2} + \dfrac{(1+e\cos(\theta_0))^2}{p^2} = \dfrac{2+2e^2\cos^2(\theta_0)}{p^2}$. Cette expression est minimale lorsque $\cos(\theta_0) = 0$ et vaut alors $\dfrac{2}{p^2}$. Autrement dit, le minimum est atteint lorsque la droite est orthogonale à l'axe focal (ce qui est assez normal car c'est le seul cas où on a $FM = FP$).

Exercice 4 (** à ***)

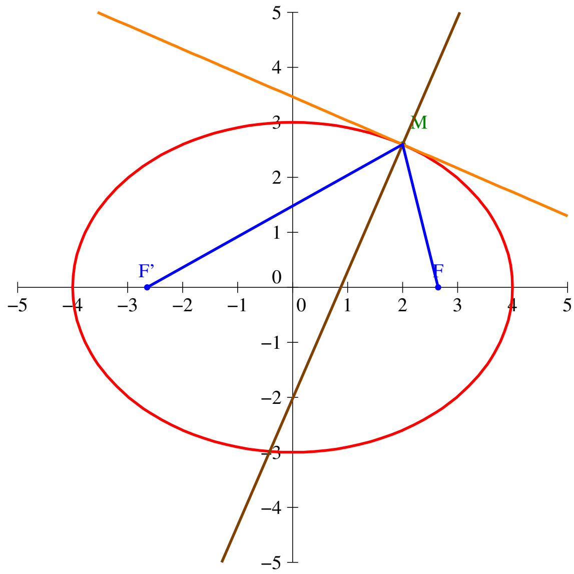
1. La tangente a pour équation $b^2xx_M + a^2yy_M = a^2b^2$, donc $d(F,T) = \dfrac{|b^2cx_M - a^2b^2|}{\sqrt{b^4x_M^2 + a^4y_M^2}}$, et $d(F',T) = \dfrac{|-b^2cx_M - a^2b^2|}{\sqrt{b^4x_M^2 + a^4y_M^2}}$. Le produit des deux distances vaut donc $\dfrac{b^4(a^2 - cx_M)(a^2 + cx_M)}{b^4x_M^2 + a^4y_M^2}$ (le numérateur est nécessairement positif), soit $\dfrac{b^4(a^4 - c^2x_M^2)}{b^4x_M^2 + a^4y_M^2}$. Comme l'ellipse a pour équation $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, on peut écrire le dénominateur sous la forme $b^4x_M^2 + a^4b^2 - a^2b^2x_M^2 = b^2(a^4 - c^2x_M^2)$. Notre produit se simplifie donc grandement, il vaut b^2, et est effectivement totalement indépendant de M. Notons qu'on pouvait deviner la valeur en prenant pour M un des sommets (sur l'axe focal) de l'ellipse, les distances des foyers à la tangente (qui est alors verticale) valent dans ce cas $a - c$ et $a + c$, donc leur produit est égal à $a^2 - c^2 = b^2$.



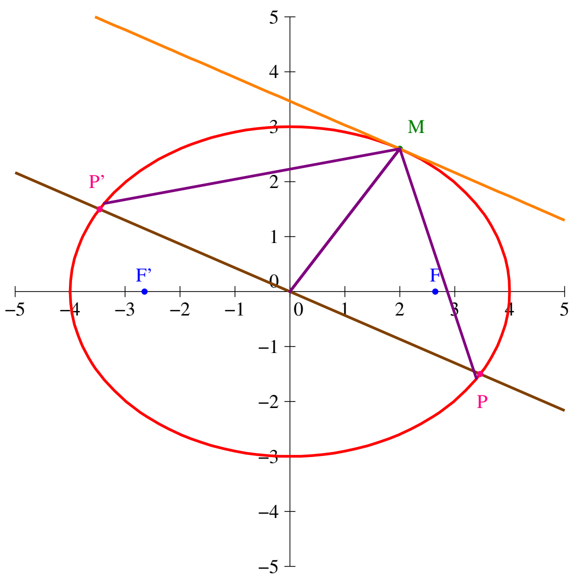
2. La tangente a toujours pour équation $b^2xx_M + a^2yy_M = a^2b^2$. Les tangentes aux sommets ayant simplement pour équation $x = \pm a$, les intersections recherchées vérifient $\pm b^2ax_M + a^2yy_M = a^2b^2$, soit $y = \dfrac{b^2}{y_M} \pm \dfrac{b^2x_M}{ay_M}$. Le produit $AP \times A'P'$ est simplement le produit des ordonnées de ces deux points (qui sont toujours de même signe), il vaut donc $\dfrac{b^4}{y_M^2} - \dfrac{b^4x_M^2}{a^2y_M^2} = \dfrac{b^4}{y_M^2}\left(1 - \dfrac{x_M^2}{a^2}\right) = \dfrac{b^4}{y_M^2} \times \dfrac{y_M^2}{b^2} = b^2$. Là encore, le résultat était prévisible : si on prend comme point M le sommet B, alors la tangente horizontale en B coupe les deux tangentes verticales à hauteur b, donc le produit des deux distances vaut bien b^2.



3. Cela revient à dire que, si M est un point de l'ellipse, les droites (FM) et $(F'M)$ ont pour bissectrices la tangente et la normale en M à l'ellipse. Faire un pur calcul analytique est ici vraiment extrêmement lourd, on va donc essayer de faire un peu plus géométrique. Il suffit en fait de prouver que $\dfrac{\overrightarrow{FM}}{FM} + \dfrac{\overrightarrow{F'M}}{F'M}$ est directeur de la normale, ou si on préfère orthogonal à la tangente (en effet, la sommes de vecteurs directeur unitaires à deux droites dirige la bissectrice des deux droites). Autrement dit, en notant $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de la tangente, on doit prouver que $(F'M\overrightarrow{FM} + FM\overrightarrow{F'M}).\overrightarrow{u} = 0$. Or, on peut écrire $\overrightarrow{FM}(x_M - c, y_M)$, $\overrightarrow{F'M}(x_M + c, y_M)$, et la tangente en M a pour équation $b^2xx_M + a^2yy_M = 1$, donc on peut prendre $\overrightarrow{u}(a^2y_M, -b^2x_M)$. Finalement, en notant simplement x et y les coordonnées du point M, on trouve que $(F'M\overrightarrow{FM}+FM\overrightarrow{F'M}).\overrightarrow{u} = (F'M(x-c)+FM(x+c))a^2y-(FM+F'M)b^2xy$. Comme on est sur une ellipse, on aura $FM + F'M = 2a$, donc il faut prouver que $(x-c)F'M + (x+c)FM = \dfrac{2ab^2xy}{a^2y} = \dfrac{2b^2x}{a}$, ou encore $c(FM - F'M) = \dfrac{2b^2x}{a} - 2ax = \dfrac{2(b^2-a^2)x}{a} = \dfrac{-2c^2x}{a}$. N'écrivons surtout pas les distances FM et $F'M$ sous forme analytique (aïe les ignobles racines carrées), mais revenons à la définition monofocale de l'ellipse (ça sert, de temps à autre) : $FM = ed(M, D)$ et $F'M = ed(M, D')$, en notant D et D' les deux directrices de l'ellipse. ON sait que ces directrices sont verticales, d'équation respective $x = \dfrac{a^2}{c}$ et $x = -\dfrac{a^2}{c}$, donc $d(M, D) = \dfrac{a^2}{c} - x$ et $d(M, D') = x + \dfrac{a^2}{c}$ (la valeur de x étant toujours comprise entre $-\dfrac{a^2}{c}$ et $\dfrac{a^2}{c}$ pour un point de l'ellipse). On en déduit que $c(FM - F'M) = -2cex = \dfrac{-2c^2x}{a}$ puisque $e = \dfrac{c}{a}$. La propriété est donc démontrée !



4. Cela revient à dire que le déterminant $\det(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OM}) = x_P y_M - y_P x_M$ est indépendant de M et P (au moins en valeur absolue). La tangente en M a pour équation $b^2 x x_M + a^2 y y_M = a^2 b^2$. La droite parallèle à celle-ci passant par O a pour équation $b^2 x x_M + a^2 y y_M = 0$, donc $y = \dfrac{-b^2 x x_M}{a^2 y_M}$. Si on note $P(x, y)$, le point appartenant à l'ellipse, il vérifie $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$. En remplaçant y^2 par sa valeur en fonction de x, on trouve $b^2 x^2 + \dfrac{b^4 x^2 x_M^2}{a^2 y_M^2} = a^2 b^2$, soit $x^2 \left(1 + \dfrac{b^2 x_M^2}{a^2 y_M^2}\right) = a^2$, ou encore $x^2 \times \dfrac{a^2 y_M^2 + b^2 x_M^2}{a^2 y_M^2} = a^2$. Le numérateur de la fraction vaut $a^2 b^2$ car M est un point de l'ellipse, donc $x_P^2 = \dfrac{a^2 y_M^2}{b^2}$, soit $x_P = \dfrac{a y_M}{b}$ (on peut toujours choisir la valeur de x positive, on obtiendra ainsi un déterminant positif à la fin ; sinon on trouvera une valeur opposée pour le déterminant, la conclusion sera la même). On a alors $y_P = -\dfrac{b^2 x_M}{a^2 y_M} \times \dfrac{a y_M}{b} = -\dfrac{b x_M}{a}$. On peut désormais calculer le déterminant initial, qui vaut $\dfrac{a y_M^2}{b} + \dfrac{b x_M^2}{a} = \dfrac{a^2 y_M^2 + b^2 x_M^2}{ab} = \dfrac{a^2 b^2}{ab} = ab$. L'aire du triangle vaut donc, indépendemment du choix des points, $\dfrac{ab}{2}$. On pouvait deviner cette valeur en prenant par exemple pour M le sommet A de l'ellipse, P est alors un des deux sommets secondaires B ou B' (puisque la tangente en A est verticale), et le triangle rectange AOB a bien pour aire $\dfrac{1}{2} ab$.



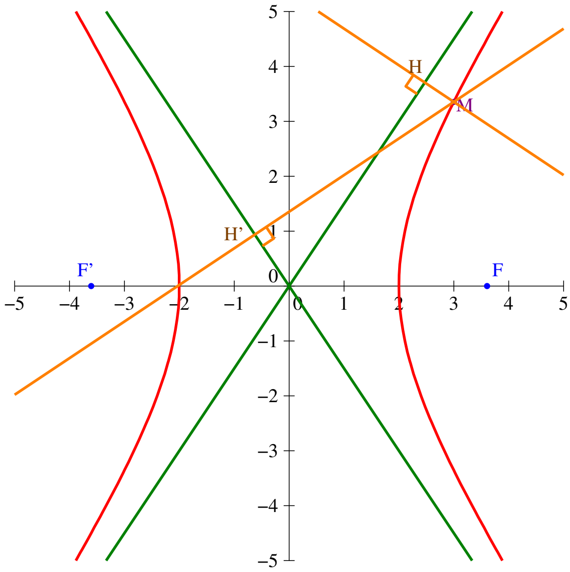
Exercice 5 (*)

Les asymptotes d'une hyperbole ayant pour équations $y = \pm\frac{b}{a}x$, elles sont perpendiculaires si $\frac{b}{a} \times \frac{-b}{a} = -1$, soit $b^2 = a^2$. Comme a et b sont deux réels positifs, cela implique nécessairement $a = b$ (et la réciproque est vraie). Avoir $a = b$ implique par ailleurs $c = \sqrt{a^2+b^2} = a\sqrt{2}$, donc $e = \frac{c}{a} = \sqrt{2}$. Réciproquement, si $e = \sqrt{2}$, on aura $c = \sqrt{2}a$, donc en élevant au carré $a^2+b^2 = 2a^2$, dont on déduit facilement que $b = a$.

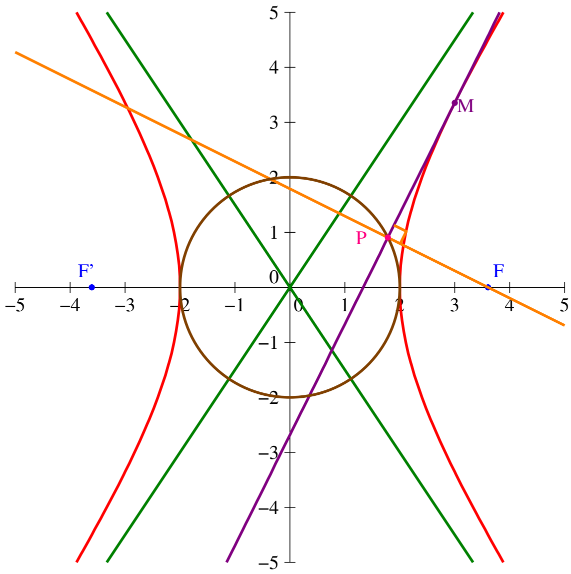
Exercice 6 (** à ***)

1. Notons $H(x, y)$ le projeté de M sur la première asymptote, d'équation $y = \frac{b}{a}x$ (ou si on préfère $ay - bx = 0$), outre cette équation le point H vérifie la condition $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{MH} = 0$ où $\overrightarrow{u}(a, b)$ est un vecteur directeur de l'asymptote. Cette condition s'écrit $a(x-x_M)+b(y-y_M) = 0$, soit $ax+by = ax_M+by_M$. On peut combiner les deux équations, en multipliant la première par a, la deuxième par b et en additionnant on trouve $(a^2+b^2)y = abx_M+b^2y_M$, soit $y_H = \frac{ab}{a^2+b^2}x_M + \frac{b^2}{a^2+b^2}y_M$. Comme $x = \frac{a}{b}y$, pas besoin de calcul supplémentaire pour trouver que $x_H = \frac{a^2}{a^2+b^2}x_M + \frac{ab}{a^2+b^2}y_M$. De même le deuxième projeté H' vérifie d'une part $ay + bx = 0$, et d'autre part $a(x - x_M) - b(y - y_M) = 0$, soit $ax - by = ax_M - by_M$. On en déduit que $x_{H'} = \frac{a^2}{a^2+b^2}x_M - \frac{ab}{a^2+b^2}y_M$, puis $y_{H'} = -\frac{ab}{a^2+b^2}x_M + \frac{b^2}{a^2+b^2}y_M$. On peut donc calculer $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MH'} = (x_H - x_M)(x_{H'}-x_M)+(y_H-y_M)(y_{H'}-y_M) = \frac{1}{(a^2+b^2)^2}[(-b^2x_M+aby_M)(-b^2x_M-aby_M)+(abx_M-a^2y_M)(-abx_M - a^2y_M)] = \frac{b^4x_M^2 - a^2b^2y_M^2 + a^4y_M^2 - a^2b^2x_M^2}{(a^2+b^2)^2} = \frac{(b^2-a^2)(b^2x_M^2 - a^2y_M^2))}{(a^2+b^2)^2} = \frac{a^2b^2(b^2-a^2)}{(a^2+b^2)^2}$ en utilisant le fait que le point M appartient à l'hyperbole. Cette quantité ne dépend effectivement pas du point M. On constate par ailleurs qu'elle est toujours nulle dans

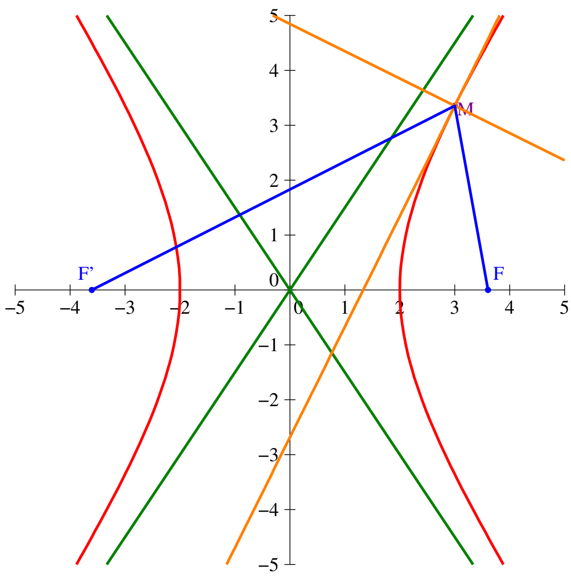
le cas d'une hyperbole équilatère ($a = b$), ce qui est logique puisque les asymptotes sont alors orthogonales (et les vecteurs $\overrightarrow{MH}$ et $\overrightarrow{MH'}$ aussi).



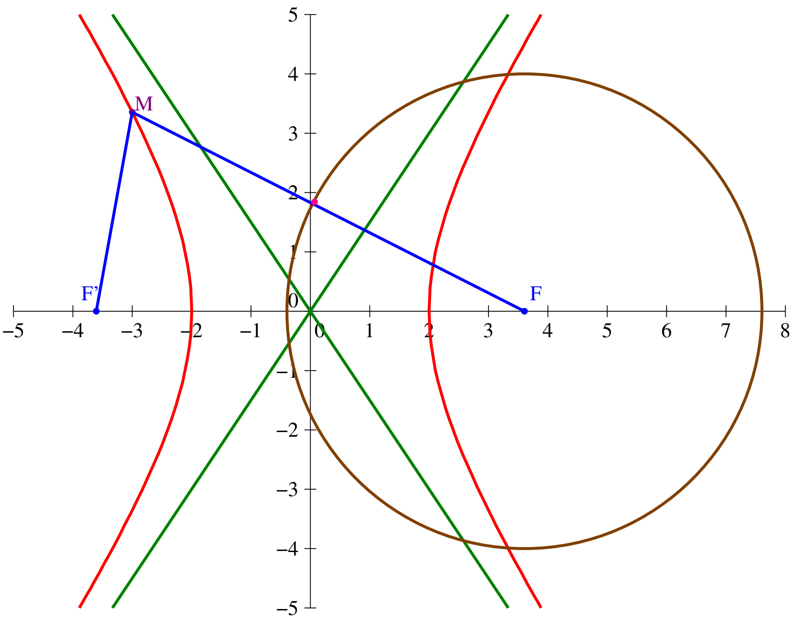
2. Le cercle en question est simplement le cercle centré en l'origine de rayon a. La tangente en M a pour équation $b^2xx_M - a^2yy_M = a^2b^2$. Cette tangente est dirigée par le vecteur (a^2y_M, b^2x_M), qui doit donc être orthogonal à $\overrightarrow{FP}$, ce qui impose, en notant $P(x, y)$, la condition $(x-c)a^2y_M + b^2x_My = 0$. En multipliant la première équation par b^2x_M, la deuxième par a^2y_M et en additionnant, on obtient $(b^4x_M^2 + a^4y_M^2)x = a^2b^4x_M + ca^4y_M^2$, soit $x_P = \dfrac{a^2b^4x_M + ca^4y_M^2}{b^4x_M^2 + a^4y_M^2}$ (on peut tenter de simplifier mais ça n'a pas grand intérêt). De même, en inversant les coefficients et en soustrayant les deux équations, on trouve $y_P = \dfrac{ca^2b^2x_My_M - a^4b^2y_M}{b^4x_M^2 + a^4y_M^2}$. Calculons désormais $x_P^2 + y_P^2$ (on écrit uniquement le numérateur, le dénominateur valant $(b^4x_M^2 + a^4y_M^2)^2$) : $(a^2b^4x_M + ca^4y_M^2)^2 + (ca^2b^2x_My_M - a^4b^2y_M)^2 = a^4b^8x_M^2 + 2ca^6b^4x_My_M^2 + c^2a^8y_M^4 + c^2a^4b^4x_M^2y_M^2 - 2ca^6b^4x_My_M^2 + a^8b^4y_M^2$. Les doubles produits s'annulent, en remplaçant c^2 par $a^2 + b^2$, il reste $a^4b^8x^2 + a^{10}y^4 + b^2a^8y^4 + a^6b^4x^2y^2 + a^4b^6x^2y^2 + a^8b^4y^2$. Puisqu'on veut prouver que le quotient est égal à a^2, divisons tout par a^2 pour laisser, en utilisant l'équation de l'hyperbole pour certaines simplifications, $a^2b^8x^2 + a^8y^4 + b^2a^4y^2(b^2x^2 - a^2b^2) + a^4b^4x^2y^2 + b^6x^2(b^2x^2 - a^2b^2) + a^6b^4y^2 = a^2b^8x^2 + a^8y^4 + b^4a^4x^2y^2 - a^6b^4y^2 + a^4b^4x^2y^2 + b^8x^4 - a^2b^8x^2 + a^6b^4y^2$. Incroyable miracle, il ne reste que les termes $a^8y^4 + 2a^4b^4x^2y^2 + b^8x^4$, soit $(b^4x^2 + a^4y^2)^2$, qui est exactement le dénominateur obtenu plus haut. Conclusion : $x_P^2 + y_P^2 = a^2$, soit $OP = a$, ce qui prouve que le point P appartient bien au cercle demandé. Si vous avez une méthode moins barbare à soumettre, je vous écoute volontiers ...



3. On va reprendre la même technique que pour l'ellipse, seuls quelques signes changeront. On a toujours $\overrightarrow{FM}(x_M - c, y_M)$, et $\overrightarrow{F'M}(x_M + c, y_M)$, par contre le vecteur directeur de la tangente est $\overrightarrow{u}(a^2 y_M, b^2 x_M)$. On va choisir un vecteur unitaire opposé à celui qu'on avait pris dans le cas de l'ellipse pour la droite $(F'M)$ car dans le cas de l'hyperbole la tangente est bissectrice intérieure de l'angle (alternativement, on prend un vecteur directeur de la normale et on cherche à obtenir un produit scalaire nul). On trouve alors $(F'M\overrightarrow{FM} - FM\overrightarrow{F'M}).\overrightarrow{u} = (F'M(x-c) - FM(x+c))a^2y + (F'M - FM)b^2xy$. On va supposer qu'on s'est placés sur la branche de l'hyperbole pour laquelle $FM - F'M = 2a$ (sinon tous les signes changent et la conclusion est la même), on doit alors prouver que $(x-c)F'M - (x+c)FM = \dfrac{2ab^2xy}{a^2y} = \dfrac{2b^2x}{a}$, soit $c(FM + F'M) = -2ax - \dfrac{2b^2x}{a} = \dfrac{-2(a^2+b^2)x}{a} = -\dfrac{2c^2x}{a}$. La fin du calcul est la même que pour l'ellipse (aux signes des distances aux directrices près).

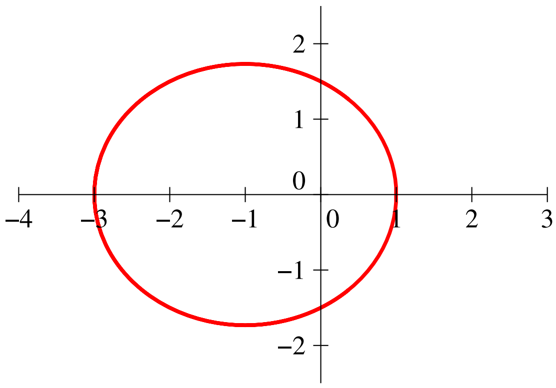


4. Enfin une question qui ne demande aucun calcul ou presque. En effet, si un point M est situé à l'extérieur du cercle $\mathcal{C}$, on aura $d(M, \mathcal{C}) = MF - 2a$, donc la condition $d(M, \mathcal{C}) = d(M, F')$ s'écrit $MF - 2a = MF'$, soit $MF - MF' = 2a$. On reconnait la définition bifocale de l'hyperbole, les points sont bien situés dessus.

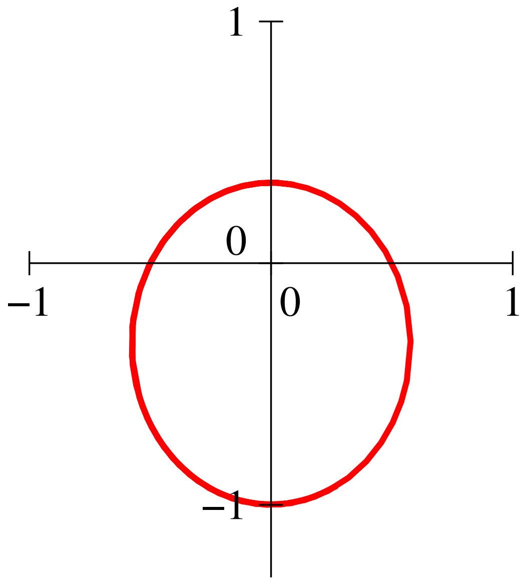


Exercice 7 (*)

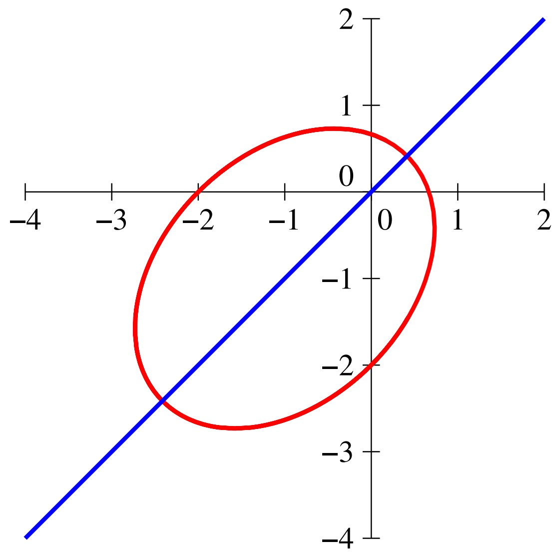
- On peut écrire alternativement $r = \dfrac{\frac{3}{2}}{1 + \frac{1}{2}\cos(\theta)}$, ce qui correspond à une conique de paramètre $p = \dfrac{3}{2}$ et d'excentricité $e = \dfrac{1}{2}$. Il s'agit donc d'une ellipse dont un des foyers est l'origine et l'axe focal est l'axe des abscisses. On peut calculer à partir de ces données $a = \dfrac{p}{1-e^2} = \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{4}} = 2$, puis $c = ea = 1$, donc $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{3}$.



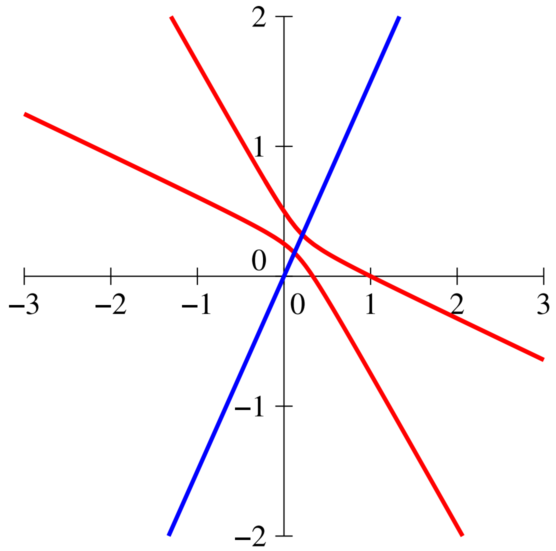
- Cette équation n'étant absolument pas celle d'une conique, elle n'a rien à faire dans cette liste. il faut au moins sortir le quotient par 3 de la parenthèse pour espérer trouver une conique.
- On peut écrire $r = \dfrac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}\cos(\theta - \frac{\pi}{2})}$, on est donc en présence d'une conique dont un des foyers est l'origine et l'axe focal sera l'axe des ordonnées (puisqu'on a une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$), de paramètre $p = \dfrac{1}{2}$ et d'excentricité $e = \dfrac{1}{2}$. Il s'agit encore d'une ellipse, on calcule comme précédemment $a = \dfrac{p}{1-e^2} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \dfrac{2}{3}$, puis $c = ea = \dfrac{1}{3}$, donc $b = \sqrt{\dfrac{4}{9} - \dfrac{1}{9}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.



- On écrit cette fois, en utilisant le fait que $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin(\theta)+\cos(\theta))$, que $r = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sin(\theta+\frac{\pi}{4})} = \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\theta-\frac{\pi}{4})}$. On reconnait une conique de foyer O et donc l'axe focal est la première bissectrice, de paramètre $p=1$ et d'excentricité $e=\frac{1}{\sqrt{2}}$. C'est encore une fois une ellipse, avec $a=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$, puis $c=1$ et $b=\sqrt{3}$.



- On peut écrire $r = \frac{1}{1+\sqrt{13}\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\cos(\theta)+\frac{3}{\sqrt{13}}\sin(\theta)\right)} = \frac{1}{1+\sqrt{13}\sin(\theta-\theta_0)}$, où θ_0 est un angle dont le cosinus vaut $\frac{2}{\sqrt{13}}$ et le sinus $\frac{3}{\sqrt{13}}$ (un tel angle existe puisque la somme des carrés des deux valeurs vaut 1). On trouve alors une conique d'axe focal décalé d'un angle bizarre, et dont le paramètre est $p=1$ et l'excentricité $e=\sqrt{13}$. Il s'agit donc d'une hyperbole, on peut calculer $a=\frac{p}{e^2-1}=\frac{1}{12}$, puis $c=\frac{\sqrt{13}}{12}$ et $b=\sqrt{c^2-a^2}=\frac{1}{\sqrt{12}}$.

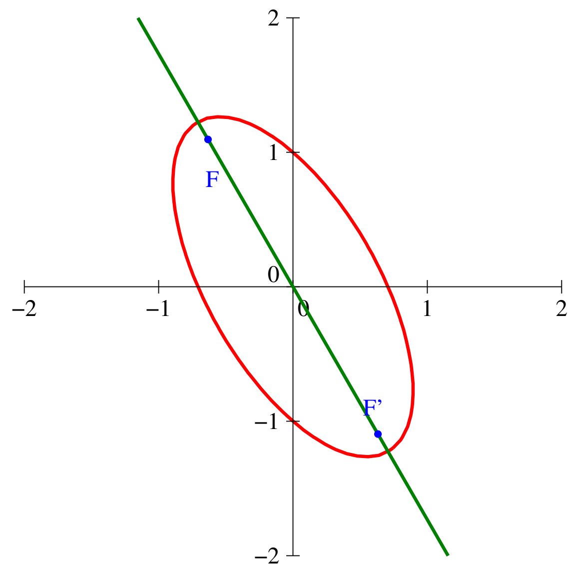


Exercice 8 (** à ***)

1. On peut toujours commencer par calculer le discriminant $\delta = 4$, il s'agit d'une conique de type ellipse. Réduisons-là : $4x^2 + y^2 + 6x - 4y + 12 = 4\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{4} + (y-2)^2 - 4 + 12 = 4\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + (y-2)^2 + \frac{23}{4}$. Cette quantité étant manifestement toujours très positive, la conique est vide.

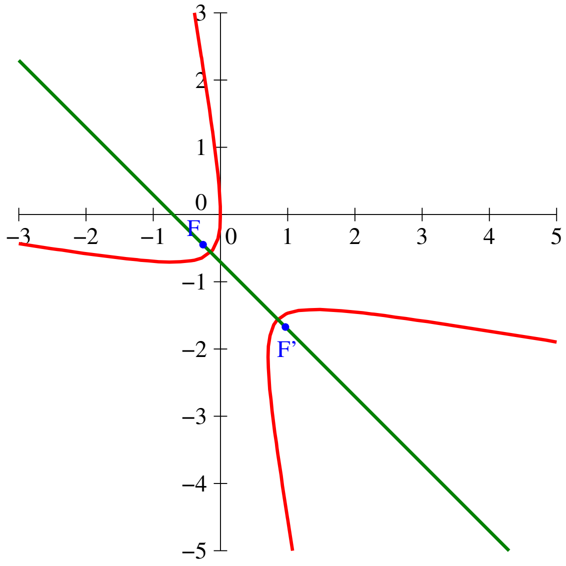
2. Pour information, le discriminant vaut $2 - \frac{3}{4}$, c'est une conique de type ellipse. Il faut effectuer une rotation d'angle θ pour se débarasser du terme en xy. Posons donc $x = X\cos(\theta) - Y\sin(\theta)$ et $y = X\sin(\theta) + Y\cos(\theta)$, l'équation s'écrit alors $2(X\cos(\theta) - Y\sin(\theta))^2 + (X\sin(\theta) + Y\cos(\theta))^2 + \sqrt{3}(X\cos(\theta) - Y\sin(\theta))(X\sin(\theta) + Y\cos(\theta)) = 1$, soit $X^2(2\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) + \sqrt{3}\cos(\theta)\sin(\theta)) + Y^2(2\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) - \sqrt{3}\sin(\theta)\cos(\theta)) + XY(-4\cos(\theta)\sin(\theta) + 2\sin(\theta)\cos(\theta) + \sqrt{3}(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)))$. Pour éliminer le terme en XY, il faut donc avoir $\sqrt{3}(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) = 2\cos(\theta)\sin(\theta)$, soit (si on connait ses formules trigonométriques), $\sqrt{3}\cos(2\theta) = \sin(2\theta)$, ou encore $\tan(2\theta) = \sqrt{3}$. On peut donc prendre $2\theta = \frac{\pi}{3}$, soit $\theta = \frac{\pi}{6}$.

   L'équation devient alors $X^2\left(2 \times \frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + Y^2\left(2 \times \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = 1$, soit $\frac{5}{2}X^2 + \frac{1}{2}Y^2 = 1$. On reconnait bien une ellipse de demi-grand axe $\sqrt{2}$ (attention à bien prendre la plus grande des deux valeurs) et de demi-petit axe $\sqrt{\frac{2}{5}}$. L'axe focal (dans l'ancien repère) sera la droite faisant un angle $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3}$ avec l'horizontale (si on tient à préciser les choses, elle a pour équation $y = -\sqrt{3}x$). On peut calculer $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{2 - \frac{2}{5}} = \sqrt{\frac{8}{5}}$. Les deux foyers seront donc les points $F\left(-\sqrt{\frac{2}{5}}; \sqrt{\frac{6}{5}}\right)$ et $F'\left(\sqrt{\frac{2}{5}}; -\sqrt{\frac{6}{5}}\right)$ (les coordonnées sont obtenues en multipliant c par les cosinus et sinus de l'angle $\frac{2\pi}{3}$).

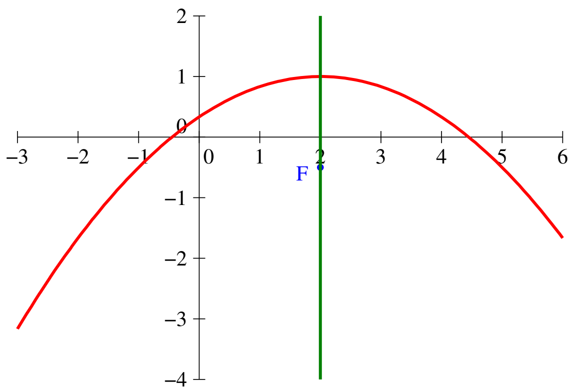


3. Pas besoin de calculer quoi que ce soit ici, une petite factorisation suffit : $(2x-y)(2x+y)=0$, la conique est donc réunion des deux droites d'équations respectives $y=2x$ et $y=-2x$.

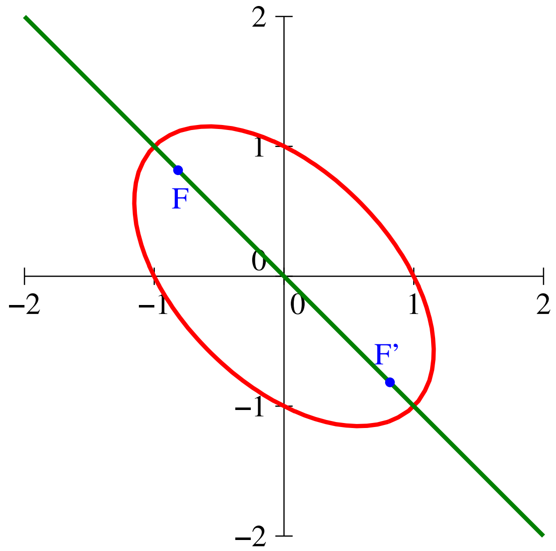
4. Comme $\delta = 1-\frac{6}{4} = -\frac{1}{2}$, on a une conique de type hyperbole. Effectuons pour commencer une petite rotation de $\frac{\pi}{4}$ en posant $x=\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y)$ et $y=\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)$, pour obtenir l'équation $\frac{1}{2}(X-Y)^2+3(X+Y)(X-Y)+\frac{1}{2}(X+Y)^2+4(X-Y)=0$, soit $4X^2-2Y^2+4X-4Y=0$. On peut tout diviser par 2, et mettre sous forme canonique : $2\left(X+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}-(Y+1)^2+1=0$, soit, en posant $X'=X+\frac{1}{2}$ et $Y'=Y+1$, $Y'^2-2X'^2=\frac{1}{2}$, ou $2Y'^2-4X'^2=1$. On reconnait une hyperbole d'axe focal vertical, vérifiant $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $b=\frac{1}{2}$. Le centre de l'hyperbole vérifie $X'=Y'=0$, soit $X=-\frac{1}{2}$ et $Y=-1$, donc $x=\frac{\sqrt{2}}{4}$ et $y=-\frac{3\sqrt{2}}{4}$. L'axe focal dans le repère de départ fait un angle $\frac{3\pi}{4}$ avec l'horizontale et passe par le centre, il a donc une équation de la forme $y=-x+b$, avec $b=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. On peut également calculer $c=\sqrt{a^2+b^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Le premier foyer vérifie donc $X'=0$ et $Y'=\frac{\sqrt{3}}{2}$, soit $X=-\frac{1}{2}$ et $Y=\frac{\sqrt{3}-2}{2}$, puis $x=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{-\sqrt{3}+1}{2}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$, et $y=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}-3}{2}=\frac{\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{4}$. De même pour le deuxième foyer, on part de $X'=0$ et $Y'=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ pour trouver $X=-\frac{1}{2}$ et $Y=\frac{-\sqrt{3}-2}{2}$, puis $x=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}+1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $y=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{-\sqrt{3}-3}{2}=\frac{-\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{4}$.



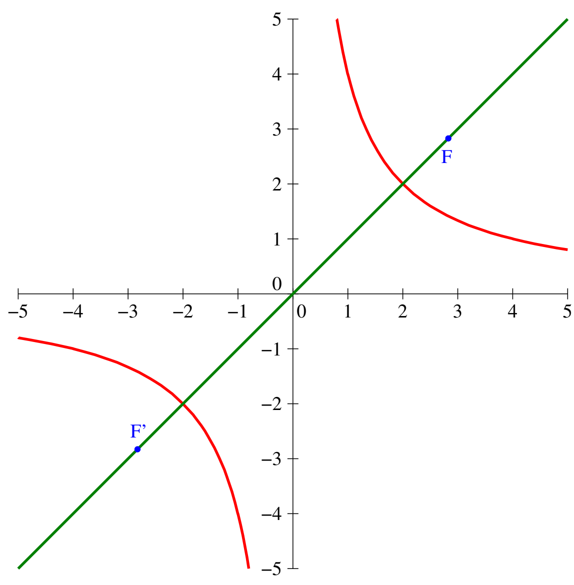
5. Le discriminant vaut 0, on a donc une conique de type parabole. On peut directement factoriser : $x^2 - 4x + 6y - 2 = (x-2)^2 - 4 + 6y - 2$. En posant $X = x - 2$ et $Y = y - 1$, on a donc $X^2 = -6Y$, ce qui est bien l'équation d'une parabole de paramètre $p = 3$, orientée vers le bas (l'axe focal est vertical). Dans l'ancien repère, le sommet aura pour coordonnées $(2; 1)$, et le foyer $\left(2; -\dfrac{1}{2}\right)$. La directrice aura pour équation $y = \dfrac{5}{2}$.



6. Le discriminant vaut $\delta = 1 - \dfrac{1}{4}$, on a une conique de type ellipse. On va effectuer notre rotation habituelle de $\dfrac{\pi}{4}$, ce qui donne $\dfrac{1}{2}(X-Y)^2 + \dfrac{1}{2}(X+Y)^2 + \dfrac{1}{2}(X-Y)(X+Y) - 1 = \dfrac{3}{2}X^2 + \dfrac{1}{2}Y^2 - 1 = 0$. On reconnait bien une ellipse, de demi-grand axe $a = \sqrt{2}$ et $b = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$, d'où $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. L'axe focal est vertical dans le nouveau repère, il s'agit donc de la deuxième bissectrice dans l'ancien, et les foyers sont $F\left(-\sqrt{\dfrac{2}{3}}, \sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$ et $F'\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}, -\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$.

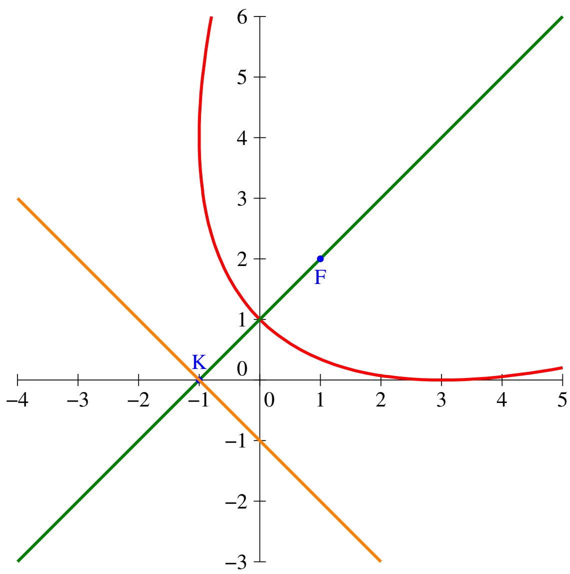


7. C'est une conique de type hyperbole puisque $\delta = -4$. On peut encore une fois se dispenser de calcul en étant un peu astucieux. On sait que $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$, donc l'équation peut se mettre sous la forme $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 16$. Pour faire un changement de repère orthonormé, on pose $X = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)$, et $Y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y)$ (ce qui correspond à une rotation de $\frac{\pi}{4}$) pour trouver $X^2 - Y^2 = 8$. On reconnait une hyperbole, avec $a = b = 2\sqrt{2}$, donc $c = \sqrt{a^2+b^2} = 4$. Dans l'ancien repère, l'axe focal sera la première bissectrice (ou si vous préférez la droite d'équation $y = x$), et les foyers seront les points $F(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ et $F'(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$.



8. On peut constater que $\delta = 1 - 1 = 0$, c'est donc une conique de type parabole. Notons que, dans ce cas, si vous cherchez à commencer par une translation pour trouver le centre de la conique, vous allez avoir des soucis pusique les paraboles n'ont pas de centre. On peut directement effectuer la rotation en posant comme d'habitude $x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y)$ et $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)$. On obtient alors $\frac{1}{2}(X-Y)^2 - (X-Y)(X+Y) + \frac{1}{2}(X+Y)^2 - 3\sqrt{2}(X-Y) - 5\sqrt{2}(X+Y) + 9 = 2Y^2 - 8\sqrt{2}X - 2\sqrt{2}Y + 9 = 0$ (le terme en X^2 disparait, c'est normal pour une parabole). Autrement

dit, $2\left(Y-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-1-8\sqrt{2}X+9=0$, soit encore $2\left(Y-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=8\sqrt{2}\left(X-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. En posant $X'=X-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $Y'=Y-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, on se retrouve donc avec $Y'^2=4\sqrt{2}X'$, équation d'une parabole de paramètre $2\sqrt{2}$. Le sommet a pour coordonnées dans le nouveau repère $X'=Y'=0$, soit $X=Y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, puis $x=0$ et $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}=1$. L'axe focal fait un angle de $\dfrac{\pi}{4}$ avec l'horizontale et il passe par le point $(0,1)$, il a donc pour équation $y=x+1$. Le foyer vérifie $X'=\sqrt{2}$ et $Y'=0$, soit $X=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ et $Y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, puis $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}=1$, et $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times 2\sqrt{2}=2$. On a donc simplement $F(1;2)$. Il est ici très facile de calculer également une équation de la directrice : elle est parallèle à la deuxième bissectrice et passe par le point symétrique de F par rapport à $(0;1)$, donc par le point $K(-1;0)$, et a pour équation $y=-x-1$.



TD n°6 : révisions pour le DS4

PTSI B Lycée Eiffel

14 décembre 2012

Exercice 1 (tiré du sujet B Banque PT 2012)

Dans le plan euclidien rapporté au repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$, on considère la conique $\mathcal{E}_p$ d'équation $x^2 + y^2 - 2pxy + 2(py - x) = 0$, où p désigne un réel. On désigne par P le point de coordonnées $(0; \alpha)$ avec α réel non nul et par Q le point de coordonnées $(0; 2\alpha)$.

1. Dans cette question, on suppose $p = 0$.
   (a) Préciser alors la nature et les éléments caractéristiques de $\mathcal{E}_0$.
   (b) Former les équations des tangentes à $\mathcal{E}_0$ menées par P. On désigne par (D) la tangente non verticale.
   (c) Former les équations des tangentes à $\mathcal{E}_0$ menées par Q. On désigne par (D_0) la tangente non verticale.
   (d) Déterminer les coordonnées du point R, intersection des droites (D) et (D_0).
   (e) On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des points R lorsque α décrit $\mathbb{R}$. Déterminer la nature de $\mathcal{P}$.
2. Déterminer, suivant les valeurs du réel p, la nature de $\mathcal{E}_p$.
3. Donner les vecteurs directeurs des axes ainsi que le centre ω_p, lorsqu'il existe, de $\mathcal{E}_p$.

Exercice 2 (tiré du sujet B banque PT 2011)

Le plan euclidien est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. On donne les points $F(1, 0)$ et $A(1, -2)$. Soit $\mathcal{P}$ la parabole passant par A, de foyer F et de sommet O. Tout point de $\mathcal{P}$ est repéré par son ordonnée $2t$, où t désigne un paramètre réel.

1. Former une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.
2. Soit M le point de $\mathcal{P}$, d'ordonnée $2t$, former une équation de la tangente en M à $\mathcal{P}$. Donner une équation de la perpendiculaire à cette tangente passant par A. Déterminer les coordonnées du point d'intersection N de ces deux droites.
3. Étudier et tracer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points N, lorsque M décrit $\mathcal{P}$, c'est-à-dire lorsque t décrit $\mathbb{R}$. On dressera le tableau de variations des coordonnées de N, on précisera les branches infiniesainsi que le vecteur directeur de la tangente à $\mathcal{E}$ au point A.
4. On considère trois points de $\mathcal{E}$ correspondant aux valeurs t_1, t_2 et t_3 du paramètre. Montrer que ces trois points sont alignés si et seulement si $t_1t_2t_3 - (t_1 + t_2 + t_3) = \alpha$, où α est un réel dont on donnera la valeur.
5. Soit N_0 le point de $\mathcal{E}$ correspondant à une valeur t_0 du paramètre t ; la tangente à $\mathcal{E}$ en N_0 recoupe $\mathcal{E}$ au point K, correspondant à une valeur θ du paramètre t. Exprimer θ en fonction de t_0.
6. Le point K est appelé tangentiel du point N_0. Montrer que si trois points de $\mathcal{E}$ sont alignés, alors leurs tangentiels sont également alignés.
7. Quel est le tangentiel du point correspondant à $t = 1$?

Corrigé du TD n°6

Exercice 1 (tiré du sujet B Banque PT 2012)

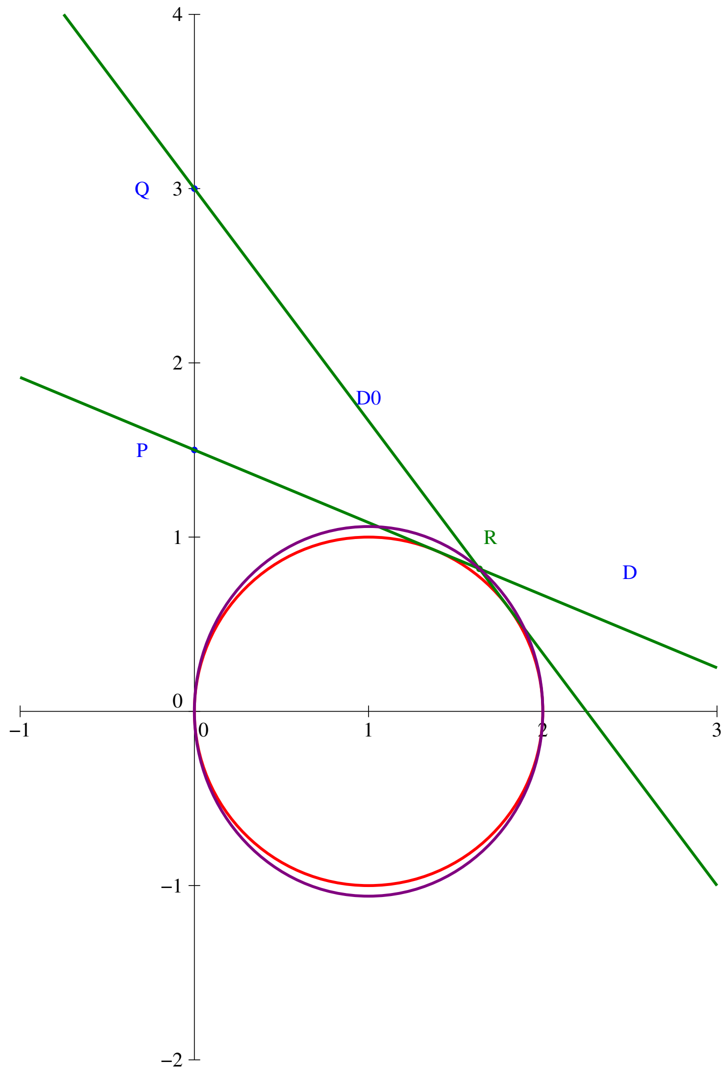
1. (a) La conique a dans ce cas pour équation $x^2 + y^2 - 2x = 0$, soit $(x-1)^2 + y^2 = 1$. On reconnait un cercle de centre $A(1,0)$ et de rayon 1.

(b) Les tangentes au cercle ont une équation de la forme $(x-1)(x_M - 1) + yy_M = 1$, où M désigne un point du cercle. Une telle tangente passe par le point $P(0,\alpha)$ si $1 - x_M + \alpha y_M = 1$, soit $x_M = \alpha y_M$. Comme le point doit de plus appartenir au cercle, il vérifie $(x_M - 1)^2 + y_M^2 = 1$, soit $x_M^2 - 2x_M + 1 + \dfrac{x_M^2}{\alpha^2} = 1$, donc $x_M^2\left(1 + \dfrac{1}{\alpha^2}\right) - 2x_M = 0$. On obtient deux valeurs possibles pour x_M : soit $x_M = 0$, et alors $y_M = 0$ et la tangente a simplement pour équation $1 - x = 1$, soit $x = 0$, il s'agit de l'axe des ordonnées (c'est la tangente verticale évoquée par l'énoncé) ; soit $x_M = \dfrac{2\alpha^2}{1+\alpha^2}$, et $y_M = \dfrac{2\alpha}{1+\alpha^2}$. La tangente a alors pour équation (en multipliant tout par $1+\alpha^2$) $(x-1)(2\alpha^2 - 1 - \alpha^2) + 2y\alpha = 1 + \alpha^2$, soit $2\alpha y + (\alpha^2 - 1)x = 2\alpha^2$. Finalement, on peut mettre l'équation sous la forme $y = \alpha + \dfrac{1-\alpha^2}{2\alpha}x$.

(c) On peut procéder de la même façon : une tangente passe par le point Q si $1 - x_M + 2\alpha y_M = 1$, soit $x_M = 2\alpha y_M$. En intégrant cette condition à l'équation de cercle, $x_M^2 - 2x_M + 1 + \dfrac{x_M^2}{4\alpha^2} = 1$, soit $x_M\left(1 + \dfrac{1}{4\alpha^2}\right) - 2x_M = 0$. On retrouve la possibilité x_M qui donne l'axe des ordonnées comme tangente verticale, et la seconde possibilité $x_M = \dfrac{8\alpha^2}{4\alpha^2+1}$. On a alors $y_M = \dfrac{4\alpha}{4\alpha^2+1}$. La tangente D_0 a donc pour équation $(x-1)(8\alpha^2 - 4\alpha^2 - 1) + 4\alpha y = 1 + 4\alpha^2$, soit $4\alpha y + (4\alpha^2 - 1)x = 8\alpha^2$, ou encore l'équation finale $y = 2\alpha + \dfrac{1-4\alpha^2}{4\alpha}$.

(d) En reprenant les deux équations obtenues pour D et D_0, on obtient la condition $\alpha + \dfrac{1-\alpha^2}{2\alpha}x = 2\alpha + \dfrac{1-4\alpha^2}{4\alpha}x$, soit $x \times \dfrac{2 - 2\alpha^2 - 1 + 4\alpha^2}{4\alpha} = \alpha$, donc $x = \dfrac{4\alpha^2}{1+2\alpha^2}$. On trouve alors $y = \alpha + \dfrac{(1-\alpha^2)2\alpha}{1+2\alpha^2} = \dfrac{3\alpha}{1+2\alpha^2}$.

(e) Un schéma où on tracer plusieurs points R permet de tenter de se convaincre que ces points se situent sur une ellipse de même centre que le cercle, c'est-à-dire $A(1,0)$. Vérifions-le : $(x_R - 1)^2 = \dfrac{(2\alpha^2-1)^2}{(1+2\alpha)^2} = \dfrac{4\alpha^4 - 4\alpha^2 + 1}{(1+2\alpha^2)^2}$, et $y_R^2 = \dfrac{9\alpha^2}{(1+2\alpha^2)^2}$, on cherche deux réels a et b tels que $a(x-1)^2 + by^2 = 1$, ce qui donne la condition $a(4\alpha^4 - 4\alpha^2 + 1) + 9b\alpha^2 = 1 + 4\alpha^2 + 4\alpha^4$. Par identification, on trouve $4a = 4$, $-4a + 9b = 4$ et $a = 1$, soit $a = 1$ et $b = \dfrac{8}{9}$. L'ensemble $\mathcal{P}$ a donc pour équation $(x-1)^2 + \dfrac{8}{9}y^2 = 1$, c'est une ellipse centrée en A, de demi-grand axe $\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$ et de demi-petit axe 1. Attention, son axe focal est vertical. Une figure (pas demandée par l'énoncé) pour illustrer ceci (le cercle en rouge, l'ellipse finale en violet, un exemple de point R obtenu pour $\alpha = \dfrac{3}{2}$ en vert) :

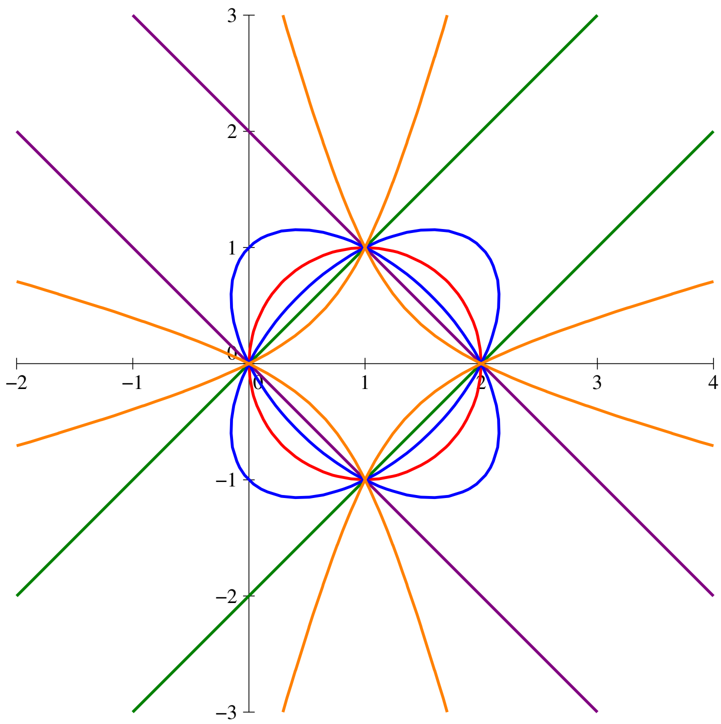


2. La courbe du second degré étudiée a pour discriminant $\delta = 1 - \dfrac{4p^2}{4} = 1 - p^2$. On est donc en présence d'une courbe de type parabole quand $p = 1$ ou $p = -1$, d'une courbe de type ellipse quand $p \in]-1; 1[$, et d'une courbe de type hyperbole quand $|p| > 1$. Pour être plus précis, commençons la réduction en éliminant les termes en x et en y : si on pose $X = x - a$ et $Y = y - b$, on obtient $x^2 - 2x + y^2 + 2py - 2pxy = (X+a)^2 - 2(X+a) + (Y+b)^2 + 2p(Y+b) - 2p(X+a)(Y+b) = X^2 + 2aX + a^2 - 2X - 2a + Y^2 + 2bY + b^2 + 2pY + 2pb - 2pXY - 2apY - 2bpX - 2pab = X^2 + Y^2 - 2pXY + (2a - 2 - 2bp)X + (2b + 2p - 2ap)Y + a^2 - 2a + b^2 + 2pb - 2pab$. Il faut donc choisir a et b tels que $a = bp + 1$ et $b + p = ap$, soit $a = ap^2 - p^2 + 1$, donc $a = 1$, et $b = 0$. L'équation se réduit alors fort simplement à $X^2 + Y^2 - 2pXY = 1$.

   On effectue alors une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{4}$, ce qui revient à poser $X = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')$ et $Y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')$. L'équation devient alors $\dfrac{1}{2}(x' - y')^2 + \dfrac{1}{2}(x' + y')^2 - p(x' - y')(x' + y') = 1$, soit $(1 - p)x'^2 + (1 + p)y'^2 = 1$. Si $p = 1$, on est ramené au cas très particulier $2y'^2 = 1$, ce qui donne deux droites parallèles. De même si $p = -1$, on a deux droites parallèles. Si $p \in]-1; 1[$, les deux nombres $1 + p$ et $1 - p$ sont strictement positifs, et on reconnait une équation résuite d'ellipse. De même, si $|p| > 1$, on reconnait une équation réduite d'hyperbole (l'un des deux facteurs étant alors négatif, l'axe de l'hyperbole change selon que $p > 1$ ou $p < -1$).

3. Comme la rotation effectuée est toujours d'angle $\dfrac{\pi}{4}$, les axes sont toujours dans les directions des deux bissectrices des axes du repère initial, et donc dirigées respectivement par le vecteur

$\overrightarrow{u}(1,1)$ et le vecteur $\overrightarrow{v}(-1,1)$. Au vu des valeurs obtenues obtenues pour a et b dans la première partie du calcul, le centre ω est toujours situé en $A(1,0)$. Pour finir en beauté, un tracé de quelques-unes des courbes : en rouge le cercle obtenu pour $p=0$, en vert les deux droites pour $p=1$, en violet les deux droites pour $p=-1$, en bleu les deux ellipses obtenues pour $p=\pm\dfrac{1}{2}$, et en orange les deux hyperboles pour $p=\pm 2$:



Exercice 2 (tiré du sujet B banque PT 2011)

Le plan euclidien est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$. On donne les points $F(1,0)$ et $A(1,-2)$. Soit $\mathcal{P}$ la parabole passant par A, de foyer F et de sommet O. Tout point de $\mathcal{P}$ est repéré par son ordonnée $2t$, où t désigne un paramètre réel.

1. Si la parabole a pour sommet O et foyer F qui est situé sur l'axe des abscisses, on est dans la situation de l'équation réduite, avec ici $p=2x_F=2$. Son équation est donc $y^2=4x$, et on constate que cette parabole passe bien par le point A puisque $y_A^2=(-2)^2=4=4x_A$.

2. Le point d'ordonnée $2t$ vérifie donc $4x_M=(2t)^2=4t^2$, soit $x_M=t^2$. L'équation de la tangente en M est donc $yy_M=p(x+x_M)$, c'est-à-dire $2ty=2(x+t^2)$, ou encore $2t^2-2ty+2x=0$, ou plus simplement $ty-x-t^2=0$. En particulier, cette tangente a pour vecteur normal $(1,-t)$. Toute perpendiculaire à cette tangente a donc pour vecteur directeur $(1,-t)$ et une équation de la forme $tx+y+c=0$. Pour qu'elle passe par le point A, on doit avoir $t-2+c=0$, soit $c=2-t$. L'équation de la perpendiculaire est donc $tx+y+2-t=0$. Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection, il faut résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcl} -x & + & ty & = & t^2 \\ tx & + & y & = & t-2 \end{array}\right.$. En multipliant la première équation par t et en l'ajoutant à la seconde, on trouve $(t^2+1)y=t^3+t-2$, soit $y=\dfrac{t^3+t-2}{t^2+1}$. On en déduit $x=ty-t^2=\dfrac{t^4+t^2-2t-t^4-t^2}{t^2+1}=-\dfrac{2t}{t^2+1}$. Le point N a donc pour coordonnées $\left(-\dfrac{2t}{t^2+1};\dfrac{t^3+t-2}{t^2+1}\right)$.

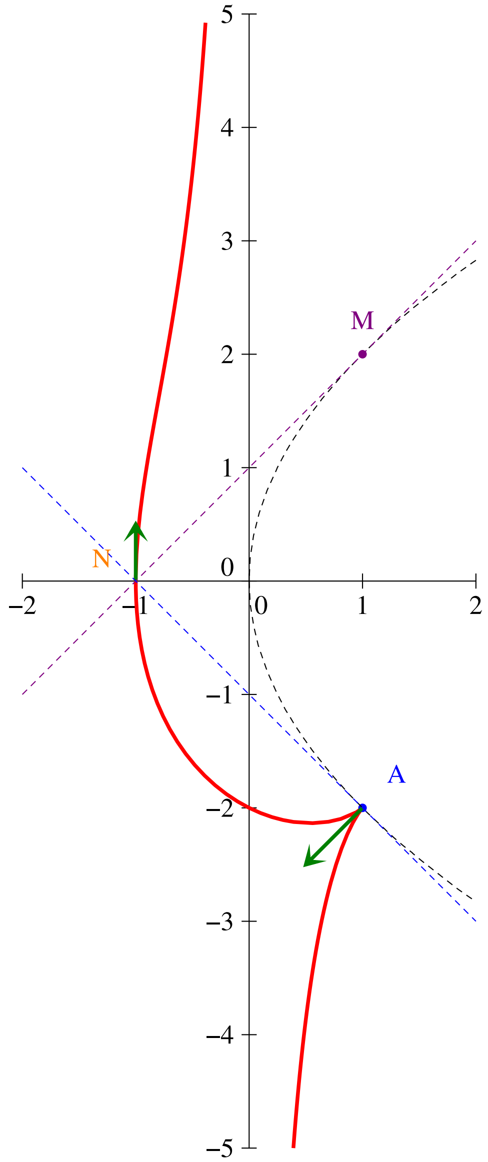
3. Il s'agit en fait d'étudier la courbe paramétrée définie par $\begin{cases} x(t) &= -\dfrac{2t}{t^2+1} \\ y(t) &= \dfrac{t^3+t-2}{t^2+1} \end{cases}$. Le dénominateur ne s'annulant jamais, la courbe est définie sur $\mathbb{R}$. Les deux fonctions coordonnées sont dérivables sur $\mathbb{R}$, de dérivées $x'(t) = \dfrac{-2(t^2+1)+2t\times 2t}{(t^2+1)^2} = \dfrac{2t^2-2}{(t^2+1)^2}$, et $y'(t) = \dfrac{(3t^2+1)(t^2+1)-2t(t^3+t-2)}{(t^2+1)^2} = \dfrac{t^4+2t^2+4t+1}{(t^2+1)^2}$. La dérivée x' s'annule en 1 et en -1, elle est négative entre les racines. On calcule de plus aisément $x(1) = -1$; $y(1) = 0$; $x(-1) = 1$ et $y(-1) = -2$. Pour y', c'est plus compliqué, le numérateur de degré 4 a pour racine évidente -1, on peut le factoriser sous la forme $(t+1)(at^3+bt^2+ct+d) = at^4+(a+b)t^3+(b+c)t^2+(c+d)t+d$. Par identification, on trouve $a = 1$, $b = -1$, $c = 3$ et $d = 1$. reste à déterminer le signe de $g(t) = t^3 - t^2 + 3t + 1$, qui n'a pas le bon gout d'avoir une racine évidente. Dérivons : $g'(t) = 3t^2 - 2t + 3$ a pour discriminant $\Delta = 4 - 36 < 0$, donc cette dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}$. La fonction g est donc strictement croissante et s'annule nécessairement une unique fois sur $\mathbb{R}$, en une valeur que l'on notera γ. Comme $g(0) = 1$ et $g(-1) = -2$, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que $\gamma \in]-1;0[$ (une dichotomie plus poussée permet d'obtenir, à l'aide de la calculatrice, $\gamma \simeq -0.3$. On ne pourra évidemment pas donner de valeurs précises pour $x(\gamma)$ et $y(\gamma)$, on se contentera de placer le point de façon cohérente avec le tableau de variations. Les limites en $\pm\infty$ s'obtiennent de manière immédiate à l'aide de la règle du quotient des termes de plus haut degré, pour donner le tableau de variations suivant :

t	$-\infty$		-1		γ		1		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$x(\gamma)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0
$y'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$y(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$y(\gamma)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Les branches infinies seront vite étudiées puisqu'on a de chaque côté l'axe des ordonnées comme asymptote oblique. Quant au point A, il correspond au point stationnaire de l'arc, pour $t = -1$. Calculons les dérivées secondes : $x''(t) = \dfrac{4t(t^2+1)^2 - 4t(t^2+1)(2t^2-2)}{(t^2+1)^4} = \dfrac{4t^3+4t-8t^3+8t}{(t^2+1)^3} = \dfrac{-4t^3+12t}{(t^2+1)^3}$ donc $x''(-1) = -1$;

et $y''(t) = \dfrac{(4t^3+4t+4)(t^2+1)^2 - 4t(t^2+1)(t^4+2t^2+4t+1)}{(t^2+1)^4}$

$= \dfrac{4(t^3+t+1)(t^2+1) - 4t(t^4+2t^2+4t+1)}{(t^2+1)^3} = \dfrac{-12t^2+4}{(t^2+1)^3}$. Notons qu'on n'a pas vraiment besoin de développer pour calculer $y''(-1) = -1$. La tangente au point A est donc dirigée par le vecteur $(-1,-1)$. Voici une allure de la courbe, avec en pointillés la parabole initiale, et la construction du point N pour un des points de la parabole :



4. Attention, les calculs vont commencer à être très moches. Pour que les trois points soient alignés, si on les note N_1, N_2 et N_3 les trois points correspondants, on doit avoir $\det(\overrightarrow{N_1N_2}, \overrightarrow{N_1N_3}) = 0$. Notons $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{N_1N_2}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{N_1N_3}$. On calcule alors $x_{\overrightarrow{u}} = \dfrac{-2t_2}{t_2^2+1} + \dfrac{2t_1}{t_1^2+1} = \dfrac{n}{(t_1^2+1)(t_2^2+1)}$, avec $n = 2t_1(t_2^2+1) - 2t_2(t_1^2+1) = 2(t_1t_2^2 + t_1 - t_2t_1^2 - t_2) = 2(t_2-t_1)(t_1t_2-1)$. De même, on calcule $y_{\overrightarrow{u}} = \dfrac{n'}{(t_1^2+1)(t_2^2+1)}$, avec $n' = (t_2^3+t_2-2)(t_1^2+1) - (t_1^3+t_1-2)(t_2^2+1) = t_2^3t_1^2 - t_1^3t_2^2 + t_2^3 - t_1^3 + t_2t_1^2 - t_1t_2^2 + 2t_2^2 - 2t_1^2 + t_2 - t_1 = (t_2-t_1)(t_1^2t_2^2 + t_1^2 + t_1t_2 + t_2^2 - t_1t_2 + 2t_1 + 2t_2 + 1) = (t_2-t_1)(t_1^2t_2^2 + t_1^2 + t_2^2 + 2t_1 + 2t_2 + 1)$. On aurait évidemment des formules similaires pour le vecteur $\overrightarrow{v}$ en remplaçant tous les t_2 par des t_3. Comme on a un facteur $\dfrac{t_2-t_1}{(t_1^2+1)(t_2^2+1)}$ sur chacune des deux coordonnées de $\overrightarrow{u}$, ce terme se mettra en facteur du déterminant et peut être oublié (il ne s'annule que si $t_1 = t_2$, cas trivial sans intérêt).
Le déterminant est donc nul si $(2t_1t_2 - 2)(t_1^2t_3^2 + t_1^2 + t_3^2 + 2t_1 + 2t_3 + 1) - (2t_1t_3 - 2)(t_1^2t_2^2 + t_1^2 + t_2^2 + 2t_1 + 2t_2 + 1) = 0$, soit (on peut enlever les facteurs 2) $t_1^3t_2t_3^2 + t_1^3t_2 + t_1t_2t_3^2 + 2t_1^2t_2 + 2t_1t_2t_3 + t_1t_2 - t_1^2t_3^2 - t_1^2 - t_3^2 - 2t_1 - 2t_3 - 1 - t_1^3t_2^2t_3 - t_1^3t_3 - t_1t_2^2t_3 - 2t_1^2t_3 - 2t_1t_2t_3 - t_1t_3 + t_1^2t_2^2 + t_1^2 + t_2^2 + 2t_1 + 2t_2 + 1 = 0$. Beurk, après dégraissage et regroupement de termes similaires, il reste $t_1^3t_2t_3^2 - t_1^3t_2^2t_3 + t_1^3t_2 - t_1^3t_3 + t_1t_2t_3^2 - t_1t_2^2t_3 + 2t_1^2t_2 - 2t_1^2t_3 + t_1t_2 - t_1t_3 + t_1^2t_2^2 - t_1^2t_3^2 +$

$t_2^2 - t_3^2 + 2t_2 - 2t_3 = 0$. On peut tout factoriser par $t_3 - t_2$ qui peut être supposé non nul pour trouver $t_1^3t_2t_3 - t_1^3 + t_1t_2t_3 - 2t_1^2 - t_1 - t_1^2t_2 - t_1^2t_3 - t_2 - t_3 - 2 = 0$. Cette magnifique expression peut encore se factoriser par $t_1^2 + 1$ (mais si, regardez bien !), qui ne s'annule jamais, donc il reste la condition presque simple $t_1t_2t_3 - t_1 - 2 - t_2 - t_3 = 0$. On trouve bien la condition affirmée par l'énoncé avec $\alpha = 2$. Ouf.

5. Les calculs ne vont pas vraiment s'arranger dans cette question. Vu les dérivées calculées plus haut, la tangente en N_0 a une équation de la forme $(t_0^4 + 2t_0^2 + 4t_0 + 1)(x - x(t_0)) + (2 - 2t_0^2)(y - y(t_0)) = 0$. En multipliant tout par $t_0^2 + 1$, la constante (mutlipliée par $t_0^2 + 1$ donc puisqu'il y a un facteur deux facteurs $t_0^1 + 2$ quand on fait les produits alors qu'on en veut un seul) vaut $(t_0^4 + 2t_0^2 + 4t_0 + 1) \times 2t_0 + (2t_0^2 - 2) \times (t_0^3 + t_0 - 2) = 2t_0^5 + 4t_0^3 + 8t_0^2 + 2t_0 + 2t_0^5 + 2t_0^3 - 4t_0^2 - 2t_0^3 - 2t_0 + 4 = 4(t_0^5 + t_0^3 + t_0^2 + 1) = (t_0^2 + 1)(4t_0^3 + 4)$. Le point de paramètre θ appartient donc à cette tangente si, en multipliant tout par $\theta^2 + 1$, $-2\theta(t_0^4 + 2t_0^2 + 4t_0 + 1) + (2 - 2t_0^2)(\theta^3 + \theta - 2) + (4t_0^3 + 4)(1 + \theta^2) = 0$. En divisant tout par 2 et en développant pour regrouper suivant les puissances de θ, on trouve l'équation du troisième degré $(1 - t_0^2)\theta^3 + (2t_0^3 + 2)\theta^2 + (-t_0^4 - 3t_0^2 - 4t_0)\theta + 2t_0^3 + 2t_0^2 = 0$. Le réel t_0 doit logiquement être racine de ce polynôme puisque par définition la tangente coupe la courbe en son point de paramètre t_0. On peut donc factoriser sous la forme $(\theta - t_0)(a\theta^2 + b\theta + c) = a\theta^3 + (b - at_0)\theta^2 + (c - bt_0)\theta - ct_0$. Par identification, on trouve $a = 1 - t_0^2$; $b = at_0 + 2t_0^3 + 2 = t_0^3 + t_0 + 2$ et $c = bt_0 - t_0^4 - 3t_0^2 - 4t_0 = -2t_0^2 - 2t_0$. Reste à déterminer les racines du tribome $(1 - t_0^2)\theta^2 + (t_0^3 + t_0 + 2)\theta - 2t_0^2 - 2t_0$. En fait, t_0 est à nouveau racine de ce trinome (la tangente coupe « deux fois » la courbe au même endroit, ce qui est cohérent si on veut obtenir une seule solution θ distincte de t_0), vérifions-le : $(1 - t_0^2)t_0^2 + (t_0^3 + t_0 + 2)t_0 - 2t_0^2 - 2t_0 = t_0^2 - t_0^4 + t_0^4 + t_0^2 + 2t_0 - 2t_0^2 - 2t_0 = 0$. Intuile de factoriser, on peut utiliser le fait que le produit des racines vaut $\dfrac{-2t_0^2 - 2t_0}{1 - t_0^2}$ pour en déduire que la dernière racine est égale à $\dfrac{-2t_0^2 - 2t_0}{t_0(1 - t_0^2)} = \dfrac{-2(t_0 + 1)}{(1 + t_0)(1 - t_0)} = \dfrac{2}{t_0 - 1}$. Tout ça pour obtenir simplement $\theta = \dfrac{2}{t_0 - 1}$? Mais oui. Bonne chance pour trouver une méthode plus efficace.

6. On a vu plus haut que trois points étaient alignés si $t_1t_2t_3 - t_1 - t_2 - t_3 = 2$. Calculons alors la valeur correspondante pour les tangentiels, c'est-à-dire $\theta_1\theta_2\theta_3 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 = \dfrac{8}{(t_1 - 1)(t_2 - 1)(t_3 - 1)} - \dfrac{2}{t_1 - 1} - \dfrac{2}{t_2 - 1} - \dfrac{2}{t_3 - 1}$. En mettant tout brutalement au même dénominateur, on tombe sur $\dfrac{8 - 2(t_2t_3 - t_2 - t_3 + 1) - 2(t_1t_3 - t_1 - t_3 + 1) - 2(t_1t_2 - t_1 - t_2 + 1)}{t_1t_2t_3 - t_1t_3 - t_2t_3 - t_1t_2 + t_1 + t_2 + t_3 - 1}$ $= \dfrac{2(1 - t_1t_2 - t_1t_3 - t_2t_3 + 2t_1 + 2t_2 + 2t_3)}{t_1 + t_2 + t_3 + 2 - t_1t_3 - t_2t_3 - t_1t_2 + t_1 + t_2 + t_3 - 1}$ $= \dfrac{2(1 - t_1t_2 - t_1t_3 - t_2t_3 + 2t_1 + 2t_2 + 2t_3)}{1 - t_1t_2 - t_1t_3 - t_2t_3 + 2t_1 + 2t_2 + 2t_3} = 2$. Les trois tangentiels vérifient la condition, ils sont donc alignés.

7. Il n'y en a pas ! La tangente en $t = 1$, qui est verticale, ne recoupe pas la courbe. d'ailleurs, la formule obtenue pose un gros problème pour $t = 1$. En fait, quand $t = 1$, le polynome du troisième degré obtenu plus haut est égal à $4\theta^2 - 8\theta + 4 = 4(\theta - 1)^2$ (le terme en θ^3 disparait), il n'a donc que 1 comme racine double. Je suis sûr qu'après avoir achevé ce TD, vous êtes extrêmement impatients d'aller passer les concours l'an prochain ! Ne vous inquiétez pas trop quand même, toutes les épreuves ne sont pas aussi calculatoires.

Feuille d'exercices n°8 : Ensembles.

PTSI B Lycée Eiffel

14 décembre 2012

Exercice 1 (*)

On se place dans $\mathbb{R}$ et on considère les ensembles $A = [4; 7]$; $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leqslant 5\}$, et $C = \mathbb{N}$. Donner l'expression la plus simple possible pour chacun des ensembles suivants : $A \cup B$; $A \cap C$; $\mathbb{R} \backslash B$; $A \cap \overline{C}$; $(A \cup B) \cap C$; $A \cup (B \cap C)$; $\overline{A} \cap (\overline{B} \cup C)$.

Exercice 2 (***)

Soient A et B deux sous-ensembles d'un même ensemble E. On appelle différénce symétrique de A et de B l'ensemble noté $A\Delta B$ et défini par $A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$.

1. Montrer qu'on a également $A\Delta B = (A \cup B)\backslash(A \cap B)$.
2. Montrer que la différence symétrique est associative (c'est-à-dire que $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$).
3. Montrer que, si A, B et C sont trois sous-ensembles de E, $A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$.
4. Montrer que, l'ensemble A étant fixé, il existe un unique ensemble B tel que $A\Delta B = \emptyset$.
5. Montrer de même qu'il existe un unique B tel que $A\Delta B = E$.
6. Plus généralement, montrer que, quel que soit le sous-ensemble X de E, il existe un unique B tel que $A\Delta B = X$ (en terme plus savant, l'application $B \mapsto A\Delta B$ est une bijection de $\mathcal{P}(E)$ dans lui-même).

Exercice 3 (**)

Déterminer pour chacune des applications suivantes si elle est injective, surjective ou bijective (ou rien du tout !) de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$:

- $f_1(n) = n + 5$
- $f_2(n) = n^2$
- $f_3(n) = n + 1$ si n est pair, et $f_3(n) = n - 1$ si n est impair
- $f_4(n) = Ent\left(\frac{n}{3}\right)$
- $f_5(n) = |n - 10|$

Exercice 4 (*)

Pour chacune des applications suivantes, données avec leur ensemble de départ E et leur ensemble d'arrivée F, déterminer si elles sont injectives, surjectives, bijectives (tous les moyens sont bons, dérivation comprise) :

1. $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, $E = F = \mathbb{R}$.
2. $g(x) = x^3 + x - 2$, $E = F = \mathbb{R}$.
3. $h(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$, $E =]-\infty; -1] \cup [2; +\infty[$, $F = \mathbb{R}_+$.

4. $i(x) = \dfrac{3x+2}{x-1}$, $E = \mathbb{R}\backslash\{1\}$, $F = \mathbb{R}\backslash\{3\}$.

Exercice 5 (***)

Soit $f : E \to E$ une application telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si elle est surjective (démontrer chaque implication séparément). Quelle est alors sa réciproque ?

Exercice 6 (** à *****)

Un ensemble est E est dit **dénombrable** s'il existe une application $f : E\mathbb{N}$ bijective. Comme trouver une application bijective est parfois délicat, on pourra admettre le théorème suivant : tout ensemble infini E pour lequel il existe une application injective de E dans $\mathbb{N}$ est dénombrable.

1. Montrer que l'ensemble des entiers pairs est dénombrable.
2. Montrer que $\mathbb{Z}$ est dénombrable.
3. Montrer que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.
4. Montrer que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.
5. Montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable (c'est ça qui vaut une difficulté de *****).
6. Montrer qu'il existe une bijection de $]0;1[$ dans $\mathbb{R}$.
7. Montrer qu'il y a « autant de points » dans une droite que dans un demi-cercle (autrement dit qu'il existe une bijection de l'un vers l'autre).

Exercice 7 : théorème de Cantor-Bernstein (****)

Soient X et Y deux ensembles tels qu'il existe deux applications $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ toutes les deux injectives. On veut prouver qu'il existe une bijection de X sur Y. Pour cela, on note $\varphi = f \circ g$. On définit les sous-ensembles A_i de Y par récurrence de la façon suivante : $A_0 = Y\backslash f(X)$, $A_1 = \varphi(A_0)$ et, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $A_{i+1} = \varphi(A_i)$. On pose enfin $A = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i$.

1. Montrer que les ensembles A_i sont disjoints.
2. Montrer que l'ensemble A est stable par φ (c'est-à-dire que $\varphi(A) \subset A$).
3. On pose $B = g(A)$, et $C = X\backslash B$. Montrer que $f(B) = A\backslash A_0$, et que tout élément de C possède un unique antécédent par g dans Y. On notera cet antécédent $g^{-1}(x)$. Montrer que $g^{-1}(x) \notin A$.
4. On définit l'application $h : X \to Y$ en posant $h(x) = f(x)$ si $x \in B$, et $h(x) = g^{-1}(x)$ si $x \in C$. Montrer que h est une bijection de X sur Y.

Exercice 8 (* à **)

Montrer par récurrence les propriétés suivantes :

1. $\forall n \geqslant 4$, $2^n \leqslant n!$
2. $\forall x \geqslant 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.
3. $\forall n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} k \times k! = (n+1)! - 1$
4. Le nombre de diagonales dans un polygône à n côtés est $\dfrac{n(n-3)}{2}$.
5. La dérivée n-ème de la fonction $f : x \mapsto (x-1)e^{-x}$ est donnée par $f^{(n)}(x) = (-1)^n(x-n-1)e^{-x}$.

Exercice 9 (**)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = u_1 = 0$, $u_2 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$. Calculer les premiers termes de la suite, émettre une conjecture sur la valeur de u_n, puis la prouver par récurrence.

Exercice 10 (*)

Exprimer à l'aide du symbole Σ les expressions suivantes :

1. $S_1 = 2^3 + 2^4 + 2^5 + \cdots + 2^{12}$
2. $S_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{4} + \dfrac{3}{8} + \dfrac{4}{16} + \cdots + \dfrac{10}{1\ 024}$
3. $S_3 = a + \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{a^3}{3} + \cdots + \dfrac{a^n}{n}$
4. $S_4 = 2 - 4 + 6 - 8 + \cdots + 50$

Exercice 11 (**)

Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}(2k+1)$
2. $\displaystyle\sum_{k=807}^{k=2012} 3$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}(6k^2+4k+1)$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^k$
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} k(2k^2-1)$
6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=18} \frac{1}{3^k}$
7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} 3^{2k}$
8. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} 2^k + k^2 + 2$
9. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{2^k}{3^{k+1}}$

Exercice 12 (**)

Le but de cet exercice est de calculer la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n}(2k+1)^3$ de trois façons différentes.

1. Écrire S_n sans utiliser de symbole somme. De combien de termes cette somme est-elle composée ?
2. Calculer S_n en développant $(2k+1)^3$.
3. On pose $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n}(2k)^3$ et $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=2n+1} k^3$. Expliquer pourquoi $U_n = S_n + T_n$ (à l'aide d'une phrase si vous n'arrivez pas à le faire par le calcul).
4. Calculer T_n et U_n.
5. Retrouver la valeur de S_n à l'aide des deux questions précédentes.
6. Prouver par récurrence que $S_n = (n+1)^2(2n^2+4n+1)$.

Exercice 13 (**)

Calculer les sommes doubles suivantes :

$\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} ij$; $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} ij$; $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i}{j}$; $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |i-j|$ et $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} i2^j$

Exercice 14 (*)

Dans un jeu de tarot, il y a 21 atouts. On en tire (simultanément) cinq au hasard. Combien y a-t-il de tirages pour lesquels :

- Au moins un atout est un multiple de cinq ?
- Il y a exactement un multiple de cinq et un multiple de trois ?
- On a tiré le 1 ou le 21 ?

Exercice 15 (*)

Une assemblée est constituée de 200 membres. Elle doit élire une commission constituée de trois parlementaires (chaque membre vote donc pour trois personnes). On s'intéresse au nombre de membres ayant voté pour au moins un parmi trois candidats qu'on désignera par A, B et C (et qui ne sont pas les seuls candidats). On sait que 112 membres ont voté pour A, 67 pour A et B, 32 pour A et C, 12 pour A, B et C, 5 pour B et C mais pas pour A, 56 pour C mais pas pour A ni B, et 22 pour B mais pas pour A.

1. Combien ont voté pour A mais pas pour B ?
2. Combien ont voté pour C ?
3. Combien n'ont voté pour aucun des trois candidats ?
4. Combien ont voté uniquement pour A ?

Exercice 16 (* à ***)

On tire 5 cartes dans un jeu de 32 cartes usuel. Combien y a-t-il de tirages possibles vérifiant les conditions suivantes :

- Aucune condition.
- Il y a deux Rois parmi les cinq cartes tirées.
- Il y a au moins un pique parmi les cartes tirées.
- Il y a un As et deux carreaux parmi les cartes tirées.
- Il n'y a pas de cartes en-dessous du 9 parmi les cartes tirées.
- Les cinq cartes tirées forment deux paires (mais pas de brelan).
- Les cinq cartes tirées sont de la même couleur.
- Les cinq cartes tirées forment une quinte flush (cinq cartes qui se suivent dans la même couleur).

Exercice 17 (*)

Développer les expressions suivantes : $(x-3)^5$; $(2x+3y)^3$; $(x-1)^7$.

Exercice 18 (*)

Une grille de mots croisés est un tableau rectangulaire à n lignes et p colonnes, (et donc constitué de $n \times p$ cases), parmi lesquelles un certain nombre k (inférieur ou égal à np) sont noircies (et les autres blanches).

1. Combien y a-t-il de grilles différentes possibles ?
2. Combien ont les quatre coins noirs ?
3. Combien ont exactement deux coins noirs ?
4. Combien ont au plus une case noire sur chaque ligne ?
5. On suppose pour cette question $n = p = k$. Combien y a-t-il alors de grilles ayant exactement une case noire sur chaque ligne et sur chaque colonne ?

6. Calculer le nombre de façons de placer les neuf chiffres 1 sur une grille de Sudoku vierge (pour ceux qui ne maitrisent pas les règles du Sudoko : il s'agit d'une grille à neuf lignes et neuf colonnes, et il doit y avoir un 1 sur chaque ligne et sur chaque colonne ; de plus, si on découpe la grille en neuf petites grilles de neuf cases en regroupant lignes et colonnes trois par trois, il doit y avoir un 1 exactement dans chacune de ces petites grilles).
7. Comparer ce nombre avec le nombre de façons de répartir 9 chiffres 1 dans la grille sans respecter les règles du Soduko (donner la valeur numérique pour chacun des deux).

Corrigé de la feuille d'exercices n°8

Exercice 1 (*)

- Commençons par constater que $|x| \leqslant 5 \Leftrightarrow -5 \leqslant x \leqslant 5$, donc $B = [-5;5]$.
- Sans difficulté, $A \cup B = [4;7] \cup [-5;5] = [-5;7]$.
- L'ensemble $A \cap C$ est constitué des nombres entiers naturels appartenant à A, donc $A \cap C = \{4;5;6;7\}$.
- Un exemple élémentaire de complémentare, on fait attention au sens des crochets : $\mathbb{R} \backslash B = \mathbb{R} \backslash [-5;5] =]-\infty;-5[\cup]5;+\infty[$.
- Pour déterminer $A \cap \overline{C}$, il faut enlever dans l'ensemble A tous les nombres qui appartiennent à C, c'est-à-dire qui sont des entiers naturels : $A \cap \overline{C} =]4;5[\cup]5;6[\cup]6;7[$
- L'ensemble $(A \cup B) \cap C$ est contitué des entiers relatifs appartenant à $A \cup B$, ensemble calculé plus haut, donc $(A \cup B) \cap C = \{0;1;2;3;4;5;6;7\}$.
- $A \cup (B \cap C) = [4;7] \cup \{0;1;2;3\}$ (inutile d'inclure les entiers 4 et 5 dans le deuxième ensemble puisque ceux-ci sont déjà inclus dans le premier intervalle).
- $\overline{A} \cap (\overline{B} \cup C) = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap C) =]-\infty;-5[\cup]7;+\infty[\cup \{0;1;2;3\}$ (inutile d'inclure une deuxième fois les entiers strictement plus grands que 7).

Exercice 2 (***)

1. Un petit dessin permet de se convaincre que les deux expressions correspondent effectivement au même ensemble. Pour une démonstration rigoureuse, le plus simple est de procéder par double inclusion. Considérons donc un élément x appartenant à $(A \backslash B) \cup (B \backslash A)$. On a donc deux possibilités : soit $x \in A$ et $x \notin B$; soit $x \in B$ et $x \notin A$. Dans les deux cas, x appartient à l'un des deux ensembles A ou B, donc $x \in A \cup B$, mais on sait aussi que x n'appartient pas à l'un des deux ensembles, donc il ne peut pas appartenir à leur intersection. Autrement dit, $x \in (A \cup B) \backslash (A \cap B)$, et on a prouvé que $(A \backslash B) \cup (B \backslash A) \subset (A \cup B) \backslash (A \cap B)$. Faisons maintenant le raisonnement en sens inverse, en considérant un élément $y \in (A \cup B) \backslash (A \cap B)$. Comme $y \in A \cup B$, on a soit $y \in A$, soit $y \in B$. Dans le permier cas, y ne peut pas appartenir à B car il n'est pas dans $A \cap B$, donc $y \in A \backslash B$. De même, dans le deuxième cas, $y \in B \backslash A$. Dans tous les cas, $y \in (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$, ce qui prouve la deuxième inclusion. On a donc bien $(A \cup B) \backslash (A \cap B) = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.

   Autre méthode, purement calculatoire, en utilisant le fait que $A \backslash B = A \cap \overline{B}$.
   On a donc $A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{A}) \cap (\overline{B} \cup B) \cap (\overline{B} \cup \overline{A})$. Or, $A \cup \overline{A} = \overline{B} \cup B = E$, on peut enlever ces deux ensembles de notre intersection ; et via les lois de Morgan, $\overline{B} \cup \overline{A} = \overline{B \cap A}$. Finalement, $A \Delta B = (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B}) = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.

2. Essayons donc d'écrire, à défaut de plus simplement, plus élémentairement, le membre de gauche : $(A \Delta B) \Delta C = ((A \Delta B) \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{A \Delta B})$ (en utilisant la définition et en écrivant des intersections avec les complémentaires plutôt que des différences d'ensembles). On peut développer tout ça pour obtenir $(((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)) \cap \overline{C}) \cup (C \cap (\overline{A \cap \overline{B}} \cap \overline{B \cap \overline{A}})) = (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (C \cap (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B}))$. Dans le développement de la toute dernière parenthèse, on peut enlever le $\overline{A} \cap A$ et le $B \cap \overline{B}$ pour obtenir enfin ceci : $(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$. Vous allez me dire, s'il faut recommencer un même calcul pour le membre de droite de l'égalité qu'on essaye de prouver, on est pas encore sortis de l'auberge. En fait, inutile, le membre de droite peut aussi s'écrire $(B \Delta C) \Delta A$ (la commutativité est évidente au vu de la défintion), c'est-à-dire que par rapport au calcul que nous venons de faire, on remplace A par B, B par C et C par A. Faites-le dans l'expression obtenue à la fin, vous verrez qu'elle reste identique, seul l'ordre des quatre ensembles de la réunion étant changé. Ouf, l'égalité est donc vraie !

3. Faisons un simple calcul ensembliste : $A \cap (B \Delta C) = A \cap ((B \backslash C) \cup (C \backslash B)) = (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap C \cap \overline{B})$. Or, $(A \cap B) \Delta (A \cap C) = ((A \cap B) \backslash (A \cap C)) \cup ((A \cap C) \backslash (A \cap B)) = (A \cap B \cap \overline{A \cap C}) \cup (A \cap C \cap \overline{A \cap B}) = (A \cap B \cap (\overline{A} \cup \overline{C})) \cup (A \cap C \cap (\overline{A} \cup \overline{B}))$. on a utilisé les lois de Morgan pour la dernière égalité. On peut maintenant oublier dans chaque parenthèse le $\overline{A}$, puisque son intersection avec $A \cap B$ ou $A \cap C$ sera de toute façon vide. Il reste alors $(A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap C \cap \overline{B})$, ce qui est bien la même chose que ce qu'on avait obtenu plus haut. L'égalité est donc vérifiée.
4. Prenons la deuxième expression de la différence symétrique : si $A \Delta B = \emptyset$, alors $(A \cup B) \backslash (A \cap B) = \emptyset$. cela ne peut se produire que si $A \cup B = A \cap B$ (il faut enlever tout le monde pour ne plus rien avoir au final). Or, quel que soit l'ensemble B, on a toujours $A \subset A \cup B$ et $A \cap B \subset A$. il faut donc avoir simultanément $A \cap B = A = A \cup B$ pour que $A \cup B$ et $A \cap B$ soient égaux. Dire que $A \cup B = A$ signifie qu'on n'ajoute personne en faisant l'union avec B, autrement dit que $B \subset A$. Au contraire, dire que $A = A \cap B$ signifie que tous les éléments de A appartiennent aussi à B (puisqu'ils sont dans $A \cap B$), donc que $A \subset B$. Conclusion, on a nécessairement $A \subset B$ et $B \subset A = A$. Le seul ensemble vérifiant $A \Delta B = \emptyset$ est donc l'ensemble A lui-même.
5. Même méthode : on a $(A \cup B) \backslash (A \cap B) = E$, donc on doit avoir $A \cup B = E$ (sinon on n'obtiendra pas tout le monde en enlevant les éléments de $A \cap B$) et $A \cap B = \emptyset$. Autrement dit, A et B sont disjoints et ont pour union l'ensemble E, ce n'est possible que si $B = \overline{A}$.
6. On doit avoir cette fois-ci $A \Delta B = X$, A et X étant fixés, c'est-à-dire $(A \cup B) \backslash (A \cap B) = X$. En particulier, $A \cup B$ doit inclure X, c'est-à-dire que $X \subset A \cup B$, ou encore $X \backslash A \subset B$ (tous les éléments qui sont dans X et ne sont pas dans A doivent nécessairement appartenir à B pour être dans $A \cup B$). De même, on aura $A \backslash X \subset B$. En utilisant les deux dernières inclusions obtenues, on a donc $A \Delta X \subset B$. Prenons désormais un élément dans B. S'il appartient aussi à A, alors il appartient à $A \cap B$, donc pas à X. Au contraire, s'il n'appartient pas à A, il appartient à $A \cup B$ (puisqu'il est dans B), mais pas à $A \cap B$, donc il est dans X. Autrement dit, il appartient soit à $A \backslash X$, soit à $X \backslash A$, et dans tous les cas à $A \Delta X$ qui est l'union de ces deux ensembles. Conclusion, $B \subset A \Delta X$, ce qui combiné au résultat obtenu précédemment, nous donne nécessairement $B = A \Delta X$. On vérifie facilement que cet ensemble B convient effectivement.

Exercice 3 (**)

- L'application f_1 est injective puisque, si n et p sont deux entiers naturels, $n+5 = p+5 \Rightarrow n = p$ (ce serait d'ailleurs tout aussi vrai avec des réels quelconques), mais pas surjective car 0 par exemple n'a pas d'antécédent par f_1 (si l'application était définie sur $\mathbb{R}$ ou même sur $\mathbb{R}$, 0 aurait évidemment pour antécédent -5, mais en tant qu'application de $\mathbb{N}$ dans lui-même, elle n'est pas surjective).
- L'application f_2 est injective : en effet, $n^2 = p^2 \Rightarrow n = p$ quand n et p sont positifs (si vous préférez, on peut dire qua l'application carré est injective sur $\mathbb{R}_+$, donc a fortiori sur $\mathbb{N}$. Par contre, elle n'est pas surjective, 2 par exemple n'ayant pas d'antécédent par f_2 (il aurait deux antécédents dans $\mathbb{R}$, à savoir $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$, mais ces nombres ne sont pas vraiment entiers).
- L'application f_3 est un peu plus pénible à étudier que les autres mais elle est en fait bijective. Les entiers pairs sont envoyés sur les entiers impairs et veci-versa donc un entier pair ne peut pas avoir la même image qu'un entier impair. Comme la restriction de f aux entiers pairs, et celle aux entiers impairs, sont facilement injectives, f_3 est injective. Elle est également surjective car si p est pair, $p+1$ est un antécédent de p, et si p est impair, c'est $p-1$ qui marche. En fait, on peut faire plus rapide en prouvant que f_3 est bijective et que sa réciproque est f_3 elle-même (on parle alors d'application **involutive**). En effet, si n est pair, $f_3(n) = n+1$ est un nombre impair, donc $f_3(f_3(n)) = f_3(n+1) = n+1-1 = n$. De même, si n est impair, $n-1$ est pair, donc $f_3(f_3(n)) = f_3(n-1) = n-1+1 = n$. Dans tous les cas, $f_3(f_3(n)) = n$, ce qui signifie bien que $f_3^{-1} = f_3$ (et au passage que f_3 est bijective).

- L'application f_4 n'est pas surjective car 1 et 2 ont par exemple la même image. Par contre, elle est surjective, $3p$ étant toujours un antécédent de p (il n'est pas très compliqué de constater que chaque entier a en fait trois antécédents par f_4, qui sont $3p$, $3p+1$ et $3p+2$).
- Cette dernière application n'est pas injective, 3 et 17 ayant par exemple la même image. Par contre, elle est surjective car $p+10$ est toujours un antécédent de p.

Exercice 4 (*)

1. On reconnait bien sûr la fonction tanh, dont on sait qu'elle est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]-1;1[$. Elle ne l'est par contre pas de E dans F, elle est injective mais pas surjective puisque les réels de valeur absolue plus grande que 1 n'ont pas d'antécédents par f.
2. La fonction g est évidemment définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $g'(x) = 3x^2+1$, strictement positive sur $\mathbb{R}$. La fonction g est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc injective. De plus, le limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$ sont respectivement égales à $+\infty$ et $-\infty$ (ce sont les mêmes que celles de $x \mapsto x^3$), donc la fonction prend toutes les valeurs réelles. Autrement dit, g est surjective et injective, c'est-à-dire bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
3. Commençons par déterminer l'ensemble de définition de h. Le trinôme x^2-x-2 a pour discriminant $\Delta = 1+8 = 9$, et admet pour racines $x_1 = \dfrac{1+3}{2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{1-3}{2} = -1$. Le trinôme étant positif à l'extérieur de ses racines, $\mathcal{D}_h = E$. Sur cet ensemble (ou presque, la fonction n'est pas dérivable en -1 ni en 2), h a pour dérivée $h'(x) = \dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-2}}$. Cette dérivée est du signe de $2x-1$, donc positive si $x \geqslant 2$ et négative si $x \leqslant -1$. La fonction h est donc décroissante sur $]-\infty;-1]$ et croissante sur $[2;+\infty[$. Les images de -1 et 2 par h sont toutes les deux nulles. Quant aux limites à l'infini, elles sont toutes les deux égales à $+\infty$ puisque le trinôme à l'intérieur de la racine tend vers $+\infty$ des deux côtés. La fonction h est donc surjective sur $\mathbb{R}_+$ (tous les réels positifs ont bien des antécédents pas la fonction), mais pas injective pusique par exemple $g(-1) = g(2) = 0$. En fait, tout réel positif a exactement deux antécédents par h, un dans l'intervalle $]-\infty;-1]$ et un autre dans l'intervalle $[2;+\infty[$.
4. La fonction i est bien dérivable sur l'ensemble E, et sa dérivée vaut $\dfrac{3(x-1)-(3x+2)}{(x-1)^2} = \dfrac{-5}{(x-1)^2}$. Cette dérivée est négative partout où elle existe, la fonction i est donc strictement décroissante sur $]-\infty;1[$ et sur $]1;+\infty[$. On ne peut bien sûr PAS en déduire que i est injective sur E car celui-ci est constitué de deux intervalle disjoints. Calculons donc les limites de i. Du côté des infinis, on prend le quotient des termes de plus haut degré, ce qui donne pour limite 3 à chaque fois. En 1, le numérateur tend vers 5, et le dénominateur vers 0, en étant positif à droite et négatif à gauche de 1. Autrement dit, $\lim_{x \to 1^-} i(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to 1^+} i(x) = +\infty$. Résumons tout ceci dans un beau tableau :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f	3	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	3

On peut constater que la fonction est injective puisqu'elle ne reprend jamais sur $]1;+\infty[$ une valeur déjà prise sur $]-\infty;1[$ (et qu'elle est injective sur chaque intervalle puisque strictement décroissante). Elle est également surjective sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$, puisque tous les réels de l'intervalle $]-\infty;3[$ ont un antécédent dans $]-\infty;1[$, et tous les réels de l'intervalle $]3;+\infty[$ ont un antécédent dans $]1;+\infty[$. Conclusion, la fonction i réalise une bijection de E vers F.

Exercice 5 (***)

Supposons donc dans un premier temps que f est injective, et essayons de prouver qu'elle est surjective. Pour cela, prenons un élément $y \in E$ et essayons de lui trouver un antécédent. On sait par hypothèse que $f(f(f(y))) = f(y)$. Les deux éléments $f(f(y))$ et y ont donc la même image par f, ce qui implique, l'application étant injective, qu'ils sont égaux, c'est-à-dire que $f(f(y)) = y$. On vient de trouver un élément qui est un antécédent de y par f : c'est $f(y)$! En effet, $f(f(y)) = y$. L'application f est donc surjective.

Supposons désormais que l'application f est surjective, et essayons de prouver qu'elle est injective. pour cela, considérons deux éléments x et x' dans E qui ont la même image par f. Comme f est surjective, ces deux éléments ont des antécédents, que nous nommerons z et z', par f. on a donc $f(f(z)) = f(x) = f(x') = f(f(z'))$. De même, z et z' ont des antécédents w et w' par f, qui vérifieront cette fois-ci $f(f(f(w))) = f(f(f(w')))$. mais, d'après l'énoncé, $f(f(f(w))) = f(w)$ et $f(f(f(w'))) = f(w')$. On en déduit donc que $f(w) = f(w')$, c'est-à-dire que $z = z'$. Mais alors on a certainement $f(z) = f(z')$, soit $x = x'$. On a bien prouvé l'injectivité de l'application.

Dans le cas où f est bijective, on peut composer la relation initiale par f^{-1} pour obtenir $f^{-1} \circ f \circ f \circ f = f^{-1} \circ f$, c'est-à-dire $f \circ f = id_E$. Cela signifie que f est alors sa propre réciproque (ce qui découle aussi du calcul effectué dans la première partie de la démonstration, où l'antécédent trouvé pour y n'est autre que son image par f).

Exercice 6 (** à *****)

1. Une application fort simple suffit à notre bonheur, celle qui à un entier naturel n associe son double $2n$. Il est assez évident que f est à valeurs dans l'ensemble des entiers pairs, qu'elle est injective et surjective vers cet ensemble, donc bijective.
2. Si vous avez bien compris le cas précédent, celui-ci parait relativement naturel, mais l'application est un peu plus difficile à construire. L'idée est, par exemple, d'envoyer les naturels pairs sur les entiers positifs, et les impairs sur les négatifs. Une façon de le faire est de poser $f(n) = \dfrac{n}{2}$ si n est pair, et $f(n) = -\dfrac{n+1}{2}$ si n est impair. Si n est pair, $f(n) \geqslant 0$, et si n est impair, $f(n) < 0$. Comme par ailleurs, $\dfrac{n}{2} = \dfrac{p}{2} \Rightarrow n = p$, et $-\dfrac{n+1}{2} = -\dfrac{p+1}{2} \Rightarrow n = p$, l'application f est injective. Ne reste plus qu'à prouver qu'elle est surjective : soit $p \in \mathbb{Z}$, si $p \geqslant 0$, $2p$ est un antécédent de p ; si $p < 0$, $-2p - 1$ est un antécédent de p. Finalement, f est bien bijective.
3. Ça se complique de plus en plus, alors plutôt que de vous donner une formule affreuse pour la bijection, je vais expliquer comment ça marche et j'espère que vous serez convaincus. L'ensemble $\mathbb{N}^2$ peut être représenté sous forme d'un tableau à deux dimensions, et donner une bijection de $\mathbb{N}$ vers ce tableau revient en fait à numéroter les éléments de ce tableau (à partir de 0) en essayant de ne pas en oublier au passage. L'idée est de faire cette numérotation diagonale par diagonale : on pose $f(0) = (0;0)$, puis $f(1) = (0;1)$ et $f(2) = (1;0)$ (première diagonale), puis $f(3) = (0;2)$, $f(4) = (1;1)$ et $f(5) = (2;0)$ etc. Le couple $(p;q)$ se trouve sur la diagonale numéro $p+q$, il est même le $(p+1)$ème élément de la diagonale avec la numérotation choisie, et on a déjà numéroté $1 + 2 + \cdots + (p+q)$ éléments sur les diagonales précédentes, soit $\dfrac{(p+q)(p+q+1)}{2}$ éléments. Autrement dit, on a $f(n) = (p;q)$ pour $n = \dfrac{(p+q)(p+q+1)}{2} + p$ (on commence à numéroter à 0, ce qui explique qu'on ajoute p et pas $p+1$ à la fin). On a donc décrit la réciproque de la bijection f (je laisse les plus courageux vérifier que c'est bien une bijection).
4. En fait, l'idée est la même que pour $\mathbb{N}^2$ puisque $\mathbb{Q}$ est « plus petit » que $\mathbb{N}^2$: on peut toujours représenter un rationnel par un couple d'entiers (le numérateur et le dénominateur de la fraction) sauf qu'on impose en plus que la fraction en question ne soit pas simplifiable. Il suffit

donc de reprendre le principe de la numérotation précédente, mais en sautant tous les couples correspondant à des fractions déjà numérotées (ainsi, on attribuera un numéro au couple $(1;1)$ mais pas au couple $(2;2)$, ni à $(3;3)$ etc.). Trouver une formule explicite pour cette bijection est impossible, et justifier correctement que ça fonctionne bien est délicat. On se contentera donc de constater que trouver une application injective de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z}^2$ est facile (on associe à tout élément de $\mathbb{Q}$, mis sous forme irréductible, le numérateur et le dénominateur de la fraction), et qu'en composant cette application avec les bijections déjà construites de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{N}^2$ et de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$, on aura une injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{N}$, ce qui est suffisant d'après le théorème de Cantor-Bernstein démontré à l'exercice suivant.

5. Pour le fait que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable, il faut passer par un raisonnement par l'absurde. Supposons donc qu'il existe une bijection f qui « numérote » tous les réels. Un réel peut s'écrire sous forme décimale, avec éventuellement une infinité de chiffres après la virgule (cette écriture pose en fait quelques problèmes théoriques que nous allons passer sous silence). Notons donc x_1 l'image de 0 par f, qui sera donc pour nous un nombre décimal, x_2 l'image de 1, x_3 l'image de 2 etc. Construisons désormais un nouveau nombre décimal x de la façon suivante : $x = 0,\dots$, en choisissant comme première décimale un chiffre différent de la première décimale de x_1 (on peut certainement, puisqu'il y a 10 chiffres possibles pour chaque décimale !), comme deuxième décimale un chiffre différent de la deuxième décimale de x_2, comme troisième décimale un chiffre différent de la troisième décimale de x_3 etc. Un tel nombre x est certainement différent de x_1 (ils ont au moins une décimale différente), de x_2, x_3, et de tous les x_i. Conclusion, ce nombre x n'a pas d'antécédent par f (il n'apparait nulle part dans notre liste numérotée), qui ne peut donc pas être surjective, et encore moins bijective, ce qui est absurde ! Cet argument est connu sous le nom de « diagonale de Cantor ».
6. On a vu à l'exercice 7 une bijection tanh de $\mathbb{R}$ dans $]-1;1[$. Il suffit de poser $g(x) = \dfrac{1+f(x)}{2}$ pour obtenir une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0;1[$ (je vous laisse comprendre pourquoi).
7. Dessinez un demi-cercle sur une feuille, une droite un peu en-dessous, et placez le centre O du demi-cercle. On considère ensuite l'application suivante : à un point P du demi-cercle, on associe le point de la droite qui est sur la droite (OP). Il n'est pas très dur de se convaincre que cette application est bijective (en excluant les deux points extrêmes du demi-cercle).

Exercice 7 : théorème de Cantor-Bernstein (****)

Il y avait de graves confusions dans les ensembles dans l'énoncé de cet exercice (pourtant repompé sur un camarade censé être fiable, on se demande où va le monde, ma bonne dame). Pour ceux qui voudraient tenter de faire cet exercice, apportez donc les modifications suivantes :

- les notations et les question 1 et 2 peuvent être inchangées.
- dans la question 3, on ne touche pas aux définitions de B et de C, ni au premier morceau de la question. On prouve par contre ensuite que tout élément de B (et pas de C) possède un unique antécédent par g, qui **appartient** à A (c'est le contraire dans l'énoncé).
- Il faut alors inverser les deux définitions de h dans la dernière question : $h(x) = g^{-1}(x)$ si $x \in B$, et $h(x) = f(x)$ si $x \in C$.

Avec ces corrections, on peut donc donner la correction (de l'exercice cette fois-ci) suivante :

1. Procédonc par l'absurde et supposons qu'un élément y (on est dans l'ensemble Y) appartienne à la fois à A_i et à A_j, pour des valeurs distinctes de i et de j (par exemple $i < j$). Si $i = 0$, $y \in Y \backslash f(X)$, donc $Y \notin f(X)$. Or, si ce même y appartient à $A_j = \varphi(A_{j-1})$ (puisque $j > 0$), on a donc $y \in f \circ g(A_{i-1})$, qui est certainement inclus dans $f(X)$. Ce n'est pas possible. Le cas général est similaire : on a d'un côté $y \in A_i$, donc $y = \varphi^i(\alpha)$, avec $\alpha \in A_0$ (par construction des ensembles A_i), et d'autre part $y = \varphi^j(\beta)$, avec $\beta \in A_0$ également. Mais alors $\varphi^i(\varphi^{j-i}(\beta)) = y = \varphi^i(\alpha)$. Or, l'application φ est injective (c'est la composée de deux injections)

donc φ^i aussi. On peut alors affirmer que $\alpha = \varphi^{j-i}(\beta)$, ou si l'on préfère que $\alpha \in A_0 \cap A_{j-i}$. D'après ce qui précède, c'est impossible. Les ensembles sont donc tous disjoints.

2. Soit $y \in A$, il existe donc un entier n pour lequel $y \in A_n$, alors $\varphi(y) \in A_{n+1} \subset A$, donc $\varphi(A) \subset A$.

3. Comme $f(B) = \varphi(A)$, $f(B) \subset A$ d'après ce qui précède. Par ailleurs, $g(A_i) \subset B$, donc $\varphi(A_i) \subset f(B)$, soit $A_{i+1} \subset B$. Cela signifie que tous les ensembles A_i à l'exception de A_0 sont inclus dans $f(B)$, qui contient donc $A \backslash A_0$. Reste à prouver qu'un élément de A_0 ne peut pas appartenir à $f(B)$. C'est en fait évident pusique dans le cas contraire il serait dans $f(X)$. On a bien $f(B) = 1 \backslash A_0$.

   Par construction, tout élément de B est image d'un élément de A par g, la fin de la question modifiée est donc triviale (l'unicité découlant de l'injectivité de g).

4. L'application h est bien définie. Sa restriction à B est injective par construction (si $g^{-1}(x) = g^{-1}(x')$, alors $x = x'$ en appliquant g). Sa restriction à C est également injective puisqu'elle coïncide avec f. Reste à vérifier qu'un élément x de B et un élément x' de C ne peuvent pas avoir la même image par h. En effet, $h(x) = g^{-1}(x) \in A$ d'après la question précédente, et $h(x') = f(x') \notin A$ puisque A est le complémentaire de $f(X)$ dans Y. L'application h est donc injective. Elle est également surjective : tout élément y de A admet un antécédent dans B (il s'agit de $g(y)$), et tout élément y' dans $Y \backslash A$ appartient par définition à $f(X)$ donc admet un antécédent x par f dans X. Cet antécédent ne peut appartenir à B puisque $f(B) \subset A$, il appartient donc à C et constitue un antécédent de y' par h. Finalement, l'application h est bijective de X dans Y.

Exercice 8 (* à **)

1. Prouvons par récurrence la propriété P_n : $2^n \leqslant n!$. Puisque l'énoncé nous indique que n doit être plus grand que 4, initialisons pour $n = 4$: on a alors $2^4 = 16$ et $4! = 24$, donc l'inégalité est vraie. Supposons désormais P_n vérifiée, c'est-à-dire que $2^n \leqslant n!$. On peut alors en déduire que $2^{n+1} \leqslant 2n! \leqslant (n+1)n! = (n+1)!$ puisque 2 est certainement inférieur à $n+1$ quand n est plus grand que 4. La propriété P_{n+1} est donc vraie, et par principe de récurrence, P_n est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à 4.

2. Prouvons par récurrence la propriété P_n : $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$. Pour $n = 0$, la propriété P_0 stipule que $(1+x)^0 \geqslant 1$, ce qui est vrai puisque $(1+x)^0 = 1$. Supposons désormais l'inégalité vérifiée au rang n, on a alors $(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geqslant (1+x)(1+nx)$ par hypothèse de récurrence. Or, $(1+x)(1+nx) = 1 + x + nx + nx^2 \geqslant 1 + (n+1)x$ puisque nx^2 est toujours un nombre positif. On en déduit que $(1+x)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)x$, ce qui est la propriété P_{n+1}. La propriété P_n est donc vraie pour tout entier n. On peut remarquer que cette propriété est très facile à prouver sans récurrence, à l'aide de la formule du binôme : $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} x^k = 1 + nx + \sum_{k=2}^{k=n} \binom{n}{k} x^k \geqslant 1 + nx$ (on vérifie à la main les cas $n = 0$ et $n = 1$).

3. Prouvons par récurrence la propriété P_n : $\sum_{k=1}^{k=n} k \times k! = (n+1)! - 1$. Pour $n = 1$, $\sum_{k=1}^{k=1} k \times k! = 1 \times 1! = 1$ et $2! - 1 = 2 - 1 = 1$, donc P_1 est vraie. Supposons désormais P_n vraie pour un certain entier n, on a alors $\sum_{k=1}^{k=n+1} k \times k! = \sum_{k=1}^{k=n} k \times k! + (n+1)(n+1)! = (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! = (n+1)!(1+n+1) - 1 = (n+2)! - 1$, donc P_{n+1} est vérifiée et par principe de récurrence, P_n est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

4. Prouvons donc par récurrence la propriété P_n : « Un polygone à n côtés a $\dfrac{n(n-3)}{2}$ diagonales ». Le premier polygone à avoir des diagonales est le carré (ce qui correspond à $n = 4$), qui a deux diagonales. Comme $\dfrac{4 \times 1}{2} = 2$, la propriété P_4 est donc vraie. Supposons maintenant la propriété vraie au rang n, et essayons de la prouver au rang $n + 1$. Partons donc d'un polygone à n côtés, et rajoutons un sommet entre deux sommets de ce polygone pour obtenir un polygone à $n+1$ côtés. Ce faisant, on crée $n-1$ nouvelles diagonales : $n-2$ reliant le nouveau sommet à tous les anciens, en excluant les deux sommets qui se trouvent à côté de lui ; et une dernière reliant les deux sommets voisins du nouveau sommet (qui étaient auparavant reliés par un côté du polygone, et le sont désormais par une diagonale). Le nombre de diagonales de notre nouveau polygone vaut donc $n - 1 + \dfrac{n(n-3)}{2}$ (ce deuxième terme issu de l'hypothèse de récurrence) $= \dfrac{2n - 2 + n^2 - 3n}{2} = \dfrac{n^2 - n - 2}{2} = \dfrac{(n+1)(n-2)}{2}$, ce qui prouve la propriété P_{n+1} et permet de conclure la récurrence.
5. Prouvons donc par récurrence la propriété P_n : $f^{(n)}(x) = (-1)^n(x - n - 1)e^{-x}$. Pour $n = 0$, la propriété P_0 stipule que $f^{(0)}(x) = (x-1)e^{-x}$, ce qui est vrai. Supposons donc la propriété P_n vérifiée, alors $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = (-1)^n e^{-x} - (-1)^n(x - n - 1)e^{-x} = ((-1)^{n+1}(x - n - 1) + (-1)^n)e^{-x} = (-1)^{n+1}(x - n - 1 - 1)e^{-x} = (-1)^{n+1}(x - (n+1) - 1)e^{-x}$, ce qui prouve P_{n+1}. La formule est donc vraie pour tout entier naturel n.

Exercice 9 (**)

On calcule $u_3 = 3 \times 2 - 3 \times 0 + 0 = 6$, $u_4 = 3 \times 6 - 3 \times 2 + 0 = 12$, $u_5 = 3 \times 12 - 3 \times 6 + 2 = 20$, $u_6 = 3 \times 20 - 3 \times 12 + 6 = 30$, et même avec un peu de motivation $u_7 = 3 \times 30 - 3 \times 20 + 12 = 42$. Si on est suffisamment réveillés, on arrive à conjecturer que $u_n = n(n-1)$ (chaque terme est le produit de l'indice par l'entier le précédent). Prouvons donc par récurrence **triple** la propriété P_n : $u_n = n(n-1)$. Il faut initialiser en vérifiant P_0, P_1 et P_2, ce qui ne pose aucun problème puisqu'on a de quoi vérifier jusqu'à P_7 grâce aux calculs précédents. Supposons désormais P_n, P_{n+1} et P_{n+2} vérifiées, on a alors $u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n = 3(n+2)(n+1) - 3(n+1)n + (n-1)n = 3(n^2+3n+2) - 3(n^2+n) + n^2 - n = 3n^2 + 9n + 6 - 3n^2 - 3n + n^2 - n = n^2 + 5n + 6 = (n+3)(n+2)$, ce qui prouve P_{n+3}, et par principe de récurrence triple, P_n est vraie pour tout entier n.

Exercice 10 (*)

1. $S_1 = \displaystyle\sum_{i=3}^{i=12} 2^i$
2. $S_2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=10} \frac{i}{2^i}$
3. $S_3 = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{a^k}{k}$
4. $S_4 = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=25} -2i(-1)^i$

Exercice 11 (**)

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}(2k+1) = 2\sum_{k=1}^{k=n} k + \sum_{k=1}^{k=n} 1 = n(n+1) + n = n(n+2)$

2. $\displaystyle\sum_{k=807}^{k=2012} 3 = 3 \times 1\ 206 = 3\ 618$

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}(6k^2+4k+1) = 6\sum_{k=1}^{k=n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{k=n} k + \sum_{k=1}^{k=n} 1 = n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + n$
$= n((n+1)(2n+1) + 2(n+1) + 1) = n(2n^2+5n+4)$

4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^k = \sum_{k=0}^{k=n-1}(-1)^{k+1} = -\frac{1-(-1)^n}{1-(-1)} = \frac{(-1)^n - 1}{2}$

5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} k(2k^2-1) = 2\sum_{k=1}^{k=n} k^3 - \sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n^2(n+1)^2}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n(n+1)-1)}{2}$
$\displaystyle = \frac{n(n+1)(n^2+n-1)}{2}$

6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=18}\frac{1}{3^k} = \sum_{k=1}^{k=18}\left(\frac{1}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{k=18}\left(\frac{1}{3}\right)^k - 1 = \frac{1-\frac{1}{3^{19}}}{1-\frac{1}{3}} - 1 = \frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^{19}}\right) - 1 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^{18}}\right)$

7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} 3^{2k} = \sum_{k=1}^{k=n} 9^k = \sum_{k=0}^{k=n} 9^k - 1 = \frac{1-9^{n+1}}{1-9} - 1 = \frac{9^{n+1}-1}{8} - 1 = \frac{9^{n+1}-9}{8}$

8. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} 2^k + k^2 + 2 = \sum_{k=1}^{k=n} 2^k + \sum_{k=1}^{k=n} k^2 + \sum_{k=1}^{k=n} 2 = \sum_{k=0}^{k=n} 2^k - 1 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2n$
$\displaystyle = 2^{n+1} - 2 + 2n + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 2(2^n+n-1) + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

9. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}\frac{2^k}{3^{k+1}} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{2}{9}\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{2}{9}\sum_{k=0}^{k=n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{2}{9}\,\frac{1-(\frac{2}{3})^n}{1-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$

Exercice 12 (**)

1. $S_n = 1+3+5+\cdots+2n+1$. Cette somme est constituée de $n+1$ termes.
2. $\displaystyle S_n = \sum_{k=0}^{k=n} 8k^3+12k^2+6k+1 = 8\sum_{k=0}^{k=n} k^3 + 12\sum_{k=0}^{k=n} k^2 + 6\sum_{k=0}^{k=n} k + \sum_{k=0}^{k=n} 1 = 2n^2(n+1)^2 + 2n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1) + n + 1 = (n+1)(2n^2(n+1) + 2n(2n+1) + 3n + 1) = (n+1)(2n^3+6n^2+5n+1)$.
3. $\displaystyle U_n = \sum_{k=0}^{k=2n+1} k^3 = \sum_{k \text{ pair}}^{k\leqslant 2n} k^3 + \sum_{k \text{ impair}}^{k\leqslant 2n+1} k^3 = \sum_{k=0}^{k=n}(2k)^3 + \sum_{k=0}^{k=n}(2k+1)^3 = T_n + S_n$.
4. On a $\displaystyle U_n = \sum_{k=0}^{k=n} k^3 = \frac{(2n+1)^2(2n+2)^2}{4} = (n+1)^2(2n+1)^2$ en utilisant la formule du cours pour la somme des cubes. De même, $\displaystyle T_n = \sum_{k=0}^{k=n}(2k)^3 = \sum_{k=0}^{k=n} 8k^3 = 8 \times \frac{n^2(n+1)^2}{4} = 2n^2(n+1)^2$.
5. Comme $S_n = U_n - T_n$, on a donc $S_n = (n+1)^2(2n+1)^2 - 2n^2(n+1)^2 = (n+1)^2((2n+1)^2 - 2n^2) = (n+1)^2(2n^2+4n+1)$. Notons que cette formule est bien la même que la précédente puisque $(n+1)(2n^2+4n+1) = 2n^3+2n^2+4n^2+4n+n+1 = 2n^3+6n^2+5n+1$.
6. Prouvons donc par récurrence la propriété $\displaystyle P_n : \sum_{k=0}^{k=n}(2k+1)^3 = (n+1)^2(2n^2+4n+1)$. Pour $n=0$, on obtient $\displaystyle P_0 : \sum_{k=0}^{k=0}(2k+1)^3 = 1^2 \times 1 = 1$, ce qui est vrai. Supposons désormais P_n vérifiée, on

a alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n+1}(2k+1)^3 = \sum_{k=0}^{k=n}(2k+1)^3 + (2(n+1)+1)^3 = (n+1)^2(2n^2+4n+1)+(2n+3)^3 =$ $(n^2+2n+1)(2n^2+4n+1)+8n^3+36n^2+54n+27 = 2n^4+4n^3+n^2+4n^3+8n^2+2n+2n^2+4n+1+8n^3+36n^2+54n+27 = 2n^4+16n^3+47n^2+60n+28$. Ne reste plus qu'à vérifier que ça correspond à la formule annoncée : on devrait obtenir $(n+2)^2(2(n+1)^2+4(n+1)+1) = (n^2+4n+4)(2n^2+8n+7) = 2n^4+8n^3+7n^2+8n^3+32n^2+28n+8n^2+32n+28 = 2n^4+16n^3+47n^2+60n+28$. Ca marche, donc P_{n+1} est vérifiée, et par principe de récurrence, toutes les propriétés P_n sont vraies.

Exercice 13 (**)

- $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij = \sum_{i=1}^{i=n} i \sum_{j=1}^{j=n} j = \sum_{i=1}^{i=n} i\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
- $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij = \sum_{j=1}^{j=n} j \sum_{i=1}^{i=j} i = \sum_{j=1}^{j=n} j\frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{j=n} j^3+j^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{8} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} =$ $\displaystyle\frac{n(n+1)(3n^2+3n+4n+2)}{24} = \frac{n(n+1)(3n^2+7n+2)}{24} = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{24}$.
- $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{j=n} \frac{1}{j} \sum_{i=1}^{i=j} i = \sum_{j=1}^{j=n} \frac{1}{j} \times \frac{j(j+1)}{2} = \sum_{j=1}^{j=n} \frac{j+1}{2} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{j=n} j+1 = \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2}+n\right) =$ $\displaystyle\frac{n(n+3)}{2}$.
- $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |i-j| = \sum_{j=1}^{j=n}(\sum_{i=1}^{i=j}(j-i) + \sum_{i=j+1}^{i=n}(i-j)) = \sum_{j=1}^{j=n}(j^2 - \frac{j(j+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} - \frac{j(j+1)}{2} - (n-$ $\displaystyle j)j) = \sum_{j=1}^{j=n}\left(j^2-(n+1)j+\frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)^2}{2} + \frac{n^2(n+1)}{2}$ $\displaystyle = \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{2n+1}{3}-(n+1)+n\right) = \frac{n(n+1)(2n-2)}{6} = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$
- $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} i2^j = \sum_{i=1}^{i=n} i \sum_{j=1}^{j=n} 2^j = \frac{n(n+1)}{2} \times (\sum_{j=0}^{j=n} 2^j - 1) = \frac{n(n+1)}{2} \times (2^{n+1}-1-1) = n(n+1)(2^n-1)$

Exercice 14 (*)

Il y a au total $\binom{21}{5}$ tirages possibles.

- Il y a 17 atouts qui ne sont pas multiples de 5, donc $\binom{17}{5}$ tirages qui ne contiennent aucun multiple de 5. Par passage au complémentaire, il reste donc $\binom{21}{5} - \binom{17}{5}$ tirages avec au moins un multiple de 5.
- Un multiple de cinq et un de trois : il faut distinguer le cas où on tire le 15 (qui est le seul multiple de cinq et de trois à la fois) et celui où les deux multiples sont différents. Sachant qu'il y a onze atouts qui ne sont multiples ni de cinq ni de trois, on a $\binom{11}{4} + \binom{6}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{11}{3}$ tirages possibles.
- Ni le 1 ni le 21 : par passage au complémentaire, $\binom{21}{5} - \binom{19}{5}$ tirages.

Exercice 15 (*)

1. On a assez simplement $|A \backslash B| = |A| - |A \cap B| = 112 - 67 = 45$.
2. Il suffit de faire une somme : $|C| = |A \cap C| + |(B \cap C) \backslash A| + |C \backslash (A \cup B)| = 32 + 5 + 56 = 93$.
3. Ceux qui ont voté pour au moins l'un des trois sont au nombre de $|A \cup B \cup C| = |A| + |B \backslash A| + |C \backslash (A \cup B)| = 112 + 22 + 56 = 190$. Il en reste donc 10 qui n'ont voté pour aucun des trois.
4. $A \backslash (B \cup C) = |A| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| = 112 - 67 - 32 + 12 = 25$.

Exercice 16 (* à ***)

- Aucune condition : $\binom{32}{5} = 201\ 376$ tirages.
- Deux Rois : $\binom{4}{2} \times \binom{28}{3} = 19\ 656$ (on choisit deux cartes parmi les quatre Rois et trois parmi les 28 cartes ne sont pas des Rois).
- Au moins un pique : par passage au complémentaire, $\binom{32}{5} - \binom{24}{5} = 158\ 872$
- Un As et deux carreaux : il faut distinguer le cas de l'As de carreau, ce qui fait $\binom{7}{1} \times \binom{21}{3}$ (l'As de carreau ; un autre carreau parmi les sept restants ; et trois cartes parmi les 21 qui ne sont ni des carreaux ni des As) $+ \binom{3}{1} \times \binom{7}{2} \times \binom{21}{2}$ (un As qui n'est pas un carreau, deux carreaux qui ne sont pas des As, et trois autres cartes qui ne sont ni des carreaux ni des As), soit 22 540 tirages.
- Pas de carte en-dessous du 9 : $\binom{24}{5} = 42\ 504$ tirages (il y a 24 cartes au-dessus du 9).
- Deux paires : il faut choisir les hauteurs des deux paires (parmi huit possibles), puis les couleurs des deux cartes pour chaque paire, et enfin la dernière carte, soit $\binom{8}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{24}{1} =$ 24 192 tirages.
- Cinq cartes de la même couleur : 4 choix pour la couleur, puis 5 cartes à choisir parmi les 8 de la couleur, soit $4 \times \binom{8}{5} = 224$ tirages possibles.
- Quinte flush : 16 tirages (là, on peut compter à la main).

Exercice 17 (*)

Du calcul brutal utilisant bien entendu la formule du binôme de Newton : $(x-3)^5 = x^5 - 15x^4 + 90x^3 - 270x^2 + 405x - 243$; $(2x+3y)^3 = 8x^3 + 36xy^2 + 54xy^2 + 27y^3$ et $(x-1)^7 = x^7 - 7x^6 + 21x^5 - 35x^4 + 35x^3 - 21x^2 + 7x - 1$.

Exercice 18 (*)

1. On a k cases à noircir sur un total de np, donc $\binom{np}{k}$ grilles possibles.
2. Il reste $k-4$ cases à noircir parmi $np-4$, donc $\binom{np-4}{k-4}$ (naturellement, on doit avoir $k \geqslant 4$).
3. Il faut choisir les deux coins, puis noircir $k-2$ cases parmi les $np-4$ qui ne sont pas des coins, donc $\binom{4}{2} \times \binom{np-4}{k-2}$ possibilités.

4. Cela suppose que $k \leqslant n$. Il faut alors choisir les k lignes contenant une case parmi les n possibles, puis il reste pour chacune de ces lignes p choix pour la case à noircir, donc $\binom{n}{k} \times p^k$ grilles possibles.
5. La grille a donc n lignes et n colonnes, et on cherche à noircir une case par ligne, sans en mettre deux dans la même colonne. Il y a n choix possibles pour la case à noircir sur la première ligne, $n-1$ choix pour la case de la deuxième ligne (il ne faut pas la mettre dans la même colonne que la première), $n-2$ pour la troisième etc. Quand on arrive à la dernière ligne, on n'a plus le choix pour la dernière case à noircir (il ne reste qu'une seule colonne vierge). On a donc $n \times (n-1) \times \cdots \times 1 = n!$ grilles possibles.
6. On aurait 9! choix s'il n'y avait pas la condition supplémentaire sur les petits carrés. Le mieux est de recommencer une raisonnement similaire à celui de la question précédente :
   - il y a 9 possibilités pour le 1 de la première ligne.
   - il y a seulement 6 possibilités ensuite pour le 1 de la deuxième ligne (trois cases à éviter qui sont dans le même petit carré que le premier 1).
   - plus que 3 possibilités pour la troisième ligne (un seul petit carré vierge en haut de la grille).
   - à nouveau 6 possibilités pour la quatrième ligne (plus de problème de petit carré, mais tout de même trois colonnes à éviter).
   - 4 pour la cinquième ligne (deux colonnes libres dans deux petits carrés).
   - 2 pour la sixième (deux colonnes dans le dernier petit carré médian).
   - 3 sur la septième ligne (plus que trois colonnes libres).
   - 2 et 1 pour les deux dernières.

   Soit $9 \times 6 \times 3 \times 6 \times 4 \times 2 \times 3 \times 2 \times 1 = 46\ 656$ façons de placer les 1.
7. Au total, il y a $\binom{81}{9}$ façons de placer neuf 1 dans une grille de 81 cases, soit 260 887 834 350 possibilités. La proportion de placements « Sudoku-compatibles » est donc extrêmement faible !

Feuille d'exercices n°9 : Suites.

PTSI B Lycée Eiffel

10 janvier 2013

Exercice 1 (*)

1. La relation de parallélisme est réflexive (une droite est parallèle à elle-même), et transitive (si d et d' d'un coté, et d' et d'' de l'autre sont parallèles, alors d et d'' sont parallèles), mais pas antisymétrique. Au contraire, la relation est symétrique : si d est parallèle à d', alors d' est automatiquement parallèle à d. La relation de parallélisme est en fait une relation d'équivalence.
2. La relation d'inclusion est réflexive, transitive (si $E \subset F$ et $F \subset G$, alors $E \subset G$), et antisymétrique puisque $E \subset F$ et $F \subset E$ implique bien $E = F$. Il s'agit donc d'une relation d'ordre, qui n'est pas le moins du monde totale (par exemple, si $E = [0;1]$ et $F = [2;3]$, on n'a ni $E \subset F$ ni $F \subset E$). Le plus grand élément pour cette relation est $\mathbb{R}$, le plus petit est $\emptyset$.
3. La relation R est sûrement réflexive puisque $a^a \leqslant a^a$.
   relation R définie par $aRb \Leftrightarrow a^b \leqslant b^a$ sur $\mathbb{N}^*$, puis sur $\{3; 4; \dots\}$.
4. relation $fRg \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant g(x)$ sur l'ensemble de toutes les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
5. relation $(x, y)R(x', y') \Leftrightarrow |x' - x| \leqslant y' - y$ sur $\mathbb{R}^2$. Le disque trigonométrique possède-t-il un plus grand élément pour cette relation ? Une borne supérieure ?

Exercice 2 (***)

On souhaite prouver qu'une application $f : [0;1] \to [0;1]$ croissante admet nécessairement un point fixe. Pour cela, on pose $E = \{x \in [0;1] \mid f(x) \geqslant x\}$. montrer que E possède une borne supérieure a, puis que cette borne supérieure vérifie $f(a) = a$ (on pourra raisonner par l'absurde et distinguer deux cas).

Exercice 3 (**)

Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$ (qui admettent donc une borne supérieure). Montrer que $A \cup B$ admet une borne supérieure, et déterminez-là en fonction de celle de A et B (on fera naturellement une preuve rigoureuse).

Exercice 4 (***)

On considère une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ vérifiant $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$, et $f(xy) = f(x)f(y)$.

1. Montrer que la fonction nulle convient. On exclut désormais ce cas peu intéressant.
2. Montrer que $f(1) = 1$ et $f(0) = 0$.
3. Montrer que f coïncide avec l'identité sur $\mathbb{N}$ (si vous préférez, que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = n$).
4. Montrer que f coïncide avec l'identité sur $\mathbb{Q}_+$.
5. Montrer que f ne prend que des valeurs positives, et qu'elle est croissante.
6. Montrer que $f = id_{\mathbb{R}_+}$.

Exercice 5 (**)

Calculer les nombres suivants :

- $Ent((\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^2)$
- $Ent\left(\dfrac{n-1}{2}\right)+Ent\left(\dfrac{n+2}{4}\right)+Ent\left(\dfrac{n+4}{4}\right)$
- $Ent\left(\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=10\ 000}\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)$ (on pourra utiliser le fait que $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\leqslant\dfrac{1}{2\sqrt{n}}\leqslant\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$).

Exercice 6 (**)

Calculer à l'aide des définitions les limites suivantes :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2-2n=+\infty$
- $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2n+3}=0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n-1}{n+1}=2$
- $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n+3}=+\infty$

Exercice 7 (**)

Vrai ou faux ?

1. Une suite croissante à partir d'un certain rang est minorée.
2. Une suite convergente est nécessairement monotone à partir d'un certain rang.
3. Une suite divergeant vers $+\infty$ est nécessairement croissante à partir d'un certain rang.
4. Si (v_n) est croissante, et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\geqslant v_n$, alors (u_n) est croissante.
5. Si $(|u_n|)$ converge, alors (u_n) aussi.
6. Si $(|u_n|)$ converge vers 0, alors (u_n) aussi.

Exercice 8 (* à **)

Déterminer la limite éventuelle de chacune des suites suivantes :

- $u_n=\dfrac{3^n-2^n}{4^n}$
- $u_n=(-n+2)e^{-n}$
- $u_n=\dfrac{n^2-3n+2}{2n^2+5n-34}$
- $u_n=\sqrt{n^2-1}-n$
- $u_n=\dfrac{(n+2)!}{(n^2+1)\times n!}$
- $u_n=e^{-\frac{1}{2n}}+\ln\left(\dfrac{n}{n+2}\right)$
- $u_n=\dfrac{n+\sin(n)}{n-\cos(n)}$
- $u_n=\sinh(2n)-2\sinh(n)$
- $u_n=\arctan\left(\dfrac{n\sqrt{\ln(1+\frac{\pi^2}{n^2})}}{4}\right)$

Exercice 9 (***)

On considère une suite (u_n) définie par $u_n=\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n$, avec $a\in\mathbb{R}_+$.

1. Montrer que la suite est croissante (pour cette question, on étudiera les variations de la fonction $f : x\mapsto x\ln\left(1+\dfrac{a}{x}\right)$ en la dérivant deux fois).
2. Montrer que, $\forall x\geqslant 0$, $\dfrac{t}{1+t}\leqslant\ln(1+t)\leqslant t$.

3. En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{na}{n+a} \leqslant \ln u_n \leqslant a$.
4. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
5. Quel résultat obtient-on en prenant $a = 1$?

Exercice 10 (*)

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies de la façon suivante : $u_n = \sum_{k=0}^{k=n} \dfrac{1}{k!}$, et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n \times n!}$. Montrer que ces deux suites sont adjacentes (les curieux seront contents d'apprendre que leur limite commune vaut e). Question subsidiaire (nettement plus difficile) : montrer que la limite commune des ces deux suites est un nombre irrationnel (quon ne peut pas écrire sous la forme d'un quotient d'entiers) en faisant un raisonnement par l'absurde.

Exercice 11 (**)

Soient a et b deux réels vérifiant $0 < a < b$. On définit deux suites de la façon suivante : $u_0 = a$; $v_0 = b$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$.

1. Vérifier que ces deux suites sont bien définies.
2. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$ (pour une fois, pas besoin de récurrence).
3. Déterminer la monotonie de chacune des deux suites.
4. En déduire que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.

Exercice 12 (**)

Soit p un entier fixé supérieur ou égal à 2. On pose $u_n = \dfrac{1}{\binom{n+p}{n}}$, et $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} u_k$.

1. Montrer la relation $(n + p + 2)u_{n+2} = (n + 2)u_{n+1}$.
2. Montrer par récurrence que $S_n = \dfrac{1}{p-1}(1 - (n + p + 1)u_{n+1})$.
3. En posant $v_n = (n + p)u_n$, montrer que (v_n) converge vers 0.
4. En déduire la limite de la suite (S_n).

Exercice 13 (***)

1. Démontrer le théorème de Cesaro : si une suite (u_n) converge vers une limite finie l, alors la suite (v_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{k=n} u_k$ a la même limite l (on pourra commencer par traiter le cas particulier où $l = 0$, et revenir à la définition de la limite).
2. Soit (u_n) une suite pour laquelle $\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} - u_n = \alpha$, déterminer un équivalent simple de u_n.
3. Pour une suite (u_n) convergeant vers l, on pose désormais $v_n = \dfrac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{k=n} k u_k$. Déterminer la limite de (v_n) en utilisant une technique proche de celle de la première question.
4. En déduire un équivalent simple d'uns suite (u_n) pour laquelle $u_{n+1} - u_n \sim \beta n$.

Exercice 14 (*)

Déterminer un équivalent simple de chacune des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{n^2 + e^{-2n} + \sqrt{n^5}}{\ln(2n) + 2n - 3}$
2. $u_n = (n + 3\ln(n))e^{-(n+1)}$
3. $u_n = \dfrac{\ln(n^2+1)}{n^2+1}$
4. $u_n = \ln\left(\dfrac{n^2+1}{n^2+2}\right)$
5. $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$
6. $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} k!$
7. $u_n = \dfrac{n^{\sqrt{n+1}}}{(n+1)^{\sqrt{n}}}$

Exercice 15 (**)

On considère la suite (S_n) définie pour $n \geqslant 1$ par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
2. À l'aide de la question précédente, déterminer la limite de la suite (S_n).
3. On pose désormais $u_n = S_n - 2\sqrt{n}$. Démontrer à l'aide du théorème de convergence monotone que (u_n) converge.
4. En déduire un équivalent simple de S_n.

Exercice 16 (**)

Soit (u_n) une suite décroissante vérifiant $u_n + u_{n+1} \sim \dfrac{1}{n}$. Montrer que la suite converge nécessairement vers 0 et en donner un équivalent simple. Le résultat reste-t-il vrai si la suite n'est pas supposée décroissante ?

Exercice 17 (**)

Trois réels a, b et c (avec $a \neq 0$) vérifient les drôles de conditions suivantes :
- a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q.
- a, $2b$ et $3c$ sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison q (la même que ci-dessus, donc).

Déterminer les valeurs possibles de a, b, c et q.

Exercice 18 (*)

Déterminer pour chacune des suites suivantes la valeur de u_n en fonction de n :

1. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 4u_n - 6$.

2. $u_0 = 0$; $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$
3. $u_0 = 0$; $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$
4. $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1} - u_n}{2}$
5. $u_0 = 2$; $u_1 = \dfrac{10}{3}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $3u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n$

Exercice 19 (**)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n$. Déterminer trois réels a, b et c tels que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n + an^2 + bn + c$ soit une suite géométrique. En déduire la valeur de u_n.

Exercice 20 (**)

On considère, pour tout entier naturel n, la fonction f_n définie par $f_n(x) = x^5 + nx - 1$.

1. Étudier les variations de f_n.
2. Montrer que, $\forall n \geqslant 1$, il existe un unique réel u_n tel que $f_n(u_n) = 0$.
3. Montrer que $u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$ et en déduire la convergence de la suite (u_n).
4. Montrer que $u_n \sim \dfrac{1}{n}$.
5. Déterminer un équivalent simple de $\dfrac{1}{n} - u_n$.

Exercice 21 (***)

Pour tout $n \geqslant 1$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 2$ admet une unique solution qu'on notera u_n.
2. Montrer que $\forall n \geqslant 2$, $u_n \in]0; 1[$.
3. Déterminer la monotonie de la suite (u_n), et en déduire sa convergence.
4. Calculer la limite de la suite (on pourra commencer par prouver que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n^n = 0$).
5. En posant $v_n = u_n - \dfrac{1}{2}$, montrer que $\left(\dfrac{1}{2} + v_n\right)^{n+1} = 2v_n$.
6. En déduire que $v_n \sim \dfrac{1}{2^{n+2}}$.

Exercice 22 (**)

Étudier le comportement des suites récurrentes suivantes :

1. $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + 1$
2. $u_0 = \sqrt{3}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$
3. $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 1}{2u_n}$
4. $u_0 \geqslant 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \ln(u_n)$
5. $u_0 \in [-2; 2]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$ (on pourra prouver que $|u_n - 1|$ converge vers 0).

Exercice 23 (***)

On considère la suite (u_n) définie pour $n \geqslant 1$ par $u_n = \sqrt{n + \sqrt{n-1+\sqrt{n-2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}}$.

1. Montrer que (u_n) diverge vers $+\infty$.
2. Déterminer une relation simple entre u_{n+1} et u_n.
3. Prouver par récurrence que $u_n \leqslant n$ puis que $u_n = o(n)$.
4. Déterminer un équivalent simple de u_n.
5. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - \sqrt{n}$.

Exercice 24 (**)

On considère une suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right)$, où a est un réel fixé strictement positif.

1. Étudier la nature de la suite (u_n).
2. On pose $v_n = \dfrac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$, déterminer v_{n+1} en fonction de v_n, puis v_n en fonction de n et de v_0.
3. En déduire une majoration de l'écart entre u_n et la limite de la suite en fonction de u_0 et de v_0. Pour $a = 2$, quelle valeur de n suffit-il de choisir pour que u_n soit une valeur approchée de la limite à 10^{-100} près (calculatrice autorisée pour l'application numérique !).

Problème (***)

Pour toutes suites numériques $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on définit la suite $u \star v = w$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{n-k}$$

Partie A : Exemples

1. **Premiers exemples**
   Pour tout entier naturel n, calculer w_n en fonction de n dans chacun des cas suivants :
   (a) pour tout entier naturel n, $u_n = 2$ et $v_n = 3$.
   (b) pour tout entier naturel n, $u_n = 2^n$ et $v_n = 3^n$.
2. **Programmation**
   Dans cette question, les suites u et v sont définies par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \ln(n+1)$ et $v_n = \dfrac{1}{n+1}$.
   Écrire une procédure Maple qui demande à l'utilisateur une valeur de l'entier naturel n, qui calcule et affiche les valeurs $w_0,\ w_1,\ \ldots,\ w_n$.
3. **Un résultat de convergence**
   Dans cette question, la suite u est définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et v est une suite de réels positifs, décroissante à partir du rang 1 et de limite nulle.
   (a) Établir, pour tout couple d'entiers naturels (n, m) vérifiant $n < m$, l'inégalité :

$$\sum_{k=n+1}^{m} u_k \leqslant u_n$$

(b) Soit n un entier strictement supérieur à 1. Prouver les inégalités :

$$w_{2n} \leqslant v_0\, u_{2n} + 2v_n + v_1\, u_n \quad \text{et} \quad w_{2n+1} \leqslant v_0\, u_{2n+1} + 2v_{n+1} + v_1\, u_n$$

(c) En déduire que les deux suites $(w_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0 ainsi que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(d) Soit u' la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u'_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$. À l'aide de la question précédente, montrer que la suite $u' \star v$ est convergente et de limite nulle.

Partie B : Application à l'étude d'un ensemble de suites

Dans cette partie, A désigne l'ensemble des suites $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad a_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1})$$

1. Montrer que toute suite décroissante de réels positifs est élément de A et qu'une suite strictement croissante ne peut appartenir à A.
2. Soit $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}^\times,\ z_{n+1} = \dfrac{1}{2}(z_n + z_{n-1})$.

   (a) Montrer qu'il existe deux constantes réelles α et β telles que l'on a :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_n = \alpha + \beta \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

   (b) En déduire qu'il existe des suites appartenant à A et non monotones.
3. Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de A et b la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.

   On définit alors la suite c par : $c_0 = a_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^\times,\ c_n = a_n + \dfrac{1}{2}a_{n-1}$.

   (a) Montrer que la suite c est décroissante à partir du rang 1 et qu'elle converge vers un nombre ℓ que l'on ne cherchera pas à calculer.

   (b) Pour tout entier naturel n, établir l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n-k} = a_n$.

   Que peut-on en déduire pour les suites $b \star c$ et a ?

   (c) Soit ε la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ \varepsilon_n = c_n - \ell$ et d la suite $b \star \varepsilon$.

   En utilisant le résultat de la question **3**. de la Partie **1**, montrer que la suite d converge vers 0.

   (d) Pour tout entier naturel n, établir l'égalité : $d_n = a_n - \dfrac{2}{3}\ell\left(1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$.

   En déduire que la suite a converge et préciser sa limite.

Corrigé de la feuille d'exercices n°9

Exercice 1 (*)

1. La relation de parallélisme est réflexive (une droite est parallèle à elle-même), et transitive (si d et d' d'un coté, et d' et d'' de l'autre sont parallèles, alors d et d'' sont parallèles), mais pas antisymétrique. Au contraire, la relation est symétrique : si d est parallèle à d', alors d' est automatiquement parallèle à d. La relation de parallélisme est en fait une relation d'équivalence.
2. La relation d'inclusion est réflexive, transitive (si $E \subset F$ et $F \subset G$, alors $E \subset G$), et antisymétrique puisque $E \subset F$ et $F \subset E$ implique bien $E = F$. Il s'agit donc d'une relation d'ordre, qui n'est pas le moins du monde totale (par exemple, si $E = [0;1]$ et $F = [2;3]$, on n'a ni $E \subset F$ ni $F \subset E$). Le plus grand élément pour cette relation est $\mathbb{R}$, le plus petit est $\emptyset$.
3. La relation R est sûrement réflexive puisque $a^a \leqslant a^a$. Elle n'est par contre pas transitive : par exemple $7R2$ puisque $7^2 = 49 < 2^7 = 128$; $2R3$ puisque $2^3 = 8 < 3^2 = 9$, mais on n'a pas $3^7 < 7^3$ (en effet, $3^7 = 2\ 187$ et $7^3 = 343$). Elle n'est pas non plus antisymétrique : $2R4$ et $4R2$ sont tous les deux vérifiés puisque $2^4 = 16 = 4^2$. Il y a un plus petit élément tout de même pour cette relation puisque $1Rb$ est vérifié quel que soit l'entier b. Il y a également un plus grand élément qui est 3 (cf plus bas). Si on enlève les cas particulier 1 et 2, on peut en fait prouver que la relation R coïncide avec la relation $\geqslant$ (et qu'il s'agit donc d'une relation d'ordre dont le plus grand élément est toujours 3 mais qui ne possède plus de plus petit élément). En effet, aRb est équivalent à $b\ln(a) \leqslant a\ln(b)$. Si on pose $f_a(x) = a\ln(x) - x\ln(a)$, la fonction a pour dérivée $\dfrac{a}{x} - \ln(a)$, qui s'annule en $x = \dfrac{a}{\ln(a)}$. La fonction est donc croissante puis décroissante. Or, elle s'annule certainement en $x = a$, avec $a > \dfrac{a}{\ln(a)}$ puisque a est supposé supérieur à 3. On a donc $f_a(x) < 0$ si $x > a$, et en particulier bRa si $b > a$. Sur l'intervalle $[3; a]$, la fonction f_a est croissante puis décroissante, reste à vérifier le signe de $f_a(3)$. Or, $f_a(3) = a\ln(3) - 3\ln(a) = -f_3(a)$, donc on vient d'expliquer que c'était nécessairement positif si $a \geqslant 3$. La fonction f_a est donc positive sur $[3, a]$, et cela prouve que aRb si $b \leqslant a$. Notre relation est donc bien une relation d'ordre total (assez élémentaire qui plus est !).
4. La relation R est certainement réflexive, transitive (si $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ pour tout réel alors $f(x) \leqslant h(x)$), mais également antisymétrique (en effet si $f(x) \leqslant g(x)$ et $g(x) \leqslant f(x)$, alors $f(x) = g(x)$ et cette relation est vraie pour tous les réels). C'est donc une relation d'ordre. Ce n'est pas du tout une relation d'ordre total, si on prend par exemple $f(x) = x$ et $g(x) = -x$, on ne peut pas les comparer à l'aide de la relation R (si $x < 0$, $f(x) < g(x)$, mais si $x > 0$, $g(x) < f(x)$). Il n'y a pas non plus de plus grand élément (une fonction ne peut pas être supérieure à toutes les fonctions constantes, encore moins à toutes les fonctions tout court) ni de plus petit élément.
5. La relation R est réflexive (puisque $|0| \leqslant 0$), mais aussi transitive (si $|x'-x| \leqslant y'-y$ et $|x''-x'| \leqslant y''-y'$, alors par inégalité triangulaire $|x''-x| \leqslant |x''-x'|+|x'-x| \leqslant y''-y'+y'-y \leqslant y''-y$) et antisymétrique : si $|x'-x| \leqslant y'-y$ et $|x-x'| \leqslant y-y'$, alors on a nécessairement $y - y' = 0$ (sinon l'un des deux membres de droite des inégalités précédentes est strictement négatif, et une valeur absolue ne peut pas lui être inférieure !), puis $|x - x'| = 0$, soit $x = x'$. Les deux couples coïncident donc. La relation d'ordre n'est pas totale, par exemple $(0, 0)$ et $(1, 0)$ ne sont pas comparables puisqu'on a alors $y - y' = y' - y = 0$, mais $|x - x'| = 1$. Il n'y a pas de plus grand ni de plus petit élément pour R (pour un couple fixé, on peut par exemple toujours trouver un autre couple tel que $y - y' < 0$ qui ne peut donc pas être plus grand). Un plus grand élément pour le disque trigonométrique serait nécessairement le point du disque ayant la plus grande ordonnée (pour que le membre de droite dans la relation R ne soit jamais strictement négatif, sinon on ne peut plus comparer avec un autre élément du disque), à savoir le point $(0, 1)$. Mais ce point n'est pas plus grand que tous les autres du disque trigo, par exemple $(0,6; 0,6)$ est un point du disque trigonométrique, mais $|0,6 - 0| > 1 - 0,6$. On peut par contre

trouver une borne supérieure, en l'occurence le couple $(0, \sqrt{2})$.

Exercice 2 (***)

L'ensemble E est un sous-ensemble de $[0;1]$ donc est un sous-ensemble majoré de $\mathbb{R}$, et il est non vide car il contient nécessairement 0 (puisque $f(0 \in [0;1])$. Il admet donc une borne supérieure qu'on va noter a conformément aux indications de l'énoncé. Par propriété de la borne supérieure, on peut trouver pour tout ε positif un réel dans $[a-\varepsilon; a]$ appartenant à E. On peut alors écrire, en utilisant la croissance de f et l'appartenance de $a-\varepsilon$ à E les inégalités $f(a) \geqslant f(a-\varepsilon) \geqslant a-\varepsilon$. Autrement dit, $f(a) \geqslant a-\varepsilon$, ce qui implique $f(a) \geqslant a$ puisque c'est vrai pour tout ε positif. De plus, a étant la borne supérieure de E, on peut dire que $\forall \varepsilon > 0$, $f(a+\varepsilon) < a+\varepsilon$ (puisque ces éléments ne peuvent pas appartenir à E). Par croissance de f, on a donc $f(a) \leqslant f(a+\varepsilon) < a+\varepsilon$ et on conclut comme tout à l'heure que $f(a) \leqslant a$. Conclusion : $f(a) = a$.

Exercice 3 (**)

Notons par exemple $s = \sup(A)$ et $t = \sup(B)$. Si A et B sont non vides et majorées, $A \cup B$ est certainement non vide, et également majorée (par exemple par le $\max(s,t)$). Montrons que ce maximum est en fait la borne supérieure de $A \cup B$. On vient de voir que c'en est un majorant. De plus, si ce max est égal à s (le cas où il est égal à t est complètement similaire), on sait que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in A$, $s-\varepsilon \leqslant x \leqslant s$. A fortiori on peut donc trouver un élément de $A \cup B$ (le même que précédemment) tel que $s-\varepsilon \leqslant x \leqslant s$, ce qui prouve que s est la borne supérieure de $A \cup B$.

Exercice 4 (***)

1. En effet, il parait que $0+0=0$ et $0 \times 0 = 0$.
2. Prenons par exemple $y = 1$ et un x pour lequel $f(x) \neq 0$ (cela existe forcément depuis qu'on a exclu la solution nulle) dans la relation $f(xy) = f(x)f(y)$. On obtient $f(x) = f(1)f(x)$, ce qui en simplifiant par $f(x)$ (ouf, il n'est pas nul) donne bien $f(1) = 1$. Pour 0, c'est encore plus facile : en prenant $x = y = 0$ dans le première relation, $f(0) = f(0) + f(0)$, donc $f(0) = 0$.
3. Effectuons une petite récurrence. On a déjà vu que $f(1) = 1$, supposons désormais $f(n) = n$ et appliquons la première relation avec $x = n$ et $y = 1$ pour obtenir $f(n+1) = f(n) + f(1) = n+1$ en exploitant l'hypothèse de récurrence. La relation est donc vraie pour tous les entiers naturels.
4. Considérons donc un nombre rationnel $x = \dfrac{p}{q}$, et appliquons la deuxième relation à $x = \dfrac{p}{q}$ et à $y = q$, on trouve alors $f(p) = f(x)f(q)$, soit $p = qf(x)$ puisque p et q sont des entiers. On en déduit immédiatement $f(x) = \dfrac{p}{q} = x$.
5. Puisque f n'est définie que sur $\mathbb{R}^+$, on peut toujours écrire $f(x) = f(\sqrt{x} \times \sqrt{x}) = f(\sqrt{x})f(\sqrt{x}) = (f(\sqrt{x}))^2 \geqslant 0$. Prenons désormais deux réels a et b tels que $a < b$, alors $b = a + (b-a)$, donc $f(b) = f(a) + f(b-a) \geqslant f(a)$ puisque $f(b-a) \geqslant 0$ (on vient de prouver que f ne prenait que des valeurs positives). La fonction f est donc croissante.
6. Soit donc un nombre réel positif irrationnel, supposons que $f(x) \neq x$, par exemple $f(x) > x$ (l'autre cas est très similaire). L'intervalle $[x, f(x)]$ étant donc non vide, par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il contient un nombre rationnel y. On a alors $x < y < f(x)$. Or, par croissance de f, on devrait avoir $f(x) \leqslant f(y)$, ce qui constitue une grave contradiction. On a donc nécessairement $f(x) = x$, quel que soit le réel positif x.

Exercice 5 (**)

- Commençons par constater que $(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^2 = 2n+1+2\sqrt{n^2+n}$. Par ailleurs, $4n^2 < 4n^2+4n < 4n^2+4n+1 = (2n+1)^2$, donc $2n < 2\sqrt{n^2+n} < 2n+1$. Autrement dit, $Ent(2\sqrt{n^2+n}) = 2n$, et $Ent((\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^2) = 2n+1+2n = 4n+1$.
- Le plus simple, bien que ce soit un peu laborieux, est de distinguer quatre cas selon le reste de la division de n par 4 :
  – si $n = 4p$, $Ent\left(\frac{n-1}{2}\right)+Ent\left(\frac{n+2}{4}\right)+Ent\left(\frac{n+4}{4}\right) = Ent\left(2p-\frac{1}{2}\right)+Ent\left(p+\frac{1}{2}\right)+Ent(p+1) = 2p-1+p+p+1 = 4p = n$.
  – si $n = 4p+1$, $Ent\left(\frac{n-1}{2}\right)+Ent\left(\frac{n+2}{4}\right)+Ent\left(\frac{n+4}{4}\right) = Ent(2p)+Ent\left(p+\frac{3}{4}\right)+Ent\left(p+\frac{5}{4}\right) = 2p+p+p+1 = 4p+1 = n$.
  – si $n = 4p+2$, $Ent\left(\frac{n-1}{2}\right)+Ent\left(\frac{n+2}{4}\right)+Ent\left(\frac{n+4}{4}\right) = Ent\left(2p+\frac{1}{2}\right)+Ent(p+1)+Ent\left(p+\frac{3}{2}\right) = 2p+p+1+p+1 = 4p+2 = n$.
  – si $n = 4p+3$, $Ent\left(\frac{n-1}{2}\right)+Ent\left(\frac{n+2}{4}\right)+Ent\left(\frac{n+4}{4}\right) = Ent(2p+1)+Ent\left(p+\frac{5}{4}\right)+Ent\left(p+\frac{7}{4}\right) = 2p+1+p+1+p+1 = 4p+3 = n$.

  Dans tous les cas, la partie entière recherchée est simplement égale à n.
- En utilisant subtilement l'indication donnée, et en constantant la présence de sommes télescopiques $\sqrt{10\ 001}-1 \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10\ 000}\frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant \sqrt{10\ 000}$. Comme $\sqrt{10\ 000} = 100$, la quantité dont on cherche la partie entière est strictement inférieure à 100 mais supérieure à un nombre plus grand que 99. Bref, la partie entière en question vaut 99.

Exercice 6 (**)

- Soit donc un réel $M > 0$ (si $M \leqslant 0$, il suffit de prendre $n_0 = 2$ pour que la définition de la limite soit vérifiée). On aura $n^2-2n > M$ dès que (ce n'est pas une équivalence) $n-2 > \sqrt{M}$ (puisqu'alors $n > \sqrt{M}$, et $n^2 = n(n-2) > M$). Il suffit donc de prendre $n_0 = Ent(2+\sqrt{M})+1$ pour satisfaire la définition de la limite infinie.
- Soit $\varepsilon > 0$, $\frac{1}{2n+3} < \varepsilon$ si $2n+3 > \frac{1}{\varepsilon}$, soit $n > \frac{1}{2\varepsilon}-\frac{3}{2}$, il suffit donc de prendre un n_0 strictement supérieur à cette quantité (je vous épargne le coupe de la partie entière augmentée d'un) pour satisfaire à la définition de la limite nulle.
- Soit $\varepsilon > 0$, on calcule $\frac{2n-1}{n+1}-2 = \frac{-3}{n+1}$. On aura donc $\left|\frac{2n-1}{n+1}-2\right| < \varepsilon$ si $\frac{3}{n+1} < \varepsilon$, soit $n > \frac{3}{\varepsilon}-1$, ce qui donne facilement une valeur de n_0 convenable.
- Soit $M > 0$ (si $M \leqslant 0$, encore une fois, ce n'est pas trop dur de rendre $\sqrt{n+3}$ plus grand que M). On aura $\sqrt{n+3} > M$ dès que $n > M^2-3$. Il suffit donc de prendre $n_0 = Ent(M^2-3)+1$.

Exercice 7 (**)

1. Vrai, elle est minorée par le plus petit des termes précédant le rang à partir duquel elle est croissante (c'est-à-dire que si, par exemple, (u_n) est croissante à partir du rang 1000, la suite sera minorée par le plus petit des termes parmi u_0, u_1, …, $u_{1\ 000}$; en effet, tous les termes suivants seront de toute façon plus grands que $u_{1\ 000}$).

2. Faux, par exemple $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge vers 0 mais $u_{n+1} - u_n$ change de signe en permanence.
3. C'est également faux, on peut par exemple prendre $u_n = n^2$ si n est pair, et $u_n = (n-1)^2 - 1$ si n est impair. La suite n'est pas croissante à partir d'un certain rang puisque chaque terme d'indice impair est plus petit que le terme d'indice pair qui le précède, et pourtant elle diverge vers $+\infty$.
4. C'est tout à fait faux, par exemple la suite utilisée dans la question précédente a des valeurs toujours plus grandes que $n-2$ (je vous laisse le vérifier) qui est une suite croissante.
5. Faux, par exemple $(-1)^n$ ne converge pas alors que sa valeur absolue est constante égale à 1 (et donc convergente).
6. Vrai, dire que $|u_n - 0| < \varepsilon$ est la même chose que $|u_n| - 0 < \varepsilon$.

Exercice 8 (* à **)

Première version du corrigé, en rédigeant tout le plus soigneusement possible, et de façin un brin « rustique » :

- On peut écrire $u_n = \dfrac{3^n}{4^n} - \dfrac{2^n}{4^n} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. La suite est donc une différence de deux suites géométriques dont les raisons sont comprises entre -1 et 1. Ces deux suites convergent donc vers 0, et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- On peut développer : $u_n = 2e^{-n} - ne^{-n}$. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$, donc le premier terme de la différence tend vers 0. Le deuxième peut s'écrire sous la forme $\dfrac{n}{e^n}$, c'est un cas d'école de croissance comparée, il tend également vers 0. Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- Pour un quotient de polynôme, vous êtes autorisés à utiliser la règle du quotient des termes de plus haut degré : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2 - 3n + 2}{2n^2 + 5n - 34} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{2n^2} = \dfrac{1}{2}$.
- Utilisation de la quantité conjuguée très conseillée pour ce calcul :
$u_n = \dfrac{(\sqrt{n^2-1} - n)(\sqrt{n^2-1} + n)}{\sqrt{n^2-1} + n} = \dfrac{n^2 - 1 - n^2}{\sqrt{n^2-1} + n} = \dfrac{-1}{\sqrt{n^2-1} + n}$.
Le dénominateur de cette fraction ayant clairement pour limite $+\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- La principale difficulté est la manipulation des factorielles : $u_n = \dfrac{n! \times (n+1) \times (n+2)}{(n^2+1) \times n!} = \dfrac{(n+1)(n+2)}{n^2+1} = \dfrac{n^2 + 3n + 2}{n^2+1}$. Reste à utiliser la règle des termes de plus haut degré pour obtenir $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
- Il faut simplement faire les choses méthodiquement. D'un côté, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{2n} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-\frac{1}{2n}} = e^0 = 1$; de l'autre côté, en utilisant la règle des termes de plus haut degré, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n} = 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\dfrac{n}{n+2}\right) = \ln(1) = 0$. Il ne reste plus qu'à additionner les deux termes pour obtenir $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
- On peut factoriser si on le souhaite numérateur et dénominateur par n, mais le plus simple reste sûrement d'encadrer le quotient en utilisant que $-1 \leqslant sin(n) \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$. On obtient ainsi, $\forall n \geqslant 2$, $\dfrac{n-1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n+1}{n-1}$, soit $1 - \dfrac{2}{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1 + \dfrac{2}{n-1}$. Les deux membres extrêmes de l'encadrement ayant la même limite 1, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
- Revenons à la définition du sinus hyperbolique : $u_n = \dfrac{e^{2n} - e^{-2n}}{2} - (e^n - e^{-n}) = e^n\left(\dfrac{e^n}{2} - 1\right) -$

$\dfrac{e^{-2n}}{2} + e^{-n}$. Une simple application des règles de calcul sur les sommes et produits de limite permet alors d'obtenir $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

- Pour celle-ci, difficile de s'en sortir sans équivalents, ou du moins sans une utilisation subtile des taux d'accroissement : comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{\pi^2}{n^2} = 1$, on peut dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(1+\frac{\pi^2}{n^2}) - \ln(1)}{1+\frac{\pi^2}{n^2}} = \ln'(1) = 1$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 \ln\left(1+\dfrac{\pi^2}{n^2}\right) = \pi^2$. Or, $n\sqrt{\ln\left(1+\dfrac{\pi^2}{n^2}\right)} = \sqrt{n^2\ln\left(1+\dfrac{\pi^2}{n^2}\right)}$, donc tout ce qui se trouve dans l'arctangente définissant u_n a pour limite $\dfrac{\sqrt{\pi^2}}{4} = \dfrac{\pi}{4}$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \arctan\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$.

Deuxième version du corrigé, en utilisant les équivalents et avec une rédaction nettement moins détaillée :

- $\dfrac{3^n - 2^n}{4^n} \sim \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3^n-2^n}{4^n} = 0$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (-n+2)e^{-n} = 0$ par croissance comparée.
- $\dfrac{n^2-3n+2}{2n^2+5n-34} \sim \dfrac{n^2}{2n^2} = \dfrac{1}{2}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2-3n+2}{2n^2+5n-34} = \dfrac{1}{2}$.
- $\sqrt{n^2-1} - n = \dfrac{n^2-1-n^2}{\sqrt{n^2-1}+n} = -\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2-1} - n = 0$.
- $\dfrac{(n+2)!}{(n^2+1)\times n!} = \dfrac{(n+1)(n+2)n!}{(n^2+1)n!} = \dfrac{n^2+3n+2}{n^2+1} \sim \dfrac{n^2}{n^2} = 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n+2)!}{(n^2+1)\times n!} = 1$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-\frac{1}{2n}} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\dfrac{n}{n+2}\right) = 0$, donc la limite recherchée est égale à 1.
- $u_n \sim \dfrac{n}{n} = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
- $u_n = \dfrac{e^{2n}-e^{-2n}}{2} - (e^n - e^{-n}) \sim \dfrac{e^{2n}}{2}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- $\tan u_n \sim \dfrac{n}{4}\sqrt{\dfrac{\pi^2}{n^2}} \sim \dfrac{\pi}{4}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \arctan\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$.

Exercice 9 (***)

1. Commençons donc par prouver la croissance de f sur $\mathbb{R}_+^*$. On a $f(x) = x\ln\dfrac{x+a}{x} = x\ln(x+a) - x\ln x$, donc $f'(x) = \ln(x+a) + \dfrac{x}{x+a} - \ln x - 1$, et $f''(x) = \dfrac{1}{x+a} + \dfrac{x+a-x}{(x+a)^2} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x(x+a)+ax-(x+a)^2}{x(x+a)^2} = \dfrac{-a^2}{x(x+a)^2} < 0$. La fonction f' est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Or, $f'(x) = \ln\left(1+\dfrac{a}{x}\right) + \dfrac{x}{x+a} - 1$ a pour limite 0 en $+\infty$ (en effet, ce qui se trouve dans le ln a pour limite 1 donc le terme avec le ln tend vers 0 ; et en conservant les termes de plus haut degré, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x+a} = 1$). Il est inutile ici (même si ce n'est pas spécialement difficile) de calculer la limite de f' en 0, on peut déjà conclure que f' est toujours positive, ce dont on déduit que f est bien croissante.

   Il faut maintenant faire le lien avec la suite (u_n) en remarquant que $\ln(u_n) = n\ln\left(1+\dfrac{a}{n}\right) = f(n)$. La fonction f étant croissante, on aura certainement, pour tout entier n, $f(n) \leqslant f(n+1)$, c'est-à-dire $\ln(u_n) \leqslant \ln(u_{n+1})$. Un petit passage à l'exponentielle donne alors $u_n \leqslant u_{n+1}$, ce qui prouve que la suite (u_n) est croissante.

2. Le plus simple est de démontrer séparément chacune des deux inégalités en faisant tout passer d'un seul côté et en faisant des études de fonctions. Posons ainsi $g(t) = t - \ln(1+t)$. La fonction g est définie sur $\mathbb{R}_+$ (elle est même définie entre -1 et 0, mais pour ce qu'on nous demande, pas la peine de s'y intéresser), de dérivée $g'(t) = 1 - \dfrac{1}{1+t} = \dfrac{t}{1+t} \geqslant 0$. La fonction g est donc croissante, et comme $g(0) = 0$, elle est toujours positive, ce qui prouve que $t - \ln(1+t)$ sur $\mathbb{R}_+$, soit $\ln(1+t) \leqslant t$.

   De même, on pose $h(t) = \ln(1+t) - \dfrac{t}{1+t}$, fonction dont la dérivée vaut $\dfrac{1}{1+t} - \dfrac{1+t-t}{(1+t)^2} = \dfrac{1+t-1}{(1+t)^2} = \dfrac{t}{(1+t)^2} \geqslant 0$. Cette fonction est donc également croissante, et vérifie aussi $h(0) = 0$, d'où sa positivité sur $\mathbb{R}_+$ et l'encadrement souhaité.
3. On a vu que $\ln u_n = n \ln\left(1 + \dfrac{a}{n}\right)$, donc en posant $t = \dfrac{a}{n}$ et en appliquant l'encadrement de la question précédente, $\dfrac{\frac{a}{n}}{1+\frac{a}{n}} \leqslant n\ln\left(1+\dfrac{a}{n}\right) \leqslant \dfrac{a}{n}$, soit $\dfrac{\frac{a}{n}}{\frac{n+a}{n}} \leqslant \dfrac{1}{n}\ln u_n \leqslant \dfrac{a}{n}$, ou encore $\dfrac{a}{a+n} \leqslant \dfrac{1}{n}\ln u_n \leqslant \dfrac{a}{n}$. Il ne reste plus qu'à tout multiplier par n pour obtenir l'encadrement demandé.
4. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{na}{n+a} = a$ (on garde les termes de plus haut degré, a étant toujours une constante), le théorème des gendarmes permet d'affirmer que la suite $\ln(u_n)$ converge vers a. La suite (u_n) a donc pour limite e^a.
5. Pour $a = 1$, on obtient le résultat classique suivant : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

Exercice 10 (*)

Il y a deux points sur les trois qui sont très faciles à prouver :

- $v_n - u_n = \dfrac{1}{n \times n!}$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$.
- $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} > 0$, donc la suite (u_n) est croissante.

Ne reste plus qu'à prouver que (v_n) est décroissante : $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \dfrac{1}{(n+1)\times(n+1)!} - u_n - \dfrac{1}{n \times n!} = \dfrac{1}{(n+1)!} + \dfrac{1}{(n+1)\times(n+1)!} - \dfrac{1}{n\times n!} = \dfrac{n(n+1)+n-(n+1)^2}{n\times(n+1)\times(n+1)!} = \dfrac{n^2+2n-(n^2+2n+1)}{n(n+1)(n+1)!} = \dfrac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0$. La suite (v_n) est donc bien décroissante, et les deux suites étant adjacentes, elles convergent donc vers une limite commune.

Notons donc l la limite commune des deux suites, et supposons que $l = \dfrac{a}{b}$, avec a et b deux entiers naturels. Comme la suite (u_n) est strictement croissante, et la suite (v_n) strictement décroissante, on peut écrire, pour tout entier n, $u_n < l < v_n$, soit $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n}\frac{1}{k!} < \frac{a}{b} < \sum_{k=0}^{k=n}\frac{1}{k!} + \frac{1}{n\times n!}$. C'est en particulier vrai lorsque $n = b$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=b}\frac{1}{k!} < \frac{a}{b} < \sum_{k=0}^{k=b}\frac{1}{k!} + \frac{1}{b\times b!}$. Multiplions cet encadrement par $b \times b!$: $\displaystyle b\sum_{k=0}^{k=b}\frac{b!}{k!} < a \times b! < b\sum_{k=0}^{k=b}\frac{b!}{k!} + 1$. À gauche, chaque quotient $\dfrac{b!}{k!}$ est un entier lorsque $k \leqslant b$ (en effet, $b!$ est un multiple de $k!$ pour tous les entiers k compris entre 0 et b), donc le membre de gauche est une somme d'entiers et appartient à $\mathbb{N}$. Notons ce nombre p. Le membre de droite est le même que celui de gauche, avec un simple $+1$, donc est égal à $p+1$. On a donc $p < a \times b! < p+1$. Autrement dit, le nombre $a \times b!$, qui est lui aussi un nombre entier, est strictement compris entre les deux entiers consécutifs p et $p+1$. Ce n'est pas possible ! On a prouvé par l'absurde que l ne pouvait pas être un nombre rationnel (pour les curieux, la valeur de l est en fait le nombre e que nous connaissons bien depuis l'étude de la fonction exponentielle).

Exercice 11 (**)

1. Il suffit pour cela de prouver par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$. C'est vrai au rang 0 par hypothèse, et si u_n et v_n sont tous deux strictement positifs, ce sera aussi le cas de $u_n + v_n$ et de $u_n v_n$, donc de u_{n+1} et v_{n+1}. Ainsi, les deux suites sont bien définies.
2. Supposons $n \geqslant 1$ (pour $n = 0$ l'inégalité est vraie par hypothèse). On a $v_n - u_n = \dfrac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2} - \sqrt{u_{n-1}v_{n-1}} = \dfrac{u_{n-1} + v_{n-1} - 2\sqrt{u_{n-1}}\sqrt{v_{n-1}}}{2} = \dfrac{(\sqrt{u_{n-1}} - \sqrt{v_{n-1}})^2}{2} > 0$, donc $u_n \leqslant v_n$.
3. C'est désormais facile en utilisant le résultat de la question précédente : $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n v_n} - u_n = \sqrt{u_n}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}) > 0$ puisque $v_n > u_n$, donc (u_n) est strictement croissante. De même, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n + v_n}{2} - v_n = \dfrac{u_n - v_n}{2} < 0$, donc (v_n) est décroissante.
4. On ne peut pas affirmer que les suites sont adjacentes car on ne sait pas si $(u_n - v_n)$ tend vers 0. Par contre, (u_n) étant croissante et majorée par exemple par v_0 (car $u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$ puisque la suite (v_n) est decroissante), le théorème de convergence monotone permet d'affirmer qu'elle est convergente vers une certaine limite l. De même, (v_n) est décroissante et minorée (encore plus simplement, par 0), donc converge vers une limite l'. La suite (v_{n+1}) converge aussi vers l', mais comme $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$, on a donc, par passage à la limite, $l' = \dfrac{l + l'}{2}$, d'où $\dfrac{l'}{2} = \dfrac{l}{2}$, soit $l = l'$. Finalement, les deux suites ont bien la même limite (appelée moyenne arithmético-géométrique des deux réels a et b).

Exercice 12 (**)

1. C'est un simple calcul : $(n+p+2)u_{n+2} = \dfrac{(n+p+2)(n+2)!p!}{(n+p+2)!} = \dfrac{(n+2)!p!}{(n+p+1)!}$, et $(n+2)u_{n+1} = \dfrac{(n+2)(n+1)!p!}{(n+p+1)!} = \dfrac{(n+2)!p!}{(n+p+1)!}$. Les deux quantités sont bien égales.
2. Faisons donc une récurrence. Pour $n = 0$, $S_0 = 0$ (il n'y a rien dans la somme !) et comme $u_1 = \dfrac{1}{p+1}$, $\dfrac{1}{p-1}(1 - (p+1)u_1) = \dfrac{1}{p-1}(1-1) = 0$. Supposons donc l'égalité vérifiée au rang n, alors $S_{n+1} = S_n + u_{n+1} = \dfrac{1}{p-1}(1 - (n+p+1)u_{n+1}) + u_{n+1} = \dfrac{1}{p-1}(1 - (n+p+1)u_{n+1} + (p-1)u_{n+1}) = \dfrac{1}{p-1}(1 - (n+2)u_{n+1}) = \dfrac{1}{p-1}(1 - (n+p+2)u_{n+2})$ en utilisant le résultat de la question précédente. C'est exactement ce qu'on doit démontrer pour prouver la propriété au rang $n+1$, par principe de récurrence, la propriété est donc toujours vraie.
3. Il suffit d'écrire que $v_n = \dfrac{(n+p)n!p!}{(n+p)!} = \dfrac{p!}{(n+1)(n+2)\dots(n+p-1)}$. Ce quotient a certainement pour limite 0 quand n tend vers $+\infty$ (rappelons que p est fixé). On peut même être beaucoup plus précis : puisqu'on a un polynôme de degré $p - 1 \geqslant 1$ au dénominateur, $v_n \sim \dfrac{p!}{n^{p-1}}$.
4. On a prouvé plus haut que $S_n = \dfrac{1 - v_{n+1}}{p-1}$. Si (v_n) tend vers 0, on en déduit immédiatement que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{1}{p-1}$.

Exercice 13 (***)

1. Supposons donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, et choisissons un $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite, il existe un entier n_0 à partir duquel on aura $|u_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Découpons alors v_n en deux parties : ce qui se passe avant n_0 et après n_0 : si $n > n_0$, $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} u_k = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n_0} u_k + \dfrac{1}{n}\sum_{k=n_0+1}^{k=n} u_k$. La première somme est une constante (on peut modifier n, mais n_0, lui, est fixé), donc, quand on la divise par n, ça va finir par se rapprocher de 0. Autrement dit, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n_1$, $\dfrac{1}{n}\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n_0} u_k\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
   Quand à la deuxième somme, elle est constituée de $n - n_0$ termes qui, d'après ce qu'on a dit plus haut, sont tous inférieurs (en valeur absolue) à $\dfrac{\varepsilon}{2}$, donc par inégalité triangulaire sa valeur absolue est inférieure à $(n - n_0)\dfrac{\varepsilon}{2}$, d'où $\dfrac{1}{n}\left|\displaystyle\sum_{k=n_0+1}^{k=n} u_k\right| \leqslant \dfrac{n-n_0}{n}\dfrac{\varepsilon}{2} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ (puisque $\dfrac{n-n_0}{n} \leqslant 1$).
   Conclusion, lorsque $n \geqslant \max(n_0; n_1)$, on a $|v_n| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Ceci suffit à prouver que la suite (v_n) tend vers 0, et a donc bien la même limite que (u_n).
   Passons désormais au cas général (qui va être facile en fait), c'est à dire lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \neq 0$. Posons $w_n = u_n - l$, cette suite auxilaire a pour limite 0, donc on peut lui appliquer ce qu'on vient de démontrer : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} w_k = 0$. Or, $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} w_k = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}(u_k - l) = \dfrac{1}{n}\left((\sum_{k=1}^{k=n} u_k) - nl\right) = \left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} u_k\right) - l$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} u_k = l$, ce qu'on voulait prouver.
2. Posons donc $v_n = u_{n+1} - u_n$, la suite (v_n) a pour limite α par hypothèse, on peut donc lui appliquer le théorème de Cesaro pour obtenir $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} v_k = \alpha$ (on a décalé d'une unité l'indice de la suite pour plus de commodité). Or, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} v_k = u_n - u_0$ (il s'agit d'une somme télescopique). Autrement dit, si $\alpha \neq 0$, $u_n - u_0 \sim \alpha n$, et plus simplement $u_n \sim \alpha n$. Dans le cas où $\alpha = 0$, on ne peut rien dire d'intelligent. Il existe des quantités de suites très différentes vérifiant $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} - u_n = 0$. Toutes les suites convergentes ont notamment cette propriété (mais ce ne sont pas les seules !) et ne sont pas toutes équivalentes à la même chose.
3. Posons pour plus de simplicité $w_n = \dfrac{2}{n(n+1)}\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} ku_k$, et supposons dans un premier temps que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Il existe donc un rang n_0 à partir duquel $|u_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. On découpe la somme en deux comme précédemment : $w_n = \dfrac{2}{n(n+1)}\displaystyle\sum_{k=0}^{n_0} ku_k + \dfrac{2}{n(n+1)}\sum_{k=n_0+1}^{n} ku_k$. La première moitié a certainement une limite nulle, donc deviendra inférieur en valeur absolue à $\dfrac{\varepsilon}{2}$ à partir d'un certain rang n_1. Quant à la deuxième moitié, on la majore en valeur absolue (comme dans la question 1) par $\dfrac{2}{n(n+1)}\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} \dfrac{k\varepsilon}{2} \leqslant \dfrac{2}{n(n+1)} \times \dfrac{n(n+1)}{2}\dfrac{\varepsilon}{2} = \dfrac{\varepsilon}{2}$. On a donc globalement, lorsque $n \geqslant \max(n_0, n_1)$, $|w_n| \leqslant \varepsilon$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$. Comme $v_n = \dfrac{n(n+1)}{2n^2} w_n$, avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n(n+1)}{2n^2} = \dfrac{1}{2}$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Supposons désormais $\lim_{n\to+\infty} u_n = l \neq 0$. Posons comme précédemment $z_n = u_n - l$, alors $w_n = \dfrac{2}{n(n+1)}\sum kz_k$ tend vers 0. Or, $w_n = \dfrac{2}{n(n+1)}\sum_{k=0}^{n}(ku_k - kl) = \dfrac{2}{n(n+1)}\sum_{k=0}^{n} ku_k - l$. Autrement dit, $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{2}{n(n+1)}\sum_{k=0}^{n} ku_k = l$, soit en multipliant par $\dfrac{n(n+1)}{2n^2}$ qui tend toujours vers $\dfrac{1}{2}$, la conclusion $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n} ku_k = \dfrac{l}{2}$.

4. L'hypothèse effectuée revient à dire que $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}-u_n}{n} = \beta$. Appliquons donc le résultat précédent à la suite définie par $a_n = \dfrac{u_{n+1}-u_n}{n}$, alors $\dfrac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n} ka_k = \dfrac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n} u_{k+1} - u_k = \dfrac{u_{n+1}-u_0}{n^2}$ par télescopage. On a donc la limite suivante : $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}-u_0}{n^2} = \dfrac{\beta}{2}$. Comme u_0 est une constante, on en déduit que $u_{n+1} \sim \dfrac{\beta n^2}{2}$, soit $u_n \sim \dfrac{\beta n^2}{2}$.

Exercice 14 (*)

1. $u_n \sim \dfrac{n^{\frac{5}{2}}}{2n} \sim \dfrac{1}{2}n^{\frac{3}{2}}$ (au numérateur, $n^{\frac{5}{2}}$ l'emporte certainement face à n^2, et au dénominateur, par croissance comparée, $\ln(2n) = o(2n)$).

2. $u_n \sim ne^{-n-1}$, qu'on ne peut pas simplifier davantage (si on tient à l'écrire autrement, $u_n \sim \dfrac{n}{e\times e^n}$.

3. $u_n = \dfrac{\ln(n^2)+\ln(1+\frac{1}{n^2})}{n^2+1} \sim \dfrac{2\ln(n)}{n^2}$.

4. $u_n = \ln\left(1 - \dfrac{1}{n^2+2}\right) \sim -\dfrac{1}{n^2+2} \sim -\dfrac{1}{n^2}$ puisque $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2+2} = 0$.

5. $u_n = \dfrac{n^2+n+1-(n^2-n+1)}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}} = \dfrac{2n}{n+o(n)+n+o(n)} \sim \dfrac{2n}{2n} \sim 1$.

6. Celle-ci est un peu plus tordue : d'un côté $u_n \geqslant n!$ (c'est assez évident), de l'autre $u_n = n! + (n-1)! + \sum_{k=0}^{n-2} k! \leqslant n! + (n-1)! + (n-1)(n-2)!$ en majorant brutalement chaque terme de la dernière somme par la plus gros, à savoir $(n-2)!$. En divisant tout par $n!$, on obtient l'encadrement $1 \leqslant \dfrac{u_n}{n!} \leqslant 1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n}$. Les deux termes extrêmes ont manifestement pour limite commune 1, donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{n!} = 1$, c'est-à-dire $u_n \sim n!$.

7. $u_n = \dfrac{e^{\sqrt{n+1}\ln n}}{e^{\sqrt{n}\ln(n+1)}} = e^{\sqrt{n+1}\ln(n)-\sqrt{n}\ln(n+1)}$. Tentons de trouver un équivalent de ce qui se trouve dans l'exponentielle : $\sqrt{n+1}\ln(n) - \sqrt{n}\ln(n) - \sqrt{n}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\ln(n) - \sqrt{n}\left(\dfrac{1}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{n}+o(\sqrt{n})}\ln(n) - \dfrac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Par croissance comparée, le premier terme tend vers 0, donc le tout a également une limite nulle. Par composition, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$, ou si on préfère $u_n \sim 1$.

Exercice 15 (**)

1. En effet, $2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \dfrac{2(n+1-n)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$. Or, comme $\sqrt{n}+\sqrt{n} \leqslant \sqrt{n}+\sqrt{n+1} \leqslant \sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}$, on a $\dfrac{1}{2\sqrt{n+1}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$, d'où l'encadrement souhaité en multipliant tout par 2. On peut également prouver l'encadrement en utilisant des intégrales.

2. En utilisant l'inégalité de droite de la question précédente, on obtient $2\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) \leqslant S_n$.

   Or, la somme de gauche est une somme télescopique égale à $2(\sqrt{n+1}-1) = 2\sqrt{n+1}-2$. Cette expression a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, donc par théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ (inutile d'utiliser l'inégalité de gauche de la question 1 ici, celle de droite suffit...).

3. Commençons par déterminer la monotonie de la suite (u_n) : $u_{n+1}-u_n = S_{n+1}-S_n-2\sqrt{n+1}+2\sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$, expression négative d'après la question 1. La suite (u_n) est donc décroissante. On a vu par ailleurs que $S_n \geqslant 2\sqrt{n+1}-2$, donc a fortiori $S_n \geqslant 2\sqrt{n}-2$, donc $u_n \geqslant -2$. La suite (u_n) étant décroissante et minorée, elle est convergente.

4. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n - 2\sqrt{n} = l \in \mathbb{R}$, on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n-2\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} = 0$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{2\sqrt{n}} = 1$. Autrement dit, on a prouvé que $S_n \sim 2\sqrt{n}$.

Exercice 16 (**)

Puisque la suite est décroissante, on peut certainement écrire $2u_{n+1} \leqslant u_{n+1}+u_n \leqslant 2u_n$, ou encore $\dfrac{u_{n+1}+u_n}{2} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{u_n+u_{n-1}}{2}$ quitte à décaler les indices pour obtenir l'inégalité de droite. En multipliant tout par n, on a donc $\dfrac{n(u_{n+1}+u_n)}{2} \leqslant nu_n \leqslant \dfrac{n(u_n+u_{n-1})}{2}$. Par hypothèse, le membre de gauche a pour limite $\dfrac{1}{2}$ puisque $u_{n+1}+u_n \sim \dfrac{1}{n}$. De même, on aura $u_{n-1}+u_n \sim \dfrac{1}{n-1} \sim \dfrac{1}{n}$, donc le membre de droite également a pour limite $\dfrac{1}{2}$. En appliquant le théorème des gendarmes, on conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = \dfrac{1}{2}$, soit $u_n \sim \dfrac{1}{2n}$. En particulier, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Si on ne suppose pas la suite (u_n) décroissante, ça ne marche absolument plus du tout ! Si on pose $u_1 = 5$ puis $u_{n+1} = \dfrac{1}{n} - u_n$ pour tout entier $n \geqslant 1$, on aura toujours $u_{n+1}+u_n = \dfrac{1}{n}$ (donc a fortiori l'équivalence demandée par l'énoncé), et la suite ne tend même pas vers 0. En effet, on a alors $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k+1}}{k} + 5(-1)^{n+1}$. On peut prouver que la somme se rapproche alternativement de $\ln(2)$ et $-\ln(2)$ (cf le DS6 pour une explication de cette limite) selon la parité de n, donc les sous-suites d'indices pairs et impairs de la suite ont des limites respectives $\ln(2)-5$ et $-\ln(2)+5$, et la suite ne converge pas.

Exercice 17 (**)

Les deux conditions peuvent se traduire de la façon suivante : $\dfrac{b}{a} = \dfrac{c}{b} = q$, et $2b-a = 3c-2b = q$. La première relation revient à dire que $b = aq$ et $c = bq = aq^2$, d'où en remplaçant dans la deuxième donne $2aq-a = 3aq^2-2aq(=q)$, d'où $3aq^2-4aq+a = 0$, soit en factorisant par a qui est supposé non nul $3q^2 - 4q + 1 = 0$. Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4$, et admet deux racines réelles $q_1 = \frac{4+2}{6} = 1$, et $q_2 = \frac{4-2}{6} = \frac{1}{3}$. Si $q = 1$, la condition $2aq - a = q$ donne $a = 1$, puis $b = aq = 1$ et $c = bq = 1$; et si $q = \frac{1}{2}$, on obtient $\frac{2}{3}a - a = \frac{1}{2}$, soit $a = -\frac{3}{2}$, puis $b = \frac{1}{3}a = -\frac{1}{2}$ et $c = \frac{1}{3}b = -\frac{1}{6}$. Les deux seules possibilités sont donc d'avoir $a = b = c = q = 1$ (auquel cas les trois termes consécutifs de la suite géométrique sont 1, 1 et 1, et les trois termes consécutifs de la suite arithmétique sont 1, 2 et 3) ; ou $q = \frac{1}{3}$, donc $a = -\frac{3}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$ et $c = -\frac{1}{6}$ (auquel cas les trois termes consécutifs de la suite géométrique sont $-\frac{3}{2}$, $-\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{6}$, et les trois termes consécutifs de la suite arithmétique sont $-\frac{3}{2}$, -1 et $-\frac{1}{2}$).

Exercice 18 (*)

1. La suite (u_n) est arithmético-géométrique, d'équation de point fixe $x = 4x - 6$, ce qui donne $x = 2$. On pose donc $v_n = u_n - 2$, et on vérifie que la suite auxiliaire est géométrique : $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = 4u_n - 6 - 2 = 4u_n - 8 = 4(u_n - 2)$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison 4, et de premier terme $v_0 = u_0 - 2 = -1$. On a donc $v_n = -4^n$, puis $u_n = v_n + 2 = 2 - 4^n$.
2. La suite est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - 3x + 2 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 9 - 8 = 1$, et admet deux racines réelles $r = \frac{3+1}{2} = 2$ et $s = \frac{3-1}{2} = 1$. La suite (u_n) a donc un terme général de la forme $u_n = \alpha 2^n + \beta$, avec, en utilisant les valeurs initiales, $u_0 = \alpha + \beta = 0$ et $u_1 = 2\alpha + \beta = 1$. En soustrayant les deux équations on obtient $\alpha = 1$, puis $\beta = -\alpha = -1$, donc $u_n = 2^n - 1$.
3. La suite est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - 6x + 9 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 36 - 36 = 0$, et admet une racine double $r = \frac{6}{2} = 3$. La suite (u_n) a donc un terme général de la forme $u_n = (\alpha + \beta n)3^n$, avec, en utilisant les valeurs initiales, $u_0 = \alpha \times 3^0 = 0$ et $u_1 = (\alpha + \beta) \times 3^1 = 1$. La première équation donne $\alpha = 0$, puis la deuxième donne $\beta = \frac{1}{3}$, d'où $u_n = \frac{1}{3}n3^n = n3^{n-1}$ (formule valable seulement si $n \geqslant 1$).
4. La suite est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = \frac{1}{4} - 2 = -\frac{7}{4}$. L'équation admet deux racines complexes conjuguées $z_1 = \frac{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}}{2} = \frac{1 + i\sqrt{7}}{4}$, et $z_2 = \frac{1 - i\sqrt{7}}{4}$. On calcule $|z_1| = \frac{\sqrt{1+7}}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. On peut donc écrire $z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + i\sqrt{\frac{7}{8}}\right)$. En notant $\varphi = \arccos\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ (ce n'est pas une valeur remarquable), on peut affirmer que $u_n = \frac{1}{\sqrt{2}^n}(\alpha\cos(n\varphi) + \beta\sin(n\varphi))$. Les conditions initiales donnent $u_0 = \alpha = 1$ et $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha\cos(\varphi) + \beta\sin(\varphi)) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{2}} + \beta\sqrt{\frac{7}{8}}\right) = \frac{\alpha + \beta\sqrt{7}}{4} = 1$. Cela donne $\beta = \frac{3}{\sqrt{7}}$, donc $u_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos(n\varphi) + \frac{3}{\sqrt{7}}\sin(n\varphi)\right)$. On ne peut pas dire que cette formule saute aux yeux si on calcule les premiers termes de la suite.
5. La suite est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $3x^2 - 4x + 1 = 0$, dont le discriminant vaut $\Delta = 16 - 12 = 4$, et qui admet donc deux racines $r = \frac{4+2}{6} = 1$, et $s = \frac{4-2}{6} = \frac{1}{3}$. On en déduit la forme générale de la suite : $u_n = \alpha + \frac{\beta}{3^n}$. En utilisant les

valeurs des deux premiers termes, on a $u_0 = \alpha + \beta = 2$ et $u_1 = \alpha + \frac{1}{3}\beta = \frac{10}{3}$. En soustrayant les deux équations, on obtient $\frac{2}{3}\beta = 2 - \frac{10}{3} = -\frac{4}{3}$, soit $\beta = -2$, puis $\alpha = 4$. On a finalement $u_n = 4 - \frac{2}{3^n}$.

Exercice 19 (**)

Notons donc $v_n = u_n + an^2 + bn + c$, alors $v_{n+1} = u_{n+1} + a(n+1)^2 + b(n+1) + c = 2u_n + 2n^2 - n + an^2 + 2an + a + bn + b + c = 2u_n + (a+2)n^2 + (2a+b-1)n + a + b + c$. Pour que (v_n) soit géométrique, on doit avoir $v_{n+1} = qv_n = qu_n + aqn^2 + bqn + cq$. Il est nécessaire d'avoir $q = 2$, et en identifiant ensuite les coefficients des deux formules obtenues, on a $a + 2 = 2a$, $2a + b - 1 = 2b$ et $a + b + c = 2c$, ce qui donne successivement $a = 2$, puis $b = 2a - 1 = 3$, et enfin $c = a + b = 5$. Avec ces valeurs, la suite (v_n) est géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = u_0 + a \times 0^2 + b \times 0 + c = 2 + 5 = 7$. Conclusion de ces calculs : $v_n = 7 \times 2^n$, puis $u_n = v_n - an^2 - bn - c = 7 \times 2^n - 2n^2 - 3n - 5$.

Exercice 20 (**)

1. Calculons donc la dérivée $f_n'(x) = 5x^4 + n$. Cette dérivée est toujours strictement positive (sauf en 0 pour $n = 0$), la fonction est donc strictement croissante, quel que soit l'entier n.
2. Comme de plus $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, chaque fonction f_n est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Chaque réel a donc un unique antécédent par f_n et en particulier l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution.
3. Constatons que $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^5} + 1 - 1 = \frac{1}{n^5} > 0$. Comme la fonction f_n est strictement croissante, et $f_n(u_n) = 0$, on en déduit que $u_n < \frac{1}{n}$. Notons par ailleurs que $f_n(0) = -1$, donc par un raisonnement similaire on a toujours $0 < u_n$. Le théorème des gendarmes permet donc d'affirmer que $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

   Démonstration subsidiaire : monotonie de la suite (u_n). Pour déterminer la monotonie de la suite (u_n), il faut réussir à comparer u_n et u_{n+1}. Pour cela, dans le même esprit que les calculs précédents, on va chercher à calculer $f_n(u_n)$ et $f_n(u_{n+1})$. Le morceau facile, c'est $f_n(u_n) = 0$ (par définition). Plus compliqué, $f_n(u_{n+1}) = u_{n+1}^5 + nu_{n+1} - 1$. Or, on sait que, par définition, $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$, c'est-à-dire que $u_{n+1}^5 + (n+1)u_{n+1} - 1 = 0$, ou encore en développant $u_{n+1}^5 + nu_n + u_{n+1} - 1 = 0$, soit $u_{n+1}^5 + nu_{n+1} - 1 = -u_{n+1}$. Autrement dit, en reprenant le calcul précédent, $f_n(u_{n+1}) = -u_{n+1} < 0$ (puisqu'on a prouvé plus haut que tous les termes de la suite étaient positifs). En particulier, $f_n(u_{n+1}) < f_n(u_n)$. La fonction f_n étant strictement croissante, on en déduit que $u_{n+1} < u_n$, donc la suite (u_n) est décroissante.
4. On sait que $u_n^5 + nu_n - 1 = 0$, donc $u_n = \frac{1}{n} - \frac{u_n^5}{n}$. Comme (u_n) tend vers 0, $\frac{u_n^5}{n} = o\left(\frac{1}{n}\right)$, donc $u_n \sim \frac{1}{n}$.
5. Comme on vient de le voir, $\frac{1}{n} - u_n = \frac{u_n^5}{n} \sim \frac{\frac{1}{n^5}}{n} \sim \frac{1}{n^6}$.

Exercice 21 (***)

1. Sur $\mathbb{R}^{+*}$, les fonctions f_n sont strictement croissantes comme sommes de fonctions croissantes. De plus, $f_n(0) = 1$ et $\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$. La fonction f_n effectue donc une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $[1; +\infty[$, et en particulier 2 admet un unique antécédent par f_n, que l'on peut donc noter u_n.

2. On a déjà vu que $f_n(0) = 1$, donc $u_n > 0$, et $f_n(1) = n+1 > f_n(u_n)$ si $n \geqslant 2$. Par croissance de la fonction f_n, on a donc bien $u_n < 1$.

3. On peut utiliser la méthode classique : $f_{n+1}(x) = f_n(x) + x^{n+1}$, donc $f_{n+1}(u_n) = f_n(u_n) + u_n^{n+1} = 2 + u_n^{n+1}$. Comme $u_n > 0$, $u_n^{n+1} > 0$, et $f_{n+1}(u_n) > 2 = f_{n+1}(u_{n+1})$. Par croissance de la fonction f_{n+1}, on déduit que $u_n > u_{n+1}$, et la suite est donc décroissante. Comme elle est minorée par 0, elle converge.

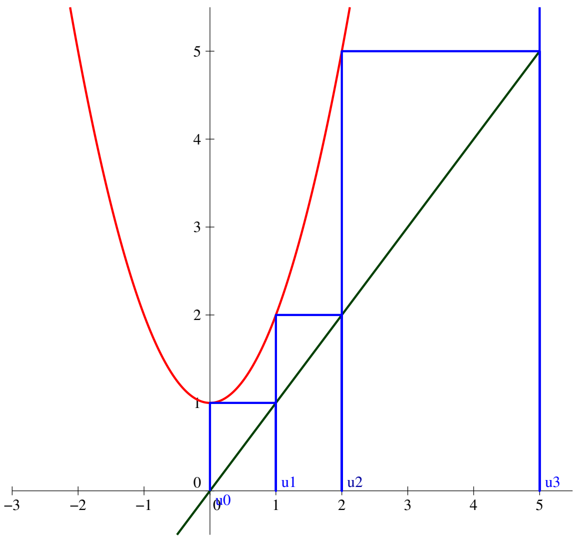
4. Nos connaissances sur les suites géométriques nous permettent d'affirmer que, $\forall x \neq 1$, $f_n(x) = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$. En particulier, $\dfrac{1 - u_n^{n+1}}{1 - u_n} = 2$. Or, comme la suite (u_n) est décroissante, on aura $\forall n \geqslant 2$, $u_n \leqslant u_2 < 1$, donc $0 < u_n^{n+1} < u_2^{n+1}$, avec $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n^{n+1} = 0$. Une petite application du théorème des gendarmes permet donc d'affirmer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n^{n+1} = 0$. En passant à la limite la relation obtenue ci-dessus, et en notant l la limite inconnue de la suite (u_n), on trouve alors $\dfrac{1}{1-l} = 2$, soit $1 - l = \dfrac{1}{2}$ et $l = \dfrac{1}{2}$. On a prouvé que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$.

5. Je vois venir d'ici ceux qui se sont lancés dans une récurrence inutile pour cette question. Reprenons donc les calculs des questions précédentes : $\dfrac{1 - u_n^{n+1}}{1 - u_n} = 2$, donc $1 - u_n^{n+1} = 2 - 2u_n$, ou encore $u_n^{n+1} = 2u_n - 1$. Comme $v_n + \dfrac{1}{2} = u_n$, celà revient à dire que $\left(\dfrac{1}{2} + v_n\right)^{n+1} = 2v_n$.

6. Dans l'égalité précédente, on peut écrire le membre de gauche sous la forme $\dfrac{(1+2v_n)^{n+1}}{2^{n+1}} = \dfrac{e^{(n+1)\ln(1+2v_n)}}{2^{n+1}}$. Ce qui se trouve dans l'exponentielle est équivalent à $2nv_n$ puisque (v_n) a une limite nulle (on peut donc utiliser l'équivalent classique pour $\ln(1+x)$). Or, comme $v_n = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2^{n+1}}(1+2v_n)^{n+1}$, avec $1 + 2v_n$ qui tend vers 0 et se trouve donc certainement inférieur à une constante strictement inférieure à $\dfrac{3}{2}$ à partir d'un certain rang, on peut certainement dire que $v_n = o\left(\dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1}\right)$. En particulier, v_n est très très négligeable devant $\dfrac{1}{n}$, et $\lim\limits_{n \to +\infty} 2nv_n = 0$. En reprenant notre calcul iinitial, le membre de gauche est donc équivalent à $\dfrac{1}{2^{n+1}}$. Autrement dit, $\dfrac{1}{2^{n+1}} \sim 2v_n$, soit $v_n \sim \dfrac{1}{2^{n+2}}$.

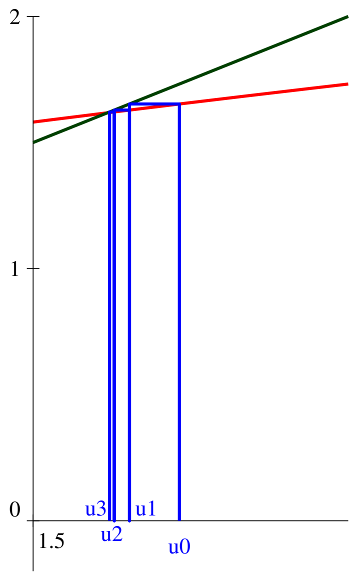
Exercice 22 (**)

1. Posons $f(x) = x^2 + 1$, la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$. En fait, seul l'intervalle $\mathbb{R}^+$ est réellement pertinent puisqu'on aura $u_n \geqslant 1$ dès que $n \geqslant 1$ (pas besoin de récurrence pour le prouver, il suffit de constater que $u_n^2 + 1 \geqslant 1$ quelle que soit la valeur de u_n. Comme $f(x) - x = x^2 - x + 1$ a pour discriminant $\Delta = 1 - 4 < 0$, la fonction f n'a pas de point fixe et $f(x) - x$ est toujours positif. La suitez (u_n) est donc strictement croissante, et ne peut majorer en l'absence de point fixe. Conclusion : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$. Ci-dessous, les premiers termes de la suite lorsque $u_0 = 0$:

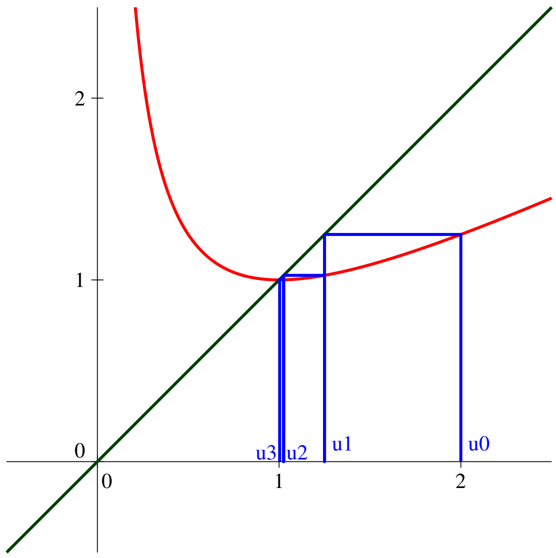


2. Posons cette fois-ci $f(x) = \sqrt{1+x}$. La fonction f est définie et strictement croissante sur $[-1;+\infty[$ (inutile de dériver, on a ici une composée très simple de fonctions croissantes). Pas de problème de définition pour la suite (u_n), puisqu'on a toujours $f(x) \geqslant 0$, donc $u_n \in \mathcal{D}_f$. Par ailleurs $f(x) - x = \sqrt{1+x} - x = \dfrac{1+x-x^2}{\sqrt{1+x}+x}$ par produit par la quantité conjuguée. Le numérateur a pour discriminant $\Delta = 1+4 = 5$, il s'annule pour $x = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{-2} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, et pour $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Cette deuxième racine ne nous est d'aucun intérêt car elle est négative. En effet, si $x \leqslant 0$, $\sqrt{1-x} - x \geqslant 0$ sans avoir à passer par la quantité conjuguée. Si $x \geqslant 0$, le dénominateur $\sqrt{1+x}+x$ est positif, donc $f(x) - x \geqslant 0$ sur $\left[0; \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$ et $f(x) - x \leqslant 0$ sur $\left[\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right[$.

Si $u_0 = \sqrt{3}$, qui est supérieur au point fixe (en effet, $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} < 3$ car $\sqrt{5} < 3$), on va pouvoir prouver par récurrence que tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle stable $\left[\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right[$. En effet, c'est vrai pour u_0, et en supposant $u_n \geqslant \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, par croissance de la fonction f, $u_{n+1} \geqslant \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, ce qui prouve la propriété au rang suivant. Comme $f(x)-x \leqslant 0$ sur cet intervalle, la suite sera décroissante. Puisqu'elle est minorée par $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, elle converge, et comme il n'y a qu'un point fixe, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Et une représentation graphique où on ne voit rien car le premier terme est en fait déjà très proche de la limite :

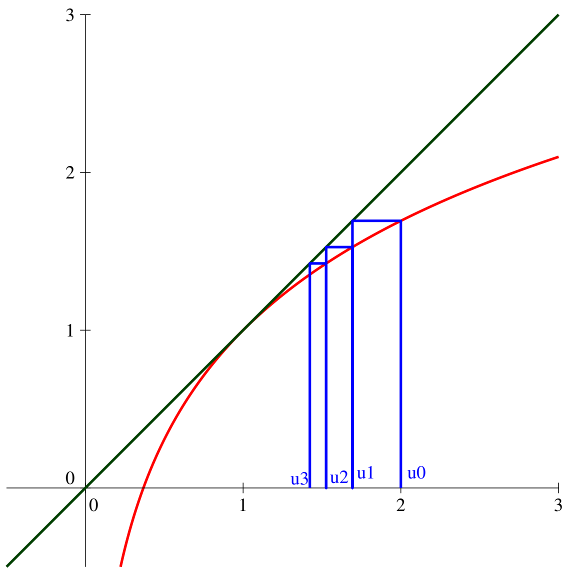


3. Posons $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2x}$, on peut se contenter d'étudier sur $\mathbb{R}^{+*}$ (par une récurrence triviale, tous les termes de la suite seront positifs), où f est dérivable, de dérivée $\dfrac{4x^2 - 2(x^2+1)}{4x^2} = \dfrac{2(x^2-1)}{4x^2}$. Elle est donc décroissante sur $]0;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$. Par ailleurs, $f(x) - x = \dfrac{x^2+1-2x^2}{2x} = \dfrac{1-x^2}{2x}$. Le point fixe correspond avec le minimum de fonction, et $f(x) - x \geqslant 0$ sur $]0;1]$ et $f(x) - x \leqslant 0$ sur $[1;+\infty[$. On va montrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$: c'est vrai par hypothèse pour u_0, et si $u_n \geqslant 1$, alors par croissance de f sur $[1;+\infty[$, $f(u_n) \geqslant f(1)$, soit $u_{n+1} \geqslant 1$. Comme $f(x) - x \leqslant 0$ sur $[1;+\infty[$, la suite est décroissante. Minorée par 1, elle converge, et c'est forcément vers l'unique point fixe de la fonction. Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

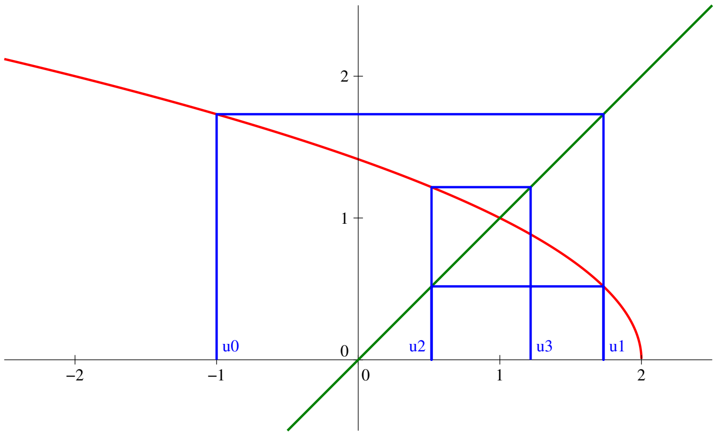


4. Posons $f(x) = 1 + \ln(x)$, la fonction est définie et strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. De plus, $f(x) - x = 1 + \ln(x) - x$, dont le signe n'est pas forcément évident. on peut toutefois se souvenir que la droite d'équation $y = x - 1$ est la tangente à la courbe de la fonction ln en $x = 1$, et que la fonction ln est concave. On a donc toujours $\ln(x) \leqslant x - 1$, soit $f(x) - x \leqslant 0$. Il y a un unique point fixe : $x = 1$. La suite sera nécessairement décroissante et minorée par 0,

mais avant de conclure à la convergence, il faut tout de même vérifier que la suite est toujours bien définie, c'est-à-dire que $u_n \geqslant 1$ pour tout entier n. Une petite récurrence suffit : c'est vrai par hypothèse pour u_0, et si on suppose $u_n \geqslant 1$, par croissance de la fonction f, $u_{n+1} \geqslant 1$. La suite est donc convergente, et comme il y a un unique point fixe, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.



5. Posons enfin $f(x) = \sqrt{2-u_n}$, on peut se contenter de définir f sur $[-2,2]$, où elle est décroissante (encore une fois, aucun besoin de dériver). L'intervalle $[-2;2]$ est certainement stable par f puisque $f(-2) = \sqrt{4} = 2$ et $f(2) = 0$. On prouve alors par une récurrence évidente que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [-2;2]$: c'est vrai pour u_0, et en le supposant vrai pour u_n, les remarques qu'on vient de faire assurent que $u_{n+1} \in [-2;2]$. Par ailleurs, $f(x)-x = \sqrt{2-x}-x$. Cette expression est toujours positive si $x \leqslant 0$. Si $x > 0$, $f(x)-x = \dfrac{2-x-x^2}{\sqrt{2-x}+x}$, qui est du signe du numérateur. Ce numérateur a pour discriminant $\Delta = 1+8 = 9$, il s'annule pour $x = \dfrac{1+3}{-2} = -2$ qui ne nous intéresse pas le moins du monde pusique cette valeur est négative, et pour $x = \dfrac{1-3}{-2} = 1$. On en déduit que 1 est point fixe de f, et que $f(x)-x \geqslant 0$ sur $[-2;1]$, et $f(x)-x \leqslant 0$ sur $[1;2]$. Comme f est décroissante, la suite ne sera pas monotone, mais on peut s'en sortir sans s'embêter à étudier séparément les sous-suites constituées des termes d'indices pairs et impairs en utilisant l'indication de l'énoncé. En effet, $u_{n+1} - 1 = \sqrt{2-u_n} - 1 = \dfrac{1-u_n}{\sqrt{2-u_n}+1}$, donc $|u_{n+1}-1| = \dfrac{[u_n-1|}{\sqrt{2-u_n}+1} \leqslant |u_n-1|$. La suite $(|u_n-1|)$ est décroissante, et bien sûr minorée par 0, donc elle converge. Sa limite ne peut être que 0, car si elle convergeait vers $l \neq 0$, en reprenant l'égalité précédente, on ne pourrait pas avoir $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_{n+1}-1| = l$. Ceci prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.



Exercice 23 (***)

1. Manifestement, $u_n \geqslant \sqrt{n}$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

2. Il suffit d'écrire que $u_{n+1} = \sqrt{n+1+\sqrt{n+\cdots+\sqrt{1}}} = \sqrt{n+1+u_n}$.

3. Allons-y pour une récurrence : $u_1 = 1 \leqslant 1$ est vrai. Supposons donc $u_n \leqslant \sqrt{n}$, et déduisons-en en utilisant l'égalité précédente que $u_{n+1} \leqslant \sqrt{n+1+n} \leqslant \sqrt{2n+1}$. Reste à vérifier que $\sqrt{2n+1} \leqslant n+1$. C'est évident quand on élève l'inégalité au carré (on peut, tout est positif) : $2n+1 \leqslant n^2+2n+1$ puisque $n^2 \geqslant 0$. L'inégalité reste donc vraie au rang $n+1$, ce qui achève la récurrence. Une fois qu'on sait que $u_n \leqslant n$, on peut écrire $u_{n+1} \leqslant \sqrt{2n+1}$, donc $u_{n+1} = o(n)$, ce qui prouve la négligeabilité de u_n par rapport à n.

4. Reprenons encore notre égalité : $u_{n+1} = \sqrt{n+1+o(n)} \sim \sqrt{n+1}$, donc $u_n \sim \sqrt{n}$.

5. On peut utiliser la quantité conjuguée : $u_n - \sqrt{n} = \dfrac{u_n^2 - n}{u_n + \sqrt{n}}$. Or, $u_n^2 - n = u_{n-1}$ (c'est toujours une conséquence de la relation de la question 2), et $u_{n-1} \sim \sqrt{n-1} \sim \sqrt{n}$. Le dénominateur peut s'écrire sous la forme $\sqrt{n} + o(\sqrt{n}) + \sqrt{n} \sim 2\sqrt{n}$, donc $u_n - \sqrt{n} \sim \dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} \sim \dfrac{1}{2}$. Autrement dit, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - \sqrt{n} = \dfrac{1}{2}$, ou encore $u_n = \sqrt{n} + \dfrac{1}{2} + o(1)$.

Exercice 24 (**)

1. La suite (u_n) est une suite récureente. Posons donc $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{a}{x}\right)$, la fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, de dérivée $f'(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{a}{2x^2} = \dfrac{x^2 - a}{2x^2}$. La fonction est donc strictement décroissante sur $]0; \sqrt{a}]$ et croissante sur $[\sqrt{a}; +\infty[$, et admet pour minimum $f(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2}(\sqrt{a} + \sqrt{a}) = \sqrt{a}$. Le minimum correspond donc à un point fixe de la fonction f. c'est d'ailleurs le seul puisque, si $f(x) = x$, alors $x = \dfrac{a}{x}$, donc $x = \sqrt{a}$. L'expression $f(x) - x$ est positive sur $]0; \sqrt{a}]$ et négative sur $[\sqrt{a}; +\infty[$. Inutile de faire une récurrence pour prouver que, $\forall n \geqslant 1$, $u_n \geqslant \sqrt{a}$, puisque $u_n = f(u_{n-1}) \geqslant \sqrt{a}$ qui est le minimum de la fonction f. Comme $f(x) - x \leqslant 0$ sur $[\sqrt{a}; +\infty[$, la suite (u_n) est donc décroissante au moins à partir du rang 1. Étant minorée par $\sqrt{a}$ (à partir du rang 1 également), la suite converge. Comme il n'y a qu'un seul point fixe pour la fonction f, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{a}$.

2. Calculons donc $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - \sqrt{a}}{u_{n+1} + \sqrt{a}} = \dfrac{\frac{1}{2}u_n + \frac{a}{2u_n} - \sqrt{a}}{\frac{1}{2}u_n + \frac{a}{2u_n} - \sqrt{a}} = \dfrac{u_n^2 + a - 2\sqrt{a}u_n}{u_n^2 + a + 2\sqrt{a}u_n} = \dfrac{(u_n - \sqrt{a})^2}{(u_n + \sqrt{a})^2} =$ v_n^2. On peut alors prouver par récurrence que $v_n = v_0^{(2^n)}$. En effet, c'est trivialement vrai pour $n = 0$, et si on le suppose au rang n, alors $v_{n+1} = v_n^2 = (v_0^{(2^n)})^2 = v_0^{(2 \times 2^n)} = v_0^{(2^{n+1})}$, la propriété est donc vrai au rang $n+1$ et la récurrence fonctionne.
3. D'après la question précédente, $u_n - \sqrt{a} = v_0^{2^n}(u_0 + \sqrt{a})$ (même pas besoin de majoration, on a la valeur exacte). Pour $a = 2$, et par exemple $u_0 = 1$ (sans valeur de u_0, l'application numérique est impossible), on a $u_n - \sqrt{2} \leqslant \left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{1+\sqrt{2}}\right)^{2^n} \times (1+\sqrt{2})$ (on a changé le signe dans la puissance pour prendre la valeur absolue). Il suffit donc de prendre un n pour lequel $2^n \ln\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2+1}}\right) \geqslant -100\ln(10) - \ln(1+\sqrt{2})$, ce qui donne $2^n \geqslant 132$, soit $n \geqslant 8$ (encore un coup de ln si on veut être très précis). Il suffit donc de prendre le terme d'indice huit de la suite pour avoir une valeur approchée de la limite correcte à 10^{-100} près !

Problème (***)

Partie A : Exemples

1. (a) On a dans ce cas $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} 2 \times 3 = 6(n+1)$.

   (b) Dans ce deuxième exemple $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} 2^k \times 3^{n-k} = 3^n \sum_{k=0}^{k=n} 2^k \times 3^{-k} = 3^n \sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{2}{3}\right)^k =$ $3^n \dfrac{1 - (\frac{2}{3})^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = 3^{n+1}\left(1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}\right) = 3^{n+1} - 2^{n+1}$.
2. suites := proc(n : :integer) ;
   for i from 0 to n do w := 0 ; for j from 0 to i do w := w+ln(j+1)/(i-j+1) end do ; print(w) end do ;
   end proc ;
3. (a) On calcule $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{k=m} u_k = \sum_{k=n+1}^{k=m} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{k=m-n-1} \frac{1}{2^{n+1+k}} = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{k=m-n-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1 - \frac{1}{2^{m-n}}}{1 - \frac{1}{2}} =$ $\dfrac{1}{2^n}\left(1 - \dfrac{1}{2^{m-n}}\right) = \dfrac{1}{2^n} - \dfrac{1}{2^m} < \dfrac{1}{2^n} = u_n$, donc l'inégalité demandée est vraie.

   (b) Il s'agit « simplement » de découper la somme constituant w_{2n} en morceaux et de faire les bonnes majorations : $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=2n} u_k v_{2n-k} = \sum_{k=0}^{k=n} u_k v_{2n-k} + \sum_{k=n+1}^{k=2n-1} u_k v_{2n-k} + u_{2n} v_0$. La première somme est égale à $u_0 v_{2n} + u_1 v_{2n-1} + \cdots + u_n v_n$. Comme la suite (v_n) est supposée décroissante et que tous les termes de (u_n) sont positifs, elle est inférieure ou égale à $(u_0 + u_1 + \cdots + u_n)v_n = u_0 v_n + v_n \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} u_k \leqslant u_0 v_n + u_0 v_n = 2v_n$ (cette dernière inégalité découle de la question précédente). De même, en utilisant la décroissance de (v_n), la deuxième somme est inférieure ou égale à $v_1 \displaystyle\sum_{k=n+1}^{k=2n-1} u_k \leqslant v_1 u_n$ (toujours d'après la question précédente). En additionnant ces majorations, on obtient bien $w_{2n} \leqslant 2v_n + v_1 u_n + v_0 u_{2n}$.

La deuxième majoration est du même style : $w_{2n+1} = \sum_{k=0}^{k=n} u_k v_{2n+1-k} + \sum_{k=n+1}^{k=2n} u_k v_{2n+1-k} + u_{2n+1}v_0 \leqslant v_{n+1}u_0 + v_{n+1}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) + v_1 \sum_{k=n+1}^{k=2n} u_k + u_{2n+1}v_0 \leqslant 2v_{n+1} + v_1 u_n + v_0 u_{2n+1}$.

(c) Les deux suites (u_n) et (v_n) ont pour limite 0 (pour (v_n), ça fait partie des hypothèses, et pour (u_n) c'est une conséquence du fait qu'il s'agit d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$). On en déduit aisément que $\lim_{n\to+\infty} v_0u_{2n} + 2v_n + v_1u_n = 0$, et pareil pour $2v_{n+1} + v_1u_n + v_0u_{2n+1}$. Comme de plus tous les termes de la suite (w_n) sont positifs (ils sont constitués d'une somme de réels positifs), le théorème des gendarmes permet de dire que $\lim_{n\to+\infty} w_{2n} = \lim_{n\to+\infty} w_{2n+1} = 0$. Les deux sous-suites constituées des termes pairs et impairs convergeant vers la même limite, la suite (w_n) converge également vers 0.

(d) D'après l'inégalité triangulaire, on aura
$0 \leqslant |(u' \times v)_n| = \left|\sum_{k=0}^{k=n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k v_{n-k}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{k=n} \left|\left(-\frac{1}{2}\right)^k v_{n-k}\right| = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{2^k} v_{n-k} = w_n$. Comme on vient de voir que la suite (w_n) convergeait vers 0, le théorème des gendarmes nous donne la convergence de $(|u' \times v|)$, et donc de $(u' \times v)$, vers 0.

Partie B : Application à l'étude d'un ensemble de suites

1. Si (u_n) est une suite décroissante, on a $\frac{1}{2}(u_n + u_{n-1}) \geqslant \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1}) = a_n \geqslant a_{n+1}$, donc la suite appartient effectivement à A. Au contraire, si (u_n) est strictement croissante, on aura toujours $\frac{1}{2}(u_n + u_{n-1}) < u_n < u_{n+1}$, donc la suite n'appartient pas à A.

2. (a) La suite est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$. Son discriminant vaut $\Delta = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$, donc elle admet deux racines $r = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{2} = 1$ et $s = \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{2} = -\frac{1}{2}$. Le terme général de la suite est donc bien de la forme $z_n = \alpha + \beta\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

   (b) La suite définie par $u_n = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$, par exemple, appartient à A (elle vérifie la récurrence linéaire de la question précédente, et on vérifie facilement que ses termes sont tous positifs), mais n'est pas monotone puisque les termes d'indices pairs de la suites sont plus grands que 1 et les termes d'indices impairs plus petits que 1.

3. (a) Calculons donc, pour $n \geqslant 1$, $c_{n+1} - c_n = a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n - a_n - \frac{1}{2}a_{n-1} = a_{n+1} - \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1}) \leqslant 0$ puisque $(a_n) \in A$. La suite (c_n) est donc décroissante. Comme elle est par ailleurs constituée de termes positifs (puisque c'est le cas de (a_n)), elle est minorée, donc elle converge.

   (b) Il semble assez naturel de procéder à une récurrence. Pour $n = 0$, l'égalité stipule que $\left(-\frac{1}{2}\right)^0 c_0 = a_0$, ce qui est effectivement vrai. Supposons désormais l'égalité vérifiée au rang n, alors $\sum_{k=0}^{k=n+1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n+1-k} = c_{n+1} + \sum_{k=0}^{k=n} \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1} c_{n-k} = c_{n+1} - \frac{1}{2}a_n = a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{2}a_n = a_{n+1}$. La propriété est donc vérifiée au rang $n+1$, et la récurrence achevée. Ca calcul prouve que les suites $b \times c$ et a sont tout simplement identiques.

(c) La suite (u_n) convergeant vers l, la suite ε a pour limite 0. De plus, elle est décroissante à partir du rang 1 tout comme (u_n), donc tous ses termes sont positifs (sinon elle ne pourrait pas converger vers 0). Elle vérifie donc les hypothèses faites sur la suite (v_n) dans la partie précédente, et on peut en conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = 0$.

(d) Ce n'est pas si dur que ça en a l'air : $d_n = \sum\limits_{k=0}^{k=n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k (c_{n-k} - l) = \sum\limits_{k=0}^{k=n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n-k} - l \sum\limits_{k=0}^{k=n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = a_n - l \frac{1 - (-\frac{1}{2})^{n+1}}{1 + \frac{1}{2}} = a_n + \frac{3}{2} l \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$. On peut également écrire que $a_n = d_n + \frac{3}{2} l \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$.

La toute dernière question est un simple calcul de limite : on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = 0$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ (suite géométrique), donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{2}{3} l$.

Feuille d'exercices n°10 : Structures algébriques.

PTSI B Lycée Eiffel

25 janvier 2013

Exercice 1 (**)

Pour chaque ensemble et chaque loi suivants, déterminer s'il s'agit d'une lci, si l'ensemble muni de la loi forme un groupe, et si la loi est commutative. S'il ne s'agit pas d'une loi de groupe mais qu'il y a un élément neutre, on précisera quels sont les éléments symétrisables.

1. $E = \mathbb{N}$ et $x \star y = \max(x, y)$.
2. $E = \mathbb{R}$ et $x \star y = x + y - xy$.
3. $E = \mathbb{Z}$ et $x \star y$ est le reste de la division de xy par 3
4. $E = \mathbb{R}$ et $x \star y = x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}$.
5. $E =]-1; 1[$ et $x \star y = \dfrac{x+y}{1+xy}$.
6. $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{Z}, f(n) = 0\}$ et $\star = +$.
7. $E = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $(a, b) \star (c, d) = (ac, ad + bc)$.

Exercice 2 (*)

Montrer que l'ensemble des racines n-èmes de l'unité forment un sous-groupe de $(\mathbb{U}, \times)$.

Exercice 3 (*)

On considère l'ensemble constitué des six fonctions de $\mathbb{R}\backslash\{0; 1\}$ dans lui-même suivantes : $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $f_3(x) = \dfrac{x}{x-1}$, $f_4(x) = \dfrac{1}{x}$, $f_5(x) = 1 - x$ et $f_6(x) = \dfrac{x-1}{x}$. Montrer qu'il s'agit d'un groupe pour la composition (écrire dans un tableau les valeurs de $f_i \circ f_j$ pour tous les éléments de l'ensemble). Déterminer tous ses sous-groupes.

Exercice 4 (**)

Soit $(G, \star)$ un groupe et $a \in G$. Montrer que l'application $\tau_a : x \mapsto a\star x\star a^{-1}$ est un automorphisme de groupes de G. Montrer que $\{\tau_a \mid a \in G\}$, muni de la loi $\circ$, est un groupe.

Exercice 5 (*)

Soit $(G, \star)$ un groupe. On note $C_G = \{x \in G \mid \forall y \in G, x * y = y * x\}$. Montrer que C_G est un sous-groupe de G (appelé centralisateur de G).

Exercice 6 (**)

Montrer que l'ensemble des suites réelles, muni de la somme et du produit terme par terme, est un anneau. Quels sont ses éléments inversibles (pour le produit) ? Parmi les ensembles suivants, lesquels en sont des sous-groupes ou des sous-anneaux :

- suites bornées
- suites monotones
- suites convergentes
- suites périodiques
- suites divergeant vers $+\infty$

Exercice 7 (***)

Soit E un ensemble. Montrer que $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ est un anneau. En préciser les éléments neutres, les éléments inversibles (et leur inverse) pour chacune des deux lois. Cet anneau est-il intègre ? Si $F \subset E$, $(\mathcal{P}(F), \Delta, \cap)$ est-il un sous-anneau de $\mathcal{P}(E)$?

Exercice 8 (**)

Soit $(A, +, \times)$ un anneau tel que $\forall a \in A$, $a^2 = a$.

1. Montrer que $\forall a \in \mathbb{A}$, $2a = 0$.
2. Montrer que A est commutatif.
3. Montrer que, si A possède au moins trois éléments, A n'est pas intègre.

Exercice 9 (*)

Montrer que $A = \{a+b\sqrt{2} \mid (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$ est un sous-corps de $(\mathbb{R}, +, \times)$. De même, $B = \{a+b\sqrt{3}\}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$. Montrer que l'application $a + b\sqrt{2} \mapsto a + b\sqrt{3}$ n'est pas un isomorpisme de corps de A dans B.

Exercice 10 (**)

Déterminer le nombre de diviseurs de 10! (sans les écrire tous).

Exercice 11 (*)

Déterminer tous les triplets d'entiers (x, y, z) vérifiant $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1$.

Exercice 12 (**)

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations suivantes :

1. $xy = 2x + 3y$.
2. $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$.
3. $x^2 = 9y^2 - 39y + 40$.

Exercice 13 (***)

On considère la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

1. Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.
2. Montrer que F_n et F_{n+1} sont premiers entre eux.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $F_{n+p} = F_n F_{p-1} + F_{n+1}F_p$. En déduire que le pgcd de F_n et de F_p est le même que celui de F_n et F_{n+p}.
4. Montrer que, $\forall (n,m) \geqslant 2$, $F_n \wedge F_m = F_{n \wedge m}$.
5. Montrer que, si $n \geqslant 5$ et n est premier, alors F_n est premier. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 14 (*)

Soient P et Q les deux polynômes définis par $P(X) = 2X^3 + 5X - 1$ et $Q(X) = -X^2 + 3X$. Déterminer chacun des polynômes suivants : $P+Q$; PQ ; $P^2(X)$; $P(X^2)$; $P \circ Q$; $Q \circ P$; $3P^3Q - Q \circ P^2$.

Exercice 15 (*)

Soit $P(X) = X^3 - 2X^2 - 5X + 6$.

1. Déterminer une racine évidente du polynôme P.
2. Factoriser P sous la forme $(X+2)Q(X)$, où Q est un polynôme de degré 2.
3. En déduire le tableau de signe de P sur $\mathbb{R}$.
4. Résoudre les inéquations $(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 - 5\ln x + 6 > 0$ et $e^{2x} - 2e^x \leqslant 5 - 6e^{-x}$

Exercice 16 (* à ***)

Factoriser chacun des polynômes suivants dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$:

1. $P(X) = X^4 - 1$
2. $P(X) = X^4 - 5X^3 + 4X^2 + 3X + 9$ (on trouvera un entier $n \leqslant 5$ racine double de P).
3. $P(X) = X^8 + X^4 + 1$
4. $P(X) = X^9 + X^6 + X^3 + 1$
5. $P(X) = X^6 - X^5 + X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$

Exercice 17 (**)

1. Déterminer les racines carrées des nombres complexes $\dfrac{i+\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{i-\sqrt{3}}{2}$.
2. Effectuer la division euclidienne de $X^6 - i$ par $X^2 + i$. En déduire, à l'aide de la question précédente, la factorisation de $X^6 - i$.
3. Résoudre l'équation $z^6 = i$ en passant par la forme exponentielle. En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 18 (**)

Pour chacune des conditions suivantes, déterminer tous les polynômes la vérifiant :

- P est de degré 3, $P(0) = P(1) = P'(1) = 0$ et $P'(0) = 2$.
- $(X + 3)P(X) = XP(X + 1)$
- P est de degré 3 ; $(X + 1)^2$ divise $P + 1$ et $(X - 1)^2$ divise $P - 1$.
- $(X^2 + 4)P'' = 6P$
- $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$

Exercice 19 (**)

Effectuer la division euclidienne de P par Q dans chacun des cas suivants :

1. $P(X) = X^3 + X^2 - 2X + 3$ et $Q(X) = X^2 + 2X - 1$
2. $P(X) = 2X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 5X + 6$, et $Q(X) = X^2 - 3X + 1$
3. $P(X) = X^4 - 2X\cos(2\theta) + 1$ et $Q(X) = X^2 - 2X\cos(\theta) + 1$
4. $P(X) = X^3 - iX^2 - X$, et $Q(X) = X - 1 + i$,
5. $P(X) = (X\sin(\theta) + \cos(\theta))^n$ et $Q(X) = X^2 + 1$

Exercice 20 (***)

On définit la suite de polynômes (P_n) par $P_0 = 2$, $P_1 = X$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$.

1. Calculer P_2, P_3 et P_4.
2. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n.
3. Montrer que, $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $P_n\left(z + \dfrac{1}{z}\right) = z^n + \dfrac{1}{z^n}$.
4. En déduire une expression simple de $P - n(2\cos(\theta))$.
5. Déterminer les racines de P, et sa factorisation dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 21 (***)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x^2 & + & y^2 & + & z^2 & = & 1 \\ x^3 & + & y^3 & + & z^3 & = & -5 \end{array}\right.$$

Pour cela, on cherchera un polynôme unitaire de degré 3 ayant pour racines x, y, et z, et on calculera chacun de ses coefficients en utilisant les conditions données.

Corrigé de la feuille d'exercices n°10

Exercice 1 (**)

1. Le maximum est certainement une loi de composition interne sur $\mathbb{N}$. Elle est clairement commutative, et presque aussi clairement associative puisque $\max(\max(x,y),z) = \max(x,\max(y,z)) = \max(x,y,z)$. Par contre, il n'y a pas d'élément neutre pour cette loi pusique pour tout entier n, $\max(n,n+1) = n+1 \neq n$. Il ne peut donc pas y avoir de notion de symétrisabilité non plus.

2. La loi $\star$ est certainement interne, et accessoirement commutative. Vérifions l'associativité : $x\star(y\star z) = x+y\star z - x(y\star z) = x+y+z-yz-xy-xz+xyz$. Par une simple permutation des variables, en utilisant la commutativité, $(x\star y)\star z = z\star(x\star y) = z+x+y-xy-zx-zy+zxy = x\star(y\star z)$, donc la loi est associative. Elle admet pour élément neutre 0 : $0\star y = 0+y-0 = y$. Un réel x admet y pour symétrique si $x\star y = 0$, soit $x = xy-y$, donc $y = \dfrac{x}{x-1}$. Le réel 1 n'est donc pas symétrisable (en fait, c'est un élément absorbant pour la loi $\star$), mais tous les autres réels le son. En fait, $(E\backslash\{1\},\star)$ est un groupe commutatif.

3. La loi $\star$ est interne sur $\mathbb{Z}$, et manifestement commutative. L'associativité est moins claire, elle découle des proriétés des congruences que nous n'étudierons pas vraiment cette année. En tout cas, la loi ne peut pas avoir d'élement neutre puisque $x\star y$ ne peut prendre comme valeurs que 0, 1 et 2. Par exemple, on ne pourra jamais avoir $e\star 4 = 4$. Pas de symétrique non plus du coup.

4. La loi est bien définie (ce qu'on met sous les racines carrées étant positif), interne et commutative. L'associativité est ici particulièrement immonde à vérifier : $x\star(y\star z) = x\sqrt{1+(y\star z)^2} + (y\star z)\sqrt{1+x^2} = x\sqrt{1+(y\sqrt{1+z^2}+z\sqrt{1+y^2})^2} + (y\sqrt{1+z^2}+z\sqrt{1+y^2})\sqrt{1+x^2}$
$= x\sqrt{1+y^2(1+z^2)+z^2(1+y^2)+2yz\sqrt{(1+y^2)(1+z^2)}}+y\sqrt{(1+z^2)(1+x^2)}+z\sqrt{(1+y^2)(1+x^2)}$.
Il suffit maintenant de constater la factorisation presque évidente de ce qui se trouve sous la première racine carrée : $1+y^2+y^2z^2+z^2+y^2z^2+2yz\sqrt{(1+y^2)(1+z^2)} = 1+y^2+z^2+y^2z^2+(yz)^2+2yz\sqrt{(1+y^2)(1+z^2)} = (yz+\sqrt{(1+y^2)(1+z^2)})^2$. Tout ce qui est sous le carré étant positif, on peut simplifier avec la racine carrée pour obtenir $x\star(y\star z) = xyz + x\sqrt{(1+y^2)(1+z^2)} + y\sqrt{(1+x^2)(1+z^2)} + z\sqrt{(1+x^2)(1+z^2)}$. On peut se contenter de constater que cette expression est invariante par permutation des variables pour en déduire, en exploitant la commutativité de $\star$, que la loi est associative. Il y a un élément neutre qui est simplement 0, puisque $0\star y = 0\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1} = y$. Tout élément est par ailleurs symétrisable, le symétrique de x étant $-x$: $x\star(-x) = x\sqrt{1+(-x)^2} - x\sqrt{1+x^2} = 0$. La loi $\star$ est donc une loi de groupe sur $\mathbb{R}$.

   En fait, les plus malins d'entre vous peuvent trivialiser les calculs en faisant la constatation certes pas vraiment évidente suivante : $\sinh(x)\star\sinh(y) = \sinh(x)\sqrt{1+\sinh^2(y)}$
$+\sinh(y)\sqrt{1+\sinh^2(x)} = \sinh(x)\cosh(y)+\sinh(y)\cosh(x) = \sinh(x+y)$. L'application sinh, qui est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, est donc un morphisme de groupes de $(\mathbb{R},+)$ vers $(\mathbb{R},\star)$.

5. Il faudrait déjà vérifier que la loi $\star$ est une lci, ce qui n'est pas évident. Si $(x,y)\in]-1;1[^2$, $|xy|<1$, donc $1+xy\neq 0$ et $x\star y$ est bien défini. Reste à vérifier si $x\star y\in]-1;1[$. Fixons y et posons $f(x) = \dfrac{x+y}{1+xy}$, la fonction f est définie et dérivable sur $[-1;1]$, de dérivée $f'(x) = \dfrac{1+xy-x(x+y)}{(1+xy)^2} = \dfrac{1-x^2}{(1+xy)^2} > 0$ sur $]-1;1[$. La fonction f est donc strictement croissante, comme $f(-1) = \dfrac{-1+y}{1-y} = -1$ et $f(1) = \dfrac{1+y}{1+y} = 1$, elle est bijective de $]-1;1[$ sur lui-même, ce qui prouve que la loi $\star$ est interne. Elle est clairement commutative. Pour l'associativité,

c'est un peu moins pénible que le calcul précédent : $x \star (y \star z) = \dfrac{x + y \star z}{1 + x(y \star z)} = \dfrac{x + \frac{y+z}{1+yz}}{1 + x\frac{y+z}{1+yz}} = \dfrac{x + xyz + y + z}{1 + yz + xy + xz}$. Cette expression étant invariante par permutation des variables, et la loi $\star$ commutative, elle est associative. Pour changer, 0 est un élément neutre puisque $0 \star y = \dfrac{0+y}{1+0} = y$, et $-x$ est un symétrique de x : $x \star (-x) = \dfrac{x - x}{1 - x^2} = 0$. La loi $\star$ est donc une loi de groupe sur $]-1;1[$. Comme tout à l'heure, on peut le voir via un isomorhisme de groupes : la fonction tanh est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]-1;1[$ et $\tanh(x) \star \tanh(y) = \dfrac{\tanh(x) + \tanh(y)}{1 + \tanh(x)\tanh(y)} = \tanh(x+y)$.

6. Ici, on peut se contenter de vérifier que E est un sous-groupe de l'ensemble de toutes les fonctions. En effet, la fonction nulle appartient à E, une somme de deux éléments de E reste un élément de E, et l'opposé d'une fonction de E est aussi une fonction de E (tout celà est essentiellement trivial). La loi $+$ est donc une loi de groupe sur E.
7. La loi $\star$ est interne : si $a \neq 0$ et $c \neq 0$, alors $ac \neq 0$. Elle est commutative puisque $ad+bc = cb+da$ (et $ca = ac$ bien sûr). Vérifions l'associativité : $(a,b) \star ((c,d) \star (e,f)) = (a,b) \star (ce, cf + de) = (ace, acf + ade + bce)$, et $((a,b) \star (c,d)) \star (e,f) = (ac, ad + bd) \star (e,f) = (ace, acf + ade + bde)$. Les deux couples sont égaux, la loi est bien associative. Le couple $(1,0)$ est un élément neutre : $(1,0) \star (a,b) = (a, b + 0c) = (a,b)$. Qui plus est, avec l'hypothèse $a \neq 0$, le couple (a,b) est toujours symétrisable : $(a,b) \star (c,d) = (1,0)$ équivaut à $ac = 1$, soit $c = \dfrac{1}{a}$ et $ad + bc = 0$, soit $d = -\dfrac{bc}{a} = -\dfrac{b}{a^2}$. La loi $\star$ est donc une loi de groupe (on peut identifier ce groupe à un sous-groupe de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, mais c'est un peu tôt pour vous l'expliquer).

Exercice 2 (*)

L'élément neutre 1 de $(\mathbb{U}, \times)$ est toujours une racine n-ème de l'unité. De plus, le produit de deux racines n-èmes de l'unité est une racine n-ème de l'unité : si $z^n = z'^n = 1$, alors $(zz')^n = z^n z'^n = 1 \times 1 = 1$; et l'inverse d'une racine n-ème de l'unité est aussi une racine n-ème de l'unité : si $z^n = 1$, alors $z \neq 0$ et $\left(\dfrac{1}{z}\right)^n = \dfrac{1}{z^n} = \dfrac{1}{1} = 1$. Il s'agit donc bien d'un sous-groupe.

On peut en fait aussi prouver que l'ensemble de toutes les racines de l'unité (pour des valeurs de n variables) est aussi un sous-groupe de $(\mathbb{U}, \times)$. L'élément neutre et la stabilité par inverse sont identiques à ce qu'on vient de faire, et si on considère z une racine n-ème de l'unité et z' une racine p-ème de l'unité, alors zz' est une racine np-ème de l'unité : $(zz')^{np} = (z^n)^p \times (z'^p)^n = 1$.

Exercice 3 (*)

Puisque l'énoncé nous le suggère, écrivons donc la table de groupe. On ne va pas détailler tous les calculs, mais par exemple $f_2 \circ f_5(x) = \dfrac{1}{1 - (1-x)} = \dfrac{1}{x} = f_4(x)$. On obtient ainsi le tableau suivant (la composition n'étant pas commutative, soyons précis : $f_2 \circ f_5$ apparaitra sur la ligne f_2, colonne f_5.

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_6	f_5	f_3	f_4	f_1
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2	f_6	f_5
f_4	f_4	f_5	f_6	f_1	f_2	f_3
f_5	f_5	f_3	f_2	f_6	f_1	f_4
f_6	f_6	f_1	f_4	f_5	f_3	f_2

On sait déjà que l'opération de composition est associative sur l'ensemble de toutes les fonctions, donc a fortiori sur notre ensemble (qu'on va noter très originalement G). Par ailleurs, G contient l'élément neutre pour la composition, qui est l'identité f_1, et il suffit de parcourir le tableau pour trouver les symétriques de chaque fonction : f_1, f_3, f_4 et f_5 sont leurs propres symétriques ; f_2 et f_6 sont symétriques l'une de l'autre. Pour faire la liste des sous-groupes, le plus simple est d'essayer d'en construire avec un nombre d'éléments donné. Le seul sous-groupe à un élément est le sous-groupe cinstitué de l'élément neutre f_1. Les sous-groupes à deux éléments doivent contenir f_1, et une autre fonction qui est son propre symétrique (puisqu'ils doivent contenir le symétrique en question). Il y en a donc trois : $\{f_1; f_3\}$, $\{f_1; f_4\}$ et $\{f_1; f_5\}$. Si on essaye de mettre (au moins) trois éléments, il faut évidemment que f_1 soit dans le sous-groupe. Si on met f_2 et f_3, on récupère $f_2 \circ f_2$ et $f_2 \circ f_3$, soit f_5 et f_6, et $f_3 \circ f_2 = f_4$, donc on a le groupe G tout entier. Avec f_2 et f_4, on a f_6, f_3 et f_5 également. Avec f_2 et f_5 de même. Par contre, le sous-ensemble $\{f_1; f_2; f_6\}$ constitue un sous-groupe à trois éléments de G. Si on met f_3 on ne peut pas mettre f_4 sinon on retrouve f_2 et on retombe dans un cas déjà étudié. Si on met f_5 ou f_6, on récupère automatiquement l'autre, puis f_2 qui est le symétrique de f_6. Si on met f_4 et f_5 on récupère f_2, avec f_6 on récupère f_3, cas déjà étudiés. Enfin, f_5 et f_6 donnent également le groupe G tout entier. Il existe finalement un sous-groupe à un élément, trois à deux éléments, un à trois éléments, et bien sûr le groupe G lui-même à six éléments.

Exercice 4 (**)

L'aplication τ_a est bien définie de G dans lui-même. Vérifions que c'est un morphisme de groupes : $\tau_a(x)\star\tau_a(y) = a\star x\star a^{-1}\star a\star y\star a^{-1} = a\star x\star y\star a^{-1} = \tau_a(x\star y)$. De plus, τ_a est certainement bijectif, car il admet pour réciproque $\tau_{a^{-1}}$: $\tau_a(\tau_{a^{-1}}(x)) = a\star(a^{-1}\star x\star a)\star a^{-1} = e\star x\star e = x$, et de même dans l'autre sens. Il est alors facile de prouver que $\{\tau_a\}$ est un sous-groupe de $Aut(G)$. En effet, $\tau_e = \mathrm{id}$, donc l'élément neutre appartient à $\{\tau_a\}$, on vient de voir que la réciproque de τ_a était $\tau_{a^{-1}}$, et on vérifie sans problème que $\tau_a \circ \tau_b = \tau_{a\star b}$: $\tau_a(\tau_b(x)) = a\star(b\star x\star b^{-1})\star a^{-1} = (a\star b)\star x\star(a\star b)^{-1}$. Une petite remarque pour terminer : si le groupe G est commutatif, on aura toujours $\tau_a = \mathrm{id}$.

Exercice 5 (*)

L'élément neutre appartient sûrement à C_G puisque $e\star x = x\star e = x$ pour tout x appartenant à G. Supposons que x et x' soient deux éléments de G, alors $(x\star x')\star y = x\star(x'\star y) = x\star y\star x' = y\star x\star x'$ en utilisant successivement le fait que x' et x appartiennent à C_G. De plus, si $x \in C_G$, on peut composer l'égalité $x\star y = y\star x$ à gauche et à droite par x^{-1} pour obtenir $x^{-1}\star x\star y\star x^{-1} = x^{-1}\star y\star x\star x^{-1}$, soit $y\star x^{-1} = x^{-1}\star y$, donc $x^{-1} \in C_G$. L'ensemble C_G est donc un sous-groupe de G. Dans le cas où G est un groupe commutatif, C_G est simplement confondu avec G lui-même.

Exercice 6 (**)

Le fait que l'ensemble de toutes les suites réelles soit un anneau est très facile à vérifier, quoiqu'un peu fastidieux. La somme et le produit terme à terme sont des lois de composition internes, qui sont associatives et commutatives car les opérations correspondantes sur les réels le sont. Les éléments neutres sont respectivement la suite constante nulle (pour la somme) et la suite constante égale à 1. Le symétrique d'une suite (u_n) pour la somme est simplement la suite $(-u_n)$, et la distributivité du produit sur la somme découle là encore de la distributivité du produit sur les réels sur la somme. Les éléments inversibles sont les suites qui ne s'annulent jamais, l'inverse de (u_n) étant alors la suite $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$.

- Les suites bornées contiennent les deux éléments neutres, une somme ou un produit de deux suites bornées est certainement une suite bornée (je vous laisse écrire le détail si vous le souhaitez). De plus, si (u_n) est bornée, $(-u_n)$ aussi, donc l'ensemble des suites bornées est un sous-groupe de $(G,+)$ (en notant G l'ensemble de toutes les suites). Par contre, l'inverse d'une suite bornée (et inversible) n'est pas du tout borné en général. Par exemple la suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)$ est bornée (par 0 et 1) et inversible puisqu'elle ne s'annule pas, mais son inverse $(n+1)$ n'est pas du tout bornée. Les suites bornées ne forment donc pas un sous-anneau de G.

- Les suites monotones (au sens large) contiennt les deux éléments neutres, mais la somme de deux suites monotones n'est pas nécessairement monotone en effet, une somme de deux suites croissantes (ou décroissantes) est croissante (respectivement décroissante), mais la somme d'une suite croissante et d'une suite décroissante peut donner n'importe quoi. Ainsi, si $u_0 = 1$, $u_1 = 5$, $u_2 = 6$ (et la suite (u_n) est ensuite croissante), et $v_0 = 1$, $v_1 = -1$ et $v_2 = -12$ (avec une suite décroissante), on aura $u_0 + v_0 = 2$, $u_1 + v_1 = 5$ et $u_2 + v_2 = -6$, ce qui ne correspond pas à une suite monotone. En fait, on peut prouver que toute suite réelle peut s'écrire comme somme d'une suite croissante et d'une suite décroissante. Les suites monotones ne peuvent donc pas former un sous-groupe de G, et a fortiori pas un sous-anneau. On peut quand même noter les points suivants : le produit de deux suites monotones n'est pas toujours monotones (si (u_n) est monotone mais change de signe, u_n^2 n'est pas monotone) ; l'opposé d'une suite monotone est monotone (de monotonie opposée) ; l'inverse d'une suite monotone n'est monotone que si la suite est de signe constant.
- Les suites convergentes contiennent les deux éléments neutres, une somme ou un produit de suites convergentes est une suite convergente, un opposé ou un inverse aussi (ce sont des conséquences immédiates des règles de calcul sur les limites de suites). Les suites convergentes forment donc un sous-groupe et même un sous-anneau de G.
- Les suites périodiques (de période non précisée) contiennent les deux éléments neutres (les suites constantes sont périodiques de période 1). L'opposé ou l'inverse (quand il existe) d'une suite périodique est manifestement périodique de même période. De plus, la somme ou le produit d'une suite périodique de période p par une suite périodique de période q est périodique de période pq (et même de période $p\hat{q}$ si on veut être précis). En effet, tout multiple de p est aussi une période de la première suite, et tout multiple de q une période de la deuxième. Quand on ajoute ou qu'un multiplie ensuite deux suites de même période, on obtient bien une suite périodique. Les suites périodiques forment donc un sous-groupe et un sous-anneau de G.
- Les suites divergeant vers $+\infty$ ne contiennent aucun des deux éléments neutres, elles ne peuvent donc constituer ni un sous-groupe, ni un sous-anneau de G. Accessoirement, une somme ou un produit de suites divergeant vers $+\infty$ continue à diverger vers $+\infty$, mais sûrement pas un opposé ou un inverse.

Exercice 7 (***)

Puisque nous avons déjà fait dans la feuille d'exercices numéro 8 une étude des propriétés de la différence symétrique, on ne va pas tout recommencer. Les deux lois sont donc des lci, elles sont associatives, accessoirement commutatives, et $\cap$ est distributive par rapport à Δ. De plus, l'ensemble vide est un élément neutre pour la loi Δ : $A\Delta\emptyset = (A \cup \emptyset)\backslash(A \cap \emptyset) = A\backslash\emptyset = A$. On a déjà vu dans l'exercice sur Δ que $A\Delta A = \emptyset$, donc tout sous-ensemble A de E est son propre symétrique pour la loi Δ. L'élément neutre pour l'intersection est l'ensemble E tout entier : $A \cap E = A$ quel que soit A. Les éléments inversibles pour la loi $\cap$ sont les sous-ensembles A pour lesquels on peut trouver un B tel que $A \cap B = E$. Cela suppose que $E \subset A$, ce qui n'est possible que pour $A = E$. L'élément neutre E est donc le seul élément inversible pour l'intersection (et il est bien sûr son propre inverse). L'anneau $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ n'est sûrement pas intègre puisqu'on peut avoir $A \cap B = \emptyset$ sans avoir $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$. Enfin, $(\mathcal{P}(F), \Delta, E)$ n'est pas un sous-anneau de $\mathcal{P}(E)$. Il est pourtant stable par Δ et par $\cap$, et par passage au symétrique puisque tout élément est son propre symétrique (pour le passage à l'inverse, personne n'étant inversible, ce n'est pas bien compliqué à vérifier). Il contient aussi l'élément neutre pour Δ, mais, et c'est là l'unique petit problème, pas l'élément neutre pour la loi $\cap$, qui est désormais F.

Exercice 8 (**)

1. Appliquons l'hypothèse à $a+1$: $(a+1)^2 = a+1$, soit $a^2+2a+1 = a+1$. Comme $a^2 = a$, on peut simplifier pour obtenir $2a = 0$.
2. Appliquons l'hypothèse à $a+b$: $(a+b)^2 = a^2+ab+ba+b^2 = a+b$. Comme $a^2 = a$ et $b^2 = b$, on peut simplifier pour obtenir $ab+ba = 0$, soit $ab = -ba$. Mais comme $-2ba = 0$ (c'est vrai pour tout élément de l'anneau), $-ba = ba$, donc $ab = ba$, et l'anneau est commutatif.
3. Si l'anneau possède trois éléments distincts, on peut certainement trouver un élément $a \neq 1$ et $a \neq 0$ tel que $a+1 \neq a$ (sinon on aurait $1 = 0$ ce qui n'est pas permis dans un anneau). Alors $a(a+1) = a^2+a = a+a = 2a = 0$, avec $a \neq 0$ et $a+1 \neq 0$ (seul 1 vérifie $1+1 = 0$ dans cet anneau, puisque le symétrique est unique et qu'on sait que $2 \times 1 = 0$). L'anneau A n'est donc pas intègre.

Exercice 9 (*)

L'ensemble A contient tous les entiers, donc en particulier les éléments neutres 0 et 1 (en prenant $b = 0$). Par ailleurs, si $a+b\sqrt{2}$ et $c+d\sqrt{2}$ sont deux éléments de A, leur somme $(a+c)+(b+d)\sqrt{2}$ aussi, et leur produit $ac+2bd+(ad+bc)\sqrt{2}$ également. L'opposé d'un élément de A est clairement un élément de A, et enfin l'inverse de $a+b\sqrt{2}$ (lorsque a et b ne sont pas nuls tous les deux) vaut $\dfrac{1}{a+b\sqrt{2}} = \dfrac{a-b\sqrt{2}}{a^2-2b^2}$ en multipliant par la quantité conjuguée, avec $a^2-2b^2 \neq 0$ (sinon on aurait $\dfrac{a}{b} = \pm\sqrt{2}$, ce qui n'est possible pour un nombre rationnel), et $\dfrac{a}{a^2-2b^2}$ et $-\dfrac{b}{a^2-b^2}$ qui sont bien des nombres rationnels. L'ensemble A est donc un sous-corps de $\mathbb{R}$. La démonstration serait essentiellement identique avec des $\sqrt{3}$ au lieu des $\sqrt{2}$.

Notons f l'application de l'énoncé, f est certainement bijective, envoie 0 sur 0 et 1 sur 1 et respecte la somme ($f(x+y) = f(x)+f(y)$) mais pas du tout le produit. Par exemple $f(1+\sqrt{2}) = 1+\sqrt{3}$ et $f(\sqrt{2}-1) = \sqrt{3}-1$, mais $f((1+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)) = f(1) = 1$, alors que $f(1+\sqrt{2}) \times f(\sqrt{2}-1) = (1+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1) = 2$. Ce n'est donc pas un isomorphisme de corps (et pas non plus un isomorpisme, notion non définie dans le cours !).

Exercice 10 (**)

Pour compter le nombre de diviseurs, le plus simple est de commencer par écrire la décomposition en facteurs premiers du nombre : $10! = 2\times 3\times 2^2\times 5\times 2\times 3\times 7\times 2^3\times 3^2\times 2\times 5 = 2^8\times 3^4\times 5^2\times 7$. Un diviseur de 10! sera nécessairement de la forme $2^a\times 3^b\times 5^c\times 7^d$, avec $a \in \{0;1;\dots;8\}$, $b \in \{0;1;2;3;4\}$, $c \in \{0;1;2\}$ et $d \in \{0;1\}$. Chaque quadruplet d'entiers (a,b,c,d) donne un diviseur différent (par unicité de la décomposition en facteurs premiers), ce qui fait $9\times 5\times 3\times 2 = 270$ diviseurs au total. Si on compte aussi les diviseurs négatifs, il y en a deux fois plus, soit 540. Par exemple, pour $a = 5$, $b = 1$, $c = 2$ et $d = 0$, on trouve le diviseur $32\times 3\times 25 = 2\ 400$.

Exercice 11 (*)

Pas vraiment de méthode très subtile ici, il suffit de trouver toutes les possibilités en faisant augmenter la valeur de x puis celle de y. Si $x = 1$, on a déjà $\dfrac{1}{x} = 1$, donc on ne peut pas trouver de valeurs de y et de z convenables (en supposant les entiers naturels). Si $x = 2$, on doit avoir $\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{2}$. Il faut donc avoir au moins $y = 3$ pour que l'égalité puisse être vérifiée. Si $y = 3$, $z = 6$ convient puisque $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{2}$. Si $y = 4$, on peut prendre $z = 4$. Si $y > 4$, on va trouver des valeurs éventuelles de z plus petites que y, donc des couples déjà obtenus (à l'ordre près). Passons donc à $x = 3$, si on ne veut pas retomber sur des solutions déjà trouvées, il faudra prendre $y \geqslant 3$ et $z \geqslant 3$, mais alors la seule possibilité est $x = y = z = 3$. Finalement, les seuls triplets possibles sont $(2, 3, 6)$, $(2, 4, 4)$ et $(3, 3, 3)$ ainsi que leurs permutations. Si on accepte les entiers relatifs dans les solutions, on trouve plus de possibilité puisque tous les triplets $(1, n, -n)$ seront solution (et leurs permutations, bien entendu). Par ailleurs, $\left|\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{p}\right| < \dfrac{1}{2}$ si n et p sont de signe opposés et (en valeur absolue) supérieurs ou égaux à 2. Il est donc impossible de trouver des solutions en entiers relatifs avec trois entiers tous différents de 1.

Exercice 12 (**)

1. Une astuce est d'écrire $xy - 2x - 3y = 0$, soit $(x - 3)(y - 2) = 6$. Comme il n'existe pas trente-six mille façons d'écrire 6 comme produit de deux entiers, on peut faire une liste des possibilités pour $x - 3$ et $y - 2$. Soit $x - 3 = 6$ et $y - 2 = 1$, ce qui donne la solution $(9, 3)$; soit $x - 3 = 3$ et $y - 2 = 2$, ce qui donne $(6, 4)$; soit $x - 3 = 2$ et $y - 2 = 3$, ce qui donne $(5, 5)$; soit $x - 3 = 1$ et $y - 2 = 6$, ce qui donne $(4, 8)$. Et n'oublions pas, bien entendu, les diviseurs négatifs : $x - 3 = -6$ et $y - 2 = -1$ donne $(-3, 1)$; $x - 3 = -3$ et $y - 2 = -2$ donne $(0, 0)$; $x - 3 = -2$ et $y - 2 = -3$ donne $(1, -1)$; et enfin $x - 3 = -1$ et $x - 2 = -6$ donne $(2, -4)$. Finalement, $\mathcal{S} = \{(-3; 1), (0, 0), (1, -1), (2, -4), (4, 8), (5, 5), (6, 4), (9, 3)\}$.

2. Il ne s'agit pas ici d'étudier une conique (même si c'est bien une équation d'ellipse qu'on a sous la main), mais de mettre sous forme canonique : $(x - 1)^2 - 1 + (y + 2)^2 - 4 - 5 = 0$, soit $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 10$. Pour écrire 10 comme somme de deux carrées, il faut nécessairement écrire $10 = (\pm 1)^2 + (\pm 3)^2$ (si on dépasse 3 on sera largement au-dessus de 10, et pour 2 rien ne marche). Cela laisse encore une fois huit possibilités : par exemple si $x - 1 = 1$ et $y + 2 = 3$, on trouve la solution $(2, 1)$. Je vous passe les détails, on obtient $\mathcal{S} = \{(4, -1); (4, -3); (2, 1); (2, -5); (0, 1); (0, -5); (-2, -1); (-2, -3)\}$.

3. Même technique que ci-dessus, $x^2 - \left(3y - \dfrac{39}{6}\right)^2 + \dfrac{169}{4} = 40$, soit en factorisant $\left(x - 3y + \dfrac{13}{2}\right)\left(x + 3y - \dfrac{13}{2}\right) = -\dfrac{9}{4}$. Quitte à tout multiplier par 4, on trouve donc l'équation $(6y - 2x - 13)(2x + 6y - 13) = 9$. Il y a six possibilités pour écrire 9 comme un produit de deux entiers, qui vont donner à chaque fois un système à résoudre. D'abord $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 6y & - & 2x & - & 13 & = & 9 \\ 2x & + & 6y & - & 13 & = & 1 \end{array}\right.$. En additionnant les deux équations, $12y - 26 = 10$, soit $12y = 36$ et $y = 3$, ce qui donne $2x = 14 - 6y = -4$, donc $x = -2$. Passons au deuxième système : $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 6y & - & 2x & - & 13 & = & 3 \\ 2x & + & 6y & - & 13 & = & 3 \end{array}\right.$. La somme des deux équations donne $12y - 26 = 6$, soit $y = \dfrac{32}{12} = \dfrac{8}{3}$, solution qui ne nous intéresse pas. troisioème système : $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 6y & - & 2x & - & 13 & = & 1 \\ 2x & + & 6y & - & 13 & = & 9 \end{array}\right.$. On somme comme d'habitude : $12y - 26 = 10$, on retrouve $y = 3$, mais cette fois-ci $2x = 22 - 6y = 4$, donc $x = 2$. Quatrième système : $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 6y & - & 2x & - & 13 & = & -9 \\ 2x & + & 6y & - & 13 & = & -1 \end{array}\right.$. On additionne : $12y - 26 = -10$, soit $y = \dfrac{4}{3}$, solution à éliminer ici. On trouvera la même valeur pour y avec -1 et -9 au lieu de -9 et -1. Reste donc le cinquième système : $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 6y & - & 2x & - & 13 & = & -3 \\ 2x & + & 6y & - & 13 & = & -3 \end{array}\right.$. On trouve $12y - 26 = -6$, soit $y = \dfrac{5}{3}$. Là encore, pas de solution entière en vue. Finalement, il n'y que deux couples solutions : $\mathcal{S} = \{(2, 3); (-2, 3)\}$.

Exercice 13 (***)

1. Un récurrence simple suffit ici : $F_2F_0 - F_1^2 = 0 - 1 = -1 = (-1)^1$, donc P_1 est vraie. Supposons P_n vraie, alors $F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 = (F_{n+1} + F_n)F_n - F_{n+1}^2 = F_{n+1}F_n + F_n^2 - F_{n+1}^2 = F_{n+1}(F_n - F_{n+1}) + F_n^2$. Or, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, donc $F_n - F_{n+1} = -F_{n-1}$, donc l'expression devient $F_n^2 - F_{n+1} - F_{n-1} = -(-1)^n = (-1)^{n+1}$ en exploitant l'hypothèse de récurrence. On a bien prouvé la propriété au rang $n+1$.
2. Dans le cas où n est pair, l'égalité précédente est une identité de Bezout $aF_{n+1} + bF_n = 1$, avec $a = F_{n-1}$ et $b = -F_n$ qui sont des coefficients entiers, donc F_n et F_{n+1} sont premiers entre eux. Si n est impair, il suffit de changer les signes pour aboutir à la même conclusion.
3. On va cette fois-ci effectuer une récurrence double sur l'entier p, n étant fixé. Pour $p = 1$, $F_nF_0 + F_{n+1}F_1 = F_{n+1}$, donc la propriété est vraie au rang 1. Si $p = 2$, $F_nF_1 + F_{n+1}F_2 = F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$, donc la propriété est également vraie au rang 2. Supposons l'égalité valable aux rangs p et $p+1$, alors $F_{n+p+2} = F_{n+p+1} + F_{n+p} = F_nF_p + F_{n+1}F_{p+1} + F_nF_{p-1} + F_{n+1}F_p = F_n(F_p + F_{p-1}) + F_{n+1}(F_{p+1} + F_p) = F_nF_{p+1} + F_{n+1}F_{p+1}$, ce qui prouve la propriété au rang $p+2$ et achève la récurrence.

   Un diviseur commun à F_n et F_p sera donc diviseur de F_{n+p}, et par conséquent diviseur commun à F_n et F_{n+p}. De façon similaire, un diviseur commun à F_n et F_{n+p} sera diviseur de $F_{n+1}F_p$, et F_n et F_{n+1} étant premiers entre eux, le diviseur de F_n divisera nécessairement F_p, et sera par conséquent diviseur commun de F_n et F_p. Les diviseurs communs des deux couples sont donc identiques.
4. D'après la question précédentes, $F_n \wedge F_m = F_n \wedge F_{n-m} = F_n \wedge F_{n-km}$ pour tout entier k (quitte à appliquer plusieurs fois de suite la relation). En appliquant successivement toutes les étapes de l'algorithme d'Euclide de recherche du pgcd aux entiers n et m, les couples (a, b) obtenus à toutes les étapes vérifieront donc $F_n \wedge F_m = F_a \wedge F_b$. Puisque le dernier couple obtenu sera $(n \wedge m, 1)$, on a donc $F_n \wedge F_m = F_{n\wedge m} \wedge F_1 = F_{n\wedge m}$.
5. Les lecteurs attentifs auront bien évidemment remarqué que l'énoncé était dans le mauvais sens ! Ce qui découle de ce qu'on a fait ci-desus, c'est que, si F_n est premier, alors n est premier. En effet, par contraposée, si n n'est pas premier, on peut choisir un diviseur m de n non trivial, et on a alors $F_n \wedge F_m = F_{n\wedge m} = F_m$. En particulier, F_n est divisible par F_m et c'est certainement un diviseur distinct de 1 et de F_n. En fait, l'énoncé est pire qu'imprécis, il est carrément faux puisqu'il existe des entiers n premiers pour lesquels F_n n'est pas premier. Calculons donc : $F_3 = 2$ est premier, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$ est premier, $F_6 = 8$, $F_7 = 13$ est premier, $F_8 = 21$, $F_9 = 34$, $F_{10} = 55$, $F_{11} = 89$ est premier, $F_{12} = 144$, $F_{13} = 233$ est premier, $F_{14} = 377$, $F_{15} = 610$, $F_{16} = 987$, $F_{17} = 1\ 597$ qui est premier, $F_{18} = 2\ 584$, $F_{19} = 4181$. Et là, hop, au moment où plus personne n'y croit, $4\ 181 = 37 \times 113$ alors que 19 est premier !

Exercice 14 (*)

On obtient plus ou moins péniblement :

- $P + Q = 2X^3 - X^2 + 8X - 1$
- $PQ = -2X^5 + 6X^4 - 5X^3 + 16X^2 - 3X$
- $P^2 = (2X^3 + 5X - 1)^2 = 4X^6 + 25X^2 + 1 + 20X^4 - 4X^3 - 10X = 4X^6 + 20X^4 - 4X^3 + 25X^2 - 10X + 1$
- $P(X^2) = 2(X^2)^3 + 5(X^2) - 1 = 2X^6 + 5X^2 - 1$
- $P \circ Q = 2(-X^2 + 3X)^3 + 5(-X^2 + 3X) - 1 = -2X^6 + 18X^5 - 54X^4 + 54X^3 - 5X^2 + 15X - 1$
- $Q \circ P = -(2X^3 + 5X - 1)^2 + 3(2X^3 + 5X - 1) = -(4X^6 + 20X^4 - 4X^3 + 25X^2 - 10X + 1) + 6X^3 + 15X - 3 = -4X^6 - 20X^4 + 10X^3 - 25X^2 + 25X - 4$
- $3P^3Q - Q \circ P^2 = 3(2X^3 + 5X - 1)^3(-X^2 + 3X) + (4X^6 + 20X^4 - 4X^3 + 25X^2 - 10X + 1)^2 - 3(4X^6 + 20X^4 - 4X^3 + 25X^2 - 10X + 1)$

$= (8X^9 + 125X^3 - 1 + 60X^7 + 150X^5 - 12X^6 + 6X^3 - 75X^2 + 15X - 60X^4)(-3X^2 + 9X) + (16X^{12} + 400X^8 + 16X^6 + 625X^4 + 100X^2 + 1 + 160X^{10} - 32X^9 + 200X^8 - 80X^7 + 8X^6 - 160X^7 + 1\,000X^6 - 400X^5 + 40X^4 - 200X^5 + 80X^4 - 8X^3 - 500X^3 + 50X^2 - 20X) - 12X^6 - 60X^4 + 12X^3 - 75X^2 + 30X - 3$
$= (8X^9 + 60X^7 - 12X^6 + 150X^5 - 60X^4 + 131X^3 - 75X^2 + 15X - 1)(-3X^2 + 9X) + 16X^{12} + 160X^{10} - 32X^9 + 600X^8 - 240X^7 + 1\,012X^6 - 600X^5 + 685X^4 - 496X^3 + 75X^2 + 10X - 2$
$= (-24X^{11} + 72X^{10} - 180X^9 + 540X^8 + 36X^8 - 108X^7 - 450X^7 + 1\,350X^6 + 180X^6 - 540X^5 - 393X^5 + 1\,179X^4 + 225X^4 - 675X^3 - 45X^3 + 135X^2 + 3X^2 - 9X) + 16X^{12} + 160X^{10} - 32X^9 + 600X^8 - 240X^7 + 1\,012X^6 - 600X^5 + 685X^4 - 496X^3 + 75X^2 + 10X - 2$
$= 16X^{12} - 24X^{11} + 232X^{10} - 212X^9 + 1\,176X^8 - 798X^7 + 2\,542X^6 - 1\,533X^5 + 2\,089X^4 - 1\,216X^3 + 213X^2 + X - 2$
Calcul garanti fait main, et tout de même (j'avoue) vérifié ensuite à la machine, il y avait une toute petite erreur...

Exercice 15 (*)

1. Il y a une racine très évidente qui est 1. On peut aussi constater (par exemple en jetant un oeil à l'énoncé de la question suivante) que -2 est racine de P : $P(-2) = -8 - 2 \times 4 - 5 \times (-2) + 6 = 0$.
2. On peut donc factoriser P sous la forme $P(X) = (X+2)Q(X) = (X+2)(aX^2 + bX + c) = aX^3 + (2a+b)X^2 + (2b+c)X + 2c$. Par identification, on obtient $a = 1$; $2a+b = -2$; $2b+c = -5$ et $2c = 6$, donc $a = 1$; $b = -4$ et $c = 3$, soit $P(X) = (X+2)(X^2 - 4X + 3)$.
3. Le deuxième facteur a pour discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4$ et pour racines $x_1 = \dfrac{4-2}{2} = 1$ (tiens, on a retrouvé notre autre racine évidente) et $x_2 = \dfrac{4+2}{2} = 3$. On a donc $P(X) = (X+1)(X-1)(X-3)$, d'où le tableau de signes suivant :

x		-2		1		3	
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

4. La première inéquation se ramène au tableau de signe précédent en posant $X = \ln x$. On en déduit que $X \in]-2; 1[\cup]3; +\infty[$, donc $\mathcal{S} =]e^{-2}; e[\cup]e^3; +\infty[$. Pour la deuxième, on peut tout multiplier par e^x (qui est toujours strictement positif) et tout passer à gauche pour obtenir $e^{3x} - 2e^{2x} - 5e^x + 6 \leqslant 0$, ce qui se ramène encore une fois au tableau précédent en posant cette fois-ci $X = e^x$ (ce qui suppose donc $X > 0$). On obtient $X \in [1; 3]$ (on peut oublier l'autre intervalle puisque $X \geqslant 0$), soit $\mathcal{S} = [0; \ln 3]$.

Exercice 16 (* à ***)

1. Après avoir modifié l'énoncé pour ne pas prendre exactement le même exemple que dans le cours, on applique nos connaissances sur les racines sixièmes de l'unité pour obtenir dans $\mathbb{C}[X]$, $X^6 - 1 = (X-1)(X - e^{i\frac{\pi}{3}})(X - e^{i\frac{2\pi}{3}})(X+1)(X - e^{i\frac{4\pi}{3}})(X - e^{i\frac{5\pi}{3}}) = (X-1)\left(X - \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\left(X + \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(X+1)\left(X + \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(X - \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Dans $\mathbb{R}[X]$, on regroupe les racines complexes conjuguées pour obtenir $X^6 - 1 = (X-1)(X+1)(X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)$ (en utilisant directement le double de la partie réelle et le module des racines).
2. Pour chercher la racine double, il est un peu plus simple de chercher directement les racines du polynôme dérivée $P' = 4X^3 - 15X^2 + 8X + 3$. On constate que 1 est racine évidente, mais malheureusement 1 n'est pas racine de P puisque $1 - 5 + 4 + 3 + 9 \neq 0$. On enchaîne avec 2, mais $P'(2) = 32 - 60 + 16 + 3 \neq 0$; tentons donc $P'(3) = 108 - 135 + 24 + 3 = 0$. Ah, nouvelle

chance : $P(3) = 81 - 135 + 36 + 9 + 9 = 0$. On a trouvé notre racine double, on peut donc factoriser sous la forme $P = (X-3)^2Q$, effectuons une petite division euclidienne pour trouver Q :

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr|l}
 & X^4 & - & 5X^3 & + & 4X^2 & + & 3X & + & 9 & X^2-6X+9 \\ \cline{11-11}
- & (X^4 & - & 6X^3 & + & 9X^2) & & & & & X^2+X+1 \\
 & & & X^3 & - & 5X^2 & + & 3X & + & 9 & \\
 & & - & (X^3 & - & 6X^2 & + & 9X) & & & \\
 & & & & & X^2 & - & 6X & + & 9 & \\
 & & & & - & (X^2 & - & 6X & + & 9) & \\
 & & & & & & & & & 0 &
\end{array}$$

On en déduit que $P = (X-3)^2(X^2+X+1)$. On ne peut pas faire mieux dans $\mathbb{R}[X]$ puisque le dernier facteur a un discriminant négatif. Dans $\mathbb{C}[X]$, $P = (X-3)^2\left(X+\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(X+\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (on reconnait un des facteurs du polynôme de la question précédente !).

3. La méthode normale est ici de poser $Y = X^4$ pour obtenir Y^2+Y+1. On commence à savoir que ce trinôme a pour racines $Y_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $Y_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$. Il ne reste plus qu'à trouver les racines quatrièmes de ces deux nombres pour avoir les huit racines de P. Ouf, c'est assez facile, pour Y_1 on trouve $e^{i\frac{2\pi}{12}} = e^{i\frac{\pi}{6}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}$; $e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2})} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $e^{i(\frac{\pi}{6}+\pi)} = -e^{i\frac{\pi}{6}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{i}{2}$ et $-e^{i\frac{2\pi}{3}} = \dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Les racines quatrièmes de Y_2 sont simplement les conjugués des précédentes, à savoir $\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{i}{2}$; $-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}$ et $\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Conclusion : $P = \left(X-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(X-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(X+\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(X+\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(X-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{i}{2}\right)$ $\left(X-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}\right)\left(X+\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{i}{2}\right)\left(X+\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}\right)$. Dans $\mathbb{R}[X]$, on regroupe les racines conjuguées pour obtenir $P = (X^2-X+1)(X^2+X+1)(X^2-\sqrt{3}X+1)(X^2+\sqrt{3}X+1)$.
Mais les plus astucieux auront naturellement évité tous ces affreux calculs en recourrant à l'ignoble astuce suivante : $P(X) = X^8+X^4+1 = (X^8+2X^4+1)-X^4 = (X^4+1)^2-(X^2)^2$. On reconnait maintenant une différence de deux carrés, qu'on sait factoriser : $P(X) = (X^4+X^2+1)(X^4-X^2+1)$. Chacun des deux facteurs peut à nouveau se factoriser en utilisant la même technique : $X^4+X^2+1 = (X^2+1)^2-X^2 = (X^2+X+1)(X^2-X+1)$; et $X^4-X^2+1 = (X^2+1)^2-3X^2 = (X^2+1)^2-(\sqrt{3}X)^2 = (X^2+\sqrt{3}X+1)(X^2-\sqrt{3}X+1)$. Finalement, on obtient la factorisation suivante pour P : $P(X) = (X^2+\sqrt{3}X+1)(X^2+X+1)(X^2-X+1)(X^2-\sqrt{3}X+1)$ (et on constate que chacun des quatre facteurs a un discriminant négatif, on ne peut donc pas aller plus loin dans $\mathbb{R}[X]$).

4. Méthode normale : on pose $Y = X^3$, on cherche à factoriser Y^3+Y^2+Y+1. Il y a -1 qui est racine évidente, on peut factoriser sous la forme $(Y+1)(Y^2+1)$ (la factorisation étant ici triviale, inutile de détailler le calcul). Il ne reste donc plus qu'à trouver les racines cubiques de -1, i et $-i$. Les racines cubiques de -1 sont -1 ; $-e^{i\frac{2\pi}{3}} = e^{-i\frac{\pi}{3}} = \dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; et $-e^{i\frac{4\pi}{3}} = \dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Les racines cubiques de $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ sont $e^{i\frac{\pi}{6}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}$; $e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3})} = e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}$; et $e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3})} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$. Les racines cubiques de $-i$ sont les opposées de celles de i, à savoir $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{i}{2}$; $\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{i}{2}$ et enfin i. On trouve donc la factorisation $X^9+X^6+X^3+1 = (X+1)(X+i)(X-$

$i)\left(X-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(X-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(X-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)\left(X-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)\left(X+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)\left(X+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)$.
Dans $\mathbb{R}[X]$, on peut factoriser sous la forme $X^9+X^6+X^3+1=(X+1)(X^2+1)(X^2-X+1)(X^2-\sqrt{3}X+1)(X^2+\sqrt{3}X+1)$.

5. Ici, difficile de s'en sortir sans astuce, il n'y a même pas l'ombre d'une racine évidente. Il faut en fait constater que $(X+1)P(X)=X^7-X^6+\dots+X+X^6-X^5+\dots+1=X^7+1$. Voilà un polynôme qu'on sait factoriser, ses racines sont les racines septièmes de -1, qui sont les opposés des racines septièmes de l'unité (qu'on ne cherchera pas à exprimer autrement que sous forme exponentielle, il ne s'agit pas de valeurs remarquables), donc $(X+1)P(X)=(X+1)(X+e^{i\frac{2\pi}{7}})(X+e^{i\frac{4\pi}{7}})(X+e^{i\frac{6\pi}{7}})(X+e^{i\frac{8\pi}{7}})(X+e^{i\frac{10\pi}{7}})(X+e^{i\frac{12\pi}{7}})$, dont on déduit évidemment que $P=(X+e^{i\frac{2\pi}{7}})(X+e^{i\frac{4\pi}{7}})(X+e^{i\frac{6\pi}{7}})(X+e^{i\frac{8\pi}{7}})(X+e^{i\frac{10\pi}{7}})(X+e^{i\frac{12\pi}{7}})$. Dans $\mathbb{R}[X]$, on aura $P(X)=\left(X^2-2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+1\right)\left(X^2-2\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)+1\right)\left(X^2-2\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)+1\right)$.

Exercice 17 (**)

1. L'énoncé n'était pas forcément limpide mais vu ce qui est demandé à la fin de l'exercice, il vaut mieux trouver ces racines sous forme algébrique. Posons donc $z=a+ib$ et tentons de trouver $z^2=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$. On doit donc avoir $a^2-b^2=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $2ab=\frac{1}{2}$, et en passant par le module $a^2+b^2=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1$. En additionnant les deux équations extrêmes, on trouve $2a^2=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$, soit $a=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}$. De même en soustrayant, et en utilisant le fait que a et b sont de même signe, on obtient $b=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}$. Les deux racines carrées de $\frac{i+\sqrt{3}}{2}$ sont donc $\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}+i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}$ et $-\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}-i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}$. Le calcul des racines carrées de $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$ est extrêmement similaire puisqu'on échange en fait les équation concernant a et b (le module est inchange) pour obtenir les deux valeurs $\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}+i\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}$ et $-\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}-i\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}$.

2.
$$\begin{array}{rlllll|l}
 & X^6 & & & & -\ i & X^2+i \\ \cline{7-7}
- & (X^6 & +\ iX^4) & & & & X^4-iX^2-1 \\
 & & -iX^4 & & & -\ i & \\
 & - & (-iX^4 & +\ X^2) & & & \\
 & & & -X^2 & & -\ i & \\
 & & - & (-X^2 & & -\ i) & \\
 & & & & & 0 &
\end{array}$$

On peut donc écrire $X^6-i=(X^2+i)(X^4-iX^2-1)$. Le premier facteur a pour racines $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ et $\frac{i-1}{\sqrt{2}}$ qui sont les racines carrées de $-i$ (on les trouve facilement en passant par la forme exponentielle si besoin), en posant $Y=X^2$ dans le deuxième facteur, on trouve pour discriminant $\Delta=-1+4=3$, donc les solutions sont $Y_1=\frac{i+\sqrt{3}}{2}$ et $Y_2=\frac{i-\sqrt{3}}{2}$. Quelle surprise, ce sont les deux nombres dont on a calculé les racines carrées à la première question. Finalement, on obtient la sublimissime expression :

$$X^6-i=\left(X-\frac{1}{2}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\left(X+\frac{1}{2}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\left(X-\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}-i\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}\right)$$
$$\left(X-\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}+i\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}\right)\left(X-\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}-i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}\right)\left(X-\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}+i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}\right)$$

3. C'est évident nettement plus simple : $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, donc les solutions sont de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{\pi}{3}$, donc sont égales à $e^{i\frac{\pi}{12}}$; $e^{i(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3})} = e^{i\frac{5\pi}{12}}$; $e^{i\frac{9\pi}{12}} = e^{i\frac{3\pi}{4}}$; $e^{i\frac{13\pi}{12}}$; $e^{i\frac{17\pi}{12}}$ et $e^{i\frac{7\pi}{4}}$. Les racines carrées de $-i$ sont celles correspondant aux arguments multiples de $\dfrac{\pi}{4}$. Parmi les quatre qui restent, deux ont une partie réelle et une partie imaginaire positives, ce sont $e^{i\frac{\pi}{12}}$ et $e^{i\frac{5\pi}{12}}$, celle qui correspond à $\dfrac{\pi}{12}$ est celle ayant la plus grande partie réelle. On en déduit que $e^{i\frac{\pi}{12}} = \sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}} + i\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}}$. En particulier, $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}} + i\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}}$

Exercice 18 (**)

- Pour éviter des identifications un peu lourdes, utilisons le fait que 1 est racine double du polynôme P, et 0 racine simple. Comme P est de degré 3, on peut l'écrire sous la forme $P = aX(X-1)^2$. On a donc $P' = a(X-1)^2 + 2aX(X-1)$, d'où $P'(0) = a$. Il faut donc prendre $a = 2$ pour satisfaire la condition $P'(0) = 2$, et la seule solution est alors $P = 2X(X-1)^2$.
  Si on tient absolument à procéder par identifications, on écrit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, d'où $P' = 3aX^2 + 2bX + c$. les quatre conditions de l'énoncé se traduisent alors par $d = 0$; $a + b + c + d = 0$; $3a + 2b + c = 0$ et $c = 2$. On a donc $a + b = -2$ et $3a + 2b = -2$. Par substition, $b = -2 - a$, donc $3a - 4 - 2a = -2$, soit $a = 2$ puis $b = -4$. On trouve donc $P = 2X^3 - 4X^2 + 2X = 2X(X-1)^2$.
- Le plus simple ici est de travailler sur les racines possibles du polynôme P. Si a est racine de P, alors $(a+3)P(a) = aP(a+1) = 0$, et $P(a+1)$ est également racine de P, sauf si $a = 0$. En itérant le procédé, $a+2$ sera aussi racine sauf si $a+1 = 0$, puis $a+3$ sera racine etc. Finalement, tous les nombres de la forme $a+k$ seront racines du polynôme pour $k \in \mathbb{N}$, sauf s'il existe un entier naturel k tel que $a + k = 0$, c'est-à-dire $a = -k$. Comme un polynôme autre que le polynôme nul (qui est une solution triviale du problème que nous allons désormais écarter) ne peut pas avoir une infinité de racines, les seules racines possibles de P sont les entiers négatifs. Or, on peut aussi faire le raisonnement dans l'autre sens : si a est racine alors en posant $X = a - 1$ dans l'égalité de départ, $(a-1)P(a) = (a+2)P(a-1)$, et $a-1$ est racine de P sauf si $a+2 = 0$. Comme précédemment, on obtiendra une infinité de racines sauf si $a+2-k = 0$ pour un entier naturel k, c'est-à-dire $a = k - 2$. En comparant avec la première condition obtenue, les seules racines possibles de P sont 0, -1 et -2. Autrement dit, $P = \lambda X^\alpha (X+1)^\beta (X+2)^\gamma$ (rien n'interdit a priori d'avoir des racines multiples). Réinjectons cette formule dans l'équation de départ : $\lambda(X+3)X^\alpha(X+1)^\beta(X+2)^\gamma = \lambda X(X+1)^\alpha(X+2)^\beta(X+3)^\gamma$. Par unicité de la factorisation d'un polynôme en produit de polynômes irréductibles, on doit avoir $\alpha = 1$; $\beta = \alpha$; $\gamma = \beta$ et $1 = \gamma$, donc les polynômes solutions sont de la forme $P(X) = \lambda X(X+1)(X+2)$.
- Il est encore une fois ici plus simple de travailler avec le polynôme dérivée : on sait que -1 est racine double de $P+1$ et 1 est racine double de $P-1$, donc -1 et 1 sont racines de P' (les constantes disparaissent en dérivant). Comme P est de degré 3, P' est de degré 2 et s'écrit donc nécessairement $P' = \alpha(X+1)(X-1) = \alpha(X^2-1)$. Par conséquent, $P = \dfrac{\alpha}{3}X^3 - \alpha X + \beta$. Reste à trouver α et β tels que -1 soit racine de $P+1$, c'est-à-dire $P(-1) = -1$; et 1 soit racine de $P-1$, soit $P(1) = 1$. On obtient les conditions $-\dfrac{\alpha}{3} + \alpha + \beta = -1$, et $\dfrac{\alpha}{3} - \alpha + \beta = 1$. En additionnant les deux équations, on trouve $\beta = 0$, puis $\dfrac{2}{3}\alpha = -1$, soit $\alpha = -\dfrac{3}{2}$. Finalement, l'unique polynôme solution est $P = -\dfrac{1}{2}X^3 + \dfrac{3}{2}X$.
- Une bonne tactique ici est d'essayer de commencer par obtenir une information sur le degré du polynôme P en étudiant le coefficient dominant de chacun des deux membres de l'égalité. Si P a pour terme dominant a_nX^n, alors le membre de droite a pour terme dominant a_nX^n, et X'' a lui-même pour terme dominant $n(n-1)a_nX^{n-2}$. En multipliant par X^2+4, on retombe sur du $n(n-1)a_nX^n$ (le +4 ne va pas influencer le terme dominant), donc on obtient la condition

nécessaire $n(n-1)=6$, soit $n^2-n-6=0$. Cette équation a pour discriminant $\Delta=1+24=25$ et admet deux solutions $n_1=\dfrac{1+5}{2}=3$ et $n_2=\dfrac{1-5}{2}=-2$. Le degré d'un polynôme étant difficilement négatif, les solutions seront forcément de degré 3 (il faudra tout de même y ajouter la solution triviale constituée par le polynôme nul). Posons donc $P=aX^3+bX^2+cX+d$, alors $P''=6aX+2b$, et $(X^2+4)P''=6aX^3+2bX^2+24aX+8b$. Par identification avec $6P$, on obtient les conditions $6a=6a$ (toujours vérifiée), $2b=6b$ qui implique $b=0$; $24a=6c$ qui donne $c=4a$ et enfin $8b=6d$ qui donne $d=0$ puisque $b=0$. Conclusion : les seules polynômes solutions sont ceux de la forme $P=aX^3+4aX=aX(X^2+4)$.

- Plusieurs pistes possibles ici, mais le plus simple est sûrement de raisonner sur le degré : $d^\circ(P(X^2))=2d^\circ(P)$ et $d^\circ((X^2+1)P)=2+d^\circ(P)$. en oubliant la solution nulle, on doit donc avoir $2d^\circ(P)=d^\circ(P)+2$, soit $d^\circ(P)=2$. Posons donc $P=aX^2+bX+c$, alors $P(X^2)=aX^4+bX^2+c$ et $(X^2+1)P(X)=aX^4+bX^3+(c+a)X^2+bX+c$. Par identification, on trouve les conditions $a=a$ et $c=c$, $b=0$ (deux fois) et $b=a+c$. On doit donc avoir $c=-a$, et les solutions sont les polynômes de la forme $P=aX^2-a=a(X^2-1)$.

Exercice 19 (**)

1.

$$\begin{array}{rrrrrrrr|l}
 & X^3 & + & X^2 & - & 2X & + & 3 & X^2+2X-1 \\ \cline{9-9}
- & (X^3 & + & 2X^2 & - & X) & & & X-1 \\
 & & - & X^2 & - & X & + & 3 & \\
 & & - & (-X^2 & - & 2X & + & 1) & \\
 & & & & & X & + & 2 &
\end{array}$$

Conclusion : $X^3+X^2-2X+3=(X^2+2X-1)(X-1)+X+2$.

2.

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr|l}
 & 2X^4 & - & 3X^3 & + & 4X^2 & - & 5X & + & 6 & X^2-3X+1 \\ \cline{11-11}
- & (2X^4 & - & 6X^3 & + & 2X^2) & & & & & 2X^2+3X+11 \\
 & & & 3X^3 & + & 2X^2 & - & 5X & + & 6 & \\
 & & - & (3X^3 & - & 9X^2 & + & 3X) & & & \\
 & & & & & 11X^2 & - & 8X & + & 6 & \\
 & & & & - & (11X^2 & - & 33X & + & 11) & \\
 & & & & & & & 25X & - & 5 &
\end{array}$$

Conclusion : $2X^4-3X^3+4X^2-5X+6=(X^2-3X+1)(2X^2+3X+11)+25X-5$.

3.

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr|l}
 & X^4 & & & & & - & 2\cos(2\theta)X & + & 1 & X^2-2\cos(\theta)X+1 \\ \cline{11-11}
- & (X^4 & - & 2\cos(\theta)X^3 & + & X^2) & & & & & X^2+2\cos(\theta)X \\
 & & & 2\cos(\theta)X^3 & - & X^2 & - & 2\cos(2\theta)X & + & 1 & \\
 & & - & (2\cos(\theta)X^3 & - & 4\cos^2(\theta)X^2 & + & 2\cos(\theta)X) & & & \\
 & & & & & (4\cos^2(\theta)-1)X^2 & - & 2(\cos(\theta)+\cos(2\theta))X & + & 1 &
\end{array}$$

On va finir les calculs en ligne, ce sera plus lisible, le quotient est égal à $X^2+2\cos(\theta)X+4\cos^2(\theta)-1$, et le dernier reste vaut $-2(\cos(\theta)+\cos(2\theta))X+1+2\cos(\theta)(4\cos^2(\theta)-1)X-4\cos^2(\theta)+1=(-2\cos(\theta)-4\cos^2(\theta)+2+8\cos^3(\theta)-2\cos(\theta))X+2(1-2\cos^2(\theta))=4\cos(\theta)(2\cos^2(\theta)-\cos(\theta)-1)-2\cos(2\theta)=4\cos(\theta)(\cos(\theta)-1)(2\cos(\theta)+1)X-2\cos(2\theta)$. Conclusion passionnante : $P(X)=X^4-2X\cos(2\theta)+1=(X^2-2X\cos(\theta)+1)(X^2+2\cos(\theta)X+4\cos^2(\theta)-1)+4\cos(\theta)(\cos(\theta)-1)(2\cos(\theta)+1)X-2\cos(2\theta)$.

Au vu de ce qu'on a obtenu, deux possibilités : soit le prof a encore donné un calcul aléatoire ignoble, soit il y avait une erreur d'énoncé. Refaisons le calcul en remplaçant le X par un X^2 dans l'expression de P :

$$\begin{array}{cccccccccccc|l}
 & X^4 & & & - & 2\cos(2\theta)X^2 & & & + & 1 & X^2-2\cos(\theta)X+1 \\ \cline{11-11}
- & (X^4 & - & 2\cos(\theta)X^3 & + & X^2) & & & & & X^2+2\cos(\theta)X+1 \\
 & & & 2\cos(\theta)X^3 & - & (4\cos^2(\theta)-2+1)X^2 & & & + & 1 & \\
 & & - & (2\cos(\theta)X^3 & - & 4\cos^2(\theta)X^2 & + & 2\cos(\theta)X) & & & \\
 & & & & & X^2 & - & 2(\cos(\theta))X & + & 1 & \\
 & & & & - & (X^2 & - & 2\cos(\theta)X & + & 1 & \\
 & & & & & & & & & 0 &
\end{array}$$

Le résultat est ici nettement plus sympathique : $X^4 - 2\cos(2\theta)X + 1 = (X^2 - 2\cos(\theta)X + 1)(X^2 + 2\cos(\theta)X + 1)$.

4.

$$\begin{array}{cccccccc|c}
 & X^3 & - & iX^2 & - & X & & & X-1+i \\ \cline{9-9}
- & (X^3 & + & (i-1)X^2) & & & & & X^2+(1-2i)X-2-3i \\
 & & & (1-2i)X^2 & - & X & & & \\
 & & - & ((1-2i)X^2 & + & (1+3i)X) & & & \\
 & & & & & (-2-3i)X & & & \\
 & & & & - & ((-2-3i)X & + & 5+i) & \\
 & & & & & & & -5-i &
\end{array}$$

Conclusion : $X^3 - iX^2 - X = (X - 1 + i)(X^2 + (1 - 2i)X - 2 - 3i) - 5 - i$.

5. Il est évidemment hors de question ici de poser la division euclidienne explicitement. En fait, l'énoncé n'aurait du demander que le reste de cette division, car le quotient est en gros impossible à calculer. Écrivons quand même la division de façon théorique : $P = AQ + R$, avec $d^\circ(R) \leqslant 1$, soit $R(X) = \alpha X + \beta$. Comme tout ce qui nous intéresse est de connaitre R, une astuce classique est de prendre comme valeurs particulières de X dans l'égalité précédente les racines du polynôme Q (ce qui fera disparaitre le terme en AQ et notamment ce A bien gênant dont on ne sait rien. Ici, on peut donc écrire $P(i) = A(i)Q(i) + \alpha i + \beta$. Comme $Q(i) = 0$ et $P(i) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = e^{in\theta}$, on obtient la première condition $e^{in\theta} = \alpha i + \beta$. De même, avec $X = -i$, on trouve $e^{-in\theta} = -\alpha i + \beta$. En additionnant les deux équations, $2\beta = e^{in\theta} + e^{-in\theta} = 2\cos(n\theta)$, donc $\beta = \cos(n\theta)$. On en déduit que $i\alpha = e^{in\theta} - \cos(n\theta) = i\sin(n\theta)$, donc $\alpha = \sin(n\theta)$. Finalement, $(X\cos(\theta) + \sin(\theta))^n = (X^2 + 1)A(X) + \sin(n\theta)X + \cos(n\theta)$.

Exercice 20 (***)

1. Jusque-là tout va bien : $P_2 = XP_1 - P_0 = X^2 - 2$; $P_3 = X(X^2 - 2) - X = X^3 - 3X$; et $P_4 = X(X^3 - 3X) - (X^2 - 2) = X^4 - 4X^2 + 2$.
2. On conjecture aisément que P_n est de degré n et de coefficient dominant 1, c'est-à-dire que $P_n = X^n + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. Prouvons-le par récurrence double. C'est vrai pour P_1 et P_2, supposons-le vrai aux rangs n et $n+1$ alors $P_{n+2} = X(X^{n+1} + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k - X^n - \sum_{k=0}^{n-1} b_k X^k = X^{n+2} + \sum_{k=0}^{n+1} c_k X^k$ (peu importe les coefficients exacts dans ce qui n'est pas dominant). La propriété reste donc vraie au rang $n + 2$, par principe de récurrence, elle est vrai pour tout entier $n \geqslant 1$.
3. On va encore faire une récurrence double : $P_0\left(z + \dfrac{1}{z}\right) = 2$ et $z^0 + \dfrac{1}{z^0} = 1 + 1 = 2$, donc ça marche pour P_0. De plus, $P_1\left(z + \dfrac{1}{z}\right) = z + \dfrac{1}{z}$, ce qui prouve la propriété au rang 2. Supposons-la vérifiée aux rangs n et $n+1$, alors $P_{n+2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right) = \left(z + \dfrac{1}{z}\right) P_{n+1}\left(z + \dfrac{1}{z}\right) - P_n\left(z + \dfrac{1}{z}\right) =$

$\left(z+\dfrac{1}{z}\right)\left(z^{n+1}+\dfrac{1}{z^{n+1}}\right)-z^n-\dfrac{1}{z^n}=z^{n+2}+\dfrac{1}{z^n}+z^n+\dfrac{1}{z^{n+2}}-z^n-\dfrac{1}{z^n}=z^{n+2}+\dfrac{1}{z^{n+2}}$. La propriété est donc vérifiée au rang $n+2$ et la récurrence fonctionne.

4. En posant $z=e^{i\theta}$, on aura $z+\dfrac{1}{z}=e^{i\theta}+e^{-i\theta}=2\cos(\theta)$ donc, d'après la question précédente, $P_n(2\cos(\theta))=e^{in\theta}+e^{-in\theta}=2\cos(n\theta)$.
5. D'après la question précédente, si $\cos(n\theta)=0$, alors $2\cos(\theta)$ est une racine de P_n. Or, $\cos(n\theta)=0$ équivaut à $\theta\equiv\dfrac{\pi}{2n}\left[\dfrac{\pi}{n}\right]$. Tous les réels de la forme $2\cos\left(\dfrac{\pi}{2n}+k\dfrac{\pi}{n}\right)$ sont donc racines du polynôme P_n. Or, il y a exactement n réels distincts dans cette liste, à savoir $2\cos\left(\dfrac{\pi}{2n}\dfrac{k\pi}{n}\right)$ pour $k\in\{0;1;\dots;n-1\}$ (ces valeurs sont bien distinctes car étant les cosinus d'angles distincts de l'intervalle $[0;\pi[$ sur lequel le cosinus est bijectif ; par contre, pour les valeurs plus grandes de k, on retrouve les même cosinus : $\cos\left(\dfrac{\pi}{2n}+k\dfrac{\pi}{n}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2n}+(2n-k-1)\dfrac{\pi}{n}\right)$ si $k\geqslant n$. Le polynôme P_n étant de degré n, il ne peut avoir plus de n racines, et on vient donc de les exhiber toutes. Conclusion : $P_n=\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\left(X-2\cos\left(\dfrac{\pi}{2n}+\dfrac{k\pi}{n}\right)\right)$. Par exemple, pour $n=3$, $P_3=\left(X-2\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right)\left(X-2\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)\left(X-2\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\right)=X(X-\sqrt{3})(X+\sqrt{3})=X^3-3X$, on retrouve bien la bonne formule.

Exercice 21 (***)

Soit P le polynôme unitaire de degré 3 dont les racines complexes sont x, y et z. Autrement dit, $P=(X-x)(X-y)(X-z)$. Si on écrit $P=X^3+aX^2+bX+c$, en connaissant par coeur ses relations coefficients-racines ou en développant comme un gros bourrin, on trouve $a=-x-y-z$, donc $a=-1$; $b=xy+yz+xz$. Ah mince, on ne connait pas cette valeur, rusons un peu en calculant $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz=1+2b$, donc $1+2b=1$ et $b=0$. Enfin, la dernière relation donne $-xyz=c$. Or, $(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3x^2y+3x^2z+3y^2x+3y^2z+3z^2x+3z^2y+6xyz$ (ceux pour qui la formule ne semble pas claire développeront brutalement pour vérifier) soit $1=-5+3(x+y+z)(xy+yz+zx)-3xyz$, donc, en utilisant que $b=0$, $1=-5+3c$ et $c=2$. Finalement, $P=X^3-X^2+2$. Coup de chance (ou plutôt, pour une fois, énoncé bien conçu), ce polynôme de degré 3 a une racine évidente, en l'occurence -1. On peut donc factoriser sous la forme $P=(X+1)(dX^2+eX+f)=dX^3+(d+e)X^2+(e+f)X+f$. Par identification, $d=1$; $d+e=-1$ donc $e=-2$ et $e+f=0$ soit $f=2$. Comme $P=(X+1)(X^2-2X+2)$, et que la deuxième parenthèse a pour discriminant $\Delta=4-8=-4$, et donc pour racines $z_1=\dfrac{2+2i}{2}=1+i$ et $z_2=1-i$, on peut factoriser P sous la forme $P=(X+1)(X-1-i)(X-1+i)$. À permutation près, on connait les valeurs de x, y et z. Le système initial a six solutions : $\mathcal{S}=\{(-1,1-i,1+i);(-1,1+i,1-i);(1-i,-1,1+i);(1-i,1+i,-1);(1+i,-1,1-i);(1+i,1-i,-1)\}$.

TD n°7 : révisions pour le DS6

PTSI B Lycée Eiffel

8 février 2013

Problème 1 : Dérivations dans un anneau.

Dans tout ce problème, $(A, +, \times)$ est un anneau pas nécessairement commutatif ni intègre. On note comme toujours 0 et 1 les éléments neutres de A. Une application $d : A \to A$ est appelée **dérivation** sur A si, $\forall (x, y) \in A^2$, $d(x + y) = d(x) + d(y)$ et $d(x \times y) = x \times d(y) + y \times d(x)$.

Des exemples

1. Vérifier que sur l'anneau des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la dérivation est effectivement une dérivation. Qu'en est-il, sur l'ensemble des fonctions deux fois dérivables, de la dérivation seconde $f \mapsto f''$?
2. Soient deux éléments x et y de l'anneau A. On note $[x, y] = xy - yx$. Que vaut $[x, y]$ lorsque x et y commutent ? Vérifier que $[y, x] = -[x, y]$ et que $[x, y + z] = [x, y] + [x, z]$.
3. Démontrer l'identité de Jacobi $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$.
4. Montrer que l'application $d_x : y \mapsto [x, y] = xy - yx$ est une dérivation de l'anneau A.

Propriétés générales des dérivations.

On considère ici une dérivation d quelconque sur A.

1. Calculer $d(0)$ et $d(1)$.
2. Soit $x \in A$. Calculer $d(-x)$ et $d(x^{-1})$ (dans le cas où x est inversible) en fonction de $d(x)$.
3. Soient $(x_1, x_2, \dots x_n) \in A^n$, exprimer $d(x_1 x_2 \dots x_n)$ en fonction de $d(x_1)$, …, $d(x_n)$.
4. Soit $x \in A$, exprimer $d(x^n)$ en fonction de $d(x)$. Que devient cette formule si x et $d(x)$ commutent ?
5. Montrer que $\{x \in A \mid d(x) = 0\}$ est un sous-anneau de A, et même un sous-corps dans le cas où A est un corps.

Pour aller un peu plus loin.

On considère deux dérivations d_1 et d_2 sur un même anneau A.

1. La somme $d_1 + d_2$ est-elle toujours une dérivation ? Et la composée $d_2 \circ d_1$?
2. Montrer que $[d_1, d_2] = d_1 \circ d_2 - d_2 \circ d_1$ est une dérivation.
3. Montrer que $[d, d_x] = d_{d(x)}$ (où d_x est la dérivation définie dans la première partie du problème).
4. Montrer que $[d_x, d_y] = d_{[x,y]}$.

Problème 2 : Fractions continues.

On note dans tout ce problème (a_n) la suite définie par $a_0 = 1$, puis $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{2n} = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2n+1} = 1$. On définit une seconde suite (u_n) à partir de (a_n) de la façon suivante :

$$u_n = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

Étude de la nature de (u_n).

1. Calculer les valeurs de u_0, u_1, u_2, u_3 et u_4 (on donnera les résultats sous forme d'un quotient d'entiers).
2. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \dfrac{3 + 2u_n}{2 + u_n}$.
3. On définit une fonction f par $f(x) = \dfrac{3 + 2x}{2 + x}$, de sorte que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = f(u_n)$. Étudier les variations de la fonction f.
4. Résoudre l'équation $f(x) = x$ et étudier le signe de $f(x) - x$.
5. Prouver que la suite (u_{2n}) est croissante et majorée par $\sqrt{3}$; et que la suite (u_{2n+1}) est décroissante et minorée par $\sqrt{3}$.
6. Prouver que les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite, et en déduire la nature de (u_n).

Étude de deux suites auxiliaires

On définit désormais deux nouvelles suites (p_n) et (q_n) en posant $p_0 = 1$, $p_1 = 2$, $q_0 = q_1 = 1$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_{n+2} = a_{n+2}p_{n+1} + p_n$ et $q_{n+2} = a_{n+2}q_{n+1} + q_n$.

1. Démontrer que tous les termes de ces deux suites sont des entiers naturels.
2. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $q_n \geqslant n$.
3. Montrer par récurrence que, $\forall x > 0$,
   $\forall n \geqslant 2$, $a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{x}}}} = \dfrac{xp_{n-1} + p_{n-2}}{xq_{n-1} + q_{n-2}}$. En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{p_n}{q_n}$.
4. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1}q_n - q_{n+1}p_n = (-1)^n$.
5. Montrer à l'aide des résultats précédents que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|u_{n+1} - u_n| \leqslant \dfrac{1}{n(n+1)}$.
6. En considérant la série de terme général $u_{n+1} - u_n$, redémontrer la convergence de la suite (u_n).
7. On pose, $\forall n \in \mathbb{N}$, $r_n = p_{2n}$. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $r_{n+2} = 4r_{n+1} - r_n$.
8. En déduire l'expression de p_{2n} en fonction de n.
9. Déterminer de même l'expression de q_{2n} en fonction de n.
10. À l'aide des résultats précédents, retrouver la limite de la suite (u_n).

Corrigé du TD n°7

Problème 1 : Dérivations dans un anneau.

Des exemples

1. Il suffit de vérifier que, si f et g sont deux fonctions dérivables, alors $(f+g)' = f' + g'$, et que $(fg)' = fg' + f'g$, ce qui est vrai. Par contre, la dérivation seconde n'est pas une dérivation puisque $(f+g)'' = f'' + g''$, mais $(fg)'' = fg'' + 2f'g' + f''g \neq f''g + fg''$.
2. Si x et y commutent, $[x,y] = 0$. Il est immédiat que $[y,x] = yx - xy = -[x,y]$. De plus, $[x, y+z] = x(y+z) - (y+z)x = xy + xz - yx - zx = xy - yx + xz - zx = [x,y] + [x,z]$.
3. C'est un calcul pas très subtil : $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = x(yz - zy) - (yz - zy)x + y(zx - xz) - (zx - xz)y + z(xy - yx) + (xy - yx)z = xyz - xzy - yzx + zyx + yzx - yxz - zxy + xzy + zxy - zyx - xyz + yxz = 0$.
4. Il faut vérifer deux choses : d'une part que $d_x(y+z) = d_x(y) + d_x(z)$, soit $[x, y+z] = [x,y] + [x,z]$, ce qu'on a déjà démontré plua haut : et d'autre part que $d_x(yz) = yd_x(z) + d_x(y)z$, soit $[x, yz] = y[x,z] + [x,y]z$. En effet, $[x,yz] = xyz - yzx$, et $y[x,z] + [x,y]z = y(xz - zx) + (xy - yx)z = yxz - yzx + xyz - yxz = xyz - yzx$.

Propriétés générales des dérivations.

1. En appliquant la formule avec la somme à $x = y = 0$, on obtient $d(0+0) = d(0) + d(0)$, soit $d(0) = d(0) + d(0)$, ce qui implique $d(0) = 0$. En ppliquand la formule avec le produit à $x = y = 1$, $d(1 \times 1) = 1 \times d(1) + d(1) \times 1$, soit $d(1) = d(1) + d(1)$, donc $d(1) = 0$.
2. Prenons $y = -x$ dans la formule de la somme : $d(x-x) = d(x) + d(-x)$, or $d(x-x) = d(0) = 0$, donc on trouve $d(-x) = -d(x)$. En prenant $y = x^{-1}$ dans la formule du produit, $d(xx^{-1}) = xd(x^{-1}) + d(x)x^{-1}$, or $d(1) = 0$ donc $xd(x^{-1}) = -d(x)x^{-1}$, soit $d(x^{-1}) = x^{-1}d(x)x^{-1}$. Dans le cas où tout ce beau monde commute, on trouve $d(x^{-1}) = -d(x)x^{-2}$, ce qui correspond à la formule de dérivation classique $\left(\dfrac{1}{f}\right)' = -\dfrac{f'}{f^2}$.
3. En utilisant plusieurs fois de suite la formule pour le produit, on obtient $d(x_1x_2x_3) = x_1d(x_2x_3) + d(x_1)x_2x_3 = x_1x_2d(x_3) + x_1d(x_2)x_3 + d(x_1)x_2x_3$, puis plus généralement $d(x_1x_2\dots x_n) = x_1\dots x_{n-1}d(x_n) + x_1\dots x_{n-2}d(x_{n-1})x_n + \dots d(x_1)x_2\dots x_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_1\dots x_{i-1}d(x_i)x_{i+1}\dots x_n$.
4. En appliquant la formule précédente avec tous les x_i égaux à x, on trouve $d(x^n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x^{i-1}d(x)x^{n-i}$. Par exemple, pour $n = 4$, $d(x^4) = x^3d(x) + x^2d(x)x + xd(x)x^2 + d(x)x^3$. Dans le cas où $d(x)$ commute avec x, on trouve plus simplement $d(x^n) = nx^{n-1}d(x)$, ce qui fait évidemment penser à la formule bien connue $(f^n)' = nf^{n-1}f'$.
5. On a déjà vu plus haut que les deux éléments neutres appartenaient à $B = \{x \mid d(x) = 0\}$. De plus, si $d(x) = d(y) = 0$, alors $d(x+y) = d(x) + d(y) = 0 + 0 = 0$, donc B est stable par somme. On a également $d(-x) = -d(x) = 0$, donc B est stable par passage à l'opposé. Enfin, $d(xy) = xd(y) + d(x)y = X \times 0 + 0 \times y = 0$, donc B est stable par produit. L'ensemble B est donc un sous-anneau de A. Dans le cas où A est un corps, ona aura toujours, si $x \in B$, $d(x^{-1}) = -x^{-1}d(x)x^{-1} = -x^{-1} \times 0 \times x^{-1} = 0$, donc B est également stable par passage à l'inverse.

Pour aller un peu plus loin.

1. Si d_1 et d_2 sont des dérivations, $d_1(x+y) + d_2(x+y) = d_1(x) + d_1(y) + d_2(x) + d_2(y) = (d_1 + d_2)(x) + (d_1 + d_2)(y)$; de plus $d_1(xy) + d_2(xy) = xd_1(y) + d_1(x)y + xd_2(y) + d_2(x)y =$

$x((d_1+d_2)(y))+((d_1+d_2)(x))y$, donc d_1+d_2 est bien une dérivation. Par contre, ce n'est pas toujours le cas de la composée, on a vu à la première question que la dérivation seconde, qui est la composée de la dérivation par elle-même, n'est plus une dérivation.

2. Calculons donc $d_1(d_2(x+y)) - d_2(d_1(x+y)) = d_1(d_2(x)+d_2(y)) - d_2(d_1(x)+d_1(y)) = d_1 \circ d_2(x) + d_1 \circ d_2(y) - d_2 \circ d_1(x) - d_2 \circ d_1(y) = (d_1 \circ d_2 - d_2 \circ d_1)(x) + (d_1 \circ d_2 - d_2 \circ d_1)(x)$. Allons-y pour le produit : $d_1(d_2(xy)) - d_2(d_1(xy)) = d_1(xd_2(y)+d_2(x)y) - d_2(xd_1(y)+d_1(x)y) = d_1(xd_2(y)) + d_1(d_2(x)y) - d_2(xd_1(y)) + d_2(d_1(x)y) = d_1(x)d_2(y) + xd_1 \circ d_2(y) + d_1 \circ d_2(x)y + d_2(x)d_1(y) - d_2(x)d_1(y) - xd_2 \circ d_1(y) - d_2 \circ d_1(x)y - d_1(x)d_2(y) = x((d_1 \circ d_2 - d_2 \circ d_1)(y)) + (d_1 \circ d_2 - d_2 \circ d_1(x))y$ (les autres termes se simplifient), donc ça marche !
3. En effet, $[d, d_x](y) = d(d_x(y)) - d_x(d(y)) = d(xy) - d(yx) - [x, d(y)] = d(x)y + xd(y) - d(y)x - yd(x) - xd(y) + d(y)x = d(x)y - yd(x) = [d(x), y] = d_{d(x)}(y)$.
4. En effet, $[d_x, d_y](z) = d_x(d_y(z)) - d_y(d_x(z)) = [x, [y, z]] - [y, [x, z]] = xyz - xzy - yzx + zyx - yxz + yzx + xzy - zxy = xyz + zyx - yxz - zxy = (xy - yx)z - z(xy - yx) = [[x, y], z] = d_{[x,y]}(z)$.

Problème 2 : Fractions continues.

Étude de la nature de (u_n).

1. Calculons donc $u_0 = a_0 = 1$; $u_1 = 1 + \dfrac{1}{a_1} = 1 + 1 = 2$; $u_2 = 1 + \dfrac{1}{1+\frac{1}{2}} = 1 + \dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{3}$; $u_3 = 1 + \dfrac{1}{1+\frac{1}{2+1}} = 1 + \dfrac{3}{4} = \dfrac{7}{4}$; et enfin $u_4 = 1 + \dfrac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}} = 1 + \dfrac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{2}{3}}} = 1 + \dfrac{1}{1+\frac{3}{8}} = 1 + \dfrac{8}{11} = \dfrac{19}{11}$.
2. On peut constater que, quelle que soit la parité de n, on a toujours $u_{n+2} = 1 + \dfrac{1}{1+\frac{1}{1+u_n}} = 1 + \dfrac{1}{\frac{2+u_n}{1+u_n}} = 1 + \dfrac{1+u_n}{2+u_n} = \dfrac{2+u_n+1+u_n}{2+u_n} = \dfrac{3+2u_n}{2+u_n}$.
3. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$, de dérivée $f'(x) = \dfrac{2(2+x)-(3+2x)}{(2+x)^2} = \dfrac{1}{(2+x)^2} > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $]-\infty;-2[$ et sur $]-2;+\infty[$.
4. Constatons que $f(x) = x$ si $\dfrac{3+2x}{2+x} - x = 0$, soit $\dfrac{3-x^2}{2+x} = 0$. Les deux solutions de cette équation sont $x_1 = \sqrt{3}$, et $x_2 = -\sqrt{3}$. Au vu du calcul précédent, le signe de $f(x) - x$ sera positif sur $]-\infty;-2]\cup]-\sqrt{3};\sqrt{3}]$, et négatif sur $]-2;-\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3};+\infty[$.
5. Prouvons donc par récurrence que la suite u_{2n} est croissante et majorée par $\sqrt{3}$. On a calculé plus haut $u_0 = 1$ et $u_2 = \dfrac{5}{3} < \sqrt{3}$, puisque $\left(\dfrac{5}{3}\right)^2 = \dfrac{25}{9} < 3$. De plus, on a bien $u_0 < u_2$. Supposons donc $1 \leqslant u_{2n} \leqslant u_{2n+2} \leqslant \sqrt{3}$ pour un certain entier n, alors la fonction f étant croissante sur l'intervalle $[1;\sqrt{3}]$, on aura $f(1) \leqslant f(u_{2n}) \leqslant f(u_{2n+2}) \leqslant f(\sqrt{3})$, c'est-à-dire $\dfrac{5}{3} \leqslant u_{2n+2} \leqslant u_{2n+4} \leqslant \sqrt{3}$, ce qui prouve l'hérédité de nos deux propriétés. Par principe de récurrence, la suite est bien croissante et majorée par $\sqrt{3}$. La démonstration est très similaire pour les termes d'indices impairs, en constatant que $\sqrt{3} \leqslant u_3 \leqslant u_1$, puis que $\sqrt{3} \leqslant u_{2n+1} \leqslant u_{2n+3}$ implique $\sqrt{3} \leqslant u_{2n+3} \leqslant u_{2n+5}$ en utilisant la croissance de f.
6. Étant respectivement croissante et majorée, et décroissante et minorée, les deux suites convergent. Notons par exemple l la limite finie de la suite (u_{2n}). On a alors certainement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+2} = l$. Or, au vu de la relation liant u_{2n+2} et u_{2n}, on a également $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+2} = \dfrac{3+2l}{2+l}$. Autrement

dit, la limite l vérifie l'équation $l = f(l)$, donc $l = \pm\sqrt{3}$. La suite étant par ailleurs minorée par son premier terme $u_0 = 1$, elle ne peut converger vers $-\sqrt{3}$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \sqrt{3}$. Le raisonnement est le même pour u_{2n+1}. Les termes d'indices pairs et impairs de la suite (u_n) convergeant vers $\sqrt{3}$, on peut en déduire que la suite (u_n) est convergente, de limite $\sqrt{3}$.

Étude de deux suites auxiliaires.

1. C'est, pour chacune des deux suites, une récurrence double immédiate : les deux premiers termes de chaque suite sont des entiers naturels, et en supposant que p_n et p_{n+1} sont des entiers naturels, comme $a_{n+2} = 1$ ou $a_{n+2} = 2$, on aura très certainement $a_{n+2}p_{n+1} + p_n \in \mathbb{N}$, d'où l'hérédité de la proptiété. C'est évidemment la même chose pour q_{n+2}. Par principe de récurrence double, tous les termes des deux suites sont bien des entiers naturels.
2. Encore une récurrence double : $q_0 = 1 \geqslant 0$; $q_1 = 1 \geqslant 1$; et en supposant $q_n \geqslant n$ et $q_{n+1} \geqslant n+1$, comme $a_{n+2} \geqslant 1$, on aura $q_{n+2} \geqslant q_{n+1} + q_n \geqslant 2n+1 \geqslant n+2$ si $n \geqslant 1$. Pour $n = 0$, comme $a_2 = 2$, on aura tout de même $q_2 = 3 \geqslant 2$. Dans tous les cas, l'hérédité est donc vérifiée, ce qui achève la récurrence.
3. C'est, pour changer, une récurrence simple. Pour $n = 2$, $a_0 + \dfrac{1}{a_1 + \frac{1}{x}} = 1 + \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{2x+1}{x+1} = \dfrac{p_1 x + p_0}{q_1 x + q_0}$. Supposons désormais la propriété vraie au rang n pour tout réel x strictement positif. On peut alors l'appliquer au nombre réel strictement positif $a_n + \dfrac{1}{x}$ pour obtenir $a_0 + \dfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n + \frac{1}{x}}}}} = \dfrac{(a_n + \frac{1}{x})p_{n-1} + p_{n-2}}{(a_n + \frac{1}{x})q_{n-1} + q_{n-2}} = \dfrac{x a_n p_{n-1} + p_{n-1} + x p_{n-2}}{x a_n q_{n-1} + q_{n-1} + x q_{n-2}}$ $= \dfrac{x(a_n p_{n-1} + p_{n-2}) + p_{n-1}}{x(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) + q_{n-1}} = \dfrac{x p_n + p_{n-1}}{x q_n + q_{n-1}}$, ce qui prouve la formule pour x au rang n. La formule est donc vraie pour tout réel strictement positif, et pour tout entier supérieur ou égal à 2. Il suffit ensuite de l'appliquer à $x = a_n$ (qui est toujours strictement positif) pour obtenir $u_n = \dfrac{a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}} = \dfrac{p_n}{q_n}$. Ceci étant vrai à partir de $n = 2$, il faut encore vérifier que $u_0 = \dfrac{p_0}{q_0}$ et $u_1 = \dfrac{p_1}{q_1}$, ce qui est vrai.
4. Encore une récurrence : $p_1 q_0 - q_1 p_0 = 2 - 1 = 1 = (-1)^0$ et, comme $p_{n+1}q_n - q_{n+1}p_n = (a_{n+1}p_n + p_{n-1})q_n - (a_{n+1}q_n + q_{n-1})p_n = p_{n-1}q_n - q_{n-1}p_n = -(p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1})$, la propriété est héréditaire. Elle est donc vraie pour tout entier.
5. Calculons donc $u_{n+1} - u_n = \dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \dfrac{p_n}{q_n} = \dfrac{p_{n+1}q_n - q_{n+1}p_n}{q_{n+1}q_n} = \dfrac{(-1)^n}{q_{n+1}q_n}$, donc $|u_{n+1} - u_n| = \dfrac{1}{q_{n+1}q_n} \leqslant \dfrac{1}{n(n+1)}$ puisqu'on a vu plus haut que $q_n \geqslant n$.
6. Question supprimée.
7. En utilisant la relation de récurrence définissant p_n, on a $r_{n+2} = p_{2n+4} = a_{2n+4}p_{2n+3} + p_{2n+2} = p_{2n+3} + p_{2n+2}$ puisque $a_{2n+4} = 1$. On a donc $r_{n+2} = a_{2n+3}p_{2n+2} + p_{2n+1} + p_{2n+2} = 3p_{2n+2} + p_{2n+1}$. Or, $p_{2n+2} = p_{2n+1} + p_{2n}$, donc $p_{2n+1} = p_{2n+2} - p_{2n}$, donc $r_{n+2} = 4p_{2n+2} - p_{2n} = 4r_{n+1} - r_n$.
8. La suite (r_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique $x^2 - 4x + 1 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 16 - 4 = 12$, et admet donc deux racines $r = \dfrac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}$, et $s = \dfrac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$. On peut donc écrire $r_n = \alpha(2+\sqrt{3})^n + \beta(2-\sqrt{3})^n$, avec $r_0 = p_0 = 1 = \alpha + \beta$, et $r_1 = p_2 = 5 = \alpha(2+\sqrt{3}) + \beta(2-\sqrt{3})$. On a donc $\beta = 1 - \alpha$, et $5 = (2+\sqrt{3})\alpha + 2 - \sqrt{3} - (2-\sqrt{3})\alpha$, soit $2\sqrt{3}\alpha = 3 + \sqrt{3}$, et $\alpha = \dfrac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$. Ensuite,

$\beta = 1 - \alpha = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$. Finalement, $p_{2n} = r_n = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}(2+\sqrt{3})^n + \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}(2-\sqrt{3})^n$.

9. En posant $s_n = q_{2n}$, la suite (s_n) vérifie la même relation de récurrence linéaire que (r_n) (puisque (p_n) et (q_n) vérifient elles-mêmes la même relation de récurrence double), donc $s_n = \gamma(2+\sqrt{3})^n + \delta(2-\sqrt{3})^n$, avec $q_0 = 1 = \gamma + \delta$, et $q_2 = 3 = \gamma(2+\sqrt{3}) + \delta(2-\sqrt{3})$. Des calculs similaires à ceux de la question précédente donnent $\gamma = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$ et $\delta = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}$, soit $q_{2n} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(2+\sqrt{3})^n + \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})^n$.

10. On sait que $u_{2n} = \dfrac{p_{2n}}{q_{2n}}$. Or, comme $2+\sqrt{3} > 1$, et $0 < 2-\sqrt{3} < 1$, on aura $p_{2n} \sim \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}(2+\sqrt{3})^n$, et $q_n \sim \dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(2+\sqrt{3})^n$. Après une jolie simplification, cela donne $u_{2n} \sim \sqrt{3}$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \sqrt{3}$. Comme on sait que la suite (u_n) est convergente, sa limite est nécessairement la même que celle de (u_{2n}), d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{3}$.

Feuille d'exercices n°11 : Limites et continuité

PTSI B Lycée Eiffel

8 février 2013

Exercice 1 (* à ***)

Calculer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^3-4x^2+x-2}{x^2-4}$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} e^x \sin(e^{-x})$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{\ln(e^x+1)}$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+x-1} - x\sqrt{x}$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^{\ln(x)}}{(\ln(x))^x}$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\cos(x+x^2-1)}{x}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\arccos(x)-\frac{\pi}{2}}$
- $\lim\limits_{x\to 0} x\, Ent\left(\dfrac{1}{x}\right)$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-Ent(x)}{\sqrt{|x|}}$
- $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^3-3x-2}$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\mathrm{Argsh}(x)}{\ln(x)}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2}{\sin^2(x)} - \dfrac{1}{1-\cos(x)}$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} \ln(x)\ln(\ln(x))$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{x+1} - (x+1)^x$
- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{(\sqrt{x}-1)\ln(x)}$

Exercice 2 (** à ***)

Déterminer des équivalents des fonctions suivantes :

1. $\dfrac{\ln(1+\tan(x))}{\sqrt{\sin(x)}}$ en 0
2. $\dfrac{\sqrt{x^3+1}}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ en $+\infty$
3. $\ln(\cos(x))$ en 0
4. $(x+1)^x - x^x$ en 0
5. $\sqrt{\ln(x+1)-\ln(x)}$ en $+\infty$
6. $\dfrac{1}{\cos(x)} - \tan(x)$ en $\dfrac{\pi}{2}$
7. $x^{x^{\frac{1}{x}}} - x$ en $+\infty$ et en 0
8. $\dfrac{\ln(x^2+1)-\ln(2x^2+1)}{\ln(x^3+1)-\ln(x^3-1)}$

Exercice 3 (** à ***)

Étudier la continuité et les possibilités de prolongement par continuité des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{e^x-1}{x}$
2. $f(x) = \dfrac{1-x}{1-x^2}$

3. $f(x) = \dfrac{x^2 \ln(x)}{\sin(x)}$
4. $f(x) = Ent(x) + \sqrt{x - Ent(x)}$
5. $f(x) = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{3}{(x-1)^2}$
6. $f(x) = e^{\frac{1}{1-x}} + 2x - 3$
7. $f(x) = \dfrac{x \ln x}{x+1}$
8. $f(x) = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \dfrac{x^n}{n!}$

Exercice 4 (***)

On considère la fonction f définie par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x > 0$, et $f(x) = 0$ si $x \leqslant 0$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$. Calculer sa dérivée et montrer qu'elle est aussi continue. Faire de même avec la dérivée seconde. Pour les motivés : prouver que, quel que soit l'entier $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ème de la fonction f est continue.

Exercice 5 (*)

Soit f une fonction k-Lipschitzienne avec $k < 1$, telle que $f(0) = 0$. Démontrer que toute suite vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ a pour limite 0.

Exercice 6 (** à ***)

Déterminer toutes les fonctions vérifiant les conditions suivantes :

1. f est continue en 0 et en 1 et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(x^2)$.
2. f est continue sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f\left(\dfrac{x+1}{2}\right) = f(x)$.
3. f est continue sur $\mathbb{R}$, $f(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = f(x)\cos(x)$.
4. f est continue sur $\mathbb{R}$ et $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = \dfrac{1}{2}(f(x)+f(y))$ (on commencera par prouver que, si $f(0) = f(1) = 0$, f est périodique, et nulle).

Exercice 7 (*)

Montrer que les seules fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$ sont les fonctions constantes.

Exercice 8 (***)

Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ vérifiant $f(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe un réel x tel que $f\left(x + \dfrac{1}{2}\right) = f(x)$. Généraliser en prouvant qu'on peut toujours trouver un x tel que $f\left(x + \dfrac{1}{n}\right) = f(x)$, pour tout entier $n \geqslant 2$.

Corrigé de la feuille d'exercices n°11

Exercice 1 (* à ***)

Puisque les techniques sont les mêmes que pour les suites, les calculs seront menés le plus succintement possible, en faisant notamment un usage efficace des équivalents si nécessaire.

- $\dfrac{2x^3-4x^2+x-2}{x^2-4} = \dfrac{2x^2(x-2)+x-2}{(x-2)(x+2)} = \dfrac{2x^2+1}{x+2}$ si $x \neq 2$. On en déduit aisément que $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^3-4x^2+x-2}{x^2-4} = \dfrac{9}{4}$.
- Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, $e^x \sin(e^{-x}) \underset{+\infty}{\sim} e^x e^{-x} \sim 1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x \sin(e^{-x}) = 1$.
- On ne peut malheureusement pas mettre d'équivalent dans un ln, mais en fatorisant par e^x dans le ln, $\dfrac{x^2}{\ln(e^x+1)} = \dfrac{x^2}{x+\ln(1+e^{-x})} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{x} \sim x$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{\ln(e^x+1)} = +\infty$.
- Quantité conjuguée complètement superflue ici : $\sqrt{x^2+x-1} - x\sqrt{x} \underset{+\infty}{\sim} -x^{\frac{3}{2}}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x-1} - x\sqrt{x} = -\infty$.
- $\dfrac{x^{\ln(x)}}{(\ln(x))^x} = e^{\ln^2(x) - x\ln(\ln(x))}$. Or, $\ln^2(x) - x\ln(\ln(x)) \underset{+\infty}{\sim} -x\ln(\ln(x))$ par croissance comparée, donc ce qui est dans l'exponentielle tend vers $-\infty$. Du coup, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{\ln(x)}}{(\ln(x))^x} = 0$.
- L'encadrement $-\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{\cos(x+x^2-1)}{x} \leqslant \dfrac{1}{x}$ suffit à conclure par le théorème des gendarmes que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos(x+x^2-1)}{x} = 0$.
- On reconnait ici l'inverse du taux d'accroissement de la fonction arccos en 0 : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\arccos(x)-\arccos(0)}{x-0} = \arccos'(0) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-0}} = -1$. Comme $\arccos(0) = \dfrac{\pi}{2}$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\arccos(x)-\frac{\pi}{2}} = \dfrac{1}{1} = 1$.
- Encore une histoire d'encadrement : $\dfrac{1}{x} - 1 < Ent\left(\dfrac{1}{x}\right) \leqslant \dfrac{1}{x}$, donc $1 - x \leqslant x\,Ent\left(\dfrac{1}{x}\right) \leqslant 1$ si $x \geqslant 0$ (sinon, l'encadrement est le même mais avec les inégalités dans l'autre sens). Dans les deux cas, les deux membres extrêmes de l'encadrement ont pour limite 1 en 0, donc $\lim\limits_{x\to 0} x\,Ent\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1$.
- On écrit $x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(x)}{x}}$ et on conclut immédiatement à l'aide de la croissance comparée que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$.
- Si $x \in [0;1[$, $x - Ent(x) = x$, donc $\dfrac{x-Ent(x)}{\sqrt{|x|}} = \dfrac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x-Ent(x)}{\sqrt{|x|}} = 0$. De l'autre côté, sur $[-1;1[$, $x - Ent(x) = x-1$, donc $\dfrac{x-Ent(x)}{\sqrt{|x|}} = \dfrac{x-1}{\sqrt{-x}}$, qui tend vers $-\infty$ en 0^-. Il n'y a donc pas de limite en 0.
- Encore un coup où -1 est racine du numérateur et du dénominateur. Le numérateur a pour autre racine évidente 1, et le produit des racines vaut 1, donc -1 est en fait racine double et le numérateur se factorise en $(x-1)(x+1)^2$. Lé dénominateur se factorise sous la forme $(x+1)(ax^2+bx+c) = ax^3+(a+b)x^2+(b+c)x+c$; par identification très facile, $a=1$, $b=-1$ et $c=-2$, donc $\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^3-3x-2} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x^2-x-2} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \dfrac{x-1}{x-2}$ si $x \neq -1$. Suffisant pour conclure que $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^3-3x-2} = \dfrac{2}{3}$.

- Encore du boulot pour le passage à l'exponentielle : $\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{(\ln(\ln(x))-\ln(x))/x}$. Tout ce qui est dans l'exponentielle tend vers 0 par croissance comparée, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = 1$.
- Le plus simple est encore d'utiliser le fait que $\text{Argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, donc $\dfrac{\text{Argsh}(x)}{\ln(x)} = \dfrac{\ln(x(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}))}{\ln(x)} = 1 + o(1)$. La limite recherchée vaut donc 1. Si on ne connait pas la formule (hors programme) utilisée pour ce calcul, il faut réussir à expliquer pourquoi le fait que $\sinh(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{2}$ implique que $\text{Argsh}(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(2x)$ (sachant que $\ln(2x)$ est la réciproque de $\dfrac{e^x}{2}$), mais ce n'est pas si facile que ça.
- On peut écrire $\dfrac{2}{\sin^2(x)} - \dfrac{1}{1-\cos(x)} = \dfrac{2}{1-\cos^2(x)} - \dfrac{1}{1-\cos(x)} = \dfrac{2-(1+\cos(x))}{(1-\cos(x))(1+\cos(x))} = \dfrac{1}{1+\cos(x)}$. Même pas besoin d'équivalent pour en déduire que $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{2}{\sin^2(x)} - \dfrac{1}{1-\cos(x)} = \dfrac{1}{2}$. D'ailleurs, si on essaye d'utiliser les équivalents, on ne s'en sort pas puisque $\dfrac{2}{\sin^2(x)} \underset{0}{\sim} \dfrac{2}{x^2}$, et $\dfrac{1}{1-\cos(x)} \underset{0}{\sim} \dfrac{2}{x^2}$, ce dont on ne peut rien déduire.
- Il suffit ici de poser $X = \ln(x)$. Quand x tend vers 1, X tend vers 0, et $\ln(x)\ln(\ln(x)) = X\ln(X)$. Comme on sait, par croissance comparée, que $\lim\limits_{X\to0} X\ln(X) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to1} \ln(x)\ln(\ln(x)) = 0$.
- Quantité conjuguée : $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x} = \dfrac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+o(\sqrt{x})+\sqrt{x}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \sim \dfrac{1}{2}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x} = \dfrac{1}{2}$.
- $x^{x+1} - (x+1)^x = x^x\left(x - \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right)$. Or, $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}$, et $x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} x \times \dfrac{1}{x} \sim 1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e^1 = e$. Finalement $\underset{+\infty}{x}{}^{x+1} - (x+1)^x \underset{+\infty}{\sim} x^x \times x \sim x^{x+1}$. En particulier, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{x+1} - (x+1)^x = +\infty$.
- $\dfrac{x^2-1}{(\sqrt{x}-1)\ln(x)} = \dfrac{(x+1)(x-1)}{(\sqrt{x}-1)\ln(x)} = \dfrac{(x+1)(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)\ln(x)}$. Or, $\ln(x) = \ln(1+x-1) \underset{x\to1}{x} -1$ puisque $\lim\limits_{x\to1} x-1 = 0$. Finalement, $\dfrac{x^2-1}{(\sqrt{x}-1)\ln(x)} \underset{x\to1}{\sim} \dfrac{4}{x-1}$, donc $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{x^2-1}{(\sqrt{x}-1)\ln(x)} = -\infty$, et $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x^2-1}{(\sqrt{x}-1)\ln(x)} = +\infty$.

Exercice 2 (** à ***)

1. $\dfrac{\ln(1+\tan(x))}{\sqrt{\sin(x)}} \underset{0}{\sim} \dfrac{\tan(x)}{\sqrt{x}} \sim \dfrac{x}{\sqrt{x}} \sim \sqrt{x}$ (en utilisant simplement le fait que $\lim\limits_{x\to0} \tan(x) = 0$ pour la première étape).
2. $\dfrac{\sqrt{x^3+1}}{\sqrt[3]{x^2-1}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{2}{3}}} \sim x^{\frac{5}{6}}$.
3. $\ln(\cos(x)) = \ln(1+\cos(x)-1) \underset{0}{\sim} \cos(x) - 1 \sim -\dfrac{x^2}{2}$ (on a utilisé que $\lim\limits_{x\to0} \cos(x) - 1 = 0$ pour

le premier équivalent, le second est dans le cours).

4. $(x+1)^x - x^x = x^x\left(\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x - 1\right) = x^x(e^{x\ln(1+\frac{1}{x})} - 1)$. Or, $x^x = e^{x\ln(x)}$ a pour limite 1 en 0 puisque, par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$. Et $x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ a également pour limite 0 car $\ln(1+X) \underset{+\infty}{\sim} \ln(X)$, donc $x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \underset{0}{\sim} x\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) \sim -x\ln(x)$. On peut donc appliquer l'équivalent classique pour $e^u - 1$ en 0 à $u = x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ pour obtenir finalement que $(x+1)^x - x^x \underset{0}{\sim} -x\ln(x)$.

5. $\sqrt{\ln(x+1)-\ln(x)} = \sqrt{\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)} = \sqrt{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{1}{x}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

6. $\dfrac{1}{\cos(x)} - \tan(x) = \dfrac{1-\sin(x)}{\cos(x)}$. Or, $\cos(x) = -\sin\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) \underset{\frac{\pi}{2}}{\sim} \dfrac{\pi}{2} - x$ puisque $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} x - \dfrac{\pi}{2} = 0$; et $1-\sin(x) = 1-\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right) \underset{\frac{\pi}{2}}{\sim} \dfrac{(x-\frac{\pi}{2})^2}{2}$. Finalement, $\dfrac{1}{\cos(x)} - \tan(x) \underset{\frac{\pi}{2}}{\sim} \dfrac{\frac{\pi}{2}-x}{2} \sim \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}$ (en particulier, la fonction a une limite nulle en $\dfrac{\pi}{2}$, ce qui est très loin d'être évident a priori).

7. En 0, utilisons que $x^{x^{\frac{1}{x}}} = x^{e^{\frac{\ln(x)}{x}}} = e^{e^{\frac{\ln(x)}{x}}\ln(x)}$. Or, $e^{\frac{\ln(x)}{x}}$ est certainement plus petit (et même négligeable, mais on n'en a pas besoin) devant $e^{\ln(x)} = x$, donc, comme $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\ln(x)}{x}}\ln(x) = 0$, et $\lim\limits_{x\to 0} x^{x^{\frac{1}{x}}} = 1$. On a donc simplement $x^{x^{\frac{1}{x}}} - x \underset{0}{\sim} 1$.
En $+\infty$, il vaut mieux s'y prendre autrement : $x^{x^{\frac{1}{x}}} - x = x(x^{x^{\frac{1}{x}}-1} - 1) = x(e^{e^{\frac{\ln(x)}{x}}-1}\ln(x) - 1)$. Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$, donc on peut écrire $e^{\frac{\ln(x)}{x}} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(x)}{x}$, et $e^{\frac{\ln(x)}{x}-1}\ln(x) \sim \dfrac{\ln^2(x)}{x}$, qui a également pour limite 0 en $+\infty$. On peut donc utiliser une seconde fois l'équivalent classique de l'exponentielle : $e^{e^{\frac{\ln(x)}{x}-1}\ln(x)} - 1 \underset{+\infty}{\sim} e^{\frac{\ln(x)}{x}-1}\ln(x) \sim \dfrac{\ln^2(x)}{x}$. Il ne reste plus qu'à multiplier le tout par x pour obtenir $x^{x^{\frac{1}{x}}} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \ln^2(x)$.

8. Puisque l'énoncé a oublié de préciser où il fallait trouver un équivalent, regardons ce qui se passe en $+\infty$: $\dfrac{\ln(x^2+1)-\ln(2x^2+1)}{\ln(x^3+1)-\ln(x^3-1)} = \dfrac{\ln(\frac{x^2+1}{2x^2+1})}{\ln(\frac{x^3+1}{x^3-1})} = \dfrac{\ln(\frac{1}{2}+o(1))}{\ln(1+\frac{2}{x^3-1})} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{-\ln(2)}{\frac{2}{x^3-1}} \sim -\dfrac{\ln(2)}{2}x^3$.

Exercice 3 (** à ***)

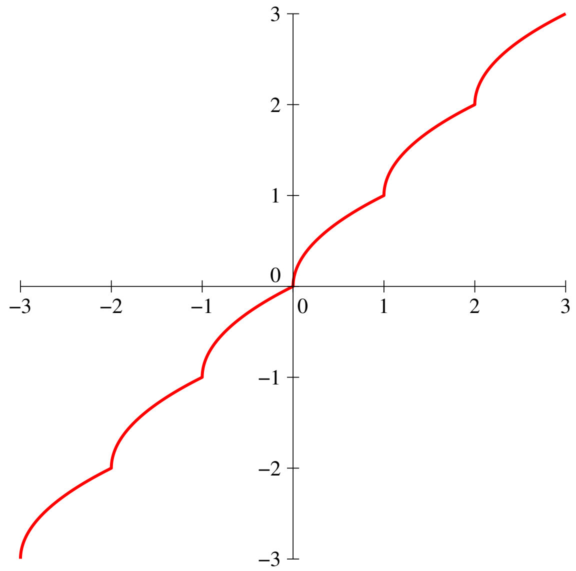
1. La fonction f est évidemment définie et continue sur $\mathbb{R}^*$. En 0, un équivalent classique du cours permet d'affirmer que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, donc f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$ en posant $f(0) = 1$.

2. La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$. Quand x tend vers -1, le numérateur de f tend vers 2 et le dénominateur vers 0, on ne peut pas avoir de limite finie, et donc pas de prolongement par continuer. Par contre, $f(x) = \dfrac{1-x}{(1-x)(1+x)} = \dfrac{1}{1+x}$ si $x \neq 1$, donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \dfrac{1}{2}$, et f est prolongeable par continuité en posant $f(1) = \dfrac{1}{2}$.

3. La fonction f est définie et continue sur tous les intervalle de la forme $]k\pi;(k+1)\pi[$, pour $k \in \mathbb{N}$. Si $k \neq 0$, $(k\pi)^2\ln(k\pi)$ est une constante non nulle, donc la fonction f ne peut pas avoir de limite finie en $k\pi$ (en l'occurence, elle tend vers $+\infty$ à gauche et $-\infty$ à droite si k est

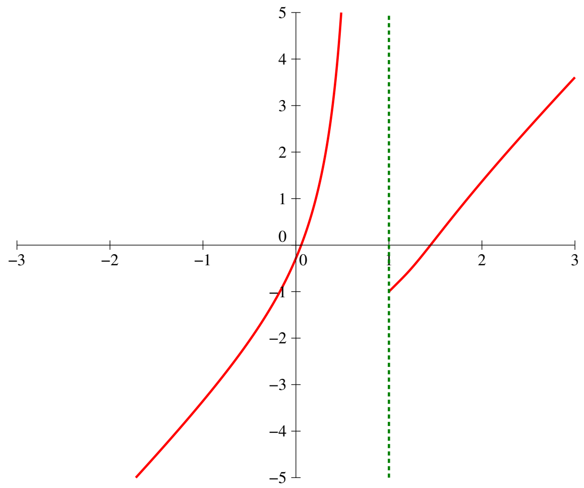
impair, et le contraire si k est pair, à cause du signe de $\sin(x)$ au voisinage de $k\pi$). Par contre, $\dfrac{x^2\ln(x)}{\sin(x)} \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2\ln(x)}{x} \sim x\ln(x)$, donc par croissance comparée $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, ce qui permet de prolonger par continuité en posant $f(0) = 0$.

4. La fonction f est définie et continue sur tous les intervalles de la forme $]n; n+1[$, pour $n \in \mathbb{Z}$. On peut même ajouter, pusique la fonction partie entière est continue à droite en chaque entier, que $\lim\limits_{x\to n^+} f(x) = f(n) = n + \sqrt{n-n} = n$. Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to n^-} Ent(x) = n-1$, donc $\lim\limits_{x\to n^-} f(x) = n - 1 + \sqrt{n-(n-1)} = n - 1 + 1 = n$. Finalement, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ (pas be soin de prolonger quoi que ce soit ici, la fonction f est déjà définie sur $\mathbb{R}$). Une allure de la courbe :



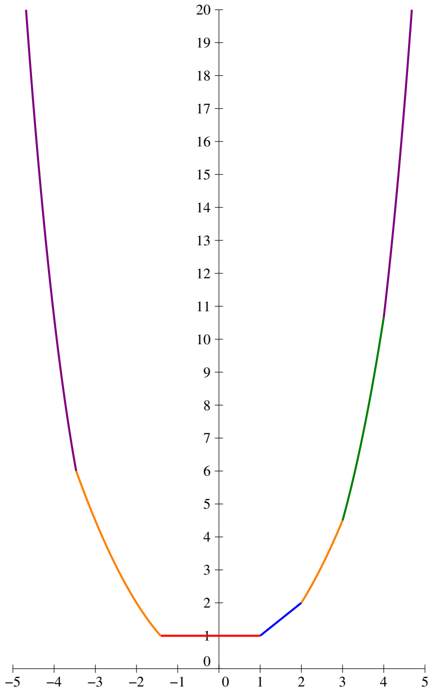
5. La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$. En 1, on peut écrire $f(x) = \dfrac{x-1-3}{(x-1)^2} = \dfrac{x-4}{(x-1)^2}$. Le dénominateur étant non nul quand $x = 1$, pas de limite finie en vue, et donc pas de prolongement par continuité.

6. Cette drôle de fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$. Comme $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{1-x} = +\infty$, on aura $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$, donc pas de prolongement possible. Pourtant, $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{1-x} = -\infty$, et par conséquent $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -1$. On est en présence d'un cas assez rare : la fonction est prolongeable « par continuité à droite » en posant $f(1) = -1$. Une allure de la courbe :



7. La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$, et prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$ (croissance comparée). L'énoncé serait plus intéressant avec $g(x) = \dfrac{x\ln(x)}{x-1}$, qui est définie et continue sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$, et prolongeable en 0 (même raisonnement que pour f) mais aussi en 1 en posant $g(1) = 1$, à cause de l'équivalent classique $\ln(x) \underset{1}{\sim} x - 1$.

8. En fait, cette fonction extrêmement étrange n'est pas si affreuse que ça à étudier, puisqu'on peut l'expliciter intervalle par intervalle. Regardons d'abord ce qui se passe sur $\mathbb{R}_+$, et notons $f_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} - \dfrac{x^n}{n!}$. On constate que $f'n(x) = \dfrac{x^n}{n!} - \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} = f_{n-1}(x)$. Par ailleurs, $f_n(x) = 0 \Leftrightarrow n!x^{n+1} = (n+1)!x^n$, ce qui se produit lorsque $x = 0$ ou $x = \dfrac{(n+1)!}{n!} = n+1$. La fonction f_n est donc décroissante sur $[0;n]$ et croissante sur $[n;+\infty]$, et surtout négative sur $[0;n+1]$ puisque'elle y est décroissante puis croissante et s'annule en 0 et en $n+1$, et positive sur $[n+1;+\infty[$. On déduit de ces constations que, sur l'intervalle $[0;1]$, $\dfrac{x^0}{0!} \geqslant \dfrac{x^1}{1!} \geqslant \dfrac{x^2}{2!}$ etc, donc $f(x) = \dfrac{x^0}{0!} = 1$. Sur $[1;2]$, $\dfrac{x^0}{0!} \leqslant \dfrac{x^1}{1!}$, mais $\dfrac{x^1}{1!} \geqslant \dfrac{x^2}{2!}$ etc, donc $f(x) = \dfrac{x^1}{1!} = x$. De même, sur chaque intervalle de la forme $[n;n+1]$, $f(x) = \dfrac{x^n}{n!}$. Toutes ces fonctions étant continues, et les changements de fonction s'effectuant à des points d'intersection de deux courbes de fonctions continues, la focntion f sera continue sur $\mathbb{R}^+$. Sur $\mathbb{R}^-$, c'est extrêmement similaire, la seule différence étant due au fait que les entiers impairs sont à oublier puisque $\dfrac{x^n}{n!}$ prend des valeurs négatives sur $\mathbb{R}^-$ lorsque n est impair. Voici un bout de la courbe de la fonction f (les morceaux correspondant à des valeurs de n différentes sont de différentes couleurs) :



Exercice 4 (***)

Seul 0 peut poser un problème de continuité à droite. Or, $\lim_{x \to 0^+} -\frac{1}{x^2} = -\infty$, donc $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$, et f est bien continue en 0. De plus, $\forall x > 0$, $f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$. Posons $X = \frac{1}{x}$, on a lors $f'(x) = 2X^3 e^{-X^2}$, qui par croissance comparée a pour limite 0 en $+\infty$, donc f' est également continue en 0. On fait le même type de calcul pour f'' : $\forall x > 0$, $f''(x) = \left(\frac{6}{x^4} + \frac{4}{x^6} \right) e^{-\frac{1}{x^2}}$, qui a également pour limite 0 en 0.

Pour les dérivées ultérieures, le principe est le même, mais pour tout traiter d'un seul coup, il est nécessaire d'effectuer une récurrence pour prouver que la n-ième dérivée de la fonction f (sur $]0; +\infty[$) peut s'écrire sous la forme $\frac{P_n(x)}{x^{a_n}} e^{-\frac{1}{x^2}}$, où a_n est un entier naturel et P_n est un polynome. C'est vrai pour $n = 1$ et même $n = 2$ d'après les calculs précédents. Supposons désormais que $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{a_n}} e^{-\frac{1}{x^2}}$. On peut dériver cette fonction sur $]0; +\infty[$ et obtenir $\frac{x^{a_n} P_n'(x) - a_n n x^{a_n n - 1} P_n(x)}{x^{2a_n}} e^{-\frac{1}{x^2}} - \frac{2P_n(x)}{x^{a_n+3}} e^{-\frac{1}{x^2}}$. Ceci est bien de la forme voulue, ce qui achève la récurrence. Or, un quotient de polynomes multiplié par $e^{-\frac{1}{x^2}}$ a toujours pour limite 0 en 0 (toujours de la croissance comparée), donc la dérivée n-ième de f est continue en 0.

Exercice 5 (*)

Puisque f est k-Lipschitzienne, en prenant $x = u_n$ et $y = 0$ dans la définition, on aura, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f(u_n) - f(0)| \leqslant k|u_n - 0|$, soit $|u_{n+1}|$‘$k|u_n|$. Par une récurrence immédiate, on déduit que $|u_n| \leqslant k^n |u_0|$. Or, comme $k < 1$, $\lim_{n \to +\infty} k^n |u_0| = 0$, et le théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Exercice 6 (** à ***)

1. Par une récurrence facile, si $f(x) = f(x^2)$, on aura, pour tout entier naturel n, $f(x) = f(x^{2^n})$. En effet, c'est vrai pour $n = 1$ (et même $n = 0$), et si on le suppose vrai pour un entier n, alors $f(x) = f(x^{2^n}) = f((x^{2^n})^2) = f(x^{2^{n+1}})$. Si $x \in [0;1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{2^n} = 0$ (mettez sous forme exponentielle si ça ne vous semble pas clair), donc par continuité de f en 0, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x^{2^n}) = f(0)$. Comme la suite $(f(x^{2^n}))$ est constante égale à $f(x)$, on en déduit que $\forall x \in [0;1[\,;, f(x) = f(0)$. La fonction f est donc constate sur $[0;1[$. En particulier, $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = f(0)$, donc, par continuité de f en 1, $f(1) = f(0)$. Occupons-nous maintenant des réels strictement supérieurs à 1. On ne peut pas appliquer le même raisonnement que ci-dessus, mais par contre on constate que $f(x^{\frac{1}{2^n}}) = f(x)$ pour tout entier n, en appliquant simplement la remarque initiale à $x^{\frac{1}{2^n}}$. Cette fois-ci, $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{\frac{1}{2^n}} = 1$ (puisque $x^{\frac{1}{2^n}} = e^{\frac{\ln(x)}{2^n}}$, qui tend vers $e^0 = 1$), et on conclut comme tout à l'heure que $f(x) = f(1) = f(0)$. La fonction f est donc constante sur $\mathbb{R}_+$. Et sur $\mathbb{R}^-$? Si $x \leqslant 0$, $x^2 \geqslant 0$, donc $f(x) = f(x^2) = f(0)$. Finalement, la fonction f est constante. Réciproquement, toute fonction constante est évidemment solution du problème posé.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$ et (u_n) la suite récurrente définie par $u_0 = x$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2}$. Par une récurrence immédiate, on aura toujours $f(u_n) = f(x)$ (en effet, c'est vrai pour u_0 et $f(u_{n+1}) = f\left(\dfrac{u_n+1}{2}\right) = f(u_n)$). Étudions donc le comportement de la suite (u_n). Pour cela, on pose $g(x) = \dfrac{x+1}{2}$, qui est une fonction affine strictement croissante admettant un unique point fixe $x = 1$. De plus, $g(x) - x \leqslant 0$ si $x \geqslant 1$, et $g(x) - x \geqslant 0$ si $x \leqslant 1$. Si $x \geqslant 1$, on prouve par une récurrence immédiate que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$, et la suite étant décroissante, elle va nécessairement converger vers l'unique point fixe de la fonction, à savoir 1. De même, si $x \leqslant 1$, la suite est croissante majorée par 1, et converge vers 1. Dans tous les cas, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$, donc par continuité de la fonction f, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(1)$. La suite $(f(u_n))$ étant constante égale à $f(x)$, on en déduit que $f(x) = f(1)$. La fonction f est donc constante. Réciproquement, les fonctions constantes sont solutions triviales du problème posé.

3. Comme dans les autres problèmes de cet exercice, il faut essayer d'itérer l'équation donnéen, en divisant par 2 plutôt qu'en multipliant (car c'est plus pratique pour trouver des limites) : $f(x) = f\left(\dfrac{x}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x}{2}\right) = f\left(\dfrac{x}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x}{4}\right)\cos\left(\dfrac{x}{2}\right) = f\left(\dfrac{x}{8}\right)\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x}{4}\right)\cos\left(\dfrac{x}{8}\right)$ etc. Une récurrence simple permet de prouver que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x) = f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\dfrac{x}{2^k}\right)$: c'est vrai au rang 0 puisque la condition est alors $f(x) = f(x)$, et si on le suppose au rang n, il suffit de remplacer le $f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$ par $f\left(\dfrac{x}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\dfrac{x}{2^{n+1}}\right)$ pour obtenir la relation au rang $n+1$. reste l'astuce diabolique du jour : tout multiplier par $\sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$. En effet, $\sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\dfrac{x}{2^k}\right) = \dfrac{\sin(x)}{2^n}$. Si ça ne vous semble pas clair c'est que vous avez du oublier la formule de duplication $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$. Allez, prouvons-le quand même par récurrence : au rang 0, $\sin(x) = \sin(x)$ est vrai. Supposons la formule vrai au rang n, alors $\sin\left(\dfrac{x}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\dfrac{x}{2^{n+1}}\right) = \dfrac{1}{2}\sin\left(2 \times \dfrac{1}{2^{n+1}}\right) = \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$. Ne reste plus qu'à appliquer l'hypothèse de récurrence pour trouver $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{\sin(x)}{2^n} = \dfrac{\sin(x)}{2^{n+1}}$. Bref, après ces calculs fantastiquement élémentaires, il nous reste la relation $\sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)f(x) = \dfrac{\sin(x)}{2^n}f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$. Considérons un $x \neq 0$, alors à partir d'un certain rang $\sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right) \neq 0$, et on peut écrire $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{2^n\sin(\frac{x}{2^n})}f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$. Il

ne reste plus qu'à faire gentiment tendre n vers $+\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{x}{2^n} = 0$, donc par continuité $\lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(0) = 1$; et $\frac{1}{2^n \sin(\frac{x}{2^n})} \sim \frac{1}{2^n \times \frac{x}{2^n}} \sim \frac{1}{x}$. Finalement, la limite du tout quand n tend vers $+\infty$ vaut $\frac{\sin(x)}{x}$. Puisque la suite est constante, on en déduit que $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ (prolongée par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$). On vérifie aisément que cette fonction est solution : $f(x)\cos(x) = \frac{\sin(x)\cos(x)}{x} = \frac{\sin(2x)}{2x} = f(2x)$.

4. Supposons donc $f(0) = f(1) = 0$. La fonction f est alors impaire puisque $f(x) + f(-x) = 2f\left(\frac{x-x}{2}\right) = 2f(0) = 0$. Par ailleurs, en prenant $y = 2-x$ (pourquoi pas ?), on constante que $f(x)+f(2-x) = 2f\left(\frac{x+2-x}{2}\right) = 2f(1) = 0$, donc $f(x) = -f(2-x) = f(x-2)$. Ceci prouve que la fonction f est 2-périodique. Or, une fonction périodique et continue est nécessairement bornée. En effet, ici, f est sûrement bornée sur $[0;2]$ puisque l'image d'un segment par une fonction continue est un segment, et f reprend ensuite les mêmes valeurs que sur $[0;2]$, donc les bornes restent valables sur $\mathbb{R}$. or, si la fonction n'était pas nulle, il existerait certainement un x tel que $f(x) > 0$ (puisque f est impaire). La relation initiale implique, en prenant $x = y$, que $f(x) = \frac{1}{2}f(2x)$, ou si on préfère que $f(2x) = 2f(x)$. Par une récurrence facile, on prouve alors que, pour tout entier n, $f(2^n x) = 2^n f(x)$. En effet, c'est vrai au rang 0, et en le supposant au rang n, $f(2^{n+1}x) = f(2\times 2^n x) = 2f(2^n x) = 2\times 2^n f(x) = 2^{n+1}f(x)$. En appliquant ceci à notre x dont l'image est strictement positive, on obtiendra $\lim_{n\to+\infty} f(2^n x) = \lim_{n\to+\infty} 2^n f(x) = +\infty$, ce qui est très contradictoire avec le fait que la fonction f est bornée. La fonction f est donc nécessairement nulle.

   Passons au cas général, et posons $b = f(0)$ et $a = f(1) - f(0)$. La fonction $g : x \mapsto f(x) - ax - b$ vérifie les hypothèses du cas particulier précédent : $g(0) = f(0) - b = 0$; $g(1) = f(1) - (f(1) - f(0)) - f(0) = 0$, et $g\left(\frac{x+y}{2}\right) = f\left(\frac{x+y}{2}\right) - a\left(\frac{x+y}{2}\right) - b = \frac{1}{2}(f(x)+f(y)) - \frac{1}{2}(ax+ay) - \frac{1}{2}(b+b) = \frac{1}{2}(g(x)+g(y))$. La fonction g est donc nulle. Autrement dit, $f(x) = ax+b$, c'est-à-dire que f est une fonction affine. Réciproquement, toutes les fonctions affines sont solutions du problème posé (on l'a déjà vérifié sans le dire en faisant le petit calcul pour g).

Exercice 7 (*)

Supposons par l'absurde que f soit une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$, et que f ne soit pas constante. Autrement dit, on peut trouver deux réels x et y tels que $f(x) = n$ et $f(y) = p$, avec $n \neq p$. Mais alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, tout réel compris entre n et p admet des antécédents par la fonction f. Comme il existe certainement autre chose que des nombres entiers entre n et p, ce n'est pas possible.

Exercice 8 (***)

Dans le cas $n = 2$, on pose $g(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right) - f(x)$. La fonction g est définie sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, continue puisque f est supposée continue, et $g(0) = f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0)$ et $g(1) = f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right) = -g(0)$ puisque $f(1) = f(0)$. L'intervalle $[g(0); g(1)]$ (dans ce sens ou dans l'autre, on ne sait pas lequel des deux est le plus grand) contient donc certainement 0, et le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer l'existence d'un x tel que $g(x) = 0$, c'est-à-dire $f\left(x + \frac{1}{2}\right) = f(x)$.

Le cas général se traite plus ou moins de la même façon : on pose $g(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)$, g est continue sur $\left[0; \frac{n-1}{n}\right]$. Par ailleurs, $g(0) = f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)$; $g\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{2}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)$; ... ; $g\left(\frac{n-1}{n}\right) = f(1) - f\left(\frac{n-1}{n}\right)$. On constate que $\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) = f(1) - f(0) = 0$ après un beau télescopage. si la somme de ces n réels est nulle, il en existe nécessairement un positif (au sens large) et un négatif (au moins). On conclut comme précédemment : l'intervalle entre ces deux valeurs contient 0, donc 0 admet un antécédent par g, ce qui suffit à conclure.

TD n°8 : Matrices et systèmes.

PTSI B Lycée Eiffel

19 février 2013

Exercice 1

Calculer tous les produits possibles de deux matrices parmi les suivantes :
$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^2, A^3 et A^4. Conjecturer une formule pour A^n, puis prouver cette formule par récurrence.

Exercice 3

Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$. Y a-t-il plus de possibilités dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$?

Exercice 4

Résoudre les systèmes suivants :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 6 \\ 2x & + & y & - & 2z & = & -2 \\ -x & + & 3y & + & z & = & 8 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ 2x & - & y & - & z & = & -4 \\ -3x & + & 3y & + & 3z & = & 11 \end{array} \right.$$

Exercice 5

Résoudre le système suivant, en distinguant des cas selon les valeurs du paramètre m :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} (1-m)x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ -2x & - & (3+m)y & + & 3z & = & 0 \\ x & + & y & - & (2+m)z & = & 0 \end{array} \right.$$

Corrigé du TD n°8

Exercice 1

C'est du simple calcul, on obtient $AB = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -4 \\ -2 & -3 & 5 \\ -6 & -1 & 5 \end{pmatrix}$; $AD = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -6 & 5 \\ -7 & 0 \end{pmatrix}$; $BA = \begin{pmatrix} 12 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$; $BC = \begin{pmatrix} 8 & 14 & 4 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$; $CA = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 3 & -14 \\ -1 & -7 \end{pmatrix}$; et $DB = \begin{pmatrix} 14 & -1 & -5 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, ainsi que $C^2 = \begin{pmatrix} 4 & -12 & 10 \\ 0 & 22 & -3 \\ 0 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ et $D^2 = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

On calcule facilement $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, puis $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Soit en constatant que le dernier coefficient de la première ligne augmente de $n-1$ à chaque étape, ou en reconnaissant dans cette première ligne le début de la ligne numéro n du triangle de Pascal, on conjecture que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. il ne reste plus qu'à le prouver par récurrence. L'initialisation a largement été faite avec les premiers calculs, supposons donc la formule vrai au rang n, alors $A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+n & n+\frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & 1+n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec $n + \dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{n(2+n-1)}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2}$, ce qui prouve la formule au rang $n+1$ et achève la récurrence.

Exercice 3

Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ la matrice recherchée. On calcule $M = \begin{pmatrix} x^2+yz & xy+yt \\ zx+tz & yz+t^2 \end{pmatrix}$. On se retrouve donc devant le système suivant à résoudre : $\left\{ \begin{array}{rcrcr} x^2 & + & yz & = & -5 \\ xy & + & yt & = & -4 \\ zx & + & tz & = & 6 \\ yz & + & t^2 & = & -5 \end{array} \right.$

Inutile de chercher à résoudre ce système par des moyens classiques, en l'occurence un peu d'astuce permet de s'en sortir rapidement. La différence des équations extrêmes donne $x^2 - t^2 = 0$, c'est-à-dire que $x = t$ ou $x = -t$. La deuxième possibilité peut immédiatement être exclue, pusique les deux équation médianes deviennent alors $0 = -4$ et $0 = 6$, ce qui n'est pas très crédible. On en déduit que $t = x$, puis $y = -\dfrac{2}{x}$ et $z = \dfrac{3}{x}$ via les équations médianes (x ne peut pas être nul). En reportant dans la première équation, on a donc $x^2 - \dfrac{6}{x^2} = -5$, soit $x^4 + 5x^2 - 6 = 0$. Posons $X = x^2$, la trinôme $X^2 + 5X - 6$ a pour discriminant $\Delta = 25 + 24 = 49$ et admet deux racines $X_1 = \dfrac{-5+7}{2} = 1$ et $X_2 = \dfrac{-5-7}{2} = -6$. Si on reste dans $\mathbb{R}$, les seules possibilités sont $x = 1$ et $x = -1$, soit $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ ou $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, il y a deux solutions supplémentaires :

$$M = \begin{pmatrix} i\sqrt{6} & -\dfrac{2i}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{3i}{\sqrt{6}} & \dfrac{i}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} -i\sqrt{6} & \dfrac{2i}{\sqrt{6}} \\ -\dfrac{3i}{\sqrt{6}} & -\dfrac{i}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Exercice 4

Pour l'instant, on va résoudre par des méthodes type lycée, mais ça ne nous empêche pas d'essayer de faire des choses intelligentes quand même. Pour le premier système, on peut additionner les équation extrêmes pour obtenir $y + 4z = 14$, soit $y = 14 - 4z$. En reportant dans la première équation, on a donc $x = 6 + 2y - 3z = 6 + 28 - 8z - 3z = 34 - 11z$. Reportons tout dans la deuxième équation : $68 - 22z + 14 - 4z - 2z = -2$, soit $-28z = -84$, donc $z = 3$; puis $y = 14 - 12 = 2$ et enfin $x = 34 - 33 = 1$. Finalement, $\mathcal{S} = \{1; 2; 3\}$.

Pour le deuxième système, en additionnant les deux premières équations on a immédiatement $3x = -1$, soit $x = -\dfrac{1}{3}$. On reporte alors dans les deux dernières équations : $-y - z = -4 + \dfrac{2}{3} = -\dfrac{10}{3}$; et $3y + 3z = 11 - 1 = 10$. Les deux équations sont équivalentes, le système a donc une infinité de solution, de la forme $\mathcal{S} = \left\{\left(-\dfrac{1}{3}; y; \dfrac{10}{3} - y\right)\right\}$.

Exercice 5

Pour ce dernier système, je vais présenter les calculs sous forme de pivot :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} (1-m)x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ -2x & - & (3+m)y & + & 3z & = & 0 \\ x & + & y & - & (2+m)z & = & 0 \end{array}\right. \qquad L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & (2+m)z & = & 0 \\ -2x & - & (3+m)y & + & 3z & = & 0 \\ (1-m)x & + & 2y & - & z & = & 0 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{c} \\ L_2 \leftarrow 2L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow (1-m)L_1 - L_3 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} (1-m)x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ & & (-1-m)y & - & (1+2m)z & = & 0 \\ & & (-1-m)y & + & (1-(1-m)(2+m))z & = & 0 \end{array}\right.$$

En soustrayant les deux dernières équations, on obtient $(1 - (1-m)(2+m) + 1 + 2m)z = 0$, soit $(1 - 2 - m + 2m + m^2 + 1 + 2m)z = (m^2 + 3m)z = 0$. Si $m \neq 0$ et $m \neq -3$, on a donc $z = 0$. Ensuite, on a alors $y = 0$ si $m \neq -1$, puis $x = 0$. Il y a trois cas particuliers.

Pour $m = 0$, en gardant les deux premières équations du système triangulaire obtenu, on a

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ & & -y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$$

soit $y = -z$ puis $x = z - 2y = 3z$, donc $\mathcal{S} = \{(3z; -z; z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

Pour $m = -3$, en gardant ces mêmes équations, on a :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 4x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ & & 2y & + & 5z & = & 0 \end{array}\right.$$

soit $y = -\dfrac{5}{2}z$ puis $x = \dfrac{1}{4}(z - 2y) = \dfrac{3}{2}z$, donc $\mathcal{S} = \{(\frac{3}{2}z; -\frac{5}{2}z; z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

Enfin, quand $m = -1$, on a $z = 0$, c'est cette fois-ci la deuxième équation qui est toujours vérifiée, et la première devient $2x + 2y - z = 0$, soit $x = -y$, donc $\mathcal{S} = \{(-y; y; 0) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

Feuille d'exercices n°12 : Calcul matriciel.

PTSI B Lycée Eiffel

22 février 2013

Exercice 1 (*)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Déterminer toutes les matrices B dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AB = 0$.
2. Déterminer toutes les matrices C dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AC = CA = 0$.

Exercice 2 (* à **)

Déterminer toutes les matrices qui commutent avec chacune des matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; I_n ; $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer les matrices qui commutent avec toutes les matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer les matrices qui commutent avec toutes les matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 3 (*)

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le produit de deux matrices symétriques soit encore symétrique (très peu de calculs nécessaires).

Exercice 4 (**)

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $AB - BA = B$. Montrer que, $\forall k \in \mathbb{N}$, $AB^k - B^kA = kB^k$, et en déduire la valeur de $\mathrm{Tr}(B^k)$.

Exercice 5 (**)

On fixe A et B deux matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation $X + \mathrm{Tr}(X)A = B$, où X est une matrice inconnue dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 6 (***)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer un polynôme de degré 2 annulant la matrice A.
2. En déduire que A est inversible et calculer son inverse (sans faire le pivot de Gauss).

3. En utilisant les racines du polynôme trouvé à la question 1, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par ce polynôme, pour un entier $n \geqslant 2$.
4. En déduire la valeur de A^n.

Exercice 7 (**)

On considère dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice J dont tous les coefficients sont égaux à 1. Calculer J^2 puis déterminer les puissances de matrice J. En déduire, à l'aide de la formule du binôme de Newton, les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 8 (**)

Déterminer les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ (au moins deux méthodes possibles).

Exercice 9 (***)

Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & -4 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^3 = 6A - A^2$.
2. Montrer qu'il existe deux suites a_k et b_k telles que $A^k = a_k A^2 + b_k A$ (pour $k \geqslant 2$).
3. Trouver des relations de récurrence pour a_k et b_k et en déduire leurs valeurs.
4. En déduire l'expression de A^k. Reste-t-elle valable pour $k = 0$ et pour $k = 1$?

Exercice 10 (**)

Montrer que l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{pmatrix}$, avec $a \in \mathbb{R}^*$, est un groupe multiplicatif.

Exercice 11 (**)

En notant $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E = \{aI_2 + bJ \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$, montrer que l'application définie sur $\mathbb{C}$ par $z = a + ib \mapsto aI_2 + bJ$ est un isomorpisme de corps.

Exercice 12 (***)

Pour tout angle $\theta \in \mathbb{R}$, on note $M_\theta = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) & -\sin(2\theta) & \sin^2(\theta) \\ \cos(\theta)\sin(\theta) & \cos(2\theta) & -\sin(\theta)\cos(\theta) \\ \sin^2(\theta) & \sin(2\theta) & \cos^2(\theta) \end{pmatrix}$. Montrer que l'ensemble des ces matrices forme un groupe multiplicatif lorsque θ parcourt $\mathbb{R}$, et calculer le déterminer de ces matrices.

Exercice 13 (*)

Inverser (lorsque c'est possible) les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$; $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 14 (**)

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et déterminer son inverse. Calculer $P^{-1}AP$ et en déduire les puissances de la matrice A.

Exercice 15 (**)

Soit A une matrice nilpotente. Montrer que $I - A$ est inversible et que son inverse s'écrit sous la forme $I + A + A^2 + \cdots + A^k$. En déduire l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et celui de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 16 (**)

Déterminer l'inverse de la matrice suivante (matrice carrée à n lignes et n colonnes) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & & \dots & & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \dots & & 0 & 1 & 1 \\ 0 & & & \dots & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 17 (**)

Déterminer l'inverse de la matrice suivante (on peut perdre énormément de temps à appliquer un pivot bête et (très) méchant, on peut aussi chercher des astuces diaboliques à bases de racines sixièmes de l'unité) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 18 (**)

Résoudre chacun des systèmes suivants, en distinguant éventuellement des cas suivants les valeurs des paramètres :

- $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ -x - 3y + 5z = 2 \\ x + y + z = -1 \end{cases}$
- $\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ x - 2y + 4z = 1 \end{cases}$
- $\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x + y + z = -1 \\ x - 3y + 2z = -1 \end{cases}$
- $\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$
- $\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}$
- $\begin{cases} x - y + 2z + 3t + w = 3 \\ x + y + 2z + 7t + 3w = 19 \\ -x + 4y - 5z + 12t - 4w = 33 \\ 2x - 4y + 5z + t = -12 \\ 4x - 3y + 4z + 11t + 9w = 15 \end{cases}$

Exercice 19 (* à **)

Calculer les déterminants suivants (en essayant d'utiliser des développements suivant les lignes ou les colonnes ou des combinaisons pour faire apparaitre des 0 ; vous pouvez toujours vérifier cos résultats ensuite avec Sarrus) :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \cos(a-b) & \cos(b-c) & \cos(c-a) \\ \cos(a+b) & \cos(b+c) & \cos(c+a) \\ \sin(a+b) & \sin(b+c) & \sin(c+a) \end{vmatrix}$$

Corrigé de la feuille d'exercices n°12

Exercice 1 (*)

1. Soit donc une matrice $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. On a alors $AB = \begin{pmatrix} a+2d & b+2e & c+2f \\ 2a+d & 2b+e & 2c+f \\ d & e & f \end{pmatrix}$.
Pour que la matrice AB soit nulle, il faut donc avoir $d = e = f = 0$, puis $a = b = c = 0$. Autrement dit, les deux premières lignes de B doivent être nulles, et la troisième est quelconque.

2. D'après la question précédente, C doit être de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Si on effectue le produit CA pour une telle matrice, on obtient $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ g+2h & 2g+h+i & 0 \end{pmatrix}$. Pour que ce produit soit nul, il faut donc avoir $g = -2h$ et $i = -2g - h = 3h$, soit $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2h & h & 3h \end{pmatrix}$, le réel h étant quelconque.

Exercice 2 (* à **)

- Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ une matrice dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on calcule $AM = \begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ 3x+4z & 3y+4t \end{pmatrix}$ et $MA = \begin{pmatrix} x+3y & 2x+4y \\ z+3t & 2z+4t \end{pmatrix}$. Pour que les deux matrices soient égales, il faut que leurs coefficients soient égaux deux à deux, ce qui nous amène à résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 2z & = & x & + & 3y \\ y & + & 2t & = & 2x & + & 4y \\ 3x & + & 4z & = & z & + & 3t \\ 3y & + & 4t & = & 2z & + & 4t \end{array} \right.$$

Les deux équations extrêmes sont équivalentes à $z = \frac{3}{2}y$, et les deux du milieu se ramènent alors à la même équation $x + z = t$. Les solutions sont donc tous les quadruplets de la forme $\left\{ x, y, \frac{3}{2}y, x + \frac{3}{2}y \right\}$, où x et y sont deux réels quelconques. Autrement, la matrice M est de la forme $M = \begin{pmatrix} x & y \\ \frac{3}{2}y & x + \frac{3}{2}y \end{pmatrix}$.

- Posons donc $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. On calcule $MB = \begin{pmatrix} a+3b-2c & -b+c & a+2b-c \\ d+3e-2f & -e+f & d+2e-f \\ g+3h-2i & -h+i & g+2h-i \end{pmatrix}$ et $BM = \begin{pmatrix} a+g & b+h & c+i \\ 3a-d+2g & 3b-e+2g & 3c-f+2i \\ -2a+d-g & -2b+e-h & -2c+f-i \end{pmatrix}$, ce qui donne le sublimissime système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} a & + & 3b & - & 2c & = & a & & & + & g \\ & - & b & + & c & = & b & & & + & h \\ a & + & 2b & - & c & = & c & & & + & i \\ d & + & 3e & - & 2f & = & 3a & - & d & + & 2g \\ & - & e & + & f & = & 3b & - & e & + & 2h \\ d & + & 2e & - & f & = & 3c & - & f & + & 2i \\ g & + & 3h & - & 2i & = & -2a & + & d & - & g \\ & - & h & + & i & = & -2b & + & e & - & h \\ g & + & 2h & - & i & = & -2c & + & f & - & i \end{array}\right.$$

Pour résoudre ce genre de système a priori immonde, il vaut mieux commencer par tout exprimer en fonction des coefficients de la première ligne a, b et c. Les trois premières équations donnent ainsi $g = 3b - 2c$; $h = c - 2b$ et $i = a + 2b - 2c$. Ensuite, la huitième équation donne $e = 2b + i = a + 4b - 2c$, la dernière équation donne $f = g + 2h + 2c = -b + 2c$; et la sixième $d = 2a + 2g + 3h - 2i = -4b + 3c$. Il reste trois équations à traiter, en remplaçant chaque variable par l'expression obtenue : la quatrième devient $-4b + 3c + 3a + 12b - 6c + 2b - 4c = 3a+4b-3c+6b-4c$, soit $3a+10b-7c = 3a+10b-7c$, qui est toujours vérifiée ; la cinquième donne $-a-4b+2c-b+2c = 3b-a-4b+2c+2c-4b$, soit $-a-5b+4c = -a-5b+4c$ qui est également toujours vrai ; et enfin la septième donne $3b-2c+3c-6b-2a-4b+4c = -2a-4b+3c-3b+2c$, soit $-2a - 7b + 5c = -2a - 7b + 5c$, qui est encore une fois toujours vraie. Les réels a, b et c peuvent donc être choisis quelconques, et $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ -4b+3c & a+4b-2c & -b+2c \\ 3b-2c & c-2b & a+2b-2c \end{pmatrix}$.

- C'est évidemment le gag de la liste : toutes les matrices (carrées d'ordre n) commutent avec I_n.
- En notant M une matrice carrée quelconque d'ordre 3 (mêmes notations que pour la matrice B), on trouve $MC = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & h & 0 \end{pmatrix}$ et $CM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On obeitnt donc les conditions $b = h = d = f = 0$, soit $M = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & i \end{pmatrix}$.

Si une matrice M commute avec toutes les matrices diagonales, elle commute en particulier avec la matrice ayant un unique coefficient non nul $a_{ii} = 1$. Or, la multiplication à gauche par cette matrice ne conserve que la colonne numéro i de la matrice M, et la multiplication ne conserve que la ligne numéro i. Si on veut que les deux soient égales, tous les coefficients de la ligne et de colonne numéro i doivent être nuls, à l'exception du coefficient diagonal m_{ii} qui est commun aux deux matrices. En faisant ce calcul avec toutes les valeurs possibles de i, on se rend donc compte que la matrice M est nécessairement diagonale. Réciproquement, une matrice diagonale commute avec toutes les autres matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour le cas des matrices symétriques, ce n'est en fait pas vraiment plus dur. Toutes les matrices diagonales étant symétriques, la matrice M doit d'après ce qui précède être diagonale. Mais cette fois-ci, ça ne suffit pas. Prenons donc comme matrice diagonale particulière la matrice vérifiant $a_{ij} = a_{ji} = 1$ (pour des valeurs distinctes de i et de j), et ayant tous ses autres coefficients nuls. Quand on multiplie cette matrice à gauche par une matrice diagonale ayant pour coefficients diagonaux λ_1, …, λ_n, il ne reste comme coefficients non nuls que λ_i en position (i, j) et λ_j en position (j, i). Au contraire, quand on fait le produit à droite, λ_i se trouve en position (j, i) et λ_j en position (i, j). Si on veut que les deux matrices soient égales, on doit avoir $\lambda_i = \lambda_j$. Comme cela doit être vraipour toutes les valeurs de i et de j, tous les coefficients diagonaux de M sont en fait égaux, ce qui signifie qu'il existe un réel λ tel que $M = \lambda I$. Réciproquement, une telle matrice commute certainement avec toutes les matrices symétriques puisqu'elle commute avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 3 (*)

C'est en fait très simple, le produit est symétrique si $AB =^t (AB)$, soit $AB =^t B^tA$. Comme les deux matrices sont supposées symétriques, cela revient à dire que $AB = BA$, autrement dit que les matrices commutent.

Exercice 4 (**)

Prouvons la formule donnée par récurrence : pour $k = 0$, c'est évident : $AI - IA = 0$. Supposons-là vérifiée au rang k, alors $AB^{k+1} - B^{k+1}A = AB^kB - B^{k+1}A = (AB^k - B^kA)B + B^kAB - B^kBA = kB^kB + B^k(AB - BA) = kB^{k+1} + b^kB = (k+1)B^{k+1}$, ce qui prouve la formule au rang $k+1$. Par principe de récurrence, la formule est donc vrai pour tout entier k. Par linéarité de la trace, on a alors $\mathrm{Tr}(kB^k) = \mathrm{Tr}(AB^k) - \mathrm{Tr}(B^kA) = 0$ puisque le calcul de la trace d'un produit ne dépend pas de l'ordre dans lequel on effectue ce produit. On en déduit que $\mathrm{Tr}(B^k) = 0$.

Exercice 5 (**)

Commençons par prendre la trace des deux côtés de l'équation : $\mathrm{Tr}(X) + \mathrm{Tr}(X)\,\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$, une condition nécessaire est donc $\mathrm{Tr}(X)(1 + \mathrm{Tr}(A)) = \mathrm{Tr}(B)$. Si $\mathrm{Tr}(A) \neq -1$, on en déduit que $\mathrm{Tr}(X) = \dfrac{\mathrm{Tr}(B)}{1 + \mathrm{Tr}(A)}$. Par ailleurs, on doit avoir $X = B - \lambda A$, avec en l'occurence $\lambda = \mathrm{Tr}(X)$. Considérons donc une matrice de la forme $X = B - \lambda A$, elle vérifie $\mathrm{Tr}(X) = \mathrm{Tr}(B) - \lambda\,\mathrm{Tr}(A)$. On doit donc avoir, pour qu'une telle matrice soit solution, $\mathrm{Tr}(B) - \lambda\,\mathrm{Tr}(A) = \dfrac{\mathrm{Tr}(B)}{1 + \mathrm{Tr}(A)}$, soit $\lambda\,\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)\left(1 - \dfrac{1}{1 + \mathrm{Tr}(A)}\right) = \mathrm{Tr}(B) \times \dfrac{\mathrm{Tr}(A)}{1 + \mathrm{Tr}(A)}$, donc $\lambda = \dfrac{\mathrm{Tr}(B)}{1 + \mathrm{Tr}(A)}$ (sauf si $\mathrm{Tr}(A) = 0$). La seule solution possible est donc $X = B - \dfrac{\mathrm{Tr}(B)}{1 + \mathrm{Tr}(A)}A$. On vérifie sans problème qu'une telle matrice est effectivement solution (unique, donc) du problème. Si $\mathrm{Tr}(A) = 0$, on doit simplement avoir $\mathrm{Tr}(X) = 0$, ce qui sera toujours le cas lorsque $X = B - \lambda A$. L'équation de départ s'écrit alors $B - \lambda A = B$, donc on doit tout de même avoir $\lambda = 0$ et la solution unique est $X = B$. Enfin, si $\mathrm{Tr}(A) = -1$, la condition donnée initialement ne peut être vérifiée que si $\mathrm{Tr}(B) = 0$. Dans le cas contraire, il ne peut pas y avoir de solution à l'équation. Si $\mathrm{Tr}(A) = -1$ et $\mathrm{Tr}(B) = 0$, en posant $X = B - \lambda A$, on aura $\mathrm{Tr}(X) = \lambda$, donc l'équation s'écrit $B - \lambda A + \lambda A = B$. Cette condition est manifestement vérifiée quelle que soit la valeur de λ, c'est donc le seul cas où on a une infinité de solutions, en l'occurence toutes les matrices de la forme $B - \lambda A$, pour λ parcourant $\mathbb{R}$.

Exercice 6 (***)

1. On calcule facilement $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -10 & 11 \end{pmatrix}$. Rappelons la méthode la plus simple pour trouver ensuite le polynôme annulateur. On peut toujours le prendre unitaire et chercher deux constantes telles que $A^2 = \alpha A + \beta I$. Le coefficient β est simplement le coefficient de proportionnalité entre les coefficients non diagonaux de A et de A^2, ici 5. Il ne reste alors plus qu'à constater que $A^2 - 5A = -4I$, soit $A^2 - 5A + 4I = 0$. Le polynôme recherché est donc $P = X^2 - 5X + 4$.
2. En reprenant l'égalité obtenue à la question précédente, $A(A - 5I) = -4I$ ou encore $A\left(-\dfrac{1}{4}A + \dfrac{5}{4}I\right) = I$. La matrice A est donc inversible, d'inverse $A^{-1} = \dfrac{5}{4}I - \dfrac{1}{4}A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
3. Le polynôme se factorise immédiatement sous la forme $(X - 1)(X - 4)$ puisque 1 est racine évidente (mais si vous préférez perdre votre temps à calculer un discriminant, naturemment,

personne ne vous en empêchera). La division euclidienne sera de la forme $X^n = PQ + R$, où $d^\circ(R) < 2$, soit $R = a_nX + b_n$. Évaluons cette égalité pour les racines du polynôme, qui ont l'avantage de vérifier $P(x) = 0$ et donc d'annuler le terme en PQ : $1 = R(1) = a_n + b_n$; et $4^n = 4a_n + b_n$. La différence des deux équations donne $3a_n = 4^n - 1$, soit $a_n = \dfrac{4^n - 1}{3}$, dont on déduit que $b_n = 1 - a_n = \dfrac{4 - 4^n}{3}$.

4. D'après la question précédent, $A^n = P(A)Q(A) + R(A)$. Comme $P(A) = 0$, il ne reste que $A^n = a_nA + b_nI = \dfrac{4^n - 1}{3}A + \dfrac{4 - 4^n}{3}I$ (on vérifie aisément que la formule donne une valeur correcte de A^2, inutile de préciser les coefficients de A^n, ça n'a pas grand intérêt).

Exercice 7 (**)

On calcule aisément $J^2 = nJ$ (la matrice ne contient que des n), puis $J^3 = n^2J$, et on conjecture que $J^k = n^{k-1}J$, ce qui se prouve sans problème par récurrence : c'est vrai au rang 1, et si on le suppose vrai au rang k, alors $J^{k+1} = J \times J^k = J \times n^{k-1}J = n^{k-1}J^2 = n^kJ$. On constate que la matrice A dont on cherche les puissances peut s'écrire sous la forme $A = 2I - J$ (où J désigne évidemment ici une matrice carrée d'ordre 3, on aura donc $J^k = 3^{k-1}J$). Les matrices I et J commutant certainement, on peut appliquer la formule du binôme de Newton : $A^n = (2I - J)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} 2^k I^k (-J)^{n-k} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k (-1)^k 3^{n-k-1} \right) J + 2^n I$ (on est obligés d'isoler le terme numéro n de la somme car la formule pour les puissances de J ne fonctionne pas pour J^0). Dans la parenthèse, on reconnait presque une formule du binôme (sur les réels cette fois-ci) à deux détails près : il faudrait sortir un facteur $\dfrac{1}{3}$ pour avoir un $(-2)^k 3^{n-k}$, et surtout il manque le fameux terme numéro n, qui serait ici égal à $(-2)^n$. On peut donc écrire $A^n = \dfrac{1}{3} \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k (-3)^{n-k} - (-2)^n \right) J + 2^n I = 2^n I + \dfrac{(-1)^n - (-2)^n}{3} J$. On vérifie que, pour $n = 1$, on retrouve $A = 2I - J$; pour $n = 2$, on devrait avoir $A^2 = 4I - J$, ce qui est effectivement le cas.

Exercice 8 (**)

Première méthode, qui fonctionnera toujours pour une matrice d'ordre 2 : chercher un polynôme annulateur de degré 2. On calcule donc $A^2 = \begin{pmatrix} 9 & -8 \\ 8 & -7 \end{pmatrix} = 2A - I$. La matrice est donc annulée par le polynôme $P = X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$, cherchons à écrire la division euclidienne de X^n par P, on sait qu'elle sera de la forme $X^n = PQ + a_nX + b_n$. On ne dispose ici que d'une seule racine, qui nous donne la condition $1 = a_n + b_n$. pour en obtenir une deuxième, il faut penser à dériver : $nX^{n-1} = P'Q + pQ' + a_n$, avec $P(1) = P'(1) = 0$, donc $n = a_n$. On trouve donc $a_n = n$ et $b_n = 1 - n$, soit $A^n = nA + (1 - n)I$.

Autre possibilité : écrire $A = I + B$, où $B = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$. On constate que $B^2 = 0$ (quelle chance !), les matrices I et B commutent évidemment donc, par la formule du binôme de Newton, $A^n = (B + I)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k I^{n-k} = I + nB$ (tous les termes suivants sont nuls). Comme $B = A - I$, on retrouver $A^n = I + n(A - I) = nA + (1 - n)I$.

Allez, une troisième méthode pour la route, on calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 9 & -8 \\ 8 & -7 \end{pmatrix}$ puis $A^3 = \begin{pmatrix} 13 & -12 \\ 12 & -11 \end{pmatrix}$

et on conjecture pour A^n une matrice de la forme $A^n = \begin{pmatrix} a_n+1 & -a_n \\ a_n & -a_n+1 \end{pmatrix}$. Prouvons cette formule par récurrence : c'est vrai au rang 1 en posant $a_1 = 4$, et en le supposant vérifié au rang n, alors $A^{n+1} = \begin{pmatrix} a_n+1 & -a_n \\ a_n & -a_n+1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n+5 & -a_n-4 \\ a_n+4 & -a_n+3 \end{pmatrix}$, ce qui est bien de la forme souhaitée avec $a_{n+1} = a_n + 4$. La suite (a_n) est par ailleurs arithmétique de raison 4, donc $a_n = a_1 + 4(n-1) = 4n$. On en déduit directement que $A^n = \begin{pmatrix} 4n+1 & -4n \\ 4n & -4n+1 \end{pmatrix}$.

Exercice 9 (***)

1. On commence par un peu de calcul : $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -8 & 6 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} -18 & 9 & 9 \\ 44 & -18 & -26 \\ -26 & 9 & 17 \end{pmatrix}$.
Il est désormais facile de vérifier l'égalité demandée.
2. On va bien sûr procéder par récurrence. Notons P_k la propriété « Il existe deux réels a_k et b_k tels que $A^k = a_kA^2 + b_kA$ ». Pour une fois on initialise la récurrence pour $k = 2$: P_2 est bien vérifiée en posant $a_2 = 1$ et $b_2 = 0$ (on a bien $A^2 = 1 \times A^2 + 0 \times A$). Supposons P^k vérifiée, on a alors $A^{k+1} = A \times A^k = A \times (a_kA^2 + b_kA) = a_kA^3 + b_kA^2 = a_k(6A - A^2) + b_kA^2 = (b_k - a_k)A^2 + 6a_kA$, qui est bien de la forme demandée, ce qui achève la récurrence.
3. D'après la question précédente, on a les relations suivantes : $a_{k+1} = b_k - a_k$ et $b_{k+1} = 6a_k$. On a donc $b_k = 6a_{k-1}$ ce qui donne en remplaçant dans la première relation $a_{k+1} = -a_k + 6a_{k-1}$, récurrence linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $x^2 + x - 6 = 0$, dont le discriminant vaut $\Delta = 1 + 24 = 25$, et admet donc deux racines $r = \dfrac{-1+5}{2} = 2$ et $s = \dfrac{-1-5}{2} = -3$. On a donc $a_k = \alpha 2^k + \beta(-3)^k$, avec $a_2 = 4\alpha + 9\beta = 1$ et $a_3 = 8\alpha - 27\beta = -1$. En multipliant la première équation par 2 et en lui retranchant la deuxième, on obtient $45\beta = 3$, soit $\beta = \dfrac{1}{15}$, puis $\alpha = \dfrac{1-9\beta}{4} = \dfrac{1-\frac{3}{5}}{4} = \dfrac{1}{10}$. On a donc $a_k = \dfrac{2^{k-1} - (-3)^{k-1}}{5}$, et $b_k = 6 \times \dfrac{2^{k-2} - (-3)^{k-2}}{5}$.
4. On se contentera d'écrire $A^k = \begin{pmatrix} 6a_k - 2b_k & -3a_k + b_k & -3a_k + b_k \\ -8a_k + 6b_k & 6a_k - 2b_k & 2a_k - 4b_k \\ 2a_k - 4b_k & -3a_k + b_k & a_k + 3b_k \end{pmatrix}$ sans préciser les valeurs. Pour $k = 1$, on obtient avec les formules de la question précédente $a_1 = 0$ et $b_1 = 1$, ce qui donne $A = 0 \times A^2 + 1 \times A$, ce qui est indiscutablement vrai. Et pour $k = 0$, on obtient $a_0 = \dfrac{1}{6}$ et $b_0 = \dfrac{1}{6}$, et là ça ne marche plus...

Exercice 10 (**)

Il y a un piège ici : la loi multiplicative sur l'ensemble en question, qu'on va noter G, est bien la même que sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, mais il ne s'agit pas de montrer que G est un sous-groupe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et pour cause, puisque ce dernier n'est pas un groupe multiplicatif. ce n'est même pas un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R}), \times)$, puisque les matrices de G ne sont pas le moins du monde inversibles. Il faut donc prouver qu'il s'agit d'un groupe en revenant à la définition. On peut tout de même utiliser le fait que $\times$ est associative sur l'ensemble de toutes les matrices pour en déduire qu'elle l'est également sur G. Vérifions qu'il s'agit d'une loi interne : $\begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3ab & 3ab & 3ab \\ 3ab & 3ab & 3ab \\ 3ab & 3ab & 3ab \end{pmatrix}$, avec $ab \neq 0$ puisque $a \neq 0$ et $b \neq 0$, donc le produit appartient bien à G. Remarquons au passage que le produit est commutatif dans G. Existe-t-il un élément neutre pour le produit dans G ? Attention encore une fois, il ne s'agit pas de l'élément neutre pour le produit dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, qui n'appartient pas à G. Mais en reprenant le calcul précédent, on constate que, pour $b = \frac{1}{3}$, $3ab = 1$, donc la matrice ne contenant que des $\frac{1}{3}$ est un élément neutre pour le produit. Cela signifie simplement que n'importe quelle matrice de G (mais pas les autres !) ne varie pas quand elle est multiplitée par cette matrice, comme ce serait le cas par ailleurs avec l'identité (et bien d'autres matrices en l'occurence). Reste à chercher des symétriques à nos éléments de G par rapport à l'élément neutre qu'on vient de trouver. Celà revient à chercher une valeur de b pour lequelle $3ab = \frac{1}{3}$, il faut donc prendre $b = \frac{1}{9a}$, ce qui ne pose pas de problème puisque a est supposé non nul. $(G, \times)$ est donc un groupe, qui est en fait isomorphe à $(\mathbb{R}^*, \star)$, en posant $x \star y = 3xy$.

Exercice 11 (**)

L'application est bien définie, l'image de l'élément neutre additif 0 est bien la matrice, l'image de l'élément neutre multiplicatif 1 est bien la matrice identité. Par ailleurs, en notant f l'application, et $z = a + ib$ et $z' = c + id$ deux nombres complexes, $f(z + z') = aI_2 + bJ + cI_2 + dJ = (a + c)I_2 + (b + d)J = f(z) + f(z')$. De plus, $J^2 = -I_2$ (calcul facile), donc $f(z)f(z') = (aI + bJ)(cI + dJ) = acI + (ad + bc)J - bdI = (ac - bd)I + (ad + bc)J = f(zz')$. L'application f est donc un isomorphisme de corps (inutile de vérifier que E est un corps, ça en découle). Notons dans l'énoncé de cet exercice la deuxième apparition du terme incorrect « isomorpisme », je dois vraiment avoir un problème avec ce mot.

Exercice 12 (***)

Contrairement à l'exercice 10, on est ici en présence d'un sous-groupe multiplicatif de $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$. Commençons par constater que, lorsque $\theta = 0$, $M_\theta = I_3$, qui appartient donc à notre ensemble (qu'on va noter G pour faire original). De plus, en remplaçant les $\sin(2\theta)$ par du $2\sin(\theta)\cos(\theta)$ (et pareil pour $\sin(2\varphi)$), On peut calculer les neuf coefficients de $A = M_\theta \times M_\varphi$ un par un (sinon, la matrice prend trop de place !) :

- $a_{11} = \cos^2(\theta)\cos^2(\varphi) - 2\cos(\theta)\sin(\theta)\cos(\varphi)\sin(\varphi) + \sin^2(\theta)\sin^2(\varphi) = (\cos(\theta)\cos(\varphi) - \sin(\theta)\sin(\varphi))^2 = \cos^2(\theta + \varphi)$.
- $a_{12} = -2\cos^2(\theta)\cos(\varphi)\sin(\varphi) - 2\cos(\theta)\sin(\theta)\cos(2\varphi) + 2\sin^2(\theta)\cos(\varphi)\sin(\varphi) = \sin(2\varphi)(\sin^2(\theta) - \cos^2(\theta)) - \sin(2\theta)\cos(2\varphi) = -\sin(2\varphi)\cos(2\theta) - \sin(2\theta)\cos(2\varphi) = -\sin(2(\theta + \varphi))$.
- $a_{13} = \cos^2(\theta)\sin^2(\varphi) + 2\cos(\theta)\sin(\theta)\cos(\varphi)\sin(\varphi) + \sin^2(\theta)\cos^2(\theta)$ $= (\cos(\theta)\sin(\varphi) + \sin(\theta)\cos(\varphi))^2 = \sin^2(\theta + \varphi)$.
- $a_{21} = \cos(\theta)\sin(\theta)\cos^2(\varphi) + \cos(2\theta)\cos(\varphi)\sin(\varphi) - \cos(\theta)\sin(\theta)\sin^2(\varphi) = \frac{1}{2}\sin(2\theta)(\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)) + \frac{1}{2}\cos(2\theta)\sin(2\varphi) = \frac{1}{2}(\sin(2\theta)\cos(2\varphi) + \cos(2\theta)\sin(2\varphi)) = \frac{1}{2}\sin(2(\theta + \varphi)) = \sin(\theta + \varphi)\cos(\theta + \varphi)$.
- $a_{22} = -2\cos(\theta)\sin(\theta)\cos(\varphi)\sin(\varphi) + \cos(2\theta)\cos(2\varphi) - 2\cos(\theta)\sin(\theta)\cos(\varphi)\sin(\varphi)$ $= \cos(2\theta)\cos(2\varphi) - \sin(2\theta)\sin(2\varphi) = \cos(2(\theta + \varphi))$.
- $a_{23} = -a_{21} = -\sin(\theta + \varphi)\cos(\theta + \varphi)$.
- $a_{31} = a_{13} = \sin^2(\theta + \varphi)$.
- $a_{32} = -a_{12} = \sin(2(\theta + \varphi))$.
- $a_{33} = a_{11} = \cos^2(\theta + \varphi)$ (pour ces quatre derniers calculs, les termes n'apparaissent pas dans le même ordre que pour les quatre premiers, mais on reconnait effectivement les mêmes totaux).

On constate donc que $M\theta + M_\varphi = M_{\theta+\varphi} \in G$. Par ailleurs, on déduit facilement de ce même calcul que $M_\theta M_{-\theta} = I$, donc l'inverse de la matrice M_θ est la matrice $M_{-\theta}$, qui appartient bien à G. Ceci suffit à prouver que G est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.

Pour le calcul du déterminant de M_θ, on additionne les colonnes 1 et 3, puis on développe suivant la première colonne : $\begin{vmatrix} \cos^2(\theta) & -\sin(2\theta) & \sin^2(\theta) \\ \cos(\theta)\sin(\theta) & \cos(2\theta) & -\sin(\theta)\cos(\theta) \\ \sin^2(\theta) & \sin(2\theta) & \cos^2(\theta) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\sin(2\theta) & \sin^2(\theta) \\ 0 & \cos(2\theta) & -\sin(\theta)\cos(\theta) \\ 1 & \sin(2\theta) & \cos^2(\theta) \end{vmatrix} =$ $1 \times \begin{vmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(\theta)\cos(\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos^2(\theta) \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} -\sin(2\theta) & \sin^2(\theta) \\ \cos(2\theta) & -\sin(\theta)\cos(\theta) \end{vmatrix} = \cos(2\theta)\cos^2(\theta) + \dfrac{1}{2}\sin^2(2\theta) +$ $\dfrac{1}{2}\sin^2(2\theta) - \cos(2\theta)\sin^2(\theta) = \cos(2\theta)(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) + \sin^2(2\theta) = \cos^2(2\theta) + \sin^2(2\theta) = 1.$

Exercice 13 (*)

Un peu de motivation, six pivots de Gauss, ça va prendre quelques pages de calcul, mais ça ne peut pas faire de mal.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftrightarrow L_2 + 3L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -8 & -2 & 6 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 6 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1/2 \\ L_2 \leftarrow -L_2/2 \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

La matrice A est donc inversible, et $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

$$
\begin{array}{cccc}
B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} & I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \\
\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} L_1 \leftarrow 9L_1 + L_3 \\ L_2 \leftrightarrow 3L_2 - L_3 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 18 & 18 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\
\begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1/18 \\ L_2 \leftrightarrow L_2/9 \\ L_3 \leftarrow L_3/9 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix} &
\end{array}
$$

La matrice B est donc inversible, et $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$.

$$
\begin{array}{ccc}
C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} & I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\
\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow L_2 - L_3 \\
\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} &
\end{array}
$$

La matrice C n'est pas inversible.

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_2 - L_3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 5L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -4 & -8 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 4 & -3 \\ -4 & -8 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1/4 \\ L_2 \leftarrow L_2/4 \\ L_3 \leftarrow L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{3}{4} \\ -1 & -2 & \frac{5}{4} \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice D est donc inversible, et $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{3}{4} \\ -1 & -2 & \frac{5}{4} \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_2 \leftrightarrow L_1 \\ L_3 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_4 \leftarrow L_3 - L_4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_2 - L_3$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_4 - L_1 \\ \\ L_3 \leftrightarrow L_4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice E est donc inversible, et $E^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On peut tricher un peu pour la matrice F en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne, qui ne bougeront de toute façon pas pendant les calculs (sauf pour la toute dernière étape où on divisera la dernière ligne par 3, ce qui fera apparaitre un $\dfrac{1}{3}$ dans le coin inférieur droit de la matrice inverse).

$$F' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow 2L_1 + L_3 \\ L_2 \leftrightarrow L_2 + L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow 3L_1 - 2L_2$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1/6 \\ L_2 \leftrightarrow L_2/3 \\ L_3 \leftarrow -L_3/2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La matrice F est donc inversible, et $F^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Exercice 14 (**)

Appliquons donc le pivot de Gauss à la matrice P :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2 - L_3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1/2 \\ L_2 \leftarrow L_2/2 \\ L_3 \leftarrow L_3/2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La matrice P est bien inversible, d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

On calcule sans enthousiasme $P^{-1}A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, puis $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, matrice diagonale que nous noterons D. On prouve ensuite par récurrence que $A^n = PD^nP^{-1}$: c'est vrai pour $n = 1$, puisque $A = P(P^{-1}AP)P^{-1} = PDP^{-1}$, et supposant la formule vérifiée pour A^n, on aura $A^{n+1} = A^n \times A = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$, ce qui achève la récurrence. Donc $A^n = P \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 6^n & 0 \\ 0 & 0 & 8^n \end{pmatrix} P^{-1}$, soit $A^n = \begin{pmatrix} \frac{4^n+6^n}{2} & \frac{8^n-6^n}{2} & \frac{8^n-4^n}{2} \\ \frac{4^n-6^n}{2} & \frac{6^n+8^n}{2} & \frac{8^n-4^n}{2} \\ \frac{6^n-4^n}{2} & \frac{8^n-6^n}{2} & \frac{4^n+8^n}{2} \end{pmatrix}$.

Exercice 15 (**)

Si A est nilpotente, il existe un entier k tel que $A^{k+1} = 0$. Or, on constate que $(I - A)(I + A + A^2 + \cdots + A^k) = I - A + A - A^2 + A^2 - A^3 + \cdots + A^k - A^{k+1} = I - A^{k+1} = I$, donc $I - A$ est inversible, d'inverse $I + A + A^2 + \cdots + A^k$. On a $A = I - M$, avec $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Un rapide calcul donne $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M^3 = 0$. D'après ce qui précède, on a donc $A^{-1} = I + M + M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. De même on a $B = I - N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On calcule $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 12 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis $N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -8 & -36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et enfin $N^5 = 0$, donc $B^{-1} = I + N + N^2 + N^3 + N^4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Cette dernière formule laisse supposer qu'on a peut-être pas utilisé la meilleure méthode pour inverser B, je vous laisse chercher d'autres façons d'y parvenir plus rapidement si vous le souhaitez.

Exercice 16 (**)

Ce n'est en fait pas vraiment plus compliqué que pour une matrice d'ordre 3 ou 4, on applique les différentes étapes du pivot mais on peut difficilement les écrire explicitement. En l'occurence, on va faire successivement les opérations élémentaires $L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_n$; $L_{n-2} \leftarrow L_{n-2} - L_{n-1}$; $L_{n-3} \leftarrow L_{n-3} - L_{n-2}$; …; $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$. On obtient ainsi la matrice identité. Quand on effectue les mêmes opérations en parallèle à partir de la matrice I_n, on transforme successivement les lignes de la matrice : L_{n-1} devient $0 \dots 1 \ -1$; L_{n-2} devient $0 \dots 1 \ -1 \ 1$; etc jusqu'à L_1 qui devient $1 \ -1 \ 1 \ -1 \dots (-1)^{n-1}$. Finalement, la matrice est inversible (ce n'est pas une surprise puisqu'elle est triangulaire supérieure sans zéro sur la diagonale), d'inverse

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & & & \dots & & (-1)^{n-1} \\ 0 & 1 & -1 & 1 & & \dots & & (-1)^{n-2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \dots & & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & & & \dots & & 0 & 1 & -1 \\ 0 & & & & \dots & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 17 (**)

Soyons fous et faisons le calcul avec le pivot !

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_4 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_5 \\ L_5 \leftarrow L_5 - L_6 \\ L_6 \leftarrow L_6 - L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & -5 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_4 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_5 \\ L_5 \leftarrow L_5 - L_6 \\ L_6 \leftarrow L_6 - L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -6 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -11 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_6 \leftarrow L_2 - 6L_6$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -6 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 18 & 18 & 24 & 66 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 12 & 1 & -2 & 1 & 0 & -6 \end{pmatrix} \qquad L_6 \leftarrow L_6 + 3L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -6 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 36 & 24 & 66 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 12 & 1 & 1 & -5 & 3 & -6 \end{pmatrix} \qquad L_6 \leftarrow L_6 + 6L_4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -6 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 60 & 66 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 12 & 1 & 1 & 1 & -9 & 0 \end{pmatrix} \qquad L_6 \leftarrow L_6 + 10L_5$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -6 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 126 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 22 & 1 & 1 & 1 & 1 & -20 \end{pmatrix} \qquad L_5 \leftarrow 21L_5 - L_6$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -6 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -126 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 126 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 20 & -22 \\ 22 & 1 & 1 & 1 & 1 & -20 \end{pmatrix} \qquad L_4 \leftarrow 21L_4 + L_5$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -6 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -126 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -126 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 126 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 20 & -22 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 20 & -22 \\ 22 & 1 & 1 & 1 & 1 & -20 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow 21L_3 + L_4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -6 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -126 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -126 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -126 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 126 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 20 & -22 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 20 & -22 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 20 & -22 \\ 22 & 1 & 1 & 1 & 1 & -20 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow 21L_2 + L_3 \\ \\ \\ \\ \\ L_6 \leftarrow -L_6 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -126 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -126 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -126 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -126 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -126 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 20 & -22 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 20 & -22 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 20 & -22 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 20 & -22 \\ 22 & -1 & -1 & -1 & -1 & 20 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow 21L_2 + L_3$$

Pour la dernière opération, on va faire $L_1 \leftarrow -126L_1 - 2L_2 - 3L_3 - 4L_4 - 5L_5 - 6L_6$:

$$\begin{pmatrix} -126 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -126 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -126 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -126 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -126 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -126 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 20 & -22 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 20 & -22 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 20 & -22 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 20 & -22 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 20 & -22 \\ -22 & -1 & -1 & -1 & -1 & 20 \end{pmatrix} \quad L_6 \leftarrow L_6 + 3L_3$$

Il ne reste plus qu'à tout diviser par -126 pour obtenir le passionnant résultat :

$$A^{-1} = \frac{1}{126}\begin{pmatrix} -20 & 22 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -20 & 22 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -20 & 22 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -20 & 22 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -20 & 22 \\ 22 & 1 & 1 & 1 & 1 & -20 \end{pmatrix}$$

Exercice 18 (**)

- $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ -x - 3y + 5z = 2 & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ x + y + z = -1 & L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ -y + 8z = 3 \\ y + 2z = 2 & L_3 \leftarrow L_2 + L_3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ -y + 8z = 3 \\ 10z = 5 \end{cases}$

Il ne reste plus qu'à remonter le système triangulaire obtenu : $z = \dfrac{1}{2}$; puis $y = 8z - 3 = 1$ et enfin $x = 1 - 2y - 3z = -\dfrac{5}{2}$, soit $\mathcal{S} = \left\{\left(-\dfrac{5}{2}; 1; \dfrac{1}{2}\right)\right\}$.

- $\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ x - y + z = 2 & L_2 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ x - 2y + 4z = 1 & L_3 \leftarrow 2L_1 - L_3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ y + z = -3 \\ 3y - 5z = -1 & L_3 \leftarrow 3L_2 - L_3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ y + z = -3 \\ 8z = -8 \end{cases}$

On remonte : $z = -1$ puis $y = -3 - z = -2$ et enfin $x = \dfrac{1 + y - 3z}{2} = 1$, donc $\mathcal{S}\{(1; -2; -1)\}$

- $\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x + y + z = -1 & L_2 \leftarrow 2L_1 - L_2 \\ x - 3y + 2z = -1 & L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 3y + z = 5 \\ 5y - z = 3 & L_3 \leftarrow 5L_2 - 3L_3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 3y + z = 5 \\ 8z = 16 \end{cases}$

On remonte : $z = 2$ puis $y = \dfrac{5-2}{3} = 1$ et $x = 2 - 2y - z = -2$, soit $\mathcal{S} = \{(-2; 1; 2)\}$.

- Il vaut mieux ici commencer par permuter les lignes pour ne pas avoir de pivot dépendant de m (ce qui empêche de faire des opérations sur les lignes en les multipliant par des coefficients susceptibles d'être nuls).

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & mz & = & m^2 \\ mx & + & y & + & z & = & 1 \qquad L_2 \leftarrow mL_1 - L_2 \\ x & + & my & + & z & = & m \qquad L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & mz & = & m^2 \\ & & (m-1)y & + & (m^2-1)z & = & m^3 - 1 \\ & & (1-m)y & + & (m-1)z & = & m^2 - m \qquad L_3 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & mz & = & m^2 \\ & & (m-1)y & + & (m^2-1)z & = & m^3 - 1 \\ & & & & (m^2+m-2)z & = & m^3 + m^2 - m - 1 \end{array}\right.$$

Le système est de Cramer si $m \neq 1$ (à cause du coefficient devant y), et si $m^2+m-2 \neq 0$. Comme $m^2 + m - 2 = (m-1)(m+2)$ (il y a une racine évidente), les seules valeurs problématiques sont 1 et -2. Si $m \notin \{-2; 1\}$, on remonte le système pour trouver $z = \dfrac{m^3 + m^2 - m - 1}{m^2 + m - 2} = \dfrac{(m+1)(m^2-1)}{(m-1)(m+2)} = \dfrac{(m+1)^2}{m+2}$; puis $y = \dfrac{m^3 - 1 - (m^2-1)z}{m-1} = m^2 + m + 1 - (m+1)z = m^2 + m + 1 - \dfrac{(m+1)^3}{m+2}$; et enfin $x = m^2 - mz - y = -m - 1 - \dfrac{m(m+1)^3}{m+2}$ (valeurs sans aucun intérêt, d'ailleurs).

Regardons plutôt ce qui se passe dans les cas particuliers. D'abord si $m = 1$, le système triangulaire se réduit à l'unique équation $x + y + z = 1$ (effectivement, dans le système initial, les trois équations sont alors identiques), donc $\mathcal{S} = \{(x, y, 1 - x - y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$. Dans le cas où $m = -2$, la dernière équation devient $0 = -3$, le système n'a alors pas de solution.

- Là encore, on va se débrouiller pour utiliser des pivots constants :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} ax & + & by & + & z & = & 1 \qquad L_1 \leftarrow L_1 - aL_3 \\ x & + & aby & + & z & = & b \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ x & + & by & + & az & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & b(1-a)y & + & (1-a^2)z & = & 1 - a \qquad L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ & & b(a-1)y & + & (1-a)z & = & b - 1 \\ x & + & by & + & az & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & & & (2-a-a^2)z & = & b - a \\ & & b(a-1)y & + & (1-a)z & = & b - 1 \\ x & + & by & + & az & = & 1 \end{array}\right.$$

On va avoir un système qui n'est pas un système de Cramer si $b = 0$, $a = 1$ ou $a = -2$ (cf le système précédent pour ces valeurs, le coefficient devant z est le même). Dans tous les autres cas, on a une solution unique dont l'expression ne présente aucun intérêt : $z = \dfrac{b-a}{2-a-a^2}$; $y = \dfrac{b-1}{b(a-1)} + \dfrac{b-a}{b(2-a-a^2)}$; et $x = 1 - \dfrac{b-1}{a-1} + \dfrac{b-a}{2+a}$.

Regardons les cas particuliers : si $b = 0$, l'inconnue y disparait tout simplement du système, et la deuxième équation donne $x + z = 0$. Or, en additionnant les deux équation extrêmes, on trouve $(a+1)(x+z) = 2$, ce qui est impossible si $x + z = 0$. Il n'y a donc pas de solution.

Si $a = 1$, les membres de gauche des trois équations sont identiques égaux à $x + by + z$, mais celui de droite vaut b dans la deuxième équation et 1 dans les deux autres. Si $b \neq 1$, il n'y a donc pas de solution, et si $b = 1$, les solutions sont de la forme $(x, y, 1 - x - y)$.

Si $a = -2$, la somme des trois équations donne $0 = b + 2$, il faut donc avoir $b = -2$ également.

On doit alors résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -2x & - & 2y & + & z & = & 1 \\ x & + & 4y & + & z & = & -2 \\ x & - & 2y & - & 2z & = & 1 \end{array}\right.$

La différence des deux premières équations donne alors $-3x - 6y = 3$, soit $x = -1 - 2y$; la différence des deux dernières donne $-6y - 3z = 3$, soit $z = x = -1 - 2y$. On ne peut pas faire mieux, donc $\mathcal{S} = \{(-1 - 2y, y, -1 - 2y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

- $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & - & y & + & 2z & + & 3t & + & w & = & 3 \\ x & + & y & + & 2z & + & 7t & + & 3w & = & 19 \\ -x & + & 4y & - & 5z & + & 12t & - & 4w & = & 33 \\ 2x & - & 4y & + & 5z & + & t & & & = & -12 \\ 4x & - & 3y & + & 4z & + & 11t & + & 9w & = & 15 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_4 \leftarrow 2L_1 - L_4 \\ L_5 \leftarrow 4L_1 - L_5 \end{array}$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & - & y & + & 2z & + & 3t & + & w & = & 3 \\ & & 2y & & & + & 4t & + & 2w & = & 16 \\ & & 3y & - & 3z & + & 15t & - & 3w & = & 36 \\ & & 2y & - & z & + & 5t & + & 2w & = & 18 \\ & - & y & + & 4z & + & t & - & 5w & = & -3 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow 3L_4 - L_3 \\ \\ L_5 \leftarrow 4L_4 + L_5 \end{array}$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & - & y & + & 2z & + & 3t & + & w & = & 3 \\ & & 2y & & & + & 4t & + & 2w & = & 16 \\ & & 3y & & & & & + & 9w & = & 18 \\ & & 2y & - & z & + & 5t & + & 2w & = & 18 \\ & & 7y & & & + & 21t & + & 3w & = & 69 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow 21L_2 - 4L_5 \\ \\ \\ \\ \end{array}$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & - & y & + & 2z & + & 3t & + & w & = & 3 \\ & & 14y & & & & & + & 30w & = & 60 \\ & & 3y & & & & & + & 9w & = & 18 \\ & & 2y & - & z & + & 5t & + & 2w & = & 18 \\ & & 7y & & & + & 21t & + & 3w & = & 69 \end{array}\right.$

Plutôt que de faire un dernier pivot, constatons que la troisième équation donne $3w = 6 - y$, ce qui, reporté dans la deuxième, permet d'obtenir $14y + 10(6 - y) = 60$, soit $4y = 0$. On a donc $y = 0$, puis $3w = 6$ donc $w = 2$; $21t = 69 - 3 \times 2 - 7 \times 0 = 63$ donc $t = 3$; $z = 2 \times 0 + 5 \times 3 + 2 \times 2 - 18 = 1$ et enfin $x = 3 + 0 - 2 \times 1 - 3 \times 3 - 2 = -10$. Le système admet donc une solution unique : $\mathcal{S} = \{(-10; 0; 1; 3; 2)\}$.

Exercice 19 (* à **)

- Pour le premier, on peut développer directement suivant la première colonne : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 2 - 24 + 2 \times 12 = 2$. Encore plus rapide : on fait $L_3 - 2L_1$ pour obtenir 0 0 2 sur la dernière ligne, on développe et on a quasiment directement 2.
- Pour le deuxième, on additionne les deux premières colonnes, puis on développe suivant la première colonne : $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \times (-2) = -6$.
- Plein de possiblités ici, mais le plus rapide est encore de développer directement par rapport à la deuxième ligne : $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \times \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -2(10-2) - (-4-15) = -16 + 19 = 3$.
- On peut ici remplacer L_2 et L_3 par leur somme avec L_1 puis développer suivant la première colonne : $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 7 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = -15 - 7 = -22$.
- Cette fois-ci, différence des deux dernières lignes avec la première puis développement suivant la première colonne, avec entre les deux une petite factorisation sur les deux dernières

lignes : $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & c+a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c+a-b-a) = (b-a)(c-a)(c-b)$.

- Pour le dernier, curieusement, pas vraiment de truc évident, le plus rapide est de développer suivant la première ligne et surtout de bien connaître ses formules de trigo : $D = \begin{vmatrix} \cos(a-b) & \cos(b-c) & \cos(c-a) \\ \cos(a+b) & \cos(b+c) & \cos(c+a) \\ \sin(a+b) & \sin(b+c) & \sin(c+a) \end{vmatrix} = \cos(a-b)(\cos(b+c)\sin(c+a)-\cos(c+a)\sin(b+c)) - \cos(b-c)(\cos(a+b)\sin(c+a)-\cos(c+a)\sin(a+b)) + \cos(c-a)(\cos(a+b)\sin(b+c)-\cos(b+c)\sin(a+b))$. On reconnait dans les parenthèses des formules d'addition de sinus pour obtenir $D = \cos(a-b)\sin(a-b)+\cos(b-c)\sin(b-c)+\cos(c-a)\sin(c-a) = \frac{1}{2}(\sin(2(a-b))+\sin(2(b-c))+\sin(2(c-a)))$. On peut encore simplifier en utilisant les transformations somme-produit : $\sin(2(a-b))+\sin(2(b-c)) = 2\sin\left(\frac{a-b+b-c}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b-b+c}{2}\right) = 2\sin(a-c)\cos(a+c-2b)$. On en déduit (en redéveloppant le troisième sinus) que $D = \sin(a-c)\cos(a+c-2b)+\sin(c-a)\cos(c-a) = \sin(a-c)(\cos(a+c-2b)-\cos(c-a))$. Allez, un dernier coup de somme-produit : $\cos(a+c-2b)-\cos(c-a) = -2\sin\left(\frac{a+c-2b+c-a}{2}\right)\sin\left(\frac{a+c-2b-c+a}{2}\right) = -2\sin(c-b)\sin(a-b)$. Finalement, $D = 2\sin(a-b)\sin(a-c)\sin(b-c)$.

TDn°9 : bête et (pas si) méchant

PTSI B Lycée Eiffel

19 mars 2013

Un énoncé fort simple : vous devez dériver et étudier (tableau de variations et allure de la courbe, et plus si affinités) les deux séries de cinq fonctions suivantes :

Fonctions gentilles

- $f_1(x) = x\ln(x) - x$
- $f_2(x) = \sqrt{(x^4+1)^3}$
- $f_3(x) = \dfrac{x}{\ln(x+1)}$
- $f_4(x) = x^4 e^{\frac{1}{x}}$
- $f_5(x) = \dfrac{2x\sqrt{x}}{x-1}$

Fonctions rigolotes

- $g_1(x) = \ln(\ln(\ln(\ln(x))))$
- $g_2(x) = \dfrac{\arccos(x)}{\arcsin(x)}$
- $g_3(x) = \mathrm{Argch}(2+\cos(x))$
- $g_4(x) = \dfrac{\sin(x)}{(\cos(x)+2)^4}$
- $g_5(x) = \dfrac{1}{\arcsin(\sinh(x))}$

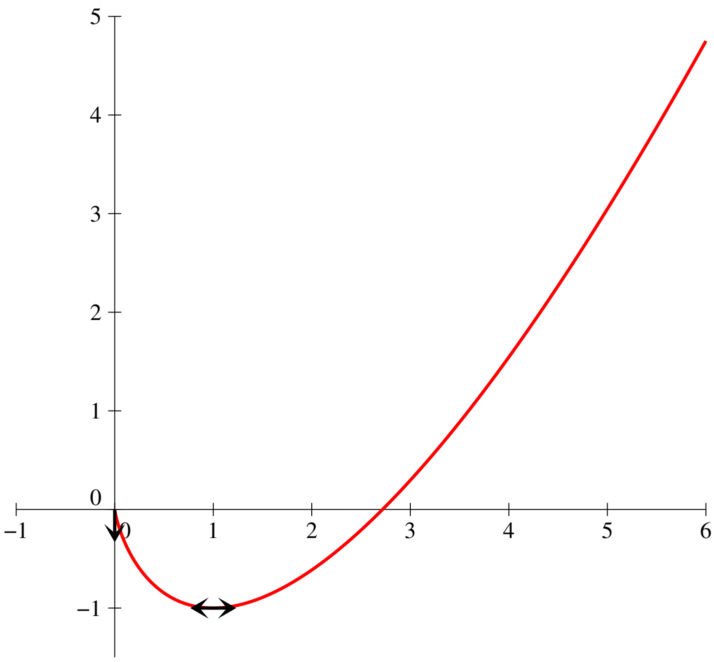
Corrigé du TD n°9

Fonctions gentilles

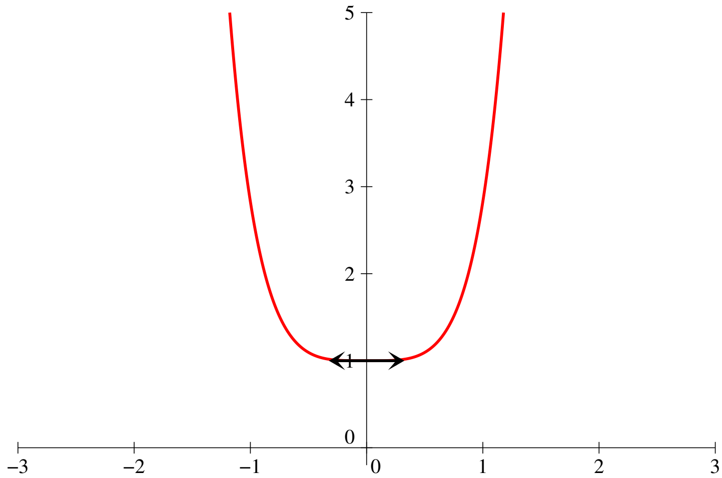
- La fonction f_1 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, de dérivée $f'(x) = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x)$. Puisque $\lim\limits_{x \to 0} f_1(x) = 0$ (croissance comparée), on peut prolonger la fonction par continuité en posant $f_1(0) = 0$. De plus, $\lim\limits_{x \to 0} f_1'(x) = -\infty$, donc la fonction prolongée admet en 0 une (demi)-tangente verticale.

x	0		1		$+\infty$
f_1	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

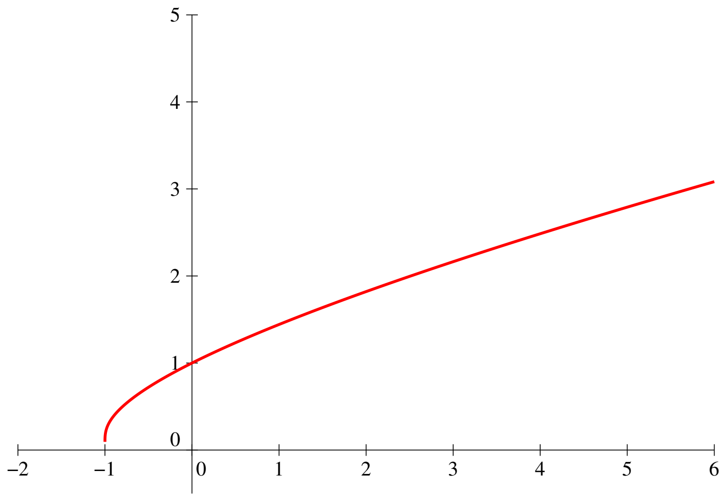
On peut ici continuer l'étude : $f_1''(x) = \frac{1}{x}$, donc f_1 est convexe sur $\mathbb{R}^+$, et elle admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Oy) puisque $f_2(x) \underset{+\infty}{\sim} x\ln(x)$. Une allure de la courbe :



- La fonction f_2 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ puisque $x^4 + 1$ est toujours strictement positif. Elle est par ailleurs paire. Pour les variations, écrivons $f_2(x) = (x^4 + 1)^{\frac{3}{2}}$ pour obtenir $f_2'(x) = \frac{3}{2} \times 4x^3 \times (x^4 + 1)^{\frac{1}{2}} = 6x^3\sqrt{x^4 + 1}$. La fonction est donc décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$. En $\pm\infty$, on peut écrire $f_2(x) \sim (x^4)^{\frac{3}{2}} \sim x^6$, il y a donc des branches paraboliques de direction (Oy). De plus, $f_2''(x) = 18x^2\sqrt{x^4 + 1} + 6x^3 \frac{4x^3}{2\sqrt{x^4 + 1}} = \frac{18x^2(x^4 + 1) + 12x^6}{\sqrt{x^4 + 1}}$, qui est très positif sur $\mathbb{R}$. La fonction est donc convexe. En voici une allure :



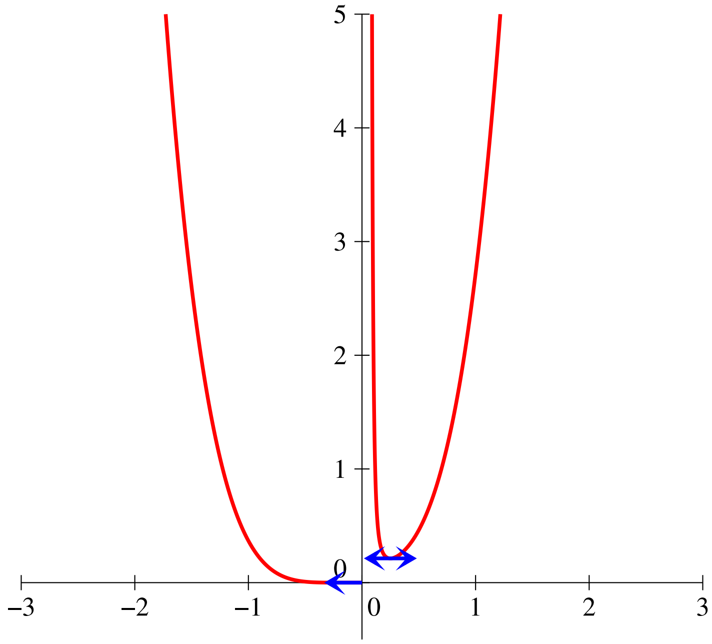
- La fonction f_3 est définie et dérivable sur $]-1;+\infty[\backslash\{0\}$, de dérivée $f_3'(x) = \dfrac{\ln(x+1) - \frac{x}{x+1}}{\ln^2(x+1)} = \dfrac{(x+1)\ln(x+1) - x}{(x+1)\ln^2(x+1)}$. Cette dérivée est du signe de son numérateur, dont la dérivée vaut $\dfrac{x+1}{x+1} + \ln(x+1) - 1 = \ln(x+1)$. Ce numérateur admet donc un minimum en 0, de valeur 0. Autrement dit, la dérivée de f_3 est toujours positive, et la fonction croissante. Notons que $\lim\limits_{x\to 0} f_3(x) = 1$ (en utilisant l'équivalent classique $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$), et on peut même prouver que ce prolongement est dérivable, mais ce n'est pas du tout évident avec nos outils. Un calcul de dérivée seconde n'est par ailleurs pas très engageant ici, on se contentera de nos maigres informations pour tracer l'allure de la courbe :



- La fonction f_4 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée $f_4'(x) = 4x^3 e^{\frac{1}{x}} + x^4 \times \dfrac{-1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} = x^2(4x-1)e^{\frac{1}{x}}$. La fonction f_4 est prolongeable par continuité en 0, mais seulement par continuité à gauche, puisque $\lim\limits_{x\to 0-} f_4(x) = 0$ (il n'y a pas de forme indéterminée), mais $\lim\limits_{x\to 0^+} f_4(x) = +\infty$ (par croissance comparée). Ce prolongement est dérivable à gauche, $f_4'(x)$ tendant également vers 0 en 0^-. La courbe admettra donc une demi-tangente horizontale à gauche en 0.

x	$-\infty$		0	0		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
f_4	$+\infty$	$\searrow$	0	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{e^4}{256} \simeq 0.21$	$\nearrow$	$+\infty$

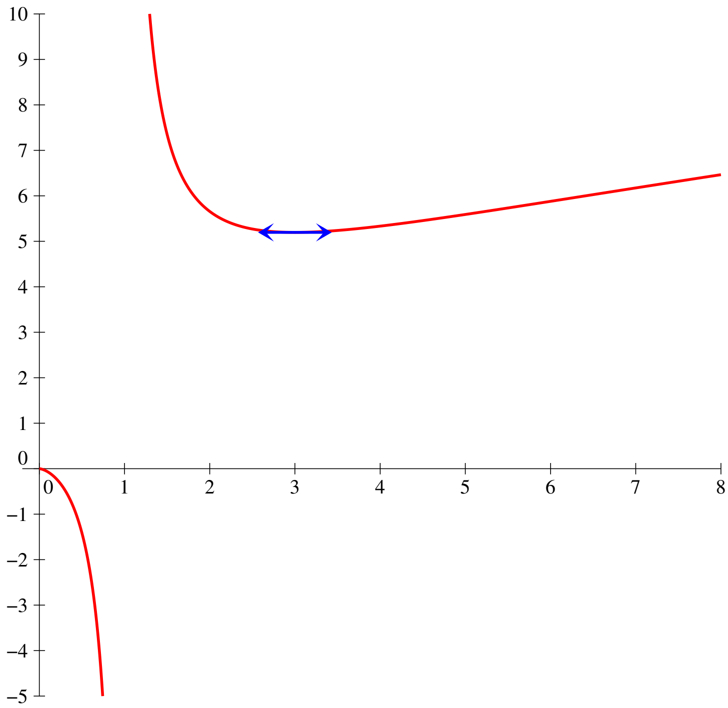
On peut constater que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$, donc $f_4(x) \underset{\pm\infty}{\sim} x^4$, ce qui prouve la présence de branches paraboliques de direction (Oy). De plus, $f_4''(x) = (12x^2 - 2x)e^{\frac{1}{x}} - (4x-1)e^{\frac{1}{x}} = (12x^2 - 6x + 1)e^{\frac{1}{x}}$. Le trinôme $12x^2 - 6x + 1$ ayant un discriminant négatif, cette dérivée seconde est toujours positive, et la fonction est donc convexe sur $\mathbb{R}_-$ et sur $\mathbb{R}^{+*}$. Une allure de courbe :



- La fonction f_5 est définie et dérivable sur $[0;1[\cup]1;+\infty[$ (le numérateur est bien dérivable en 0, on peut l'écrire sous la forme $x^{\frac{3}{2}}$), de dérivée $f_5'(x) = \dfrac{3\sqrt{x}(x-1) - 2x^{\frac{3}{2}}}{(x-1)^2} = \dfrac{\sqrt{x}(x-3)}{(x-1)^2}$. Pas de prolongement par continuité envisageable en 1 puisque le numérateur de la fonction vaut 2 quand x tend vers 1.

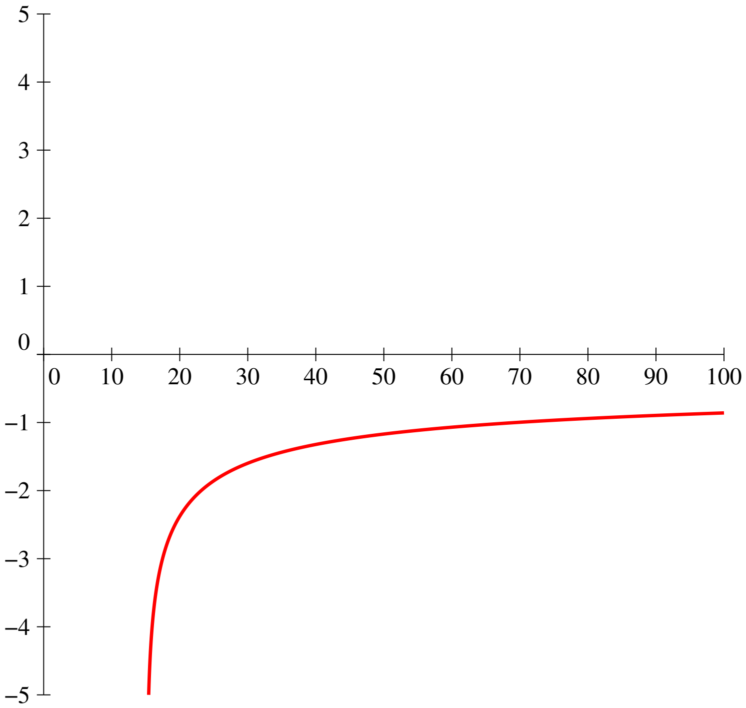
x	0	1		3	$+\infty$
f_5	$0 \searrow -\infty$	‖	$+\infty$	$\searrow 3\sqrt{3} \nearrow$	$+\infty$

Comme $f_5(x) \underset{+\infty}{\sim} 2\sqrt{x}$, la courbe admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Ox). On peut s'amuser à calculer $f_5''(x) = \dfrac{\frac{x-3}{2\sqrt{x}}(x-1)^2 + \sqrt{x}(x-1)^2 - 2\sqrt{x}(x-3)(x-1)}{(x-1)^4}$ $= \dfrac{(x-3)(x-1) + 2x(x-1) - 4x(x-3)}{2\sqrt{x}(x-1)^3} = \dfrac{-x^2+6x+3}{\sqrt{x}(x-1)^3}$. Le numérateur a pour discriminant $\Delta = 36 + 12 = 48$, il s'annule en $x_1 = \dfrac{-6+\sqrt{48}}{-2} < 0$ (valeur à oublier ici), et $x_2 = \dfrac{-6-\sqrt{48}}{-2} = 3 + 2\sqrt{3}$. La fonction f_5 est donc concave sur $[0;1[$ (le dénominateur de la dérivée seconde est alors négatif), convexe sur $]1;3+2\sqrt{3}]$ et concave sur $[3+2\sqrt{3};+\infty[$. Voici l'allure de la courbe (je n'ai pas placé la tangente au point d'inflexion, le calcul de sa pente étant fastidieux) :

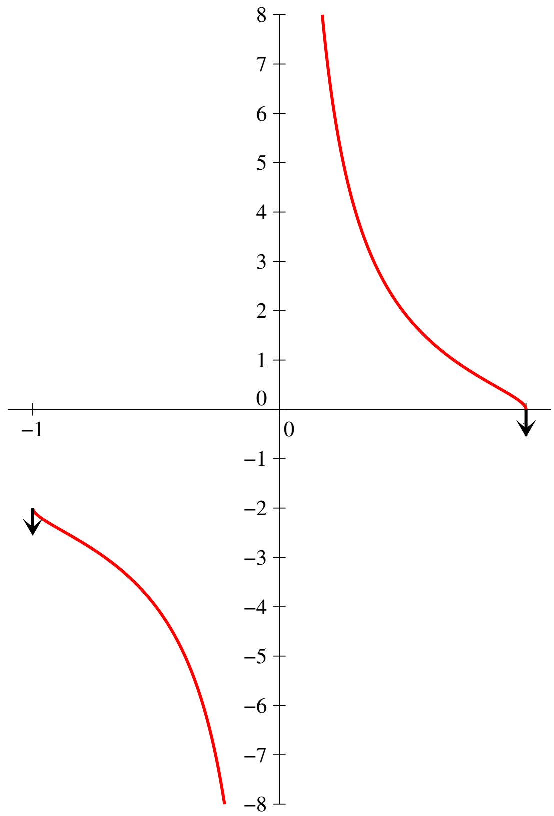


Fonctions rigolotes

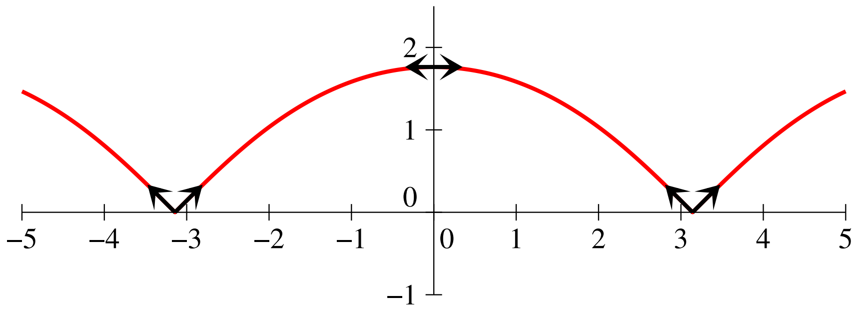
- Pour que la fonction g_1 soit définie, il faut avoir $\ln(\ln(\ln(x))) > 0$, donc $\ln(\ln(x)) > 1$, donc $\ln(x) > e$, soit enfin $x > e^e$. La fonction est dérivable (et accessoirement croissante puisque composée de fonctions croissantes) sur son domaine de définition. Calculons tout de même sa dérivée, en procédant par compositions successives : $(\ln(\ln(x)))' = \dfrac{1}{x}\dfrac{1}{\ln(x)} = \dfrac{1}{x\ln(x)}$, donc $(\ln(\ln(\ln(x))))' = \dfrac{1}{x\ln(x)} \times \dfrac{1}{\ln(\ln(x))}$, puis $g_1'(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)\ln(\ln(x))\ln(\ln(\ln(x)))}$. Il est (heureusement) inutile de calculer la dérivée seconde pour déterminer la concavité de la fonction : le dénominateur de la dérivée est une fonction strictement croissante et positive sur notre ensemble de défition, donc g_1' est décroissante et g_1 est concave (ce qui est cohérent si on songe qu'on parle de la courbe de ln et qu'on l'aplatit de plus en plus). Une allure de la courbe de cette fonction finalement peu intéressante (notons que la fonction s'annule en e^{e^e}, qui vaut plus de trois millions, la courbe a tout de même pour limite $+\infty$ en $+\infty$, mais la croissance est exceptionnellement lente !) :



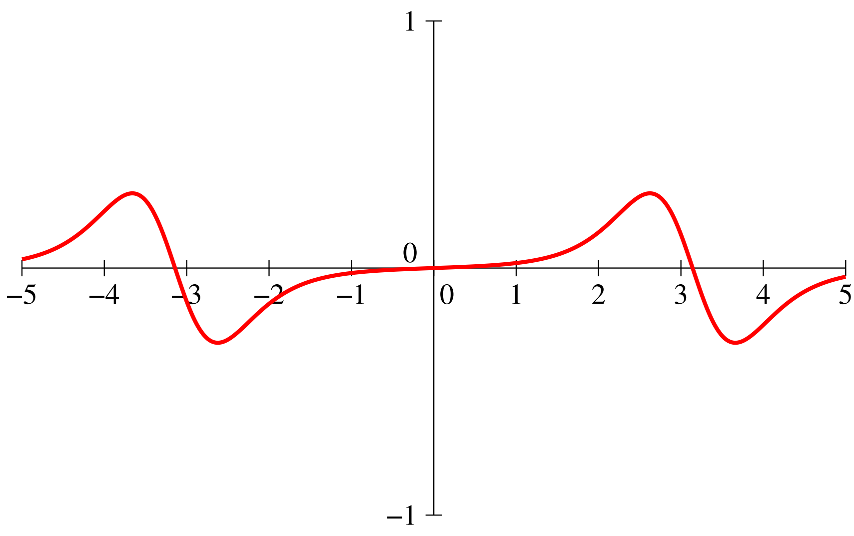
- La fonction g_2 est définie sur $[-1;1]\backslash\{0\}$ et a priori dérivable sur $]-1;0[$ et sur $]0;1[$, de dérivée $g_2'(x) = \dfrac{-\frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}}}{\arcsin^2(x)} = -\dfrac{\pi}{2\sqrt{1-x^2}\arcsin^2(x)}$ en utilisant le fait que $\arccos(x) + \arcsin(x) = \dfrac{\pi}{2}$. La fonction est donc décroissante sur chacun de ses deux intervalles de définition. Pas de prolongement envisageable en 0, où la fonction admet des limites infinies puisque $\arccos(0) = \dfrac{\pi}{2}$. En -1, on a $g_2(-1) = \dfrac{\pi}{-\frac{\pi}{2}} = -2$, et la courbe admet une tangente verticale en ce point, puisque la dérivée y tend vers $-\infty$. De même en 1, où on a $g_2(1) = \dfrac{0}{\frac{\pi}{2}} = 0$. Dans un grand élan de motivation, on peut tenter de calculer la dérivée seconde : $g_2''(x) = \dfrac{\pi}{2(1-x^2)\arcsin^4(x)} \times \left(\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\arcsin^2(x) + 2\arcsin(x)\right)$. Inutile d'aller plus loin, on ne saura pas étudier le signe de cette fonction. Mais les limites inifnies et les tangentes verticales imposent la présence d'au moins un point d'inflexion sur chacun des deux intervalles de définition de la fonction.



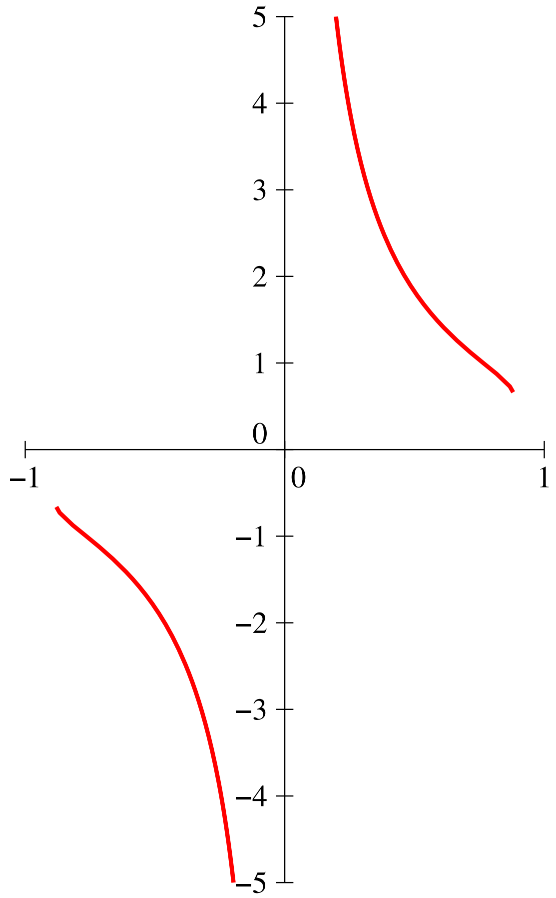
- La fonction g_3 est définie lorsque $2 + \cos(x) \geqslant 1$, ce qui est toujours vrai. Par contre, elle n'est a priori dérivable que si $2 + \cos(x) \neq 1$, puisque Argch n'est pas dérivable en 1, donc n'est pas dérivable si $x = (2k+1)\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Sa dérivée vaut $g_3'(x) = -\dfrac{\sin(x)}{\sqrt{(2+\cos(x))^2 - 1}}$. Inutile de développer le dénominateur, on sait déjà que ce qui est sous la racine carrée sera toujours potitif, mais s'annulera pour $x = (2k+1)\pi$. Le numérateur s'annulant également pour ces valeurs, il se pourrait toutefois que la fonction y soit dérivable. Comme g_3 est 2π-périodique, on peut se contenter de regarder ce qui se passe en π. On peut alors écrire $g_3'(x) = \dfrac{\sin(x-\pi)}{\sqrt{(2-\cos(x-\pi))^2 - 1}}$. Posons $X = x - \pi$, qui aura le bon goût de tendre vers 0. On cherche alors la limite en 0 de $h(X) = \dfrac{\sin(X)}{\sqrt{4 - 4\cos(X) + \cos^2(X) - 1}}$. Le trinôme sous la racine peut se factoriser, 1 étant racine évidente, sous la forme $3 - 4\cos(X) + \cos^2(X) = (1-\cos(X))(3-\cos(X))$. On obtient alors, en utilisant l'équivalent classique de $1 - \cos(X)$ en 0, $h(X) = \dfrac{\sin(X)}{\sqrt{(1-\cos(X))(3-\cos(X))}} \underset{0}{\sim} \dfrac{X}{\sqrt{\frac{X^2}{2} \times 2}} \sim 1$ si $X \geqslant 0$ (ça tend vers -1 en 0^- puisqu'on a alors $\sqrt{X^2} = -X$). Ouf, finalement, $\lim\limits_{x \to \pi_+} g_3'(x) = 1$, et $\lim\limits_{x \to \pi_-} g_3'(x) = -1$. En chaque point de la forme $(2k+1)\pi$, la fonction g_3 admet donc deux demi-tangentes (mais n'est pas dérivable), de pente -1 à gauche et de pente 1 à droite. La dérivée étant par ailleurs de signe opposé à celui de $\sin(x)$, la fonction g_3 est croissante sur chaque intervalle $[(2k-1)\pi; 2k\pi]$, et décroissante sur les intervalles $[2k\pi; (2k+1)\pi]$. Les maxima locaux se trouvent tous à une hauteur $\mathrm{Argch}(3) = \ln(3 + \sqrt{8})$ (je me permets d'utiliser a formule $\mathrm{Argch}(x) = \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}}$ vue en exercice en début d'année, mais qui est hors programme ; sinon on résout l'équation $\mathrm{ch}(x) = 3$ en revenant aux exponentielles et en se ramenant à une équation du second degré, ce n'est pas très compliqué), les minima locaux, qui correspondent aux points où la fonction n'est pas dérivable, sont à hauteur $\mathrm{Argch}(1) = 0$. La dérivée seconde vaut $g_3''(x) = \dfrac{-\cos(x)(1+\cos(x))(3+\cos(x)) + \sin(x)(-4\sin(x) - 2\sin(x)\cos(x))}{(1+\cos(x))(3+\cos(x))} = \dfrac{\cos^3(x) - 3\cos(x) - 4}{(1+\cos(x))(3+\cos(x))}$ si je ne me suis pas trompé dans les calculs (on remplace évidemment tous les $\sin^2$ par des $1-\cos^2$). Miracle, le numérateur est tout le temps négatif, donc la fonction est concave sur chcaun de ses intervalles de dérivabilité. Une allure de courbe :



- La fonction g_4 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $g_4'(x) = \dfrac{\cos(x)(\cos(x)+2)^4 + 4\sin^2(x)(\cos(x)+2)^3}{(\cos(x)+2)^8} = \dfrac{\cos^2(x) + 2\cos(x) + 4\sin^2(x)}{(\cos(x)+2)^5}$ $= \dfrac{-3\cos^2(x) + 2\cos(x) + 4}{(\cos(x)+2)^5}$. On peut poser $X = \cos(x)$ pour chercher les valeurs d'annulation de la dérivée : $-3X^2 + 2X + 4$ a pour discriminant $\Delta = 4 + 48 = 52$ et admet deux racines réelle $X_1 = \dfrac{-2-\sqrt{52}}{-6} = \dfrac{1+\sqrt{13}}{3}$, qui est strictement supérieure à 1 donc à oublier pour ce qui nous concerne, et $X_2 = \dfrac{1-\sqrt{13}}{3}$, qui est négative et supérieure à -1. La dérivée s'annule donc pour $x = \pm\arccos\left(\dfrac{1-\sqrt{13}}{3}\right) + 2k\pi$ (puisque la fonction est évidemment 2π-périodique, mais aussi impaire). Les plus curieux constateront que $\dfrac{1+\sqrt{13}}{3}$ est très proche de $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, ce qui signifie que les maxima sont proches de $\pm\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$. On pourrait calculer la valeur exacte de $g_4(x)$ pour ces valeurs (on connait le cosinus et le sinus s'en déduit) mais ça présente pas franchement d'interêt. Je ne parle même pas de la dérivée seconde qui va être horrible (mais qu'on pourra sûrement mettre sous forme de polynôme en $\cos(x)$ au numérateur). Une allure de la courbe :



- Il faut déjà réussir à déterminer le domaine de définition de cette fonction. Pour qu'elle soit définie, il faut avoir $\mathrm{sh}(x) \in [-1;1]\backslash\{0\}$. La fonction sh étant strictement croissante, impaire (la fonction g_5 sera donc aussi impaire), et s'annulant donc en 0, il suffit de résoudre l'équation $\mathrm{sh}(x) = 1$, soit $e^x - e^{-x} = 2$. En posant $X = e^x$, on se ramène à $X^2 - 2X - 1 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 4 + 4 = 8$, et admet pour unique racine positive $X = \dfrac{2+\sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2}$. Autrement dit, $\mathrm{sh}(x) = 1$ pour $x = \ln(1+\sqrt{2})$. On en déduit que $\mathcal{D}_{g_5} = [-\ln(1+\sqrt{2}); 0[\cup]0; \ln(1+\sqrt{2})]$. Aucun prolongement par continuité envisageable en 0, où les limites seront infinies. Par contre, la fonction est définie en $\pm\ln(1+\sqrt{2})$, et $g_5(\ln(1+\sqrt{2}) = \dfrac{1}{\arcsin(1)} = \dfrac{2}{\pi}$. La fonction est dérivable sur son domaine de définition, sauf a priori en $\pm\ln(1+\sqrt{2})$ puisque arcsin n'est pas dérivable en -1 et en 1. Sa dérivée vaut $\dfrac{-\frac{\mathrm{ch}(x)}{\sqrt{1-\mathrm{sh}^2(x)}}}{\arcsin^2(\mathrm{sh}(x))}$, qui est très clairement négative partout où elle est définie. Il y aura par ailleurs des tangentes verticales en $\pm\ln(1+\sqrt{2})$, où la dérivée a des limites infinies. On ne se lancera pas dans un calcul de dérivée seconde ici, voici une allure de la courbe :



Feuille d'exercices n°13 : Dérivation.

PTSI B Lycée Eiffel

22 mars 2013

Exercice 1 (* à **)

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le domaine de dérivabilité et étudier l'existence de tangentes (éventuellement verticales) aux points posant problème. On essaiera également, lorsque c'est possible, d'étudier les variations de la fonction et d'en tracer une allure de courbe représentative. Si on a encore plus de temps à perdre, on poussera même le zèle jusqu'à tenter d'étudier la convexité de la fonction.

- $f_1(x) = e^{x+\frac{1}{x}}$
- $f_2(x) = x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$
- $f_3(x) = (x^2 - 1)\arccos(x^2)$
- $f_4(x) = \sqrt{x}e^{-x}$
- $f_5(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$
- $f_6(x) = xe^{\frac{1}{\ln(x)}}$
- $f_7(x) = x\sqrt{x+x^2}$
- $f_8(x) = \dfrac{x\sqrt{x}}{e^x - 1}$
- $f_n(x) = x^n \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Exercice 2 (**)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^{2n}$. Calculer la dérivée n-ème de f de deux façons différentes (directement, et à l'aide de la formule de Leibniz en écrivant f sous forme de produit), puis en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Exercice 3 (*)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable. À quelle condition la fonction $g : x \mapsto |f(x)|$ est-elle dérivable en a ? Donner dans ce cas l'expression de $g'(a)$.

Exercice 4 (**)

Soit $f : [0; a] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, telle que $f(0) = f(a) = f'(0) = 0$.

1. Montrer que la dérivée de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ s'annule sur $]0; a[$.
2. En déduire que la courbe de f admet une tangente passant par l'origine autre que celle en 0.

Exercice 5 (*)

Montrer qu'une fonction dérivable est Lipschitzienne si et seulement si sa dérivée est bornée.

Exerice 6 (***)

Soit f la fonction définie (et $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

1. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$, où P_n est un polynôme dont on précisera le degré. on donnera également une relation entre P_{n+1}, P_n et P_n'.
2. Calculer P_1, P_2 et P_3, et déterminer leur racines (si possible).
3. En appliquant la formule de Leibniz à l'égalité $(1+x^2)f(x) = 1$, montrer que, $\forall n \geqslant 1$, $P_{n+1}(x) + 2(n+1 = xP_n(x) + n(n+1)(1+x^2)P_{n-1}(x) = 0$.
4. En déduire que $P_n'(x) = -n(n+1)P_{n-1}(x)$.
5. Les polynômes P_n peuvent-ils avoir des racines réelles multiples ?

Exercice 7 (***)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1-x^2)^n$, où n est un entier naturel non nul. Montrer que $f^{(n)}$ est un polynôme de degré n admettant exactement n racines simples réelles comprises entre -1 et 1 (une récurrence pourrait être utile, mais pas forcément sur l'entier n).

Exercice 8 (**)

1. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$ et dérivables sur $]a;b[$. Montrer qu'il existe $x \in]a;b[$ tel que $f'(x)(g(b)-g(a)) = g'(x)(f(b)-f(a))$.
2. En déduire la règle de l'Hôpital : Si f et g s'annulent toutes les deux en un point a, sont continues et dérivables au voisinage de a (sauf éventuellement en a pour la dérivabilité), ne s'annulent pas au voisinage de a, et vérifient $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$.
3. En déduire les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$.

Exercice 9 (***)

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y)(1-f(x)f(y)) = f(x)+f(y)$.

1. Calculer $f(0)$.
2. Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{f'(x)}{1+f(x)^2} = f'(0)$.
3. Montrer qu'il existe deux constantes a et b telles que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arctan(f(x)) = ax+b$.
4. En déduire que f est constante, et conclure.

Exercice 10 (**)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{4}(2-u_n^2)$.

1. On note f la fonction définie par $f(x) = x + \dfrac{1}{4}(2-x^2)$. Étudier les variations de f et déterminer ses points fixes.
2. Montrer que $\forall x \in [1;2]$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$, et que $f([1;2]) \subset [1;2]$.
3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1;2]$, et que $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|$.

4. Prouver par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \sqrt{2}| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$, et en déduire la limite de la suite (u_n).
5. À partir de quel rang a-t-on $|u_n - \sqrt{2}| \leqslant 10^{-9}$?

Exercice 11 (**)

On considère la fonction f définie sur $]0; \frac{1}{e}[\cup]\frac{1}{e}; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{\ln x + 1}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. La fonction prolongée est-elle dérivable en 0 ?
2. Étudiez les variations de f et tracer l'allure de sa courbe représentative.
3. Déterminer les points fixes de f.
4. On définit une suite (x_n) par $x_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$.
   (a) Étudiez sur $\mathbb{R}_+$ la fonction $g : x \mapsto \dfrac{x}{(x+1)^2}$, en déduire que $\forall x \in]1; +\infty[$, $0 \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{1}{4}$.
   (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_{n+1} - 1| \leqslant \dfrac{1}{4}|x_n - 1|$, puis que $|x_n - 1| \leqslant \dfrac{1}{4^n}$.
   (c) En déduire la limite de la suite (x_n).

Exercice 12 (*)

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x}{\sinh(x)}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son ensemble de définition. Quelle est sa parité ?
2. Montrer que f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$, et que son prolongement est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Préciser les valeurs de $f'(0)$ et $f''(0)$.
3. Résoudre l'équation $\sinh(x) = 1$, on note α sa solution. Vérifier que $\alpha \in]0; 1[$ et calculer $\cosh(\alpha)$.
4. Étudier le signe sur $\mathbb{R}$ de $\cosh(t) - t$, puis prouver que $\forall t \geqslant 0$, $0 \leqslant t\cosh(t) - \sinh(t) \leqslant \dfrac{1}{2}\sinh^2(t)$.
5. Montrer que f est Lipschitizienne sur $\mathbb{R}$.
6. On définit une suite (u_n) par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Déterminer la nature de la suite (u_n).

Problème (***)

Le but de ce problème est d'étudier numériquement les solutions d'équations du type $x^n + x^{n-1} + \cdots + x = a$.

1. **Résolution numérique de l'équation** $x^2 + x - 1 = 0$.
   On considère dans cette question la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.
   (a) Montrer que l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ a une seule racine dans l'intervalle $]0; 1[$ et préciser la valeur de cette racine, qu'on notera désormais r_2.
   (b) Montrer que, $\forall x \in \left[\dfrac{1}{2}; 1\right]$, $f(x) \in \left[\dfrac{1}{2}; 1\right]$.
   (c) Calculer la dérivée f' de f et prouver que, $\forall x \in \left[\dfrac{1}{2}; 1\right]$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{4}{9}$.
   (d) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - r_2| \leqslant \left(\dfrac{4}{9}\right)^n$, et en déduire la convergence de (u_n).

2. **Résolution numérique de l'équation** $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$.
   On considère désormais la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$.
   (a) Montrer que l'équation $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ a une unique solution r_3 appartenant à $]0;1[$.
   (b) Montrer que l'intervalle $\left[\dfrac{1}{3};1\right]$ est stable par g.
   (c) Calculer les dérivées g' et g'' et déterminer le maximum de $|g'(x)|$ sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{3};1\right]$.
   (d) On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = g(v_n)$. Majorer $|v_n - r_3|$ en fonction de n, et prouver la convergence de (v_n) vers r_3.
3. **Racine positive de l'équation** $x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x - a = 0$.
   On désigne désormais par a un réel strictement positif, et on note, pour tout entier $n \geqslant 2$, h_n la fonction définie par $h_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x - a$.
   (a) Montrer que sur l'intervalle $]0;+\infty[$, l'équation $h_n(x) = 0$ possède une unique racine qu'on notera t_n, puis que $t_n \in]0;1[$ si $n > a$.
   (b) Montrer que $(x-1)h_n(x) = x^{n+1} - (a+1)x + a$.
   (c) Montrer que $h_{n+1}(t_n) > h_n(t_n)$, et en déduire que la suite (t_n) est strictement décroissante, puis qu'elle converge vers une limite qu'on notera désormais α.
   (d) Montrer que, si $A \in \mathbb{N}$, on aura $0 < t_n^n \leqslant t_A^n$ si $n \geqslant A$. En déduire, en choisissant $A > a$, que $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n^n = 0$.
   (e) Exprimer la limite α en fonction de a.
4. **Racine positive de l'équation** $nx^n + (n-1)x^{n-1} + \cdots + 2x^2 + x - a = 0$.
   On note dans cette partie $i_n(x) = nx^n + (n-1)x^{n-1} + \cdots + 2x^2 + x - a$.
   (a) Montrer que l'équation $i_n(x) = 0$ possède une unique solution sur $]0;+\infty[$, et que cette solution appartient à l'intervalle $]0;1[$ si $n(n+1) > 2a$. On notera cette solution y_n.
   (b) Prouver la relation $(x-1)^2 i_n(x) = nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x - a(x-1)^2$.
   (c) Montrer que $i_{n+1}(y_n) > i_n(y_n)$. En déduire la décroissance de la suite (y_n), et sa convergence vers un réel $\beta \in [0;1[$.
   (d) Montrer que $0 \leqslant ny_n^n \leqslant ny_A^n$ dès que $n \geqslant A$, où $A(A+1) \geqslant 2a$. En déduire la limite de la suite (ny_n^n), puis déterminer β en fonction de a.

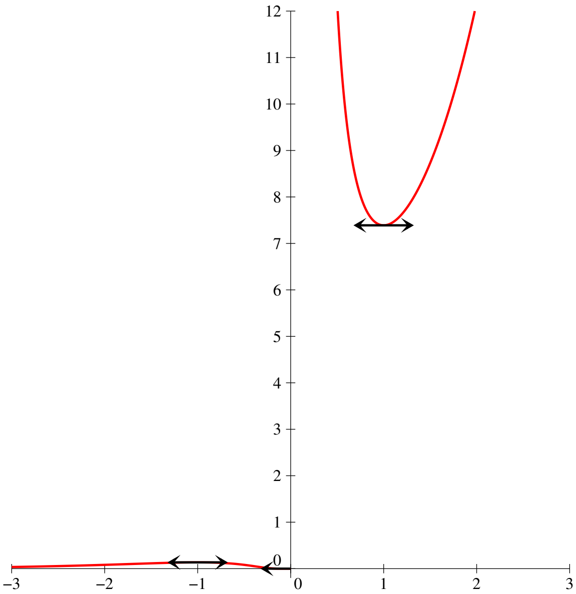
Corrigé de la feuille d'exercices n°13

Exercice 1 (* à **)

- La fonction f_1 est définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$. De plus, $\lim\limits_{x\to 0^+} x+\dfrac{1}{x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f_1(x) = +\infty$. De même, $\lim\limits_{x\to 0^-} x+\dfrac{1}{x} = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^-} f_1(x) = 0$. On peut prolonger la fonction f_1 seulement par continuité à gauche en 0, en posant $f_1(0) = 0$. Dérivons désormais : $f_1'(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right) e^{x+\frac{1}{x}} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x^2} e^{x+\frac{1}{x}}$. Commençons par constater que $\lim\limits_{x\to 0^-} f_1'(x) = 0$ (le facteur équivalent à $\dfrac{1}{x^2}$ qui est apparu en dérivant est négligeable devant l'exponentielle), donc d'après le théorème du prolongement $\mathcal{C}^1$, f_1 est dérivable à gauche en 0 et y admet une tangente horizontale. Les variations sont par ailleurs faciles à étudier, on peut calculer les valeurs des extrema locaux : $f_1(-1) = e^{-1-1} = \dfrac{1}{e^2}$, et $f_1(1) = e^2$. On peut dresser le tableau de variations suivant (les limites aux infinis ne posent aucun problème, et on peut constater facilement qu'il y a une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$ si on le souhaite) :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f_1	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e^2}$	$\searrow$	$0 \parallel +\infty$	$\searrow$	e^2	$\nearrow$	$+\infty$

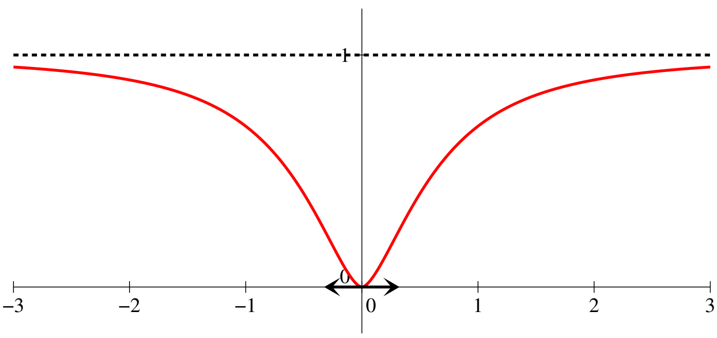
Enchaînons donc courageusement sur la dérivée seconde : $f''(x) = \left(\dfrac{2}{x^3} + \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)^2\right) e^{x+\frac{1}{x}} = \dfrac{x^4 - 2x^2 + 2x + 1}{x^4} e^{x+\frac{1}{x}}$. Pas de chance, le numérateur, dont il faudrait étudier le signe, n'a pas l'ombre d'une racine évidente, on est bloqués. On peut deviner au vu des variations qu'il existe au moins un point d'inflexion sur $]-\infty;-1[$ et un autre sur $]-1;0[$, mais c'est tout (en fait, il y a effectivement exactement deux points d'inflexion). Une allure de la courbe :



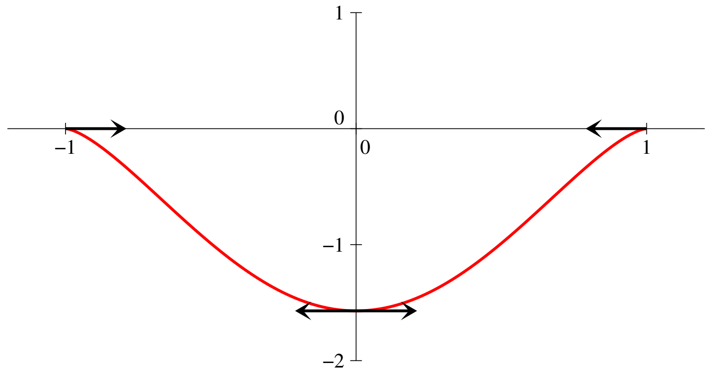
- La fonction f_2 est définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ (ce qui est dans le ln étant toujours strictement positif). Elle est de plus manifestement paire et accessoirement à valeurs positives. Attention à ne pas appliquer l'équivalent classique du $\ln(1+x)$ quand on n'a pas le droit de le faire. Ici, on peut sûrement écrire que $f_2(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} x^2 \times \dfrac{1}{x^2} \sim 1$, mais pas quand x tend vers 0. En 0, écrivons plutôt que $f_2(x) = x^2 \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right) = x^2\ln(x^2+1) - x^2\ln(x^2)$. Le premier terme a pour limite 0, le deuxième aussi (par croissance comparée), donc on peut prolonger f_2 par continuité en 0 en posant $f_2(0) = 0$. Passons à la dérivée : $f_2'(x) = 2x\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) + x^2 \times \dfrac{-2}{x^3} \times \dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 2x\left(\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) - \dfrac{1}{x^2+1}\right)$. Pas de problème pour la limite en 0, la même technique que tout à l'heure (pour le produit de $2x$ par le ln, l'autre morceau tendant facilement vers 0) permet de prouver que $\lim\limits_{x\to 0} f_2'(x) = 0$, donc par théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$ (je me dispenserai de le citer pour les fonctions suivantes), la fonction f_2 est dérivable en 0, et $f_2'(0) = 0$. Pour les variations, ce n'est pas si simple, sur $\mathbb{R}^+$, la dérivée est du signe de $g(x) = \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) - \dfrac{1}{x^2+1}$. La dérivée de cette fonction g vaut $g'(x) = -\dfrac{2}{x(1+x^2)} + \dfrac{2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2x^2 - 2(1+x^2)}{x(1+x^2)^2} = \dfrac{-2}{x(1+x^2)^2}$. La fonction g est donc décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, de limite nulle en $+\infty$, donc elle est positive sur $]0;+\infty[$. La fonction f_2 est donc croissante sur $[0;+\infty[$, et par parité, décroissante sur $]-\infty;0]$. Résumons nos différents calculs dans un tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f_2	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

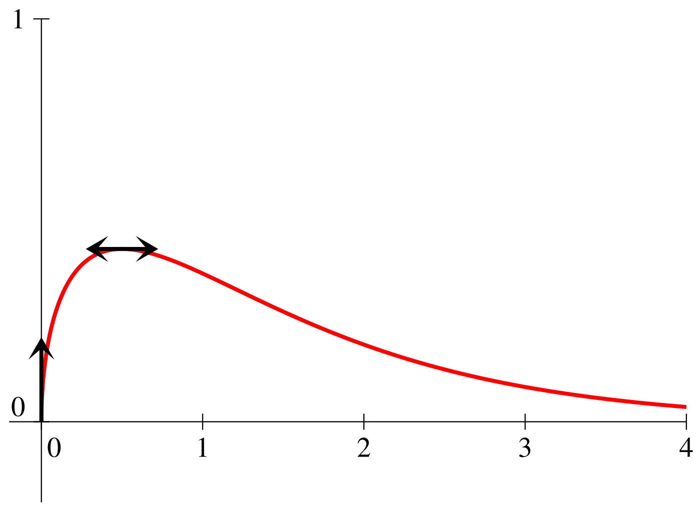
La motivation nous manque au moment de calculer la dérivée seconde, qu'on aurait effectivement bien du mal à étudier. Contentons-nous de constater une fois de plus qu'il y a sûrement un point d'inflexion sur $\mathbb{R}_+$ (et un autre symétrique sur $\mathbb{R}^-$), et donnons une allure de la courbe :



- La fonction f_3 est définie sur $[-1;1]$ (puisqu'il faut avoir $-1 \leqslant x^2 \leqslant 1$ pour que l'arccos soit défini), mais a priori $\mathcal{C}^\infty$ seulement sur $]-1;1[$. La fonction est de plus paire. Pas de prolongement par continuité à étudier (ni de limites pour f_3, contentons-nous de signaler que $f_3(-1) = f_3(1) = 0$). Passons donc tout de suite au calcul de la dérivée : $f_3'(x) = 2x\arccos(x^2) + (x^2-1) \times \dfrac{-2x}{\sqrt{1-x^4}} = 2x\left(\arccos(x^2) + \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\right)$. Cette dérivée est facilement positive sur $[0;1]$, et la fonction est dérivable en 1, avec $f_3'(1) = 2(\arccos(1) + \sqrt{0}) = 0$. La fonction admet par ailleurs un minimum en 0, de valeur $f_3(0) = -\arccos(0) = -\dfrac{\pi}{2}$. On peut sauter l'étape de la dérivée seconde qui va être affreuse, et donner directement une allure de la courbe :

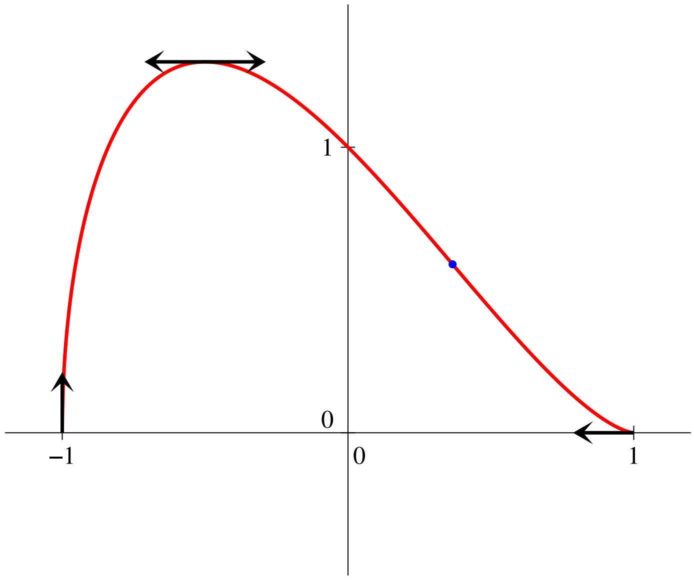


- La fonction f_4 est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;+\infty[$ (à cause de la racine carrée). Calculons la dérivée : $f_4'(x) = \left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)e^{-x} = \dfrac{1-2x}{2\sqrt{x}}e^{-x}$. En 0, cette dérivée a une limite infinie, la fonction f_4 n'est donc pas dérivable, mais la courbe admet en 0 une tangente verticale. La fonction est par ailleurs croissante sur $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$ et décroissante ensuite, avec pour maximum $f_4\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2e}}$. On peut enchaîner sur le calcul de la dérivée seconde : $f_4''(x) = \left(-\dfrac{1}{4x\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right)e^{-x} = \dfrac{4x^2-4x-1}{4x\sqrt{x}}e^{-x}$. Cette dérivée seconde est du signe de $4x^2-4x-1$, dont le discriminant vaut $\Delta = 16+16 = 32$, et qui admet donc deux racines $x_1 = \dfrac{4+\sqrt{32}}{8} = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$, et $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2} < 0$. La courbe aura donc un point d'inflexion d'abscisse $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ (et d'ordonnée $\sqrt{x_1}e^{-x_1}$, que l'on ne cherchera pas à expliciter ; je ne parle même pas de la tangente dont la pente sera horrible). Ce point n'est pas indiqué sur la courbe qui suit (par souci de lisibilité) :



- La fonction f_5 est définie et continue sur $[-1;1]$, mais a priori $\mathcal{C}^\infty$ seulement sur $]-1;1[$. Pour changer, dérivons : $f_5'(x) = -\sqrt{1-x^2} + (1-x) \times \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{-(1-x^2)-x(1-x)}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{2x^2-x-1}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{(x-1)(2x+1)}{\sqrt{1-x^2}} = -(2x+1)\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$. En -1, cette expression a une limite infinie, il y aura une tangente verticale ; par contre en 1, la limite est nulle, la fonction est donc dérivable en 1 et $f_5'(x) = 0$. Par ailleurs, la fonction est croissante sur $\left]0;\dfrac{1}{2}\right]$, et décroissante

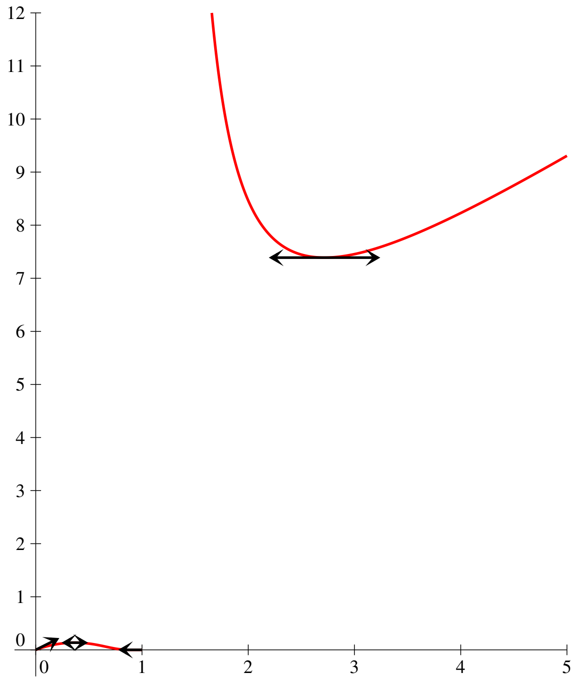
ensuite. Elle admet pour maximum $f_5\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{3}{4}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$. On peut enchaîner sur la dérivée seconde : $f_5''(x)=\dfrac{-2\sqrt{1-x^2}+\frac{(2x+1)\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x}}+\frac{(2x+1)\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1+x}}}{1+x}$
$=\dfrac{-4(1-x^2)+(2x+1)(1+x)+(2x+1)(1-x)}{2(1+x)\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{2x^2+2x-1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$, qui est du signe de $2x^2+2x-1$, dont le discriminant vaut $\Delta=4+8=12$, et s'annule donc en $x_1=\dfrac{-2+\sqrt{12}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$, et $x_2=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$, qui n'appartient pas à l'intervalle $[-1;1]$. Il y donc un seul point d'inflexion pour la courbe, qui est indiqué en bleu (mais sans tracé de la tengente, même si ici le calcul est faisable) sur la courbe suivante :



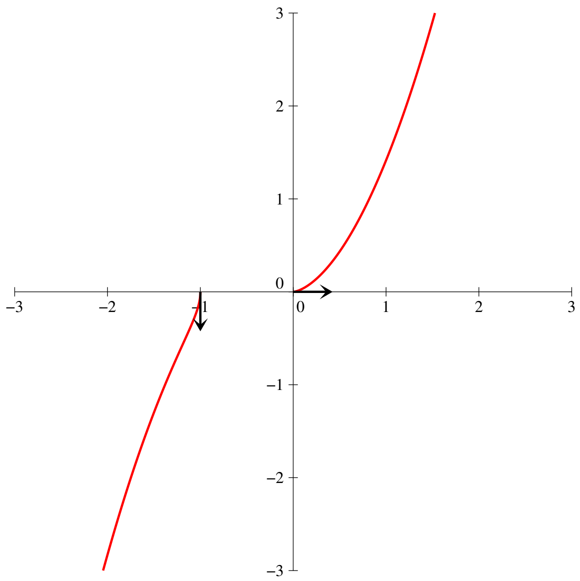
- La fonction f_6 est définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$. Comme $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{\ln(x)}}=1$, on peut prolonger f_6 par continuité en 0 en posant $f_6(0)=0$. En 1, f_6 est équivalente à $e^{\frac{1}{\ln(x)}}$, on calcule donc sans difficulté $\lim\limits_{x\to 1^-} f_6(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f_6(x)=+\infty$. On peut donc prolonger par continuité à gauche en 1 en posant $f_6(1)=0$, mais pas à droite. Passons à la dérivée : $f_6'(x)=\left(1-\dfrac{x}{x\ln^2(x)}\right)e^{\frac{1}{\ln(x)}}=\dfrac{\ln^2(x)-1}{\ln^2(x)}e^{\frac{1}{\ln(x)}}$. En 1, cette dérivée est équivalente à $-X^2e^X$, où on a posé $X=\dfrac{1}{\ln(x)}$. Comme $\lim\limits_{x\to 1^-} X=-\infty$, on en déduit par croissance comparée que $\lim\limits_{x\to 1^-} f_6'(x)=0$. La fonction admet donc en 1 une demi-tangente horizontale. En 0, la dérivée est plus simplement équivalente à $\dfrac{\ln^2(x)-1}{\ln^2(x)}\sim 1$, donc f_6 est aussi dérivable en 0, et $f_6'(0)=1$. Le signe de la dérivée est par ailleurs celui de $\ln^2(x)-1=(\ln(x)+1)(\ln(x)-1)$, qui s'annule en e et en $\dfrac{1}{e}$. On calcule $f_6(e)=e\times e^1=e^2$, et $f\left(\dfrac{1}{e}\right)=\dfrac{1}{e}\times e^{-1}=\dfrac{1}{e^2}$. On peut résumer toutes ces informations dans le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{1}{e}$		1		e		$+\infty$
f_6	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e^2}$	$\searrow$	$0 \;\Vert\; +\infty$	$\searrow$	e^2	$\nearrow$	$+\infty$

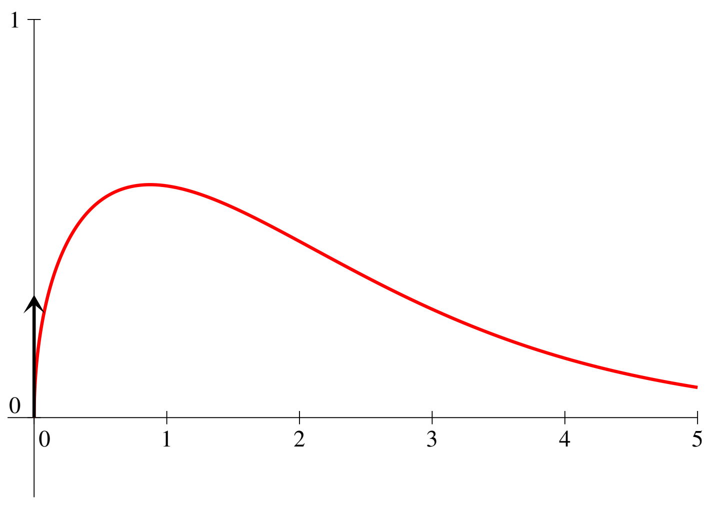
On évitera ici le calcul de dérivée seconde, par contre on peut étudier la branche infinie : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{\ln(x)}} = 1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_6(x)}{x} = 1$. De plus, $f_6(x) - x = x(e^{\frac{1}{\ln(x)}} - 1) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x}{\ln(x)}$ en utilisant l'équivalent classique de $e^x - 1$ en 0. Cette expression ayant une limite infinie (par croissance comparée), il y a en $+\infty$ une branche parabolique dirigée par la première bissectrice. On conclut par une belle courbe :



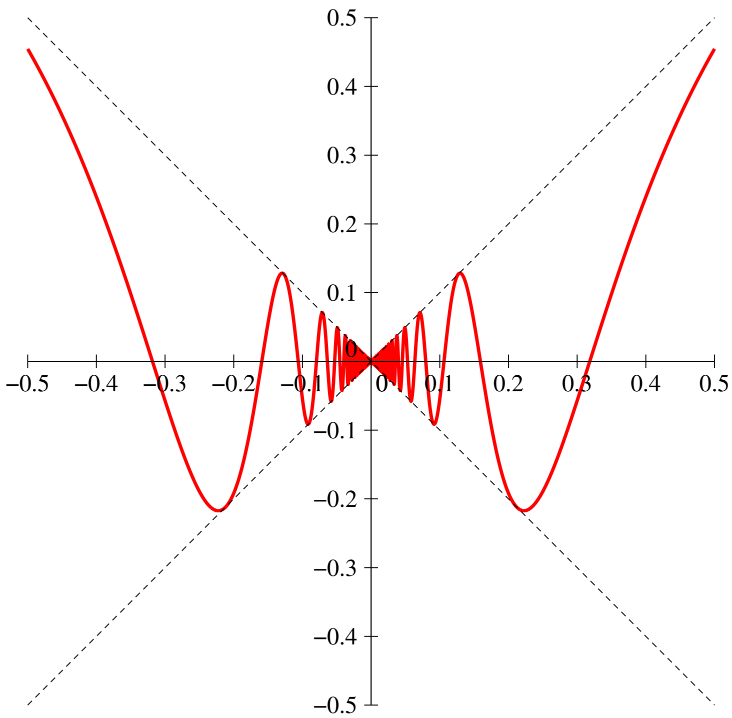
- La fonction f_7 est définie et continue sur $]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[$ mais $\mathcal{C}^\infty$ seulement sur $]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$ a priori. On peut ici calculer directement $f_7'(x) = \sqrt{x + x^2} + \dfrac{x(1+2x)}{2\sqrt{x+x^2}} = \dfrac{2x + 2x^2 + x + 2x^2}{2\sqrt{x+x^2}} = \dfrac{3x + 4x^2}{2\sqrt{x+x^2}} = \dfrac{(3+4x)\sqrt{x}}{2\sqrt{1+x}}$ si $x \geqslant 0$. Sur l'autre intervalle, $f_7'(x) = \dfrac{(3+4x)\sqrt{-x}}{-2\sqrt{-1-x}}$. En tout cas, on a une limite infinie, donc une tangente verticale, en -1, et une limite nulle en 0, où la fonction est donc dérivable avec une tangente horizontale. La dérivée est par ailleurs positive sur chacun des deux intervalles où f_7 est définie. Pour les plus courageux, le calcul de dérivée seconde est faisable (c'est assez approchant de ce qu'on a fait pour f_5) mais peu passionnant. On obtient par contre sans difficulté des branches paraboliques de direction (Oy) en $\pm\infty$, puisque $f_7(x) \underset{\pm\infty}{\sim} x \times \sqrt{x^2} \sim \pm x^2$. Une allure de courbe :



- La fonction f_8 est définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. De plus, $f_8(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x\sqrt{x}}{x} \sim \sqrt{x}$, donc on peut prolonger f_8 par continuité en 0 en posant $f_8(0) = 0$. Passons au calcul de la dérivée, pour laquelle on posera au numpérateur $x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}}$ pour se simplifier la vie : $f_8'(x) = \dfrac{\frac{3}{2}\sqrt{x}(e^x - 1) - x^{\frac{3}{2}}e^x}{(e^x - 1)^2} = \dfrac{\sqrt{x}(3e^x - 3 - 2xe^x)}{2(e^x - 1)^2}$. Comme $3e^x - 3 - 2xe^x = 3(e^x - 1) - 2xe^x \underset{x\to 0}{=} 3x + o(x) - 2x - o(x) \sim x$, $f_8'(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x\sqrt{x}}{2x^2} \sim \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. La fonction n'est pas dérivable en 0, elle y admet une tangente verticale. Les plus curieux noteront au passage que la fonction est équivalent en 0 à $\sqrt{x}$ et a une dérivée équivalente à $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, ce qui n'est sûrement pas un hasard. À propos de dérivée, le signe de $3e^x - 3 - 2xe^x$ n'a hélas rien d'évident, si on dérive on trouve du $3e^x - 2e^x - 2xe^x = e^x(1 - 2x)$. Notre expression est donc croissante sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ et décroissante ensuite, vaut 0 en 0 et a pour limite $-\infty$ en $+\infty$. Elle s'annule donc une fois, pour une valeur de x supérieure à $\dfrac{1}{2}$ et légèrement inférieure à 1 puisque $3e - 3 - 2e = e - 3 < 0$. On ne cherchera pas à en savoir plus, ni à calculer la dérivée seconde de f_8. Notons simplement que la croissance comparée permet d'affirmer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_8(x) = 0$, et traçons une allure de courbe :



- Pour finir en beauté, plein de fonctions d'un coup. Il était sous-entendu dans l'énoncé que n désignait un entier naturel, les fonctions sont donc toutes définies et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$. Si $n = 0$, la fonction n'a pas de limite en 0, on peut trouver facilement deux suites de réels tendant vers 0 mais dont la limite des images par f_0 est différente. Par exemple $f_0\left(\dfrac{1}{2n\pi}\right) = \sin(2n\pi) = 0$ mais $f_0\left(\dfrac{1}{(2n\pi + \frac{\pi}{2}}\right) = \sin\left(2n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) = 1$. D'après la caractérisation séquentielle de la limite, la fonction f_0 n'a pas de limite en 0. Toutes les autres fonctions sont par contre prolongeables par continuité en posant $f_n(0) = 0$, car on peut écrire l'encadrement $-x^2 \leqslant x^n \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \leqslant x^n$, qui suffit à assurer que $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) = 0$.
  Passons à la dérivée (si $n \neq 0$) : $f_n'(x) = nx^{n-1}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) + x^n \times \dfrac{-1}{x^2}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) = nx^{n-1}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - x^{n-2}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$. À partir de $n = 3$, pas de problème, tout cela va gentiment tendre vers 0 en faisant un petit encadrement, donc les fonctions f_n sont alors dérivables (avec une tangente horizontale) en 0. Pour $n = 2$, le premier terme tend vers 0 mais le deuxième n'a pas de limite (même raison que ci-dessus), la fonction n'est pas dérivable. Enfin, si $n = 1$, la dérivée vaut $\sin(X) - X\cos(X)$, où on a posé $X = \dfrac{1}{x}$. Là encore, il n'est pas difficile de construire des suites donnant des limites différentes pour cette expression en 0, donc la fonction n'est pas dérivable non plus. Ici, chercher à calculer la dérivée seconde ou même à étudier les variations n'a à peu près aucun intérêt. Pour information, voici une allure de la courbe de $x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ aux alentours de 0 (avec en pointillés les deux bissectrices entre lesquelles se trouve la courbe) :



Exercice 2 (**)

Par un calcul direct, on trouve $f'(x) = 2nx^{2n-1}$, puis $f''(x) = 2n(2n-1)x^{2n-2}$, jusqu'à $f^{(n)}(x) = 2n(2n-1)\dots(n+1)x^n = \dfrac{(2n)!}{n!}x^n$ (si on tient vraiment à faire une récurrence pour être ultra rigoureux, on peut). Autre méthode, on écrit $f(x) = g(x) \times g(x)$, où $g(x) = x^n$. Par la formule de Leibniz, $f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$. Or, par un calcul extrêmement similaire à celui des dérivées successives de f, $g^{(k)}(x) = n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$. On peut donc en déduire que $f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \dfrac{n!}{(n-k)!}x^{n-k} \times \dfrac{n!}{k!}x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \dfrac{n!^2}{k!(n-k)!}x^n = n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 x^n$. En comparant avec la première expression obtenue, on peut identifier : $n! \sum k = 0^n \binom{n}{k}^2 = \dfrac{(2n)!}{n!}$, soit $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \dfrac{(2n)!}{n! \times n!} = \binom{2n}{n}$ (et pour vous entrainer, à la maison, vous redémontrerez cette égalité par récurrence, ce qui est loin d'être trivial).

Exercice 3 (*)

Cherchons donc si le taux d'accroissement de g en a admet une limite : $\dfrac{g(a+h) - g(a)}{h} = \dfrac{|f(a+h)| - |f(a)|}{h} = \dfrac{|f(a+h)|^2 - |f(a)|^2}{h(|f(a)| + |f(a+h)|)}$. En écrivant les carrées des modules sous la forme du produit par le conjugué, $|f(a+h)|^2 - |f(a)|^2 = f(a+h)\overline{f(a+h)} - f(a)\overline{f(a)} = (f(a+h) - f(a))\overline{f(a+h)} + f(a)(\overline{f(a+h) - f(a)})$. En utilisant le fait que $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$ (et similairement avec le conjugué), on trouve donc $\lim_{h \to 0} \dfrac{g(a+h) - g(a)}{h} = \dfrac{f'(a)\overline{f(a)} + f(a)\overline{f'(a)}}{|f(a)|^2} = \dfrac{2\,\mathrm{Re}(f(a)f'(a))}{|f(a)|^2}$. La fonction g est donc dérivable si $f'(a) \neq 0$, et on peut alors dire que $g'(a) = \dfrac{2\,\mathrm{Re}(f(a)f'(a))}{|f(a)|^2}$.

Exercice 4 (**)

1. La fonction $g : x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est dérivable sur $]0; a]$. Par ailleurs, puisque $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 0$, on peut prolonger g par continuité en une fonction continue sur $[0; a]$ en posant $g(0) = 0$. Comme $g(a) = \dfrac{f(a)}{a} = 0$, la fonction g vérifie toutes les hypothèses du théorème de Rolle, et sa dérivée g' s'annule donc (au moins) une fois sur $]0; a[$.
2. La dérivée de la fonction g se calcule aisément : $g'(x) = \dfrac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$. Elle s'annule d'après la question précédente en un certain réel $c \neq 0$, qui vérifie donc $cf'(c) - f(c) = 0$, soit $cf'(c) = f(c)$. La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse c a donc pour équation $y = f'(c)(x - c) + f(c) = f'(c)x - cf'(c) + f(c) = f'(c)x$. Cette droite passe effectivement par l'origine.

Exercice 5 (*)

Si f est dérivable et k-Lipschitzienne, alors $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $\forall h \neq 0$, $\left|\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| \leqslant \left|\dfrac{k(x+h-x)}{h}\right| = k$, donc $|f'(x)| = \lim_{h \to 0} \left|\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| \leqslant k$, et la dérivée de f est bornée (par $-k$ et k si on tient à supprimer les valeurs absolues). Réciproquement, si la dérivée d'une fonction f est bornée par m

et M, en appliquant l'inégalité des accroissements finis sur $\mathcal{D}_f$ (ou n'importe quel intervalle inclus dans $\mathcal{D}_f$), on obtient immédiatement que $\forall y \geqslant x$, $m(y-x) \leqslant f(y) - f(x) \leqslant M(y-x)$, donc $|f(y) - f(x)| \leqslant \max(|m|, |M|)|y-x|$, donc f est k-Lipschitzienne en posant $k = \max(|m|, |M|)$.

Exercice 6 (***)

1. En calculant les premières dérivées (on peut avantageusement commencer l'exercice par la deuxième question ici), on devine que P sera un polynôme de degré n. Prouvons donc directement par récurrence que $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$, où $d^\circ(P_n) = n$. C'est vrai au rang $n = 0$ en posant brillamment $P_0 = 1$, qui est bien de degré 0. Supposons la propriété vraie au rang n, alors $f^{(n+1)(x)} = \left(\dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}\right)' = \dfrac{P_n'(x)(1+x^2)^{n+1} - (n+1) \times 2xP_n(x)(1+x^2)^n}{(1+x^2)^{2n+2}} = \dfrac{(1+x^2)P_n'(x) - 2(n+1)xP_n(x)}{(1+x^2)^{n+2}}$, qui est bien de la forme demandée en posant $P_{n+1} = (1+X^2)P_n' - 2(n+1)XP_n$. Reste à déterminer le degré de ce P_{n+1}, qui est bien un polynôme. Si on nota a_nX^n le coefficient dominant de P_n, alors celui de $(1+X^2)P_n'$ sera $X^2 \times na_nX^{n-1} = na_nX^{n+1}$, et celui de $2(n+1)XP_n$ sera $2(n+1)a_nX^{n+1}$, ce qui donne pour P_{n+1} un terme dominant égal à $-(n+2)a_nX^{n+1}$, ce qui prouve que P_{n+1} est de degré $n+1$ (puisque $n+2$ ne peut pas s'annuler).
2. Soit en utilisant les relations obtenues à la question précédentes, soit par un calcul directe, on trouve $f'(x) = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$, soit $P_1 = -2X$, qui a bien sûr pour unique racine 0 ; puis $f''(x) = \dfrac{-2(1+x^2)^2 + 8x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4} = \dfrac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$, donc $P_2 = 2(3X^2-1)$, qui admet deux racines réelles égales à $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; et enfin $f'''(x) = \dfrac{12x(1+x^2)^3 - 6x(6x^2-2)(1+x^2)^2}{(1+x^2)^6} = \dfrac{12x + 12x^3 - 36x^3 + 12x}{(1+x^2)^4} = \dfrac{24x(1-x^2)}{(1+x^2)^4}$, donc $P_3 = 24X(1-X^2)$, qui s'annule exactement trois fois, en 0, 1 et -1.
3. En effet, si $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, alors $(x^2+1)f(x) = 1$. On peut certainement appliquer la formule de Leibniz : en ponsant $g(x) = x^2+1$, alors $(fg)^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)}(x)f^{(n-k)}(x)$. Or, si $n \geqslant 1$, $(fg)^n(x) = 0$ puisque fg estla fonction constante égale à 1. Par ailleurs, les dérivées successives de la fonction g se calculent très facilement : $g'(x) = 2x$, $g''(x) = 2$, et ensuite plus rien. La formule de Leibniz se résume donc à $\binom{n}{0}g(x)f^{(n)}(x) + \binom{n}{1}g'(x)f^{(n-1)}(x) + \binom{n}{2}g''(x)f^{(n-2)}(x) = 0$, soit en reprenant les notations de la première question $(1+x^2) \times \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}} + 2nx\dfrac{P_{n-1}(x)}{(1+x^2)^n} + n(n-1)\dfrac{P_{n-2}(x)}{(1+x^2)^{n-1}}$. Quitte à tout multiplier par $(1+x^2)^n$ pour faire disparaitre les dénominateurs, on obtient $P_n(x) + 2nxP_{n-1}(x) + n(n-1)(1+x^2)P_{n-2}(x) = 0$. C'est exactement l'égalité demandée à un décalage près (on remplace tous les n par des $n+1$).
4. On compare la formule qu'on vient d'obtenir : $P_{n+1}(x) + 2(n+1)xP_n(x) + n(n+1)(1+x^2)P_{n-1}(x) = 0$, avec celle obtenue dans la première question : $P_{n+1}(x) = (1+x^2)P_n'(x) - 2(n+1)xP_n(x)$. On peut remplacer le $P_{n+1}(x)$ de la première équation par l'expression donnée par la deuxième, les termes en $2(n+1)xP_n(x)$ s'annulent et il ne reste que $(1+x^2)P_n'(x) + n(n+1)(1+x^2)P_{n-1}(x) = 0$, soit $P_n'(x) = -n(n+1)P_{n-1}(x)$.
5. On s'en doute, la réponse est non. Supposons donc que P_n admette une racine (au moins) double x, alors d'après la caractérisation des racines doubles, $P_n'(x) = 0$. La relation de la

question précédente implique alors $P_{n-1}(x) = 0$. Mais alors, comme $P_n(x) = (1+x^2)P'_{n-1}(x) - 2nxP_{n-1}(x)$ (c'est la relation de la première question, simplement décalée), on aura certainement $(1+x^2)P'_{n-1}(x) = 0$, puis $P'_{n-1}(x)$, et x sera donc racine double de P_{n-1}. Bon, mais en suivant le même raisonnement, x sera encore racine double de P_{n-2}, etc. Allez, faisons un raisonnement rigoureux : notons n_0 le plus petit entier naturel pour lequel P_n admet une racine double. Cet entier n'est sûrement pas égal à 0, puisque le polynôme P_0 n'a pas de racine (ni 1, 2 ou 3 d'ailleurs d'après les calculs de la deuxième question). Mais alors, si $n_0 \geqslant 1$, d'après le raisonnement précédent, P_{n_0-1} admet aussi une racine double (la même que P_{n_0}), ce qui contredit complètement la minimalité de l'entier n_0. Cet entier ne peut donc pas exister, et aucun des polynômes P_n n'admet de racine double.

Exercice 7 (***)

Comme le signale l'énoncé de l'exercice, on va faire, non pas une récurrence sur l'entier n, mais fixer ce n une bonne fois pour pour toutes et montrer par récurrence sur k que, $\forall k \leqslant n$, la fonction $f^{(k)}(x)$ s'annule (au moins) k fois entre -1 et 1 (et même dans $]-1;1[$ pour être précis). C'est évidemment vrai au rang 0 : la fonction f s'annule au moins 0 fois sur $]-1;1[$ (en l'occurence, elle ne s'annule effectivement pas puisque f s'annule uniquement en 1 et en -1, sauf pour $n = 0$). Supposons que notre dérivée k-ème s'annule bien k fois, en des valeurs que l'on va noter x_1, x_2, ..., x_k vérifiant $-1 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k < 1$. On sait par ailleurs que, comme $f(x) = (1-x^2)^n$, $f'(x) = -2nx(1-x^2)^{n-1}$, puis $f''(x) = -2n(1-x^2)^{n-1} + 2n(n-1)x^2(1-x^2)^{n-2} = (-2n(1-x^2) + 2n(n-1)x^2)(1-x^2)^{n-2}$ etc. On prouve par une récurrence facile que $f^{(k)}(x) = P_k(x)(1-x^2)^{n-k}$ pour tout entier $k \leqslant n$ (au-delà, ça ne marche plus !), où P_k est un polynôme que l'on ne cherchera absolument pas à expliciter (si vous y tenez, pour l'hérédité, on calcule $(P_k(x)(1-x^2)^{n-k})' = (P'_k(x)(1-x^2) - 2x(n-k)P_k(x))(1-x^2)^{n-k-1}$). Ce qui est important pour nous, c'est ce $(1-x^2)^{n-k}$ en facteur qui assure que, si $k \leqslant n-1$, $f^{(k)}(x)$ s'annule en 1 et en -1 en plus des racines déjà obtenues grâce à l'hypothèse de récurrence. On peut alors appliquer le théorème de Rolle sur chacun des intervalles $[-1, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{k-1}, x_k]$, $[x_k, 1]$. Puisque $f^{(k)}$ s'annule aux deux bornes de chacun de ces intervalles, sa dérivée $f^{(k+1)}$ s'annule à l'intérieur de chaque intervalle, ce qui prouve l'existence de $z_1 \in]-1, x_1[$, $z_2 \in]x_1, x_2[$, $\dots z_{k+1} \in]x_k, 1[$ annulant $f^{(k+1)}$. On a en particulier prouvé que $f^{(k+1)}$ s'annule (au moins) en $k+1$ réels distincts de l'intervalle $]-1, 1[$, ce qui prouve l'hérédité de notre récurrence. Puisque cette hérédité fonctionne jusqu'à $k = n-1$, la dernière propriété obtenue grâce à cette récurrence stipule que $f^{(n)}$ admet n racines distinctes dans $]-1;1[$. Or, en tant que dérivée n-ème d'un polynôme de degré $2n$, la fonction $f^{(n)}$ est certainement un polynôme de degré n, et ne peut donc admettre plus de n racines, ni de racine double si elle admet déjà n racines distinctes. Autrement dit, on est certain que les n racines trouvées sont les seules racines de $f^{(n)}$ et qu'elles sont simples. Accessoirement, elles sont toutes dans l'intervalle $]-1, 1[$.

Exercice 8 (**)

1. Posons donc $h : x \mapsto f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a))$. La fonction h est évidemment continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$. De plus, $h(a) = f(a)g(b) - f(a)g(a) - g(a)f(b) + g(a)f(a) = f(a)g(b) - g(a)f(b)$, et $h(b) = f(b)g(b) - f(b)g(a) - g(b)f(b) + g(b)f(a) = h(a)$. La fonction h vérifie les hypothèses du théorème de Rolle, sa dérivée s'annule sur $]a;b[$. Comme cette dérivée vaut $h'(x) = f'(x)(g(b) - g(a)) - g'(x)(f(b) - f(a))$, le point d'annulation de la dérivée vérifie exactement l'équation de l'énoncé.

2. Plaçons-nous sur un voisinage de a où toutes les hypothèses sont vérifiées, si on note b un point d'un tel voisinage, il existe d'après la question précédente un x entre a et b tel que $f'(x)g(b) = g'(x)f(b)$ (par hypothèse, $f(a) = g(a) = 0$), ou encore $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{f(b)}{g(b)}$. Si on fait tendre b vers

a, puisque x est compris entre a et b, x tend également vers a, donc $\lim\limits_{b\to a}\dfrac{f(b)}{g(b)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = l$.

3. On vérifie aisément que les hypothèses de la question précédente sont présentes : en posant $f(x) = 1-\cos(x)$ et $g(x) = x^2$, $f(0) = g(0) = 0$, les deux fonctions sont continues et dérivables partout, et les deux fonctions ne s'annulent pas sur $]-\pi;\pi[$. Enfin, $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{\sin(x)}{2x}$ a bien une limite finie en 0, en l'occurence $\dfrac{1}{2}$ en utilisant l'équivalent classique $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$. On conclut de l'application de la règle de l'Hôpital que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$, ou si on préfère que $1-\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$ (un autre équivalent classique, mais celui-ci ne peut pas être obtenu facilement).
Le deuxième cas est très similaire : on pose $f(x) = \ln(1+x)-x$ et $g(x) = x^2$, les deux fonctions s'annulent en 0, sont évidemment dérivables et $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{\frac{1}{1+x}-1}{2x} = \dfrac{-x}{(1+x)2x} = -\dfrac{1}{2(1+x)}$ a pour limite $-\dfrac{1}{2}$ en 0. On conclut comme précédemment que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$, ou encore que $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x-\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2)$. C'est le début du développement limité de la fonction $x\mapsto \ln(1+x)$ en 0, développement limité dont on peut obtenir la suite par la même méthode. Si on pose désormais $f(x) = \ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2$ et $g(x) = x^3$, les fonctions vérifient les hypothèses de la règle de l'Hôpital, et $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{\frac{1}{1+x}-1+x}{3x^2} = \dfrac{1+x^2-1}{3x^2(1+x)} = \dfrac{1}{3(1+x)}$, qui a pour limite $\dfrac{1}{3}$ quand x tend vers 0. Autrement dit, $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$. Vous pouvez deviner la suite, on le démontrera dans un prochain chapître.

Exercice 9 (***)

1. En posant $x = y = 0$, on trouve $f(0)(1-f(0)^2) = 2f(0)$, donc soit $f(0) = 0$, soit $1-f(0)^2 = 2$, ce qui est impossible car cela impliquerait $f(0)^2 = -1$. On peut donc conclure directement que $f(0) = 0$.

2. On fixe dans l'égalité précédente la valeur de y et on dérive pour obtenir $f'(x+y)(1-f(x)f(y)) - f'(x)f(y)f(x+y) = f'(x)$. Posons alors $x = 0$ et n'oublions pas que $f(0) = 0$ pour trouver $f'(y)-f'(0)f(y)^2 = f'(0)$, soit $f'(0)(1+f(y)^2) = f'(y)$, ou encore (on peut diviser, ça ne s'annule jamais) $\dfrac{f'(y)}{1+f(y)^2} = f'(0)$. La variable importe peu, on peut remplacer les y par des x pour trouver la formule de l'énoncé.

3. Notons $a = f'(0)$, on vient de prouver que $\dfrac{f'(x)}{1+f(x)^2} = a$, soit $(\arctan(f(x)))' = a$. Il suffit d'intégrer cette équation pour trouver $\arctan(f(x)) = ax+b$, où a et b sont effectivement deux constantes réelles.

4. Le problème de l'égalité précédente, c'est qu'on sait bien que la fonction arctan ne prend ses valeurs qu'entre -1 et 1. En particulier, $\arctan(f(x)) \in]-1,1[$ quelle que soit la fonction f. On devrait donc avoir, $\forall x\in\mathbb{R}$, $ax+b \in]-1,1[$. Ce n'est possible que si $a = 0$, donc si la fonction f est constante égale à b. Comme on sait que $f(0) = 0$, la constante b est nécessairement nulle, et la fonction f est donc nulle. Réciproquement, la fonction nulle est bien solution du problème posé.

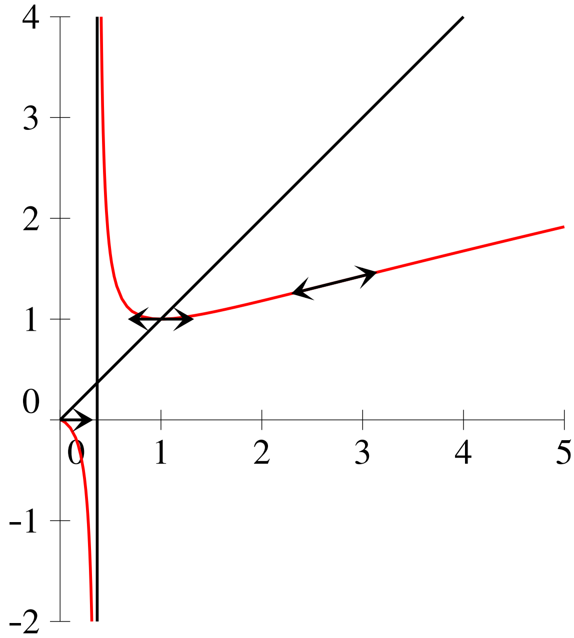
Exercice 10 (**)

1. La fonction f est C^∞ sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = 1 - \frac{1}{2}x$. Elle admet donc un maximum en $x = 2$, de valeur $f(2) = 1 + \frac{1}{4}(2-4) = \frac{3}{2}$, et est croissante sur $]-\infty; 2]$ et décroissante sur $[2; +\infty[$. Les points fixes sont déterminés en résolvant l'équation $f(x) = x$, c'est-à-dire $\frac{1}{4}(2 - x^2) = 0$, d'où deux points fixes pour $x = \sqrt{2}$ et $x = -\sqrt{2}$.
2. En effet, si $1 \leqslant x \leqslant 2$, $-1 \leqslant -\frac{1}{2}x \leqslant -\frac{1}{2}$ et $0 \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{2}$, donc $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$. Quant à l'image de $[1; 2]$ par f, comme la fonction est croissante sur cette intervalle, elle vaut $[f(1); f(2)] = \left[\frac{5}{4}; \frac{3}{2}\right] \subset [1; 2]$.
3. C'est une récurrence toute simple : $u_0 = 1 \in [1; 2]$, et si $u_n \in [1; 2]$, on a d'après la question précédente $f(u_n) \in [1; 2]$, soit $u_{n+1} \in [1; 2]$. Comme $u_n \in [1; 2]$ et $\sqrt{2} \in [1; 2]$, et que $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$ sur cet intervalle, on peut appliquer l'IAF entre u_n et $\sqrt{2}$ et obtenir $|f(u_n) - f(\sqrt{2})| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|$. Comme $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ (c'est un point fixe de f) et $f(u_n) = u_{n+1}$ (par définition), on a bien $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|$.
4. Prouvons par récurrence $P_n : |u_n - \sqrt{2}| \leqslant \frac{1}{2^n}$. Pour $n = 0$, la propriété P_0 stipule que $|1-\sqrt{2}| \leqslant 1$, ce qui est vrai. Supposons désormais P_n vraie, on a alors d'après la question précédente $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|$, et par ailleurs, par hypothèse de récurrence $|u_n - \sqrt{2}| \leqslant \frac{1}{2^n}$. On peut combiner les deux inégalités pour obtenir $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leqslant \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}$. Cela prouve P_{n+1} et achève la récurrence.
   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, et $0 \leqslant |u_n - \sqrt{2}| \leqslant \frac{1}{2^n}$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \sqrt{2}| = 0$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}$.
5. On sait que l'inégalité sera vérifiée dès que $\frac{1}{2^n} \leqslant 10^{-9}$, soit en passant au logarithme $-n\ln 2 \leqslant -9\ln 10$, ou encore $n \geqslant \frac{9\ln 10}{\ln 2} \simeq 30$. Il faut donc calculer le trentième terme de la suite pour être certain d'avoir une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-9} près. En pratique, on constate en fait que le terme u_{19} est déjà une valeur approchée à 10^{-9} près.

Exercice 11 (**)

1. En effet, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$ (pas de forme indéterminée). De plus, f est dérivable et C^1 sur $\left]0; \frac{1}{e}\right[$, de dérivée $f'(x) = \frac{\ln x + 1 - 1}{(\ln x + 1)^2} = \frac{\ln x}{(\ln x + 1)^2}$, qui a également pour limite 0 en 0 (c'est par exemple équivalent en 0 à $\frac{1}{\ln x}$). D'après le théorème de prolongement C^1, la fonction f est donc dérivable en 0, et $f'(0) = 0$.
2. On a déjà calculé f', il est donc facile de constater que f est décroissante sur $\left[0; \frac{1}{e}\right[$ et sur $\left]\frac{1}{e}; 1\right]$, et croissante sur $[1; +\infty[$. On a par ailleurs $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (croissance comparée), et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, donc il y a une branche parabolique de direction (Ox) en $+\infty$. Par ailleurs,

$\lim_{x\to\frac{1}{e}^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to\frac{1}{e}^+} f(x) = +\infty$ (pas de difficulté non plus, il suffit de constater que $\ln x + 1$ est négatif à gauche de $\frac{1}{e}$ et positif à droite). Les plus courageux calculeront $f''(x) = \frac{1}{x(\ln x+1)^2} - \frac{2\ln(x)}{x(\ln x+1)^3} = \frac{1-\ln x}{x(\ln x+1)^3}$ (j'ai dérivé le quotient comme le produit de $\ln x$ et de $\frac{1}{(\ln x+1)^2}$ car c'est un peu plus facile à écrire), et en déduiront que la courbe admet un point d'inflexion pour $x = e$, de hauteur $f(e) = \frac{e}{2}$, et dont la tangente a pour pente $f'(e) = \frac{1}{4}$. On peut ainsi tracer la courbe suivante :



3. Résolvons $f(x) = x$. Si on élimine la valeur 0 (qui est effectivement un point fixe de f), on peut simplifier par x et obtenir $\frac{1}{\ln x+1} = 1$, soit $\ln x + 1 = 1$, donc $x = 1$. Il y a donc deux points fixes : 0 et 1.

4. (a) La fonction g est C^∞ sur $\mathbb{R}_+$, de dérivée $g'(x) = \frac{(x+1)^2 - 2x(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{1-x}{(x+1)^3}$. Elle admet donc un maximum en 1, de valeur $g(1) = \frac{1}{4}$. Comme $g(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$, on en déduit que $\forall x \geqslant 0$, $0 \leqslant g(x) \leqslant \frac{1}{4}$. Or, on a $f'(x) = g(\ln x)$. Si $x \geqslant 1$, $\ln x \geqslant 0$, et on peut lui appliquer l'inégalité précédente : $0 \leqslant g(\ln x) \leqslant \frac{1}{4}$, c'est-à-dire $0 \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{4}$.

   (b) Pour appliquer l'IAF, il faut d'abord vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [1; +\infty[$. En constatant que l'intervalle $[1; +\infty[$ est stable par f, on peut le prouver par une simple récurrence : $x_0 = 2 \geqslant 1$, et en supposant $x_n \geqslant 1$, on obtient, en utilisant la croissance de f sur $[1; +\infty[$, $f(x_n) \geqslant f(1) = 1$, donc $x_{n+1} \geqslant 1$, ce qui achève la récurrence.

   On a donc $1 \in [1; +\infty[$ et $x_n \in [1; +\infty[$. De plus, $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{4}$ sur $[1; +\infty[$. En appliquant l'IAF, on obtient donc $|f(x_n) - f(1)| \leqslant |x_n - 1|$, soit $|x_{n+1} - 1| \leqslant \frac{1}{4}|x_n - 1|$.

   Prouvons ensuite par récurrence la propriété P_n : $|x_n - 1| \leqslant \frac{1}{4^n}$. Pour $n = 0$, P_0 stipule que $|2 - 1| \leqslant 1$, ce qui est vrai. Supposons ensuite P_n vraie, on obtient alors $|x_{n+1} - 1| \leqslant$

$\frac{1}{4}|x_n - 1|$ (cf plus haut) $\leqslant \frac{1}{4} \times \frac{1}{4^n}$ (hypothèse de récurrence), ce qui prouve P_{n+1} et achève la récurrence.

(c) Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4^n} = 0$, et $0 \leqslant |x_n - 1| \leqslant \frac{1}{4^n}$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim_{n\to+\infty} |x_n - 1| = 0$, soit $\lim_{n\to+\infty} x_n = 1$.

Exercice 12 (***)

1. La fonction f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions usuelles. Par ailleurs, en tant que quotient de fonctions impaires, la fonction f est paire.
2. On sait que $\sinh(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ (et si on ne le sait pas, on le retrouve par exemple en constatant que $\frac{\sinh(x)}{x}$ est le taux d'accroissement de sinh en 0, et a donc pour limite $\cosh(0) = 1$ en 0), donc $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sinh(x)} = 1$, et on peut prolonger la fonction f en posant $f(0) = 1$. La dérivée de f est $f'(x) = \frac{\sinh(x) - x\cosh(x)}{\sinh^2(x)}$. Pas de méthode simple malheureusement pour calculer la limite en 0 de cette dérivée, il faut soit utiliser des développements limités (c'est alors très simple) soit au moins avoir recours à la règle de l'Hôpital de l'exercice 8. On peut alors écrire, sous réserve d'existence de toutes ces limites, $\lim_{x\to 0} \frac{\sinh(x) - x\cosh(x)}{\sinh^2(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cosh(x) - \cosh(x) - x\sinh(x)}{2\cosh(x)\sinh(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-x\sinh(x)}{2\cosh(x)\sinh(x)}$. Ce quotient est équivalent à $-\frac{x^2}{2x} = -\frac{x}{2}$, et a donc pour limite 0 en 0. La fonction f est dérivable en 0, et $f'(0) = 0$. ce n'est pas une surprise dans la mesure où la fonction est paire. Passons à la dérivée seconde : $f''(x) = \frac{-x\sinh^3(x) - 2\cosh(x)\sinh(x)(\sinh(x) - x\cosh(x))}{\sinh^4(x)} = \frac{2x\cosh^2(x) - 2\cosh(x)\sinh(x) - x\sinh^2(x)}{\sinh^3(x)}$.
   Tentons une fois de plus le recours à la règle de l'Hôpital, le quotient des dérivées vaut
   $$\frac{2\cosh^2(x) + 4x\cosh(x)\sinh(x) - 2\cosh^2(x) - 2\sinh^2(x) - \sinh^2(x) - 2x\cosh(x)\sinh(x)}{3\cosh(x)\sinh^2(x)}$$
   $$= \frac{2x\cosh(x)\sinh(x) - 3\sinh^2(x)}{3\cosh(x)\sinh^2(x)} = \frac{2x\cosh(x) - 3\sinh(x)}{3\cosh(x)\sinh(x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{2x(1+o(1)) - 3(x+o(x))}{3\cosh(x)\sinh(x)}$$
   $\underset{x\to 0}{\sim} \frac{-x}{3x} \sim -\frac{1}{3}$. On en déduit que $\lim_{x\to 0} f''(x) = -\frac{1}{3}$, donc par applciation du théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$ (à la dérivée de f), la fonction f est deux fois dérivable en 0 et $f''(0) = -\frac{1}{3}$.
   Pour les curieux, avec les développements limités, on aurait simplement pu écrire ceci : $f(x) = \frac{x}{\sinh(x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2)} = 1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2)$ et en déduire immédiatement les valeurs demandées.
3. Il s'agit de résoudre l'équation $e^x - e^{-x} = 2$, soit $e^{2x} - 2e^x - 1 = 0$ quitte à multiplier par e^x. En posant $X = e^x$, on se ramène à l'équation du second degré $X^2 - 2X - 1 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 4 + 4 = 8$, et admet deux solutions $X_1 = \frac{2 - \sqrt{8}}{2} = 1 - \sqrt{2}$, et $X_2 = 1 + \sqrt{2}$. Puisque $X_1 < 0$, on peut éliminer cette solution, et garder comme unique solution de l'équation initiale $\alpha = \ln(X_2) = \ln(1 + \sqrt{2})$. Comme $1 + \sqrt{2} < e$ (on a environ $2,42$ à gauche, et $2,72$ à droite), $\alpha \in]0;1[$. Comme on sait que $\cosh^2(\alpha) - \sinh^2(\alpha) = 1$, on peut dire que $\cosh^2(\alpha) = 2$, donc $\cosh(\alpha) = \sqrt{2}$ (cette fonction ne prenant que des valeurs positives).
4. La fonction $g : t \mapsto \cosh(t) - t$ a pour dérivée $\sinh(t) - 1$, dont on vient de voir qu'elle s'annule uniquement en α. La fonction g est donc décroissante sur $]-\infty, \alpha]$ et croissante sur $[\alpha, +\infty[$. Elle admet pour minimum $g(\alpha) = \cosh(\alpha) - \alpha = \sqrt{2} - \alpha > 0$ puisque $\alpha \in]0,1[$. La fonction

g est donc strictement positive sur $\mathbb{R}$. Pour démontrer les inégalités suivantes, commençons par poser $h(t) = t\cosh(t) - \sinh(t)$, alors $h'(t) = \cosh(t) + t\sinh(t) - \cosh(t) = t\sinh(t) \geqslant 0$. La fonction h est donc croissante sur $\mathbb{R}^+$, comme $h(0) = 0$, la fonction h est positive. Posons désormais $i(t) = \frac{1}{2}\sinh^2(t) - t\cosh(t) + \sinh(t)$, on calcule $i'(t) = \sinh(t)\cosh(t) - t\sinh(t) = \sinh(t)(\cosh(t) - t) \geqslant 0$ d'après le début de la question. la fonction i est donc croissante, et s'annule elle aussi en 0, elle est positive, ce qui prouve la deuxième inégalité.

5. Commençons par regarder ce qui se passe sur $\mathbb{R}^+$, d'après la question précédente, on peut y écrire que $0 \geqslant f'(x) \geqslant -\dfrac{\sinh^2(x)}{2\sinh^2(x)}$. Autrement dit, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$. L'IAF permet alors d'affirmer que la fonction f est $\dfrac{1}{2}$-Lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$. De l'autre côté, la parité de la fonction permet d'affirmer que f est également $\dfrac{1}{2}$-Lipschitzienne sur $\mathbb{R}^-$. La fonction f est alors $\dfrac{1}{2}$-Lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ (cf démonstration du cours sur la conservation de la Lipschitziannité sur une union d'intervalles).
6. La fonction f étant décroissante sur $\mathbb{R}^+$, vérifiant $f(0) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (par croissance comparée), elle admet nécessairement un point fixe sur $[0; +\infty[$. Vous n'êtes pas convaincus ? Posez $g(x) = f(x) - x$, alors g est elle aussi décroissante sur $\mathbb{R}^+$ (même si c'est ici inutile de s'en rendre compte), vérifie $g(0) = 1$, et $g(1) = f(1) - 1 < 0$, puisque $f(1) < f(0) = 1$, donc en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction g, celle-ci s'annule entre 0 et 1, ce qui correspond à un point fixe de f. En fait, on connait très bien ce point fixe : c'est α puisque $f(\alpha) = \dfrac{\alpha}{\sinh(\alpha)} = \alpha$ (par définition, $\sinh(\alpha) = 1$). La fonction f étant $\dfrac{1}{2}$-Lipschitizienne sur $\mathbb{R}$, on peut écrire que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$, soit $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$. Par une récurrence facile (et très classique), on prouve alors que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$: c'est vrai au rang 0 car $|u_0 - \alpha| = \alpha \leqslant 1$, et en le supposant au rang n, alors $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2^n} \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}$. Une simple application du théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \alpha| = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

Problème (***)

1. (a) C'est une équation du second degré, qu'on sait très bien résoudre : $\Delta = 1 + 4 = 5$, $x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$. La deuxième solution est manifestement négative, quant à la première, on peut l'encadrer en partant de $4 < 5 < 9 \Rightarrow 2 < \sqrt{5} < 3$, donc $\dfrac{1}{2} < x_1 < 1$. il y a donc bien une solution unique à l'équation sur l'intervalle $]0; 1[$.

   (b) Si $\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$, on a $\dfrac{3}{2} \leqslant x + 1 \leqslant 2$, donc $\dfrac{1}{2} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{2}{3}$. Comme $\dfrac{2}{3} < 1$, on en déduit que $\dfrac{1}{2} \leqslant f(x) \leqslant 1$.

   (c) La fonction f est bien sûr dérivable sur son ensemble de définition, et $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$. En reprenant la question précédente, si $\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$, on a $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{x+1} \leqslant \dfrac{2}{3}$, donc en élevant au carré (tout est positif), $\dfrac{1}{4} \leqslant \dfrac{1}{(x+1)^2} \leqslant \dfrac{4}{9}$, soit $\dfrac{1}{2} \leqslant |f'(x)| \leqslant \dfrac{4}{9}$.

   (d) Commençons par prouver par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\dfrac{1}{2}; 1\right]$: $u_0 = 1$ appartient

bien à l'intervalle $\left[\frac{1}{2};1\right]$. Supposons désormais que $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$, alors d'après les questions précédentes $\frac{1}{2} \leqslant f(u_n) \leqslant 1$, soit $\frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$, ce qui achève la récurrence.
Constatons par ailleurs que r_2 est un point fixe de la fonction f : on sait que r_2 vérifie $r_2^2 + r_2 - 1 = 0$, soit $r_2(r_2+1) = 1$, donc $r_2 = \frac{1}{r_2+1}$ ou encore $f(r_2) = r_2$.
On peut désormais appliquer l'IAF à u_n et r_2, qui appartiennent tous deux à l'intervalle $\left[\frac{1}{2};1\right]$ (cf questions précédentes), sur lequel on a vu que $|f'(x)| \leqslant \frac{4}{9}$. On en déduit que $|f(u_n) - r_2| \leqslant \frac{4}{9}|u_n - r_2|$, soit $|u_{n+1} - r_2| \leqslant \frac{4}{9}|u_n - r_2|$.
Montrons enfin par récurrence la propriété P_n : $|u_n - r_2| \leqslant \left(\frac{4}{9}\right)^n$. Pour $n = 0$, $|u_0 - r_2| = |1 - r_2| \leqslant 1$ car $r_2 \in]0;1[$, ce qui prouve P_0. Si on suppose P_n vérifiée, on peut faire le calcul suivant en utilisant successivement le résultat précédent et l'hypothèse de récurrence : $|u_{n+1} - r_2| \leqslant \frac{4}{9}|u_n - r_2| \leqslant \frac{4}{9} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n \leqslant \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}$. Cette dernière inégalité prouve P_{n+1} et achève donc la récurrence.
Comme $\frac{4}{9} < 1$, la suite $\left(\frac{4}{9}\right)^n$ converge vers 0, et le théorème des gendarmes nous permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - r_2| = 0$, c'est-à-dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = r_2$.

2. (a) Cette fois-ci, on ne sait pas résoudre l'équation, il faut donc étudier un peu le polynome $x^3 + x^2 + x - 1$. Sa dérivée, $3x^2 + 2x + 1$, a un discriminant négatif, elle est donc toujours positive. La fonction $x \mapsto x^3 + x^2 + x - 1$ est donc strictement croissante et bijective sur $\mathbb{R}$. Comme elle prend la valeur -1 pour $x = 0$ et la valeur 2 pour $x = 1$, on en déduit qu'elle s'annule entre 0 et 1. L'équation proposée a donc une unique solution (à cause de la bijectivité) qui appartient à l'intervalle $]0;1[$.

   (b) Le trinome $x^2 + x + 1$ étant strictement croissant sur $\mathbb{R}_+$, on aura, si $\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 1$, $f(1) \leqslant f(x) \leqslant f\left(\frac{1}{3}\right)$. Comme $f(1) = \frac{1}{3}$ et $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+1} < 1$, on aura bien $\frac{1}{3} \leqslant f(x) \leqslant 1$, donc l'intervalle est stable.

   (c) La fonction g est C^∞ sur $\mathbb{R}$ (son dénominateur ayant un discriminant négatif, il ne s'annule jamais), et $g'(x) = -\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$; et en dérivant g' comme un produit,
   $g''(x) = -\frac{2}{(x^2+x+1)^2} - (2x+1) \times \frac{-2(2x+1)}{(x^2+x+1)^3} = \frac{2(2x+1)^2 - 2(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)^3}$
   $= \frac{8x^2+8x+2-2x^2-2x-2}{(x^2+x+1)^3} = \frac{6x(x+1)}{(x^2+x+1)^2}$. Cette dérivée seconde étant toujours positive sur $\left[\frac{1}{3};1\right]$, la dérivée g' y est strictement croissante. Comme $g'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{2}{3}+1}{(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+1)^2} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{169}{81}} = \frac{135}{169}$ et $g'(1) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, on peut en déduire que $\forall x \in \left[\frac{1}{3};1\right]$, $|g'(x)| \leqslant \frac{135}{169}$.

   (d) On aimerait appliquer l'IAF à r_3 et à v_n en utilisant la majoration de $|f'(x)|$ obtenue à la question précédente. Il faut pour cela vérifier que v_n est toujours dans cet intervalle, ce qui se fait en utilisant la stabilité de l'intervalle par une récurrence identique à celle du début la question 1.*d* ; et que $r_3 \in \left[\frac{1}{3};1\right]$ et est un point fixe de g. Comme $\frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3} - 1 = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3} - 1 = -\frac{14}{27} < 0$, on a effectivement $r_3 \geqslant \frac{1}{3}$ (cf étude de la question *a*). De plus, $r_3^3 + r_3^2 + r_3 - 1 = 0 \Rightarrow r_3(r_3^2 + r_3 + 1) = 1 \Rightarrow r_3 = f(r_3)$, donc r_3 est un point fixe de f. On peut donc bien appliquer l'IAF pour obtenir $|f(v_n) - f(r_3)| \leqslant \dfrac{135}{169}|v_n - r_3|$, soit $|v_{n+1} - r_3| \leqslant \dfrac{135}{169}|v_n - r_3|$.

On fait ensuite notre petite récurrence classique pour prouver que $|u_n - r_3| \leqslant \left(\dfrac{135}{169}\right)^n$ (comme dans la question 1.*d*, on majore $|v_0 - r_3|$ par 1 en utilisant que $\dfrac{1}{3} \leqslant r_3 \leqslant 1$, et le reste de la récurrence est identique en remplaçant les $\dfrac{4}{9}$ par des $\dfrac{135}{169}$).

La conclusion est également la même : $\dfrac{135}{169} < 1$ donc le membre de droite de notre inégalité tend vers 0, et en appliquant le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} |v_n - r_3| = 0$, c'est-à-dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = r_3$.

3. (a) La fonction h_n est C^∞ sur $\mathbb{R}_+$, de dérivée $h_n'(x) = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \cdots + 2x + 1$. La fonction h_n étant stricement croissante sur $\mathbb{R}_+$, elle y est bijective. Comme $h_n(0) = -a < 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h_n(x) = +\infty$, on en déduit que l'équation $h_n(x) = 0$ a bien une solution (unique par bijectivité) sur $[0; +\infty[$. De plus, on a $h_n(1) = n - a$, donc $h_n(1) > 0$ si $n > a$. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, h_n s'annule alors sur l'intervalle $]0; 1[$ et $t_n \in]0; 1[$.

   (b) C'est un simple calcul : $(x-1)h_n(x) = (x-1)(x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x - a) = x^{n+1} + x^n + \cdots + x^3 + x^2 - ax - x^n - x^{n-1} - \cdots - x^2 - x + a = x^{n+1} - ax - x + a = x^{n+1} - (a+1)x + a$.

   (c) Notons que $h_{n+1}(x) = x^{n+1} + h_n(x)$. Comme $h_n(t_n) = 0$ (par définition), on a donc $h_{n+1}(t_n) = t_n^{n+1} > 0$, donc $h_{n+1}(t_n) > h_n(t_n)$. Comme par ailleurs on a aussi, toujours par définition, $h_{n+1}(t_{n+1}) = 0$, on en déduit que $h_{n+1}(t_n) > h_{n+1}(t_{n+1})$. La fonction h_{n+1} étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, cela implique $t_n > t_{n+1}$, et la suite (t_n) est donc strictement décroissante. Étant minorée par 0, elle est donc convergente.

   (d) On vient de voir que la suite (t_n) était décroissante, donc $\forall A \geqslant n$, $0 < t_n \leqslant t_A$, et comme t_n et t_A sont tous deux strictement inférieurs à 1, $0 < t_n^n \leqslant t_A^n$. Fixons donc $A \geqslant a$ (de façon à ce que t_A soit une constante). Comme $t_A < 1$ dans ce cas, $\lim\limits_{n\to+\infty} t_A^n = 0$. En appliquant le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n^n = 0$.

   (e) En reprenant la relation obtenue à la question *b* et en l'appliquant pour $x = t_n$, on obtient $0 = t_n^{n+1} - (a+1)t_n + a$, soit $(a+1)t_n - a = t_n \times t_n^n$. Le membre de droite convergeant vers 0 d'après la question précédente, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (a+1)t_n - a = 0$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = \dfrac{a}{a+1}$.

4. (a) Tout comme pour la fonction h_n, i_n est dérivable de dérivée strictement positive sur $\mathbb{R}_+$, donc y est strictement croissante et bijective. Comme $i_n(0) = -a < 0$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} i_n(x) = +\infty$, la fonction s'annule nécessairement une unique fois sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $i_n(1) = n + n - 1 + \cdots + 2 + 1 - a = \dfrac{n(n+1)}{2} - a$. Si $n(n+1) > 2a$, on aura donc $i_n(1) > 0$, et la fonction i_n s'annulera alors sur $]0; 1[$.

   (b) Encore du calcul : $(x-1)^2 i_n(x) = (x^2 - 2x + 1)\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} kx^k - a(x-1)^2 = \sum_{k=1}^{k=n} kx^{k+2} - \sum_{k=1}^{k=n} 2kx^{k+1} + \sum_{k=1}^{k=n} kx^k - a(x-1)^2 = \sum_{k=3}^{k=n+2} (k-2)x^k - \sum_{k=2}^{k=n+1} (2k-2)x^k + \sum_{k=1}^{k=n} kx^k - a(x-1)^2 =$ $(n-1)x^{n+1} + nx^{n+2} - 2x^2 - 2nx^{n+1} + x + 2x^2 - a(x-1)^2 = nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x - a(x-1)^2$.

   (c) Même chose qu'à la question 3.*c* en constatant que $i_{n+1}(x) = i_n(x) + (n+1)x^{n+1}$, donc $i_{n+1}(y_n) > i_n(y_n)$. On en déduit que $i_{n+1}(y_n) > 0$, soit $i_{n+1}(y_n) > i_{n+1}(y_{n+1})$ puis, par croissance de la fonction i_{n+1}, $y_n > y_{n+1}$. La suite (y_n) est donc décroissante et minorée par 0, elle converge.

(d) Encore une fois, la décroissance de la suite donne immédiatement l'inégalité, et en fixant A à une valeur convenable, on sait que $y_A < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} ny_A^n = 0$ (un petit coup de croissance comparée ici) et, par théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} ny_n^n = 0$.

Reprenons alors la relation de la question b, appliquée à $x = y_n$, pour en déduire en passant à la limite que $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n + a(y_n - 1)^2 = 0$, soit $\beta - a(\beta-1)^2 = 0$, soit $a\beta^2 - (1+2a)\beta + a = 0$, équation du second degré dont le discriminant vaut $\Delta = (1+2a)^2 - 4a^2 = 1 + 4a$, qui est toujours positif, et admet donc deux racines $\beta_1 = \dfrac{1+2a+\sqrt{1+4a}}{2a}$, et $\beta_2 = \dfrac{1+2a-\sqrt{1+4a}}{2a}$. Reste à savoir laquelle des deux valeurs est la bonne. On sait que $0 \leqslant \beta < 1$. Or, $\beta_1 > 1$ (son numérateur est plus grand que son dénominateur). On a donc $\beta = \dfrac{1+2a-\sqrt{1+4a}}{2a}$.

TD n°10 : révisions pour le DS7.

PTSI B Lycée Eiffel

29 mars 2013

Problème 1 : Méthode de Newton

I. Un résultat de point fixe.

Soit g une fonction contractante sur un intervalle $[a;b]$. On suppose de plus que l'intervalle $[a;b]$ est stable par la fonction g.

1. Montrer que l'équation $g(x) = x$ a une unique solution sur l'intervalle $[a;b]$, que nous noterons désormais α.
2. Montrer que tout suite récurrence définie par $u_0 \in [a;b]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$ converge vers α.
3. Montrer que, quels que soient les entiers n et p, $|x_{n+p} - x_n| \leqslant \dfrac{1-k^p}{1-k}|x_{n+1} - x_n|$. En déduire que $|x_n - \alpha| \leqslant \dfrac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|$.
4. Montrer que, si g est dérivable en α, alors $|g'(\alpha)| \leqslant k$, et que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x_{n+1} - \alpha}{x_n - \alpha} = g'(\alpha)$ (lorsque $x_n - \alpha$ ne s'annule plus à partir d'un certain rang).

Méthode de Newton

On considère désormais une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a;b]$. On suppose que f est croissante et que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. Le but de la méthode est de fournir des valeurs approchées de la solution de l'équation $f(x) = 0$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet effectivement une unique solution α sur $]a;b[$.
2. Soit $x_0 \in [a;b]$, déterminer l'abscisse du point d'intersection de l'axe des abscisses avec la tangente à $\mathcal{C}_f$ en x_0.
3. On pose $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$, prouver que g est $\mathcal{C}^1$, et calculer $g(\alpha)$ et $g'(\alpha)$.
4. On suppose uniquement dans cette question que f est concave. Montrer que la suite définie par $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$ est bie définie, croissante, majorée par α, et converge vers α.
5. Dans le cas général, justifier l'existence d'un voisinage I de α sur lequel $|g'(x)| < 1$. Montrer que ce voisinage est stable par g, et que g est contractante sur I. En déduire que si $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = g(u_n)$, la suite (u_n) converge vers α.

Problème 2 : Exponentielle de matrices

I. Exponentielle d'une matrice carrée d'ordre 3.

Soient A et P les matrices définies par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la matrice P est inversible et déterminer P^{-1}.
2. On pose $T = PAP^{-1}$.
   (a) Calculer la matrice T.
   (b) Calculer T^2, T^3, puis T^n pour tout entier naturel $n \geqslant 3$.
3. En déduire que $\forall n \geqslant 3,\ A^n = 0$.
4. Pour tout réel t, on définit la matrice $E(t)$ par $E(t) = I + tA + \dfrac{t^2}{2}A^2$.
   (a) Montrer que $\forall (t, t') \in \mathbb{R}^2,\ E(t)E(t') = E(t + t')$.
   (b) Pour tout t réel, calculer $E(t)E(-t)$. En déduire que la matrice $E(t)$ est inversible et déterminer son inverse en fonction de I, A, A^2 et t.
   (c) Pour tout t réel et pour tout entier naturel n, déterminer $(E(t))^n$ en fonction de I, A, A^2, t et n.

II. Exponentielle d'une matrice carrée d'ordre 2.

Soient B et D les matrices définies par $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Pour tout entier naturel n non nul, et pour tout réel t, on définit la matrice $E_n(t)$ par $E_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} B^k$. On note ses coefficients $a_n(t)$, $b_n(t)$, $c_n(t)$ et $d_n(t)$.

1. Déterminer toutes les matrices $X \in \mathcal{M}_{21}(\mathbb{R})$ vérifiant $MX = X$, puis toutes les matrices $Y \in \mathcal{M}_{21}(\mathbb{R})$ vérifiant $MY = 2Y$.
2. En déduire une matrice Q d'ordre 2 inversible telle que $Q^{-1}BQ = D$, et préciser son inverse.
3. Pour tout entier naturel n, montrer que $B^n = \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 1 - 2^n \\ 2^{n+1} - 2 & 2^{n+1} - 1 \end{pmatrix}$.
4. Exprimer $a_n(t)$, $b_n(t)$, $c_n(t)$ et $d_n(t)$ à l'aide de sommes, puis déterminer leurs limites.
5. On note $E(t)$ la matrice dont les coefficients sont les limites de ceux de $E_n(t)$.
   (a) Déterminer deux matrices E_1 et E_2 telles que pour tout t réel on ait : $E(t) = e^t E_1 + e^{2t} E_2$.
   (b) Calculer E_1^2, E_2^2, E_1E_2 et E_2E_1.
   (c) En déduire que pour tout t réel, $E(t)$ est inversible et déterminer son inverse.

Corrigé du TD n°10

Problème 1 : Méthode de Newton

I. Un résultat de point fixe.

1. L'existence d'une solution a déjà été vue en exemple en cours, c'est une application du théorème des valeurs intermédiaires. On pose $h(x) = g(x) - x$, comme l'intervalle $[a;b]$ est stable par g, on peut dire que $g(a) \geqslant a$, soit $h(a) \geqslant 0$, et $g(b) \leqslant b$, soit $h(b) \leqslant 0$. De plus, la fonction g étant contractante, elle est Lipschitzienne donc continue, et h également. On peut bien appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour affirmer l'existence d'un réel $\alpha \in [a;b]$ tel que $h(\alpha) = 0$, c'est-à-dire $g(\alpha) = \alpha$. Reste à prouver l'unicité de la solution. Supposons donc que l'équation admette une deuxième solution β. La fonction étant contractante, il existe une constante $k < 1$ telle que $|g(\alpha) - g(\beta)| \leqslant k|\beta - \alpha|$. Mais comme $g(\alpha) = \alpha$ et $g(\beta) = \beta$, on se retrouve avec l'inégalité $|\beta - \alpha| \leqslant k|\beta - \alpha|$, ce qui est incompatible avec la condition $k < 1$. La solution est donc unique.

2. Considérons une telle suite récurrente. L'intervalle $[a;b]$ étant stable par g, tous les termes de la suite appartiendront à $[a;b]$: c'est vrai pour u_0 par hypothèse, et si $u_n \in [a;b]$, alors $u_{n+1} = g(u_n) \in [a;b]$. On peut alors appliquer l'hypothèse de contractance à u_n et à α pour obtenir l'inégalité $|g(u_n) - g(\alpha)| \leqslant k|u_n - \alpha|$, soit $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant k|u_n - \alpha|$. Prouvons alors par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant k^n|u_0 - \alpha|$. C'est trivialement vrai au rang 0, et en supposant la propriété vraie au rang n, en appliquant la contractance puis l'hypothèse de récurrence, on trouver $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant k|u_n - \alpha| \leqslant k \times k^n|u_0 - \alpha| \leqslant k^{n+1}|u_0 - \alpha|$. Puisque $k < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} k^n = 0$ et, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| = 0$. Celà signifie exactement que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$.

3. En utilisant l'inégalité triangulaire sur une somme télescopique, on peut écrire $|u_{n+p} - u_n| = \left|\sum_{i=0}^{p-1} u_{n+i+1} - u_{n+i}\right| \leqslant \sum_{i=0}^{p-1} |u_{n+i+1} - u_{n+i}|$. Or, par le même genre de récurrence que dans la question précédente, $|u_{n+i+1} - u_{n+i}| \leqslant k^i|u_{n+1} - u_n|$. On peut donc écrire $|u_{n+p} - u_n| \leqslant \sum_{i=0}^{p-1} k^i|u_{n+1} - u_n| = \dfrac{1 - k^p}{1 - k}|u_{n+1} - u_n|$ en reconnaissant une somme géométrique. On peut passer à la limite l'inégalité précédente : $\lim\limits_{p \to +\infty} |u_{n+p} - u_n| = |\alpha - u_n|$ par continuité de la valeur absolue, et $\lim\limits_{p \to +\infty} \dfrac{1 - k^p}{1 - k} = \dfrac{1}{1 - k}$ puisque $k < 1$. On obtient $|\alpha - u_n| \leqslant \dfrac{1}{1 - k}|u_{n+1} - u_n| \leqslant \dfrac{k^n}{1 - k}|u_1 - u_0|$ en combinant avec l'inégalité $|u_{n+1} - u_n| \leqslant k^n|u_1 - u_0|$ démontrée précédemment.

4. Le taux d'accroissement de g en α est donné par $\tau(h) = \dfrac{g(\alpha + h) - g(\alpha)}{h}$. Or, par contractance de la fonction g, on sait que $|g(\alpha + h) - g(\alpha)| \leqslant k|h|$. On en déduit que $|\tau(h)| \leqslant k$ quelle que soit la valeur de h, inégalité conservée par passage à la limite pour obtenir $|g'(\alpha)| \leqslant k$. De plus, $\dfrac{u_{n+1} - \alpha}{u_n - \alpha} = \dfrac{g(u_n) - g(\alpha)}{u_n - \alpha}$, qui a bien pour limite $g'(\alpha)$ puisque u_n tend vers α.

Méthode de Newton

1. Les hypothèses assurent que la fonction f esffectue une bijection de $[a;b]$ vers $[f(a);f(b)]$, avec $0 \in [f(a);f(b)]$, puisque les deux valeurs sont supposées de signe contraire, donc 0 admet bien un unique antécédent par f.

2. La tangente en question a pour équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Lorsqu'elle coupe l'axe des abscisses, $y = 0$, ce qui se produit si $f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = 0$, soit $x = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

3. La fonction est bien définie en supposant que f' ne s'annule pas. De plus, f est supposée $\mathcal{C}^2$, donc f' est $\mathcal{C}^1$, et la fonction g également par théorèmes généraux. On calcule $g(\alpha) = \alpha - \dfrac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \alpha$ puisque $f(\alpha) = 0$ (donc α est un point fixe de la fonction g). De plus, $g'(x) = 1 - \dfrac{f'^2(x) - f(x)f''(x)}{f'^2(x)} = 1 - 1 + \dfrac{f(x)f''(x)}{f'^2(x)} = \dfrac{f(x)f''(x)}{f'^2(x)}$. On en déduit que $g'(\alpha) = 0$.
4. La fonction étant supposée concave, sa courbe est située en-dessous de chacune de ses tangentes. Prouvons par récurrence la propriété P_n : $a \leqslant u_n \leqslant \alpha$. C'est évidemment vrai pour $u_0 = a$. Supposons-le pour u_n, alors $u_{n+1} = u_n - \dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)} \geqslant u_n$, puisque $f'(u_n)$ est toujours strictement positif, et que f est négative sur l'intervalle $[a;\alpha]$ auquel appartient u_n. Nous venons de montrer en passant que la suite est croissante, et on en déduit que $u_{n+1} \geqslant u_n \geqslant \alpha$. Par ailleurs, la courbe étant sous la tangente tracée depuis u_n, et cette tangente coupant l'axe des abscisses en u_{n+1}, $f(u_{n+1}) \leqslant 0$. Ce qui prouve que $u_{n+1} \leqslant \alpha$. La suite étant croissante et majorée, elle converge. Or, α est l'unique point fixe de la fonction g (être point fixe de g est équivalent à être solution de l'équation $f(x) = 0$), donc la suite ne peut converger que vers α.
5. La fonction g étant $\mathcal{C}^1$, sa dérivée g' est continue. Par ailleurs, $g'(\alpha) = 0$, comme on l'a vu plus haut. Il suffit alors d'appliquer la définition de la continuité (donc de la limite) avec $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ par exemple pour trouver un intervalle autour de α sur lequel $|g'(x)| < \varepsilon$. Quitte à prendre l'intersection de cet intervalle avec $[a;b]$, le voisinage en question sera inclus dans $[a;b]$. Notons par exemple cet intervalle $]\alpha - \eta; \alpha + \eta[$. La dérivée g' étant majorée par $\dfrac{1}{2}$ sur cet intervalle, on peut appliquer l'IAF pour trouver $|g(\alpha - \eta) - g(\alpha)| \leqslant \dfrac{1}{2}|\alpha - \eta - \alpha|$, soit $|g(\alpha - \eta) - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}\eta$. Autrement dit, $g(\alpha - \eta) \in \left[\alpha - \dfrac{1}{2}\eta; \alpha + \dfrac{1}{2}\eta\right] \subset I$. On effectue le même calcul pour $g(\alpha + \eta)$. Ah mince, ça ne suffit pas, car on ne connait pas les variations de g. Peu importe, le même calcul est valable pour tout autre nombre inclus dans l'intervalle (dont la distance à α sera plus petite que η). Montrons enfin que g est contractante sur I : on l'a en fait déjà fait ! En appliquant l'IAF, $|g(z) - g(y)| \leqslant \dfrac{1}{2}|y - z|$ pour tous z et y dans l'intervalle I. Toutes les hypothèses de la première partie sont vérifiées, on peut en conclure la convergence des suites récurrentes vers le points fixe α.

Problème 2 : Exponentielle de matrices

I. Exponentielle d'une matrice carrée d'ordre 3.

1. Appliquons donc l'algorithme du pivot à la matrice P :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ L_3 \leftrightarrow L_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow 3L_3 + L_1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 0 & -3 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow 3L_1 + L_2$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 6 & -12 & -18 \\ 0 & -3 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1/6 \\ L_2 \leftarrow -L_2/3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

La matrice P est inversible, d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

2. (a) On a $PA = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis $T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   (b) On obtient $T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis $T^3 = 0$, donc $\forall n \geqslant 3$, $T^n = 0$.

3. En effet, on prouve par récurrence que $A^n = PT^nP^{-1}$: c'est vrai pour $n = 1$ car $A = P(P^{-1}AP)P^{-1} = PTP^{-1}$, et le supposant vrai au rang n, alors $A^{n+1} = A^nA = (PT^nP^{-1})(PTP^{-1}) = PT^{n+1}P^{-1}$. Pour $n \geqslant 3$, on a bien $A^n = P \times 0 \times P^{-1} = 0$.

4. (a) Calculons donc $E(t)E(t') = \left(I + tA + \dfrac{t^2}{2}A^2\right)\left(I + t'A + \dfrac{t'^2}{2}A^2\right) = I + t'A + \dfrac{t'^2}{2}A^2 + tA + tt'A^2 + \dfrac{t^2}{2}A^2 = I + (t+t')A + \dfrac{t'^2 + 2tt' + t^2}{2}A^2 = E(t+t')$ (tous les termes faisant intervenir des puissances de A supérieures ou égales à 3 ont été supprimés au vu de la question précédente).

(b) Comme $E(t)E(-t) = E(t-t) = E(0) = I$, on en déduit que $E(t)$ est inversible, d'inverse $E(-t) = I - tA + \frac{t^2}{2}A^2$.

(c) En utilisant toujours le résultat de la question 4.a), on prouve que $E(t)^n = E(nt)$ (par exemple par récurrence : c'est vrai pour $n = 1$, et en le supposant vrai au rang n, $(E(t))^{n+1} = (E(t))^n E(t) = E(nt)E(t) = E(nt+t) = E((n+1)t))$, donc $E(t)^n = I + ntA + \frac{n^2t^2}{2}A^2$.

II. Exponentielle d'une matrice carrée d'ordre 2.

1. Notons $X = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$. L'équation $BX = X$ se traduit par le système suivant : $\begin{cases} & - & z & = & x \\ 2x & + & 3z & = & z \end{cases}$, système qui n'est pas de Cramer et a pour solution tous les couples $\{(x; -x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. De même en posant $Y = \begin{pmatrix} y \\ t \end{pmatrix}$, on ramène l'équation $BY = 2Y$ au système $\begin{cases} & - & t & = & 2y \\ 2y & + & 3t & = & 2t \end{cases}$, qui n'est pas de Cramer non plus et admet pour solutions les couples $\{(y; -2y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

2. D'après la question précédente, en posant par exemple $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, on aura $BQ = QD$ (puisque dans le produit BQ, la première colonne de Q est laissée identique, et sa deuxième colonne multipliée par 2, ce qui correspond bien à un produit à droite par la matrice D), donc $Q^{-1}BQ = D$ en supposant Q inversible. Elle l'est effectivement : le pivot ne nécessite que deux étapes $L_2 \leftarrow -L_1 - L_2$ puis $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$, ce qui donne $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Puisque l'énoncé donne le résultat, on peut éviter le calcul de QD^nQ^{-1} (qui n'est cependant pas bien compliqué) et procéder par récurrence : pour $n = 0$, la matrice proposée est bien égale à l'identité. Supposons la formule vraie au rang n, alors $B^{n+1} = B^n \times B = \begin{pmatrix} 2-2^n & 1-2^n \\ 2^{n+1}-2 & 2^{n+1}-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2^{n+1} & 2^n - 2 + 3 - 3 \times 2^n \\ 2^{n+2}-2 & 2 - 2^{n+1} + 3 \times 2^{n+1} - 3 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 2-2^{n+1} & 1-2^{n+1} \\ 2^{n+2}-2 & 2^{n+2}-1 \end{pmatrix}$, ce qui est bien la formule attendue.

4. Par définition, $a_n(t) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{t^k}{k!}(B^k)_{11} = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{t^k}{k!}(2-2^k)$. De même, en reprenant le résultat de la question précédente, $b_n(t) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{2(2t)^k - 2t^k}{k!}$, $c_n(t) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{t^k - (2t)^k}{k!}$ et $d_n(t) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{2(2t)^k - t^k}{k!}$. Pour déterminer les limites, il faut simplement connaitre le résultat suivant $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} = e^t$ (il est vrai qu'on ne l'a pas encore vraiment vu ensembles cette année). On calcule alors $a_n(t) = 2\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!}$, donc $\lim_{n \to +\infty} a_n(t) = 2e^t - e^{2t}$; de même, $\lim_{n \to +\infty} b_n(t) = 2e^{2t} - 2e^t$; $\lim_{n \to +\infty} c_n(t) = e^t - e^{2t}$ et $\lim_{n \to +\infty} d_n(t) = 2e^{2t} - e^t$.

5. (a) Il suffit manifestement de poser $E_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $E_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

   (b) Un peu de calcul donne $E_1^2 = E_1$; $E_2^2 = E_2$ et $E_1E_2 = E_2E_1 = 0$.

   (c) Au vu des calculs effectués dans la première partie du problème, on peut deviner que l'inverse de $E(t)$ sera $E(-t)$. Vérifions-le : $E(t)E(-t) = (e^tE_1 + e^{2t}E_2)(e^{-t}E_1 + e^{-2t}E_2) = e^te^{-t}E_1^2 + e^{2t}e^{-2t}E_2 = E_1 + E_2 = I$ (les simplifications utilisent les résultats de la question précédente). On a donc bien $(E(t))^{-1} = E(-t)$.

Feuille d'exercices n°14 : Espaces vectoriels.

PTSI B Lycée Eiffel

2 avril 2013

Exercice 1 (*)

On se place dans l'ensemble E des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (il s'agit bien d'un espace vectoriel). Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de E ?

- fonctions paires
- fonctions admettant un minimum global
- fonctions s'annulant une infinité de fois sur $\mathbb{R}$
- fonctions vérifiant $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x^2)$
- fonctions admettant une tangente horizontale en $x = 5$
- fonctions vérifiant $f''(x) = 3f'(x) - 2f(x)$
- fonctions admettant en $+\infty$ une asymptote (horizontale ou oblique) ou une branche parabolique (de direction (Ox) ou (Oy))
- fonctions Lipschitziennes sur $\mathbb{R}$

Exercice 2 (**)

Dans chacun des cas suivants, déterminer si la famille $\mathcal{F}$ est une base de E, et déterminer si possible les coordonnées de x dans $\mathcal{F}$.

1. $E = \mathbb{R}^3$; $\mathcal{F} = ((-1,1,1); (1,-1,1); (1,1,-1))$ et $x = (2,3,4)$.
2. $E = \mathbb{R}_3[X]$; $\mathcal{F} = (1; X; X(X-1); X(X-1)(X-2))$ et $x = X^3$.
3. $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -10 & 4 \end{pmatrix} \right)$ et $x = I_4$.
4. $E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n \geqslant 4,\ u_n = 0\}$; $x = (-2,3,4,1,0,0,\dots)$ (vous avez le choix pour $\mathcal{F}$!).

Exercice 3 (*)

On considère dans $\mathbb{R}^3$ les deux sous-ensembles $F = \{(x,y,z) \mid 2x + y - 3z = 0\}$ et $G = \{(2a+b, a-b, 3a-b) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer qu'il s'agit de deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, et déterminer leur intersection $F \cap G$.

Exercice 4 (**)

Dans un espace vectoriel E, on considère trois sous-espaces vectoriels A, B et C.

1. Montrer que $A \cap (B + C) \supset (A \cap B) + (A \cap C)$. L'égalité est-elle nécessairement vérifiée ?
2. A-t-on toujours $A + (B \cap C) = (A + B) \cap (A + C)$?
3. Montrer que $A + (B \cap (A + C)) = (A + B) \cap (A + C)$.

Exercice 5 (*)

On considére les matrices suivantes de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On note E l'ensemble des matrices M s'écrivant sous la forme $M = aI + bJ + cK + dL$, avec a, b, c, $d \in \mathbb{R}^4$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel, et que (I, J, K, L) en forme une base.
2. Montrer, en les calculant explicitement, que J^2, K^2, L^2, J^3 et L^3 appartiennent à E.
3. En déduire, sans aucun calcul matriciel, que JK, KJ, KL, LK, JL et LJ appartiennent aussi à E.
4. Établir enfin que le produit de deux matrices de E est encore une matrice de E.

Exercice 6 (**)

Dans chacun des cas suivants, montrer que les ensembles F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, et qu'ils sont supplémentaires.

- $E = \mathbb{R}^2$; $F = \{(x, y) \mid x + y = 0\}$ et $G = \{(x, y) \mid x - y = 0\}$.
- $E = \mathbb{R}^3$; $F = \{(x, y, z) \mid x - y + z = 0\}$ et $G = \text{Vect}((3, 2, 1))$.
- $E = \mathbb{R}_2[X]$; $F = \text{Vect}(X, X^2)$ et $G = \{P \mid P' = 0\}$.
- $E = \mathbb{R}_6[X]$; $F = \{P \in E \mid P$ est une fonction paire$\}$ et $G = \{P \in E \mid P$ est une fonction impaire$\}$.
- $E = \mathcal{C}_0([-1; 1], \mathbb{R})$; $F = \{f \in E \mid \int_{-1}^{1} f(t)\, dt = 0\}$ et $G = \{$fonctions constantes$\}$.
- $E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{R}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} - u_{n+2} - u_{n+1} + u_n = 0\}$; $F = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} + u_n = 0\}$ et $G = \{(u_n)_{n\in\mathbb{R}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0\}$.

Exercice 7 (**)

Donner la matrice (dans les bases canoniques à chaque fois) des applications linéaires suivantes, ainsi que leur noyau et leur image :

- $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x + y, y - 2x + z) \end{array}$
- $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + y, x + z, y + z) \end{array}$
- $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^4 \\ P & \mapsto & (P(1), P(2), P(3), P(4)) \end{array}$
- $u : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM - MA \end{array}$
  où on a posé $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 8 (*)

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que les images des vecteurs de la base canonique soient $(1, -1, 2)$, $(-3, 2, -1)$ et $(-7, 4, 1)$.

1. Déterminer la matrice de u dans la base canonique, ainsi que l'expression de u.
2. Déterminer les antécédents par u de $(-1, 1, 8)$ et de $(-2, 1, 3)$.
3. u est-elle injective ? Surjective ?

Exercice 9 (***)

Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose que $u^2 = 0$. Montrer que $\operatorname{Im}(u) \subset \ker(u)$, et que $\mathrm{id}_E + u$ est un automorphisme.
2. Dans le cas général, montrer que $\operatorname{Im}(u) \cap \ker(u) = \{0\} \Leftrightarrow \ker(u^2) = \ker(u)$; et que $\ker(u) + \operatorname{Im}(u) = E \Leftrightarrow \operatorname{Im}(u^2) = \operatorname{Im}(u)$.

Exercice 10 (**)

On considère $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et on définit l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par $f(z) = z + a\overline{z}$, où a est un nombre complexe fixé. Montrer que f est linéaire, Déterminer son noyau, et donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que f soit bijective.

Exercice 11 (**)

On se place dans $\mathbb{R}^3$ et on note $F = \operatorname{Vect}((1,1,1))$ et $G = \{(x,y,z) \mid 2x + y - z = 0\}$. Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$ et déterminer l'expression analytique de la projection sur F parallèlement à G et de la symétrie par rapport à G parallèlement à F.

Exercice 12 (*)

On considère l'application $f : \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z; \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z; \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z\right)$. Montrer que f est un projecteur et déterminer ses éléments caractéristiques (noyau et image).

Exercice 13 (***)

Soient p et q deux projecteurs dans un même espace vectoriel E, vérifiant $p \circ q = q \circ p$.

1. Montrer que $p \circ q$ est aussi un projecteur.
2. Montrer que $\operatorname{Im}(p \circ q) = \operatorname{Im}(p) \cap \operatorname{Im}(q)$.
3. Montrer que $\ker(p \circ q) = \ker(p) + \ker(q)$.

Exercice 14 (***)

On se place dans le sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonction continues $F = \operatorname{Vect}(x \mapsto \operatorname{ch}(x); x \mapsto \operatorname{sh}(x); x \mapsto x\operatorname{ch}(x); x \mapsto x\operatorname{sh}(x))$.

1. Montrer que la famille $\operatorname{Vect}(x \mapsto \operatorname{ch}(x); x \mapsto \operatorname{sh}(x); x \mapsto x\operatorname{ch}(x); x \mapsto x\operatorname{sh}(x))$ est une famille libre.
2. Soit $\varphi : f \mapsto f''' - 2f'' + f' - f$, montrer que f est un endomorphisme de F, et donner sa matrice dans la base de la question précédente.
3. L'application φ est-elle un automorphisme ? Si oui, déterminer la matrice de f^{-1}.
4. En déduire une solution particulière de l'équation différentielle $f''' - 2f'' + f' - f = \operatorname{sh}(x) + x\operatorname{ch}(x)$.

Exercice 15 (**)

On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_2[X]$ et on note $\mathcal{B}$ la famille $(X^2+1; X+1; 2X^2-X)$.

1. Vérifier que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice de passage de la base canonique vers la base $\mathcal{B}$, et celle de $\mathcal{B}$ vers la base canonique.
3. Déterminer les coordonnées du polynôme $P = X^2 - X + 2$ dans la base $\mathcal{B}$.
4. On considère l'endomorphisme de E défini par $\varphi(P) = XP'$. Déterminer sa matrice dans la base canonique, puis dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 16 (**)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans le base canonique est $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2. Que peut-on en déduire sur f ?
2. Déterminer une base de $\ker(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.
3. Donner la matrice de f dans une base constituée uniquement de vecteurs de $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Problème (extrait des Petites Mines 2009) (***)

On se place dans tout ce problème sur $\mathbb{R}_2[X]$ muni de sa base canonique. On y définit les deux applications $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & \dfrac{1}{2}\left(P\left(\dfrac{X}{2}\right) + P\left(\dfrac{X+1}{2}\right)\right) \end{array} \right.$; et $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(1) \end{array} \right.$.

On note par ailleurs $\mathcal{B} = (1; -2X+1; 6X^2-6X+1)$, et $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

1. Montrer que f et φ sont des applications linéaires.
2. Écrire la matrice de f dans la base canonique. L'application f est-elle injective ? Surjective ?
3. Déterminer une base de $\ker(\varphi)$. L'application φ est-elle injective ? Surjective ?
4. Justifier que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
5. Écrire la matrice de passage de la base canonique vers $\mathcal{B}$, et calculer son inverse.
6. Écrire la matrice Q de f dans la base $\mathcal{B}$.
7. Calculer A^n pour tout entier naturel n, en précisant la valeur des neuf coefficients de la matrice.
8. Pour un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$, exprimer $f^n(P)$ en fonction de ses coefficients, et montrer que $\lim_{n\to+\infty} \varphi(f^n(P)) = \int_0^1 P(t)\ dt$.

Corrigé de la feuille d'exercices n°14

Exercice 1 (*)

Commençons déjà par constater que la fonction nulle vérifie toutes les conditions de l'exercice, il nous restera donc à regarder si chaque ensemble est stable ou non par combinaisons linéaires (on peut bien évidemment séparer la somme et le produit par un réel si on le souhaite).

- Soient f et g deux fonctions paires, on peut certainement écrire $(\lambda f + \mu g)(-x) = \lambda f(-x) + \mu g(-x) = \lambda f(x) + \mu g(x) = (\lambda f + \mu g)(x)$. La fonction $\lambda f + \mu g$ est donc également paire, et l'ensemble des fonctions paires est espace vectoriel.
- Les fonctions admettant un minimuml global ne forment pas un sous-espace vectoriel : l'ensemble n'est pas stable par produit par un réel négatif (si f admet un minimum global, $-f$ admettra un maximum global, mais n'a aucune raison d'avoir un minimum). On peut par contre prouver qu'une somme de deux telles fonctions admet nécessairement un minimum global (mais ce n'est pas une preuve évidente).
- Les fonctions s'annulant une infinité de fois ne forment pas un sous-espace vectoriel : l'ensemble est stable par un produit par un réel (les valeurs d'annulation de f annulant aussi λf), mais pas par somme : une fonction nulle sur $\mathbb{R}^-$ mais strictement positive sur $\mathbb{R}^+$ (on peut construire une telle fonction $\mathcal{C}^\infty$, ajoutée à une fonction positive sur $\mathbb{R}^-$ mais nulle sur $\mathbb{R}^+$ ne s'annulera jamais ailleurs qu'en 0, donc sûrement pas une infinité de fois.
- Les fonctions vérifiant $f(2x) = f(x^2)$ forment un sous-espace vectoriel : si f et g vérifient l'équation, alors $(\lambda f + \mu g)(2x) = \lambda f(2x) + \mu g(2x) = \lambda f(x^2) + \mu g(x^2) = \lambda f + \mu g)(x^2)$.
- Les fonctions admettant une tangente horizontale en $x = 5$ forment un sous-espace vectoriel à cause de la linéarité de la dérivation : si $f'(5) = g'(5) = 0$, alors $(\lambda f + \mu g)'(5) = \lambda f'(5) + \mu g'(5) = 0$.
- Les fonctions vérifiant $f''(x) = 3f'(x) - 2f(x)$ (ou toute autre équation différentielle linéaire homogène) forment un sous-espace vectoriel, encore une fois à cause de la linéarité de la dérivation (et de la dérivation seconde) : si f et g sont solutions de l'équation, alors $(\lambda f + \mu g)''(x) = \lambda f''(x) + \mu g''(x) = \lambda(3f'(x) - 2f(x)) + \mu(3g'(x) - 2g(x)) = 3(\lambda f + \mu g)'(x) - 2(\lambda f + \mu g)(x)$, donc toute combinaison linéaire de f et g est également solution de l'équation.
- Les fonctions admettant une branche infinie (asymptote ou branche parabolique) ne forment pas un sous-espace vectoriel. L'ensemble est stable par un produit par un réel (si le réel est non nul on garde le même type de branche infinie), mais pas par somme : par exemple $f : x \mapsto x^2 + \sin(x)$ admet une branche parabolique de direction (Oy), et $g : x \mapsto -x^2$ également, mais leur somme est la fonction sin qui n'a pas de limite en $+\infty$.
- Les fonctions Lipschitziennes sur $\mathbb{R}$ forment un sous-espace vectoriel, on a vu en cours qu'une somme de deux fonctions Lipschitziennes était Lipschitzienne, et le produit par un réel λ d'une fonction k-Lipschitzienne est clairement λk-Lipschitzienne.

Exercice 2 (**)

1. Pour vérifier si la famille est libre, supposons que $a(-1,1,1) + b(1,-1,1) + c(1,1,-1) = (0,0,0)$. On peut traduire cette égalité par le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -a & + & b & + & c & = & 0 \\ a & - & b & + & c & = & 0 \\ a & + & b & - & c & = & 0 \end{array}\right.$. La somme des deux premières lignes donne $2c = 0$, soit $c = 0$. De même, la somme des extrêmes donne $b = 0$ et la somme des deux dernières $a = 0$. La seule combinaison linéaire de la famille donnant le vecteur nul est donc la combinaison nulle, la famille est libre. Pour prouver que la famille est génératrice, calculons directement les coordonnées d'un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$ dans la famille, ce qui nous permettra de répondre très rapidement à la question suivante. Essayons donc d'écrire un vecteur (x, y, z) sous la forme $a(-1,1,1) + b(1,-1,1) + c(1,1,-1)$. Il suffit

juste de changer le second membre du système précédent : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -a & + & b & + & c & = & x \\ a & - & b & + & c & = & y \\ a & + & b & - & c & = & z \end{array}\right.$. La somme des deux premières lignes donne cette fois $2c = x + y$, soit $c = \dfrac{x+y}{2}$. De même, les autres sommes donnent $b = \dfrac{x+z}{2}$ et $a = \dfrac{y+z}{2}$. Le système ayant toujours une solution, la famille est génératrice, il s'agit donc d'une base de $\mathbb{R}^3$. Les coordonnées du vecteur $(2,3,4)$ dans cette base sont obtenus en remplaçant x, y et z par 3, 4 et 5 dans les calculs précédents, ce qui donne $a = \dfrac{9}{2}$; $b = 4$ et $c = \dfrac{7}{2}$. Autrement dit, les coordonnées dans cette base sont $\left(\dfrac{9}{2}, 4, \dfrac{7}{2}\right)$.

2. La famille étant échelonnée (une constante, un polynôme de degré 1, un de degré 2 et un de degré 3), le cours nous assure directement qu'il s'agit d'une base de $\mathbb{R}_3[X]$. Cherchons les coordonnées de X^3, autrement dit cherchons quatre réels a, b, c et d tels que $X^3 = a + bX + cX(X-1) + dX(X-1)(X-2)$. En développant tout, $X^3 = a + bX + cX^2 - cX + dX^3 - 3dX^2 + 2dX = dX^3 + (c-3d)X^2 + (2d-c+b)X + a$. Par identification des coefficients, $d = 1$, $c - 3d = 0$, donc $c = 3$; $2d - c + b = 0$, donc $b = 1$ et $a = 0$. Les coordonnées de X^3 dans notre base sont donc $(0,1,3,1)$ (si vous préférez, $X^2 = X + 3X(X-1) + X(X-1)(X-2)$).

3. Si $a\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -10 & 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, en isolant chaque coefficient, on trouve le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} a & & & + & 2c & & & = & 0 \\ a & + & 2b & - & 2c & - & 2d & = & 0 \\ & & 3b & + & c & - & 10d & = & 0 \\ & & -b & - & c & + & 4d & = & 0 \end{array}\right.$. Procédons par un mélange de combinaisons et de substitutions : $a = -2c$, la deuxième équation devient alors en divisant par 2, $b - 2c - d = 0$. En additionnant avec la dernière équation, $-3c + 3d = 0$, soit $d = c$. On trouve alors dans la deuxième équation $b - 3c = 0$, soit $b = 3c$. Reste à tout remplacer dans la troisième équation : $9c + c - 10d = 0$. Ah mince, cette équation est toujours vérifiée ! En effet, une solution non triviale du système est par exemple $(-2,3,1,1)$. La famille n'étant pas libre, ce n'est bien sûr pas une base.

4. La famille la plus simple à prendre est la suivante : on définit quatre suites (a_n), (b_n), (c_n) et (d_n) en posant $a_0 = 1$, $b_1 = 1$, $c_2 = 1$, $d_3 = 1$ et tous les autres termes de chaque suite sont nuls. Chacune de ces suites appartient évidemment à E, et on peut prouver directement que la famille est une base en prouvant qu'une suite de E s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de nos quatre suites : en effet, on peut écrire $u_n = u_0 a_n + u_1 b_n + u_2 c_n + u_3 d_n$ (on vérifie trivialement que cette suite coïncide avec (u_n) en constatant que les quatre premiers termes sont les mêmes et que les suivants sont nuls), et cette écriture est unique en regardant les quatre premiers coefficients. Dans cette base, les coordonnées de x sont tout simplement $(-2,3,4,1)$.

Exercice 3 (*)

L'ensemble F est l'ensemble des solutions d'une équation linéaire homogène, il s'agit donc d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Par ailleurs, on peut écrire G sous la forme $\{a(2,1,3) + b(1,-1,-1) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((2,1,3);(1,-1,-1))$, qui est aussi un sous-espace vectoriel. Leur intersection est constituée des vecteur de la forme $(2a+b, a-b, 3a-b)$ vérifiant $2x + y - 3z = 0$, soit $2(2a+b) + (a-b) - 3(3a-b) = 0$, soit $-4a + 4b = 0$. Autrement dit, on doit avoir $a = b$ et $F \cap G = \{(3a,0,2a) \mid a \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((3,0,2))$.

Exercice 4 (**)

1. Soit x un élément appartenant à $(A \cap B) + (A \cap C)$, cela signifie que $x = y + z$, avec $y \in A \cap B$, et $z \in A \cap C$. Puisque A est un sous-espace vectoriel, $x = y + z \in A$, donc $x \in A \cap (B + C)$ (il appartient évidemment à $B + C$ puisqu'il est somme d'un élément de B et d'un élément de C). L'égalité n'a aucune raison d'être vraie. Prenons trois droites (vectorielles, donc passant par l'origine) distinctes dans le plan. La somme des deux premières droites est le plan tout entier, donc son intersection avec la troisième droite est cette troisième droite elle-même. Mais l'intersection de la troisième droite avec chacune des deux autres étant réduite à $\{0\}$, la somme des intersections vaut simplement $\{0\}$.
2. Non, même contre-exemple : si A, B et C sont trois droites distinctes, $B \cap C = \{0\}$, donc $A + (B \cap C) = A$; mais $(A + B) = (A + C) = \mathbb{R}^2$, donc $(A + B) \cap (A + C) = \mathbb{R}^2$. On a toujours par contre l'inclusion $A + (B \cap C) \subset (A + B) \cap (A + C)$.
3. Procédons par double inclusion. Soit $x \in (A + (B \cap (A + C))$, alors $x = a + b$, avec $a \in A$, et $b \in B$, et de plus $b = a' + c$, où $a' \in A$, et $c \in C$. On peut alors écrire $x = a + b$, ce qui prouver que $x \in A + B$, et $x = (a + a') + c$, ce qui prouve que $x \in A + C$. Autrement dit, $x \in (A + B) \cap (A + C)$ et $A + (B \cap (A + C)) = (A + B) \cap (A + C)$. Dans l'autre sens, soit $y \in (A + B) \cap (A + C)$, on peut donc écrire $y = a + b = a' + c$, avec les mêmes conventions que ci-dessus ($a \in A$, etc). On peut alors dire que $b = a' - a + c \in A + C$, donc $y \in A + (B \cap (A + C))$, ce qui prouve la deuxième inclusion.

Exercice 5 (*)

1. C'est l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille (I, J, K, L), qui est un espace vectoriel, et même précisément l'espace vectoriel engendré par cette famille. Pour prouver que la famille (I, J, K, L) en est une base, il suffit donc de prouver que la famille est libre, ce qui est essentiellement trivial (si on écrit qu'une combinsaison linéaire de la famille est nulle, on obtient 16 équations donc quatre à chaque fois nous assurent la nullité de chaque coefficient).
2. On calcule sans difficulté $J^2 = L$, $K^2 = L$, $L^2 = L$, $J^3 = K$, $K^3 = J$ et $L^3 = L$.
3. On a $JK = JJ^3 = J^4 = (J^2)^2 = L^2 = I$. De même, $KJ = I$, puis $KL = LK = K^3 = J$ et $JL = LJ = J^3 = K$.
4. Soient deux matrices de E, qui s'écrivent donc $aI + bJ + cK + dL$ et $eI + fJ + hK + iL$. Leur produit, via un calcul passionnant et en utilisant les résultats des deux questions précédentes, vaut $(ae + bh + cf + di)I + (af + be + ci + dh)J + (ag + bi + ce + df)K + (ai + bf + cg + de)L$, qui appartient bien à E. L'ensemble E est ce qu'on appelle une algèbre (espace vectoriel et stabilité par produit interne).

Exercice 6 (**)

- Les deux sous-ensembles sont définis par des équations linéaires homogènes, ce sont des sous-espaces vectoriels. Leur intrsection est constituée des couples (x, y) vérifiant $x + y = x - y = 0$, ce qui donne très facilement $x = y = 0$. On a donc bien $F \cap G = \{0\}$. De plus, tout vecteur (a, b) peut s'écrire comme somme d'un élément de F et d'un élément de G : $(a, b) = \left(\dfrac{a-b}{2}; \dfrac{b-a}{2}\right) + \left(\dfrac{a+b}{2}; \dfrac{a+b}{2}\right)$ (si on ne le devine pas, on résout un gentil système).
- F est défini comme ensemble de solutions d'une équation linéaire homogène, G est l'espace vectoriel engendré par une famille, il s'agit bien de deux sous-espaces vectoriels. Supposons $u \in F \cap G$, alors $u = (3a, 2a, a)$, avec $3a - 2a + a = 0$, donc $a = 0$. L'intersection est bien réduite au vecteur nul. Soit désormais un vecteur $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on souhaite écrire $(x, y, z) =$

$(a,b,c)+(3d,2d,d)$, avec $a-b+c=0$. On trouve donc les conditions $a+3d=x$, soit $a=x-3d$; $b+2d=y$, soit $b=y-2d$, et de même $c=z-d$. La condition $a-b+c=0$ donne alors $x-3d-y+2d+z-d=0$, donc $d=\dfrac{x-y+z}{2}$. On en déduit les valeurs (uniques) de a, b et c, le système a une solution, ce qui prouve que $F+G=\mathbb{R}^3$.

- F est évidemment un sous-espace vectoriel, G aussi puisqu'il s'agit du noyau d'une application linéaire (la dérivation). Les seuls polynômes ayant une dérivée nulle étant les constantes, $F \cap G=\{0\}$ (aucune constante n'est combinaison linéaire de X et de X^2. Par ailleurs, on peut évidemment écrire tout polynôme de degré 2 comme combinaison linéaire de X et de X^2 plus une constante, c'est la définition d'un polynôme ! Cela prouve la supplémentarité.
- Les sous-espaces F et G sont en effet des sous-espaces vectoriels, une somme ou un produit par un réel de fonctions paires est paire, et de même pour les fonctions impaires. Leur intersection est réduite à la fonction nulle, puisque la seule fonction à la fois paire et impaire (sans même parler de polynômes) est la fonction nulle (elle vérifie $f(x)=-f(x)$ pour tout réel). Par ailleurs, on peut facilement écrire tout polynôme de E comme somme d'un polynôme pair et d'un polynôme impair, tout simplement en séparant les termes correspondant aux puissances paires et impaires : si $P=aX^6+bX^5+cX^4+dX^3+eX^2+fX+g$, alors $P=Q+R$, avec $Q=aX^6+cX^4+eX^2+g$ qui est pair, et $R=bX^5+dX^3+fX$ qui est impair. On peut en fait montrer à partir de ceci que $F=\text{Vect}(1,X^2,X^4,X^6)$ et $G=\text{Vect}(X,X^3,X^5)$.
- Le sous-ensemble G coïncide avec $\mathbb{R}_0[X]$, c'est un sous-espace vectoriel de E ; les fonctions d'intégrale nulle constituent le noyau de l'application linéaire associant à une fonction continue f son intégrale entre -1 et 1, donc également un sous-espace vectoriel de E. Si une fonction appartient à $F\cap G$, elle est constante égale à k, avec $\displaystyle\int_{-1}^{1} k\,dt=0$, soit $2k=0$. Seule la fonction nulle convient. Enfin, on peut écrire n'importe quelle fonction continue f sous la forme $f(x)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,dt+\left(f(x)-\dfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\,dt\right)$. Le morceau de gauche est évidemment une constante k, celui de droite, si on le nomme $g(x)$, vérifie $\displaystyle\int_{-1}^{1} g(t)\,dt=\int_{-1}^{1} f(t)-k\,dt=2k-2k=0$. Autrement dit, $g\in G$, et $f\in F+G$, ce qui prouve la supplémentarité de F et G dans E.
- Chacun des ensembles F et G est un sous-espace vectoriel de E comme noyau d'une application linéaire (c'est d'ailleurs la même raison qui fait de E un espace vectoriel). Attention tout de même, l'énoncé a un petit peu oublié de préciser que les suites de F et de G devaient aussi appartenir à E, sinon l'exercice n'a plus aucun sens ! Soit donc une suite appartenant à F et G. Elle vérifie $u_{n+1}=-u_n$, donc $u_{n+2}=-u_{n+1}=u_n$, ce qui implique en prenant la définition de G que $u_n+2u_n+u_n=0$, donc $u_n=0$. La suite est donc nulle. Considérons désormais une suite quelconque (u_n) de E, et posons $v_n=u_{n+1}+u_n$. La suite (v_n) vérifie $v_{n+2}-2v_{n+1}+v_n=u_{n+3}+u_{n+2}-2u_{n+2}-2u_{n+1}+u_{n+1}+u_n=0$ puisque $(u_n)\in E$. La suite (v_n) appartient donc à G. De même, la suite (u_n+u_{n-1}) appartient à G (il suffit de décaler les relations). Puisque G est un sous-espace vectoriel, la suite définie par $w_n=u_{n+1}+2u_n+u_{n-1}$ appartient aussi à G. Posons maintenant $z_n=u_{n+1}-2u_n+u_{n-1}$, alors $z_{n+1}+z_n=u_{n+2}-u_{n+1}-u_n+u_{n-1}=0$ puisque $(u_n)\in E$. La suite (z_n) appartient donc à F. Il suffit alors de constater que $u_n=\dfrac{1}{4}w_n-\dfrac{1}{4}z_n$, avec $\dfrac{1}{4}w_n\in G$ et $-\dfrac{1}{4}z_n\in F$. Nous avons bien achevé la preuve du fait que $E=F\oplus G$.

Exercice 7 (**)

- La matrice de u dans la base canonique est simplement $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Pour déterminer le noyau, on résout l'équation $AX=0$ (ou le système correspondant), ce qui nous mène aux conditions $y=-x$, et $z=2x-y=3x$. Autrement dit, $\ker(u)=\{(x,-x,3x)\mid x\in\mathbb{R}\}=\text{Vect}((1,-1,3))$. Pour l'image, le plus simple est de calculer les images des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$: $\mathrm{Im}(u) = \overrightarrow{(}(1,-2);(1,1);(0,1)) = \mathbb{R}^2$, car $(1,0) = (1,1) - (0,1) \in \mathrm{Im}(u)$, donc $\mathrm{Im}(u)$ contient les deux vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

- (je m'intéresse ici à la deuxième application de la première ligne de l'énoncé) La matrice de u dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On trouve le noyau en résolvant le système $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & & & = & 0 \\ x & & & + & z & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$. Les conditions $y = z = -x$ et $z = -y$ imposent $x = y = z = 0$ donc $\ker(u) = \{0\}$. Si on remplace le second membres du système par des inconnues a, b et c, en soustrayant les deux premières équations, on trouve $y - z = a - b$, ce qui donne en additionnant avec la dernière $2y = a - b + c$. De même, $2z = b + c - a$ et $2x = a + b - c$, le système a donc toujours une solution (unique), et l'application est bijective. En particulier, $\mathrm{Im}(u) = \mathbb{R}^3$. On peut même préciser que $u^{-1}(a,b,c) = \dfrac{1}{2}(a + b - c; a - b + c, b + c - a)$ (et obtenir du même coup l'inverse de la matrice A).
- Explicitons un peu plus les images des polynômes constituant la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$: $u(1) = (1,1,1,1)$; $u(X) = (1,2,3,4)$; $u(X^2) = (1,4,9,16)$ et $u(X^3) = (1,8,27,64)$. D'où la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix}$. Le noyau de u est constitué des polynomes de degré 3 qui s'annulent pour $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ et $x = 4$. Seul le polynôme nul peut avoir quatre racines en étant de degré inférieur ou égal à 3, donc $Ker(u) = \{0\}$. Quand à l'image, elle est engendrée par les quatre images calculées plus haut. Mais il n'est pas évident de prouver directement que cette famille est génératrice de $\mathbb{R}^4$. On peut ruser : si le noyau est réduit à 0, c'est que le système homogène de quatre équations à quatre inconnues ayant pour matrice A est de Cramer. La matrice est donc inversible, et l'application linéaire u est nécessairement bijective. En particulier, u est surjective, et $\mathrm{Im}(u) = \mathbb{R}^4$. En fait, on vient de constater qu'un polynôme de degré 3 (au plus) est déterminé de façon unique par la donnée de ses valeurs en 1, 2, 3 et 4. Ce résultat se généralise, nous en reparlerons dans le chapître consacré à la dimension des espaces vectoriels.
- Calculons donc les images des quatre matrices formant la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a $u\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $u\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $u\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $u\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, soit une matrice dans la base canonique égale à $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a alors $AM = \begin{pmatrix} -a & -b \\ a - c & b - d \end{pmatrix}$ et $MA = \begin{pmatrix} -a + b & -b \\ -c + d & -d \end{pmatrix}$. On a donc $u(M) = AM - MA = \begin{pmatrix} -b & 0 \\ a - d & b \end{pmatrix}$. Cette matrice est nulle seulement si $b = 0$ et $a = d$, donc $\ker(u) = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix} \mid (a,c) \in \mathbb{R}^2\right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$. L'image de u est engendrée par les images des matrices de la base canonique, d'où
$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ (les deux dernières images sont manifestement superflues).

Exercice 8 (*)

1. Par définition de la matrice d'un endomorphisme dans la base canonique, $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
   L'expression analytique de u est $u(x, y, z) = (x - 3y - 7z, -x + 2y + 4z, 2x - y + z)$.

2. Il s'agit de résoudre le système Il faut résoudre le système $\begin{cases} x - 3y - 7z = -1 \\ -x + 2y + 4z = 1 \\ 2x - y + z = 8 \end{cases}$

   $$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y - 7z = -1 \\ -y - 3z = 0 \\ -5y - 15z = -10 \end{cases}$$

   Les deux dernières équations étant incompatibles, $(-1, 1, 8)$ n'a pas d'antécédent par u.

   De même, pour le deuxième vecteur, il faut résoudre le système $\begin{cases} x - 3y - 7z = -2 \\ -x + 2y + 4z = 1 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases}$

   $\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y - 7z = -2 \\ -y - 3z = -1 \\ -5y - 15z = -5 \end{cases}$

   Cette fois-ci, les deux dernières équations sont équivalentes et donnent $y = 1 - 3z$. En remplaçant dans la première équation, on obtient $x - 3 + 9z - 7z = -2$, soit $x = 1 - 2z$. Finalement, les antécédents de $(-2, 1, 3)$ sont les vecteurs de la forme $(1 - 2z, 1 - 3z, z)$, pour une certaine valeur réelle de z.

3. u n'est pas injective ni surjective puisque certains éléments ont une infinité d'antécédents, et d'autres n'en ont pas (si on préfère, la matrice A n'est pas inversible).

Exercice 9 (***)

1. Supposons donc $x \in \mathrm{Im}(u)$, il existe alors un $y \in E$ tel que $x = u(y)$. Mais alors $u(x) = u^2(y) = 0$ puisque $u^2 = 0$. Ceci prouve que $x \in \ker(u)$, donc $\mathrm{Im}(u) \subset \ker(u)$. Pour prouver que $\mathrm{id} + u$ est un automorphisme, il suffit d'exhiber son inverse : $(\mathrm{id} + u) \circ (\mathrm{id} - u) = \mathrm{id} - u^2 = \mathrm{id}$ (les deux morphismes commutent évidemment). L'application $\mathrm{id} + u$ est donc un automorphisme, de réciproque $\mathrm{id} - u$.

2. Commençons par constater que $\ker(u) \subset \ker(u^2)$ est toujours vrai (si $u(x) = 0$, alors certainement $u(u(x)) = 0$). De même, on aura toujours $\mathrm{Im}(u^2) \subset \mathrm{Im}(u)$. Supposons alors que $\mathrm{Im}(u) \cap \ker(u) = \{0\}$, et choisissons $x \in \ker(u^2)$, on peut donc écrire $u(u(x)) = 0$. Autrement dit, $u(x) \in \ker(u)$. Mais comme $u(x) \in \mathrm{Im}(u)$, nécessairement $u(x) = 0$, ce qui prouve que $\ker(u^2) = \ker(u)$. Réciproquement, supposons que $\ker(u) = \ker(u^2)$, et choisissons $x \in \ker(u) \cap \mathrm{Im}(u)$. On peut donc écrire $x = u(y)$, avec $u(x) = 0$. cela implique $u(u(y)) = u(x) = 0$, mais comme $\ker(u) = \ker(u^2)$, $y \in \ker(u)$, donc $x = u(y) = 0$.

   Passons à la deuxième équivalence. Supposons d'abord $\ker(u) + \mathrm{Im}(u) = E$, et choisissons $x \in \mathrm{Im}(u)$. On peut donc écrire $x = u(y)$, avec par ailleurs $y = z + w$, où $z \in \ker(u)$, et $w = u(\alpha) \in \mathrm{Im}(u)$ d'après l'hypothèse effectuée. Alors $x = u(z+w) = u(z)+u(w) = u(u(\alpha))$, ce qui prouve que $x \in \mathrm{Im}(u^2)$. Réciproquement, supposons $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2)$, et choisissons $x \in E$. Par hypothèse, $u(x) \in \mathrm{Im}(u^2)$, donc $u(x) = u(u(z))$. Posons alors $x = u(z) + (x - u(z))$. Par construction, $u(z) \in \mathrm{Im}(u)$, mais par ailleurs $u(x - u(z)) = u(x) - u(u(z)) = 0$, donc $x - u(z) \in \ker(u)$. Nous avons bien prouvé que $x \in \mathrm{Im}(f) + \ker(f)$ et achevé notre démonstration.

Exercice 10 (**)

Si z et z' sont deux nombres et λ une constante réelle, alors $f(z+\lambda z') = z+\lambda z' + a\overline{z+\lambda z'} = z+\lambda z' + a\overline{z} + \lambda a\overline{z'} = f(z)+\lambda f(z')$. Le noyau est constitué de tous les nombres complexes vérifiant $f(z)=0$, soit $z+a\overline{z}=0$. Autrement dit, en notant $z=x+iy$, et $a=b+ic$, $f(z)=x+iy+(b+ic)(x-iy)=x+bx+cy+i(y+cx-by)$. Il faut donc que $(1+b)x=cy$ et $(1-b)y=cx$. Cela implique $(1-b^2)y=c^2y$, soit $(1-b^2-c^2)y=0$. Si a n'est pas de module 1, on trouve $y=0$, puis $(1+b)x=cx=0$. On a déjà exclu la possibilité $1+b=c=0$ (qui correspond au nombre $a=-1$ qui est de module 1), donc dans ce cas, $\ker(f)=\{0\}$ et l'application est injective (et même bijective car le système donnant le noyau est de Cramer, ce qui suffit à prouver l'existence d'antécédents par f de tout nombre complexe). Dans le cas très particulier où $a=-1$, le système se résume à $2y=0$, soit $y=0$, et $\ker(u)=\mathbb{R}$ (l'application n'est alors bien sûr pas bijective). Si a est de module 1 (et différent de -1), on doit avoir $x=\dfrac{c}{1+b}y$. Dans ce cas, $cx=\dfrac{c^2}{1+b}y=\dfrac{1-b^2}{1+b}y=(1-b)y$, donc la deuxième équation est automatiquement vérifiée. Autrement dit, $\ker(f)=\mathrm{Vect}\left(\dfrac{c}{1+b}+i\right)$. On peut écrire si on préfère $\dfrac{c}{1+b}=\dfrac{1-b}{c}$, mais il n'y a pas vraiment de façon complètement évidente d'exprimer ceci en fonction de a.r

Exercice 11 (**)

Les sous-ensembles F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, et leur intersection est constituée des vecteurs de la forme (a,a,a) vérifiant $2a+a-a=0$. seul le vecteur nul convient. Essayons désormais de décomposer un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G. Pour cela, écrivons plutôt $G=\{(x,y,2x+y)\mid(x,y)\in\mathbb{R}^2\}=\mathrm{Vect}((1,0,2);(0,1,1))$. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, on cherche donc trois réels a, b et c tels que $(x,y,z)=a(1,1,1)+b(1,0,2)+c(0,1,1)$. Autrement dit, on veut résoudre le système $\left\{\begin{array}{ccccccc} a & + & b & & & = & x \\ a & & & + & c & = & y \\ a & + & 2b & + & c & = & z \end{array}\right.$. Procédons, pour une fois, par substitution : $b=x-a$ et $c=y-a$, donc $a+2x-2a+y-a=z$, ce qui donne $x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z=a$; puis $b=-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z$ et $c=-x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z$. Puisqu'il y a toujours une solution au système, on peut écrire tout vecteur comme sous la forme x_F+x_G, avec $x_F=a(1,1,1)\in F$ et $x_G=b(1,0,2)+c(0,1,1)\in G$. Ce qui prouve que $F\oplus G=\mathbb{R}^3$. On a déjà effectué tous les calculs nécessaires à l'expression de la projection. Si on la note p, par définition, $p(x,y,z)=x_F=a(1,1,1)=\left(x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z;x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z;x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z\right)$. De même pour la symétrie s : $s(x,y,z)=x_G-x_F=b(1,0,2)+c(0,1,1)-a(1,1,1)=(-x-y+z;-2x+z;-2x-y+2z)$.

Exercice 12 (*)

Pour se simplifier la vie, écrivons la matrice de l'application : $A=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, et calculons $A^2=\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & -3 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}=A$, ce qui prouve que $p\circ p=p$, et donc que p est un projecteur. Pour déterminer son noyau, on résout le système (en multipliant tout par 3) : $\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ x & - & y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right.$.
La somme des deux dernières équations donne la même chose que la première, le système ne sera pas de Cramer (sans surprise pour un projecteur). En soustrayant ces deux mêmes équations, $3y-3z=0$,

donc $y = z$. On reporte alors dans la première pour trouver $2x + 2y = 0$, soit $y = -x$, donc $\ker(p) = \{(x, -x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, -1, -1))$. Pour l'image, plutôt que de calculer comme d'habitude les images des vecteurs de la base canonique, on peut utiliser le fait que les éléments de l'image d'un projecteur sont caractérisés par la condition $p(u) = u$, ou $p(u) - u = 0$. Ici, on se ramène alors au système (en multipliant à nouveau tout par 3) : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & - & z & = & 0 \\ x & - & y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$. Les trois équations sont équivalentes, l'image de p est donc le plan d'équation $x = y + z$, ou si on préfère $\text{Vect}((1, 1, 0); (1, 0, 1))$.

Exercice 13 (***)

1. Il suffit de constater que $(p \circ q) \circ (p \circ q) = p^2 \circ q^2 = p \circ q$ en faisant commuter p et q. D'après la caractérisation des projecteurs, $p \circ q$ est donc un projecteur.
2. Procédons par double inclusion. Soit $x \in \text{Im}(p \circ q)$, donc $x = p \circ q(y)$. Le vecteur x est donc l'image par p de $q(y)$, il appartient à $\text{Im}(p)$. Mais pusique p et q commutent, on peut aussi écrire $x = q \circ (p(y))$, et $x \in \text{Im}(q)$. Ceci prouve que $\text{Im}(p \circ q) \subset \text{Im}(p) \cap \text{Im}(q)$. Réciproquement, soit $x \in \text{Im}(p) \cap \text{Im}(q)$, on sait que, pour des projecteurs, on peut le traduire par $p(x) = x$ et $q(x) = x$. Mais alors $p \circ q(x) = p(x) = x$, donc $x \in \text{Im}(p \circ q)$ puisqu'il est laissé stable par $p \circ q$.
3. Procédons de même. Si $x \in \ker(p) + \ker(q)$, alors $x = y + z$, avec $p(y) = q(z) = 0$, donc $p \circ q(x) = p \circ q(y) + p \circ q(z) = q \circ p(y) + 0 = 0$, donc $x \in \ker(p \circ q)$. Réciproquement, si $x \in \ker(p \circ q)$, on peut écrire $x = q(x) + (x - q(x))$, avec $p(q(x)) = 0$ puisque $x \in \ker(p \circ q)$, et $q(x - q(x)) = q(x) - q^2(x) = 0$ puisque q est un projecteur. On vient de prouver que $x \in \ker(p) + \ker(q)$, ce qui achève notre démonstration.

Exercice 14 (***)

On se place dans le sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonction continues $F = \text{Vect}(x \mapsto \text{ch}(x); x \mapsto \text{sh}(x); x \mapsto x\,\text{ch}(x); x \mapsto x\,\text{sh}(x))$.

1. Supposons donc qu'une combinaison linéaire de la famille s'annule : $a\,\text{ch}(x) + b\,\text{sh}(x) + cx\,\text{ch}(x) + dx\,\text{sh}(x)$. Pour $x = 0$, cela implique directement $a = 0$ (tous les autres termes s'annulent). En additionnant les conditions $b\,\text{sh}(x) + cx\,\text{ch}(x) + dx\,\text{sh}(x) = 0$ et $b\,\text{sh}(-x) + c \times (-x)\,\text{ch}(-x) + d \times (-x)\,\text{sh}(-x) = 0$, les fonctions sh et $x \mapsto x\,\text{ch}(x)$ étant impaires (mais la dernière étant paire), on trouve $d = 0$. Il ne reste plus qu'à constater que les deux dernières fonctions ne sont pas proportionnelles (par exemple en disant que l'une est équivalente à $\frac{1}{2}e^x$ et l'autre à $\frac{1}{2}xe^x$ en $+\infty$) pour conclure que $b = c = 0$, et donc que la famille est libre.
2. L'application φ est linéaire car la dérivation l'est. Pour montrer que c'est un endomorphisme, et obtenir par la même occasion la matrice, on va simplement calculer l'image par φ de chacune des quatre fonctions de notre famille, et vérifier que leur image est dans F. Allons-y : $\varphi(\text{ch}) = \text{ch}''' - 2\,\text{ch}'' + \text{ch}' - \text{ch} = \text{sh} - 2\,\text{ch} + \text{sh} - \text{ch} = 2\,\text{sh} - 3\,\text{ch}$; $\varphi(\text{sh}) = 2\,\text{ch} - 3\,\text{sh}$ (calcul identique) ; en écrivant les dérivées en ordre inverse, $\varphi(x \mapsto x\,\text{ch}(x)) = -x\,\text{ch}(x) + \text{ch}(x) + x\,\text{sh}(x) - 4\,\text{sh}(x) - 2x\,\text{ch}(x) + 3\,\text{ch}(x) + x\,\text{sh}(x) = 4\,\text{ch}(x) - 4\,\text{sh}(x) - 3x\,\text{ch}(x) + 2x\,\text{sh}(x)$; de même (on inverse simplement le rôle de sh et de ch), $\varphi(x \mapsto x\,\text{sh}(x)) = -4\,\text{ch}(x) + 4\,\text{sh}(x) + 2x\,\text{ch}(x) - x\,\text{sh}(x)$. Toutes les images obtenues sont dans F, et la matrice de l'endomorphisme φ dans notre base est $M = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 & -4 \\ 2 & -3 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.
3. Si on veut juste prouver que φ est un automophisme, on peut se contenter de transformer M en matrice triangulaire supérieure (ce quise fait en deux opérations) et de constater qu'elle

est inversible). Mais comme on nous demande ensuite explicitement l'inverse, autant se lancer immédiatement dans un pivot complet :

$$\begin{array}{cccc}
M = & \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 & -4 \\ 2 & -3 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} & I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_3 + L_4 \end{array} \\
& \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 + 4L_4 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_4 \end{array} \\
& \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} L_2 \leftarrow 5L_2 - 8L_3 \\ \\ L_4 \leftarrow 5L_4 - L_3 \end{array} \\
& \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 10 & -15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} & L_2 \leftarrow L_2 + 10L_1 \\
& \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 15 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} & L_1 \leftarrow 25L_1 - L_2 \\
& \begin{pmatrix} -25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 15 & 10 & 4 & -4 \\ 10 & 15 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} & L_1 \leftarrow 25L_1 - L_2
\end{array}$$

Après ce calcul ébouriffant, il ne reste plus qu'à diviser tout par les bonnes valeurs pour trouver que $M^{-1} = \dfrac{1}{25}\begin{pmatrix} -15 & -10 & -4 & 4 \\ -10 & -15 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -15 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & -15 \end{pmatrix}$. La matrice étant inversible, on a en particulier prouvé que φ était un automorphisme.

4. Il suffit pour cela de déterminer une fonction f telle que $\varphi(f) = \mathrm{sh}(x) + x\,\mathrm{ch}(x)$. On en connait justement une, c'est $\varphi^{-1}(\mathrm{sh}(x)+x\,\mathrm{ch}(x))$. On détermine explicitement cette fonction en calculant $M^{-1} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{25}\begin{pmatrix} -14 \\ -11 \\ -15 \\ -10 \end{pmatrix}$. La solution recherchée (qui n'est pas unique, il existe simplement une unique solution à l'équation différentielle **dans F**) est $g : x \mapsto -\dfrac{1}{25}(14\,\mathrm{ch}(x) + 11\,\mathrm{sh}(x) + 15x\,\mathrm{ch}(x) + 10x\,\mathrm{sh}(x))$ (oui, je sais, on frise la crise cardiaque tellement c'est beau).

Exercice 15 (**)

1. Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$, on cherche à écrire $P = x(X^2+1) + y(X+1) + z(2X^2 - X)$, ce qui revient au système $\begin{cases} x + y = c \\ y - z = b \\ x + 2z = a \end{cases}$. En effectuant l'opération $L_3 + L_2 - L_1$, on trouve $z = a + b - c$, puis on en déduit aisément que $y = z + b = a + 2b - c$ puis $x = c - y = -a - 2b + 2c$. Puisque le système a toujours une solution, la famille est génératrice. Puisque la solution est unique (en particulier lorsque $a = b = c = 0$), la famille est libre. il s'agit donc d'une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. La matrice de passage est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. D'après la question précédente, la matrice de passage dans l'autre sens est $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (attention quand même, les coefficients notés a, b et c dans la première question ne sont pas dans l'ordre de la base canonique).

3. Il suffit de calculer $P^{-1} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ pour en déduire que $P = 5(X^2+1) - 3(X+1) - 2(2X^2 - X)$.

4. Pour la base canonique, on calcule $\varphi(1) = 0$; $\varphi(X) = X$ et $\varphi(X^2) = 2X^2$ pour en déduire la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Dans la base $\mathcal{B}$, la matrice sera donc $M' = P^{-1}MP = P^{-1} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 16 (**)

1. On calcule et on constate que $A^2 = A$. L'application f vérifie donc $f^2 = f$, c'est un projecteur.

2. Pour le noyau, on résout le système $\begin{cases} 3x - 2y - 4z = 0 \\ x - 2z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$. En prenant la deuxième équation, $x = 2z$, puis en reportant dans la troisième $2z - y - z = 0$, donc $y = z$. Reste à reprendre la première équation : $6z - 2z - 4z = 0$, qui est toujours vérifiée. Conclusion : $\ker(f) = \{(2z, z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((2,1,1))$. Pour l'image, le plus simple est de chercher les vecteurs invariants par f, et donc de résoudre le système $\begin{cases} 3x - 2y - 4z = x \\ x - 2z = y \\ x - y - z = z \end{cases}$. Les équations se ramènent toutes à $x - y - 2z = 0$, donc $\text{Im}(f) = \{(y + 2z, y, z) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((1,1,0);(2,0,1))$.

3. La famille $((2,1,1);(1,1,0);(2,0,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ (en effet, si $a(2,1,1) + b(1,1,0) + c(2,0,1) = 0$, en composant par f, on obtient $b(1,1,0) + c(2,0,1) = 0$, ce qui implique très rapidement $b = c = 0$, puis $a = 0$; la matrice de passage de la base canonique à notre famillee est inversible, la famille est donc une base). Dans cette base, le premier vecteur a une image nulle par f, les deux autres ont pour image eux-même, la matrice de f est donc $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Problème (extrait des Petites Mines 2009) (***)

1. Pour φ, c'est quasiment évident : $\varphi(\lambda P+\mu Q)=\lambda P(1)+\mu Q(1)$. En fait, pour f, c'est pareil, peut importe que ce qui se trouve dans P ne soit pas constant, $f(\lambda P+\mu Q)=\frac{1}{2}\lambda P\left(\frac{X}{2}\right)+\frac{1}{2}\lambda P\left(\frac{X+1}{2}\right)+\frac{1}{2}\mu Q\left(\frac{X}{2}\right)+\frac{1}{2}\mu Q\left(\frac{X+1}{2}\right)=f(\lambda P+\mu Q)$.
2. Calculons donc $P(1)=\frac{1}{2}(1+1)=1$; $P(X)=\frac{1}{2}\left(\frac{X}{2}+\frac{X+1}{2}\right)=\frac{X}{2}+\frac{1}{4}$; et $P(X^2)=\frac{1}{2}\left(\frac{X^2}{4}+\frac{(X+1)^2}{4}\right)=\frac{X^2}{4}+\frac{X}{4}+\frac{1}{8}$. Aussi extraordinaire que ça puisse paraître, la matrice de f dans la base canonique est exactement la matrice A introduite dans l'énoncé. Comme c'est curieux, comme c'est étrange et quelle coïncidence ! (Ionesco, pour ceux qui n'auraient pas reconnu).
3. Le noyau de φ est constitué des polynômes s'annulant en 1, donc factorisables par $X-1$. Si on se restreint comme ici au degré 2, $\ker(\varphi)=\{(X-1)(aX+b)\mid(a,b)\in\mathbb{R}^2\}=\mathrm{Vect}(X-1,X^2-X)$. L'application φ n'est donc pas injective. Par contre, elle est sûrement surjective puisque par exemple $\varphi(1)=1$, ce qui suffit à prouver que $\mathrm{Im}(\varphi)=\mathbb{R}$ (la seule autre possibilité quand l'espace d'arrivée est $\mathbb{R}$ serait d'avoir une image nulle donc une application nulle).
4. C'est une famille échelonnée de trois polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$, donc une base.
5. On va exceptionnellement noter M la matrice de passage de la base canonique vers $\mathcal{B}$ pour éviter la confusion avec les polynômes. $M=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-2&-6\\0&0&6\end{pmatrix}$. Inverser cette matrice est très facile, on effectue les deux opérations $L_1\leftarrow 6L_1+3L_2+2L_3$ puis $L_2\leftarrow L_2+L_3$ pour la transformer en matrice diagonale, et il ne reste plus qu'à diviser les trois lignes respectivement par 6, -2 et 6 pour obtenir $M^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}6&3&2\\0&-3&-3\\0&0&1\end{pmatrix}$.
6. On peut bien évidemment calculer $Q=M^{-1}AM=M^{-1}\times\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\\0&-1&-\frac{3}{2}\\0&0&\frac{3}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$.
Autre possibilité, on devine que la matrice va être diagonale, et on calcule directement $f(1)=1$ (déjà fait plus haut) ; $f(-2X+1)=\frac{1}{2}(-X+1-X)=\frac{1}{2}(-2X+1)$; et enfin $f(6X^2-6X+1)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}X^2-3X+1+\frac{3}{2}(X+1)^2-3X-3+1\right)=\frac{3}{2}X^2-\frac{3}{2}X+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}(6X^2-6X+1)$, ce qui permet de retrouver la même matrice.
7. Puisque $A=MQM^{-1}$, on prouve par une récurrence triviale que $A^n=MQ^nM^{-1}$ (c'est vrai au rang 1, et en le supposant au rang n, $A^{n+1}=A^n\times A=MQ^nM^{-1}MQM^{-1}=MQ^{n+1}M^{-1}$). La matrice Q étant diagonale, $Q^n=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2^n}&0\\0&0&\frac{1}{4n}\end{pmatrix}$, il ne reste plus qu'à calculer $MQ^n=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2^n}&\frac{1}{4^n}\\0&-\frac{1}{2^{n-1}}&-\frac{6}{4^n}\\0&0&\frac{6}{4^n}\end{pmatrix}$, puis $A^n=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}&\frac{1}{3}-\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{6\times4^n}\\0&\frac{1}{2^n}&\frac{1}{2^n}-\frac{1}{4^n}\\0&0&\frac{1}{4^n}\end{pmatrix}$.
8. Si $P=aX^2+bX+c$, il suffit de multiplier la matrice A^n par la matrice-colonne $\begin{pmatrix}c\\b\\a\end{pmatrix}$ (attention à l'ordre des coefficients) pour obtenir les coefficients de $f^n(P)$. On trouve $f^n(P)=\frac{a}{4^n}X^2+\left(\frac{b}{2^n}+\frac{a}{2^n}-\frac{a}{4^n}\right)X+c+\frac{b}{2}-\frac{b}{2^{n+1}}+\frac{a}{3}-\frac{a}{2^{n+1}}+\frac{a}{6\times4^n}$, puis $\varphi(f^n(P))=\frac{a}{4^n}+\frac{b}{2^n}+$

$\dfrac{a}{2^n} - \dfrac{a}{4^n} + c + \dfrac{b}{2} - \dfrac{b}{2^{n+1}} + \dfrac{a}{3} - \dfrac{a}{2^{n+1}} + \dfrac{a}{6 \times 4^n}$. inutile de s'embêter à simplifier, on peut se contenter de constater que $\lim\limits_{n \to +\infty} \varphi(f^n(P)) = c + \dfrac{b}{2} + \dfrac{a}{3}$. Or, $\displaystyle\int_0^1 P(t)\,dt = \int_0^1 at^2 + bt + c\,dt = \left[\frac{at^3}{3} + \frac{bt^2}{2} + ct\right]_0^1 = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c$, qui coïncide bien avec la limite calculée.

Feuille d'exercices n°15 : Intégration.

PTSI B Lycée Eiffel

12 avril 2013

Exercice 1 (* à **)

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes (aucun des calculs de cet exercice ne nécessite de technique spéciale sur les fractions rationnelles ou autres) :

- $f(x) = \dfrac{1}{(1-2x)^3}$
- $f(x) = \cos(x)\sin(x)$
- $f(x) = \arctan(x)$
- $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)}$
- $f(x) = x\sin^3(x)$
- $f(x) = x\sqrt{1+2x^2}$
- $f(x) = \dfrac{1}{x + x\ln^2(x)}$
- $f(x) = \mathrm{ch}(x)\cos(x)$
- $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$
- $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$
- $f(x) = \mathrm{Argsh}(3x)$
- $f(x) = \ln(1+x^2)$
- $f(x) = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$
- $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$
- $f(x) = \mathrm{th}(x)$

Exercice 2 (* à **)

Calculer les intégrales suivantes (aucun des calculs de cet exercice ne nécessite de technique spéciale sur les fractions rationnelles ou autres) :

- $\displaystyle\int_0^1 (x-2)(x+1)^5\ dx$
- $\displaystyle\int_1^e x^2(\ln x)^3\ dx$
- $\displaystyle\int_0^{\frac{\ln 2}{2}} \frac{e^{2x}}{e^{2x}+2}\ dx$
- $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2(x)\ dx$
- $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x(\ln(x))^2}\ dx$
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\ dx$
- $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \mathrm{ch}^2(x)\,\mathrm{sh}^2(x)\ dx$
- $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos(x)\ dx$
- $\displaystyle\int_1^e x\ln^2(x)\ dx$
- $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin^2(x)\ dx$
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\ dx$
- $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1-x}\ dx$
- $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\ dx$
- $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\ dx$
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x+1}}\ dx$
- $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\arcsin(x)}{1-x^2}}\ dx$
- $\displaystyle\int_0^3 x\,Ent(x)\ dx$
- $\displaystyle\int_1^5 |x^2-5x+6|\ dx$

Exercice 3 (** à ***)

Calculer les intégrales et primitives suivantes (**beaucoup** des calculs de cet exercice nécessitent des techniques spéciales sur les fractions rationnelles ou autres) :

- $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x(x+1)}\,dx$
- $\displaystyle\int_0^2 \frac{2x+1}{x^2-3x-4}\,dx$
- $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{(x^2+1)(x-2)}\,dx$
- $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)(x^2+x+1)}\,dx$
- $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2-4x+3}\,dx$
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x+x^2}\,dx$
- $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx$
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x^4+x^2+1)^2}\,dx$
- $\displaystyle\int \frac{\cos(x)-\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx$
- $\displaystyle\int \arctan(\sqrt[3]{x})\,dx$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{\sqrt{x}}}\,dx$
- $\displaystyle\int \frac{1}{5+4\sin(x)}\,dx$
- $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x+\sqrt{x-1}}\,dx$
- $\displaystyle\int \frac{\tan(x)}{1+\sin^2(x)}\,dx$
- $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,\frac{dx}{x}$
- $\displaystyle\int \arctan\left(\frac{x-1}{x-2}\right)\,dx$
- $\displaystyle\int \frac{1}{1-\mathrm{th}(x)}\,dx$
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3+x+1}{(x^2+2)^2}\,dx$

Exercice 4 (**)

On définit, pour tout entier n, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_1^e x^2(\ln x)^n dx$.

1. Calculer I_1.
2. Montrer que sur $[1;e]$, on a $(\ln x)^{n+1} \leqslant (\ln x)^n$, et en déduire le sens de variation de I_n.
3. Montrer que (I_n) est convergente.
4. Montrer que sur $[1;e]$, $0 \leqslant \ln x \leqslant \dfrac{x}{e}$. En déduire la limite de I_n.
5. Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $I_{n+1} = \dfrac{e^3}{3} - \dfrac{n+1}{3} I_n$. En déduire un équivalent de I_n.

Exercice 5 (**)

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}\,dt$.

1. Calculer u_0, u_1 et u_2.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ln 2$.
4. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
5. Pour tout n de $\mathbb{N}$, écrire $\ln 2 - u_n$ sous la forme d'une intégrale.
6. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln 2 - u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
7. Donner la limite de la suite (u_n).

Exercice 6 (*)

On considère la suite définie par $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt$.

1. Calculer I_0, I_1 et I_2.

2. Déterminer la limite de la suite (I_n).
3. Trouver une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.
4. On note désormais $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$, exprimer S_n en fonction de I_n.
5. Déduire des questions précédentes la convergence et la limite de la suite (S_n).

Exercice 7 (***)

Soit f une fonction telle que $\forall k \leqslant n$, $\int_0^1 t^k f(t)\ dt = 0$, montrer que f s'annule au moins $n+1$ fois sur $[0;1]$.

Exercice 8 (*)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$.

1. Montrer que f est dérivable et déterminer sa dérivée. En déduire le tableau de variations de f.
2. On pose désormais $g(x) = f(x) - \ln x$. Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}_+^*$ et en déduire son signe.
3. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

Exercice 9 (**)

On considère une fonction f strictement positive sur le segment $[a;b]$. Montrer que $\int_a^b f(x)\ dx \times \int_a^b \frac{1}{f(x)}\ dx \geqslant (b-a)^2$. Quand a-t-on égalité ?

Exercice 10 (**)

Déterminer toutes les fonctions f vérifiant $\int_0^1 f(x)^2\ dx = \int_0^1 f(x)^3\ dx = \int_0^1 f(x)^4\ dx$.

Exercice 11 (***)

Soit f une fonction continue sur $[0;1]$. Déterminer la limite puis un équivalent simple de $\int_0^1 x^n f(x)\ dx$.

Exercice 12 (***)

Étudier les fonctions suivantes :

- $f(x) = \int_x^{4x} e^{-t^2}\ dt$
- $g(x) = \int_x^{2x} \frac{\mathrm{ch}(t)}{t^2}\ dt$
- $h(x) = \int_x^{x^2} \frac{e^t}{t}\ dt$

Exercice 13 (***)

Pour tout entier naturel k on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}^+$ par la relation

$$f_k(x) = \int_0^1 t^k e^{-tx} dt$$

1. (a) Montrer que pour tout entier naturel k, la fonction f_k est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.
   (b) Etudier la suite $(f_k(0))_{k\geqslant 0}$. En déduire, pour tout réel positif x, la limite de la suite $(f_k(x))_{k\geqslant 0}$.
2. (a) Soit $x > 0$. Etablir que $f_{k+1}(x) = \dfrac{k+1}{x} f_k(x) - \dfrac{e^{-x}}{x}$ pour tout $k \geqslant 0$.
   (b) Expliciter les fonctions f_0, f_1 et f_2.
   (c) Montrer que, $f_0(x) \underset{+\infty}{\sim} 1/x$.
   (d) A l'aide de la relation établie au $c)$, montrer que pour tout k, $f_k(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{k!}{x^{k+1}}$.
3. (a) En effectuant un changement de variable, montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x > 0$, $f_k(x) = \dfrac{1}{x^{k+1}} \displaystyle\int_0^x u^k e^{-u}\, du$. En déduire que f_k est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer sa dérivée.
   (b) Trouver une relation simple entre f'_k et f_{k+1}.
   (c) Montrer que pour tout réel $\forall y \geqslant 0$, $1 - e^{-y} \leqslant y$. En déduire que pour tout entier naturel k, la fonction f_k est continue en 0. Est-elle dérivable à droite en ce point ?

Exercice 14 (**)

Déterminer les limites de chacune des suites suivantes en utilisant des sommes de Riemann.

- $u_n = \sum_{k=1}^n \dfrac{k}{n^2 + k^2}$
- $v_n = \sum_{k=1}^n \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}$
- $w_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$

Exercice 15 (****)

Le but de cet exercice est de montrer par l'absurde que π est un nombre irrationnel. Supposons donc que $\pi = \dfrac{p}{q}$ (n'oubliez pas cette hypothèse dans la suite de l'exercice), et posons $P_n(X) = \dfrac{1}{n!} X^n (p - qX)^n$, et $I_n = \displaystyle\int_0^\pi P_n(t) \sin(t)\, dt$.

1. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n(X - \pi) = P_n(X)$.
2. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n \geqslant 0$.
3. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$, et $P_n^{(n)}(\pi) \in \mathbb{Z}$.
4. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n \in \mathbb{N}$ (on pourra procéder à des intégrations par parties successives).
5. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$. En déduire que l'hypothèse initiale est absurde.

Problème : Intégrales de Wallis et formule de Stirling.

Calcul des intégrales de Wallis.

Pour tout entier n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\ dt$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\ dt$.
3. À l'aide d'une intégration par partie, déterminer une relation entre I_{n+2} et I_n.
4. En déduire les valeurs de I_{2p} et I_{2p+1} (on les exprimera à l'aide de factorielles).
5. Déterminer la monotonie de la suite (I_n) puis prouver sa convergence.
6. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{I_n}{I_{n+1}}$.
7. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)I_{n+1}I_n = \dfrac{\pi}{2}$.
8. Déterminer un équivalent simple de I_n.

Un résultat technique.

Soit f une fonction concave sur un segment $[a;b]$ et $M = \sup_{x\in[a;b]} |f''(x)|$. On note g la fonction affine vérifiant $f(a) = g(a)$ et $f(b) = g(b)$.

1. Expliquer (sans calcul !) pourquoi $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt \geqslant \int_a^b g(t)\ dt$.
2. Montrer que, $\forall t \in [a;b]$, $f(t) - g(t) \leqslant M\dfrac{(t-a)(b-t)}{2}$ (on pourra introduire la fonction $h(x) = f(x) - g(x) - K(x-a)(x-b)$, où K est une constante choisie pour assurer $h(t) = 0$).
3. En déduire que $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt - \int_a^b g(t)\ dt \leqslant \frac{M(b-a)^3}{12}$.
4. Appliquer ce résultat à la fonction ln pour prouver que
   $0 \leqslant \left(n + \dfrac{1}{2}\right)(\ln(n+1) - \ln(n)) - 1 \leqslant \dfrac{1}{12n^2}$.

Formule de Stirling.

On introduit les deux suites $u_n = \ln(n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}) - \ln(n!)$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{12(n-1)}$.

1. Montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes (on pourra bien sûr exploiter les résultats des deux premières parties de l'exercice).
2. Montrer que leur limite commune est égale à $-\dfrac{1}{2}\ln(2\pi)$ (on pourra s'intéresser à la limite de $2u_n - u_{2n}$).
3. En déduire un équivalent de $n!$.

Corrigé de la feuille d'exercices n°15

Exercice 1 (* à **)

Pour simplifier la présentation des calculs, on présentera en général les calculs de primitives sous la forme $\displaystyle\int_a^x$ en essayant de choisir une valeur de a annulant la primitive (histoire de ne pas garder de constantes inutiles dans la primitive). Les calculs seront faits lignes par ligne :

- Ici, mieux vaut directement donner $F(x) = \dfrac{1}{4(1-2x)^2}$, primitive valable sur chacun des deux intervalles de définition de f, à savoir $\left]-\infty; \dfrac{1}{2}\right[$ et $\left]\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$.
- $F(x) = \displaystyle\int_0^x \cos(t)\sin(t)\ dt = \frac{1}{2}\sin^2(x)$.
- On fait une intégration par parties en posant $u(t) = \arctan(t)$ et $v'(t) = 1$, donc $u'(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ et $v(t) = t$, donne $F(x) = \displaystyle\int_0^x \arctan(t)\ dt = [t\arctan(t)]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2}\ dt = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.
- $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\mathrm{ch}(t)}\ dt = \int_0^x \frac{2}{e^t+e^{-t}}\ dt = \int_0^x \frac{2e^t}{e^{2t}+1}\ dt$. Effectuons le changement de variable $u = e^t$ (donc $t = \ln(u)$), ce qui donne $du = e^t dt$, et transforme notre intégrale en $F(x) = \displaystyle\int_1^{e^x} \frac{2}{u^2+1}\ du = 2\arctan(e^x) - \frac{\pi}{2}$ (qui est bien la primitive s'annulant en 0, et valable sur $\mathbb{R}$ tout entier, de f). Les plus curieux constateront (par exemple en appliquant les règles de Bioche) que d'autres changements de variables sont possibles, qui donnent de façon intéressante d'autres expressions de nos primitives. Par exemple, en posant directement $u = \mathrm{sh}(t)$ dans l'intégrale initiale, $du = \mathrm{ch}(t)dt$, et $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{ch}(t)}{\mathrm{ch}^2(t)}\ dt = \int_0^{\mathrm{Argsh}\,x} \frac{1}{1+u^2}\ du$ puisque $\mathrm{ch}^2(t) = 1 + \mathrm{sh}^2(t)$. On trouve alors $F(x) = \arctan(\mathrm{Argsh}(x))$, qui est donc toujours égal à $2\arctan(e^x) - \dfrac{\pi}{2}$ (avouez que ça n'a rien d'évident). Les plus courageux essaieront le changement $u = \mathrm{th}\left(\dfrac{t}{2}\right)$ pour une troisième expression de cette même fonction.
- $F(x) = \displaystyle\int_0^x t\sin(t)\sin^2(t)\ dt = \int_0^x t\sin(t)(1-\cos^2(t))\ dt = \int_0^x t\sin(t)\ dt - \int_0^x t\sin(t)\cos^2(t)\ dt$. Coupons l'intégrale en deux pour alléger un peu la rédaction : $F_1(x) = \displaystyle\int_0^x t\sin(t)\ dt = [-t\cos(t)]_0^x + \int_0^x \cos(t)\ dt = -x\cos(x) + \sin(x)$ par intégration par parties. Passons au deuxième morceau, où on va aussi pouvoir faire une IPP en posant $u(t) = t$ et $v'(t) = -\sin(t)\cos^2(t)$, soit $u'(t) = 1$ et $v(t) = \dfrac{1}{3}\cos^3(t)$ (coup de pot, cette primitive !), ce qui donne $F_2(x) = \displaystyle\int_0^x -t\sin(t)\cos^2(t) = \left[\frac{t}{3}\cos^3(t)\right]_0^x - \int_0^x \frac{1}{3}\cos^3(t)\ dt = \frac{x}{3}\cos^3(x) - \frac{1}{3}\int_0^x \cos(t)(1-\sin^2(t))\ dt = \frac{x}{3}\cos^3(x) - \frac{1}{3}\sin(x) + \frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\sin^3(x)$. Finalement, on trouve brillamment $F(x) = \dfrac{x}{3}\cos^3(x) - x\cos(x) + \dfrac{1}{9}\sin^3(x) + \dfrac{2}{3}\sin(x)$.
- On ne se fatigue surtout pas, f est à peu près de la forme $u'\sqrt{u}$, qui a une primitive proportionnelle à $u^{\frac{3}{2}}$. Ici, on trouve donc directement $F(x) = \dfrac{1}{6}(1+2x^2)^{\frac{3}{2}}$ (définie sur $\mathbb{R}$ tout comme f).
- On a vraiment très envie d'effectuer le changement de variables $u = \ln(t)$, ce qui donne $du =$

$\frac{1}{t}dt$ (ça tombe bien, $\frac{1}{t}$ se met facilement en facteur dans l'intégrale) pour trouver $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t(1+\ln^2(t))}\,dt = \int_0^{\ln(x)} \frac{1}{1+u^2}\,du = \arctan(\ln(x))$, valable sur $\mathbb{R}^{+*}$ (on pouvait bien sûr remarquer directement que la fonction f est la dérivée de la fonction obtenue).

- Effectons deux IPP successives en dérivant à chaque fois la fonction hyperbolique et en primitivant la fonction trigonométrique (on peut bien sûr faire le contraire, ça marche pareil) : $F(x) = \int_0^x \mathrm{ch}(t)\cos(t)\,dt = [\mathrm{ch}(t)\sin(t)]_0^x - \int_0^x \mathrm{sh}(t)\sin(t)\,dt = \mathrm{ch}(x)\sin(x) + [\mathrm{sh}(t)\cos(t)]_0^x - \int_0^x \mathrm{ch}(t)\cos(t)\,dt = \mathrm{ch}(x)\sin(x) + \mathrm{sh}(x)\cos(x) - F(x)$. Du coup, $2F(x) = \mathrm{ch}(x)\sin(x) + \mathrm{sh}(x)\cos(x)$ et $F(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{ch}(x)\sin(x) + \mathrm{sh}(x)\cos(x))$.
- Une toute petite astuce suffit : $F(x) = \int_0^x \frac{1+t^2-1}{1+t^2}\,dt = \int_0^x 1 - \frac{1}{1+t^2}\,dt = x - \arctan(x)$.
- Ici, on peut au choix utiliser la même astuce que dans le calcul précédent (ce qui est sous l'intégrale s'écrit $\sqrt{x+1} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}$, et tout s'intègre directement), ou bien, pour mieux voir ce qui se passe, effectuer le petit changement de variable $u = t+1$: $\int_0^x \frac{t}{\sqrt{t+1}}\,dt = \int_1^{x+1} \frac{u-1}{\sqrt{u}}\,du = \int_1^{u-1} \sqrt{u} - \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = \left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - \frac{\sqrt{u}}{2}\right]_1^{x-1} = \frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x-1} - \frac{1}{2}\sqrt{x-1} - \frac{1}{6} = \left(\frac{2}{3}x - \frac{7}{6}\right)\sqrt{x-1} - \frac{1}{6}$. Cette primitive est valable sur tout l'intervalle $]-1, +\infty[$, et on peut bien sûr enlever la constante $-\frac{1}{6}$.
- Il est urgent de faire une IPP pour se débarasser du Argsh : posons $u(t) = \mathrm{Argsh}(3t)$ et $v'(t) = 1$, soit $u'(t) = \frac{3}{\sqrt{1+9t^2}}$ et $v(t) = 1$, on trouve alors $F(x) = [t\,\mathrm{Argsh}(3t)]_0^x - \int_0^x \frac{3t}{\sqrt{1+9t^2}}\,dt = x\,\mathrm{Argsh}(3x) - \frac{1}{3}\sqrt{1+9x^2}$, primitive valable sur $\mathbb{R}$.
- Encore un bon exemple d'IPP, en posant $u(t) = \ln(1+t^2)$, soit $u'(t) = \frac{2t}{1+t^2}$, et $v'(t) = 1$, soit $v(t) = t$. On trouve $F(x) = \int_0^x \ln(1+t^2)\,dt = [t\ln(1+t^2)]_0^x - \int_0^x \frac{2t^2}{1+t^2}\,dt = x\ln(1+x^2) - 2\int_0^x 1 - \frac{1}{1+t^2}\,dt = x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan(x)$ (même astuce que la neuvième intégrale de ce même exercice pour la fin du calcul).
- À part une IPP, on ne voit pas bien quoi faire : posons $u(t) = \ln(t + \sqrt{t^2-1})$, soit $u'(t) = \frac{1 + \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}}{t + \sqrt{t^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}$ (tiens, c'est curieux, on est en train de chercher une primitive de Argch, en fait) ; et $v'(t) = 1$, soit $v(t) = t$. On trouve alors $F(x) = \int_2^x \ln(t + \sqrt{t^2-1}\,dt = [t\ln(t + \sqrt{t^2-1})]_2^x - \int_2^x \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\,dt = x\ln(x + \sqrt{x^2-1}) - 2\ln(2+\sqrt{3}) - \sqrt{x^2-1} + \sqrt{3}$, primitive valable sur $[1, +\infty[$.
- C'est immédiat : ce qui est sous l'intégrale est de la forme $-\frac{u'}{u^2}$, donc $F(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ (définie seulement sur les intervalles où cos ne s'annule pas).
- Du facile pour finir : $F(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{ch}(t)}\,dt = \ln(\mathrm{ch}(t))$.

Exercice 2 (* à **)

- Un simple changement de variables $t = x + 1$ simplifie énormément le calcul : $I = \int_0^1 (x - 2)(x+1)^5\ dx = \int_1^2 (t-3)t^5\ dt = \int_1^2 t^6 - 3t^5\ dt = \left[\frac{t^7}{7} - \frac{t^6}{2}\right]_1^2 = \frac{127}{7} - \frac{63}{2} = -\frac{187}{14}$.
- Une simple enchainement d'IPP suffit, en posant $u(x) = (\ln(x))^3$, soit $u'(x) = \frac{3(\ln(x))^2}{x}$; et $v'(x) = x^2$, soit $v(x) = \frac{x^3}{3}$, ce qui donne $I = \int_1^e x^2(\ln(x))^3\ dx = \left[\frac{x^3}{3}(\ln(x))^3\right] - \int_1^e x^2(\ln(x))^2\ dx = \frac{e^3}{3} - \int_1^e x^2(\ln(x))^2\ dx$. On effectue une deuxième IPP en posant $u(x) = (\ln(x))^2$, soit $u'(x) = \frac{2\ln(x)}{x}$; et $v'(x) = x^2$, soit $v(x) = \frac{x^3}{3}$, pour trouver $I = \frac{e^3}{3} - \left[\frac{x^3}{3}\ln(x)^2\right] + \int_1^e \frac{2x^2}{3}\ln(x) = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{3} + \frac{2}{3}\int_1^e x^2\ln(x)\ dx$. Allez, une dernière IPP pour finir, en posant $u(x) = \ln(x)$, soit $u'(x) = \frac{1}{x}$; et $v'(x) = x^2$, donc $v(x) = \frac{x^3}{3}$. On finit par obtenir $I = \frac{2}{3}\left[\frac{x^3}{3}\ln(x)\right] - \frac{2}{3}\int_1^e \frac{x^2}{3}\ dx = \frac{2e^3}{9} - \frac{2}{9}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e = \frac{2e^3}{9} - \frac{2e^3-2}{27} = \frac{4e^3+2}{27}$.
- On reconnait ici à très peu de choses près une forme $\frac{u'}{u}$ qui s'intègre directement (si vraiment on n'est pas réveillés, un petit changement de variables $t = e^{2x}$ permet aussi de se tirer d'affaire) : $I = \int_0^{\frac{\ln(2)}{2}} \frac{e^{2x}}{e^{2x}+2}\ dx = \left[\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+2)\right]_0^{\frac{\ln(2)}{2}} = \frac{1}{2}(\ln(4) - \ln(3)) = \ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.
- On peut s'en sortir rapidement en se souvenant que $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$, donc $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(\cos(2x) + 1)$, d'où $I = \frac{1}{2}\int 0^{2\pi}\cos(2x) + 1\ dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(2x) + x\right]_0^{2\pi} = \pi$. Allez, une technique hyper astucieuse pour ceux qui aiment : on peut constater que $I = \int_0^{2\pi} \sin^2(x)\ dx$ (intégrer le carré du cosinus ou du sinus sur une période donne la même chose), puis faire la somme des deux pour trouver $\int_0^{2\pi} \cos^2(x) + \sin^2(x)\ dx = \int_0^{2\pi} 1\ dx = 2\pi$. Chacune des deux intégrales vaut donc π.
- On reconnait immédiatement $\frac{u'}{u^2}$ (ce n'est pas parce que le x est au dénominateur qu'il faut se laisser avoir), du coup $I = \left[-\frac{1}{\ln(x)}\right]_e^{e^2} = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$ (au pire, le changement de variable $t = \ln(u)$ ramène au même calcul).
- On peut intégrer directement si on est un tout petit peu malin : $I = \int_0^1 \frac{x}{1+(x^2)^2}\ dx = \left[\frac{1}{2}\arctan(x^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{8}$.
- Parfois, la méthode bêtement bourrine est efficace, remplacer joyeusement tout par des exponentielles fonctionne. Commençons par calculer $\mathrm{sh}^2(x)\,\mathrm{ch}^2(x) = \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} \times \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{e^{4x} - 2 + e^{-4x}}{16}$, puis intégrons : $I = \frac{1}{16}\int_0^{\ln(2)} e^{4x} + e^{-4x} - 2\ dx = \frac{1}{16}\left[\frac{e^{4x}}{4} - \frac{e^{-4x}}{4} - 2x\right]_0^{\ln(2)} = \frac{1}{16}\left(\frac{16}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{16\times 4} + \frac{1}{4} - 2\ln(2)\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{1\ 024} - \frac{\ln(2)}{8} = \frac{255}{1\ 024} - \frac{\ln(2)}{8}$.
- Un exemple surprenant de double intégration par parties : on commence par poser $u(x) = \cos(x)$, donc $u'(x) = -\sin(x)$; et $v'(x) = v(x) = e^x$, pour trouver $I = [e^x\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} +$

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin(x)\ dx$, et on recommence, toujours avec $v'(x) = v(x) = e^x$, et $u(x) = \sin(x)$, donc $u'(x) = \cos(x)$. On a cette fois $I = -1 + [e^x \sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x)\ dx = -1 + e^{\frac{\pi}{2}} - I$. Autrement dit, $2I = e^{\frac{\pi}{2}} - 1$, et $I = \dfrac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2}$.

- De qui se moque-t-on dans cet exercice ? On a déjà fait la même en plus facile à la deuxième intégrale ! Au moins, ici, deux IPP suffiront, je ne détaille pas autant que la première fois, on dérive bien sûr toujours les puissances de ln pour intégrer les x : $I = \left[\dfrac{x^2}{2} \ln(x)^2\right]_1^e - \displaystyle\int_1^e x\ln(x)\ dx = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^e + \int_1^e \frac{x}{2}\ dx = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2} + \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2-1}{4}$.
- On aimerait bien faire une IPP mais une primitive de $\sin^2$, ce n'est pas forcément trivial à trouver. Soit on en trouve une quand même en pensant qu'il y a un lien entre $\sin^2(x)$ et $\cos(2x)$ (petit truc déjà exploité un peu plus haut), soit on utilise une astuce en posant $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^2(x)\ dx$, et en calculant la somme et la différence de I et de J. Allez, faisons comme ça : $I + J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2(\sin^2(x) + \cos^2(x))\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\ dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{24}$. La différence demande plus de boulot : $I - J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2(\sin^2(x) - \cos^2(x))\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -x^2\cos(2x)\ dx$. Il va falloir faire une double IPP, en dérivant à chaque fois les x et en primitivant les fonctions trigonométriques : $u(x) = x^2$ donc $u'(x) = 2x$; $v'(x) = \cos(2x)$, donc $v(x) = \dfrac{\sin(2x)}{2}$, pour trouver $I - J = \left[-\dfrac{x^2}{2}\sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(2x)\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(2x)\ dx$. Il va évidemment falloir une deuxième IPP : $I - J = \left[-x\dfrac{\cos(2x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2x)}{2}\ dx = \frac{\pi}{4} + \left[\frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$. Ne reste plus qu'à écrire que $I = \dfrac{I+J}{2} + \dfrac{I-J}{2} = \dfrac{\pi^3}{48} + \dfrac{\pi}{8}$.
- Il est plus simple pour la rédaction de calculer par IPP $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\ dx$: on pose $u(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, soit $u'(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$; et $v'(x) = 1$, donc $v(x) = x$. On trouve alors $J = \left[\dfrac{x}{1+x^2}\right]_0^1 + \displaystyle\int_0^1 \frac{2x^2}{(1+x^2)2}\ dx = \frac{1}{2} + 2\int_0^1 \frac{1+x^2-1}{(1+x^2)^2}\ dx = \frac{1}{2} + 2J - I$. Autrement dit, $I = J + \dfrac{1}{2}$. Or, on sait calculer directement $J = [\arctan(x)]_0^1 = \dfrac{\pi}{4}$, dont on déduit $I = \dfrac{\pi+2}{4}$.
- Dans ce genre de cas, le changement de variable $t = 1 - x$ est le bienvenu (attention au changement de signe : $dt = -dx$) : $I = \displaystyle\int_1^0 -(1-t)^2\sqrt{t}\ dt = \int_0^1 (1 - 2t + t^2)\sqrt{t}\ dt = \int_0^1 \sqrt{t} - 2t^{\frac{3}{2}} + t^{\frac{5}{2}}\ dt = \left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{5}t^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{7}t^{\frac{7}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{4}{5} + \frac{2}{7} = \frac{16}{105}$.
- On a sous l'intégrale une forme $u'u$, qui est à un facteur près la dérivée de u^2, on fait donc une intégration directe : $I = \left[\dfrac{1}{2}(\ln(x))^2\right]_1^e = \dfrac{1}{2}$.
- C'est la même que la précédente ! Ah non, zut, la racine carrée complique tout. Pas tant que ça en fait : $I = \displaystyle\int_1^e \frac{2\ln(\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\ dx$. effectuons un changement de variable en posant $t = \sqrt{x}$, donc $dt = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx$, pour trouver $I = \displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} 4\ln(t)\ dt = 4[t\ln(t) - t]_1^{\sqrt{e}} = 4(\sqrt{e}\ln(\sqrt{e}) - \sqrt{e} + 1) =$

$4 - 2\sqrt{e}$.

- Empressons-nous de poser $t = x + 1$ pour trouver $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{(t-1)^3}{\sqrt{t}}\, dt = \int_1^2 t^{\frac{5}{2}} - 3t^{\frac{3}{2}} + 3\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt = \left[\frac{2}{7}t^{\frac{7}{2}} - \frac{6}{5}t^{\frac{5}{2}} + 2t^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{t}\right]_1^2 = \frac{2(8\sqrt{2}-1)}{7} - \frac{6(4\sqrt{2}-1)}{5} + 2(2\sqrt{2}-1) - 2\sqrt{2} + 2 = \left(\frac{16}{7} - \frac{24}{5} + 2\right)\sqrt{2} - \frac{2}{7} + \frac{6}{5} = \frac{32 - 18\sqrt{2}}{35}$
- Non, ne fuyez pas, c'est tout simple, on reconnait du $u'\sqrt{u}$, donc $I = \left[\frac{2}{3}(\arcsin(x))^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{\pi\sqrt{\pi}}{9\sqrt{6}}$.
- Vive la relation de Chasles, après découpage, on peut remplacer la partie entière par sa valeur constante : $I = \displaystyle\int_0^1 x \times 0\, dx + \int_1^2 x \times 1\, dx + \int_2^3 x \times 2\, dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 + [x^2]_2^3 = 2 - \frac{1}{2} + 9 - 4 = \frac{13}{2}$.
- Le mieux est d'écrire ce qui se trouve sous l'intégrale sans valeur absolue en distinguant suivant son signe (et en utilisant la relation de Chasles) : $x^2 - 5x + 6$ a pour discriminant $\Delta = 25 - 24 = 1$ et s'annule donc pour $x_1 = \frac{5+1}{2} = 3$ et $x_2 = \frac{5-1}{2} = 2$. Le trinôme est négatif entre les deux racines, on découpe l'intégrale en trois morceaux : $I = \displaystyle\int_1^2 x^2 - 5x + 6\, dx - \int_2^3 x^2 - 5x + 6\, dx + \int_3^5 x^2 - 5x + 6\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 6x\right]_1^2 - \left[\frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 6x\right]_2^3 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 6x\right]_3^5 = \frac{8}{3} - 10 + 12 - \frac{1}{3} + \frac{5}{2} - 6 - 9 + \frac{45}{2} - 18 + \frac{8}{3} - 10 + 12 + \frac{125}{3} - \frac{125}{2} + 30 - 9 + \frac{45}{2} - 18 = \frac{140}{3} - 41 = \frac{17}{3}$.

Exercice 3 (** à ***)

- Ici, les plus malins feront la décomposition en éléments simples à vue (même pas besoin d'identification) : $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$, donc $I = \displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\, dx = [\ln(x) - \ln(x+1)]_2^3 = \ln(3) - \ln(4) - \ln(2) + \ln(3) = 2\ln(3) - 3\ln(2) = \ln\left(\frac{9}{8}\right)$.
- Le dénominateur se factorise en $(x+1)(x-4)$ (il y a -1 comme racine évidente), on peut donc décomposer sous la forme $\frac{2x+1}{(x+1)(x-4)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-4}$. En multipliant par $x+1$ et en évaluant en $x = -1$, on trouve $\frac{-1}{-5} = a$, soit $a = \frac{1}{5}$. De même, en multipliant par $x-4$ et en prenant $x = 4$, on a $\frac{9}{5} = b$, donc $I = \displaystyle\int_0^2 \frac{1}{5(x+1)} + \frac{9}{5(x-4)}\, dx = \left[\frac{\ln(x+1)}{5} + \frac{9\ln(4-x)}{5}\right]_0^2 = \frac{\ln(3)}{5} + \frac{9\ln(2)}{5} - \frac{9\ln(4)}{5} = \frac{\ln(3) - 9\ln(2)}{5}$.
- La décomposition en éléments simples va donner $\frac{x+1}{(x^2+1)(x-2)} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{c}{x-2}$. En multipliant par $x-2$ en en prenant $x = 2$, on trouve $\frac{3}{5} = c$. En multipliant tout par x et en prenant un équivalent en $+\infty$, $0 = a + c$, donc $a = -\frac{3}{5}$. Pour achever le calcul, on regarde pour $x = 0$: $-\frac{1}{2} = b - \frac{c}{2}$, donc $b = \frac{c-1}{2} = -\frac{1}{5}$. Finalement, $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3}{5} \times \frac{1}{x-2} - \frac{3}{5}\frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{5(x^2+1)}\, dx = \left[\frac{3\ln(2-x)}{5} - \frac{3\ln(x^2+1)}{10}\ln(x^2+1) - \frac{\arctan(x)}{5}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{5}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right) - \ln(2)\right) - \frac{3}{10}\ln\left(\frac{5}{4}\right) -$

$\frac{1}{5}\arctan\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{10}(2\ln(3) - 2\ln(2) - \ln(5)) - \frac{1}{5}\arctan\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{10}\ln\left(\frac{9}{20}\right) - \frac{1}{5}\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$.
On ne peut pas vraiment simplifier plus, notamment l'arctangente qui ne correspond pas le moins du monde à un angle remarquable.

- Même technique que la précédente (le dénominateur ne peut pas se factoriser plus), mais avec des calculs plus pénibles (heureusement qu'il ne s'agit que d'une primitive à calculer, on donnera celle valable sur $]-1,+\infty[$ qui s'annule en 0). Commençons par décomposer sous la forme $\frac{x}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$. En multipliant par $x+1$ en en posant $x=-1$, on obtient $-1=a$. En multipliant par x et en prenant un équivalent en $+\infty$, on a ensuite $0=a+b$, soit $b=-a=1$. Enfin, on peut choisir $x=0$ pour trouver $0=a+c$, donc $c=1$ également. Finalement, $F(t) = \int_0^t -\frac{1}{x+1} + \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx = G(t) - \ln(t+1)$, où $G(t) = \int_0^t \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx = \int_0^t \frac{x+1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx$. Posons $u = x+\frac{1}{2}$ pour trouver $G(t) = \int_{\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} \frac{u+\frac{1}{2}}{u^2+\frac{3}{4}}\,du = \int_{\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} \frac{u}{u^2+\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}\frac{1}{u^2+\frac{3}{4}}\,du = \left[\frac{1}{2}\ln\left(u^2+\frac{3}{4}\right)\right]_{\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} + \int_{\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{1}{(\frac{2}{\sqrt{3}}u)^2+1}\,du = \frac{1}{2}\ln(t^2+t+1) + \frac{2}{3}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}u\right)\right]_{\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln(t^2+t+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{2}\ln(t^2+t+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$. Il ne reste plus quà conclure ce brillant calcul : $F(t) = -\ln(t+1) + \frac{1}{2}\ln(t^2+t+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$.
- On revient à du plus facile : $x^2-4x+3 = (x-1)(x-3)$, on peut décomposer sous la forme $\frac{1}{(x-1)(x-3)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-3}$. En mulitpliant par $x-1$ puis par $x-3$, on trouve facilement $-\frac{1}{2} = b$ et $\frac{1}{2} = b$, donc $I = \frac{1}{2}\int_{-1}^0 \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-1}\,dx = \frac{1}{2}[\ln(3-x) - \ln(1-x)]_{-1}^0 = \frac{1}{2}(\ln(4) - \ln(3) - \ln(2)) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{3}\right)$.
- Comme on a déjà vu quasiment le même calcul un peu plus haut, je passe les détails : $I = \int_0^1 \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt = \frac{4}{3}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{(\frac{2}{\sqrt{3}}t)^2+1}\,dt = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}u\right)\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\arctan(\sqrt{3}) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.
- Beaucoup plus astucieux, le changement de variable $t = \pi - x$ va nous simplifier la vie : $I = \int_\pi^0 -\frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)}{1+\cos^2(\pi-t)}\,dt = \int_0^\pi \frac{(\pi-t)\sin(t)}{1+\cos^2(t)}\,dt = \pi\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{1+\cos^2(t)}\,dt - I$, donc $2I = \pi\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{1+\cos^2(t)}\,dt = \pi[-\arctan(\cos(t))]_0^\pi = \pi(-\arctan(-1)+\arctan(1)) = \frac{\pi^2}{2}$. Donc $I = \frac{\pi^2}{4}$.
- Si on commençait pas poser $t = x^2$, ça simplifierait sûrement les choses, d'autant plus que $dt = 2xdx$, ce qui donne $I = \int_0^1 \frac{1}{2(t^2+t+1)^2}\,dt$. Essayons de ramener cette intégrale au cas plus classique (et traité plus haut) où il n'y a pas de carré au dénominateur, en intégrant par partie ce dernier en posant $u(t) = \frac{1}{t^2+t+1}$, donc $u'(t) = \frac{-2t-1}{(t^2+t+1)^2}$; et $v'(t) = 1$, donc $v(t) = t$. On trouve alors $J = \int_0^1 \frac{1}{t^2+t+1}\,dt = \left[\frac{t}{t^2+t+1}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{2t^2+t}{(t^2+t+1)^2}\,dt = \frac{1}{3} + \int_0^1 \frac{2t^2+2t+2}{(t^2+t+1)^2} - \frac{t+\frac{1}{2}}{(t^2+t+1)^2} - \frac{3}{2(t^2+t+1)^2}\,dt = \frac{1}{3} + 2J + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{t^2+t+1}\right]_0^1 - 3I =$

$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+2J-3I=2J-3I$. En découle que $I=\frac{J}{3}=\frac{\pi}{9\sqrt{3}}$ en reprenant le résultat vu plus haut pour J.

- Essayons d'appliquer les règles de Bioche : le dénominateur est laissé stable par les trois changements de variables possibles, seule la moitié du numérateur change de signe avec $-x$ et $\pi-x$, donc ça ne va pas, et $\pi+x$ change tout le numérateur de signe mais pas le dx, ce qui ne convient pas non plus. Va-t-on passer par le $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$? Bien sûr que non, nous sommes plus malins que ça, et un simple découpage de l'intégrale en 2 fait apparaitre des formules plus faciles : $F(x)=J(x)+K(x)$, avec $K(x)=\int_0^x -\frac{\sin(t)}{1+\cos^2(t)}\,dx=\arctan(\cos(x))$, et $J(x)=\int_0^x \frac{\cos(t)}{1+\cos^2(t)}\,dx=\int_0^x \frac{\cos(t)}{2-\sin^2(t)}\,dx$. Les règles de Bioche proposent de tenter $u=\sin(t)$, soit $du=\cos(t)dt$ pour trasformer l'intégrale en $J(x)=\int_0^{\sin(x)} \frac{1}{2-u^2}\,du$. Une décomposition en éléments simples relativement élémentaire donne $\frac{1}{2-u^2}=\frac{\sqrt{2}}{4(\sqrt{2}-u)}+\frac{\sqrt{2}}{4(\sqrt{2}+u)}$, d'où $J(x)=\frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^{\sin(x)} \frac{1}{\sqrt{2}-u}+\frac{1}{\sqrt{2}+u}\,du=\frac{\sqrt{2}}{4}(\ln(\sin(x)+\sqrt{2})-\ln(\sqrt{2}-\sin(x))$. Finalement, $F(x)=\frac{\sqrt{2}}{4}(\ln(\sin(x)+\sqrt{2})-\ln(\sqrt{2}-\sin(x)))+\arctan(\cos(x))$.
- On s'empresse de poser $t=x^{\frac{1}{3}}$, soit $x=t^3$, et $dx=3t^2dt$, pour trouver $F(x)=\int_0^{x^{\frac{1}{3}}} 3t^2\arctan(t)\,dt$. On effectue ensuite une IPP en dérivant l'arctangente et en primitivant la puissance : $F(x)=[t^3\arctan(t)]_0^{x^{\frac{1}{3}}}-\int_0^{x^{\frac{1}{3}}} \frac{t^3}{1+t^2}\,dt=x\arctan(\sqrt[3]{x})-\int_0^{x^{\frac{1}{3}}} \frac{t^3+t}{1+t^2}-\frac{t}{1+t^2}\,dt=x\arctan(\sqrt[3]{x})-\frac{x^{\frac{2}{3}}}{2}+\frac{1}{2}\ln(1+x^{\frac{2}{3}})$.
- Posons donc $t=x^{\frac{1}{4}}$, soit $x=t^4$ et $dx=4t^3dt$, pour trouver $F(x)=\int_0^{x^{\frac{1}{4}}} \frac{4t^3}{t^2+t}\,dt=\int_0^{x^{\frac{1}{4}}} \frac{4t^2}{1+t}\,dt=4\int_0^{x^{\frac{1}{4}}} \frac{t^2+t}{1+t}-\frac{t+1}{1+t}+\frac{1}{1+t}\,dt=4\left[\frac{t^2}{2}-t+\ln(1+t)\right]_0^{x^{\frac{1}{4}}}=2\sqrt{x}-4\sqrt{\sqrt{x}}+4\ln(1+x^{\frac{1}{4}})$.
- Le dénominateur ne s'annulant jamais, on peut déterminer une primitive valable sur $\mathbb{R}$. L'application des règles de Bioche ne donne rien de bon, allons-y pour le changement de variable violent $u=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$. On sait alors (c'est du cours !) que $\sin(x)=\frac{2u}{1+u^2}$, et $dx=\frac{2}{1+u^2}dt$. En posant $v=\tan\left(\frac{t}{2}\right)$ pour alléger les notations, $F(x)=\int_0^v \frac{1}{5+\frac{8u}{1+u^2}}\times\frac{2}{1+u^2}\,du=\int_0^v \frac{2}{5+8u+5u^2}\,du=\frac{2}{5}\int_0^v \frac{1}{(u+\frac{4}{5})^2+\frac{9}{25}}\,du=\frac{10}{9}\int_0^v \frac{1}{(\frac{5}{3}u+\frac{4}{3})^2+1}\,du$
$=\frac{2}{3}\left(\arctan\left(\frac{5}{3}u+\frac{4}{3}\right)-\arctan\left(\frac{4}{3}\right)\right)=\frac{2}{3}\arctan\left(\frac{5}{3}\tan\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{4}{3}\right)+K$.
- Il est urgent de poser $t=\sqrt{x-1}$, donc $x=t^2+1$ et $dx=2tdt$, pour trouver $I=\int_1^{\sqrt{2}} \frac{2t}{t^2+t+1}\,dt=\int_1^{\sqrt{2}} \frac{2t+1}{t^2+t+1}-\frac{1}{t^2+t+1}\,dt=\left[\ln(t^2+t+1)-\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t\right)\right]_1^{\sqrt{2}}=\ln(3+\sqrt{2})-\ln(3)-\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\arctan\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)-\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\right)$ (cf plus haut pour la primitive de la deuxième moitié, ce résultat ne se simplifie pas vraiment).
- Les primitives trouvées seront valables sur les intervalles de définition de la fonction tangente.

Les règles de Bioche suggèrent le changement de variable $t = \cos(x)$, qui change le signe du numérateur et de l'élément différentiel mais pas du dénominateur, soit $dt = -\sin(x)dx$. Comme $\dfrac{\tan(x)}{1+\sin^2(x)} = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)(2-\cos^2(x))}$, on trouve $F(x) = \displaystyle\int_0^{\cos(x)} -\frac{1}{t(2-t^2)}\,dt$. Il ne reste plus qu'à décomposer en éléments simples : $\dfrac{1}{t(t^2-2)} = \dfrac{a}{t} + \dfrac{b}{t-\sqrt{2}} + \dfrac{c}{t+\sqrt{2}}$. les trois constantes s'obtiennent ici en multipliant par chacun des dénominateurs et en évaluant pour $t = 0$, $t = \sqrt{2}$ et $t = -\sqrt{2}$. On obtient $-\dfrac{1}{2} = a$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+2)} = b = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$, et $\dfrac{1}{-\sqrt{2}(\sqrt{2}+2)} = c = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$ (il est normal que les coefficients b et c soient opposés, la fonction est impaire), soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{\cos(x)} -\frac{1}{2t} + \frac{\sqrt{2}-1}{2(t-\sqrt{2})} - \frac{\sqrt{2}-1}{2(t+\sqrt{2})} = -\frac{1}{2}\ln(\cos(x)) + \frac{(\sqrt{2}-1)}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}-\cos(x)}{\sqrt{2}+\cos(x)}\right)$.

- On pose brutalement $t = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$, soit $t^2 = \dfrac{x-1}{x+1}$, donc $t^2x + t^2 = x-1$ et $x = \dfrac{1+t^2}{1-t^2}$. La dérivée de $t \mapsto \dfrac{1+t^2}{1-t^2}$ est $\dfrac{2t(1-t^2)+2t(1+t^2)}{(1-t^2)^2} = \dfrac{4t}{(1-t^2)^2}$, donc $dx = \dfrac{4t}{(1-t^2)^2}dt$, et $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{t(1-t^2)}{1+t^2} \times \frac{4t}{(1-t^2)^2}\,dt = 4\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{t^2}{1-t^4}\,dt$. Il ne reste plus qu'à décomposer en éléments simples : $\dfrac{t^2}{1-t^4} = \dfrac{a}{1-t} + \dfrac{b}{1+t} + \dfrac{ct+d}{1+t^2}$. En multipliant par t et en prenant la limite en $+\infty$, on trouve $c = 0$. les valeurs de a et b s'obtiennent par la technique habituelle, produit par $1 \pm t$ et évaluation en ± 1, on a $\dfrac{1}{4} = a$ et $\dfrac{1}{4} = b$. enfin, en posant $t = 0$, $a+b+d = 0$, donc $d = -\dfrac{1}{2}$. On trouve alors $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} - \frac{2}{1+t^2}\,dt = [-\ln(1-t) + \ln(1+t) - 2\arctan(t)]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}\right) - \frac{\pi}{3}$.
- Les primitives seront définies sur chacun des intervalles $]-\infty, 2[$ et sur $]2, +\infty[$, on va déterminer la primitive définie sur le premier intervalle s'annulant en 0. On commence par une IPP en dérivant l'arctangente et en primitivant le facteur 1 : comme $x \mapsto \dfrac{x-1}{x-2}$ a pour dérivée $\dfrac{-1}{(x-2)^2}$, celle de $t \mapsto \arctan\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)$ vaut $\dfrac{-1}{(x-2)^2}\dfrac{1}{1+(\frac{x-1}{x-2})^2} = -\dfrac{1}{2x^2-6x+5}$. On trouve alors $F(x) = x\arctan\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right) + \displaystyle\int_0^x \frac{t}{2t^2-6t+5}\,dt$. Le dénominateur de la nouvelle intégrale ne s'annule jamais, mais on peut écrire $\displaystyle\int_0^x \frac{t}{2t^2-6t+5}\,dt = \int_0^t \frac{1}{4}\frac{4t-6}{2t^2-6t+5} + \frac{3}{2}\frac{1}{2t^2-6t+5}\,dt = \frac{1}{4}[\ln(2t^2-6t+5)]_0^x + \int_0^x \frac{3}{4}\frac{1}{(t-\frac{3}{2})^2+\frac{1}{4}}\,dt = \frac{1}{4}\ln(2x^2-6x+5) - \frac{1}{4}\ln(5) + \int_0^x + \int_0^x \frac{3}{(2t-3)^2+1}\,dt = \frac{1}{4}\ln(2x^2-6x+5) - \frac{1}{4}\ln(5) + \frac{3}{2}\arctan(2x-3) - \frac{3}{2}\arctan(-3)$. Finalement, $F(x) = x\arctan\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right) + \dfrac{1}{4}\ln(2x^2-6x+5) + \dfrac{3}{2}\arctan(2x-3) - \dfrac{1}{4}\ln(5) + \dfrac{3}{2}\arctan(3)$.
- La primitive sera définie sans problème sur $\mathbb{R}$. En appliquant les règles de Bioche, on peut poser $t = \mathrm{th}(x)$, soit $dt = (1-\mathrm{th}^2(x))dx = (1-t^2)dx$, donc $I = \displaystyle\int_0^{\mathrm{th}(x)} \frac{1}{(1-t)(1-t^2)}\,dt$. On fait une décomposition en éléments simples : $\dfrac{1}{(1-t)(1-t^2)} = \dfrac{a}{1+t} + \dfrac{b}{1-t} + \dfrac{c}{(1-t)^2}$. En multipliant par $1+t$ et en évaluant en -1, $\dfrac{1}{4} = a$. En multipliant par $(1-t)^2$ et en prenant $t = 1$, $\dfrac{1}{2} = c$. enfin, pour $t = 0$, $1 = a+b+c$, donc $b = \dfrac{1}{4}$. Finalement, $F(x) = \displaystyle\int_0^{\mathrm{th}(x)} \frac{1}{4(1-t)} + \frac{1}{4(1+t)} +$

$\dfrac{1}{4(1-t)^2}\,dt = \left[\dfrac{1}{4}\ln(1+t) - \dfrac{1}{4}\ln(1-t) + \dfrac{1}{2(1-t)}\right]_0^{\mathrm{th}(x)} = \dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{1+\mathrm{th}(x)}{1-\mathrm{th}(x)}\right) + \dfrac{1}{2(1-\mathrm{th}(x))} - \dfrac{1}{2}$.

- Bidouillons un peu : $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^3+2x}{(x^2+2)^2} + \frac{1-x}{(x^2+2)^2}\,dx = \int_0^1 \frac{x}{x^2+2} - \frac{x}{(x^2+2)^2} + \frac{1}{(x^2+2)^2}\,dx$. Le premier morceau s'intègre directement en $\left[\dfrac{1}{2}\ln(x^2+2)\right]_0^1 = \dfrac{1}{2}(\ln(3)-\ln(2)) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$, le deuxième morceau donne $\left[\dfrac{1}{2(x^2+2)}\right]_0^1 = \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{4} = -\dfrac{1}{12}$. Pour le troisième, c'est un classique, on l'obtient en intégrant par parties $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+2} = \left[\frac{x}{x^2+2}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{2x^2}{(x^2+2)^2}\,dx = \frac{1}{3} + \int_0^1 \frac{2(x^2+2)}{(x^2+2)^2} - \frac{4}{(x^2+2)^2}\,dx$, donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x^2+2)^2}\,dx = \frac{1}{12} + \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{x^2+2}\,dx$. Le $\dfrac{1}{12}$ va se simplifier, reste à calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{(\frac{x}{\sqrt{2}})^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\left[\sqrt{2}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Finalement, $I = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{3}{2}\right) + \dfrac{\sqrt{2}}{8}\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Exercice 4 (**)

1. On effectue une intégration par parties en posant $v'(x) = x^2$ et $u(x) = \ln x$, donc $v(x) = \dfrac{x^3}{3}$ et $u'(x) = \dfrac{1}{x}$, pour obtenir $I_1 = \displaystyle\int_1^e x^2\ln x\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{3}\,dx = \frac{e^3}{3} - \left[\frac{x^3}{9}\right]_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3+1}{9}$.
2. Sur $[1;e]$, $0 \leqslant \ln x \leqslant 1$, donc $0 \leqslant (\ln x)^{n+1} \leqslant (\ln x)^n$. En découle $0 \leqslant x^2(\ln x)^{n+1} \leqslant x^2(\ln x)^n$, puis par intégration $0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$. La suite (I_n) est décroissante.
3. La suite est décroissante minorée par 0, elle converge.
4. Le plus simple est d'étudier la fonction $f : x \mapsto \ln x - \dfrac{x}{e}$ (les plus malins noteront toufois que $y = \dfrac{x}{e}$ est l'équation de la tangente en e de la fonction ln, et invoqueront la concavité de cette dernière). On a $f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e}$, qui est positif sur l'intervalle $[1;e]$. La fonction f est donc croissante sur $[1;e]$, et $f(e) = 0$, donc f est négative sur $[1;e]$. On en déduit que $I_n \leqslant \displaystyle\int_1^e x^2\left(\frac{x}{e}\right)^n = \frac{1}{e^n}\int_1^e x^{n+2}\,dx = \frac{1}{e^n(n+3)}$. La majoration calculée tendant vers 0, le théorème des gendarmes s'applique, et (I_n) converge vers 0.
5. Il s'agit bien sûr d'une intégration par parties, avec $u'(x) = x^2$ et $v(x) = (\ln x)^{n+1}$: $I_{n+1} = \left[\dfrac{x^3}{3}(\ln x)^{n+1}\right]_1^e - \displaystyle\int_1^e \frac{x^2}{3}(n+1)(\ln x)^n = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3}I_n$. En faisant tendre n vers $+\infty$, on a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{3}I_n = \frac{e^3}{3}$, donc $I_n \sim \dfrac{e^3}{n+1} \sim \dfrac{e^3}{n}$.

Exercice 5 (**)

1. Calculons donc : $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2+t}\,dt = [\ln(2+t)]_0^1 = \ln 3 - \ln 2 = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$ $(\simeq 0.4)$; $u_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+2t}\,dt = \left[\frac{1}{2}\ln(1+2t)\right]_0^1 = \frac{\ln 3}{2}$ $(\simeq 0.55)$; enfin, $u_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^2}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dt =$

$\frac{4}{3}\int_0^1 \frac{1}{(\frac{2}{\sqrt{3}}(t+\frac{1}{2}))^2+1}\,dt = \frac{4}{3}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)\right)\right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\arctan(\sqrt{3})-\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}(\simeq 0.6)$.

2. Pour tout t dans $[0;1]$, on a $t^{n+1} \leqslant t^n$, donc $1+t+t^{n+1} \leqslant 1+t+t^n$ puis (tout étant positif) $\frac{1}{1+t+t^{n+1}} \geqslant \frac{1}{1+t+t^n}$. En intégrant cette inégalité entre 0 et 1, on obtient $u_{n+1} \geqslant u_n$, la suite (u_n) est donc croissante.
3. Il faut réussir à majorer intelligemment ce qui se trouve sous l'intégrale, en l'occurence en constatant que $\forall t \in [0;1]$, $1+t+t^n \geqslant 1+t$, donc $\frac{1}{1+t+t^n} \leqslant \frac{1}{1+t}$. En intégrant l'inegalité, on obtient $u_n \leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln 2$ (la majoration doit être guidée par le fait qu'on veut obtenir $\ln(2)$ à la fin).
4. La suite (u_n) est donc croissante et majorée, elle converge.
5. En utilisant le calcul fait un peu plus haut, on a $\ln 2 - u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t}dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t+t^n}\,dt$.
6. Il suffit d'arriver à majorer ce qui se trouve sous l'intégrale : $\frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t+t^n} = \frac{1+t+t^n-(1+t)}{(1+t)(1+t+t^n)} = \frac{t^n}{(1+t)(1+t+t^n)}$. Or, ce magnifique dénominateur est certainement plus grand que 1 quand $t \in [0;1]$, donc $\frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t+t^n} \leqslant t^n$, et en intégrant cette inégalité on a $\ln 2 - u_n \leqslant \int_0^1 t^n\,dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.
7. On a vu plus haut que $u_n \leqslant \ln 2$, donc $\ln 2 - u_n \geqslant 0$. Comme on vient de majorer par ailleurs cette même expression par quelque chose qui tend vers 0, un coup de théorème des gendarmes nous donne $\lim_{n\to+\infty}(\ln 2 - u_n) = 0$, c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln 2$.

Exercice 6 (*)

1. Allons-y : $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2)$, puis $I_1 = \int_0^1 \frac{t}{1+t}\,dt = \int_0^1 1 - \frac{1}{1+t}\,dt = 1 - I_0 = 1-\ln(2)$, et enfin $I_2 = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t}\,dt = \int_0^1 \frac{t^2+t}{1+t} - \frac{t}{1+t}\,dt = \int_0^1 t\,dt - I_2 = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 - (1-\ln(2)) = \frac{1}{2} - 1 + \ln(2) = \ln(2) - \frac{1}{2}$.
2. Même pas besoin de s'embêter à déterminer la monotonie de la suite (qui est en l'occurence décroissante) : comme $\frac{1}{1+t} \leqslant 1$ sur $[0,1]$, on peut encadrer I_n en écrivant $0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 t^n\,dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$. Il ne reste plus qu'à appliquer le théorème des gendarmes pour conclure que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
3. Pour une fois, inutile de faire une intégration par parties, il vaut mieux procéder astucieusement en généralisant les calculs de la première question : $I_{n+1} = \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\,dt = \int_0^1 \frac{t^{n+1}+t^n}{1+t}\,dt - I_n = \int_0^1 t^n\,dt - I_n = \frac{1}{n+1} - I_n$.

4. Méthode « avec les mains » : $I_0 = 1 - I_1 = 1 - \frac{1}{2} + I_2 = \cdots = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + (-1)^n I_n$.
   Autrement dit, $\ln(2) = S_n + (-1)^n I_n$, ou encore $S_n = \ln(2) + (-1)^{n+1} I_n$.
5. Il n'y a plus rien à faire d'autre que de constater : $\lim_{n \to +\infty} S_n = \ln(2)$.

Exercice 7 (***)

Je vous sens tous venir avec votre récurrence, oubliez-là, ça ne sert à rien. Observer ce qui se passe pour les petites valeurs de n peut être utile. Ainsi, pour $n = 0$, le résultat est une conséquence du fait qu'une fonction (non nulle) de signe constant sur un intervalle ne peut pas avoir une intégrale nulle. Pour $n = 1$, raisonnons par l'absurde en supposant que f ne s'annule qu'une seule fois, disons en c. Alors la fonction est (par exemple) strictement positive sur $[0, c]$ et strictement négative sur $[c, 1]$ (si c'est le contraire, on prend $-f$ qui vérifie également les hypothèses de l'énoncé). L'astuce est alors de constater que la fonction $g : t \mapsto (c - t)f(t)$ est de signe constant sur $[0, 1]$, en l'occurence positive (puisque les deux facteurs sont positifs si $t \leqslant c$ et les deux sont positifs si $t \geqslant c$). Pourtant, $\int_0^1 (t - c)f(t)\ dt = \int_0^1 tf(t)\ dt - c\int_0^1 f(t)\ fdt = 0 - c \times 0 = 0$. la fonction n'étant pas tout le temps nulle sur $[0, 1]$, on tient une absurdité.

Généralisons ce résultat, en raisonnant par l'absurde dans le cas général. Supposons que f s'annule exactement n fois (si elle s'annule moins, c'est encore plus facile) en $c_1 < c_2 < \dots c_n$ en changeant de signe à chaque fois (si f ne change pas de signe, on enlève purement et simplement la valeur correspondante). Notons alors $P = (t - c_1)(t - c_2)\dots(t - c_n)$. Ce polynôme change lui aussi de signe en c_1, c_2, …, c_n, dont le produit $Pf(t)$ est de signe constant sur $[0, 1]$. Pourtant, son intégrale est nulle. En effet, quel que soit le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_i X^i$ de degré n (ou moins), par linéarité de l'intégrale, $\int_0^1 P(t)f(t)\ dt = \sum_{k=0}^{n} a_i \int_0^1 t^i f(t)\ dt = 0$. Là encore, on a une contradiction, la fonction f ne peut donc pas s'annuler moins de $n + 1$ fois.

Exercice 8 (*)

1. La fonction f est la primitive de $\frac{e^x}{x}$ s'annulant en 1. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $f'(x) = \frac{e^x}{x}$. Cette dérivée étant positive sur $\mathbb{R}_+^*$, f y est croissante.
2. La fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $g'(x) = \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} = \frac{e^x - 1}{x}$. Cette dérivée est positive sur $\mathbb{R}_+^*$, donc g y est croissante. Comme $g(1) = f(1) - \ln 1 = 0$, la fonction g est donc négative sur $]0; 1]$ et positive sur $[1; +\infty[$ ($f(1) = 0$ car on effectue alors une intégrale sur l'intervalle $[1; 1]$).
3. D'après la question précédente, on a $f(x) \leqslant \ln x$ sur $]0; 1[$, donc $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$; de même, $f(x) \geqslant \ln x$ si $x \geqslant 1$, donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 9 (**)

C'est une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
$\int_a^b f(x)\ dx \times \int_a^b \frac{1}{f(x)}\ dx \geqslant \left(\int_a^b \sqrt{f(x)} \times \frac{1}{\sqrt{f(x)}}\ dx\right)^2 = \left(\int_a^b 1\ dx\right)^2 = (b - a)^2$. Pour avoir égalité, il faut que les fonctions f et $\frac{1}{f}$ soient proportionnelles, donc qu'il existe une constante k

telle que $f(x) = \dfrac{k}{f(x)}$, pour tout $x \in [a,b]$. Ceci implique $f(x)^2 = k$, donc $f(x) = \sqrt{k}$ (la fonction étant positive), la fonction f est donc constante. Réciproquement, toute fonction constante vérifie l'égalité.

Exercice 10 (**)

L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à f et à f^2 assure que $\left(\displaystyle\int_0^1 f(x)^3\ dx\right)^2 \leqslant \displaystyle\int_0^1 f(x)^2\ dx \times \displaystyle\int_0^1 f(x)^4\ dx$. Mais ici, l'hypothèse de l'exercice assure que cette inégalité est une égalité. Les fonctions f et f^2 sont donc proportionnelles sur $[0,1]$. Il existe une constante k telle que, $\forall x \in [0,1]$, $f(x)^2 = kf(x)$, soit $f(x) = k$ (sauf si f s'annule en x). La fonction est donc constante égale à k partout où elle ne s'annule pas. Mais comme la fonction f est continue (au moins par morceaux) pour que son intégrale existe), elle est donc constate sur $[0,1]$ (si elle prenait uniquement la valeur k et la valeur 0, le théorème des valeurs intermédiaires serait mis en défaut). Continuons à noter k cette constante (qui peut très bien être nulle), et revenons à nos hypothèses de départ : $\displaystyle\int_0^1 f(x)^2\ dx = k^2$; $\displaystyle\int_0^1 f(x)^3\ dx = k^3$ et $\displaystyle\int_0^1 f(x)^4\ dx = k^4$, donc on doit avoir $k^2 = k^3 = k^4$, ce qui ne peut se produire que si $k = 0$ ou $k = 1$ (la seule équation $k^2 = k^3$ admet uniquement 0 et 1 comme solutions). Deux fonctions sont donc convenables : les fonctions constantes égales à 0 et à 1. Si on autorise les fonctions constantes par morceaux, ça complique énormément les choses car les trois intégrales ne se calculent pas facilement.

Exercice 11 (***)

Intuitivement, $x^n f(x)$ va se rapprocher de la fonction nulle quand n tend vers $+\infty$, avec toutefois un petit souci pour $x = 1$, où on conservera une valeur égale à $f(1)$, mais qui ne devrait pas influencer énormément l'intégrale. Toutefois, démontrer que la limite est nulle est délicat. Le plus « simple » est de revenir à la définition technique de la limite. Fixons un $\varepsilon > 0$, et commençons par nous débarasser du morceau du côté de 1 : il existe sûrement un entier M tel que $|f(x)| \leqslant M$ sur $[0,1]$ (cela découle de la continuité de f), choisissons une valeur de $a \in [0,1[$ telle que $(1-a) \times M \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ (un tel a existe nécessairement puisque $\lim\limits_{a \to 1} M(1-a) = 0$). On peut alors affirmer que $\left|\displaystyle\int_a^1 x^n f(x)\ dx\right| \leqslant \displaystyle\int_a^1 |f(x)|\ dx \leqslant \displaystyle\int_a^1 M\ dx \leqslant (1-a) \times M \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. Occupon-nous maintenant du reste de l'intégrale, à savoir le morceau entre 0 et a. Puisque a est fixé strictement inférieur à 1, $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = 0$. En particulier, il existe un entier n_0 à partir duquel $a^{n+1} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2M}$. On peut alors majorer : $\left|\displaystyle\int_0^a x^n f(x)\ dx\right| \leqslant \displaystyle\int_0^a Ma^n\ dx$ (car la puissance n-ème est croissante sur $[0,a]$) $\leqslant Ma^{n+1} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. Il ne reste plus qu'un petit coup d'inégalité triangulaire pour finir : $\left|\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\ dx\right| \leqslant \left|\displaystyle\int_0^a x^n f(x)\ dx\right| + \left|\displaystyle\int_a^1 x^n f(x)\ dx\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon$ dès que $n \geqslant n_0$. C'est exactement la définition du fait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\ dx = 0$.

Ah mince, on me signale dans l'oreille que le calcul de cette limite est en fait complètement trivial et que je me suis beaucoup compliqué la vie pour rien : $\left|\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\ dx\right| \leqslant \displaystyle\int_0^1 x^n \times M\ dx \leqslant \dfrac{M}{n+1}$, qui tend vers 0 en appliquant le théorème des gendarmes.

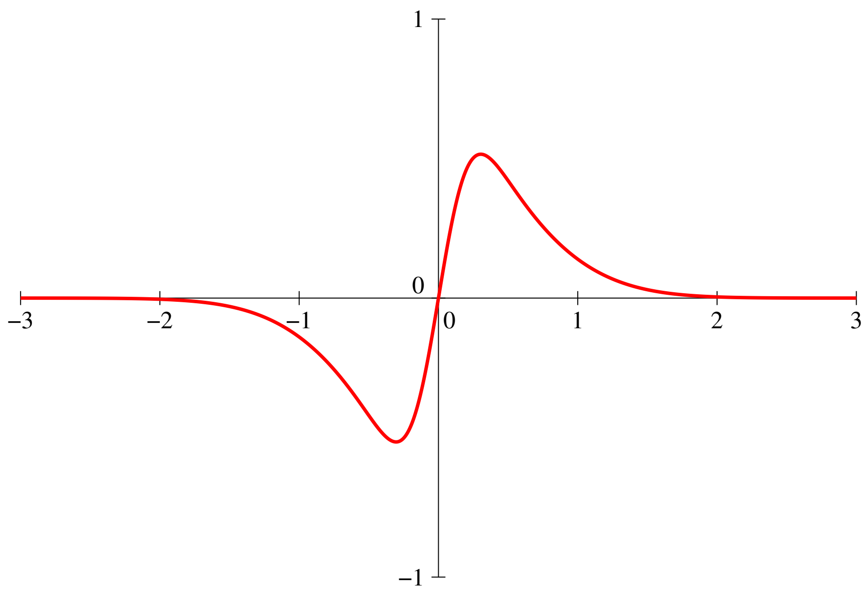
Bon, pour l'équivalent, il va tout de même falloir se fatiguer un peu plus. On peut deviner la valeur en se disant que l'intégrale de x^n devient quand n tend vers $+\infty$ quasiment entièrement portée par les valeurs de x très proches de 1, du coup $\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\ dx \simeq \int_0^1 x^n f(1)\ dx = \frac{f(1)}{n+1} \sim \frac{f(1)}{n}$. En admettant que c'est effectivement l'équivalent cherché, tentons de déterminer la limite de $n \times \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\ dx$. Cette expression peut se décomposer en $n\displaystyle\int_0^1 x^n f(1)\ dx + n\int_0^1 x^n(f(1) - f(x))\ dx$. Le premier morceau vaut $nf(1)\left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \dfrac{nf(1)}{n+1}$, qui a pour limite $f(1)$. Essayons maintenant de majorer le deuxième morceau. On notera comme précédemment M le maximum de $|f|$ sur $[0,1]$. Fixons un $\varepsilon > 0$, par continuité de f, il existe un voisinage de 1 sur lequel $|f(x) - f(1)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. Notons donc c un réel pour lequel cette inégalité est vraie sur $[c,1]$, et découpons l'intervalle d'intégration en 2 (en majorant $|f(1) - f(x)|$ par $|f(1)| + |f(x)| \leqslant 2M$ sur le premier morceau) : $n\left|\displaystyle\int_0^1 x^n(f(1) - f(x))\ dx\right| \leqslant n\int_0^c x^n \times 2M\ dx + n\int_x^1 x^n \times \frac{\varepsilon}{2}\ dx \leqslant 2Mn\frac{c^{n+1}}{n+1} + \frac{n(1-c^{n+1})}{n+1}\frac{\varepsilon}{2}$. Le deuxième terme est tout simplement majoré par $\dfrac{\varepsilon}{2}$, le premier a sûrement pour limite 0 car $c < 1$. Il existe donc un entier n_0 à partir duquel le premier morceau est majoré par $\dfrac{\varepsilon}{2}$, et le tout par ε. Nous venons de prouver que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x^n(f(1) - f(x))\ dx = 0$, donc $\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\ dx \sim \frac{f(1)}{n}$.

Exercice 12 (***)

- La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ puisque la fonction qu'on intègre est définie partout. Par ailleurs, la fonction intégrée est paire, ce qui permet de prouver que f est impaire : en faisant le changement de variables $u = -t$, $f(-x) = \displaystyle\int_{-x}^{-4x} e^{-t^2}\ dt = \int_x^{4x} -e^{-u^2}\ du = -f(x)$. En notant $g(t) = e^{-t^2}$ et G une primitive de g, on peut écrire $f(x) = G(4x) - G(x)$, donc $f'(x) = 4g(4x) - g(x) = 4e^{-16x^2} - e^{-x^2} = e^{-x^2}(4e^{-15x^2} - 1)$. La dérivée s'annule lorsque $e^{-15x^2} = \dfrac{1}{4}$, soit $-15x^2 = -2\ln(2)$, donc $x = \pm\sqrt{\dfrac{2\ln(2)}{15}}$. La seule limite à calculer est en $+\infty$, si $x \geqslant 0$ on peut majorer e^{-t^2} par e^{-x^2} sur $[x, 4x]$, donc $0 \leqslant f(x) \leqslant \displaystyle\int_x^{4x} e^{-x^2}\ dt = 3xe^{-x^2}$, qui a une limite nulle en $+\infty$ par croissance comparée. Le théorème des gendarmes permet alors de conclure que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. On peut résumer ces information dans le tableau de variations suivant (inutile d'essayer de calculer les valeurs des extrema, on note x_1 et $-x_1$ leurs abscisses pour simplifier) :

x	$-\infty$		$-x_1$		0		x_1		$+\infty$
f	0	$\searrow$	$-f(x_1)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	0

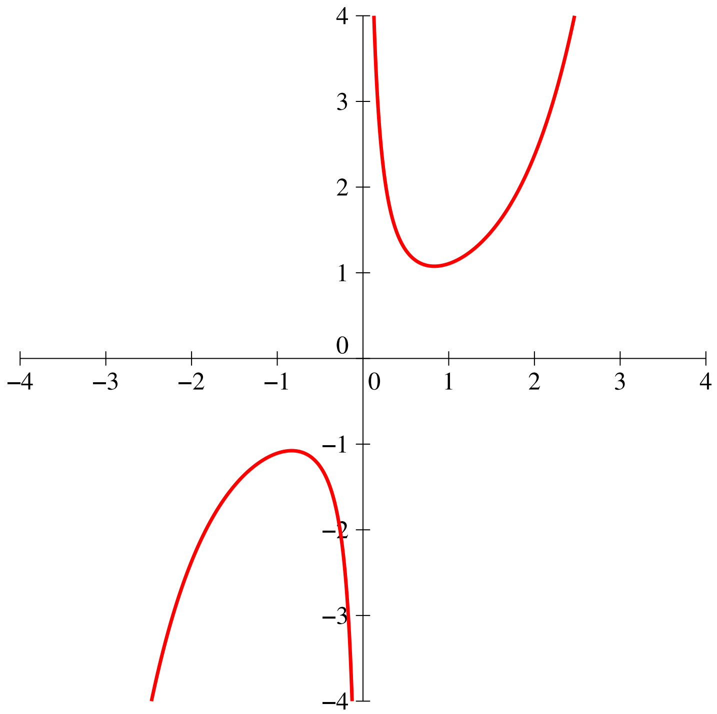
Et voici une allure de la courbe :



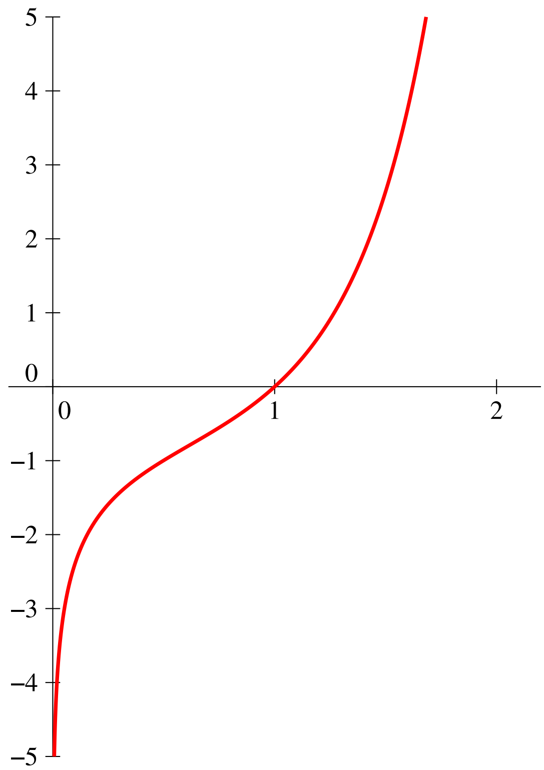
- Les techniques seront toujours les mêmes. Ici, la fonction à intégrer est définie sur $\mathbb{R}^*$ (et n'est pas prolongeable par continuité en 0), donc g sera définie également sur $\mathbb{R}^*$ (si $x \neq 0$, $0 \notin [x, 2x]$). La fonction g est par ailleurs impaire comme intégrale d'une fonction paire, comme on vient de le prouver pour la fonction précédente. On se contentera donc d'étudier la fonction g sur $\mathbb{R}^{+*}$. On dérive comme d'habitude : en posant $f(t) = \dfrac{\mathrm{ch}(t)}{t^2}$ et F une primitive de f, alors $g(x) = F(2x) - F(x)$, donc $g'(x) = 2f(2x) - f(x) = \dfrac{\mathrm{ch}(2x) - 2\,\mathrm{ch}(x)}{2x^2}$. Or, $\mathrm{ch}(2x) = \dfrac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \dfrac{(e^x + e^{-x})^2 - 2}{2} = 2\,\mathrm{ch}^2(x) - 1$, donc $g'(x)$ est du signe de $2\,\mathrm{ch}^2(x) - 2\,\mathrm{ch}(x) - 1$. En posant $X = \mathrm{ch}(x)$, on est ramenés à la résolution de l'équation $2X^2 - 2X - 1 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 12$, et admet pour racines $X_1 = \dfrac{2 + \sqrt{12}}{4} = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2}$, et $X_2 = \dfrac{1 - \sqrt{3}}{2}$. On ne garde que la première racine, la seconde étant plus petite que 1 et ne pouvant convenir comme valeur de $\mathrm{ch}(x)$. On est maintenant ramenés à résoudre l'équation $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2}$, soit $e^x + e^{-x} = 1 + \sqrt{3}$. En posant cette fois-ci $X = e^x$, on se retrouve à devoir résoudre $X^2 - (1 + \sqrt{3})X + 1 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = (1 + \sqrt{3})^2 - 4 = 2\sqrt{3}$, et pour racines $X_3 = \dfrac{1 + \sqrt{3} + \sqrt{2\sqrt{3}}}{2}$, et $X_4 = \dfrac{1 + \sqrt{3} - \sqrt{2\sqrt{3}}}{2}$. La deuxième valeur est inférieure à 1 car $2\sqrt{3} > 3$, donc mènera à une valeur de x négative qui ne nous intéresse pas (qui est en fait l'opposé de celle qu'on va garder). On se contentera de garder comme valeur d'annulation de g' le nombre $x_0 = \ln\left(\dfrac{1 + \sqrt{3} + \sqrt{2\sqrt{3}}}{2}\right)$. Ouf ! Évidemment, voilà encore une valeur pour laquelle on sera incapable de déterminer ne serait-ce qu'une valeur approchée du maximum.
On peut par contre déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$: $\forall t \in [x, 2x]$, $\mathrm{ch}(x) \leqslant \mathrm{ch}(t) \leqslant \mathrm{ch}(2x)$, et $\dfrac{1}{4x^2} \leqslant \dfrac{1}{t^2} \leqslant \dfrac{1}{x^2}$, donc $\dfrac{\mathrm{ch}(x)}{4x^2} \leqslant f(t) \leqslant \dfrac{\mathrm{ch}(2x)}{x^2}$, puis par intégration sur le segment $[x, 2x]$, $\dfrac{\mathrm{ch}(x)}{4x} \leqslant g(x) \leqslant \dfrac{\mathrm{ch}(2x)}{x}$. Par croissance comparée, le membre de gauche tend vers $+\infty$ en $+\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (il y aura même une branche parabolique de direction (Oy). En 0, chacun des deux membres tend vers $+\infty$, donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$. On en déduit évidemment les limites en 0^- et en $-\infty$ par imparité de la fonction, et on peut dresser le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-x_0$		0		x_0		$+\infty$
g	$-\infty$	$\nearrow$	$-f(x_0)$	$\searrow$	$-\infty \parallel +\infty$	$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$	$+\infty$

Et une allure de la courbe :



- Et une dernière pour la route, la fonction $f : t \mapsto \dfrac{e^t}{t}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ (et n'est pas prolongeable par continuité en 0), donc $h(x)$ existe si $0 \notin [x, x^2]$, ce qui est le cas si $x > 0$. Autrement dit, $\mathcal{D}_h = \mathbb{R}^{+*}$. Comme d'habitude, $h(x) = F(x^2) - F(x)$, donc $h'(x) = 2xf(x^2) - f(x) = \dfrac{2xe^{x^2}}{x^2} - \dfrac{e^x}{x} = \dfrac{2e^{x^2} - e^x}{x}$. Cette dérivée est du signe de $2e^{x^2} - e^x = e^x(2e^{x^2-x} - 1)$. Elle est positive lorsque $x^2 - x \geqslant -\ln(2)$, or $x^2 - x$ admet son minimum en $\dfrac{1}{2}$, de valeur $-\dfrac{1}{4} \geqslant -\ln(2)$. La fonction h est donc croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. On peut ajouter facilement que $h(x) \geqslant 0$ si $x \geqslant 1$, mais $h(x) \leqslant 0$ sur $]0, 1]$ puisque les bornes de l'intégrale sont alors « dans le mauvais sens ». Les limites sont assez faciles à calculer : $\forall x \geqslant 1$, $h(x) \geqslant \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{e^x}{x^2}\, dt = \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^x$, ce qui suffit à prouver que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$. Par ailleurs, $\forall x \in]0, 1]$, $h(x) \leqslant \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t}\, dt$ (n'oubliez pas que les bornes sont dans le mauvais sens), donc $h(x) \leqslant \ln(x^2) - \ln(x) = \ln(x)$, donc $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} h(x) = -\infty$. Pas de tableau de variations cette fois-ci (il n'y aurait pas grand chose à mettre dedans), on se contentera d'une dernière allure de courbe :



Exercice 13 (***)

1. (a) Prenons deux réels x et y dans $\mathbb{R}_+^*$ tels que $x < y$. On a alors $e^{-tx} > e^{-ty}$ pour tout $t \in [0;1]$. De même $t^k e^{-tx} > t^k e^{-ty}$ et on peut intégrer cette inégalité, ce qui donne exactement $f_k(x) > f_k(y)$, donc f_k est bien décroissante.

   (b) On a $f_k(0) = \displaystyle\int_0^1 t^k \, dt = \frac{1}{k+1}$. La suite $(f_k(0))$ est donc décroissante et tend vers 0. Or, f_k étant positive et décroissante sur $\mathbb{R}^+$, on a $\forall x > 0$, $0 \leqslant f_k(x) \leqslant \dfrac{1}{k+1}$, ce qui suffit à assurer via le théorème des gendarmes que $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

2. (a) Il s'agit de faire une IPP en posant $u(t) = t^{k+1}$ et $v'(t) = e^{-tx}$, donc $u'(t) = (k+1)t^k$ et $v(t) = -\dfrac{e^{-tx}}{x}$ (faites bien gaffe que la variable ici est t et x est donc une constante). On obtient $f_{k+1}(x) = \left[-t^{k+1}\dfrac{e^{-tx}}{x}\right]_0^1 + (k+1)\displaystyle\int_0^1 t^k \frac{e^{-tx}}{x} \, dx = -\frac{e^{-x}}{x} + \frac{k+1}{x} f_k(x)$.

   (b) On a $f_0(x) = \displaystyle\int_0^1 e^{-tx} \, dt = \left[-\frac{e^{-tx}}{x}\right]_0^1 = -\frac{e^{-x}}{x} + \frac{1}{x} = \frac{1-e^{-x}}{x}$. On peut utiliser la question précédente pour calculer les fonctions suivantes : $f_1(x) = \dfrac{1}{x} f_0(x) - \dfrac{e^{-x}}{x} = \dfrac{1}{x^2}(1 - e^{-x} - xe^{-x})$, puis $f_2(x) = \dfrac{2}{x} f_1(x) - \dfrac{e^{-x}}{x} = \dfrac{1}{x^3}(2 - 2e^{-x} - 2xe^{-x} - x^2 e^{-x})$.

   (c) Il suffit de reprendre l'expression trouvée : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1 - e^{-x} = 1$, donc $f_0 \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

   (d) Il faut faire une récurrence : on vient de montrer le résultat pour $k = 0$. Supposons le vrai pour f_k, on a alors $f_{k+1}(x) = \dfrac{f_k(x)}{x}\left(k + 1 - \dfrac{e^{-x}}{f_k(x)}\right)$. La parenthèse tend vers $k+1$ car l'exponentielle négative, par croissance comparée, l'emporte sur f_k qui est par hypothèse de récurrence équivalente à une fonction puissance. On a donc $f_{k+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{k+1}{x} f_k \sim \dfrac{k+1}{x} \dfrac{k!}{x^{k+1}} \sim \dfrac{(k+1)!}{x^{k+2}}$, ce qui achève la récurrence.

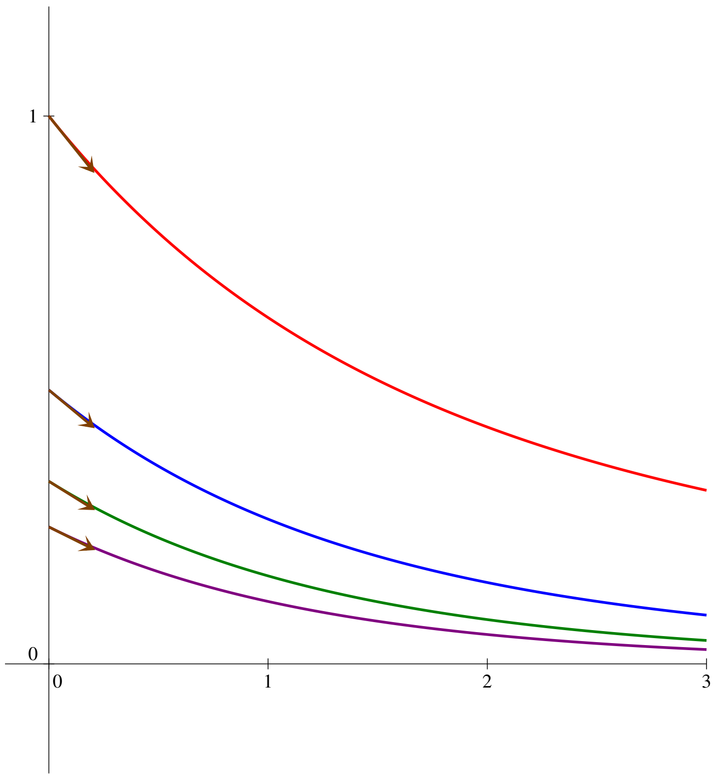
3. (a) Le changement de variable est $u = tx$, qui donne $du = x\ dt$, et change les bornes de l'intégrale en 0 et x, ce qui donne donc $f_k(x) = \displaystyle\int_0^1 t^k e^{-tx}\ dt = \int_0^x \left(\frac{u}{x}\right)^k e^{-u}\ \frac{du}{x} = \frac{1}{x^{k+1}} \int_0^x u^k e^{-u}\ du$.

(b) On vient d'écrire $f_k(x)$ sous la forme d'un produit $g(x)h(x)$, où $g(x) = \dfrac{1}{x^{k+1}}$, et donc $g'(x) = -\dfrac{k+1}{x^{k+2}}$, et $h(x) = \displaystyle\int_0^x u^k e^{-u}\ du$, donc $h'(x) = x^k e^{-x}$. On en déduit que $f_k'(x) = -\dfrac{k+1}{x^{k+2}} h(x) + \dfrac{1}{x^{k+1}} x^k e^{-x} = -\dfrac{k+1}{x} f_k(x) + \dfrac{e^{-x}}{x}$. On vient donc de montrer, en reprenant le résultat de la question 2.a, que $f_k' = -f_{k+1}$.

(c) On étudie la fonction $y \mapsto 1 - e^{-y} - y$ sur $\mathbb{R}^+$. sa dérivée vaut $e^{-y} - 1$, qui est négative sur l'intervalle d'étude. Or, pour $y = 0$, la fonction est nulle. Elle est donc bien négative sur $\mathbb{R}^+$ (comme souvent, on peut alternativement invoquer un argument de convexité).

On a donc $f_k(x) - f_k(0) = \displaystyle\int_0^1 t^k e^{-tx}\ dt - \int_0^1 t^k\ dt = \int_0^1 t^k(e^{-tx} - 1)\ dt \geqslant \int_0^1 t^{k+1} x\ dt = \frac{x}{k+2}$. Quand x tend vers 0, ceci tend vers 0. Comme par ailleurs $f_k(x) - f_k(0)$ est négatif puisque f_k est décroissante, la fonction f_k est bien continue en 0.

Pour la dérivée, on utilise ce bon vieux théorème du prolongement C^1 ! La fonction f_k est dérivable et C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $f_k' = -f_{k+1}$. On vient de voir que f_{k+1} était continue en 0, donc $\displaystyle\lim_{x \to 0} f_{k+1}(x) = f_{k+1}(0) = \frac{1}{k+2}$. On en déduit que $\displaystyle\lim_{x \to 0} f_k'(x) = -\frac{1}{k+2}$ puis que f_k est dérivable en 0, de dérivée $f_k'(0) = -\dfrac{1}{k+2}$. Les courbes des fonctions f_k sont assez décevantes, mais voici l'allure des quatre premières (f_0 à f_3, de haut en bas), les valeurs et tangentes en 0 correspondant évidemment aux valeurs calculées) :



Exercice 14 (**)

- Le but est donc de faire apparaitre une somme de Riemann, ce qui consiste en gros à sortir un $\dfrac{1}{n}$ de la somme et à exprimer ce qui reste dans la somme en fonction de $\dfrac{k}{n}$ uniquement : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{n^2+k^2} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{n^2(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right)$, avec $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$. Le théorème de convergence des sommes de Riemann permet alors d'affirmer que (u_n) converge et que sa limite vaut $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}$.
- Même méthode : $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2k}{n}}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right)$, avec $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}$, donc (v_n) converge vers $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+2x}}\,dx = \left[\sqrt{1+2x}\right]_0^1 = \sqrt{3}-1$.
- Pour w_n, c'est un peu plus subtil, il vaut mieux étudier $\ln(w_n)$ et surtout se rendre compte que $\ln(n!) = \ln(1\times 2\times\cdots\times n) = \ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n$. On a alors : $\ln w_n = \dfrac{1}{n}(\ln((2n)!) - n\ln n - \ln(n!)) = \dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{k=2n} \ln k - n\ln n - \sum_{k=1}^{k=n}\ln k\right) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=n+1}^{k=2n}(\ln k - \ln n) = \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{k=2n}\ln\frac{k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}\ln\frac{n+k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$, donc $(\ln w_n)$ converge vers $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x)\,dx = \int_1^2 \ln u\,du = [x\ln x - x]_1^2 = 2\ln 2 - 1$, et (w_n) converge vers $e^{2\ln 2 - 1} = \dfrac{4}{e}$.

Exercice 15 (****)

1. Erreur d'énoncé : il faut remplacer le $X - \pi$ par $\pi - X$. En n'oubliant pas l'hypothèse $\pi = \dfrac{p}{q}$, $P_n(X - \pi) = \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{p}{q} - X\right)^n (p - p + qX)^n = \dfrac{1}{n!}\dfrac{p - qX)^n}{q^n} \times q^n X^n = P_n(X)$.
2. Si $\pi = \dfrac{p}{q}$, $p - qt$ est positif sur $[0, \pi]$, donc l'intégrale est celle d'une fonction positive, elle est positive.
3. Prouvons-le pour 0 : comme il est racine de multiplicité n de P_n, il annule déjà toutes les dérivées k-èmes lorsque $k < n$. Supposons désormais $k > n$, en appliquant la formule de Leibniz au produit $X^n(p - qX)^n$, la seule dérivée de X^n ne s'annulant pas en 0 est la dérivée n-ème, qui vaut $n!$, donc $P_n^{(k)}(0) = \dfrac{1}{n!}\dbinom{n}{k} n!((p - qX)^n)^{(k-n)}(0)$. Les $n!$ se simplifient, le coefficient binômial est un entier, il suffit de prouver que la dérivée restante est aussi entière. Elle sera nulle si $k - n > n$, soit $k < 2n$, sinon $((p - qX)^n)^{(k-n)} = n(n-1)\dots(2n-k+1)(p-qX)^{2n-k}$, qui prend pour valeur en 0 le nombre $\dfrac{n!}{(2n-k)!}p^{2n-k}$, qui est certainement un entier. On a bien prouvé que $P_n^{(k)}(0)$ était toujours un entier. Comme $P_n(\pi - X) = P_n(X)$, $P_n^{(k)}(\pi) = (-1)^k P_n^{(k)}(0)$ est également un entier.
4. Pour $n = 0$, $I_0 = \displaystyle\int_0^\pi \sin(t)\ dt = [-\cos(t)]_0^\pi = 2 \in \mathbb{N}$. Prenons maintenant un entier supérieur ou égal à 1, et effectuons deux intégrations par partie successives (en dérivant P_n à chaque fois), en exploitant le fait que P_n s'annule en 0 et en π (c'est le cas de tous les polynômes P_n à partir de $n = 1$) et, comme on vient de le voir, que les dérivés P_n' prennent des valeurs entières en 0 et en π. On calcule donc $I_n = [-P_n(t)\cos(t)]_0^\pi + \displaystyle\int_0^\pi P_n'(t)\cos(t)\ dt = \int_0^\pi O_n'(t)\cos(t)\ dt$ (le crochet s'annule) $= [P_n'(t)\sin(t)]_0^\pi - \displaystyle\int_0^\pi P_n''(t)\sin(t)\ dt = -\int_0^\pi P''(t)\sin(t)\ dt$. Bon, ben il ne reste plus qu'à recommencer, en faisant attention au fait que les crochets ne vont pas continuer à tous s'annuler : à l'étape suivante $P''(t)\cos(t)$ ne s'annule plus en 0 et en π. Par contre ce qui est certain, c'est qu'il prend une valeur entière en 0 et en π, donc on peut écrire $I_n = a_3 - \displaystyle\int_0^\pi P^{(3)}(t)\cos(t)\ dt = a_3 + \int_0^\pi P^{(4)}(t)\sin(t)\ dt$, avec $a_3 \in \mathbb{Z}$. Et on continue. À chaque étape, le premier crocher donnera un nombre entier, et le second s'annulera, pour donner $I_n = a_{2k-1} + (-1)^k \displaystyle\int_0^\pi P^{(2k)}(t)\sin(t)\ dt$, avec $a_{2k-1} \in \mathbb{Z}$. Pour être rigoureux, ça se démontre bien sûr par récurrence : on a vu plus haut que c'était vrai pour $k = 1$ et $k = 2$ et en le supposant au rang k, avec deux IPP de plus, $I_n = a_{2k-1} + \displaystyle\int_0^\pi P^{(2k)}(t)\sin(t)\ dt = a_{2k-1} +$ $[(-1)^{k+1}P^{(2k)}(t)\cos(t)] + (-1)^k \displaystyle\int_0^\pi P^{(2k+1)}(t)\cos(t)\ dt = a_{2k+1} + [(-1)^k P^{(2k+1)}(t)\sin(t)]_0^\pi +$ $(-1)^{k+1}\displaystyle\int_0^\pi P^{(2k+2)}(t)\sin(t)\ dt$, où a_{2k+1} est égal à a_{2k-1} plus la valeur du crochet avec le cosinus, ce qui donne bien à nouveau un nombre entier. Par principe de récurrence, la formule est vraie pour tout entier k, et en particulier pour $k = n$, valeur pour laquelle $\displaystyle\int_0^\pi P^{(2k)}(t)\sin(t)\ dt = 0$, puisque $P^{(2n)} = 0$. Il ne reste plus alors que $I_n = a_{2n-2} \in \mathbb{Z}$. Comme par ailleurs $I_n \geqslant 0$, $I_n \in \mathbb{N}$.
5. La fonction $x \mapsto x(p - qx)$ étant continue sur $[0, \pi]$, elle y atteint un maximum M (qu'on peut d'ailleurs calculer explicitement si on le souhaite), donc $P_n(t) \leqslant \dfrac{1}{n!}M^n$ sur $[0, \pi]$, et $I_n \leqslant \displaystyle\int_0^\pi \frac{M^n}{n!}\sin(t)\ dt = \frac{2M^n}{n!}$, qui a une limite nulle quand n tend vers $+\infty$. Puisque la suite est constituée de nombres entiers, elle est forcément nulle à partir d'un certain rang n_0 (par

application de la définition de la limite avec par exemple $\varepsilon = \frac{1}{2}$, on doit avoir $-\frac{1}{2} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2}$ à partir d'un certain rang, donc $I_n = 0$). Mais comme on a vu que la fonction sous l'intégrale était toujours positive sur $[0, \pi]$, avoir une intégrale nulle signifie que $P_n(t)\sin(t)$ vaut toujours 0 entre 0 et π. En particulier, le polynôme P_n doit s'annuler une grosse infinité de fois (puisque sin ne s'annule qu'une seule fois sur l'intervalle), ce qui implique que P_n est le polynôme nul. Voilà une grosse absurdité, P_n n'est manifestement pas égal à 0, donc notre hypothèse de départ est fausse et π ne peut pas être rationnel.

Problème : Intégrales de Wallis et formule de Stirling.

Calcul des intégrales de Wallis.

1. Allons-y : $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dt = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \, dt = [-\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.
2. Il suffit de penser à effectuer le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$ (donc $du = -dt$), qui se contente d'échanger les bornes de l'intégrale et surtout de transormer le sin en $\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos(u)$. On obtient alors immédiatement $I_n = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 -\cos^n(u) \, du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(u) \, du$.
3. Il faut penser pour l'IPP à poser $u(t) = \sin^{n+1}(t)$ et $v'(t) = \sin(t)$, donc $u'(t) = (n+1)\cos(t)\sin^(t)$ et $v(t) = -\cos(t)$, pour obtenir $I_n = [-\cos(t)\sin^n(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\sin^n(t) \, dt = 0 + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2(t))\sin^n(t) \, dt = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) - \sin^{n+2}(t) \, dt = (n+1)(I_n - I_{n+2})$.
   On en déduit que $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$, soit $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.
4. D'après la question précédente, $I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2} = \frac{(2p-1)(2p-3)}{2p(2p-2)} I_{2p-4} = \dots$ $= \frac{(2p-1)(2p-3)\dots 1}{2p(2p-2)\dots 2} I_0 = \frac{(2p)(2p-1)(2p-2)(2p-3)\dots 2 \times 1}{(2p^2)(2p-2)^2 \dots 2^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{2^{2p}p^2(p-1)^2 \dots 1^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!\pi}{2^{2p+1}(p!)^2}$. De même, $I_{2p+1} = \frac{(2p)(2p-2)\dots 2}{(2p+1)(2p-1)\dots 3} \times I_1 = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$.
5. Puisque le sinus est positif entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ (et évidemment plus petit que 1), on a $\sin^{n+1}(t) \leqslant \sin^n(t)$ sur cet intervalle, donc par intégration $I_{n+1} \leqslant I_n$. La suite est donc décroissante. Elle est positive donc minorée, donc convergente.
6. Il suffit d'appliquer la décroissance de la suite (I_n) pour obtenir $\frac{I_n}{I_n} \leqslant \frac{I_n}{I_{n+1}} \leqslant \frac{I_n}{I_{n+2}}$, soit $1 \leqslant \frac{I_n}{I_{n+1}} \leqslant \frac{n+1}{n+2}$ en reprenant le résultat de la question 3. Puisque le membre de droite a pour limite 1, une simple application du théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim_{n \to +\infty} \frac{I_n}{I_{n+1}} = 1$.
7. Plusieurs possibilités ici. Soit on reprend les formules obtenues à la question 4 et on constate de grosses simplifications : $I_{2n+1}I_{2n} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \times \frac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2} = \frac{\pi}{2 \times (2n+1)}$, et de même $I_{2n}I_{2n-1} = \frac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2} \times \frac{2^{2n-2}(n-1!)^2}{(2n-1)!} = \frac{2n\pi}{2^3 n^2} = \frac{\pi}{2 \times 2n}$. Dans les deux cas, que n soit pair ou impair, $I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2(n+1)}$.
   Autre possibilité, constater que $(n+2)I_{n+2}I_{n+1} = (n+1)I_{n+1}I_n$ en reprenant la relation de la question 3, donc la suite $((n+1)I_{n+1}I_n)$ est constante égale à son premier terme $I_1 I_0 = \frac{\pi}{2}$.

8. En exploitant les deux questions précédentes, $I_{n+1} \sim I_n$, et $I_{n+1}I_n \sim I_n^2 \sim \dfrac{\pi}{2n}$, donc $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Un résultat technique.

1. La fonction f étant concave, elle est située au-dessus de ses cordes, donc f est toujours supérieure à g sur l'intervalle $[a, b]$ et l'inégalité sur les intégrales en découle.
2. Si $t = a$ ou $t = b$, par construction, $f(t) - g(t) = 0$ donc l'inégalité est toujours vérifiée. Fixons donc $t \in]a, b[$, et posons $K = \dfrac{f(t) - g(t)}{(t-a)(t-b)}$, de façon à avoir $h(t) = 0$. La fonction h s'annule par ailleurs en a et en b, puisque $f(x) - g(x)$ et $K(x-a)(x-b)$ s'annulent tous les deux en a comme en b. En appliquant le théorème de Rolle sur chacun des deux intervalles $[a, t]$ et $[t, b]$, la dérivée h' s'annule une première fois en $t_1 \in]a, t[$, et une deuxième fois en $t_2 \in]t, b[$. On peut alors appliquer le théorème de Rolle à h' sur $[t_1, t_2]$ (la fonction h est $\mathcal{C}^2$ puisque f est supposée $\mathcal{C}^2$) pour prouver l'existence d'un réel $t_3 \in]t_1, t_2[$ tel que $h''(t_3) = 0$. Or, $h''(x) = f''(x) - 2K$ (la fonction g étant affine, sa dérivée seconde est nulle), donc $2K = f''(x)$ et $|2K| \leqslant M$ par définition de M. Comme $h(t) = 0$, on trouve alors $|f(t) - g(t)| = |K(t-a)(t-b)| \leqslant \dfrac{M(t-a)(b-t)}{2}$, ce qui est l'inégalité demandée.
3. Il suffit d'intégrer l'inégalité précédente entre a et b : $\displaystyle\int_a^b f(t) - g(t)\ dt \leqslant \frac{M}{2}\int_a^b (t-a)(b-t)\ dt$. Or, $\displaystyle\int_a^b (t-a)(b-t)\ dt = \int_a^b -t^2 + (a+b)t - ab\ dt = \left[-\frac{t^3}{3} + (a+b)\frac{t^2}{2} - abt\right]_a^b = \frac{a^3 - b^3}{3} + \frac{(a+b)(b^2 - a^2)}{2} + ab(a-b) = \frac{2a^3 - 2b^3 + 3ab^2 - 3a^3 + 3b^3 - 3ba^2 + 6a^2b - 6ab^2}{6} = \frac{b^3 - 3ab^2 + 3a^2b - a^3}{6} = \frac{(b-a)^3}{6}$, donc $\displaystyle\int_a^b f(t) - g(t)\ dt \leqslant \frac{M(b-a)^3}{12}$.
4. La fonction ln est concave, de dérivée seconde $-\dfrac{1}{x^2}$. Sur l'intervalle $[n, n+1]$, sur lequel on va tenter d'appliquer le résultat précédent, cette dérivée seconde est majorée en valeur absolue par $M = \dfrac{1}{n^2}$. La fonction g est la fonction affine vérifient $f(n) = \ln(n)$ et $f(n+1) = \ln(n+1)$. Pour calculer son intégrale, plutôt que de s'embêter à l'expliciter, on constate qu'il s'agit de l'aire d'un trapèze de largeur 1 et de hauteurs $\ln(n)$ et $\ln(n+1)$, donc $\displaystyle\int_n^{n+1} g(t)\ dt = \frac{\ln(n) + \ln(n+1)}{2}$. De plus, $\displaystyle\int_n^{n+1} \ln(t)\ dt = [t\ln(t) - t]_n^{n+1} = (n+1)\ln(n+1) - (n+1) - n\ln(n) + n = (n+1)\ln(n+1) - n\ln(n) - 1$, donc $\displaystyle\int_n^{n+1} \ln(t) - g(t)\ dt = (n+1)\ln(n+1) - n\ln(n) - 1 - \frac{1}{2}\ln(n+1) - \frac{1}{2}\ln(n) = \left(n + 1\frac{1}{2}\right)(\ln(n+1) - \ln(n)) - 1 \leqslant \frac{M(n+1-n)^3}{12} = \frac{1}{12n^2}$.

Formule de Stirling.

1. Les deux suites sont bien sûr définies à partir de $n = 2$. Déjà $v_n - u_n = \dfrac{1}{12(n-1)}$ tend clairement vers 0. De plus, $u_{n+1} - u_n = \ln((n+1)^{n+\frac{3}{2}}e^{-n-1}) - \ln((n+1)!) - \ln(n^{n+1\frac{1}{2}}e^{-n}) + \ln(n!) = \left(n + \dfrac{3}{2}\right)\ln(n+1) - n - 1 - \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\ln(n) + n - \ln(n+1) = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)(\ln(n+1) - \ln(n)) - 1 \geqslant 0$ d'après les résultats de la deuxième partie (quel hasard tout de même qu'on tombe pile poil sur cette expression !). De même, $v_{n+1} - v_n = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)(\ln(n+1) - \ln(n)) - 1 + \dfrac{1}{12n} - \dfrac{1}{12(n-1)} = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)(\ln(n+1) - \ln(n)) - 1 - \dfrac{1}{12n(n-1)} \leqslant \dfrac{1}{12n^2} - \dfrac{1}{12(n^2 - n)} \leqslant 0$

(on a exploité la deuxième inégalité obtenue dans la deuxième partie). Les suites (u_n) et (v_n) sont respectivement croissante et décroissante, elle sont donc bien adjacentes.

2. Notons l la limite commune des deux suites, alors $\lim_{n\to+\infty} 2u_n - u_{2n} = 2l - l = l$. Par ailleurs, $2u_n - u_{2n} = \ln(n^{2n+1}e^{-2n}) - \ln((n!)^2) - \ln((2n)^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n}) + \ln((2n)!)$ (multiplier le ln par 2 revient à élever au carré tout ce qui se trouve à l'intérieur), donc $2u_n - u_{2n} = \ln\left(\dfrac{\sqrt{n}(2n)!}{2^{2n+\frac{1}{2}}(n!)^2}\right) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{n((2n)!)^2}{2^{4n+1}(n!)^4}\right)$. Il est temps de faire le lien avec la première partie : $\dfrac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \times \dfrac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n)!\pi} = \dfrac{2^{4n+1}(n!)^4}{(2n+1)((2n)!)^2\pi}$. Voilà qui ressemble à ce qu'on avait juste avant : $e^{2(2u_n-u_{2n})} = \dfrac{n}{(2n+1)\pi}\dfrac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \sim \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \sim \dfrac{1}{2\pi}$, puisqu'on a vu dans la première partie que $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1$. Conclusion : $e^{2l} = \dfrac{1}{2\pi}$, soit $l = -\dfrac{1}{2}\ln(2\pi)$.

3. Reprenons l'expression de u_n : $e^{-2u_n} \sim 2\pi$ (c'est ce qu'on vient de démontrer à la question précédente), soit $\dfrac{(n!)^2}{n^{2n+1}e^{-2n}} \sim 2\pi$, soit $n! \sim n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\sqrt{2\pi} \sim \left(\dfrac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}$, ce qui constitue la fameuse formule de Stirling.

TD n°11 : révisions pour le DS8.

PTSI B Lycée Eiffel

19 avril 2013

Exercice 1

On cherche à étudier la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\ln(t)}\, dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Calculer la dérivée f' de la fonction f, et étudier les variations de f.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$, ainsi que sa branche infinie éventuelle.
4. Montrer que la fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{\ln(t)} - \dfrac{1}{t-1}$ se prolonge par continuité en 1. En déduire la limite en 1 de la fonction f.
5. Déterminer de même $\displaystyle\lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x)$.
6. Prouver que $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.
7. Tracer une allure de la courbe représentative de la fonction f.

Exercice 2

On considère dans tout cet exercice l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{array} \right.$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que, si $P \in \ker(f)$, alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(k) = P(0)$. En déduire le noyau de f.
3. Déterminer le degré de $f(P)$ lorsque P n'est pas un polynôme constant. En déduire que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par f.
4. Déterminer (par un calcul explicite) l'image de $f_{|\mathbb{R}_3[X]}$. Retrouver par le calcul le noyau de cette restriction.
5. On admet que plus généralement, $\mathrm{Im}(f_{|\mathbb{R}_n[X]}) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Déterminer l'image de f. L'application est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?
6. Déterminer un polynôme P de degré 4 tel que $f(P) = X^3$. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3$ (sans utiliser, bien entendu, la formule que vous connaissez déjà).

Exercice 3

On considère la famille de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur $]-1,+\infty[$ par $f_n(x) = x^n \ln(1+x)$, et on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,dt$. On note également h_n la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $h_n(x) = n\ln(1+x) + \dfrac{x}{1+x}$.

1. Étudier les variations puis le signe des fonctions h_n (on distinguera éventuellement le cas $n=1$).
2. En déduire les variations des fonctions f_n.
3. Déterminer trois réels a, b, c tels que $\forall x \in [0,1]$, $\dfrac{x^2}{x+1} = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$, et en déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx$.
4. Montrer que $I_1 = \dfrac{1}{4}$.
5. Montrer que la suite (I_n) est monotone, et prouver sa convergence (sans chercher à déterminer sa limite).
6. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{\ln 2}{n+1}$, et en déduire la limite de la suite (I_n).
7. Pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$, on pose $S_n(x) = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k$.
   (a) Montrer que $S_n(x) = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$.
   (b) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx$.
   (c) En utilisant une intégration par parties dans le calcul de I_n, montrer que $I_n = \dfrac{\ln 2}{n+1} + \dfrac{(-1)^n}{n+1}\left(\ln 2 - \left(1 - \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{(-1)^k}{k+1} + \cdots + \dfrac{(-1)^n}{n+1}\right)\right)$. En déduire une expression de ln(2) comme limite d'une somme « simple ».

Exercice 4

Dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on note $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On note $\mathcal{S}_2$ l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre 2.

1. Calculer les produits AFA, AGA, AHA.
2. Montrer que $\mathcal{S}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et que (F,G,H) est une base de $\mathcal{S}_2$, que l'on notera désormais $\mathcal{B}$.
3. On note u l'application qui à chaque matrice S de $\mathcal{S}_2$, associe la matrice $u(S) = ASA$.
   (a) Montrer que $\forall S \in \mathcal{S}_2$, $u(S) \in \mathcal{S}_2$.
   (b) Montrer que u est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{S}_2$.
   (c) Donner la matrice M de u dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{S}_2$.
4. Déterminer les noyaux $\ker(u - \mathrm{id})$; $\ker(u + 4\,\mathrm{id})$ et $\ker(u - 16\,\mathrm{id})$. En déduire une base de $\mathcal{S}_2$ dans laquelle la matrice de u est diagonale.
5. Déterminer la matrice de passage P entre la base $\mathcal{B}$ et la base construite à la question précédente. Que vaut la matrice $D = P^{-1}MP$?
6. Montrer que $M^3 = 13M^2 + 52M - 64I$ puis que $u^3 = 13u^2 + 52u - 64\,\mathrm{id}$.

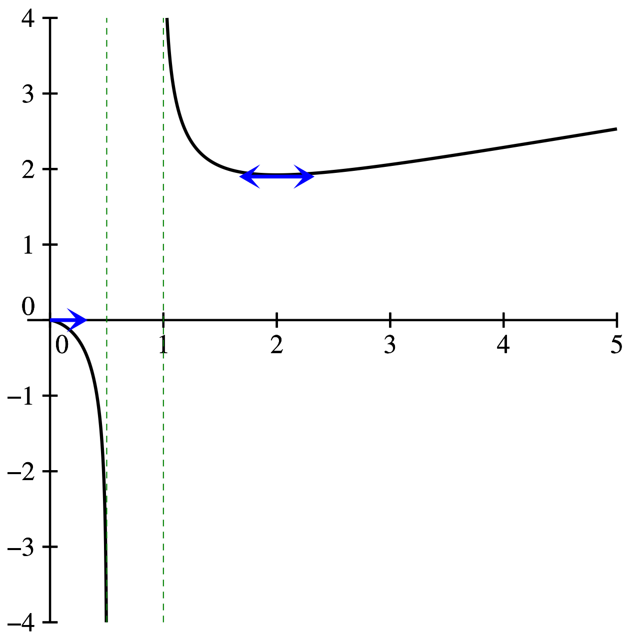
Corrigé du TD n°11

Exercice 1

1. Notons $g(t) = \dfrac{1}{\ln(t)}$, ça peut toujours serivir pour la suite. La fonction g est définie sur $\mathbb{R}^{+*}\backslash\{1\}$. Pour que f soit définie en x, il faut que tout l'intervalle $[x; 2x]$ soit inclus dans $\mathcal{D}_f$. ce ne sera manifestement pas le cas si $x \leqslant 0$. Si $x \geqslant 0$, il faut encore que $1 \notin [x; 2x]$, ce qui sera le cas si $2x < 1$ ou si $1 < x$. On en déduit que $\mathcal{D}_g = \left]0; \dfrac{1}{2}\right[\cup]1; +\infty[$.
2. En notant G une primitive de g sur chacun des deux intervalles de définition de f (la fonction g y est continue, donc y admet des primitives), on peut écrire $f(x) = G(2x) - G(x)$, donc f est dérivable et $f'(x) = 2g(2x) - g(x) = \dfrac{2}{\ln(2x)} - \dfrac{1}{\ln(x)} = \dfrac{2\ln(x) - \ln(2x)}{\ln(2x)\ln(x)} = \dfrac{2\ln(\frac{x}{2})}{\ln(2x)\ln(x)}$. Sur $\mathcal{D}_f$, le dénominateur est toujours positif (les deux ln sont positifs quand $x > 1$, ils sont négatifs quand $x < \dfrac{1}{2}$). La dérivée est donc du signe de $\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$, la fonction est décroissante sur $\left]0; \dfrac{1}{2}\right[$ et sur $]1; 2]$, et croissante sur $[2; +\infty[$
3. On peut procéder par encadrement grossier : $\forall x > 1$, $\forall t \in [x; 2x]$, $\dfrac{1}{\ln(x)} \leqslant \dfrac{1}{\ln(t)} \leqslant \dfrac{1}{\ln(2x)}$. En intégrant cet encadrement entre x et $2x$, on trouve $\dfrac{x}{\ln(x)} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{x}{\ln(2x)}$. Par croissance comparée, les deux extrêmes ont une limite infinie en $+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. On peut reprendre le même encadrement pour la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$: $\dfrac{1}{\ln(x)} \leqslant \dfrac{f(x)}{x} \leqslant \dfrac{1}{\ln(2x)}$. Cette fois-ci, les deux extrêmes tendent vers 0 donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$. La courbe admet donc en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Ox).
4. Avec les développements limités, $\varphi(t) = \dfrac{t - 1 - \ln(t)}{\ln(t)(t-1)} \underset{t\to1}{=} \dfrac{t - 1 - (t - 1 - \frac{(t-1)^2}{2} + o(t-1))}{\ln(t)(t-1)} \sim \dfrac{\frac{(t-1)^2}{2}}{(t-1)^2} \sim \dfrac{1}{2}$. Autrement dit, $\lim\limits_{t\to1}\varphi(t) = \dfrac{1}{2}$. On peut alors écrire $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \varphi(t) + \frac{1}{t-1}\,dt = \int_x^{2x} \varphi(t) + [\ln(t-1)]_x^{2x} = \ln(2x-1) - \ln(x-1) + \int_x^{2x} \varphi(t)\,dt$. Comme φ est prolongeable par continuité en 1, elle est continue sur $[1; 3]$ (par exemple) donc bornée sur cet intervalle. Pour $x \in \left]; \dfrac{3}{2}\right]$, $\displaystyle\int_x^{2x} \varphi(t)\,dt$ est donc également bornée, et on peut écrire $f(x) \underset{x\to1}{=} \ln(2x - 1) - \ln(x-1) + O(1)$. Comme $\lim\limits_{x\to1} \ln(2x-1) = 0$ et $\lim\limits_{x\to1} \ln(x-1) = -\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to1} f(x) = +\infty$.
5. On peut reprendre exactement le même raisonnement qu'à la question précédente, l'intégrale de φ est toujours bornée pour la même raison de prolongement par continuité ; $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \ln(1-2x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \ln(1-x) = -\ln(2)$ (les signes ont changé à l'intérieur du ln car $\dfrac{1}{t-1}$ est négatif sur l'intervalle considéré). On conclut facilement que $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x) = -\infty$.
6. Reprenons ici l'encadrement obtenu à la deuxième question, en échangeant les bornes puisque les ln sont négatifs sur $\left]0; \dfrac{1}{2}\right[$: $\dfrac{x}{\ln(2x)} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{x}{\ln(x)}$. Les deux membres extrêmes tendent (fortement) vers 0 quand x tend vers 0, d'où la limite demandée. On peut même signaler au passage que $f'(x) = \dfrac{2\ln(x) - 2\ln(2)}{(\ln(x) + \ln(2))(\ln(x))} \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{2\ln(x)}{(\ln(x))^2} \sim \dfrac{2}{\ln(x)}$, donc $\lim\limits_{x\to0} f'(x) = 0$. D'après

le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, la fonction f est donc dérivable en 0 et y admet une tangente horizontale.

7. Voici une allure de la courbe (à la main, difficile de donner une valeur approchée précise du minimum $f(2)$:



Exercice 2

1. C'est essentiellement évident : $f(P)$ est bien évidemment un polynôme, et $f(\lambda P+\mu Q) = (\lambda P+\mu Q)(X+1)-(\lambda P+\mu Q)(X) = \lambda(P(X+1)-P(X))+\mu(Q(X+1)-Q(X)) = \lambda f(P)+\mu f(Q)$, donc l'application est linéaire.

2. Si $P \in \ker(f)$, on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) = f(x)$. On prouve par une récurrence évidente que $P(k) = P(0)$: c'est bien sûr vrai pour $k = 0$, et si on le suppose vrai au rang k, comme $P(k+1) = P(k)$, ce sera également vrai pour $k+1$. Si on note $Q(X) = P(X) - P(0)$, le polynôme Q s'annule pour tous les entiers, il est donc nul (il a une infinité de racines). Par conséquent, P est un polynôme constant égal à $P(0)$. Réciproquement, tous les polynômes constants sont dans le noyau de f, donc $\ker(f) = \mathbb{R}_0[X]$.

3. Le polynôme $P(X+1)$ ayant le même degré que P, la différence des deux a un degré inférieur ou égal à celui de P, ce qui suffit à prouver la stabilité de $\mathbb{R}_n[X]$ par f. On peut en fait dire mieux : si $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, avec $a_n \neq 0$, alors $P(X+1)-P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k(X+1)^k - \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Contentons-nous d'isoler les termes de degrés n et $n-1$, en développant les $(X+1)^k$ à l'aide de la formule du binôme de Newton : $f(P) = a_n X^n + n a_n X^{n-1} + a_{n-1}X^{n-1} - a_n X^n - a_{n-1}X^{n-1} + Q(X)$, où Q est de degré au plus $n-2$. Après simplifications, $f(P) = n a_n X^{n-1} + Q(X)$. Autrement dit, $d^\circ(f(P)) = d^\circ(P) - 1$ (sauf bien entendu si P est constant).

4. Bon, on l'a déjà fait à la question précédente, mais faisons encore plus explicite. Soit $P(x) = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$, alors $P(X+1) = a(X^3+3X^2+3X+1) + b(X^2+2X+1) + c(X+1)+d$, donc $f(P) = P(X+1)-P(X) = 3aX^2+(3a+2b)X+a+b+c$. On en déduit que $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}(3X^2+3X+1, 2X+1, 1)$. Cette famille de trois polynômes est échelonnée dans $\mathbb{R}_2[X]$, donc en constitue une base, et $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}_2[X]$. Pour le noyau, en reprenant le calcul ci-dessus, il faut résoudre le système constitué des équations $3a = 3a+2b = a+b+c = 0$,

qui donne très facilement $a = b = c = 0$. Puisque d n'intervient pas dans les équations, $\ker(f) = \{d \mid d \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}_0[X]$.

5. Non, il n'y a pas de bug dans la question, on connait l'image de la restriction à $\mathbb{R}_n[X]$, et on cherche l'image « globale ». Si $f(\mathbb{R}_n[X]) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$, alors $\mathbb{R}_{n-1}[X] \subset \operatorname{Im}(f)$. Mais comme la réunion des sous-espaces $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est $\mathbb{R}[X]$ tout entier, l'application f est surjective. Elle n'est par contre pas injective (on a calculé son noyau il y a un moment) donc pas bijective non plus.
6. Par un calcul essantiellement identique à celui de la question 4, l'image du polynôme $P = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e$ est $f(P) = 4aX^3 + (6a+3b)X^2 + (4a+3b+2c)X + a+b+c+d$. Pour trouver un antécédent de X^3, on résout $\begin{cases} 4a & & & & & & & = & 1 \\ 6a & + & 3b & & & & & = & 0 \\ 4a & + & 3b & + & 2c & & & = & 0 \\ a & + & b & + & c & + & d & = & 0 \end{cases}$. On trouve aisément $a = \dfrac{1}{4}$; $b = -2a = -\dfrac{1}{2}$; $c = \dfrac{-4a-3b}{2} = \dfrac{1}{4}$; et $d = -a-b-c = 0$. Enfin, on choisira $e = 0$ pour ne pas s'embêter, donc on pose $P = \dfrac{1}{4}X^4 - \dfrac{1}{2}X^3 + \dfrac{1}{4}X^2$. On peut alors effectuer le calcul suivant, en exploitant que $P(k+1) - P(k) = k$ pour tout entier k : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \sum_{k=0}^{n} P(k+1) - P(k) = P(n+1) - P(0) = P(n+1)$ (somme télescopique), donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{1}{4}(n+1)^4 - \frac{1}{2}(n+1)^3 + \frac{1}{4}(n+1)^2 = \frac{(n+1)^2}{4} \times ((n+1)^2 - 2(n+1) + 1) = \frac{(n+1)^2}{4} \times (n^2 + 2n + 1 - 2n - 2 + 1) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. On reconnaît bien la formule du cours !

Exercice 3

1. Les fonctions h_n sont C^∞ sur $]-1;+\infty[$, de dérivées $h_n'(x) = \dfrac{n}{1+x} + \dfrac{1+x-x}{(1+x)^2} = \dfrac{n(1+x)+1}{(1+x)^2}$. Le numérateur étant toujours positif sur $]-1;+\infty[$, les fonction h_n sont toutes strictement croissantes sur cet intervalle. Comme $h_n(0) = n \ln 1 + 0 = 0$, les fonctions h_n sont donc négatives sur $]-1;0]$ et positives sur $[0;+\infty[$ (aucune raison de distinguer le cas $n = 1$ ici).
2. La fonction f_n est C^∞ sur $]-1;+\infty[$, de dérivée $f_n'(x) = nx^{n-1}\ln(1+x) + \dfrac{x^n}{1+x} = x^{n-1}h_n(x)$. Si n est impair, x^{n-1} est toujours positif et f_n est décroissante puis croissante, atteignant pour minimum 0 en 0, et ayant pour limite $+\infty$ aux deux bornes de son domaine de définition. Si n est pair, par contre, x^{n-1} change de signe en 0, et $x^{n-1}h_n(x)$ est toujours positif, donc f_n est strictement croissante sur $]-1;+\infty[$, avec pour limite $-\infty$ en -1 et $+\infty$ en $+\infty$.
3. Procédons par identification : $ax + b + \dfrac{c}{x+1} = \dfrac{ax^2 + (a+b)x + b + c}{x+1}$, donc on aura égalité si $a = 1$, $a + b = 0$ et $b + c = 0$, soit $a = c = 1$ et $b = -1$, donc $\dfrac{x^2}{x+1} = x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$. On a donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx = \int_0^1 x - 1 + \frac{1}{x+1}dx = \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 1 + \ln 2 = \ln 2 - \frac{1}{2}$.
4. Par définition, $U_1 = \displaystyle\int_0^1 x\ln(1+x)dx$. Effectuons une intégration par partie en posant $u(x) = \ln(1+x)$ et $v'(x) = x$, donc $u'(x) = \dfrac{1}{x+1}$ et $v(x) = \dfrac{x^2}{2}$. On obtient $U_1 = \left[\dfrac{x^2}{2}\ln(1+x)\right]_0^1 - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx = \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2}\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.
5. Pour tout entier naturel n, on a $\forall x \in [0;1]$, $x^{n+1} \leqslant x^n$, donc $x^{n+1}\ln(1+x) \leqslant x^n \ln(1+x)$, d'où en intégrant l'inégalité sur $[0;1]$, $U_{n+1} \leqslant U_n$. La suite (U_n) est donc décroissante. Comme de

plus (U_n) est une suite à valeurs positives (les fonctions f_n prennent toutes des valeurs positives sur $[0;1]$), la suite est décroissante minorée, donc convergente.

6. La positivité de U_n a déjà été justifiée. De plus, sur $[0;1]$, $\ln(1+x) \leqslant \ln 2$, donc $U_n \leqslant \int_0^1 x^n \ln 2 = \ln 2 \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{n+1}$. Le théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$.

7. (a) Inutile de faire une récurrence, il s'agit d'une somme géométrique de raison $-x$, donc $S_n(x) = \frac{1-(-x)^{n+1}}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$.

   (b) Intégrons donc l'égalité précédente : par linéarité $\int_0^1 S_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k \int_0^1 x^k dx = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(-1)^k}{k+1}$.
   À droite, on a $\int_0^1 \frac{1}{1+x} + \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x} dx = [\ln(1+x)]_0^1 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx = \ln 2 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$.

   (c) On va effectuer une intégration par parties en posant $v(x) = \ln(x+1)$ et $u'(x) = x^n$, donc $u(x) = \frac{1}{1+x}$ et $v'(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$. On obtient $U_n = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln(1+x)\right]_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^n}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{k=n} \frac{(-1)^k}{k+1} - \ln 2\right)$, ce qui donne bien la formule annoncée. L'expression de $\ln(2)$ ne découle pas immédiatement de la formule précédente, mais du fait que ce qui se trouve dans la grosse parenthèse ($\ln(2)$ compris) tend vers 0. En effet, $\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\, dx \leqslant \int_0^1 x^{n+1}\, dx = \frac{1}{n+2}$, donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{x^{n+1}}{1+x}\, dx = 0$ (l'intégrale étant par ailleurs évidemment positive). Comme cette intégrale est égale à $\ln(2) - \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(-1)^k}{k+1}$, on en déduit que $\ln(2) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$.

Exercice 4

1. On calcule $AF = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ puis $AFA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$; $AG = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ puis $AGA = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$ et $AH = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ puis $AHA = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

2. Une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{S}_2$ si $b = c$, donc
   $S_2 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \text{Vect}(F, G, H)$. Les trois matrices formant manifestement une famille libre (une combinaison linéaire des trois aura du mal à s'annuler), c'est une base de S_2.

3. (a) D'après la question précédente, si $S \in \mathcal{S}_2$, $S = \alpha F + \beta G + \gamma H$, donc $u(S) = \alpha AFA + \beta AGA + \gamma AHA$. Chacune des trois matrices AFA, AGA et AHA étant symétrique (on les a calculées plus haut), $u(S)$ l'est aussi.

   (b) La linéarité est facile à prouver : $A(\lambda S + \mu T)A = \lambda ASA + \mu ATA$. L'application u est bien linéaire de $\mathcal{S}_2$ dans lui-même.

(c) Comme $u(F) = AFA = 4H$; $u(G) = AGA = 4G+12H$ et $u(H) = AHA = 4F+6G+9H$, la matrice recherchée est
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \\ 4 & 12 & 9 \end{pmatrix}.$$

4. Pour calculer $\ker(u - \mathrm{id})$, il faut résoudre, pour un vecteur-colonne à trois lignes X, le système $MX = X$, c'est-à-dire $\begin{cases} & & 4z & = & x \\ & 4y & + \ 6z & = & y \\ 4x & + \ 12y & + \ 9z & = & z \end{cases}$. Celà donne directement $x = 4z$ et $y = -2z$, et la dernière équation est alors toujours vérifie, donc $\ker(u - \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}((4, -2, 1))$.
De même, pour $\ker(u + 4\,\mathrm{id})$, on résout $\begin{cases} & & 4z & = & -4x \\ & 4y & + \ 6z & = & -4y \\ 4x & + \ 12y & + \ 9z & = & -4z \end{cases}$. Via les deux premières équations, $x = -z$ et $y = -\frac{3}{4}z$, et la dernière équation est alors automatiquement vérifiée. On conclut que $\ker(u + 4\,\mathrm{id}) = \mathrm{Vect}\left(\left(-1, -\frac{3}{4}, 1\right)\right)$.
Enfin, le système $\begin{cases} & & 4z & = & 16x \\ & 4y & + \ 6z & = & 16y \\ 4x & + \ 12y & + \ 9z & = & 16z \end{cases}$ donne $z = 4x$ et $z = 2y$, donc $y = 2x$, et encore une fois la dernière équation est alors toujours vérifiée, donc $\ker(u - 16\,\mathrm{id}) = \mathrm{Vect}((1, 2, 4))$.
La matrice de v devient donc par exemple diagonale dans la base suivante : $\mathcal{B} = ((4, -2, 1); (4, 3, -4); (1, 2, 4))$, avec pour coefficients diagonaux 1, -4 et 16. Pour être tout à fait rigoureux, il faudrait vérifier que la famille constituée de ces trois vecteurs est effectivement libre pour former une base de notre espace vectoriel. En notant e_1, e_2 et e_3 les trois vecteurs de la famille, supposons $\lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3 = 0$, alors en applicant u à cette égalité, par linéarité et d'après les calculs précédents, $\lambda e_1 - 4\mu e_2 + 16\nu e_3 = 0$. En soustrayant à cette égalité l'équation initiale, $15\nu e_3 - 5\mu e_2 = 0$, donc $\mu e_3 = 3\nu e_2$. Or, les vecteurs e_2 et e_3 ne sont pas proportionnels, on a donc nécessairement $\mu = \nu = 0$, dont on déduit facilement $\lambda = 0$. La famille est donc libre, et constitue une base de $\mathcal{S}_2$.

5. La matrice de passage s'écrit $P = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$. La matrice $P^{-1}MP$ est la matrice représentant v dans la base $\mathcal{B}$, c'est donc une matrice diagonale de coefficients diagonaux 1, -4 et 16 (on ne calcule surtout pas P^{-1}, ça ne sert à rien !).

6. On peut tricher un peu en constatant que $(x-1)(x+4)(x-16) = (x^2+3x-4)(x-16) = x^3 - 13x^2 - 52x + 64$. Très facilement, $(D - I)(D + 4I)(D - 16I) = 0$, donc $D^3 = 13D^2 + 52D - 64I$. On en déduit la même égalité sur M en constatant que $D = P^{-1}MP$ implique $D^2 = P^{-1}MPP^{-1}MP = P^{-1}M^2P$, et de même $D^3 = P^{-1}M^3P$. Il suffit donc de multiplier la relation sur D par P^{-1} à gauche et P à droite pour obtenir $M^3 = 13M^2 + 52M - 64I$. La relation sur u en découle immédiatement puisque u^3 est représenté dans la base (F, G, H) par M^3, u^2 par M^2 et e par I (ça c'est vrai dans n'importe quelle base).

Feuille d'exercices n°16 : Dimension.

PTSI B Lycée Eiffel

24 avril 2013

Exercice 1 (*)

Déterminer le rang de chacune des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & \cos(\theta) & \cos(2\theta) \\ \cos(\theta) & \cos(2\theta) & \cos(3\theta) \\ \cos(2\theta) & \cos(3\theta) & \cos(4\theta) \end{pmatrix}$$

Exercice 2 (*)

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère la famille $\mathcal{F} = ((1,2,0,1);(2,1,3,-1);(4,5,3,1))$.

1. Déterminer le rang de la famille $\mathcal{F}$, et donner une base de $\text{Vect}(\mathcal{F})$.
2. Décrire $\mathcal{F}$ comme ensemble des solutions d'un système d'équations à déterminer.
3. On note G l'ensemble des solutions du système $\left\{ \begin{array}{ccccccccc} 2x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ x & & & + & z & - & t & = & 0 \end{array} \right.$. Déterminer une base de G, ainsi que sa dimension.
4. Montrer que $\mathbb{R}^4 = \text{Vect}(\mathcal{F}) \oplus G$. Déterminer la décomposition dans $\text{Vect}(\mathcal{F}) \oplus G$ du vecteur $(6,10,8,2)$.

Exercice 3 (***)

Soient f et g deux applications linéaires de E dans F, où E et F sont de dimension finie. Montrer que $\text{rg}(f+g) \leqslant \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$, et qu'il y a égalité si et seulement si $\text{Im}(f) \cap \text{Im}(g) = \{0\}$ et $\ker(f) + \ker(g) = E$.

Exercice 4 (**)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, où E est un espace vectoriel de dimension finie. On pose, pour tout entier naturel n, $N_k = \ker(f^k)$ et $I_k = \text{Im}(f^k)$.

1. Montrer que la suite (N_k) est croissante et la suite (I_k) décroissante (au sens de l'inclusion des ensembles).
2. Montrer qu'il existe un entier p pour lequel $N_p = N_{p+1}$, puis que la suite (N_k) stationne à partir du rang p.
3. Montrer que la suite (I_k) stationne à partir du même rang p.
4. Montrer que $E = N_p \oplus I_p$.

Exercice 5 (***)

On se place dans $\mathbb{C}_3[X]$, et on note $A = X^4 - 1$ et $B = X^4 - X$. On désigne par f l'application qui, à un polynôme P, associe le reste de la division de AP par B.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{C}_3[X]$.
2. Déterminer le noyau de f.
3. Quelle est la dimension de $\mathrm{Im}(f)$? Montrer que $\mathrm{Im}(f) = (X-1)\mathbb{C}_2[X]$.
4. Déterminer les quatre racines z_1, z_2, z_3 et z_4 de B.
5. Montrer qu'en posant $P_k = \dfrac{B}{X - z_k}$, la famille (P_1, P_2, P_3, P_4) est une base de $\mathbb{C}_3[X]$.
6. Montrer que $f(P_k) = (z_k - 1)P_k$. À quoi ressemble la matrice de f dans cette base ? Et dans la base canonique ?

Exercice 6 (**)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un même espace E de dimension finie, qui vérifient $\dim(F) = \dim(G)$.

1. Montrer que $F \cap G$ admet un supplémentaire F' dans F et un supplémentaire G' dans G qui sont de même dimension.
2. Montrer que F' et G' ont une intersection réduite au vecteur nul.
3. En considérant des bases de F' et G', construire un supplémentaire commun à F et G dans $F + G$.
4. Montrer qu'il existe un supplémentaire commun à F et G dans E.

Exercice 7 (**)

Soit $f \in \mathcal{E}$ un endomorphisme nilpotent, où E est de dimension finie n.

1. Montrer que $\ker(f) \neq \{0\}$, et que $\mathrm{rg}(f) \leqslant n - 1$.
2. Soit p le plus petit entier pour lequel $f^p = 0$. Prouver qu'il existe un $x \in E$ tel que $f^{p-1}(x) \neq 0$, et montrer que $(x, f(x), \ldots, f^{q-1}(x))$ est une famille libre.
3. En déduire que $p \leqslant n$ et que $f^n = 0$.
4. On suppose que $p = n$. Déterminer toutes les applications linéaires commutant avec f.

Exercice 8 (***)

On se place dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note $\mathcal{S}$ le sous-espace constitué des matrices symétriques et $\mathcal{A}$ celui constitué des matrices antisymétriques.

1. Donner la dimension de $\mathcal{S}$ et celle de $\mathcal{A}$, ainsi qu'une base de chacun de ces sous-espaces.
2. On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des matrices de trace nulle. Montrer que $\mathcal{T}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, donner sa dimension, ainsi qu'une base.
3. On note désormais M l'ensemble des matrices dont la somme des coefficients sur chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale est la même. Montrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
4. Déterminer la dimension et une base de M.
5. Déterminer la dimension de $\mathrm{M} \cap \mathcal{S}$, donner un exemple de matrice symétrique appartenant à M, dont le coefficient sur la première ligne, première colonne vaut 1.

6. Déterminer la dimension de $M \cap \mathcal{A}$, donner un exemple de matrice antisymétrique appartenant à M, dont le coefficient sur la première ligne, troisième colonne vaut 1.
7. Montrer qu'il n'existe qu'une seule matrice dans M dont la première ligne est constituée des nombres 1, 2 et 3 (dans cet ordre), et donner cette matrice.

Corrigé de la feuille d'exercices n°16

Exercice 1 (*)

- Par opérations sur les lignes (on soustrait la première ligne aux deux denrières), $\text{rg}(A) = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2$ (les deux dernières lignes sont proportionnelles, mais pas les deux premières).
- En ajoutant les deux premières lignes de B et en soustrayant la troisième, on tombe sur la quatrième. Commes les trois premières lignes forment une famille qui est manifestement de rang 3 (en regardant chacune des trois dernières colonnes, il est clair qu'on ne peut pas trouver de combinaison linéaire les annulant), $\text{rg}(B) = 3$.
- Les trois premières colonnes de la matrice C forment clairement une famille libre (en effet, si $a(2,1,1) + b(1,1,0) + c(0,0,1) = (0,0,0)$, alors $c = -a$ en regardant la troisième coordonnée, $b = -a$ avec la deuxième, et la première coordonnée ne peut s'annuler que si $a = b = 0$, donc $c = 0$). La matrice ne peut pas être de rang plus grand que trois puisqu'elle n'a que trois lignes, donc $\text{rg}(C) = 3$.
- Il vaut mieux connaître évidemment un peu ses formules trigonométriques. essayons de simplifier la première colonne par des soustractions de colonnes : $\text{rg}(D) = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & \cos(\theta) & \cos(2\theta) \\ 0 & \cos(2\theta) - \cos^2(\theta) & \cos(3\theta) - \cos(\theta)\cos(2\theta) \\ 0 & \cos(3\theta) - \cos(2\theta)\cos(\theta) & \cos(4\theta) - \cos^2(2\theta) \end{pmatrix}$. Or, $\cos(2\theta) - \cos^2(\theta) = -\sin^2(\theta)$, et de même $\cos(4\theta) - \cos^2(2\theta) = -\sin^2(2\theta)$. Enfin, $\cos(3\theta) - \cos(\theta)\cos(2\theta) = -\sin(\theta)\sin(2\theta)$ puisque $\cos(\theta)\cos(2\theta) - \sin(\theta)\sin(2\theta) = \cos(\theta + 2\theta) = \cos(3\theta)$. On en déduit que $\text{rg}(D) = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & \cos(\theta) & \cos(2\theta) \\ 0 & -\sin^2(\theta) & -\sin(\theta)\sin(2\theta) \\ 0 & -\sin(2\theta)\sin(\theta) & -\sin^2(2\theta) \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & \cos(\theta) & \cos(2\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \sin(2\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \sin(2\theta) \end{pmatrix}$ en divisant les lignes par $-\sin(\theta)$ et $-\sin(2\theta)$ (on étudiera ensuite les cas où ces nombres sont nuls). Les deux dernières lignes obtenues étant identiques, la matrice est au plus de rang 2. Elle sera même exactement de rang 2 sauf si la deuxième ligne est nulle, ce qui n'est pas possible sauf dans les cas particuliers déjà écartés. On aura donc $\text{rg}(D) = 2$ si $\theta \not\equiv 0 \left[\frac{\pi}{2}\right]$ (condition pour que les sinus ne s'annulent pas). Si $\theta = 0$, la matrice D ne contient que des 1, elle est de rang 1. Si $\theta = \pi$, les trois lignes sont proportionnelles (la deuxième est l'opposé des deux autres) donc elle est aussi de rang 1. Si $\theta = \frac{\pi}{2}$, les deux lignes extrêmes sont opposées et la deuxième ligne ne leur est pas proportionnelle donc la matrice est de rang 2. De même si $\theta = \frac{3\pi}{2}$, on trouve une matrice de rang 2 (c'est la même matrice par parité du cos !).

Exercice 2 (*)

1. Comme on est un peu paresseux et qu'on n'a pas envie de retravailler sur une matrice, on se contente de constater que $2 \times (1,2,0,1) + (2,1,3,-1) = (4,5,3,1)$, donc $\text{Vect}(\mathcal{F}) = \text{Vect}((1,2,0,1); (2,1,3,-1))$. Les deux vecteurs restants n'étant certainement pas proportionnels, la famille $\mathcal{F}$ est de rang 2, et on vient d'exhiber une base de $\text{Vect}(\mathcal{F})$.

2. Il fallait bien sûr comprendre $\text{Vect}(\mathcal{F})$ et pas seulement $\mathcal{F}$ dans l'énoncé de la question. On peut écrire $\text{Vect}(\mathcal{F}) = \{(a+2b, 2a+b, 3b, a-b) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$. Il suffit de trouver deux équations reliant les quatre coordonnées pour décrire le sous-espace qu'on sait déjà être de dimension 2. Par exemple, en notant (x,y,z,t) les quatre coordonnées, $y - x = 2a + b - a - 2b = a - b = t$, et $x + y = 3a + 3b = 3(a-b) + 6b = 3t + 2z$. Il y a évidemment énormément d'autres possibilités,

mais le système $\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & - & 2z & - & 3t & = & 0 \\ x & - & y & & & + & t & = & 0 \end{array}\right.$ en est une.

3. Il suffit de « résoudre » le système : $t = x + z$, puis $y = -2x - z - t = -3x - 2z$, donc $G = \{(x, -3x - 2z, z, x + z) \mid (x, z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((1, -3, 0, 1); (0, -2, 1, 1))$. Manifestement, $\dim(G) = 2$.

4. Puisque les deux sous-espaces sont de dimension 2, la somme des dimensions vaut 4, il suffit par exemple de prouver que $F \cap G = \{0\}$ pour prouver la supplémentarité. On peut par exemple choisir $u = (a+2b, 2a+b, 3b, a-b) \in F$ et imposer que $u \in G$, ce qui donne les deux équations $2(a + 2b) + 2a + b + 3b + a - b = 0$ et $a + 2b + 3b - a + b = 0$, soit $5a + 7b = 6b = 0$, qui n'a manifestement comme unique solution que $a = b = 0$, donc $\text{Vect}(\mathcal{F}) \oplus G = \mathbb{R}^4$. Pour la décomposition du vecteur, il faut écrire $(6, 10, 8, 2) = (a + 2b + x, 2a + b - 3x - 2z, 3b + z, a-b+x+z)$, soit $\left\{\begin{array}{ccccccccc} a & + & 2b & + & x & & & = & 6 \\ 2a & + & b & - & 3x & - & 2z & = & 10 \\ & & 3b & & & + & z & = & 8 \\ a & - & b & + & x & + & z & = & 2 \end{array}\right.$. On sait déjà quelles combinaisons effectuer : en écrivant $2L_1 + L_2 + L_3 + L_4$, il reste $5a + 7b = 32$, et en faisant $L_1 + L_3 - L_4$, on trouve $6b = 12$, ce qui donne $b = 2$ puis $a = \frac{18}{5}$. Pour éliminer les a et les b, on a aussi des combinaisons toutes prêtes : $L_1 + L_2 - 2L_3 - 3L_4$ donne $-5x - 7z = -6$; et $L_1 - L_2 + L_4$ donne $5x + 3z = -2$. La somme de ces deux conditions nous donne maintenant $-4z = -8$ soit $z = 2$, puis $x = -\frac{8}{5}$. Reste à calculer $(a + 2b, 2a + b, 3b, a - b) = (7.6, 9.2, 6, 1.6) = x_F \in \text{Vect}(\mathcal{F})$, et $(x, -3x - 2z, z, x + z) = (-1.6, 0.8, 2, 0.4) = x_G \in G$. La somme de ces deux vecteurs est égale à $(6, 10, 8, 2)$, ce qui répond à la question posée.

Exercice 3 (***)

En utilisant la formule de Grassmann, $\dim(\text{Im}(f)+\text{Im}(g)) = \text{rg}(f)+\text{rg}(g)-\dim(\text{Im}(f)\cap\text{Im}(g)) \leqslant \text{rg}(f)+\text{rg}(g)$. Or, $\text{rg}(f+g) = \dim(\text{Im}(f+g)) \leqslant \dim(\text{Im}(f)+\text{Im}(g))$ puisque $\text{Im}(f+g) \subset \text{Im}(f)+\text{Im}(g)$ (un élément qui peut s'écrire $(f + g)(y) = f(y) + g(y)$ appartient à $\text{Im}(f) + \text{Im}(g)$). La combinaison de ces deux inégalités prouve que $\text{rg}(f + g) \leqslant \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$. Pour qu'il y ait égalité, il faut que chacune des deux inégalités soit une égalité. Il faut donc d'abord avoir $\dim(\text{Im}(f) \cap \text{Im}(g)) = 0$, soit $\text{Im}(f) \cap \text{Im}(g) = \{0\}$. Il faut ensuite avoir $\text{Im}(f + g) = \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$. Supposons dans un premier temps que la deuxième condition $\ker(f)+\ker(g) = E$ soit vérifiée, et choisissons $x \in \text{Im}(f)+\text{Im}(g)$, on souhaite prouver que $x \in \text{Im}(f+g)$ (rappelons que l'inclusion dans l'autre sens est toujours vraie). On peut donc écrire $x = f(y)+g(z) = (f+g)(y)+g(z-y)$. Comme $z-y \in E$, on peut écrire $z-y = \alpha+\beta$, avec $\alpha \in \ker(f)$ et $\beta \in \ker(g)$, alors $g(z-y) = g(\alpha+\beta) = g(\alpha) = g(\alpha)+f(\alpha)$ (on peut bien rajouter ce terme qui est nul), d'où $x = (f+g)(y)+(f+g)(\alpha) = (f+g)(y+\alpha) \in \text{Im}(f+g)$, ce qui prouve l'égalité du rang de $f+g$ avec $\text{rg}(f)+\text{rg}(g)$. Réciproquement, supposons maintenant $\text{Im}(f+g) = \text{Im}(f)+\text{Im}(g)$, alors $\dim(\ker(f)+\ker(g)) = \dim(\ker(f))+\dim(\ker(g))-\dim(\ker(f)\cap\ker(g)) = n-\text{rg}(f)+n-\text{rg}(g)-\dim(\ker(f) \cap \ker(g))$. Or, sous l'hypothèse $\text{Im}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$, on peut prouver que $\ker(f + g) = \ker(f)\cap\ker(g)$. En effet, l'inclusion $\ker(f)\cap\ker(g) \subset \ker(f+g)$ est toujours vraie (si $f(x) = g(x) = 0$, alors $(f + g)(x) = 0$), et dans l'autre sens, si $f(x) + g(x) = 0$, alors $f(x) = -g(x) = 0$ car le membre de gauche appartient à l'image de f et celui de droite à celle de g. On peut continuer notre calcul de dimension : $\dim(\ker(f) + \ker(g)) = 2n - (\text{rg}(f) + \text{rg}(g) + \dim(\ker(f + g))$. Comme $\text{rg}(f) + \text{rg}(g)$ est supposé égal à $\text{rg}(f + g)$ et que le théorème du rang assure que $\text{rg}(f + g) + \dim(\ker(f + g)) = n$, on trouve $\dim(\ker(f) + \ker(g)) = 2n - n = n$, donc $\ker(f) + \ker(g) = E$, ce qui achève notre démonstration.

Exercice 4 (**)

1. Si $x \in N_k$, alors $f^k(x) = 0$, donc $f^{k+1}(x) = f(0) = 0$ et $x \in N_{k+1}$. Autrement dit, $N_k \subset N_{k+1}$. De même, si $x \in I_{k+1}$, $x = f^{k+1}(y) = f^k(f(y)) \in I_k$, donc $I_{k+1} \subset I_k$.
2. D'après la question précédente, $\dim(N_k) \leqslant \dim(N_{k+1})$. La suite $(\dim(N_k))$ est donc une suite croissante d'entiers naturels, comme elle ne peut pas prendre une infinité de valeurs (elle est majorée par $\dim(E)$), il existe nécessairement un entier p pour lequel $\dim(N_p) = \dim(N_{p+1})$. Ceci combiné à l'inclusion démontrée précédemment prouve que $N_p = N_{p+1}$. Supposons alors, pour un certain entier $i \geqslant 1$, $N_{p+i} \neq N_{p+i+1}$. Cela signifierait l'existence d'un vecteur x tel que $f^{p+i+1}(x) = 0$ mais $f^{p+i}(x) \neq 0$ (l'inclusion dans l'autre sens étant toujours vraie). Mais alors $f^{p+1}(f^i(x)) = 0$ et $f^p(f^i(x)) \neq 0$, donc $f^i(x) \in N_{p+1}(x)$ et $f^i(x) \notin N_p(x)$, ce qui contredit l'égalité de ces deux noyaux. La suite est donc constante à partir du rang p.
3. En appliquant le théorème du rang, quel que soit l'entier $i =$, $\dim(I_{p+i+1}) = \dim(E) - \dim(N_{p+i+1}) = \dim(E) - \dim(N_{p+i}) = \dim(I_{p+i})$. Au vu de l'inclusion démontrée à la première question, $I_{p+i} = I_{p+i+1}$, donc la suite (I_k) stationne aussi à partir du rang p.
4. D'après le théorème du rang, la sommes des dimensions de N_p et de I_p est égale à la dimension de E, il suffit donc de prouver que leur intersection est réduite à 0. Supposons donc $x \in N_p \cap I_p$. On peut donc écrire $x = f^p(y)$, avec $f^p(x) = 0$. En découle que $f^{2p}(y) = 0$, soit $y \in N_{2p} = N_p$, donc $f^p(y) = x = 0$. C'est suffisant pour affirmer que $N_p \oplus I_p = E$.

Exercice 5 (***)

1. Commençons par prouver que $f(\mathbb{C}_3[X]) \subset \mathbb{C}_3[X]$. En effet, on sait que lors d'une division euclidienne, le degré du reste est toujours strictement inférieur à celui du dividende. Ici, B étant de degré 4, $f(P)$ sera de degré inférieur ou égal à 3 quel que soit le polynôme P (peu importe d'ailleurs que P appartienne à $\mathbb{C}_3[X]$). Reste à prouver que l'application est linéaire, ce qui n'est pour une fois pas évident. Soient donc deux polynômes P_1 et P_2, alors si on effectue la division euclidienne de AP_1 et de AP_2 par B, on obtient les égalités $AP_1 = BQ_1 + R_1$, et $AP_2 = BQ_2 + R_2$. On peut effectuer la combinaison de ces deux équations : $A(\lambda P_1 + \mu P_2) = B(\lambda Q_1 + \mu Q_2) + (\lambda R_1 + \mu R_2)$. Comme $d^\circ(\lambda R_1 + \mu R_2) \leqslant \max(d^\circ(R_1), d^\circ(R_2)) < 4$, on tient nécessairement la division euclidienne de $A(\lambda P_1 + \mu P_2)$ par B, donc $f(\lambda P_1 + \mu P_2) = \lambda R_1 + \mu R_2 = \lambda f(P_1) + \mu f(P_2)$. L'application est linéaire, c'est bien un endomorphisme de $\mathbb{C}_3[X]$.
2. On peut caractériser les polynômes du noyau par la condition AP est divisble par B, mais ce n'est pas pratique à expliciter. Mieux vaut anticiper un peu et donner la matrice de f dans la base canonique. Comme $A = B + X - 1$, $f(1) = X - 1$; de même $AX = BX + X^2 - X$, donc $f(X) = X^2 - X$ puis $f(X^2) = X^3 - X^2$. Un tout petit peu plus de réflexion pour la dernière : $AX^3 = BX^3 + X^4 - X^3 = BX^3 + (X^4 - X) + X - X^3 + B(X^3 + 1) + X - X^3$ donc $f(X^3) = X - X^3$. La matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{C}_3[X]$ est donc $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Cherchons maintenant le noyau : si $P = a + bX + cX^2 + dX^3$, alors $f(P) = -a + (a - b + d)X + (b - c)X^2 + (c - d)X^3$, donc P appartient au noyau si $b = c = d$ (à cause des deux derniers coefficients) et $a = 0$ (premier coefficient). La deuxième équation est alors toujours vérifiée, donc $\ker(f) = \{bX + bX^2 + bX^3\} = \mathrm{Vect}(X + X^2 + X^3)$.
3. Puisque $\dim(\ker(f)) = 1$ et $\dim(\mathbb{C}_3[X]) = 4$, le théorème du rang assure que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$. Comme l'image de f contient $X - 1$, $X^2 - X = X(X - 1)$ et $X^3 - X^2 = X^2(X - 1)$ (qui sont images de trois des polynômes de la base canonique), elle contient tous les polynômes de la forme $(X - 1)(a + bX + cX^2)$, donc $(X - 1)\mathbb{C}_2[X]$. Comme ce dernier espace est de dimension 3 comme $\mathrm{Im}(f)$, il y a nécessairement égalité entre les deux.

4. Ah tiens, un peu de révision sur les complexes. Il faut donc résoudre l'équation $X^4 - X = 0$, soit $X(X^3 - 1) = 0$. les quatre racines sont $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $z_4 = \overline{j} = e^{i\frac{-2\pi}{3}}$ (les trois dernières étant les racines cubiques de l'unité).
5. Écrivons les quatre polynômes : $P_1 = X^3 - 1$; $P_2 = X(X^2 + X + 1) = X^3 + X^2 + X$; $P_3 = X(X-1)(X-\overline{j}) = X^3 + jX^2 + \overline{j}X$ et $P_4 = X(X-1)(X-j) = X^3 + \overline{j}X^2 + jX$. Pour prouver que c'est une base, supposons $aP_1 + bP_2 + cP_3 + dP_4 = 0$, et profitons du fait que ces polynômes ont des racines en commun. Pour $x = 0$, l'équation devient $-a = 0$, ce qui implique $a = 0$; pour $x = 1$, on trouve $3b = 0$, donc $b = 0$; pour $x = j$, $cj(j-1)(j-\overline{j}) = 0$ donc $c = 0$; de même pour $d = 0$, la famille est donc libre. Comme elle contient quatre polynômes, c'est une base de $\mathbb{C}_3[X]$.
6. On peut ruser pour s'éviter de pénibles calculs : $A = B + X - 1$, et $(X - z_k)P_k = B$, donc $AP_k = BP_k + (X-1)P_k = BP_k + (X - z_k)P_k + (z_k - 1)P_k = B(P_k + 1) + (z_k - 1)P_k$. On a sous les yeux la division euclidienne de AP_k par B, donc $f(P_k) = (z_k - 1)P_k$. Pour détailler un peu plus, $f(P_1) = -P_1$; $f(P_2) = 0$; $f(P_3) = (j-1)P_3$ et $f(P_4) = (\overline{j} - 1)P_4$. La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est donc diagonale, égale à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{j}-1 \end{pmatrix}$. La matrice dans la base canonique a déjà été donnée.

Exercice 6 (**)

1. L'existence de chacun des deux supplémentaires, c'est du cours. En appliquant le théorème du rang, on peut par ailleurs écrire $\dim(F \cap G) + \dim(F') = \dim(F)$, donc $\dim(F') = \dim(F) - \dim(F \cap G)$. De même, $\dim(G') = \dim(G) - \dim(F \cap G)$. Comme $\dim(F) = \dim(G)$ par hypothèse, on a bien en effet $\dim(F') = \dim(G')$.
2. Si $x \in F' \cap G'$, en particulier $x \in F \cap G$, puisque $F' \subset F$ et $G' \subset G$. Mais l'intersection de F' et $F \cap G$ est réduite au vecteur nul, puisqu'ils sont supplémentaires dans F, donc $x = 0$.
3. Commençons par constater, en notant $p = \dim(F) = \dim(G)$, que $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = p + p - (p-k) = p + k$. Un supplémentaire de F (ou de G) dans $F+G$ devrait donc avoir pour dimension $p + k - p = k$, la même que celle de F' ou de G'. Notons $(f_1, f_2, \dots, f_k)$ une base de F', et $(g_1, g_2, \dots, g_k)$ une base de G' (elles ont le même nombre d'éléments puisque les deux espaces sont de même dimension), et notons $\mathcal{B} = (f_1 + g_1, f_2 + g_2, \dots, f_k + g_k)$. Cette famille est certainement constituée de vecteurs de $F+G$, et elle est libre car si on suppose $\lambda_1(f_1+g_1)+\dots+\lambda_k(f_k+g_k) = 0$, alors $\lambda_1 f_1+\dots+\lambda_k f_k = -(\lambda_1 g_1+\dots+\lambda_k g_k)$. D'après la question précédente, chacun des deux membres est alors nul (celui de gauche est dans F', celui de droite dans G'), ce qui implique la nullité de chaque coefficient puisque la famille $(f_1, \dots, f_k)$ est libre comme base de F'. Il suffit désormais de prouver que $\mathrm{Vect}(\mathcal{B})$ a une intersection nulle avec F et avec G pour qu'il en soit supplémentaire, puisqu'il est de la bonne dimension k. Prouvons par exemple que $\mathrm{Vect}(\mathcal{B}) \cap F = 0$. Soit donc $x = \lambda_1(f_1 + g_1) + \dots + \lambda_k(f_k + g_k)$ et supposons que $x \in F$. Alors $\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \dots \lambda_k g_k = x - (\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_k f_k) \in F$ puisque tout ce qui est dans le membre de droite appartient à F. Mais le membre de gauche, lui, appartient à G', donc à G. Le membre de droite est alors dans $F \cap G$, qui est supplémentaire de G' dans G. Chacun des deux deux membres est alors nécessairement nul, ce qui assure la nullité de tous les coefficients, donc de x. Les espaces $\mathrm{Vect}(\mathcal{B})$ et F ont dont pour dimensions respective p et k, ont une intersection nulle, ils sont supplémentaires dans $F + G$ qui est de dimension $p + k$. On démontre exactement de la même façon que $G \oplus \mathrm{Vect}(\mathcal{B}) = F + G$.
4. On considère la base $\mathcal{B}$ précédente, on la complète en une base $(f_1+g_1, \dots, f_k+g_k, h_1, h_2, \dots, h_p)$ de $F+G$, puis on complète encore en une base $(f_1+g_1, \dots, f_k+g_k, h_1, h_2, \dots, h_p, e_1, \dots, e_n)$ de E. La famille $(f_1+g_1, \dots, f_k+g_k, e_1, e_2, \dots, e_n)$ est alors une base d'un supplémentaire commun de F et de G dans E. En effet, par construction, $(e_1, \dots, e_n)$ est une base d'un supplémentaire

de $F+G$ dans E, donc la famille considérée engendre un espace dont l'intersection avec F et G est nulle. Il a par ailleurs une dimension $f+n$ qui est complémentaire de celle de F (qui vaut p) dans E (qui est de dimension $k+p+n$ au vu de la base construite pour E. De même, ce sous-espace est supplémentaire de G.

Exercice 7 (**)

Note : un bug de notation dans l'énoncé, le $\mathcal{E}$ devrait être un $\mathcal{L}(E)$.

1. Si le noyau était réduit à 0, l'application serait injective, donc bijective, donc f^k aussi, quelle que soit la valeur de l'entier k. C'est fort contradictoire avec le fait que f soit nilpotente. Comme $\dim(\ker(f)) \geqslant 1$, la théorème du rang assure que $\mathrm{rg}(f) \leqslant n-1$.
2. S'il n'existait pas un tel x, f^{p-1} serait l'application nulle, ce qui est contradictoire avec la minimalité de p. Naturellement, le q apparaissant ensuite dans l'énoncé doit être remplacé par un p. Si la famille n'est pas libre, on peut écrire $\lambda_0 x + \lambda_1 f(x) + \cdots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(x) = 0$. En composant par f^{p-1}, et en utilisant que $f^k(x) = 0$ dès que $k \geqslant p$, on en déduit que $\lambda_0 f^{p-1}(x) = 0$ (tous les autres termes s'annulent). Comme $f^{p-1}(x) \neq 0$, on doit avoir $\lambda_0 = 0$. On peut répéter l'opération en composant par f^{p-2} pour montrer que $\lambda_1 = 0$, puis de même pour tous les autres coefficients, et aboutir à la conclusion que la famille est libre.
3. Une famille libre dans un espace de dimension n étant toujours de cardinal inférieur ou égal à n, on a en effet $p \leqslant n$. Du coup, $f^n = 0$ puisque toutes les puissances de f à partir de f^p sont nulles.
4. Si $p = n$, la famille construite précédemment est une base de E. Si g est une application linéaire commutant avec f, $g(x)$ peut s'écrire sous la forme $\lambda_0 x + \lambda_1 f(x) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(x)$ (même si g ne commute pas avec f, c'est vrai !). Calculons alors, en exploitant la commutation, les images des autres vecteurs de la base construite : $g(f(x)) = f(g(x)) = f(\lambda_0 x + \lambda_1 f(x) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(x)) = \lambda_0 f(x) + \lambda_1 f^2(x) + \cdots + \lambda_{n-1} f^n(x) = \lambda_0 f(x) + \lambda_1 f(f(x)) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(f(x))$. De même, quelle que soit $i \leqslant n-1$, $g(f^i(x)) = f^i(g(x)) = f^i(\lambda_0 x + \lambda_1 f(x) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(x)) = \lambda_0 f^i(x) + \lambda_1 f(f^i(x)) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(f^i(x))$. autrement dit, g coïncide sur tous les vecteurs de notre base avec $\lambda_0 \,\mathrm{id} + \lambda_1 f + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}$. Les deux applications linéaires sont alors égales (un morphisme est toujours uniquement déterminé par l'image d'une base), et g est donc un polynôme de degré au plus $n-1$ en l'pplication f. réciproquement, tous les polynômes constitués à partir de f commutent évidemment avec f. Notons que l'ensemble des applications linéaires commutant avec f est ici de dimension n (la même que celle de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$), sachant que l'ensemble de tous les endomorphismes de E est lui de dimension n^2.

Exercice 8 (***)

1. Une matrice symétrique s'écrit $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$, donc $\mathcal{S} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$. En particulier, $\dim(\mathcal{S}) = 6$. De même, $\dim(\mathcal{A}) = 3$, et $\mathcal{A} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.
2. La trace étant une application linéaire, son noyau $\mathcal{T}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. D'après le thorème du rang, sa dimension vaut 9 (celle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$) moins celle de l'image. Mais l'image de la trace est $\mathbb{R}$, donc de dimension 1. On en déduit que $\dim(\mathcal{T}) = 8$. On trouve facilement une base même si c'est très pénible à expliciter :

$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};\right.$
$\left.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

3. C'est l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène d'équations, donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
4. En notant les coefficients d'un matrice de M dans l'ordre alphabétique, on doit avoir $a+b+c = d+e+f = g+h+i = a+d+g = b+e+h = c+f+i = a+e+i = c+e+g$. On obtient facilement $g = b+c-d$; $h = a+c-e$ et $i = a+b-f$, ce qui nous ramène aux conditions suivantes sur les six premiers coefficients (en supprimant les égalités sur les colonnes qu'on vient d'exploiter et en remplaçant dans tout le reste) : $a+b+c = d+e+f = 2(a+b+c)-d-e-f = 2a+b+e-f = b+2c+e-d$. On peut supprimer le troisième nombre qui est toujours égal aux deux premiers si ceux-ci sont égaux. Reste $a+b+c = d+e+f = 2a+b+e-f = b+2c+e-d$. On en déduit que $f = a-c+e$ (en exploitant $a+b+c = 2a+b+e-f$) et $d = c+e-a$, donc en remplaçant dans la première égalité, $a+b+c = 3e$, soit $e = \dfrac{a+b+c}{3}$. On peut alors tout exprimer en fonction de a, b et c : $d = c+e-a = -\dfrac{2}{3}a + \dfrac{1}{3}b + \dfrac{4}{3}c$; $f = \dfrac{4}{3}a + \dfrac{1}{3}b - \dfrac{2}{3}c$; puis $g = b+c-d = \dfrac{2}{3}a + \dfrac{2}{3}b - \dfrac{1}{3}c$; $h = \dfrac{2}{3}a - \dfrac{1}{3}b + \dfrac{2}{3}c$ et $i = -\dfrac{1}{3}a + \dfrac{2}{3}b + \dfrac{2}{3}c$. Les trois coefficients de la première ligne peuvent être choisis comme on le souhaite, les autres sont alors imposés, donc $\dim(\mathrm{M}) = 3$, on en trouve une base en imposant successivement la valeur 3 (on pourrait prendre 1 mais avec 3 tous les coefficients seront entiers) aux réels a, b et c et 0 à chacun des deux autres. Ainsi, $\mathrm{M} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\right)$.
5. Par rapport à la question précédente, si on veut une matrice symétrique, on ajoute les conditions $b = d$; $c = g$ et $f = h$. soit en reprenant les formules précédentes $b = -\dfrac{2}{3}a + \dfrac{1}{3}b + \dfrac{4}{3}c$; $c = \dfrac{2}{3}a + \dfrac{2}{3}b - \dfrac{1}{3}c$ et $\dfrac{4}{3}a + \dfrac{1}{3}b - \dfrac{2}{3}c = \dfrac{2}{3}a - \dfrac{1}{3}b + \dfrac{2}{3}c$. Quitte à tout multiplier par 3 et à tout passer du même côté, ces trois équations deviennent $2a+2b-4c = 2a+2b-4c = 2a+2b-4c = 0$. Les trois équations sont donc identiques et imposent $c = \dfrac{a+b}{2}$. Il reste deux coefficients « libres », donc $\dim(\mathrm{M} \cap \mathcal{S}) = 2$. On peut être plus précis et écrire que $\mathrm{S} \cap \mathcal{S} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right)$. Si on tient à mettre un 1 en haut à gauche, on peut par exemple prendre $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (mais il y a plein d'autres possibilités, par exemple la première matrice de notre base divisée par 2).
6. On impose cette fois-ci six conditions supplémentaires : $a = e = i = 0$; $b = -d$; $c = -g$ et $f = -h$. Si $a = 0$, $e = \dfrac{b+c}{3}$ donc la condition $e = 0$ impose $c = -b$. La condition $i = 0$ est alors automatique, et les trois autres aussi : $d = \dfrac{1}{3}b - \dfrac{4}{3}b = -b$; $g = \dfrac{2}{3}b + \dfrac{1}{3}b = b = -c$ et $f = \dfrac{1}{3}b + \dfrac{2}{3}c = b = -h$. On peut encore choisir librement la valeur de b, donc $\dim(\mathrm{M} \cap \mathcal{A}) = 1$, et $\mathrm{M} \cap \mathcal{A} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$. Si on veut un coefficient 1 au bout de la première ligne, on prend l'opposé de la matrice qu'on vient de citer.

7. Cela découle immédiatement des calculs faits pour trouver la dimension de M, on remplit la matrice en respectant les équation trouvées dans la question 4 : $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Feuille d'exercices n°17 : Développements limités.

PTSI B Lycée Eiffel

24 avril 2013

Exercice 1 (* à **)

Calculer les développements limités suivants (on utilisera la notation $DL_n(a)$ pour indiquer le développement limité à l'ordre n au point a) :

- $DL_4(0); f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$
- $DL_2(0); f(x) = \sqrt{3+\cos(x)}$
- $DL_3(0); f(x) = \sqrt{x+2}$
- $DL_3(0); f(x) = \sqrt{\cos(x)} - \cos(\sqrt{x})$
- $DL_4(0); f(x) = (1+\sin(x))^x$
- $DL_3(0); f(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$
- $DL_3(0); f(x) = \dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{\mathrm{sh}(x)}$
- $DL_2(0); f(x) = \dfrac{xe^{-x}}{2x+1}$
- $DL_6(0); f(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$
- $DL_4(0); f(x) = \sqrt{\cos(x)}$
- $DL_4(0); f(x) = \ln(1+e^x)$
- $DL_5(0); f(x) = e^{\sin(x)}$
- $DL_2(1); f(x) = \arctan(x)$
- $DL_3(0; f(x) = \ln(\cos(3x))$
- $DL_2(0); f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{e^x-1}$
- $DL_2(2); f(x) = x^x$
- $DL_4(1); f(x) = e^x$
- $DL_5(0); f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$
- $DL_6(0); f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$
- $DL_3(2); f(x) = x^4$
- $DL_3(1); f(x) = \ln(\sqrt{x})$
- $DL_3\left(\dfrac{\pi}{3}\right); f(x) = \cos(x)$
- $DL_3(0); f(x) = \ln(2e^x + e^{-x})$
- $DL_2(0); f(x) = \arcsin\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)$

Exercice 2 (**)

À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2)$.

Exercice 3 (***)

À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, déterminer un réel A tel que $\forall x \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|(1+x^2)^{\frac{1}{n}} - 1 - \dfrac{1}{n}\ln(1+x^2)\right| \leqslant \dfrac{A}{n^2}$. En déduire deux réels a et b tels que $\displaystyle\int_0^1 (1+x^2)^{\frac{1}{n}}\, dx \underset{n\to+\infty}{=} a + \frac{b}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 4 (* à **)

Calculer à l'aide de développements limités les limites suivantes.

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x - x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$
- $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{e^x - x - \cos(x)}{x^2}$
- $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sin^3(x)}$
- $\displaystyle\lim_{x\to0} \left(\frac{\tan(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+3x+2} - x$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\cosh\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2}$

Exercice 5 (** à ***)

Étudier le comportement des fonctions suivantes (existence d'asymptote ou de tangente et position relative) à l'endroit indiqué :

1. $f(x) = \ln(1 + x + x^2)$ au voisinage de 0.
2. $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$ au voisinage de 0.
3. $f(x) = 2\sqrt{x} - \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$ en $+\infty$.
4. $f(x) = \dfrac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$ en $+\infty$.
5. $f(x) = x^2 \arctan\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$ en $+\infty$.
6. $f(x) = \dfrac{\arctan(x)}{\sin^3(x)} - \dfrac{1}{x^2}$ au voisinage de 0.
7. $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\, dt$ en $+\infty$ (on donnera un développement asymptotique avec trois termes).
8. $f(x) = \dfrac{x\ln(x)}{x^2 - 1}$ sur $\mathbb{R}$.
9. $f(x) = x^{1-\frac{1}{x^2}}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 (***)

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n = n - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{1}{k}\right)$ et $v_n = u_n + \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$ sont adjacentes (au moins à partir d'un certain rang).

Exercice 7 (**)

Étudier les courbes paramétrées suivantes, en utilisant des développements limités pour l'étude des points stationnaires :

1. $\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & t^2 - 2t \\ y(t) & = & t^2 = \dfrac{1}{t^2} \end{array}\right.$
2. $\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & e^{t-1} - t \\ y(t) & = & t^3 - 3t \end{array}\right.$
3. $\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & t - \mathrm{th}(t) \\ y(t) & = & \dfrac{1}{\mathrm{ch}(t)} \end{array}\right.$
4. $\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & \cos(t) + \dfrac{1}{2}\cos(2t) \\ y(t) & = & \sin(t) - \dfrac{1}{2}\sin(2t) \end{array}\right.$

Corrigé de la feuille d'exercices n°17

Exercice 1 (* à **)

- On commence par écrire $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + o(x^4)$ (c'est du cours) puis, en appliquant $\sqrt{1+u} = 1 + \dfrac{1}{2}u - \dfrac{1}{8}u^2 + \dfrac{1}{16}u^3 - \dfrac{5}{128}u^4 + o(u^4)$ (application de la formule du couprs pour $(1+x)^\alpha$ avec $\alpha = \dfrac{1}{2}$) à $u = x + x^2 + x^3 + x^4$ (qui tend bien vers 0), $\sqrt{\dfrac{1}{1-x}} = 1+\dfrac{1}{2}(x+x^2+x^3+x^4)-\dfrac{1}{8}(x+x^2+x^3+x^4)^2+\dfrac{1}{16}(x+x^2+x^3+x^4)^3+\dfrac{5}{128}(x+x^2+x^3+x^4)^4+o(x^4)$. Il ne reste plus qu'à tout développer en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à 4 : $\sqrt{\dfrac{1}{1-x}} = 1+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}x^3+\dfrac{1}{2}x^4-\dfrac{1}{8}x^2-\dfrac{1}{8}x^4-\dfrac{1}{4}x^3-\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{1}{16}x^3+\dfrac{3}{16}x^4+\dfrac{5}{128}x^4+o(x^4)$, soit $f(x) = 1 + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{8}x^2 + \dfrac{5}{16}x^3 + \dfrac{45}{128}x^4 + o(x^4)$.
- On sait que $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} - \dfrac{x^6}{720} + o(x^6)$, il suffit donc d'appliquer le développement limité $\dfrac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + o(u^3)$ avec $u = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{24}x^4 + \dfrac{1}{720}x^6$ (un DL à l'ordre 3 sera suffisant car u est lui-même d'ordre 2). On ne garde bien sûr que les termes d'ordre inférieur ou égal à 6 pour obtenir $\dfrac{1}{\cos(x)} = 1 + \left(\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{24}x^4 + \dfrac{1}{720}x^6\right) + \left(\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{24}x^4 + \dfrac{1}{720}x^6\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{24}x^4 + \dfrac{1}{720}x^6\right)^3 + o(x^6) = 1 + \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{24}x^4 + \dfrac{1}{720}x^6 + \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{1}{24}x^6 + \dfrac{1}{8}x^6 + o(x^6)$, soit $f(x) = 1 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{5}{24}x^4 + \dfrac{61}{720}x^6 + o(x^6)$.
- Attention, on fait un développement limité en 1 et pas en 0. Posons donc $h = x - 1$, qui lui tendra vers 0 quand x tend vers 1 : $e^x = e^{1+h} = e \times e^h = e \times \left(1 + h + \dfrac{h}{2} + \dfrac{h^3}{6} + \dfrac{h^4}{24} + o(h^4)\right) = e + eh + \dfrac{e}{2}h^2 + \dfrac{e}{6}h^3 + \dfrac{e}{24}h^4 + o(h^4)$. On conclut en remplaçant h par $x - 1$: $f(x) \underset{x \to 1}{=} e + e(x-1) + \dfrac{e}{2}(x-1)^2 + \dfrac{e}{6}(x-1)^3 + \dfrac{e}{24}(x-1)^4 + o(x-1)^4$. Alternativement, on pouvait trouver très rapidement cette formule en appliquant directement la formule de Taylor-Young, toutes les dérivées de l'exponentielle prenant pour valeur e quand $x = 1$.
- Attention au petit piège, la fonction a pour limite 2 en 0, il faut sortir un facteur 2 pour pouvoir appliquer la formule du DL de $\sqrt{1+u}$: $f(x) = \sqrt{3 + \cos(x)} = \sqrt{4 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)} = 2\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{8} + o(x^2)} = 2\left(1 - \dfrac{x^2}{16} + o(x^2)\right)$ soit $f(x) = 2 - \dfrac{1}{8}x^2 + o(x^2)$.
- C'est le même que le précédent, sans le petit piège, et à un ordre un peu plus élevé : $\sqrt{\cos(x)} = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^4)} = 1 + \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{-x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}\right) - \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{-x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}\right)^2 + o(x^4) = 1 - \dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{1}{48}x^4 - \dfrac{1}{32}x^4 + o(x^4)$, soit $f(x) = 1 - \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{96}x^4 + o(x^4)$.
- Plusieurs méthodes possibles ici. On peut partir de $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + o(x^2)$, et élever le tout au carré : $\dfrac{1}{(x-1)^2} = 1 + x^2 + x^4 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 2x^5 + 2x^3 + 2x^4 + 2x^5 + 2x^5 + o(x^5)$, soit $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5 + o(x^5)$ (on peut deviner aisément ce que ça donnerait à l'ordre n, les plus courageux essaieront de le démontrer). Autre possibilité : écrire $f(x) = \dfrac{1}{1 - 2x + x^2}$, et utiliser le DL de $\dfrac{1}{1-u}$ pour

trouver $\dfrac{1}{(x-1)^2} = 1 + (2x - x^2) + (2x - x^2)^2 + (2x - x^2)^3 + (2x - x^2)^4 + (2x - x^2)^5 + o(x^5) = 1 + 2x - x^2 + 4x^2 - 4x^3 + x^4 + 8x^3 - 12x^4 + 6x^5 + 16x^4 - 32x^5 + 32x^5 + o(x^5)$, soit à nouveau $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5 + o(x^5)$.

- On a déjà vu ce genre de calcul : il faut penser à sortir un facteur $\sqrt{2}$ pour appliquer le DL de $\sqrt{1+u}$, soit $\sqrt{x+2} = \sqrt{2}\sqrt{1+\dfrac{x}{2}} = \sqrt{2}\left(1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{16}\left(\dfrac{x}{2}\right)^3 + o(x^3)\right)$. On trouve donc $f(x) = \sqrt{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{4}x - \dfrac{\sqrt{2}}{32}x^2 + \dfrac{\sqrt{2}}{128}x^3 + o(x^3)$.
- Le calcul de DL d'une composée est ici doublé du petit piège habituel puisque la fonction a pour limite $\ln(2)$: $1+e^x = 2+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^4}{24}+o(x^4) = 2\left(1+\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x^3}{12}+\dfrac{x^4}{48}+o(x^4)\right)$, donc $\ln(1+e^x) = \ln(2) + \ln\left(1+\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x^3}{12}+\dfrac{x^4}{48}+o(x^4)\right)$, on peut désormais appliquer le DL de $\ln(1+u)$ pour obtenir $\ln(1+e^x) = \ln(2)+\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x^3}{12}+\dfrac{x^4}{48}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x^3}{12}+\dfrac{x^4}{48}\right)^2 + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x^3}{12}+\dfrac{x^4}{48}\right)^3 - \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x^3}{12}+\dfrac{x^4}{48}\right)^4 + o(x^4) = \ln(2) + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{1}{12}x^3 + \dfrac{1}{48}x^4 - \dfrac{1}{8}x^2 - \dfrac{1}{32}x^4 - \dfrac{1}{8}x^3 - \dfrac{1}{24}x^4 + \dfrac{1}{24}x^3 + \dfrac{1}{16}x^4 - \dfrac{1}{64}x^4 + o(x^4)$, soit $f(x) = \ln(2) + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{8}x^2 - \dfrac{1}{192}x^4 + o(x^4)$.
- Enfin un calcul très rapide : $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} - \dfrac{x^7}{5\ 040} + o(x^7)$, soit $f(x) = 1 - \dfrac{1}{6}x^2 + \dfrac{1}{120}x^4 - \dfrac{1}{5\ 040}x^6 + o(x^6)$.
- On a déjà calculé le DL de $\sqrt{\cos(x)}$ un peu plus haut, la seule question qui se pose est concernant le $\cos(\sqrt{x})$. A-t-on le droit de se contenter de prendre le DL de $\cos(x)$ et remplacer les x par des $\sqrt{x}$ en profitant du fait que la présence de puissances paires uniquement va faire disparaitre toutes les racines carrées ? Bien sûr que oui ! Le seul détail est que le DL ne sera évidemment valable qu'à droite de 0, puisque la fonction n'est pas définie quand $x < 0$. On écrira donc $\cos(\sqrt{x}) \underset{x\to 0^+}{=} 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{24}x^2 - \dfrac{1}{720}x^3 + o(x^3)$. Il ne reste plus qu'à faire une addition pour trouver $f(x) = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{7}{24}x^2 - \dfrac{1}{720}x^3 + o(x^3)$.
- Une composée classique : $e^u = 1 + u + \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{u^3}{6} + \dfrac{u^4}{24} + \dfrac{u^5}{120} + o(x^5)$, donc $e^{\sin(x)} = 1 + \left(x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}\right) + \dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}\right)^2 + \dfrac{1}{6}\left(x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}\right)^3 + \dfrac{1}{24}\left(x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}\right)^4 + \dfrac{1}{120}\left(x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}\right)^5 + o(x^5) = 1 + x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{6}x^4 + \dfrac{1}{6}x^3 - \dfrac{1}{12}x^5 + \dfrac{1}{24}x^4 + \dfrac{1}{120}x^5 + o(x^5)$, soit $f(x) = 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{8}x^4 - \dfrac{1}{15}x^5 + o(x^5)$.
- Plusieurs possibilités ici. On peut faire le classique changement de variable $h = x-2$, donc $x^4 = (2+x-2)^4 = 16\left(1+\dfrac{h}{2}\right)^4 = 16\left(1 + 2h + \dfrac{3}{2}h^2 + \dfrac{1}{2}h^3 + o(h^3)\right) = 16+32h+24h^2+8h^3+o(h^3)$. Autrement dit, $f(x) \underset{x\to 2}{=} 16 + 32(x-2) + 24(x-2)^2 + 2(x-2)^3 + o(x-2)^3$. On n'a même pas eu besoin de formule du cours ici, puisqu'on développe simplement un polynôme, on peut donc appliquer la formule du binôme de Newton pour développer.
  Deuxième méthode : appliquer la formule de Taylor-Young, les dérivées étant ici très faciles à calculer. En effet, $f(2) = 16$; $f'(2) = 4\times 2^3 = 32$; $f''(2) = 12\times 2^2 = 48$ et $f^{(3)}(2) = 24\times 2 = 48$, donc $f(x) = 16 + 32(x-2) + \dfrac{48}{2}(x-2)^2 + \dfrac{48}{6}(x-2)^3 + o(x-2)^3$, ce qui donne bien le même DL que plus haut.

- Le plus normal est d'écrire la puissance sous forme exponentielle $f(x) = e^{x\ln(1+\sin(x))}$, avec $\ln(1+\sin(x)) = \ln\left(1+x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^4)\right) = x-\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{x^3}{6}\right)^2+\dfrac{1}{3}\left(x-\dfrac{x^3}{6}\right)^3-\dfrac{1}{4}\left(x-\dfrac{x^3}{6}\right)^4+ o(x^4) = x-\dfrac{1}{6}x^3-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{6}x^4+\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{4}x^4+o(x^4) = x-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{6}x^3-\dfrac{1}{12}x^4+o(x^4)$. En fait, on s'est fatigués à aller jusqu'à l'ordre 4 pour rien puisqu'on va multiplier par x avant de mettre dans l'exponentielle : $x\ln(1+\sin(x)) = x^2-\dfrac{1}{2}x^3+\dfrac{1}{6}x^4+o(x^4)$, donc $e^{x\ln(1+\sin(x))} = 1+x^2-\dfrac{1}{2}x^3+\dfrac{1}{6}x^4+\dfrac{1}{2}\left(x^2-\dfrac{1}{2}x^3+\dfrac{1}{6}x^4\right)^2+o(x^4) = 1+x^2-\dfrac{1}{2}x^3+\dfrac{1}{6}x^4+\dfrac{1}{2}x^4+o(x^4)$ (inutile d'aller plus loin que l'ordre 2 ici). On conclut : $f(x) = 1+x^2-\dfrac{1}{2}x^3+\dfrac{2}{3}x^4+o(x^4)$.
- Pour un DL ailleurs qu'en 0 d'une fonction comme l'arctangente, le mieux est, de loin, d'appliquer la formule de Taylor-Young, surtout que l'ordre n'est pas très élevé. On sait que $f(x) = \dfrac{\pi}{4}$; $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, donc $f'(1) = \dfrac{1}{2}$; et $f''(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$, donc $f''(1) = -\dfrac{1}{2}$. Il ne reste plus qu'à conclure : $f(x)\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}(x-1)-\dfrac{1}{4}(x-1)^2+o(x-1)^2$.
Si on tient vraiment à faire un changement de variables, mieux vaut le faire sur la dérivée $\dfrac{1}{1+x^2}$ que sur l'arctangente elle-même car on ne saura pas vraiment quoi faire de $\arctan(1+h)$.
Allez, faisons le calcul : en posant $h = x-1$, $\dfrac{1}{1+(h+1)^2} = \dfrac{1}{2+2h+h^2} = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{1+h+\frac{1}{2}h^2} = \dfrac{1}{2}(1-h+o(h)) = \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}h+o(h)$. On primitive ensuite, en ajoutant bien sûr la constante $\dfrac{\pi}{4}$: $\arctan(x) = \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}h-\dfrac{1}{4}h^2+o(h)$, qui est bien le DL trouvé plus haut.
- Ici, le changement de variable est non sulement conseillé mais même bienvenu sinon la racine carrée pose problème. Posons donc $h = x-1$, soit $x = h+1$, pour trouver $\sqrt{x} = \sqrt{1+h} = 1+\dfrac{1}{2}h-\dfrac{1}{8}h^2+\dfrac{1}{16}h^3+o(h^3)$, et $\ln(\sqrt{x}) = \ln\left(1+\dfrac{1}{2}h-\dfrac{1}{8}h^2+\dfrac{1}{16}h^3+o(h^3)\right) = \dfrac{1}{2}h-\dfrac{1}{8}h^2+ \dfrac{1}{16}h^3-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}h-\dfrac{1}{8}h^2+\dfrac{1}{16}h^3\right)^2+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}h-\dfrac{1}{8}h^2+\dfrac{1}{16}h^3\right)+o(h^3) = \dfrac{1}{2}h-\dfrac{1}{8}h^2+\dfrac{1}{16}h^3-\dfrac{1}{8}h^2+ \dfrac{1}{16}h^3+\dfrac{1}{24}h^3+o(h^3)$. On en déduit que $f(x) \underset{x\to 1}{=} \dfrac{1}{2}(x-1)-\dfrac{1}{4}(x-1)^2+\dfrac{1}{6}(x-1)^3+o(x-1)^3$.
Tiens, c'est amusant, il semble y avoir une certaine régularité dans ce DL. Un hasard ? Pas du tout, on a en fait calculé beaucoup pour rien, on pouvait simplement dire que $\ln(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{2}\ln(x) = \dfrac{1}{2}\ln(1+(x-1))$, et appliquer le DL de $\ln(1+u)$ en 0.
- On procède simplement en deux temps, en faisant attention à sortir un facteur 2 de la racine : $\sqrt{1+x} = 1+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{8}x^2+\dfrac{1}{16}x^3+o(x^3)$, donc $\sqrt{1+\sqrt{1+x}} = \sqrt{2+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{8}x^2+\dfrac{1}{16}x^3+o(x^3)} = \sqrt{2}\times\sqrt{1+\dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{16}x^2+\dfrac{1}{32}x^3+o(x^3)} = \sqrt{2}\left(1+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{16}x^2+\dfrac{1}{32}x^3\right)\right.$
$\left.-\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{16}x^2+\dfrac{1}{32}x^3\right)^2+\dfrac{1}{16}\left(\dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{16}x^2+\dfrac{1}{32}x^3\right)\right)+o(x^3) =$
$\sqrt{2}\left(1+\dfrac{1}{8}x-\dfrac{1}{32}x^2+\dfrac{1}{64}x^3-\dfrac{1}{128}x^2+\dfrac{1}{256}x^3+\dfrac{1}{1\ 024}x^3\right)+o(x^3)$, soit $f(x) = \sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{8}x-\dfrac{5\sqrt{2}}{128}x^2+\dfrac{21\sqrt{2}}{1\ 024}x^3+o(x^3)$.
- Rien de bien difficile : $\cos(3x) = 1-\dfrac{9}{2}x^2+o(x^3)$, donc $\ln(\cos(3x)) = -\dfrac{9}{2}x^2+o(x^2)$ (à cet ordre-là, on ne se fatigue pas trop).
- Un petit peu de trigonométrie n'est pas inutile ici, en l'occurence des formules d'addition. On

pose $h = x - \frac{\pi}{3}$, donc $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + h\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(h) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(h) = \frac{1}{2}\cos(h) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(h) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{h^2}{2} + o(h^3)\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(h - \frac{h^3}{6} + o(h^3)\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}h - \frac{1}{4}h^2 + \frac{1}{4\sqrt{3}}h^3 + o(h^3)$, soit $f(x) \underset{x\to\frac{\pi}{3}}{=} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{1}{4\sqrt{3}}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + o\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3$.

- Il n'est même pas évident à priori que cette fonction est définie en 0, ou plutôt prolongeable par continuité en 0. Rien ne nous empêche pour autant de tenter un développement limité, qui à première vue s'apparantera plutôt à un développement asymptotique. On peut écrire $\frac{1}{\sin(x)} = \frac{1}{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)} = \frac{1}{x} \times \frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)} = \frac{1 + \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} + \frac{x^4}{36} + o(x^4)}{x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{6}x + \frac{7}{360}x^3 + o(x^3)$. Notez que pour obtenir ce développement à l'ordre 3, il était nécessaire de partir d'un DL à l'ordre 5 du dénominateur. On fait pareil pour le deuxième inverse : $\frac{1}{\mathrm{sh}(x)} = \frac{1}{x} \times \frac{1}{1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)} = \frac{1 - \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} + \frac{x^4}{36} + o(x^4)}{x} = \frac{1}{x} - \frac{x}{6} + \frac{7}{360}x^3 + o(x^3)$. En faisant la différence, on trouve très simplement $f(x) = \frac{x}{3} + o(x^3)$.
- Attention ici, il y a une petite difficulté : numérateur et dénominateur tendent tous deux vers 0 en 0, mais comme ils également tous deux équivalents à x, une simplification des DL va se produire pour donner une fonction qui se prolonge par continuité Toutefois, il faut anticiper cette simplification et faire initialement des DL à l'ordre 3 si on veut obtenir de l'ordre 2 pour f : $\frac{\ln(1+x)}{e^x - 1} = \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)} = \frac{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)} = \left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)\right) \times \left(1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{4}x^2 + o(x^2)\right) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x^2 + o(x^2)$, soit $f(x) = 1 - x + \frac{2}{3}x^2 + o(x^2)$.
- Encore une composée assez classique, en n'oubliant pas de sortir un facteur $\ln(3)$ pour avoir quelque chose qui tend vers 0 : $\ln(2e^x + e^{-x} = \ln\left(2 + 2x + x^2 + \frac{x^3}{3} + 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = \ln\left(3 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right) = \ln(3) + \ln\left(1 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{18}x^3 + o(x^3)\right) = \ln(3) + \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{18}x^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{18}x^3\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{18}x^3\right)^3 + o(x^3) = \ln(3) + \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{18}x^3 - \frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{81}x^3 + o(x^3)$, soit $f(x) = \ln(3) + \frac{1}{3}x + \frac{4}{9}x^2 - \frac{8}{81}x^3 + o(x^3)$.
- Rien de spécial à signaler pour celui-là : $\frac{xe^{-x}}{1 + 2x} = (x - x^2 + o(x^2))(1 - 2x + 4x^2 + o(x^2)) = x - x^2 - 2x^2 + o(x^2)$, soit $f(x) = x - 3x^2 + o(x^2)$.
- On commence bien sûr par écrire $x^x = e^{x\ln(x)}$. Ensuite, le plus rapide est sûrement d'appliquer directement la formule de Taylor-Young, surtout que l'ordre n'est pas très élevé. On calcule $f(2) = 2^2 = 4$; puis $f'(x) = (\ln(x) + 1)e^{x\ln(x)}$, donc $f'(2) = 4(1 + \ln(2))$; et enfin $f''(x) = \frac{1}{x}e^{x\ln(x)} + (\ln(x) + 1)^2 e^{x\ln(x)}$, donc $f''(2) = 2 + 4(1 + \ln(2))^2$. On en déduit que $f(x) \underset{x\to 2}{=} 4 + 4(1 + \ln(2))(x - 2) + (1 + 2(1 + \ln(2))^2)(x - 2)^2 + o(x - 2)^2$.
  Sinon, si on y tient vraiment, on fait le changement de variable $h = x - 2$, donc $f(x) = e^{(2+h)\ln(2+h)} = e^{(2+h)(\ln(2) + \ln(1 + \frac{h}{2}))} = e^{(2+h)(\ln(2) + \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + o(h^2))} = e^{2\ln(2) + (1+\ln(2))h + \frac{1}{4}h^2 + o(h^2)} = 4e^{(1+\ln(2))h + \frac{1}{4}h^2 + o(h^2)} = 4\left(1 + (1 + \ln(2))h + \frac{1}{4}h^2 + \frac{(1 + \ln(2))^2}{2}h^2 + o(h^2)\right)$, ce qui donne évidemment le même résultat que ci-dessus.
- Ce qui est dans l'arcsinus tend vers $\frac{1}{2}$ en 0, et en faire le développement limité ne pose pas de

problème : $\dfrac{1+x}{2+x}=\dfrac{1+x}{2}\times\dfrac{1}{1+\frac{x}{2}}=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}x\right)\left(1-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}x^2+o(x^2)\right)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{8}x^2+o(x^2)$. Cherchons désormais le Dl d'arcsinus en $\dfrac{1}{2}$ pour pouvoir composer : $\arcsin\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\pi}{6}$; $\arcsin'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ donc $\arcsin'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$; et enfin $\arcsin''(x)=\dfrac{-2x}{-2(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$, donc $\arcsin''(x)=\dfrac{4}{3\sqrt{3}}$. On en déduit que $\arcsin(x)\underset{x\to\frac{1}{2}}{=}\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{2}{3\sqrt{3}}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+o\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2$. Il ne reste plus que la dernière étape : $f(x)\underset{x\to 0}{=}\dfrac{\pi}{6}$
$+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{8}x^2\right)+\dfrac{2}{3\sqrt{3}}\left(\dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{8}x^2\right)^2+o(x^2)=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}x-\dfrac{1}{4\sqrt{3}}x^2+\dfrac{1}{24\sqrt{3}}x^2+o(x^2)$, soit $f(x)=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}x-\dfrac{5}{24\sqrt{3}}x^2+o(x^2)$.

Exercice 2 (**)

Écrivons donc cette fameuse formule de Taylor à l'ordre n (la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$), en posant $a=0$: $f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\int_0^x\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt$. Pour remplacer efficacement, il serait bon de calculer les dérivées successives de f. Allons-y : $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$ puis $f''(x)=-\dfrac{1}{(1+x)^2}$; $f^{(3)}(x)=\dfrac{2}{(1+x)^3}$. On conjecture que pour tout entier $k\geqslant 1$, $f^(k)(x)=(-1)^{k-1}\dfrac{(k-1)!}{(1+x)^k}$, ce qui se prouve effectivement par unr récurrence triviale (on a largement vérifié l'initialisation, et la dérivée de $(-1)^{k-1}\dfrac{(k-1)!}{(1+x)^k}$ est $(-1)^{k-1}\dfrac{-k(k-1)!}{(1+x)^{k+1}}=(-1)^k\dfrac{k!}{(1+x)^{k+1}}$, d'où l'hérédité). En particulier, $f^(k)(0)=(-1)^{k-1}(k-1)!$. En reportant dans la formule de Taylor, on trouve donc $\ln(1+x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k+\int_0^x\frac{(-1)^n}{(1+t)^n}(x-t)^n\,dt$ (on a supprimé le terme d'indice 0 dans la somme, qui était de toute façon égal à 0). En prenant $x=1$ et en faisant un décalage d'indice dans la somme, on trouve notamment $\ln(2)-\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{(k+1)}=\int_0^1\frac{1}{(1+t)^n}(t-1)^n\,dt$. Il ne reste plus qu'à prouver que le membre de droite tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Pour cela, une majoration d'intégrale brutale suffit : $(1+t)^n\geqslant 1$ sur $[0,1]$, donc $\left|\displaystyle\int_0^1\frac{1}{(1+t)^n}(t-1)^n\,dt\right|\leqslant\int_0^1|t-1|^n\,dt=\left[\frac{-(1-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}$. La limite du reste intégral est donc bien nulle, et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}=\ln(2)$ (dans notre calcul, la somme n'allait que jusqu'à l'indice $n-1$ mais ça ne change bien sûr rien au résultat).

Exercice 3 (***)

On va appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction exponentielle : sur l'intervalle $[0,x]$, la dérivée de l'exponentielle est majorée par e^x, donc, en écrivant la formule à l'ordre 2, $|e^t-(1+t)|\leqslant\dfrac{1}{2}t^2e^t$ quel que soit $t\in[0,x]$. En posant $t=\dfrac{1}{n}\ln(1+x^2)$, on trouve alors $\left|e^{\frac{1}{n}\ln(1+x^2)}-1-\dfrac{1}{n}\ln(1+x^2)\right|\leqslant\dfrac{1}{2n^2}\ln^2(1+x^2)\times e^{\frac{1}{n}\ln(1+x^2)}$, soit $\left|(1+x^2)^{\frac{1}{n}}-1-\dfrac{1}{n}\ln(1+x^2)\right|\leqslant$

$\dfrac{\ln^2(1+x^2)}{2n^2} \times (1+x^2)^{\frac{1}{n}}$. Or, si $x \in [0,1]$, $1+x^2 \leqslant 2$, et a fortiori $(1+x^2)^{\frac{1}{n}} \leqslant 2$. On en déduit que $\left|(1+x^2)^{\frac{1}{n}} - 1 - \dfrac{1}{n}\ln(1+x^2)\right| \leqslant \dfrac{\ln^2(2)}{n^2}$. Par intégration de l'inégalité, on obtient alors $\left|\displaystyle\int_0^1 (1+x^2)^{\frac{1}{n}}\ dx - \int_0^1 1\ dx - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^2)\ dx\right| \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln^2(2)}{n^2} = \frac{\ln^2(2)}{n^2}$. Autrement dit, il suffit de prendre $a = \displaystyle\int_0^1 1\ dx = 1$, et $b = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^2)\ dx$. Cette intégrale se calcule par une IPP, en posant $u(x) = \ln(1+x^2)$, donc $u'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$, et $v'(x) = 1$, donc $v(x) = x$, pour trouver $b = [x\ln(1+x^2)]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2}\ dx = \ln(2) - 2\int_0^1 1 - \frac{1}{1+x^2}\ dx = \ln(2) - 2 + [\arctan(x)]_0^1 = \ln(2) - 2 + \dfrac{\pi}{4}$. Comme le majorant est négligeable par rapport à $\dfrac{1}{n}$, on peut donc conclure que $\displaystyle\int_0^1 (1+x^2)^{\frac{1}{n}}\ dx = 1 + \frac{\ln(2) - 2 + \frac{\pi}{4}}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 4 (* à **)

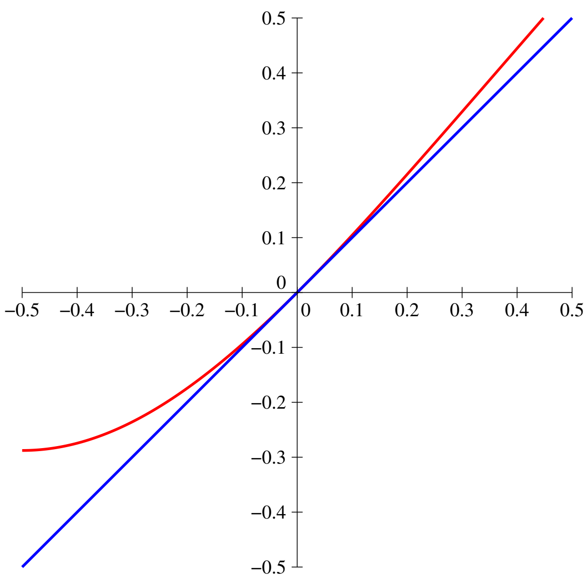
- Puisque $\dfrac{1}{x}$ tend vers 0, on peut effectuer un développement limité : $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{1}{3x^3} + o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$, donc $x - x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = x - x + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$ (on n'oublie pas de multiplier par x^2 également dans le o). En particulier, la limite demandée est égale à $\dfrac{1}{2}$.
- On commence par écrire la puissance sous forme exponentielle $e^{\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\tan(x)}{x}\right)}$. Puis on effectue un développement limité (normalement l'ordre 1 suffira) étape par étape. D'après le cours, $\tan(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^4)$, donc $\dfrac{\tan(x)}{x} = 1 + \dfrac{x^2}{3} + o(x^3)$. On peut alors composer sans problème par $\ln(1+u)$: $\ln\left(\dfrac{\tan(x)}{x}\right) = \ln\left(1+\dfrac{x^2}{3}\right) + o(x^3) = \dfrac{x^2}{3} + o(x^2)$ (en fait, un équivalent suffit à partir de cette étape). On en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\tan(x)}{x}\right) = \frac{1}{3}$, puis que la limite recherchée vaut $e^{\frac{1}{3}}$.
- Il suffit ici de faire un développement limité à l'ordre 2 du numérateur : $e^x - x - \cos(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} - x - 1 + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2) = x^2 + o(x^2)$, donc la limite demandée est égale à 1.
- Pour faire un développement limité ici, il faut d'abord se ramener à 0. Pour cela, on factoriser par x^2 dans la racine carrée (on supposera $x \geqslant 0$) : $\sqrt{x^2+3x+2} - x = x\sqrt{1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}} - x = x\left(\sqrt{1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}} - 1\right)$. Puisque $\dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^2}$ tend vers 0, on peut effectuer un développement limité (à l'ordre 1, ça suffira) de la parenthèse : $\left(1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right) - 1 = 1 + \dfrac{3}{2x} - 1 + o\left(\dfrac{1}{x}\right) \sim \dfrac{3}{2x}$. On en déduit facilement que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3x+2} - x = \frac{3}{2}$. Notons au passage que le terme en $\dfrac{2}{x^2}$ n'intervient pas dans le calcul, on peut donc remplacer dans la racine carrée initiale le $+2$ par n'importe quelle autre constante sans changer la limite.
- Ce n'est pas exactement un développement limité qu'on va faire, mais on va les exploiter quand même : $\dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{\sin^3(x)} = \dfrac{\sin^3(x) - x^3}{x^3\sin^3(x)} \sim \dfrac{\sin^3(x) - x^3}{x^6}$. Reste à faire un DL à l'ordre 6 du

numérateur : $\sin^3(x) - x^3 = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)\right)^3 - x^3 = x^3 - \frac{1}{2}x^5 - x^3 + o(x^6) \sim -\frac{1}{2}x^5$.
On en déduit que $\frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sin^3(x)} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{2x}$. En particulier, il n'y a pas de limite finie en 0.

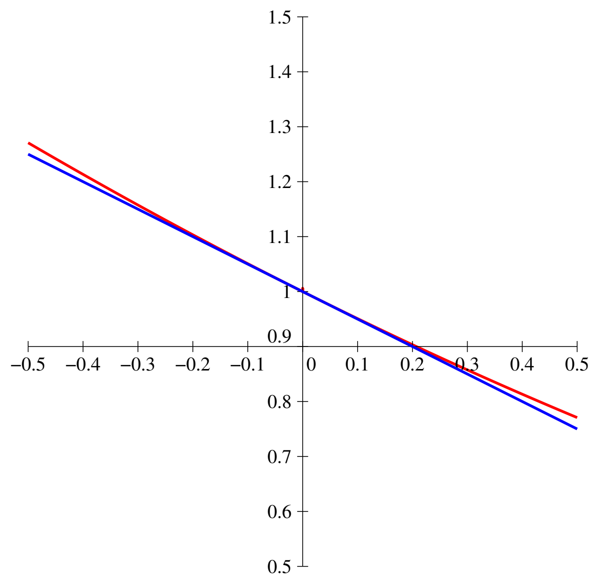
- On passe bien sûr à l'exponentielle pour obtenir $e^{x^2 \ln(\cosh(\frac{1}{x}))}$. Puisque $\frac{1}{x}$ tens vers 0, on peut sûrement effectuer un développement limité, qu'on poussera jusqu'à l'ordre 2 pour anticiper le produit par x^2 : $\cosh\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, donc $\ln\left(\cosh\left(\frac{1}{x}\right)\right) \sim \frac{1}{2x^2}$, ce donc on déduit que la limite recherchée vaut $e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$.

Exercice 5 (** à ***)

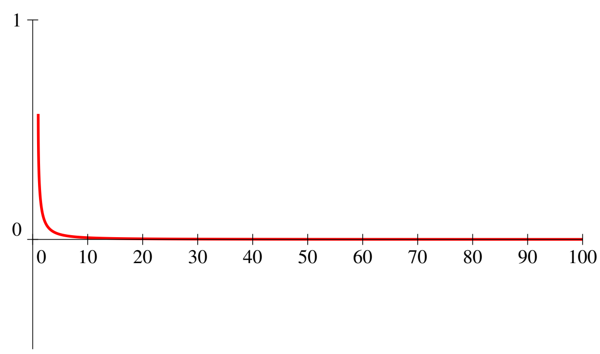
1. Écrivons le développement limité de f à l'ordre 3 en 0 (mieux vaut être prudent) : $\ln(1+x+x^2) = x+x^2-\frac{1}{2}(x+x^2)^2+\frac{1}{3}(x+x^2)^3+o(x^3) = x+x^2-\frac{1}{2}x^2-x^3+\frac{1}{3}x^3+o(x^3) = x+\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x^3+o(x^3)$. La courbe admet donc en 0 une tangente d'équation $y = x$, et le terme suivant du développement limité étant toujours positif au voisinage de 0, la courbe sera localement située au-dessus de sa tangente. Pour chaque figure, la courbe sera représentée en rouge et la tangente ou l'asymptote en bleu.



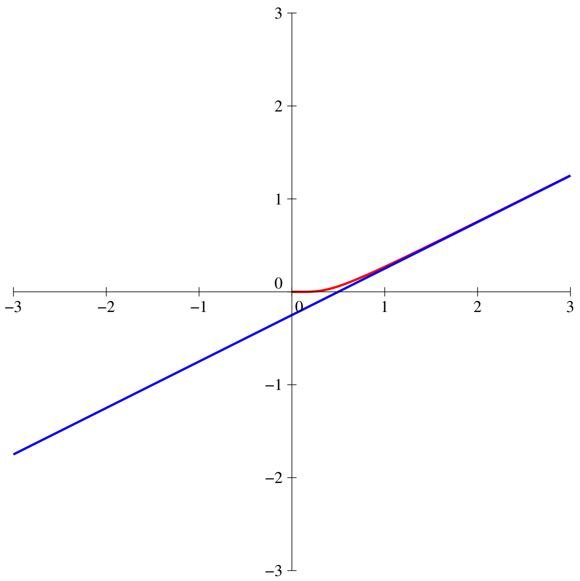
2. On est repartis pour un petit développement limité : $f(x) = \frac{x}{x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}$
$= \frac{1}{1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + o(x^2)} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{4}x^2 + o(x^2) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 + o(x^2)$. La courbe admet une tangente d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 1$, et elle est située localement au-dessus de sa tangente.



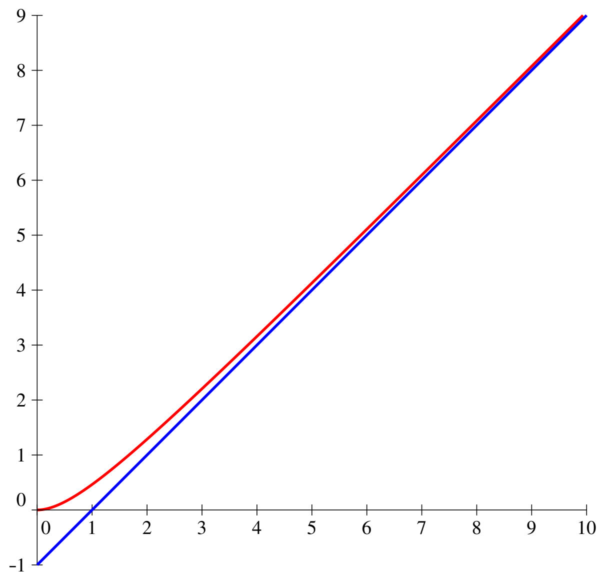
3. Il faut commencer par se ramener à un calcul en 0 en mettant $\sqrt{x}$ en facteur partout : $f(x) = \sqrt{x}\left(2 - \sqrt{1+\frac{1}{x}} - \sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)$. Posons $X = \frac{1}{x}$ pour clarifier le calcul : $\sqrt{X}f(x) = 2 - (1 + X)^{\frac{1}{2}} - (1-X)^{\frac{1}{2}} = 2 - 1 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{8}X^2 - 1 + \frac{1}{2}X + \frac{1}{8}X^2 + o(X^2) = \frac{1}{4}X^2 + o(X^2)$, donc $f(x) \sim \frac{1}{4}X\sqrt{X} \sim \frac{1}{4x\sqrt{x}}$. En particulier, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, et la courbe est située au-dessus de l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.



4. Posons donc $X = \frac{1}{x}$, alors $f(x) = \frac{1}{X} \times \frac{1}{1+e^X}$, soit $Xf(x) = \frac{1}{2 + X + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{6}X^3 + o(X^3)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{2}X + \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{12}X^3 + o(X^3)} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{4}X^2 - \frac{1}{12}X^3 + \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{4}X^3 - \frac{1}{8}X^3 + o(X^3)\right)$ $= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}X + \frac{1}{48}X^3 + o(X^3)$. On en déduit que $f(x) = \frac{1}{2X} - \frac{1}{4} + \frac{1}{48}X^2 + o(X^2) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \frac{1}{48x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. En particulier, la courbe admet une asymptote oblique d'équation $y = \frac{1}{2}x - 14$, et elle est localement située au-dessus de cette asymptote.

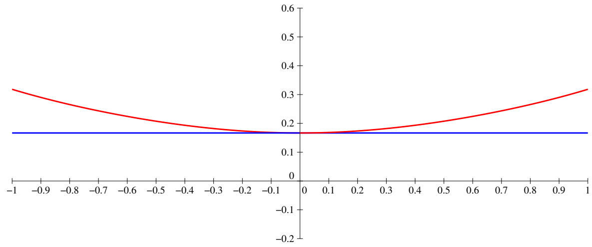


5. Ce qui se trouve dans l'arctangente a une limite nulle, on doit pouvoir s'arranger pour faire un développement limité. Commençons par poser comme d'habitude $X = \dfrac{1}{x}$, et écrivons $\dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{1}{1+\frac{1}{x}} = \dfrac{X}{1+X} = X(1 - X + X^2) + o(X^2) = X - X^2 + X^3 + o(X^3)$. En composant par l'arctangente, $\arctan\left(\dfrac{1}{1+x}\right) = X - X^2 + X^3 - \dfrac{X^3}{3} + o(X^3) = X - X^2 + \dfrac{2}{3}X^3 + o(X^3)$, donc $f(x) = \dfrac{1}{X} - 1 + \dfrac{2}{3}X + o(X) = x - 1 + \dfrac{2}{3x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$. La courbe admet donc en $+\infty$ une asymptote d'équation $y = x - 1$, et elle est localement située au-dessus de l'asymptote.

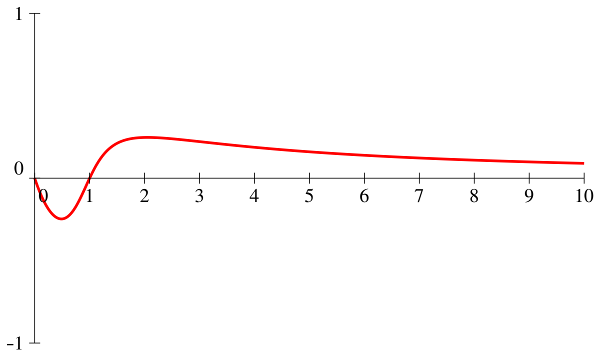


6. Il ne faut pas avoir peur, et surtout pousser les DL suffisamment loin dès le départ pour avoir les informations souhaitées (dans la correction, je mets le degré minimal nécessaire pour chaque DL, mais au brouillon, soit on va directement très loin, soit on fait plusieurs essais) : $\dfrac{\arctan(x)}{\sin^3(x)} = \dfrac{x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6)}{(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5\ 040} + o(x^8))^3} = \dfrac{x(1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + o(x^5))}{x^3 - \frac{x^5}{2} + \frac{x^7}{40} + \frac{x^7}{12} + o(x^8)} = \dfrac{1}{x^2} \times \dfrac{1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + o(x^5)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{13x^4}{120} + o(x^5)} = \dfrac{1}{x^2}\left(1 - \dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{1}{5}x^4 + o(x^5)\right)\left(1 + \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{13}{120}x^4 + \dfrac{1}{4}x^4 + o(x^5)\right) =$

$\frac{1}{x^2}\left(1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^4 - \frac{13}{120}x^4 + \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)\right) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{6} + \frac{7}{120}x^2 + o(x^2)$. Ouf, il ne reste plus qu'à conclure que $f(x) = \frac{1}{6} + \frac{7}{120}x^2 + o(x^2)$, la fonction a donc pour limite $\frac{1}{6}$ en 0, y admet une tangente horizontale, et sa courbe est située localement au-dessus de cette tangente.

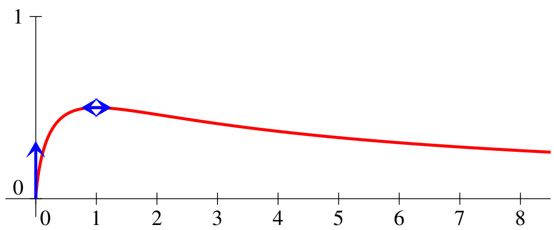


7. Ce n'est pas si compliqué que ça. Posons $g(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}$, et G une primitive de g (par exemple celle qui s'annule en 0, la fonction g étant définie sur $\mathbb{R}$). On peut affirmer que $f(x) = G(x^2) - G(x)$. Commençons par écrire un développement asymptotique de $g(t)$ quand t tend vers $+\infty$, en posant comme toujours $T = \frac{1}{t}$: $g(t) = \frac{1}{t^2\sqrt{\frac{1}{t^4}+1}} = \frac{T^2}{\sqrt{1+T^4}} = \frac{T^2}{1+\frac{1}{2}T^4 - \frac{1}{8}T^8 + o(T^8)} = T^2\left(1 - \frac{1}{2}T^4 + \frac{1}{8}T^8 + \frac{1}{4}T^8 + o(T^8)\right) = T^2 - \frac{1}{2}T^6 + \frac{3}{8}T^{10} + o(T^{10})$, soit $g(t) = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{2t^6} + \frac{3}{8t^{10}} + o\left(\frac{1}{t^{10}}\right)$. On peut maintenant écrire $G(t) = -\frac{1}{t} + \frac{1}{10t^5} - \frac{1}{24t^9} + o\left(\frac{1}{t^9}\right)$, puis $f(x) = G(x^2) - G(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{10x^5} + o\left(\frac{1}{x^5}\right)$.

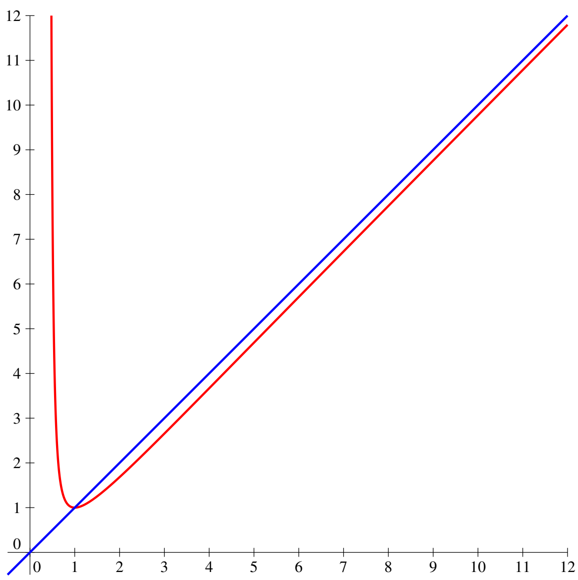


8. Commençons par préciser que $\mathcal{D}_f =]0,1[\cup]1,+\infty[$. Il y a donc trois endroits où on peut étudier le comportement local de f. Commençons par regarder ce qui se passe en 0 : par croissance comparée, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, donc on peut prolonger f par continuité en posant $f(0) = 0$. On ne peut évidemment pas faire de développement limité en 0, pour étudier la dérivabilité éventuelle on va donc tenter d'utiliser le taux d'accroissement. En 0, $\frac{f(x)}{x} = \frac{\ln(x)}{x^2-1}$ a pour limite $+\infty$, donc f admet une tangente verticale en 0 et n'y est pas dérivable. En fait, à défaut de développement limité, les plus curieux feront un développement asymptotique : $f(x) = -x\ln(x) \times \frac{1}{1-x^2} = -x\ln(x)(1+x^2+o(x^2)) = -x\ln(x) + x^3\ln(x) + o(x^3\ln(x))$. Bon, en l'occurence, ça n'a aucun intérêt. En $+\infty$, par contre, c'est un peu pareil : $f(x) \sim \frac{\ln(x)}{x}$ (ce qui permet d'obtenir facilement l'existence d'une asymptote horizontale coïncidant avec l'axe des abscisses), et $f(x) = \frac{\ln(x)}{x} \times \frac{1}{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{\ln(x)}{x}\left(1 + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) =$

$\dfrac{\ln(x)}{x} + \dfrac{\ln(x)}{x^3} + o\left(\dfrac{\ln(x)}{x^3}\right)$. Là encore, ce n'est pas palpitant. Passons maintenant à ce qui se passe en 1. On peut alors poser $x = 1 + h$, avec h qui tend vers 0, pour obtenir $f(1+h) = \dfrac{(1+h)\ln(1+h)}{(1+h)^2 - 1} = \dfrac{(1+h)(h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o(h^3))}{h(2+h)} = \dfrac{(1+h)(1 - \frac{1}{2}h + \frac{1}{3}h^2 + o(h^2))}{2+h} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1 - \frac{1}{2}h + \frac{1}{3}h^2 + h - \frac{1}{2}h^2 + o(h^2)}{1 + \frac{1}{2}h} = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{2}h - \dfrac{1}{6}h^2 + o(h^2)\right)\left(1 - \dfrac{1}{2}h + \dfrac{1}{4}h^2 + o(h^2)\right)$
$= \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{2}h - \dfrac{1}{6}h^2 - \dfrac{1}{2}h - \dfrac{1}{4}h^2 + \dfrac{1}{4}h^2 + o(h^2)\right) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{12}h^2 + o(h^2)$. La fonction f est donc prolongeable en 1 en posant $f(1) = \dfrac{1}{2}$, elle y admet une tangente horizontale, et sa courbe est localement située en-dessous de cette tangente. On aimerait pouvoir étudier les variations de la fonction pour justifier l'allure globale de la courbe ci-dessous, mais la dérivée est franchement moche, donc on s'en abstiendra.



9. Commençons par écrire sous forme exponentielle $f(x) = e^{(1-\frac{1}{x^2})\ln(x)}$, pour en déduire que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^{+*}$. En 0, c'est très rapide, ce qui est dans l'exponentielle est équivalent à $-\dfrac{\ln(x)}{x^2}$, qui a pour limite $+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. Concentrons-nous plutôt sur ce qui se passe en $+\infty$: $f(x) = e^{\ln(x) - \frac{\ln(x)}{x^2}} = \dfrac{x}{e^{\frac{\ln(x)}{x^2}}} = \dfrac{x}{1 + \frac{\ln(x)}{x^2} + \frac{\ln^2(x)}{2x^4} + o(\frac{\ln^2(x)}{x^4})} = x\left(1 - \dfrac{\ln(x)}{x^2} - \dfrac{\ln^2(x)}{2x^4} + \dfrac{\ln^2(x)}{x^4} + o(\frac{\ln^2(x)}{x^4})\right) = x - \dfrac{\ln(x)}{x} + \dfrac{\ln^2(x)}{2x^3} + o(\frac{\ln^2(x)}{x^3})$. On est dans le domaine des développements asymptotiques ici plus que dans celui des développements limités, mais les informations qu'on peut en tirer sont les mêmes : la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe, et celle-ci est localement en-dessous de son asymptote. Là encore, l'étude des variations ne mènerait pas très loin, voici l'allure de la courbe :



Exercice 6 (***)

Comme toujours pour les suites adjacentes, trois points à vérifier. Commençons par le plus facile : $v_n - u_n = \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$ tend certainement vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Ensuite, $u_{n+1} - u_n = n + 1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{1}{k}\right) - n + \sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{1}{k}\right) = 1 - \cos\left(\frac{1}{n+1}\right) \geqslant 0$ puisqu'un cosinus peut difficilement être plus grand que 1. La suite (u_n) est donc croissante. Reste le dernier point, pour lequel, vous vous en doutez, on va recourir à un développement limité : $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \sin\left(\dfrac{1}{n+1}\right) - \sin\left(\dfrac{1}{n}\right) = 1 - \cos\left(\dfrac{1}{n+1}\right) + \sin\left(\dfrac{1}{n+1}\right) - \sin\left(\dfrac{1}{n}\right) = 1 - \cos\left(\dfrac{1}{n} \times \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}\right) + \sin\left(\dfrac{1}{n} \times \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}\right) - \sin\left(\dfrac{1}{n}\right) = 1 - \cos\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) + \sin\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) - \sin\left(\dfrac{1}{n}\right) = 1 - \left(1 - \dfrac{1}{2n^2}\right) + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = -\dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Puisque $v_{n+1} - v_n$ est équivalente à une suite négative, elle est forcément elle-même négative à partir d'un certain rang. Cela suffit à prouver que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite (mais ne me demandez pas quoi, je n'en sais rien !).

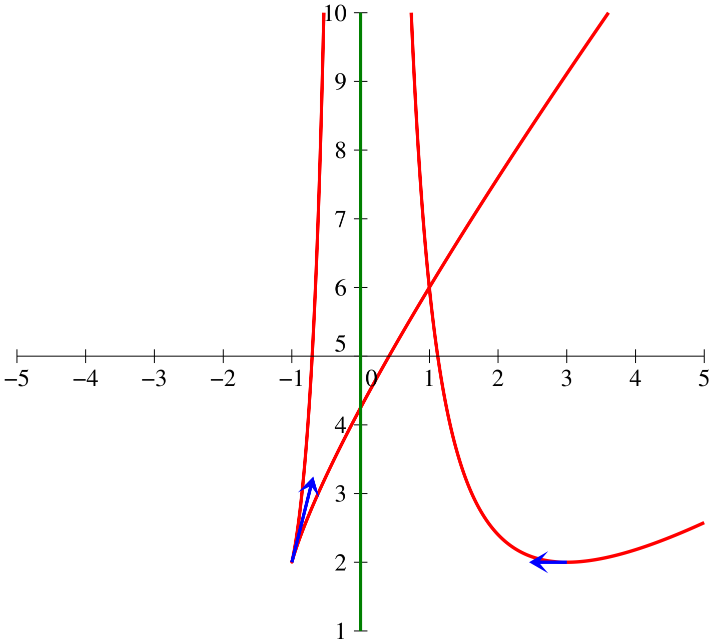
Exercice 7 (**)

1. Le domaine de définition de l'arc paramétré est $\mathbb{R}^*$. Étudions les variations des fonctions coordonnées, qui sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}_f$: $x'(t) = 2t - 2$ s'annule pour $t = 1$; $y'(t) = 2t - \dfrac{2}{t^3} = \dfrac{2(t^4-1)}{t^3} = \dfrac{2(t-1)(t+1)(t^2+1)}{t^3}$. On peut dresser le tableau de variations suivant (le calcul des diverses limites ne pose ici aucun problème puisqu'on ne travaille qu'avec des polynômes) :

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x'(t)$		$-$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
x	$+\infty$	↘	3	↘	$0 \;\|\; 0$	↘	-1	↗	$+\infty$
$y'(t)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty \;\|\; +\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

En 0, l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe. Par ailleurs, $\displaystyle\lim_{t\to\pm\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = 1$, et $\displaystyle\lim_{t\to\pm\infty} y(t) - x(t) = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{1}{t^2} + 2t = \pm\infty$. Il y a donc des deux côtés une branche parabolique de direction asymptotique la première bissectrice.

Étudions enfin le point stationnaire, pour $t = 1$. On peut écrire $x(1+h) = (1+h)^2 - 2(1+h) = 1 + 2h + h^2 - 2 - 2h = -1 + h^2$, et $y(1+h) = (1+h)^2 + \dfrac{1}{(1+h)^2} = 1 + 2h + h^2 + (1 - h + h^2 - h^3 + o(h^2))^2 = 1 + 2h + h^2 + 1 + h^2 - 2h + 2h^2 - 2h^3 - 2h^3 + o(h^3) = 2 + 4h^2 - 4h^3 + o(h^3)$. On déduit de ces deux développements que le vecteur tangent à la courbe au point stationnaire est $\overrightarrow{f''(1)} = (2, 8)$, et comme $\overrightarrow{f'''(1)} = (0, -24)$ n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{f''(1)}$, notre point stationnaire est un point de rebroussement de première espèce. On conclut avec une jolie courbe :

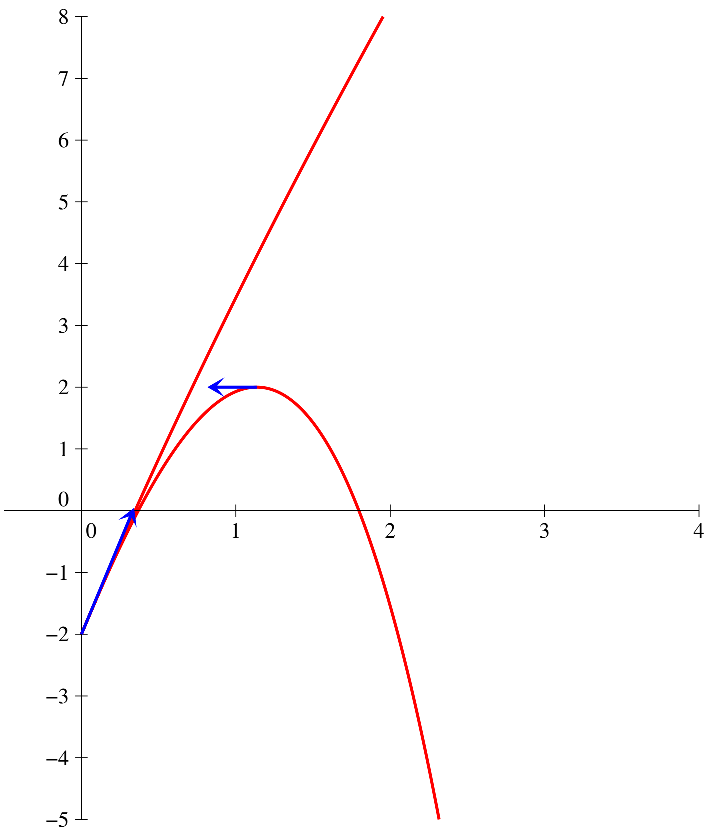


Oh mais il semblerait qu'il y ait un beau point double sur cette courbe ! Essayons de le vérifier par le calcul. Soient t et u deux réels pour lesquels $f(t) = f(u)$, alors $x(t) = x(u)$ implique $t^2 - u^2 = 2t - 2u$, soit $(t-u)(t+u) = 2(t-u)$. En éliminant le cas trivial $t = u$, on trouve la première condition $t + u = 2$. De même, $y(t) = y(u)$ se traduit par $t^2 - u^2 = \dfrac{1}{u^2} - \dfrac{1}{t^2}$, soit $(t-u)(t+u) = \dfrac{(t-u)(t+u)}{t^2u^2}$. En reprenant la condition $t + u = 2 \neq 0$, on trouve alors $t^2u^2 = 1$, soit $tu = \pm 1$. Si $tu = 1$, nos deux valeurs du paramètre ont pour somme 2 et pour produit 1, ils sont solutions de l'équation $x^2 - 2x + 1 = 0$, ce qui donne $t = u = 1$, cas à éliminer. Si au contraire $tu = -1$, nos réels vérifient $x^2 - 2x - 1 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 8$ et admet pour solutions $t = \dfrac{2+\sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2}$, et $u = 1 - \sqrt{2}$. On vérifie alors que $x(t) = x(u) = 1$ (il suffit de reprendre l'équation qu'on vient de résoudre !), puis $y(t) = (1+\sqrt{2})^2 + \dfrac{1}{(1+\sqrt{2})^2} = 3 + 2\sqrt{2} + \dfrac{1}{3+2\sqrt{2}} = 3 + 2\sqrt{2} + \dfrac{3-2\sqrt{2}}{3^2 - (2\sqrt{2})^2} = 6$ (le dénominateur de la fraction valant simplement 1). De même, $y(u) = 3 - 2\sqrt{2} + \dfrac{1}{3-2\sqrt{2}} = 6$. Le point double a donc pour coordonnées $(1, 6)$.

2. Les deux fonctions coordonnées sont définies et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On étudie aisément leur variations : $x'(t) = e^{t-1} - 1$ s'annule pour $t = 1$, et $y'(t) = 3t^2 - 3 = 3(t-1)(t+1)$, dont on déduit le tableau de variations suivant (encore une fois, les calculs de limites sont évidents, c'est à peine s'il y a besoin d'un peu de croissance comparée par endroits) :

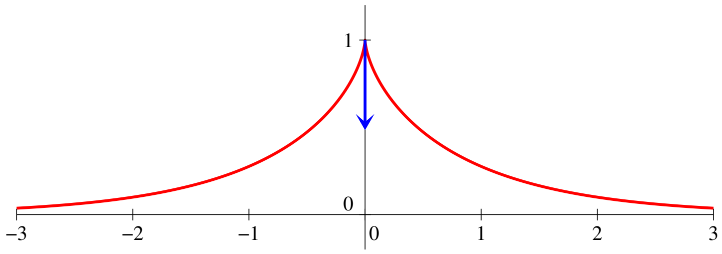
t	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x'(t)$		$-$	||	$-$	0	$+$	
x	$+\infty$	$\searrow$	$e^{-2}+1$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Étudions les branches infinies : $\dfrac{y(t)}{x(t)} \underset{t\to-\infty}{\sim} \dfrac{t^3}{-t} = -t^2$, donc la courbe admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction (Oy). Par contre, $\dfrac{y(t)}{x(t)} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{t^3}{e^{t-1}}$ qui tend violemment vers 0 par croissance comparée, donc il y a en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Ox). Du côté du point stationnaire, $x(1+h) = e^h - 1 - h = \dfrac{1}{2}h^2 + \dfrac{1}{6}h^3 + \dfrac{1}{24}h^4 + o(h^4)$, et $y(1+h) = (1+h)^3 - 3(1+h) = 1 + 3h + 3h^2 + h^3 - 3 - 3h = -2 + 3h^2 + h^3$. En particulier, $\overrightarrow{f''(1)} = (1,6)$ et $\overrightarrow{f'''(1)} = (1,6)$. Ah mince, les deux premiers vecteurs dérivées non nuls sont égaux, heureusement qu'on a poussé le DL à l'ordre 4 ! La dérivée quatrième étant horizontale en 1 (et toutes les suivantes aussi, d'ailleurs), notre point stationnaire est un point de rebroussement de seconde espèce. Voici une allure de la courbe :



3. Les deux fonctions coordonnées sont définies et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On calcule facilement $x'(t) = 1 - (1 - \text{th}^2(t)) = \text{th}^2(t) \geqslant 0$, et $y'(t) = \dfrac{-\text{sh}(t)}{\text{ch}^2(t)}$, qui change de signe en 0. On ne va

même pas se fatiguer à faire un tableau de variations ici, y admet simplement pour maximum 1 en 0, et tend vers 0 en $\pm\infty$. Quant à x, elle tend vers $\pm\infty$, donc l'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe des deux côtés. De plus, la fonction x est impaire et y est paire, donc la courbe sera symétrique par rapporty à l'axe des ordonnées (Oy). Il ne reste qu'à étudier le point stationnaire pour $t = 0$: $x(t) = t - t + \frac{1}{3}t^3 + o(t^3) = \frac{1}{3}t^3 + o(t^3)$, et $y(t) = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)} = 1 - \dfrac{1}{2}t^2 + o(t^2)$. Le vecteur dérivé seconde en 0 est donc vertical, et le vecteur dérivé tierce horizontal, il s'agit d'un point de rebroussement de première espèce. Vous aviez bien évidemment reconnu dans cette courbe la tractrice qui faisait l'objet d'un exercice au contrôle commun de janvier. En voici la courbe :

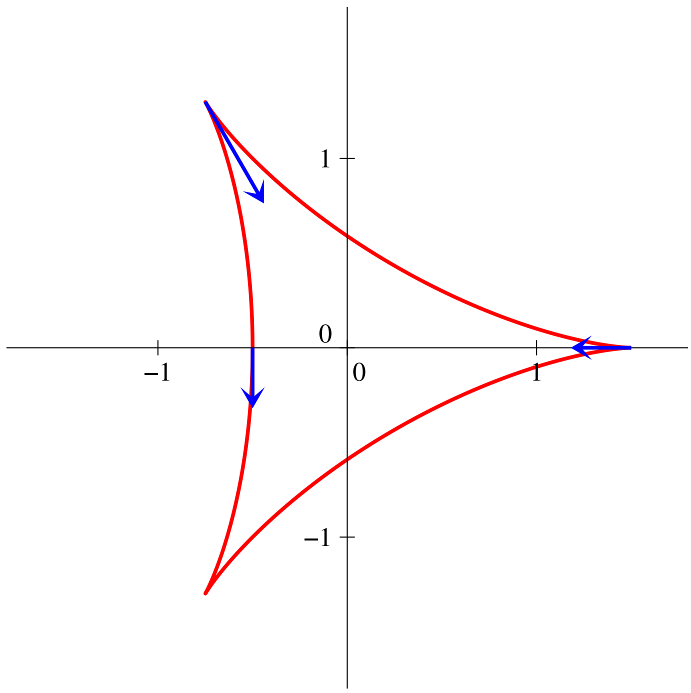


4. Les deux fonctions coordonnées sont évidemment définies et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, elles sont par ailleurs 2π-périodiques et et respectivement paire et impaire, ce qui permet de réduire l'intervalle d'étude à $[0, \pi]$ avant de compléter par symétrie par rapport à l'axe des abscisses. Étudions les variations : $x'(t) = -\sin(t) - \sin(2t) = -\sin(t)(1 + 2\cos(t))$, qui s'annule en 0, en π et en $\dfrac{2\pi}{3}$ (sur notre intervalle d'étude). Par ailleurs, $y'(t) = \cos(t) - \cos(2t) = -2\cos^2(t) + \cos(t) + 1$. Le trinôme $-2x^2 + x + 1$ se factorisant trivialement en $(x-1)(-2x-1)$, cette deuxième dérivée s'annule lorsque $\cos(t) = 1$, soit $t = 0$, ou $\cos(t) = -\dfrac{1}{2}$, soit $t = \dfrac{2\pi}{3}$. Nous aurons donc deux points stationnaires à étudier. Voici en attendant le tableau de variations :

t	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$x'(t)$	0	$-$	0	$+$	0
x	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	$-\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$-\frac{1}{2}$
$y'(t)$	0	$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

Allons-y pour l'étude des points stationnaires, en commençant par 0 : $x(t) = 1 - \dfrac{1}{2}t^2 + \dfrac{1}{2}(1 - 2t^2) + o(t^3) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2}t^2 + o(t^3)$, et $y(t) = t - \dfrac{t^3}{6} - \dfrac{1}{2}\left(2t - \dfrac{8t^3}{6}\right) + o(t^4) = \dfrac{1}{2}t^3 + o(t^4)$. Aucun problème, le vecteur dérivé seconde est horizontal, et le vecteur dérivé tierce est vertical, il y a donc une tangente horizontale, et le point stationnaire est un point de rebroussement de première espèce. C'est évidemment beaucoup plus rigolo en $\dfrac{2\pi}{3}$: à l'aide des formules d'addition, $x\left(\dfrac{2\pi}{3} + h\right) = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3} + h\right) + \dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{4\pi}{3} + 2h\right) = -\dfrac{1}{2}\cos(h) - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin(h) -$

$\dfrac{1}{4}\cos(2h) + \dfrac{\sqrt{3}}{4}\sin(2h) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}h^2 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}h + \dfrac{\sqrt{3}}{12}h^3 - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}h^2 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}h - \dfrac{\sqrt{3}}{3}h^3 + o(h^3) = -\dfrac{3}{4} + \dfrac{3}{4}h^2 - \dfrac{\sqrt{3}}{4}h^3 + o(h^3)$. Par un calcul tout aussi palpitant, $y\left(\dfrac{2\pi}{3} + h\right) = \sin\left(\dfrac{2\pi}{3} + h\right) - \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{4\pi}{3} + 2h\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos(h) - \dfrac{1}{2}\sin(h) + \dfrac{\sqrt{3}}{4}\cos(2h) + \dfrac{1}{4}\sin(2h) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}h^2 - \dfrac{1}{2}h + \dfrac{1}{12}h^3 + \dfrac{\sqrt{3}}{4} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}h^2 + \dfrac{1}{2}h - \dfrac{1}{3}h^3 + o(h^3) = \dfrac{3\sqrt{3}}{4} - \dfrac{3\sqrt{3}}{4}h^2 - \dfrac{1}{4}h^3 + o(h^3)$. Ces sublimes calculs permettent de constater que $\overrightarrow{f''\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)} = \left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ (qui est plus simplement colinéaire à $(1, -\sqrt{3})$) et $\overrightarrow{f'''\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)} = \left(-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{3}{2}\right)$ (qui, ouf, n'est pas colinéaire au précédent). On a ici aussi un point de rebroussement de première espèce. On peut conclure avec la courbe :



TD n°12 : révisions diverses.

PTSI B Lycée Eiffel

24 mai 2013

Exercice

Le but de cet exercice est d'étudier dans quelques cas, l'existence d'une racine carrée pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire d'une matrice B vérifiant $B^2 = A$.

1. Commençons par étudier des cas particuliers dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on note $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$. Calculer $(R_\theta)^2$, et en déduire que la matrice I_2 admet une infinité de racines carrées. Donner les éléments caractéristiques de l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ représentée par la matrice R_θ dans la base canonique.
   (b) Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'admet pas de racine carrée.
2. On retourne au cas général, mais en supposant cette fois-ci que $A - I$ est une matrice nilpotente d'ordre 4 (autrement dit, que $(A - I)^4 = 0$).
   (a) Rappeler le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\sqrt{1+t}$, en déduire qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $1 + X = (a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3)^2 + X^4Q(X)$.
   (b) Prouver que la matrice A admet une racine carrée, calculer explicitement une racine carrée de la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 & 5 \\ 8 & -5 & -11 & -14 \\ 15 & -7 & -15 & -20 \\ -18 & 9 & 20 & 26 \end{pmatrix}$.
3. On suppose désormais que la matrice A est celle dans la base canonique d'une application linéaire f admettant dans une autre base $\mathcal{B}$ une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont deux à deux distincts.
   (a) Montrer que, si B est une racine carrée de A, l'application g ayant pour matrice B dans la base canonique commute avec f.
   (b) Montrer que la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$ est nécessairement diagonale.
   (c) En déduire que A admet 2^n racines carrées distinctes, et expliquer comment les obtenir à partir de la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ et de la matrice de passage de la base canonique vers $\mathcal{B}$.

Problème

On considère, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, les applications $f_n : x \mapsto \dfrac{x^n e^{-x}}{n!}$, et $L_n : x \mapsto e^x f_n^{(n)}(x)$.

I. Relations sur les polynômes L_n.

1. Calculer L_0, L_1 et L_2.
2. Montrer que $L_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k$, en déduire que L_n est un polynôme dont on précisera le degré et le coefficient dominant.
3. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f'_{n+1}(x) = f_n(x) - f_{n+1}(x)$, en déduire que $L'_{n+1}(x) = L'_n(x) - L_n(x)$.
4. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(x) = \dfrac{x}{n+1} f_n(x)$, en déduire que $(n+1)L_{n+1}(x) = xL'_n(x) + (n+1-x)L_n(x)$.
5. Établir que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $xL''_n(x) - (x-1)L'_n(x) + nL_n(x) = 0$.

II. Un produit scalaire et une application sur $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Pour tous polynômes P et Q, on note $\varphi(P, Q) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n P(x)Q(x)e^{-x}\, dx$ (on admet que cette limite existe toujours). Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$, on notera désormais $\varphi(P, Q) = P.Q$.
2. On considère désormais l'application $f : P \mapsto XP'' - (X-1)P'$, montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
3. Montrer que, pour tout polynôme P, l'application $x \mapsto f(P)(x)e^{-x}$ est la dérivée de l'application $x \mapsto xP'(x)e^{-x}$.
4. En déduire que $f(P).Q = -\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n xP'(x)Q'(x)e^{-x}\, dx$.
5. Montrer que, quels que soient les polynômes P et Q, $f(P).Q = P.f(Q)$.
6. En utilisant les résultats de la première partie, calculer $f(L_n)$.
7. En déduire que la famille $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est orthogonale.
8. Montrer que, $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. On continue désormais à noter f la restriction à $\mathbb{R}_n[X]$ de l'application f initiale.
9. Montrer que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, et donner la matrice de f dans cette base.
10. L'application f est-elle bijective ? Peut-on trouver une base dans laquelle sa matrice est diagonale ?

Corrigé du TD n°12

Exercice

1. (a) On calcule sans difficulté, en exploitant la relation $\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta) = 1$, $R_\theta^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$. Toutes les matrices R_θ sont donc racines carrées de I, et il y en a une infinité puisque les valeurs de $\cos(\theta)$, par exemple, parcourent tout l'intervalle $[-1, 1]$. Les matrices R_θ sont par ailleurs des matrices de symétrie. Pour déterminer par rapport à quoi, on cherche les vecteurs invariants : $R_\theta \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} \cos(\theta)x & + & \sin(\theta)y & = & x \\ \sin(\theta)x & - & \cos(\theta)y & = & y \end{array} \right.$. Si $\theta \not\equiv \pi[2\pi]$, $\cos(\theta) + 1 \neq 0$, et on peut extraire de la deuxième équation $y = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)+1}x$. En reportant dans la première, $\cos(\theta)x + \sin(\theta)y = \dfrac{\cos(\theta)(1+\cos(\theta)) + \sin^2(\theta)}{1+\cos(\theta)}x = \dfrac{1+\cos(\theta)}{1+\cos(\theta)}x = x$, et l'équation est donc toujours vérifiée. On effectue donc une symétrie par rapport à la droite d'équation $y = \dfrac{\sin(\theta)}{1+\cos(\theta)}x$. Si $\theta \equiv \pi[2\pi]$, on trouve simplement comme condition $x = 0$, la symétrie s'effectue par rapport à l'axe des ordonnées. Cherchons maintenant parallèlement à quoi on symétrise, en résolvant le système $\left\{ \begin{array}{rcrcl} \cos(\theta)x & + & \sin(\theta)y & = & -x \\ \sin(\theta)x & - & \cos(\theta)y & = & -y \end{array} \right.$. Cette fois, c'est la valeur $\theta \equiv 0[2\pi]$ qui est particulière, et qui mène à l'axe des ordonnées. Sinon, la deuxième équation donne $y = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)-1}x$, et l'autre équation est à nouveau vérifiée (c'est normal, les deux espaces étant supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$, ils sont chacun de dimension 1). On constate que la symétrie est toujours une symétrie orthogonale, puisque nos deux droites sont dirigées respectivement par $(\cos(\theta)+1, \sin(\theta))$ et par $(\cos(\theta)-1, \sin(\theta))$, deux vecteurs dont le produit scalaire vaut $\cos^2(\theta) - 1 + \sin^2(\theta)) = 0$.

   (b) Cherchons donc une racine carrée de A sous la forme $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on calcule $B^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$. La condition $ab + bd = 1$ impose que $a + d \neq 0$, ce qui implique à son tour, puisque $ac + cd = 0$, que $c = 0$. En regardant les coefficients diagonaux, on obtient alors $a^2 = d^2 = 0$, donc $a = d = 0$, ce qui contredit fortement le fait que $a + d \neq 0$. Il ne peut donc y avoir de racine carrée pour la matrice A (même pas dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ d'ailleurs, où le même raisonnement par l'absurde fonctionne).

2. (a) Bon, c'est du cours : $\sqrt{1+t} = 1 + \dfrac{1}{2}t - \dfrac{1}{8}t^2 + \dfrac{1}{16}t^3 + o(t^3)$. En élevant le tout au carré, on trouve donc $1 + t \underset{t\to 0}{=} \left(1 + \dfrac{1}{2}t - \dfrac{1}{8}t^2 + \dfrac{1}{16}t^3\right)^2 + o(t^3)$. Or, ce qui se cache derrière le $o(t^3)$ est nécessairement un polynôme, et même un polynôme de degré au plus 6, puisqu'il est obtenu en faisant la différence du membre de gauche et du carré de la parenthèse. Ce polynôme ne peut avoir de terme constant, ou de degré 1, 2 ou 3, sinon il ne serait pas négligeable devant t^3 quand t tend vers 0. Il peut donc s'écrire sous la forme $a_4t^4 + a_5t^5 + a_6t^6 = t^4Q(t)$, où t est un polynôme de degré au plus 2 qu'on ne cherchera pas à expliciter. Puisqu'on est désormais en présence d'une égalité entre polynômes, elle est tout le temps valable, et on peut écrire plus généralement $(1 + X) = \left(1 + \dfrac{1}{2}X - \dfrac{1}{8}X^2 + \dfrac{1}{16}X^3\right)^2 + X^4Q(X)$.

   Les plus bourrins d'entre vous pouvaient également calculer brutalement

$1+t-\left(1+\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}t^2+\frac{1}{16}t^3\right)^2=1+t-1-\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{64}t^4-\frac{1}{256}t^6-t+\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{8}t^3+\frac{1}{8}t^3-\frac{1}{16}t^4+\frac{1}{64}t^5=-\frac{5}{64}t^4+\frac{1}{64}t^5-\frac{1}{256}t^6$, qui est bien de la forme souhaitée.

(b) En appliquant ce qui précède à la matrice $A-I$, on trouve $I+(A-I)=\left(I+\frac{1}{2}(A-I)-\frac{1}{8}(A-I)^2+\frac{1}{16}(A-I)^3\right)+(A-I)^4Q(A-I)$. Puisque le membre de gauche est égal à A et que $(A-I)^4$ est supposée nulle, la matrice $B=I+\frac{1}{2}(A-I)-\frac{1}{8}(A-I)^2+\frac{1}{16}(A-I)^3$ est donc une racine carrée de A. Dans le cas concret présenté ensuite, on calcule (de préférence à la calculatrice) : $(A-I)^2=\begin{pmatrix}-5&-1&2&2\\15&3&-6&-6\\19&4&-7&-7\\-24&-5&9&9\end{pmatrix}$, puis $(A-I)^3=\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\-3&0&3&3\\-4&0&4&4\\5&0&-5&-5\end{pmatrix}$ et enfin $(A-I)^4=0$, et on obtient ensuite $B=\begin{pmatrix}\frac{3}{16}&\frac{9}{8}&\frac{27}{16}&\frac{35}{16}\\\frac{31}{16}&-\frac{19}{8}&-\frac{73}{16}&-\frac{97}{16}\\\frac{39}{8}&-4&-\frac{47}{8}&-\frac{71}{8}\\-\frac{91}{16}&\frac{41}{8}&\frac{137}{16}&\frac{193}{16}\end{pmatrix}$. On vérifie bien sûr « facilement » que $B^2=A$ comme prévu.

3. (a) La relation $B^2=A$ se traduit par $g\circ g=f$, donc $g\circ f=f\circ g=g^3$, les deux applications commutent.

(b) Il suffit en fait de constater qu'une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont deux à deux distincts ne commute qu'avec les matrices diagonales. En effet, si on note $d_1,\ \dots,\ d_n$ les coefficients sur la diagonale de la matrice diagonale de f dans une bonne base (on notera cette matrice diagonale D), et si on note $M=(m_{ij})$ une matrice telle que $m_{ij}\neq 0$ pour un certain couple vérifiant $i\neq j$, alors $(DM)_{ij}=d_im_{ij}$, et $(MD_{ij})=m_{ij}d_j$, qui ne peuvent être égaux. La matrice C de g dans la base où f est représentée par D est donc diagonale.

(c) Si on veut avoir $g^2=f$, il faut nécessairement que $C^2=D$, c'est-à-dire, en notant c_i les coefficients diagonaux de C (les autres sont nuls !) que $c_i^2=d_i$ pour chaque coeffient. Il y a une grosse imprécision dans l'énoncé, si on est effectivement dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il faut absolument que les coefficients d_i soient strictement positifs pour que ça marche. On peut alors choisir $c_i=\pm\sqrt{d_i}$, ce qui laisse effectivement 2^n matrices C possibles. Reste à revenir dans la base canonique. On sait que $D=P^{-1}AP$ pour une certaine matrice inversible P, et $C^2=D$. On peut alors constater que la condition $B^2=A$ est équivalente à $P^{-1}B^2P=D$, soit $(P^{-1}BP)^2=D$. Autrement dit, $P^{-1}BP$ doit être une des matrices C qu'on vient d'obtenir, c'est-à-dire que $B=PCP^{-1}$, ce qui donne également 2^n matrices B convenables.

Problème

I. Relations sur les polynômes L_n.

1. Calculons : $L_0(x) = e^x f_0(x) = e^x e^{-x} = 1$; $f_1(x) = xe^{-x}$, donc $f_1'(x) = (1-x)e^{-x}$ et $L_1 = 1 - X$; enfin, $f_2(x) = \dfrac{x^2}{2}e^{-x}$ donc $f_2'(x) = \left(x - \dfrac{x^2}{2}\right)e^{-x}$, $f_2''(x) = \left(1 - x - x + \dfrac{x^2}{2}\right)e^{-x}$, et enfin $L_2 = 1 - 2X + \dfrac{1}{2}X^2$.

2. On peut appliquer la formule de Leibniz au produit $\dfrac{x^n}{n!} \times e^{-x}$. Les dérivées successives de e^{-x} sont simplement de la forme $(-1)^k e^{-x}$, celles de $\dfrac{x^n}{n!}$ peuvent s'écrire $\dfrac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n!}x^{n-k} = \dfrac{x^{n-k}}{(n-k)!}$ (pour la dérivée k-ème). On en déduit que $f_n^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e^{-x})^{(k)} \left(\frac{x^n}{n!}\right)^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k!} x^k e^{-x}$, d'où la formule pour L_n. Il s'agit bien d'un polynôme, manifestement de degré n et de coefficient dominant $\dfrac{(-1)^n}{n!}$ (c'est cohérent avec les calculs effectués à la première question).

3. Un calcul gentil pour commencer, une dérivée de produit : $f_{n+1}'(x) = \dfrac{x^n}{n!}e^{-x} - \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{-x} = f_n(x) - f_{n+1}(x)$. Dérivons cette égalité $n+1$ fois et multiplions par e^x pour obtenir $e^x f_{n+1}^{(n+2)}(x) = e^x f_n^{n+1}(x) - e^x f_{n+1}^{(n+1)}(x)$. On reconnait dans le dernier terme $L_{n+1}(x)$, mais les deux premiers ne sont pas directement identifiables : $f_{n+1}^{(n+2)}(x) = (e^{-x}L_{n+1}(x))' = -e^{-x}L_{n+1}(x) + e^{-x}L_{n+1}'(x)$. De même, $e^x f_n^{(n+1)}(x) = L_n'(x) - L_n(x)$, et notre relation devient $L_{n+1}' - L_{n+1} = L_n' - L_n - L_{n+1}$, ce qui correspond bien à ce qui est demandé.

4. La première moitié du calcul est encore plus facile que ci-dessus : $\dfrac{x}{n+1} \times \dfrac{x^n}{n!}e^{-x} = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{-x}$, ça marche. On dérive cette identité n fois et on utilise le même calcul que ci-dessus (pour le membre de droite, on applique la formule de Leibniz) : $f_{n+1}^{(n+1)}(x) = \dfrac{x}{n+1}f_n^{(n+1)}(x) + (n+1) \times \dfrac{1}{n+1}f_n^{(n)}(x)$. On multiplie tout par $(n+1)e^x$: $(n+1)L_{n+1}(x) = x(L_n'(x) - L_n(x)) + (n+1)L_n(x)$, soit $(n+1)L_{n+1}(x) = xL_n'(x) + (n+1-x)L_n(x)$.

5. Il faut mixer les deux relations précédentes : si on dérive celle qu'on vient d'obtenir, $(n+1)L_{n+1}'(x) = L_n'(x) + xL_n''(x) + (n+1-x)L_n'(x) - L_n(x)$. Remplaçons maintenant $L_{n+1}'(x)$ par $L_n'(x) - L_n(x)$ (relation de la question 3), pour obtenir $(n+1)L_n'(x) - (n+1)L_n(x) = xL_n''(x) + (n+2-x)L_n'(x) - L_n(x)$, soit en effet $xL_n''(x) + (1-x)L_n'(x) + nL_n(x) = 0$.

II. Un produit scalaire et une application sur $\mathbb{R}_n[X]$.

1. L'application φ est clairement symétrique, contentons-nous de vérifier la linéarité à gauche : $\varphi(\lambda P_1 + \mu P_2, Q) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n (\lambda P_1(x) + \mu P_2(x))Q(x)e^{-x}\,dx = \lambda \lim_{n\to+\infty} \int_0^n P_1(x)Q(x)e^{-x}\,dx + \mu \lim_{n\to+\infty} \int_0^n P_2(x)Q(x)e^{-x}\,dx$ par linéarité de l'intégrale et du calcul de limites. L'application φ esyt positive car $\varphi(P,P)$ est une limite d'intégrales de fonctions positives, donc positive. Supposons que $\varphi(P,P) = 0$. Cela signifie que la suite définie par $u_n = \displaystyle\int_0^n P^2(x)e^{-x}\,dx$ tend vers 0, alors qu'elle est consituée de réels positifs et surtout croissante (en effet, $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} P^2(x)e^{-x}\,dx \geqslant 0$). La suite est donc nulle, ce qui impose la nullité de P^2 sur tous les

intervalles de la forme $[0, n]$, ce qui fait vraiment braucoup trop de racines pour un polynôme. L'application φ est donc définie positive, c'est bien un produit scalaire.

2. C'est évident, $f(P)$ est toujours un polynôme et $f(\lambda P + \mu Q) = X(\lambda P + \mu Q)'' - (X-1)(\lambda P + \mu Q)' = \lambda X P'' + \mu X Q'' - \lambda(X-1)P' - \mu(X-1)Q' = \lambda f(P) + \mu f(Q)$ par linéarité de la dérivation.
3. Dérivons donc : $(xP'(x)e^{-x})' = P'(x)e^{-x} + xP''(x)e^{-x} - xP'(x)e^{-x} = f(P)(x)e^{-x}$.
4. Il suffit de faire une intégration par parties dans la définition de $f(P).Q$, en posant $v'(x) = f(P)(x)e^{-x}$, donc $v(x) = xP'(x)e^{-x}$ d'après la question précédente ; et $u(x) = Q(x)$, soit $u'(x) = Q'(x)$. On trouve alors $f(P).Q = \lim\limits_{n\to+\infty} [xP'(x)Q(x)e^{-x}]_0^n - \lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^n xP'(x)Q'(x)e^{-x}\,dx$. Le crochet s'annule en 0, et a une limite nulle quand n tend vers $+\infty$ par croissance comparée. Il ne reste donc que le deuxième terme, ce qui correspond à la formule de l'énoncé.
5. La formule obtenue à la question précédente est symétrique en P et Q, ce qui prouve que $P.f(Q) = f(Q).P = f(P).Q$.
6. Encore une question triviale : $f(L_n) = XL_n'' - (X-1)L_n' = -nL_n$ d'après la dernière question de la première partie.
7. Appliquons le résultat de la question 6 à L_n et L_p, pour des valeurs distinctes de n et p : $f(L_n).L_p = (-nL_n).L_p = -nL_n.L_p$, et $L_n.f(L_p) = L_n.(-pL_p) = -pL_n.L_p$. Si ces deux quantités sont égales, on doit avoir $L_n.L_p$, ce qui prouve l'orthogonalité de la famille.
8. C'est encore assez évident, le degré de XP'' est plus petit que celui de P, celui de $(X-1)P'$ ne peut pas être plus grand, donc $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$ si $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
9. Il suffit de dire que $(L_0, \dots, L_n)$ est une famille de polynômes échelonnée pour en déduire qu'il s'agit d'une base. Puisqu'on a prouvé un tout petit peu plus haut que $f(L_n) = -L_n$, la matrice de f dans cette base est la matrice diagonale $\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & -2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -n \end{pmatrix}$.
10. L'application n'est pas bijective, plus précisément $\ker(f) = \mathrm{Vect}(L_0)$. Quant à trouver une base dans laquelle la matrice est diagonale, on se moque du monde, on vient d'en donner une !

Feuille d'exercices n°18 : Géométrie euclidienne

PTSI B Lycée Eiffel

28 mai 2013

Exercice 1 (*)

Déterminer parmi les applications suivantes celles qui sont des produits scalaires. Le cas échéant, donner une base orthonormale de l'espace considéré pour ce produit scalaire (si l'espace est de dimension finie, bien entendu).

1. $\varphi((x,y),(x',y')) = 2xx' + 5yy' - xy' - x'y$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. $\varphi(f,g) = \displaystyle\int_0^1 f(t)g'(t) + f'(t)g(t)\ dt$ sur $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$
3. $\varphi(f,g) = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t) + f'(t)g'(t)\ dt$ sur $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$
4. $\varphi(P,Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$ sur $\mathbb{R}_2[X]$ et sur $\mathbb{R}_3[X]$.
5. $\varphi(P,Q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_k q_k$ sur $\mathbb{R}_n[x]$, où p_k désigne le coefficient du terme de degré k du polynôme P.

Exercice 2 (*)

Vérifier que $\varphi(f,g) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\ dt$ définit un produit scalaire sur l'ensemble des fonctions continues et 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$. On note $f_k(x) = \cos(kx)$ et $g_k(x) = \sin(kx)$ pour tout entier $k \geqslant 1$. Vérifier que la famille $(f_1, f_2, \dots, f_n, g_1, g_2, \dots, g_n)$ est orthonormale pour toute valeur de n.

Exercice 3 (**)

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. On définit sur E l'application $\varphi : (P,Q) \mapsto P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$.

1. Vérifier que (E,φ) est un espace euclidien.
2. On pose $F = \mathrm{Vect}(X^2+1)$, déterminer $F^\perp$.
3. Par le procédé de Gram-Schmidt, déterminer une base orthonormée de E.
4. Déterminer $G^\perp$ lorsque $G = \mathbb{R}_1[X]$ puis la distance de X^2 à G.

Exercice 4 (***)

On définit, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction h_n par $h_n(t) = nt^n\sqrt{1-t^2}$.

1. Déterminer, pour tout réel $t \in [0,1]$, la limite de $h_n(t)$ lorsque n tend vers $+\infty$. Peut-on en déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 h_n(t)\ dt$? Si vous pensez que oui, calculez $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 n^3te^{-nt}\ dt$ et réflechissez à nouveau.

2. Déterminer les variations de h_n, et donner un équivalent simple de son maximum sur $[0,1]$. Peut-on désormais en déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 h_n(t)\ dt$?
3. On définit $\varphi_n(f,g) = \int_0^1 t^n f(t)g(t)\ dt$ sur $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Montrer que φ_n est un produit scalaire pour tout entier $n \geqslant 1$, et en appliquant intelligemment l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour déterminer la limite qui nous embête depuis le début de cet exercice.

Exercice 5 (*)

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, on définit la droite F par les deux équations $x+2y-z = 2x-y = 0$. Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur F dans la base canonique. Calculer la distance du vecteur $(1,1,1)$ à F.

Exercice 6 (*)

Montrer que la matrice $M = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ est la matrice d'une projection orthogonale sur un plan de $\mathbb{R}^3$ qu'on déterminera.

Exercice 7 (**)

On se place dans $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire $P.Q = \sum\limits_{i=0}^{3} p_i q_i$, où p_i désigne le coefficient du terme de degré i de P.

1. Montrer que $\{P \in E \mid P(1) = 0\}$ est un hyperplan de E, déterminer son orthogonal.
2. Déterminer le projeté orthogonal de X^3 sur H, en déduire la distance de X^3 à H.

Exercice 8 (**)

Soit $A = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 & -4 & 4 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{pmatrix}$. Déterminer tout ce que vous pouvez sur l'endomorphisme représenté par A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Donner la matrice dans la base canonique (i,j,k) de $\mathbb{R}^3$ de la rotation d'axe $\mathrm{Vect}(i+j+k)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 9 (***)

On définit sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'application $\varphi : (A,B) \mapsto \mathrm{Tr}({}^tAB)$.

1. Vérifier qu'il s'agit d'un produit scalaire.
2. Montrer que les sous-espaces constitués des matrices symétriques et antisymétriques sont des supplémentaires orthogonaux pour ce produit scalaire.
3. Montrer que, $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $(\mathrm{Tr}(AB))^2 \leqslant \mathrm{Tr}(A^2)\,\mathrm{Tr}(B^2)$.
4. Montrer que, $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $|\,\mathrm{Tr}(M)| \leqslant \sqrt{n}\ \|\ M\ \|$.
5. Montrer que, si A est orthogonale, alors $|\,\mathrm{Tr}(A)| \leqslant n$. La réciproque est-elle vraie ?
6. Calculer la distance de la matrice A dont les coefficients sont $a_{i,j} = i$ au sous-espace vectoriel constitué des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Corrigé de la feuille d'exercices n°18

Exercice 1 (*)

1. L'application φ est assez clairement symétrique, elle est linéaire à gauche puisque $\varphi((\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2), (x', y')) = 2(\lambda x_1 + \mu x_2)x' + 5(\lambda y_1 + \mu y_2)y' - (\lambda x_1 + \mu x_2)y' - x'(\lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda(2x_1x' + 5y_1y' - x_1y' - x'y_1) + \mu(2x_2x' + 5y_2y' - x_2y' - x'y_2) = \lambda\varphi((x_1, y_1), (x', y')) + \mu\varphi((x_2, y_2), (x', y'))$. Puisqu'elle est symétrique, la linéarité sera aussi vérifiée à droite, et l'application est donc bilinéaire. Par ailleurs, $\varphi((x, y), (x, y)) = 2x^2 + 5y^2 - 2xy = x^2 + 4x^2 + x^2 - 2xy + y^2 = x^2 + 4y^2 + (x - y)^2$. Cette quantité est manifestement toujours positive, et ne s'annule que si $x = y = 0$ (et accessoirement $x - y = 0$, ce qui est impliqué par les deux premières conditions). L'application φ est donc définie positive, c'est un produit scalaire.

   Pour déterminer une base orthonormale pour φ, il suffit d'appliquer le procédé de Gram-Schmidt à partir de la base canonique $((1, 0); (0, 1))$ de $\mathbb{R}^2$. Commençons par normer $(1, 0)$: $\varphi((1, 0); (1, 0)) = 2$, donc $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ est un vecteur normé pour le produit scalaire φ. On calcule ensuite $(0, 1) - \varphi\left((0, 1); \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)\right) \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = (0, 1) - \left(\frac{1}{2}, 0\right) = \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$. Reste à normer ce vecteur : $\varphi\left(\left(-\frac{1}{2}, 1\right), \left(-\frac{1}{2}, 1\right)\right) = \frac{1}{2} + 5 + 1 = \frac{13}{2}$ donc $\left(-\frac{1}{\sqrt{26}}, \sqrt{\frac{2}{13}}\right)$ est un vecteur normé pour φ. une base orthonormale est donc $\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right); \left(-\frac{1}{\sqrt{26}}, \sqrt{\frac{2}{13}}\right)\right)$.

2. L'application est facilement symétrique, et elle est bilinéaire par linéarité de la dérivation et de l'intégration. Par contre, elle n'a aucune raison d'être positive, et encore moins définie positive : $\varphi(f, f) = \int_0^1 2f(t)f'(t)\,dt = [f^2(t)]_0^1 = f(1)^2 - f(0)^2$. Si on prend par exemple $f(x) = x - 1$, $\varphi(f, f) = -1$. Il ne s'agit donc pas d'un produit scalaire.

3. Oui, certes, ça ressemble au précédent. L'application est là aussi symétrique et bilinéaire (pour les mêmes raisons), mais cette fois-ci elle est en plus définie positive : $\varphi(f, f) = \int_0^1 f^2(t) + f'(t)^2\,dt$ est l'intégrale d'une fonction positive, donc toujours positif. De plus, cette quantité ne peut s'annuler que si la fonction continue $f^2 + f'^2$ est toujours nulle sur $[0, 1]$, ce qui ne se produit que si $\forall t \in [0, 1]$, $f(t) = f'(t) = 0$. Il s'agit donc d'un produit scalaire. Pas question ici de parler de base orthonormale, l'espace considéré est de dimension infinie.

4. L'application φ (quel que soit l'espace sur laquelle on la considère) est clairement symétrique et bilinéaire. De plus, $\varphi(P, P) = P(0)^2 + P(1)^2 + P(2)^2 \geqslant 0$. C'est au niveau de la positivité que se situe la différence : si $\varphi(P, P) = 0$, alors $P(0) = P(1) = P(2) = 0$, ce qui implique $P = 0$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ (un polynôme de degré 2 ayant trois racines distinctes est nécessairement nul) mais pas dans $\mathbb{R}_3[X]$. Par exemple, $P = X(X - 1)(X - 2) = X^3 - 3X^2 + 2X$ vérifie $\varphi(P, P) = 0$. L'application φ est donc un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$ mais pas sur $\mathbb{R}_3[X]$. Cherchons une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire en appliquant une fois de plus le procédé de Gram-Schmidt à la base canonique. On commence par calculer $\varphi(1, 1) = 3$, donc le ponynôme constant $\frac{1}{\sqrt{3}}$ est normé pour φ. Ensuite, on pose $P_2 = X - \frac{1}{\sqrt{3}}\varphi(X, 1) \times \frac{1}{\sqrt{3}} = X - \frac{1}{3}(1+2) = X - 1$. On norme ensuite en calculant $\varphi(X-1, X-1) = 1+0+1 = 2$. Le deuxième polynôme de notre base sera donc $\frac{1}{\sqrt{2}}X - \frac{1}{\sqrt{2}}$. Dernière étape, on calcule $P_3 = X^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi(X^2, X) \times \frac{1}{\sqrt{2}}(X - 1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\varphi(X^2, 1) \times \frac{1}{\sqrt{3}} = X^2 - \frac{1}{2}(0+0+8)(X-1) - \frac{1}{3}(0+1+4) = X^2 - 4X + \frac{8}{3}$. Il ne reste plus qu'à normer : $\varphi(P_3, P_3) = \left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{81}{9} = 9$. Tiens, notre polynôme est de norme

3 pour ce produit scalaire, on peut donc prendre pour compléter notre base $\frac{1}{3}X^2 - \frac{4}{3}X + \frac{8}{9}$.
Conclusion : une base orthonormée pour φ est $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{2}}X - \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{3}X^2 - \frac{4}{3}X + \frac{8}{9}\right)$.

5. L'application φ est très certainement symétrique, et également bilinéaire (il suffit de constater que l'application qui à deux polynômes associe p_0q_0 est bilinéaire, et de même pour chacun des autres coefficients). De plus, $\varphi(P,P) = \sum_{k=0}^{n} p_k^2$ estcertainement positifs, et ne peut s'annuler que si tous les coefficients du polynôme sont nuls, donc si P est nul. L'application φ est un produit scalaire. Pour trouver une base orthonormale, il faut d'abord choisir une valeur de n. Faisons le calcul dans $\mathbb{R}_2[X]$ pour ne pas trop se fatiguer. Comme toujours, on part de la base canonique. Le polynôme constant égal à 1 est déjà normé, on peut le garder tel quel. On calcule alors $X - \varphi(X,1)1 = X$. Ah ben, il est lui aussi normé, c'est fou. Bon, en fait, on pouvait se dispenser de poser $n = 2$, la base canonique est toujours orthonormale pour ce produit scalaire. En effet, les polynômes qui la constituent sont orthogonaux puisqu'ils n'ont qu'un coefficient non nul, et pas pour le même degré. Ils sont par ailleurs normés.

Exercice 2 (*)

Le fait que l'application est symétrique et bilinéaire ne pose aucun problème. Elle est par ailleurs positive puisque $\varphi(f,f) = \int_0^{2\pi} f^2(t)\ dt$ est certainement positif, et ce réel est nul seulement si la fonction continue f^2 s'annule sur tout l'intervalle $[0, 2\pi]$. Comme f est supposée 2π-périodique, elle est alors nulle sur $\mathbb{R}$ tout entier. L'application φ est donc un produit scalaire, qu'on notera simplement par un point pour les calculs suivants pour alléger les notations. Vérifions que toutes les fonctions de la famille sont normées : $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2(kx)\ dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2kx)}{2}\ dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(2kx)}{4k}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi} \times \pi = 1$. On a simplement utilisé pour ce calcul la formule de duplication $\cos(2kx) = 2\cos^2(kx) - 1$ pour écrire $\cos^2(kx) = \frac{1+\cos(2kx)}{2}$. De même, on exploitera $\cos(2kx) = 1 - 2\sin^2(kx)$ pour écrire $\sin^2(kx) = \frac{1-\cos(2kx)}{2}$ et prouver que $g_k.g_k = 1$. Toutes nos fonctions ont donc bien une norme égale à 1. Rest à vérifier qu'elles sont orthogonales. Commençons par vérifier que $f_i.f_j = 0$ lorsque $i \neq j$. Pour cela, le plus rapide est d'utiliser les formules de transformation somme-produit : $\cos(ix) \times \cos(jx) = \frac{1}{2}(\cos((i-j)x) + \cos((i+j)x))$, dont l'intégrale s'annule effectivement entre 0 et 2π (pusique les primitives seront toujours des sinus de multiples de x). De même, pour le calcul de $g_i.g_j$, la formule $\sin(ix)\sin(jx) = \frac{1}{2}(\cos((i-j)x) - \cos((i+j)x))$ donnera une intégrale nulle. Enfin, le produit scalaire $f_i.g_j$ (ici, i et j ont le droit d'être égaux) se calcule en exploitant $\cos(ix)\sin(jx) = \frac{1}{2}(\sin((i+j)x) + \sin((i-j)x))$, donc $f_i.g_j = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\cos((i+j)x)}{i+j} - \frac{\cos((i-j)x)}{i-j}\right]_0^{2\pi}$. Cette intégrale est tout autant nulle que les précédentes puisqu'elle ne fait intervenir que des fonctions 2π-périodiques. Attention tout de même, dans le cas où $i = j$, le deuxième terme est simplement nul, la forme donnée pour la primitive dans l'intégrale est alors incorrecte. La famille est donc bien orthonormale, vous l'étudierez plus en détail l'an prochain lors de votre cours sur les séries de Fourier.

Notons que les formules somme-produit ne sont pas indispensables pour les calculs, on peut faire une double intégration par parties. Par exemple, $\pi \times f_i.f_j = \int_0^{2\pi} \cos(ix)\cos(jx)\ dx = \left[\frac{\sin(ix)}{i}\cos(jx)\right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{\sin(ix)}{i} \times j\sin(jx)\ dx = 0 + \frac{j}{i}\left[-\frac{\cos(ix)}{i}\sin(jx)\right] + \frac{j}{i}\int_0^{2\pi} \frac{\cos(ix)}{x} \times j\cos(jx)\ dx = \frac{j^2}{i^2} \times \pi f_i.f_j$. Le produit scalaire est donc nécessairement nul si $i \neq j$ (sinon, on ne peut rien conclure de ce calcul).

Exercice 3 (**)

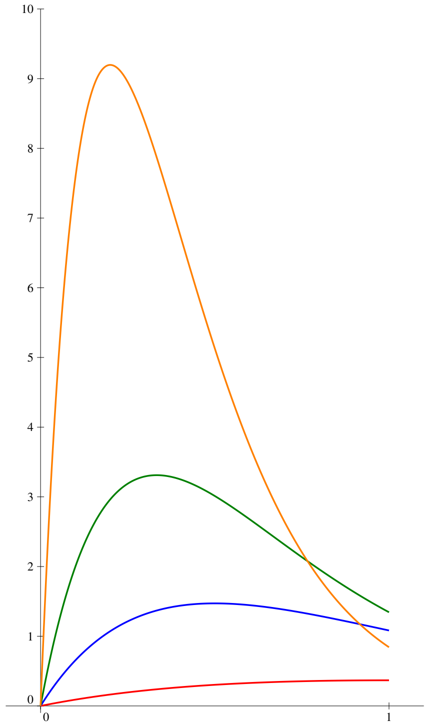
1. C'est quasiment la même chose que le quatrième exemple de l'exercice 1. L'application est symétrique et bilinéaire, clairement positive, et si $\varphi(P,P)=0$ alors $P(-1)=P(0)=P(1)=0$, donc P étant un polynôme de degré 2, il est nécessairement nul. Conclusion : φ est un produit scalaire.
2. Le plus simple ici est de poser $P=aX^2+bX+c$ et de résoudre l'équation $\varphi(P,X^2+1)=0$. On trouve $\varphi(P,X^2+1)=2P(-1)+P(0)+2P(1)=2a-2b+2c+c+2a+2b+2c=4a+5c$. Les polynômes solutions sont donc de la forme $aX^2+bX-\frac{4}{5}a$. Autrement dit, $F^\perp=\text{Vect}\left(X,X^2-\frac{4}{5}\right)$. Sans surprise, cet espace est de dimension 2 puisqu'il est le supplémentaire d'une droite vectorielle dans $\mathbb{R}_2[X]$ qui est de dimension 3.
3. On part comme toujours de la base canonique. Pour plus de simplicité, on notera φ à l'aide d'un point et la norme associée à φ avec les doubles barres usuelles. Commençons par calculer $\| 1 \|=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$; puis $X-\left(X.\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\frac{1}{\sqrt{3}}=X-\frac{1}{3}(X.1)=X-\frac{1}{3}(-1+0+1)=X$ (les polynômes 1 et X étaient donc déjà orthogonaux) ; on enchaîne avec $\| X \|=\sqrt{1+0+1}=\sqrt{2}$; enfin on calcule $X^2-\frac{1}{2}(X^2.X)X-\frac{1}{3}(X^2.1)=X^2-\frac{1}{2}(-1+0+1)X-\frac{1}{3}(1+0+1)=X^2-\frac{2}{3}$; enfin, on norme ce dernier polynôme : $\left\|X^2-\frac{2}{3}\right\|=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{6}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$. En conclusion, la famille $\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{2}}X;\sqrt{\frac{2}{3}}\left(X^2-\frac{2}{3}\right)\right)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.
4. On a déjà fait le calcul pour l'orthogonal de G à la question précédente : G est de dimension 2, engendré par 1 et X qui sont tous deux orthogonaux à $X^2-\frac{2}{3}$, donc $G^\perp$ est une droite nécessairement engendrée par $X^2-\frac{2}{3}$. Le projeté orthogonal de X^2 sur G a aussi été calculé à la question précédente, il s'agit du polynôme $\frac{2}{3}$ (c'est celui qu'on soustrait à X^2 lors de la dernière étape de l'algorithme de Gram-Schmidt). La distance recherchée est donc $d(X^2,G)=\left\|X^2-\frac{2}{3}\right\|=\sqrt{\frac{2}{3}}$. Aucun calcul à effectuer dans cette dernière question, c'est agréable...

Exercice 4 (***)

On définit, pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction h_n par $h_n(t)=nt^n\sqrt{1-t^2}$.

1. Commençons par écarter le cas $t=1$, puisque $h_n(1)=0$ quel que soit la valeur de n (la suite converge alors évidemment vers 0). Si $t\neq 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} t^n=0$, et par croissance comparée, $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n(t)=0$. La limite est donc nulle quelle que soit la valeur de t comprise entre 0 et 1. Pour autant, on ne peut absolument rien en déduire sur la limite de l'intégrale. Mais pour que la correction soit complète, faisons semblant de croire que si. Calculons alors, à l'aide d'une petite IPP en dérivant le t et en primitivant e^{-nt} en $\frac{e^{-nt}}{-n}$, l'intégrale $\int_0^1 n^3te^{-nt}\,dt=[-n^2te^{-nt}]_0^1+\int_0^1 n^2e^{-nt}\,dt=-n^2e^{-n}-[ne^{-nt}]_0^1=-n^2e^{-n}-ne^{-n}+n$. Toujours par croissance comparée, les deux premiers termes ont une limite nulle en $+\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 n^3te^{-nt}\,dt=+\infty$. Pourtant, tout comme h_n, cette suite de fonctions tend vers 0 quelle que soit la valeur de t fixée dans $[0,1]$! C'est trivial pour $t=0$ puisqu'elle s'annule tout le temps, et si $t>0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-nt}=0$

et c'est encore un résultat de croissance comparée. À défaut de réfléchir à nouveau, essayon d'illustrer ce phénomène en traçant les courbes des fonctions $t \mapsto n^3te^{-nt}$ (pour les premières valeurs de n, ici $n = 1$ en rouge, $n = 2$ en bleu, $n = 3$ en vert et $n = 5$ en orange) :



On voit bien que les maxima sont de plus en plus haut (ce qui explique que les intégrales tendent vers $+\infty$), mais de plus en plus proches de 0 en abscisse, ce qui est cohérent avec le fait, qu'à t fixé, les valeurs des fonctions tendent vers 0.

2. La fonction h_n est dérivable sur $[0,1[$, de dérivée $h_n'(t) = n^2t^{n-1}\sqrt{1-t^2} + nt^n \times \dfrac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}} = \dfrac{n^2t^{n-1}(1-t^2) - nt^{n+1}}{\sqrt{1-t^2}} = \dfrac{nt^{n-1}(n-(n+1)t^2)}{\sqrt{1-t^2}}$. Cette dérivée s'annule en $t_n = \sqrt{\dfrac{n}{n+1}}$ (qui appartient bien à l'intervalle $[0,1]$), la fonction h_n est croissante sur $[0,t_n]$ et décroissante sur $[t_n,1]$. En particulier, elle admet en t_n un maximum de valeur $h_n(t_n) = n\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n\sqrt{1-\dfrac{n}{n+1}}$ $= \dfrac{n}{\sqrt{n+1}}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^n$. Le calcul de la limite ne devrait plus poser de problèmes à cette période de l'année : $\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^n = e^{n\ln(1-\frac{1}{n+1})}$, avec $\ln\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right) \sim -\dfrac{1}{n+1}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right) = -1$. On en déduit que $h_n(t_n) \sim \dfrac{n}{\sqrt{n+1}} \times e^{-1} \sim \dfrac{n}{e\sqrt{n}} \sim \dfrac{\sqrt{n}}{e}$. En particulier, ce maximum tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. On en peut donc toujours pas conclure (tout ce qu'on faire c'est majorer l'intégrale par le maximum de la fonction, ce qui ne nous avance à rien).

3. L'application φ_n est toujours symétrique, et bilinéaire à cause de la linérité de l'intégrale. De plus, $\varphi_n(f,f) = \displaystyle\int_0^1 t^nf(t)^2\,dt$ est l'intégrale d'une fonction positive sur $[0,1]$, donc toujours positive ; et ne peut s'annule que si $t^nf(t)^2$ est toujours nulle. Cela implique que f est nulle sur $]0,1]$ et par continuité de f en 0, sur $[0,1]$ également. Puisqu'elle est définie positive, φ_n est bien un produit scalaire.

Or, on peut écrire que $\displaystyle\int_0^1 h_n(t)\,dt = \varphi_n(f_n,g_n)$, en poosant $f_n(t) = n$ et $g_n(t) = \sqrt{1-t^2}$.

L'inégalité de Cauchy-Schwartz nous assure alors que $\left(\int_0^1 h_n(t)\,dt\right)^2 \leqslant \int_0^1 n^2t^n\,dt \times \int_0^1 t^n(1-t^2)\,dt = \left[n^2\frac{t^n}{n+1}\right]_0^1 \times \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{n+3}}{n+3}\right]_0^1 = \frac{n^2}{n+1}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}\right) = \frac{2n^2}{(n+1)^2(n+3)} \sim \frac{2}{n}$. En particulier, $\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^1 h_n(t)\,dt\right)^2 = 0$, donc $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 h_n(t)\,dt = 0$. On a même prouvé quelque chose de beaucoup plus précis : puisque h_n est toujours positive, $\int_0^1 h_n(t)\,dt \sim \sqrt{\frac{2}{n}}$.

Exercice 5 (*)

Le plus simple est de déterminer une base de F (un vecteur directeur, si vous préférez) pour calculer explicitement les images des prejetés des vecteurs de la base canonique. Résolvons donc le système constitué par les deux équations définissant F : d'après la deuxième $y = 2x$, et la première donne alors $z = x + 2y = 5x$. Autrement dit, $F = \text{Vect}((1,2,5))$. Normons ce vecteur : $\|(1,2,5)\| = \sqrt{1+4+25} = \sqrt{30}$, donc $u = \frac{1}{\sqrt{30}}(1,2,5)$ forme une base orthonormale de F. on calcule alors $p_F((1,0,0)) = (1,0,0).u \times u = \frac{1}{30} \times (1,0,0).(1,2,5) \times (1,2,5) = \frac{1}{30}(1,2,5)$. De même, $p_F((0,1,0)) = \frac{1}{15}(1,2,5)$ et $p_F((1,2,5)) = \frac{1}{6}(1,2,5)$. La matrice de p_F est donc la matrice $A = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 10 \\ 5 & 10 & 25 \end{pmatrix}$. En particulier, on calcule facilement $p_F((1,1,1)) = \frac{1}{30}(8,16,40) = \left(\frac{4}{15}, \frac{8}{15}, \frac{4}{3}\right)$. Pour la distance du vecteur à F, il ne reste plus qu'à calculer $\|(1,1,1) - p_F((1,1,1))\| = \left\|\left(\frac{11}{15}, \frac{7}{15}, -\frac{5}{15}\right)\right\| = \sqrt{\frac{121}{225} + \frac{49}{225} + \frac{25}{225}} = \sqrt{\frac{195}{225}} = \sqrt{\frac{13}{15}}$.

Exercice 6 (*)

On peut déjà vérifier aisément que M est une matrice de projection : $M^2 = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 30 & -12 & 6 \\ -12 & 12 & 12 \\ 6 & 12 & 30 \end{pmatrix} = M$ en simplifiant tout par 6. L'énoncé aurait bien sûr du préciser que cette matrice était prise dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, ou au moins dans une base orthonormale. Mais comme on ne dipose de toute façon pas du théorème qui dit qu'une matrice de projection symétrique dans une base orthonormale correspond à une symétrie orthogonale, on ne peut pas conclure facilement. De toute façon, on nous demande le plan de projection, alors allons-y pour le calcul du noyau et de l'iamge de notre projection p. Pour l'image, qui est caractérisée comme pour tout projecteur par l'équation $p(u) = u$, on se ramène en multipliant par 6 à la résolution du système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 5x & - & 2y & + & z & = & 6x \\ -2x & + & 2y & + & 2z & = & 6y \\ x & + & 2y & + & 5z & = & 6z \end{array}\right.$. Ces trois équations sont équivalentes, elles se ramènent toutes à $-x - 2y + z = 0$, soit $z = x + 2y$. Il s'agit donc bien d'un plan, plus précisément $\text{Im}(p) = \text{Vect}((1,0,1);(0,1,2))$. Le noyau est encore plus simple, la deuxième équation donne $x = y + z$, les deux équations extrêmes deviennent alors $3y + 6z = 0$ et $3y + 6z = 0$. Surprise, ce sont les mêmes, donc $y = -2z$. Autrement dit, $\ker(p) = \text{Vect}((-1,-2,1))$. Reste simplement à vérifier que noyau et images sont orthogonaux, ce qui se fait rapidement en constatant que les vecteurs des deux bases sont orthogonaux. Ici, $(-1,-2,1).(1,0,1) = -1 + 1 = 0$ et $(-1,-2,1).(0,1,2) = -2 + 2 = 0$, ça marche !

Exercice 7 (**)

1. Si considère un polynôme $P = a + bX + cX^2 + dX^3 \in E$, alors $P(1) = 0 \Leftrightarrow a + b + c + d = 0$. Si on préfère, en notant H l'ensemble considéré (ce qui n'est pas fait dans l'énoncé bien qu'on parle de H ensuite !), $H = \text{Vect}(X - 1, X^2 - 1, X^3 - 1)$, qui est bien un espace vectoriel de dimension 3, soit un hyperplan de $\mathbb{R}_3[X]$ qui est lui de dimension 4. Son orthogonal est une droite vectorielle. Reprenons un polynôme P quelconque, on peut calculer $P.(X - 1) = b - a$, puis $P.(X^2 - 1) = c - a$ et $P.(X^3 - 1) = d - a$ pour conclure que $P \in H^\perp \Leftrightarrow a = b = c = d$. Autrement dit, $H^\perp = \text{Vect}(1 + X + X^2 + X^3)$.
2. Il est beaucoup plus facile de calculer le projeté de X^3 sur $H^\perp$ et de faire une soustraction ensuite. Normons le vecteur constituant notre base de $H^\perp$: $\|1+X+X^2+X^3\| = \sqrt{1+1+1+1} = 2$, donc $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}X^3$ constitue une base orthonormale de $H^\perp$. Calculons donc $p_{H^\perp}(X^3) = X^3.\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}X^3\right) \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}X^3\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}X + \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{4}X^3$. Pour la projection sur H, il suffit alors de calculer $X^3 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}X + \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{4}X^3 = \frac{3}{4}X^3 - \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}$. Et la distance est égale à $\left\|\frac{1}{4} + \frac{1}{4}X + \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{4}X^3\right\| = \sqrt{\frac{4}{16}} = \frac{1}{2}$.

Exercice 8 (**)

Commençons par vérifier que la matrice A est une matrice orthogonale. Pour cela, on peut par exemple vérifier que ses vecteurs-lignes forment une base orthonormale. En effet, $(-7, -4, 4).(4, -8, -1) = -28 + 32 - 4 = 0$; $(-7, -4, 4).(-4, -1, -8) = 28 + 4 - 32 = 0$ et $(4, -8, -1).(-4, -1, -8) = -16 + 8 + 8 = 0$; et de plus, $\frac{1}{9}\|(-7, -4, -4)\| = \frac{1}{9}\sqrt{49 + 16 + 16} = \frac{9}{9} = 1$; $\frac{1}{8}\|(-4, -1, -8)\| = \frac{1}{9}\sqrt{16 + 1 + 64} = 1$ et de même pour le dernier vecteur. Nous sommes bien en présence d'une matrice orthogonale. Calculons son déterminant pour savoir si elle correspond à une isométrie directe ou indirecte : $\begin{vmatrix} -7 & -4 & 4 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & -4 & 4 \\ 4 & -8 & -1 \\ 0 & -9 & -9 \end{vmatrix} = 9\begin{vmatrix} -7 & 4 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - 9\begin{vmatrix} -7 & -4 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = 9 \times (-9) - 9 \times 72 = -9^3$, donc $\det(A) = -1$. La matrice A correspond donc à une isométrie indirecte de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire a priori une composée de rotation et de réflexion. Déterminons tout d'abord l'axe de la réflexion en déterminant les vecteurs vérifiant $f(u) = -u$ (on note bien sûr f l'application associée à la matrice A dans la base canonique). Pour cela, en multipliant tout par 9, on résout le système $\begin{cases} -7x - 4y + 4z = -9x \\ 4x - 8y - z = -9y \\ -4x - y - 8z = -9z \end{cases}$. La première équation donne $x = 2y - 2z$, ce qu'on peut insérer dans les deux autres : $9y - 9z = 0$ et $-9y + 9z = 0$. Sans surprise, les équations sont équivalentes et donnent $z = y$, puis $x = 0$. Autrement dit, l'axe de notre isométrie est $\text{Vect}((0, 1, 1))$. Pour déterminer l'angle de la rotation restante, on fait comme pour une isométrie directe de $\mathbb{R}^3$ (ça marchera très bien puisque dans les deux cas la restriction de f à l'orthogonal de l'axe est une rotation) : choisissons un vecteur orthogonal à l'axe, par exemple $(1, 0, 0)$, il a pour image $\frac{1}{9}(-7, -4, 4)$. On peut prendre comme vecteur normé dirigeant l'axe le vecteur $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)$. Calculons alors $\cos(\theta) = (1, 0, 0).\frac{1}{9}(-7, -4, 4) = -\frac{7}{9}$. Remarquons que, comme dans le cas d'une rotation, on peut retrouver ce cosinus à l'aide de la trace de la matrice : $\text{Tr}(A) = -\frac{23}{9}$ et on sait que, dans une base adaptée, f aura pour matrice $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, donc $\text{Tr}(A) = 2\cos(\theta) - 1$.

On retrouve bien en comparant ces deux égalités que $\cos(\theta) = -\frac{7}{9}$. Reste à déterminer le signe du sinus, en calculant $\frac{1}{9\sqrt{2}}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{9\sqrt{2}}\begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{8}{9\sqrt{2}}$. On vérifie au passage que $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = \frac{49}{81} + \frac{64}{2 \times 81} = 1$, ce qui est rassurant. on peut maintenant conclure : en notant $D = \text{Vect}((0,1,1))$, f est la composée de la réflexion d'axe D et de la rotation d'axe D et d'angle $-\arccos\left(\frac{7}{9}\right)$.

C'est en fait beaucoup plus rapide dans l'autre sens, en utilisant la formule pour une rotation $r(u) = \cos(\theta)u + (1 - \cos(\theta))(u.a)a + \sin(\theta)(a \wedge u)$. Ici, le vecteur unitaire a orientant l'axe sera $a = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, et on a évidemment $\cos(\theta) = 0$ et $\sin(\theta) = 1$. On trouve donc plus simplement $r(u) = \frac{1}{3}(u.(1,1,1))(1,1,1) + \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \wedge u$. Les produits scalaires de chacun des trois vecteurs de la base canonique avec $(1,1,1)$ valent 1 (ce qu'on peut traduire par le fait qu'ils ont tous les trois le même projeté sur l'axe de la rotation, ce qui devrait vous paraitre géométriquement évident), et par ailleurs $(1,1,1) \wedge (1,0,0) = (0,1,-1)$; $(1,1,1) \wedge (0,1,0) = (-1,0,1)$ et $(1,1,1) \wedge (0,0,1) = (1,-1,0)$. On peut donc achever les calculs : $r((1,0,0)) = \left(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}+1}{3}, \frac{1-\sqrt{3}}{3}\right)$; $r((0,1,0)) = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}+1}{3}\right)$ et $r((0,0,1)) = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{3}, \frac{1-\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3}\right)$, soit une matrice $M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1 & 1+\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$. On peut aisément vérifier que cette matrice est bien une matrice orthogonale.

Exercice 9 (***)

1. La symétrie de l'application découle du fait que $\text{Tr}({}^tA) = \text{Tr}(A)$ (pour une matrice carrée), on peut alors écrire $\varphi(B,A) = \text{Tr}({}^tBA) = \text{Tr}({}^t({}^tBA)) = \text{Tr}({}^tAB) = \varphi(A,B)$. La bilinéarité (on peut se contenter de prouver la linéarité à gauche du fait de la symétrie) est une conséquence de la linéarité de la trace et de celle de la transposée : $\varphi(\lambda A + \mu A', B) = \text{Tr}({}^t(\lambda A + \mu A')B) = \text{Tr}(\lambda {}^tAB + \mu {}^tA'B) = \lambda \text{Tr}({}^tAB) + \mu \text{Tr}({}^tA'B) = \lambda\varphi(A,B) + \mu\varphi(A',B)$. Vérifions maintenant la positivité : $\varphi(A,A) = \text{Tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^{n} ({}^tAA)_{ii}$. Or, $({}^tAA)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} ({}^tA)_{ik}A_{ki} = \sum_{i=1}^{n} A_{ki}^2$. Chacun des termes de la somme la constituant étant une somme de carrés, $\varphi(A,A)$ estbien positif. En fait, on constate que $\varphi(A,A)$ est simplement égal à la somme des carrés de tous les coefficients de la matrice A. En particulier, ce réel ne peut s'annuler que si tous ces coefficients sont nuls, ce qui prouve que φ est défini positif, et donc bien un produit scalaire.
2. Supposons A symétrique et B antisymétrique, alors $\varphi(A,B) = \text{Tr}({}^tAB) = \text{Tr}(AB)$ (puisque A est symétrique), mais aussi $\varphi(B,A) = \text{Tr}({}^tBA) = \text{Tr}(-BA)$ puisque B est antisymétrique. On en déduit que $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(-BA)$. Orn, on sait bien que $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ pour des matrices carrées quelconques, donc nécessairement $\text{Tr}(AB) = 0$ et A et B sont orthogonales. Pour justifier la supplémentarité des deux sous-espaces, il suffit de constqter que leurs dimensions conviennent. L'ensemble des matrices symétriques est de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$ (le nombre de coefficients situés en-dessous de la diagonale, diagonale comprise, ils suffisent en effet à déterminer la matrice de façon unique) et celui des matrices antisymétriques de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$ (même raisonnement, sans la diagonale qui est forcément nulle). La somme de ces deux dimensions vaut $\frac{n(n-1+n+1)}{2} = n^2$, ce qui correspond à la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et

prouve donc la supplémentarité.

3. On sent venir la formule de Cauchy-Schwarz. Si on l'applique bêtement aux matrices A et B, on trouve (en mettant tout au carré), $(\mathrm{Tr}({}^tAB))^2 \leqslant \mathrm{Tr}({}^tAA) \times \mathrm{Tr}({}^tBB)$. Ce n'est pas exactement ce qu'on veut. En fait, l'énoncé est inexact pour des matrices quelconques ! Il faut que les matrices soient symétriques pour que l'inégalité découle de Cauchy-Schwarz. En général, ce sera malheureusement faux, puisque $\mathrm{Tr}(A^2) \leqslant \mathrm{Tr}({}^tAA)$, et qu'il n'y a aucun moyen de s'en sortir.
4. Là, pas de problème, ça marche pour une matrice quelconque, en appliquant Cauchy-Schwarz à I et A : $(\mathrm{Tr}({}^tIA))^2 \leqslant \|I\| \times \|M\|$, soit $(\mathrm{Tr}(A))^2 \leqslant n\|M\|$ puisque $\|I\| = \sqrt{n^2} = n$. Il suffit de prendre la racine carrée de tout ça pour obtenir l'inégalité souhaitée.
5. Inutile de s'embêter avec ce qui précède, une matrice orthogonale a tous ses coefficients inférieurs ou égaux à 1 (en valeur absolue) puisque ses colonnes doivent êtres des vecteurs de norme 1. Sa trace est donc inférieure ou égale à n par simple application de l'inégalité triangulaire. La réciproque est évidemment complètement fausse, par exemple la matrice nulle n'est pas vraiment orthogonale, mais a une trace nulle.
6. Surtout pas de calcul monstrueux ! On peut décomposer très facilement une matrice A quelconque en $A + \dfrac{A +^t A}{2} + \dfrac{A -^t A}{2}$, qui est la décomposition de A suivant les deux sous-espaces supplémentaires othogonaux décrits à la question 2. Du coup, la projection de A sur l'ensemble des matrices antisymétriques est $\dfrac{A -^t A}{2}$, et la distance recherchée est simplement la norme de cette matrice. Notons $B = \dfrac{A -^t A}{2}$, alors $B_{ij} = \dfrac{1}{2}(A_{ij} - A_{ji}) = \dfrac{i-j}{2}$, et $\|B\|2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{(i-j)^2}{4} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i^2 + j^2 - 2ij = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} ni^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - in(n+1) = \frac{1}{4}\left(\frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n^2(n+1)^2}{2}\right) = \frac{n^2(n+1)}{24} \times (4n+2-3n-3) = \frac{n^2(n^2-1)}{24}$. Autrement dit, la distance recherchée vaut $\dfrac{n\sqrt{n^2-1}}{2\sqrt{6}}$.

TD n°13 : sujet d'annales.

PTSI B Lycée Eiffel

7 juin 2013

Problème (sujet A banque PT 2011, à peine retouché)

Dans tout le problème, on désignera par $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ constitué des matrices dont tous les coefficients sont des entiers relatifs.

Partie A

1. À quelle condition nécessaire et suffisante sur son déterminant une matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est-elle inversible ? Exprimer alors $\det(A^{-1})$ en fonction de $\det(A)$.
2. Déterminer les inverses des matrices suivantes : $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ et $A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, montrer que A est inversible et que $A^{-1} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det(A) = \pm 1$. Donner alors l'expression de A^{-1} en fonction de a, b, c et d.
4. Déterminer les couples $(b, c) \in \mathbb{Z}^2$ pour lesquels $A = \begin{pmatrix} 5 & c \\ b & 1 \end{pmatrix}$ est inversible dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

Partie B

On désigne par $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telles qu'il existe un entier naturel non nul p pour lequel $A^p = I$. Le plus petit entier p pour lequel $A^p = I$ sera alors noté $h(A)$ et appelé ordre de la matrice A.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$, d'ordre $h(A) = p$.

1. Montrer que A admet une inverse appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, en déduire les valeurs possibles de $\det(A)$.
2. Vérifier que $A^{-1} \in \mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$, et comparer les valeurs de $h(A^{-1})$ et de $h(A)$.
3. Montrer que les matrices $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ appartiennent à $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$ et déterminer leurs ordres. Le produit CD appartient-il à $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$?
4. On note P_A le polynôme défini par $P_A(X) = \det(XI - A)$. Déterminer P_A en fonction des coefficients de la matrice A, puis en utilisant uniquement la trace et le déterminant de A.
5. On admet pour la suite du problème que les racines (complexes) du polynôme P_A sont deux nombres λ_1 et λ_2 de module 1, et que l'endomorphisme associé à la matrice A dans la base canonique admet dans une autre base une matrice diagonale, dont les coefficients diagonaux sont λ_1 et λ_2. Exprimer en fonction de λ_1 et λ_2 la trace de la matrice A.
6. En déduire que $\mathrm{Tr}(A) \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

7. Vérifier qu'il n'y a que 10 polynômes possibles pour P_A, déterminer dans chaque cas les racines complexes de P_A, et exlure quatre cas en tenant compte des remarques faites plus haut.
8. Dans les six cas restants, déterminer l'ordre de A en utilisant la base dans lequelle elle devient diagonale.
9. En déduire le plus petit entier naturel q pour lequel, $\forall A \in \mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$, $A^q = I$.

Partie C

On désigne par E l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 3. On considère l'application φ définie sur $E \times E$ par $\varphi(P, Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\, dt$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
2. Déterminer l'unique base orthonormale $(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$ de E telle que $\forall i \in \{0, 1, 2, 3\}$, $\text{Vect}(\pi_0, \dots, \pi_i) = \text{Vect}(1, \dots, X^i)$, et $\varphi(\pi_i, X^i) > 0$.
3. Soit $P \in E$ tel que $\displaystyle\int_{-1}^{1} (P(t))^2\, dt = 1$.
   (a) Montrer qu'il existe $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^4$ tels que $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{3} \alpha_i \pi_i$.
   (b) Sans déterminer les réels α_i, calculer $\displaystyle\sum_{i=0}^{3} \alpha_i^2$.
   (c) Soient a, b, c, d, a', b', c' et d' huit réels. Montrer que $|aa'+bb'+cc'+dd'| \leqslant \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2} \times \sqrt{a'^2+b'^2+c'^2+d'^2}$.

   En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|P(x)| \leqslant \sqrt{\displaystyle\sum_{i=0}^{3} (\pi_i(x))^2}$.
   (d) En étudiant $\displaystyle\sup_{-1 \leqslant x \leqslant 1} \pi_i(x)$ pour chacun des polynômes π_i, montrer que

   $\displaystyle\sup_{|x| \leqslant 1} |P(x)| \leqslant 2\sqrt{2}$.

Corrigé du TD n°13

Partie A

1. On sait qu'une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. De plus, on peut alors écrire $\det(AA^{-1}) = \det(I) = 1$, donc $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.
2. Pour éviter de résoudre un système où de refaire un pivot pour chaque matrice (ce qui ne serait pas bien long ici, ceci dit), on peut utiliser la formule $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}{}^t(\mathrm{com}(A))$. Dans le cas d'une matrice d'ordre 2, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors ${}^t(\mathrm{com}(A)) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Par ailleurs, bien entendu, $\det(A) = ad - bc$. La matrice A_1 a un déterminant égal à $4 - 3 = 1$, donc $A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; la matrice A_2 a pour déterminant $20 - 21 = -1$, donc $A_2^{-1} \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$; enfin, la matrice A_3 a pour déterminant $20 - 18 = 2$, donc $A_3^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.
3. Si A est inversible et si son inverse est à coefficients entiers, alors $\det(A)$ et $\det(A^{-1})$ sont tous les deux des nombres entiers. Mais comme ils sont inverses l'un de l'autre, ils sont nécessairement égaux à 1 ou -1 tous les deux. Réciproquement, si $\det(A) = \pm 1$, la matrice A est certainement inversible, et la formule exploitant la comatrice (utilisée dans la question précédente) assure que A^{-1} aura ses coefficients entiers. Dans ce cas, si $\det(A) = 1$, alors $A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, et si $\det(A) = -1$ alors $A^{-1} = \begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix}$.
4. D'après la question précédente, il suffit de déterminer les couples pour lesquels $\det(A) = 5 - bc \in \{-1, 1\}$. Si le déterminant vaut 1, on tombe sur la condition $bc = 4$, ce qui se produit pour les couples (b, c) d'entiers suivants : $(4, 1); (2, 2); (1, 4)$;
$(-4, -1); (-2, -2); (-1, -4)$. Dans le cas où le déterminant vaut -1, on doit avoir $bc = 6$, ce qui donne les cas supplémentaires suivants : $(6, 1); (3, 2); (2, 3); (1, 6)$;
$(-6, -1); (-3, -2); (-2, -3), (-1, -6)$. Il y a donc au total pas moins de 14 matrices convenables !

Partie B

1. Puisque $A^p = I$ avec $p \geqslant 1$, on peut écrire $A \times A^{p-1} = I$, ce qui prouve que A est inversible et que son inverse est A^{p-1}. Cette matrice est sûrement à coefficients entiers, comme toutes les puissances de A (si vous n'êtes pas convaincus, faites une petite récurrence). Les résultats de la première partie nous assurent alors que $\det(A) \in \{-1, 1\}$.
2. On sait que $A^{-1} = A^{p-1}$, donc $(A^{-1})^p = (A^{p-1})^p = (A^p)^{p-1} = I^{p-1} = I$, ce qui prouve à la fois que $A^{-1} \in \mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$ et que $h(A^{-1}) \leqslant p = h(A)$. Bon, mais le raisonnement fonctionne exactement de la même façon en remplaçant A par A^{-1} et aboutirait cette fois-ci à la conclusion $h(A) \leqslant h(A^{-1})$. Finalement, on a forcément $h(A^{-1}) = h(A)$.
3. Un peu de calcul bête et méchant : $C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$, donc $C \in \mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$ et $h(C) = 2$. De même, $D^2 = I$, donc $h(D) = I$. Calculons maintenant $CD = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Cette fois-ci, on trouve $(CD)^2 = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, puis $(CD)^3 = \begin{pmatrix} -17 & 5 \\ -10 & 3 \end{pmatrix}$. Il parait peu probable qu'on retombe rapidement sur l'identité mais ce calcul ne prouve rien. Soit on essaie alors d'obtenir une formule pour les puissances de CD, soit on triche un peu en allant exploiter les résultats de la suite de cette partie B, et en constatant que l'ordre d'une matrice de $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$ ne peut

dépasser 4. Allez, faisons un calcul rigoureux, $(CD)^2 = -2CD + I$. Le polynôme $X^2 + 2X - 1$ annule donc la matrice CD, il admet pour discriminant $\Delta = 4 + 4 = 8$ et pour racines $x_1 = \dfrac{-2+\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2} - 1$ et $x_2 = -\sqrt{2} - 1$. Si on effectue la division euclidienne de X^n par $X^2 + 2X - 1$, on trouvera donc $X^n = Q(X^2 + 2X - 1) + a_n X + b_n$, avec en évaluant en x_1 et x_2 les deux relations $(\sqrt{2} - 1)^n = a_n(\sqrt{2} - 1) + b_n$ et $(-\sqrt{2} - 1)^n = -a_n(\sqrt{2} + 1) + b_n$. On en déduit en soustrayant les deux équations que $2\sqrt{2}a_n = x_1^n - x_2^n$, soit $a_n = \dfrac{x_1^n - x_2^n}{2\sqrt{2}}$; et en les additionnant que $2(b_n - a_n) = x_1^n + x_2^n$, soit $b_n = a_n + \dfrac{x_1^n + x_2^n}{2}$. Si la matrice appartenait à $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$, les valeurs de $(CD)^n$ seraient périodiques, et les deux suites a_n et b_n également, ce qui n'est pas le cas.

4. Autrement dit, $P_A(X) = \begin{vmatrix} X-a & -b \\ -c & X-d \end{vmatrix} = (X-a)(X-d) - bc = X^2 - (a+d)X + ad - bc = X^2 - \mathrm{Tr}(A)X + \det(A)$.
5. Puisque la trace d'une matrice est invariante par changement de base (en effet, $\mathrm{Tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{Tr}(APP^{-1}) = \mathrm{Tr}(A)$ quelle que soit la matrice A et quelle que soit la matrice de changement de base P), la trace de A est égale à la trace de la matrice diagonale obtenue dans une autre base, soit $\mathrm{Tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$.
6. Puisque $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$, par inégalité triangulaire, $|\mathrm{Tr}(A)| \leqslant 1 + 1 = 2$. Puisque $\mathrm{Tr}(A)$ est un entier relatif, on en déduit les cinq valeurs possibles pour $\mathrm{Tr}(A)$.
7. Il y a cinq valeurs possibles pour la trace, deux pour le déterminant, donc effectivement 10 pour le polynôme $P_A = X^2 - \mathrm{Tr}(A)X + \det(A)$. Allons-y pour l'étude des racines dans chacun des dix cas possibles :
   - si $\det(A) = 1$ et $\mathrm{Tr}(A) = 2$, alors $P_A(X) = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$, ce qui est tout à fait possible. Dans ce cas, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.
   - si $\det(A) = 1$ et $\mathrm{Tr}(A) = 1$, alors $P_A(X) = X^2 - X + 1$, qui a pour discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3$, et pour racines $\lambda_1 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $\lambda_2 = e^{-i\frac{\pi}{3}}$. Ce cas est possible puisque les deux racines sont de module 1.
   - si $\det(A) = 1$ et $\mathrm{Tr}(A) = 0$, alors $P_A(X) = X^2 + 1 = (X+i)(X-i)$, ce qui est encore possible, avec $\lambda_1 = i$ et $\lambda_2 = -i$.
   - si $\det(A) = 1$ et $\mathrm{Tr}(A) = -1$, alors $P_A(X) = X^2 + X + 1$, qui a pour discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3$, et pour racines $\lambda_1 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $\lambda_2 = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$. Encore un cas tout à fait possible.
   - si $\det(A) = 1$ et $\mathrm{Tr}(A) = -2$, alors $P_A(X) = X^2 + 2X + 1 = (X+1)^2$, donc $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, ce qui est là encore cohérent.
   - si $\det(A) = -1$ et $\mathrm{Tr}(A) = 2$, alors $P_A(X) = X^2 - 2X - 1$, qui a pour discriminant $\Delta = 4 + 4 = 8$, et pour racines $\lambda_1 = \dfrac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$ et $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$. Ce cas est à exclure, les racines ne sont pas de module 1.
   - si $\det(A) = 1$ et $\mathrm{Tr}(A) = 1$, alors $P_A(X) = X^2 - X - 1$, qui a pour discriminant $\Delta = 1 + 4 = 5$, et pour racines $\lambda_1 = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ et $\lambda_2 = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$, qui ne sont pas de module 1, on exclut aussi ce cas.
   - si $\det(A) = 1$ et $\mathrm{Tr}(A) = 0$, alors $P_A(X) = X^2 - 1 = (X+1)(X-1)$, sixième cas possible avec $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$.
   - si $\det(A) = 1$ et $\mathrm{Tr}(A) = -1$, alors $P_A(X) = X^2 + X - 1$, qui a pour discriminant $\Delta = 5$ et pour racines $\lambda_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ et $\lambda_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$, cas à exclure.
   - si $\det(A) = 1$ et $\mathrm{Tr}(A) = 0$, alors $P_A(X) = X^2 + 2X - 1$, qui a pour discriminant $\Delta = 8$ et pour racines $\lambda_1 = \dfrac{-2 + 2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} - 1$ et $\lambda_2 = -\sqrt{2} - 1$. Un dernier cas à exclure, on en a

bien gardé six sur les dix.

8. L'ordre d'une matrice appartenant à $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$ est le même que celui de n'importe quelle matrice représentant la même application dans une autre base (en effet, avoir une puissance égale à l'identité est indépendant de la base puisque l'application identité est représentée par I dans toutes les bases), il suffit donc de calculer l'ordre de la matrice diagonale dont les coefficients sont égaux à λ_1 et λ_2 :
   - dans le premier cas, où $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, la matrice est déjà égale à l'identité, et donc d'ordre 1.
   - dans le deuxième cas, où $\lambda_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $\lambda_2 = e^{-i\frac{\pi}{3}}$, les deux coefficients sont racines sixièmes de l'unité (et pas moins), la matrice sera d'ordre 6 (et le cube de notre matrice sera égal à $-I$ puisque $\lambda_1^3 = \lambda_2^3 = -1$).
   - dans le troisième cas, où $\lambda_1 = i$ et $\lambda_2 = -i$, la matrice sera d'ordre 4 (son carré est égal à $-I$).
   - dans le quatrième cas, où $\lambda_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $\lambda_2 = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$, alors la matrice sera d'ordre 3 puisque nos deux coefficients sont racines cubiques de l'unité.
   - dans le cinquième cas, où $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, la matrice est d'ordre 2 (elle est égale à $-I$ dans une bonne base).
   - enfin, dans le seul cas de déterminant négatif, où $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$, la matrice est d'ordre 2 également.
9. Il faut trouver un entier q pour lequel les matrices obtenues dans chacun des six cas, élevées à la puissance q, sont égales à l'identité. Ce sera le cas si q est multiple de chacun des ordres possibles, à savoir 1, 2, 3, 4 et 6. Le plus petit commun multiple de tous ces nombres étant 12, l'entier recherché sera 12.

Partie C

1. Preuve classique : l'application est manifestement symétrique, et linéaire à gauche (donc bilinéaire en exploitant la symétrie) par linéarité de l'intégrale : $\varphi(\lambda P + \mu R, Q) = \int_{-1}^{1} (\lambda P(t) + \mu R(t))Q(t)\ dt = \lambda \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\ dt + \mu \int_{-1}^{1} R(t)Q(t)\ dt = \lambda\varphi(P,Q) + \mu\varphi(R,Q)$. De plus, $\varphi(P,P) = \int_{-1}^{1} P(t)^2\ dt$ est l'intégrale d'une fonction positive, donc l'application φ est positive. Elle ne peut s'annuler que si la fonction continue P s'annule sur $[-1,1]$, ce qui fait une bonne grosse infinité de racines pour P, qui est donc le polynôme nul. L'application φ est définie positive, c'est bien un produit scalaire.
2. Il s'agit d'appliquer le procédé de Gram-Schmidt à la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$. Commençons par normer 1 : $\int_{-1}^{1} 1\ dt = 2$, donc $\pi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ est un polynôme normé pour φ. On calcule ensuite $X - \varphi\left(X, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times \frac{1}{\sqrt{2}} = X - \frac{1}{2}\varphi(X,1)$. Or, $\varphi(X,1) = \int_{-1}^{1} t\ dt = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_{-1}^{1} = 0$. En fait, l'intégrale d'une fonction impaire étant toujours nulle entre -1 et 1, on aura de même $\varphi(X^2, X) = \varphi(X^3, 1) = \varphi(X^3, X^2) = 0$, ce qui va simplifier nos calculs. Il faut tout de même normer le vecteur X : $\varphi(X,X) = \int_{-1}^{1} t^2\ dt = \left[\frac{1}{3}t^3\right] = \frac{2}{3}$, donc $\pi_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}X$ est un polynôme normé. On calcule ensuite $X^2 - \frac{1}{2}\varphi(X^2, 1) = X^2 - \frac{1}{3}$ (le calcul de l'intégrale est exactement le même que celui qu'on vient de faire pour normer X), puis $\varphi\left(X^2 - \frac{1}{3}, X^2 - \frac{1}{3}\right) = \int_{-1}^{1} t^4 - \frac{2}{3}t^2 + \frac{1}{9}\ dt = \frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{2}{5} - \frac{2}{9} = \frac{8}{45}$. Le polynôme $\pi_2 = \sqrt{\frac{45}{8}}\left(X^2 - \frac{1}{3}\right)$ est donc normé.

Enfin, on calcule $X^3 - \frac{3}{2}\varphi(X^3, X) \times X = X^3 - \frac{3}{2} \times \frac{2}{5}X = X^3 - \frac{3}{5}X$. Un dernier calcul de norme : $\varphi\left(X^3 - \frac{3}{5}X, X^3 - \frac{3}{5}X\right) = \int_{-1}^{1} t^6 - \frac{6}{5}t^4 + \frac{9}{25}t^2\, dt = \frac{2}{7} - \frac{12}{25} + \frac{6}{25} = \frac{2}{7} - \frac{6}{25} = \frac{8}{175}$. Notre dernier polynôme normé sera donc $\pi_3 = \sqrt{\frac{175}{8}}\left(X^3 - \frac{3}{5}X\right)$. Si ça peut en rassurer certains, cet horrible calcul a été rajouté par mes soins, il n'était pas dans le sujet d'origine.

3. (a) C'est une question vraiment stupide puisqu'il s'agit juste de savoir ce qu'est une base.

   (b) L'hypothèse consiste à dire que P est un polynôme normé pour notre produit scalaire. Or, la base $(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$ étant orthonormale, on peut calculer la norme de P en effectuant $\sqrt{\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}$. On en déduit directement que $\sum_{i=0}^{3} \alpha_i^2 = 1$.

   (c) C'est une application directe de l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^4$ (pour le produit scalaire usuel). En effet, $(a, b, c, d).(a', b', c', d') = aa' + bb' + cc' + dd' \leqslant \sqrt{\|(a, b, c, d)\|} \times \sqrt{\|(a', b', c', d')\|}$, ce qui donne l'inégalité demandée.
   La deuxième partie est une application immédiate de la première, en posant $a = \alpha_0$, $b = \alpha_1$, $c = \alpha_2$ et $d = \alpha_3$; $a' = \pi_0(x)$, $b' = \pi_1(x)$, $c' = \pi_2(x)$ et $d' = \pi_3(x)$. On trouve bien $|P(x)| = |aa' + bb' + cc' + dd'| \leqslant \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \times \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2}$. La repmière racine carrée vaut 1 d'après la question précédente, la précédente est par définition $\sqrt{\sum_{i=0}^{3} \pi_i(x)^2}$.

   (d) Majorons donc : π_0 est constant égal à $\frac{1}{\sqrt{2}}$, donc $\pi_0(x)^2 \leqslant \frac{1}{2}$; $\pi_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}X$ a pour maximum (en valeur absolue également) égal à $\sqrt{\frac{3}{2}}$ sur $[-1, 1]$, donc $\pi_1(x)^2 \leqslant \frac{3}{2}$. La fonction $\pi_2 : x \mapsto \sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$ est paire, elle est représentée par une parabole dont le minimum est atteint en 0, et prend une valeur maximale en 1 (et en -1 si on regarde en valeur absolue, $x^2 - \frac{1}{3}$ prenant une valeur supérieure en valeur absolue en 1 qu'en 0), égale à $\sqrt{\frac{45}{8}} \times \frac{2}{3} = \sqrt{\frac{5}{2}}$, et $\pi_2^2(x) \leqslant \frac{5}{2}$. La dernière fonction est la plus pénible, elle est impaire donc on peut se contenter de l'étudier sur $[0, 1]$. On peut oublier pour les variations la constante avec une racine carrée ignoble et se contenter de poser $f(x) = x^3 - \frac{3}{5}x$. La fonction f a pour dérivée $f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{5}$, elle s'annule en $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Comme $f(0) = 0$, $f\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{5\sqrt{5}} - \frac{3}{5\sqrt{5}} = -\frac{2}{5\sqrt{5}}$, et $f(1) = \frac{2}{5}$, qui est plus grand en valeur absolue que les deux valeurs précédentes, π_3 est majorée en valeur absolue par $\sqrt{\frac{175}{8}} \times \frac{2}{5} = \sqrt{\frac{7}{2}}$, et $\pi_3(x)^2 \leqslant \frac{7}{2}$. En reprenant les résultats des questions précédente, on aura donc, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ et pour tout réel $x \in [-1, 1]$, $|P(x)| \leqslant \sqrt{\sum_{i=0^3} \pi_i(x)^2} \leqslant \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \frac{7}{2}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Si c'est vrai pour tout réel $x \in [-1, 1]$, on a a fortiri $\sup_{x \in [-1,1]} |P(x)| \leqslant 2\sqrt{2}$.

Feuille d'exercices n°19 : Étude métrique des courbes planes

PTSI B Lycée Eiffel

11 juin 2013

Exercice 1 (*)

Pour chacune des courbes paramétrées suivantes, déterminer la longueur de la courbe, le repère de Frénet en chaque point, et le centre de courbure :

1. $\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & 2\cos(t) - \cos(2t) \\ y(t) & = & 2\sin(t) - \sin(2t) \end{array}\right.$
2. $\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & \dfrac{1-t^2}{(1+t^2)^2} \\ y(t) & = & \dfrac{2t}{(1+t^2)^2} \end{array}\right.$

Exercice 2 (**)

Calculer la longueur et la courbure de chacune des courbes polaires suivantes (on pourra évidemment donner une allure de chacune de ces courbes) :

1. $\rho = \sqrt{\cos(2\theta)}$ (en éliminant le point singulier situé à l'origine du repère)
2. $\rho = 3\theta$
3. $\rho = \cos^3\left(\dfrac{\theta}{3}\right)$
4. $\rho = \text{th}\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$

Exercice 3 (**)

On considère un hyperbole équilatère $\mathcal{H}$ (d'équation $xy = 1$) et M un point de l'hyperbole. La normale à $\mathcal{H}$ au point M recoupe $\mathcal{H}$ en un second point N. Montrer, en notant I le centre de courbure au point M, que $\overrightarrow{NM} = 2\overrightarrow{MI}$.

Exercice 4 (***)

La courbe développée d'un arc paramétré est la courbe obtenue en prenant le lieu de ses centres de courbure. Déterminer la développée des courbes suivante :

- cardioïde d'équation polaire $\rho = 1 + \cos(\theta)$
- ellipse d'équation cartésienne $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$

Corrigé de la feuille d'exercices n°19

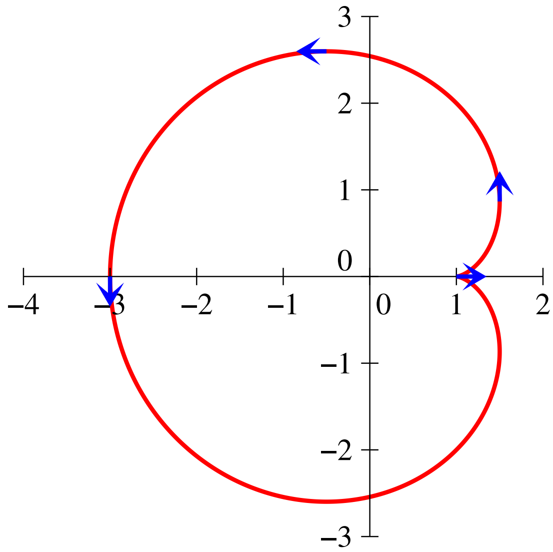
Exercice 1 (*)

Pour chacune des deux courbes, on effectuera une étude détaillée avant de se lancer dans les calculs.

1. Les deux fonctions coordonnées sont définies et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Elles sont par ailleurs 2π-périodiques et respectivement paire et impaire, ce qui permet de restreindre l'étude à l'intervalle $[0, \pi]$ et de compléter la courbe par symétrie par rapport à (Ox). Dérivons : $x'(t) = -2\sin(t) + 2\sin(2t) = 2\sin(t)(2\cos(t) - 1)$, qui s'annule en 0, en π et en $\dfrac{\pi}{3}$; et $y'(t) = 2\cos(t) - 2\cos(2t) = 2(\cos(t) - 2\cos^2(t) + 1)$. En posant $X = \cos(t)$, on trouve $y'(t) = 2(-2X^2 + X + 1) = 2(X-1)(-2X-1)$, qui s'annule en 0 et en $\dfrac{2\pi}{3}$. On peut alors dresser le tableau de variations suivant :

t	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$x'(t)$	0	$+$	0	$-$		$-$	0
x	1	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\searrow$	-3
$y'(t)$	0	$+$		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

Il y a un point stationnaire en 0, on peut déterminer sa nature, par exemple à l'aide de développements limités : $x(t) = 2\left(1 - \dfrac{1}{2}t^2 + o(t^3)\right) - (1 - 2t^2 + o(t^3)) = 1 + t^2 + o(t^3)$; et $y(t) = 2\left(t - \dfrac{1}{6}t^3 + o(t^3)\right) - \left(2t - \dfrac{4t^3}{3} + o(t^3)\right) = t^3 + o(t^3)$. La dérivée seconde en 0 est horizontale et la dérivée tierce verticale, on a un point de rebroussement de première espèce avec tangente horizontale. Voici une allure de la courbe, dans laquelle vous ne manquerez pas de reconnaitre une belle cardoïde :



Allons-y pour les calculs. Commençons par calculer $\|\overrightarrow{f'(t)}\| = \|(2\sin(2t) - 2\sin(t); 2\cos(t) - 2\cos(2t))\| = 2\sqrt{\sin^2(2t) + \sin^2(t) - 2\sin(2t)\sin(t) + \cos^2(t) + \cos^2(2t) - 2\cos(2t)\cos(t)}$ $= 2\sqrt{2}\sqrt{1 - (\sin(2t)\sin(t) + \cos(2t)\cos(t))} = 2\sqrt{2}\sqrt{1-\cos(t)}$ en utilisant les formules d'addition trigonométriques. Or, par formule de duplication cette fois-ci, $\cos(t) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$, donc $\sqrt{1-\cos(t)} = \sqrt{2}\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|$. On peut se contenter de faire tous nos calculs sur l'intervalle $[0, \pi]$ où le sinus de $\frac{t}{2}$ est positif (ce serait encore le cas sur $[0, 2\pi]$), on aura alors $\|\overrightarrow{f'(t)}\| = 4\sin\left(\frac{t}{2}\right)$. C'est amplement suffisant pour nous permettre de calculer la longueur de la courbe (on va intégrer sur $[0, \pi]$ et multiplier par 2 pour tenir compte de la symétrie) : $L = 2\int_0^{\pi} 4\sin\left(\frac{t}{2}\right)\, dt = 8\left[-2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{\pi} = 8 \times 2 = 16$. Tant qu'on y est, on peut donner les vecteurs du repère de Frénet : $\overrightarrow{T} = \left(\frac{2\sin(t)(2\cos(t)-1)}{4\sin(\frac{t}{2})}; \frac{2\cos(t) - 2\cos(2t)}{4\sin(\frac{t}{2})}\right)$ (on peut simplifier si on est courageux, mais ça n'a pas grand intérêt, seule l'abscisse se simplifie vraiment) et $\overrightarrow{N} = \left(-\frac{2\cos(t) - 2\cos(2t)}{4\sin(\frac{t}{2})}; \frac{2\sin(t)(2\cos(t)-1)}{4\sin(\frac{t}{2})}\right)$.

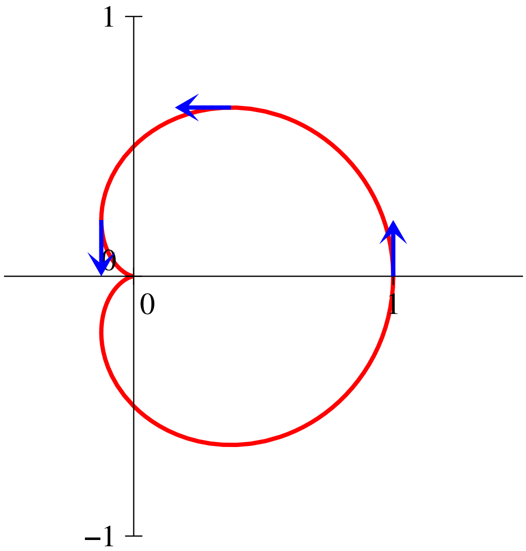
En reprenant les notations du cours, nous avons déjà calculé $\frac{ds}{dt} = 4\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|$, reste à calculer α, ou au moins $\frac{d\alpha}{dt}$. Rappelons que, pour une courbe en coordonnées cartésiennes, $\tan(\alpha) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$, soit ici $\tan(\alpha) = \frac{\cos(t) - \cos(2t)}{\sin(2t) - \sin(t)}$. Pas de simplification évidente, alors dérivons brutalement : $(1+\tan^2(\alpha))\frac{d\alpha}{dt} = \frac{(-\sin(t) + 2\sin(2t))(\sin(2t) - \sin(t)) - (2\cos(2t) - \cos(t))(\cos(t) - \cos(2t))}{(\sin(2t) - \sin(t))^2}$.
Quitte à écrire $1 + \tan^2(\alpha) = 1 + \frac{(\cos(t) - \cos(2t))^2}{(\sin(2t) - \sin(t))^2}$, on peut simplifier les dénominateurs et tout développer brutalement (décidément, que de brutalité) pour obtenir
$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{2\sin^2(2t) + \sin^2(t) - 3\sin(2t)\sin(t) + 2\cos^2(2t) + \cos^2(t) - 3\cos(2t)\cos(t)}{\sin^2(2t) + \sin^2(t) - 2\sin(2t)\sin(t) + \cos^2(t) + \cos^2(2t) - 2\cos(2t)\cos(t)}$
$= \frac{3(1 - \sin(2t)\sin(t) - \cos(2t)\cos(t))}{2(1 - \sin(2t)\sin(t) - \cos(2t)\cos(t))} = \frac{3}{2}$. Bon, là, tout de même, on se dit qu'on a sûrement fait des calculs beaucoup trop compliqués pour avoir un résultat si simple à la fin.

De fait, on pouvait simplifier α à l'aide des formules de transformation somme-produit : $\tan(\alpha) = \dfrac{\cos(t) - \cos(2t)}{\sin(2t) - \sin(t)} = \dfrac{-2\cos(\frac{3t}{2})\cos(\dfrac{-t}{2})}{2\cos(\frac{3t}{2})\sin(\frac{t}{2})} = \tan\left(\dfrac{3t}{2}\right)$. Tout s'explique, et au moins notre calcul est cohérent ! On peut désormais calculer la courbure $c = \dfrac{\frac{d\alpha}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \dfrac{3}{8|\sin(\frac{t}{2})|}$. Si on préfère, le rayon de courbure vaut donc $R = \dfrac{8}{3}\left|\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)\right|$. On termine avec les coordonnées du centre de courbure I. Pour cela, calculons $\overrightarrow{f(t)} + R\overrightarrow{N} = (2\cos(t) - \cos(2t), 2\sin(t) - \sin(2t)) + \dfrac{4}{3}(\cos(2t) - \cos(t), \sin(2t) - \sin(t)) = \left(\dfrac{2}{3}\cos(t) + \dfrac{1}{3}\cos(2t); \dfrac{2}{3}\sin(t) + \dfrac{1}{3}\sin(2t)\right)$. Les plus observateurs remarqueront que le centre de courbure a pour coordonnées $-\dfrac{1}{3}(2\cos(\pi + t) - \cos(2(\pi + t)); 2\sin(\pi + t) - \sin(2(\pi + t)))$, ce qui suffit, en comparant avec le paramétrage de la courbe initiale, à comprendre que le lieu décrit par les centres de courbure est également une cardioïde, mais homothétisée par rapport à l'originale, et symétrisée par rapport à l'axe des ordonnées. Bon, en même temps, on le prouvera dans l'exercice 4, alors attendons un peu.

2. Il peut paraitre curieux de demander le calcul de la longueur d'une courbe paramétrée non périodique mais c'est le cas ici. Les fonctions coordonnées sont définies et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, x est paire et y est impaire, on peut donc étudier sur $\mathbb{R}^+$ et effectuer ensuite une symétrie d'axe (Ox). Dérivons : $x'(t) = \dfrac{-2t(1+t^2)^2 - 4t(1+t^2)(1-t^2)}{(1+t^2)^4} = \dfrac{2t^3 - 6t}{(1+t^2)^3} = \dfrac{2t(t^2-3)}{(1+t^2)^3}$; et $y'(t) = \dfrac{2(1+t^2)^2 - 4t(1+t^2) \times 2t}{(1+t^2)^4} = \dfrac{2 - 6t^2}{(1+t^2)^3} = \dfrac{2(1-3t^2)}{(1+t^2)^3}$. On peut alors dresser le tableau de variations suivant :

t	0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$x'(t)$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
x	1	$\searrow$	$\frac{3}{8}$	$\searrow$	$-\frac{1}{8}$	$\nearrow$	0
$y'(t)$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{9}{8\sqrt{3}}$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{8}$	$\searrow$	0

En $\pm\infty$, la courbe se rapproche de l'origine du repère, ce qui explique que la courbe soit effectivement une courbe fermée. elle ressemble d'ailleurs à ceci :



Mais de qui se moque-t-on dans cet exercice ? Encore une cardioïde ? ? Eh oui, mais les calculs vont être différents, alors on va tout refaire (de toute façon, on aime ça, n'est-ce pas ?). Commençons par la dérivée de l'abscisse curviligne : $\|\overrightarrow{f'(t)}\| = \dfrac{2}{(1+t^2)^3}\|(t^3-3t, 1-3t^2)\| = \dfrac{2}{(1+t^2)^3}\sqrt{t^6-6t^4+9t^2+1-6t^2+9t^4} = \dfrac{2}{(1+t^2)^3}\sqrt{t^6+3t^4+3t^2+1} = \dfrac{2}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}$. On peut déjà en déduire les vecteurs du repère de Frénet : $\overrightarrow{T} = \left(\dfrac{t^3-3t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}, \dfrac{1-3t^2}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$ et $\overrightarrow{N} = \left(\dfrac{3t^2-1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}, \dfrac{t^3-3t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$. Pour le calcul de la longueur, on va tout de même avoir un petit problème, c'est que si on souhaite vraiment calculer la longueur de toute la (demi)-courbe obtenue quand t parcourt $\mathbb{R}^+$, il faut calculer une intégrale impropre, c'est-à-dire une intégrale dont une des bornes est infinie. On peut en fait ruser un peu ici, calculons simplement la longueur de l'arc parcourt lorsque t varie entre 0 et A, et on pourra ensuite faire tendre A vers $+\infty$. Il faut donc calculer $L_A = \displaystyle\int_0^A \frac{2}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\,dt$. Vous connaissez tous une primitive de cette fonction depuis que monsieur Raimi vous en a brillamment exhibé une, mais rappelons une façon mathématique d'obtenir le résultat : en intégrant par parties la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt$ (en primitivant 1 et en dérivant notre fonction), on obtient $\displaystyle\int_0^A \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt = \left[\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right]_0^A - \int_0^A t \times \frac{-2t}{-2(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\,dt = \frac{A}{\sqrt{1+A^2}} + \int_0^A \frac{1+t^2-1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\,dt = \frac{A}{\sqrt{1+A^2}} + \int_0^A \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\,dt$. En simplifiant le membre de gauche avec le morceau de droite qui lui est égal, on trouve que $L_A = \dfrac{2A}{\sqrt{1+A^2}}$. Cette quantité a bien une limite finie en $+\infty$, en admettant qu'elle correspond à la longueur de la courbe complète et en multipliant par 2 pour tenir compte de la deuxième moitié de courbe sur $\mathbb{R}^-$, on peut conclure que notre cardioïde a une longueur $L = 2\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{2A}{\sqrt{1+A^2}} = 4$. On peut comparer avezc la longueur de la première cardioïde étudiée dans cet exercice : celle-ci est quatre fois moins longue, et elle est effectivement obtenue à partir de l'autre par une homothétie de rapport $\dfrac{1}{4}$ (composée avec une symétrie par rapport à un axe vertical). Notons d'ailleurs qu'on pouvait certainement ramener le calcul de notre intégrale impropre à celui

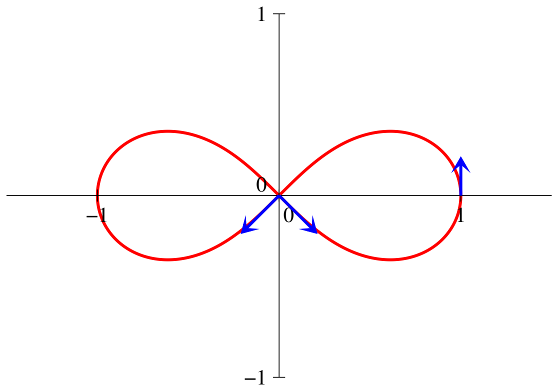
d'une intégrale classique via un changement de variables trigonométrique intelligent.
On peut maintenant passer à la suite des calculs. On sait déjà que $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{2}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}$. Par ailleurs, $\tan(\alpha) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{1-3t^2}{t^3-3t}$. En dérivant, $(1+\tan^2(\alpha))\dfrac{d\alpha}{dt} = \dfrac{-6t(t^3-3t)-3(t^2-1)(1-3t^2)}{(t^3-3t)^2}$. Comme $1+\tan^2(\alpha) = \dfrac{(t^3-3t)^2+(1-3t^2)^2}{(t^3-3t)^2}$, on trouve en mettant tout au même dénominateur et en développant que $\dfrac{d\alpha}{dt} = \dfrac{-6t^4+18t^2-3t^2+3+9t^4-9t^2}{t^6-6t^4+9t^2+1-6t^2+9t^4} = \dfrac{3(t^4+2t^2+1)}{(t^2+1)^3} = \dfrac{3}{1+t^2}$. On en déduit si on le souhaite que $\alpha(t) = 3\arctan(t)$, ce qui confirme qu'un changement de variables trigonométrique aurait beaucoup simplifié les choses. Peu importe, on peut désormais calculer $c = \dfrac{\frac{d\alpha}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{1+t^2}$, puis $R = \dfrac{2}{3\sqrt{1+t^2}}$. On peut alors déterminer les coordonnées du centre de courbure I : $\overrightarrow{f(t)} + R\overrightarrow{N} = \left(\dfrac{1-t^2}{(1+t^2)^2}, \dfrac{2t}{(1+t^2)^2}\right) + \dfrac{2}{3\sqrt{1+t^2}}\left(\dfrac{3t^2-1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}, \dfrac{t^3-3t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\right) = \left(\dfrac{1-t^2+\frac{2}{3}(3t^2-1)}{(1+t^2)^2}, \dfrac{2t+\frac{2}{3}(t^3-3t)}{(1+t^2)^2}\right)$
$= \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1-3t^2}{(1+t^2)^2}, \dfrac{2t^3}{(1+t^2)^2}\right)$.

Exercice 2 (**)

1. C'est une lemniscate de Bernoulli, on l'a déjà étudiée dans la feuille d'exercices sur les courbes planes. Rappelons rapidement les calculs : $\mathcal{D}_\rho = \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right] \cup \left[\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right]$ (modulo 2π). Comme ρ est de plus π-périodique, on peut se contenter d'étudier sur le premier intervalle et d'effectuer ensuite une symétrie par rapport à l'origine du repère. On calcule $\rho'(\theta) = -\dfrac{\sin(2\theta)}{\sqrt{\cos(2\theta)}}$, ce qui donne le tableau suivant :

θ	$-\frac{\pi}{4}$		0		$\frac{\pi}{4}$
ρ'		$+$	0	$-$	
ρ	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Il y a une tangente orthoradiale au point de paramètre $\theta = 0$, et les deux bissectrices sont tangentes à l'origine aux deux extrémités de l'intervalle, d'où une courbe ressemblant à ceci :



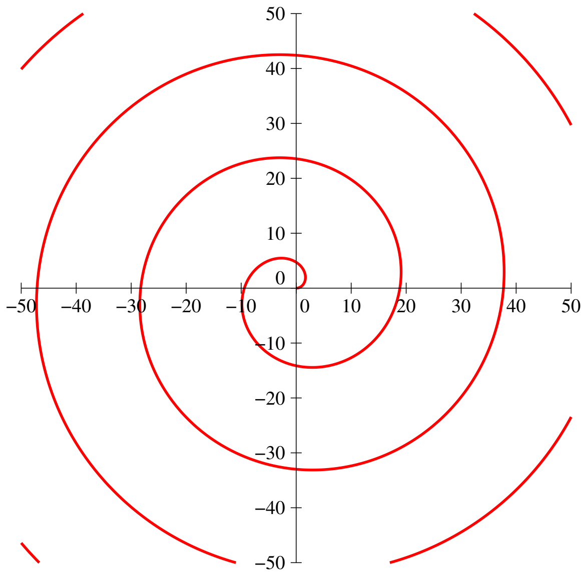
Commençons par calculer la norme du vecteur dérivé : $\|\overrightarrow{f'(t)}\| = \sqrt{\cos(2\theta) + \dfrac{\sin^2(2\theta)}{\cos(2\theta)}} = \dfrac{1}{\sqrt{\cos(2\theta)}}$. Normalement, arrivés à ce point, vous vous dites que le calcul de la longueur de la courbe va être un simple calcul d'intégrale trigonométrique qui ne devrait pas poser plus de problèmes que ça. Pas de chance, comme dans le cas de l'ellipse vu en cours, nous sommes en présence ici d'une intégrale elliptique qu'on ne sait pas calculer. Le résultat ne s'exprime d'ailleurs pas explicitement, mais simplement en fonction de la moyenne arithmético-géométrique de 1 et de $\sqrt{2}$.

Passons donc au calcul de courbure. On a déjà la valeur de $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{1}{\sqrt{\cos(2\theta)}}$, calculons maintenant α en partant de $\alpha = \theta + V$, avec $\tan(V) = \dfrac{\rho}{\rho'} = \dfrac{\cos(2\theta)}{-\sin(2\theta)} = -\dfrac{1}{\tan(2\theta)} = \tan\left(2\theta + \dfrac{\pi}{2}\right)$. On peut donc choisir $V = 2\theta + \dfrac{\pi}{2}$, soit $\alpha = 3\theta + \dfrac{\pi}{2}$. On trouve alors $\dfrac{d\alpha}{d\theta} = 3$, donc la courbe vaut $c = \dfrac{\frac{d\alpha}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = 3\sqrt{\cos(2\theta)} = 3\rho(\theta)$.

Bon, je vous sens quand même frustrés par cette histoire de longueur qu'on ne peut pas calculer, alors je vais essayer de vous expliquer un peu mieux comment ça marche. Reprenons notre intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\cos(2\theta)}}\, d\theta$ (longueur d'une demi-boucle de la lemniscate, on multiplie par quatre pour la longueur totale de la boucle), et effectuons un changement de variable $t = \tan(\theta)$ comme préconisé par les règles de Bioche : les bornes deviennent 0 et 1, on a $dt = (1 + t^2)d\theta$ et $\cos(2\theta) = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$ (ce sont les formules utilisés quand on prend la tangente de l'angle moitié comme changement de variables), donc $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1 + t^2)\sqrt{\frac{1-t^2}{1+t^2}}}\, dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1 + t^2)(1 - t^2)}}\, dt$. On peut alors faire un deuxième changement de variables en posant $t = \sin(u)$ (donc $dt = \cos(u)du$, les bornes deviennent $\arcsin(0) = 0$ et $\arcsin(1) = \dfrac{\pi}{2}$) pour obtenir $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(u)}{\sqrt{(1 - \sin^2(u))(1 + \sin^2(u))}}\, du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2(u)}}\, du$
$= \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\cos^2(u) + 2\sin^2(u)}}\, du$. On ne sait toujours pas calculer ça, mais cette dernière intégrale est justement du type appelé intégrale elliptique. On pose plus généralement, pour a et b deux réels strictement positifs, $I(a, b) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{a^2\cos^2(u) + b^2\sin^2(u)}}\, du$ (retournez vois ce qu'on avait fait pour l'ellipse dans le cours). On cherche ici la valeur de $I(1, \sqrt{2})$. Or, on peut constater en faisant un changement de variables ignoble du genre $\sin(u) = \dfrac{2a\sin(v)}{a + b + (a - b)\sin^2(v)}$ que $I(a, b) = I\left(\dfrac{a + b}{2}, \sqrt{ab}\right)$ (je vous passe les détails de ce calcul sans intérêt, qui a été découvert par Gauss quand il était gamin ou à peu près). On peut évidemment recommencer le même calcul avec les nouvelles valeurs de a et b. Si vous préférez, si on construit deux suites récurrentes de la façon suivante : $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$, alors on aura toujours $I(a, b) = I(a_n, b_n)$. Mais vous n'êtes pas sans savoir, depuis le magnifique exercice 11 de la feuille n°9, que les deux suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes et convergent donc vers une limite commune appelée moyenne arithmético-géométrique des réels a et b. En admettant un passage à la limite pas si facile que ça, et en notant μ la moyenne arithmético-géométrique de 1 et de $\sqrt{2}$, on pourra donc écrire $I(1, \sqrt{2}) = I(\mu, \mu)$. Et cette

dernière intégrale se calcule : $I(\mu,\mu) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\mu^2\cos^2(u)+\mu^2\sin^2(u)}}\,du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\mu}\,du = \frac{\pi}{2\mu}$.
Autrement dit, la longueur totale de la lemniscate est de $\dfrac{2\pi}{\mu}$. Pour les curieux, $\mu \simeq 1.311$, donc $L \simeq 5.244$.

2. L'étude de la courbe ne présente ici que très peu d'intérêt, c'est une spirale donc voici une allure (on a seulement représenté les valeurs positives de θ) :

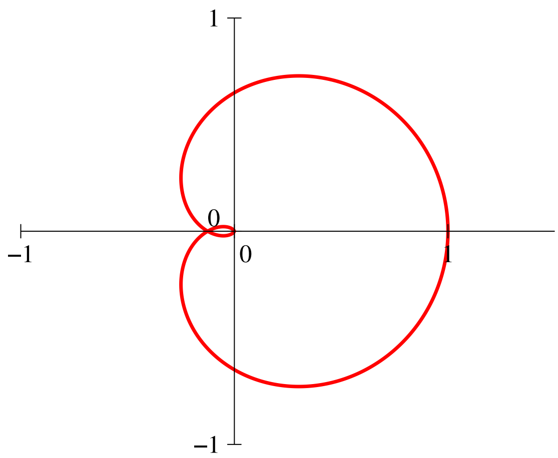


Pour calculer la longueur, il faudra bien sûr se restreindre à un intervalle du type $[0, A]$ puisque la courbe n'est pas fermée. Commençons par calculer $\dfrac{ds}{dt} = \sqrt{9\theta^2+9} = 3\sqrt{1+\theta^2}$. Pas de pot, on ne sait pas trouver de primitive de cette fonction, donc pas calculer exactement cette longueur. Pour en donner une valeur vraiment très approximative, tout ce qu'on peut faire c'est encadrer les morceaux de spirale entre des demi-cercles. Ainsi, la portion de spirale correspondant à $\theta \in [\pi, 2\pi]$ a une longueur comprise entre celle d'un demi-cercle de rayon 3π (donc $3\pi^2$) et celle d'un demi-cercle de rayon 6π, donc $6\pi^2$. De même, entre 2π et 3π, on aura une longueur entre $6\pi^2$ et $9\pi^2$ etc. C'est évidemment extrêmement imprécis.
Passons au calcul de courbure : $\dfrac{ds}{d\theta} = 3\sqrt{1+\theta^2}$. Par ailleurs, $\alpha = \theta + V$, avec $\tan(V) = \theta$. On peut dériver pour obtenir $(1+\tan^2(V))\dfrac{dV}{d\theta} = 1$, soit $(1+\theta^2)\dfrac{dV}{d\theta} = 1$, et donc $\dfrac{dV}{d\theta} = \dfrac{1}{1+\theta^2}$, puis $\dfrac{d\alpha}{d\theta} = 1 + \dfrac{1}{1+\theta^2} = \dfrac{2+\theta^2}{1+\theta^2}$. On conclut : $c = \dfrac{2+\theta^2}{3(1+\theta^2)^{\frac{3}{2}}}$.

3. La fonction est 6π-périodique et paire, on peut étudier sur $[0, 3\pi]$ puis effectuer une symétrie par rapport à l'axe des abscisses. On calcule $\rho'(\theta) = -3 \times \dfrac{1}{3}\cos^2\left(\dfrac{\theta}{3}\right)\sin\left(\dfrac{\theta}{3}\right)$, qui est du signe opposé à celui de $\sin\left(\dfrac{\theta}{3}\right)$, donc est négatif sur $[0, 3\pi]$. On peut dresser le tableau de variations suivant :

θ	0		$\frac{3\pi}{2}$		3π
ρ	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

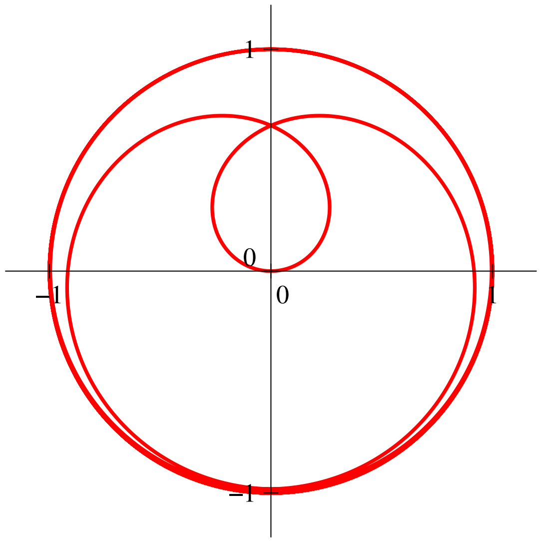
On peut ajouter pour la courbe les valeurs de $\rho\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$; $\rho(\pi) = \dfrac{1}{8}$; $\rho(2\pi) = -\dfrac{1}{8}$ et $\rho\left(\dfrac{5\pi}{2}\right) = -\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$. En fait, on peut constater que $\rho(3\pi - \theta) = -\rho(\theta)$, ce qui prouve une symétrie par rapport à l'axe des abscisses et permet de ne s'intéresser qu'à la première moitié de l'intervalle (et oublier la seconde symétrie évoquée plus haut). Accessoirement, on a un point double pour les valeurs π et 2π du paramètre, la courbe ressemble à ceci (son petit nom est sextique de Cayley) :



L'abscisse curviligne a pour dérivée $\dfrac{ds}{d\theta} = \sqrt{\cos^6\left(\dfrac{\theta}{3}\right) + \cos^4\left(\dfrac{\theta}{3}\right)\sin^2\left(\dfrac{\theta}{3}\right)}$ $= \cos^2\left(\dfrac{\theta}{3}\right)\sqrt{\cos^2\left(\dfrac{\theta}{3}\right) + \sin^2\left(\dfrac{\theta}{3}\right)} = \cos^2\left(\dfrac{\theta}{3}\right)$. Pour calculer la longueur totale de la courbe, on va intégrer entre 0 et 3π directement, en utilisant la formule de duplication pour transformer le cosinus carré : $L = \displaystyle\int_0^{3\pi} \cos^2\left(\frac{\theta}{3}\right)\,d\theta = \int_0^{3\pi} \frac{1+\cos(\frac{2\theta}{3})}{2}\,d\theta = \left[\frac{\theta}{2} + \frac{3}{4}\sin\left(\frac{2\theta}{3}\right)\right]_0^{3\pi} = \frac{3\pi}{2}$.

Passons au calcul de courbure. On peut écrire $\alpha = \theta + V$, avec $\tan(V) = \dfrac{\cos^3(\frac{\theta}{3})}{-\cos^2(\frac{\theta}{3})\sin(\frac{\theta}{3})} = -\dfrac{1}{\tan(\frac{\theta}{3})}$, donc $\alpha = \theta + \dfrac{\theta}{3} + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{4\theta}{3} + \dfrac{\pi}{2}$ convient. En particulier, $\dfrac{d\alpha}{d\theta} = \dfrac{4}{3}$, et $c = \dfrac{4}{3\cos^2(\frac{\theta}{3})}$.

4. La fonction n'est pas périodique, par contre elle est impaire, il y aura donc une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées permettant de restreindre l'étude à $\mathbb{R}^+$. On sait déjà que la fonction ρ est strictement croissante, mais calculons quand même la dérivée, ça servira pour la suite : $\rho'(\theta) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \text{th}^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right)$. Rien de spécial à signaler si ce n'est un cercle asymptote de rayon 1 en $\pm\infty$ puisque $\displaystyle\lim_{\theta\to\pm\infty} \rho(\theta) = 1$. Une allure de la courbe :



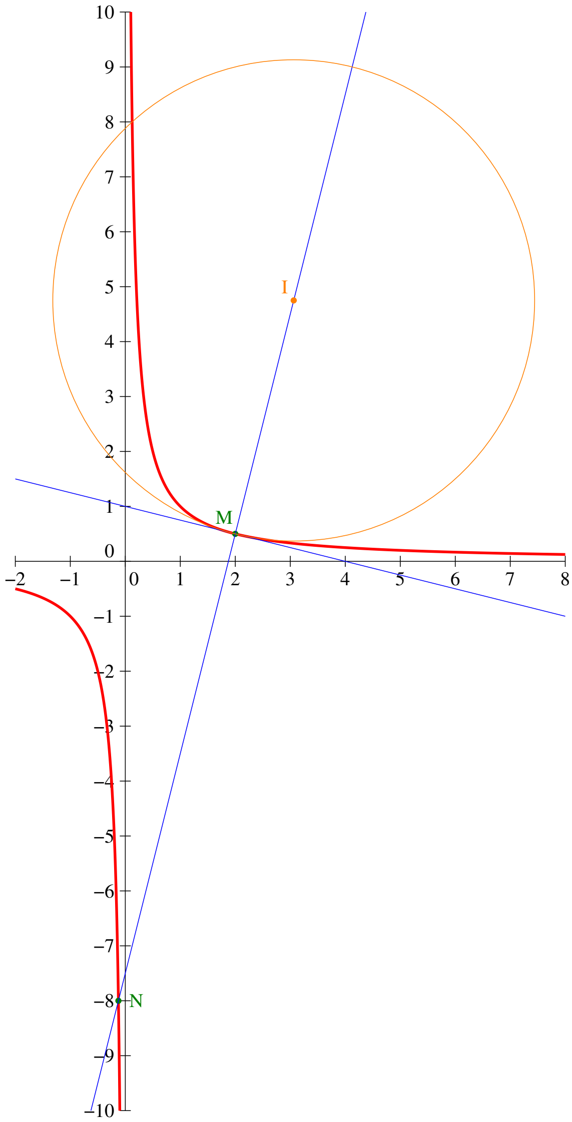
Commençons comme d'habitude par calculer $\dfrac{ds}{d\theta} = \sqrt{\operatorname{th}^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right) + \dfrac{1}{4}\left(1 - 2\operatorname{th}^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right) + \operatorname{th}^4\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right)} = \sqrt{\dfrac{1}{4}\left(1 + 2\operatorname{th}^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right) + \operatorname{th}^4\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right)} = \dfrac{1}{2}\left(1 + \operatorname{th}^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right)$. La courbe n'est pas fermée (contrairement à ce que la figure peut laisser croire, en fait, la courbe se rapproche très rapidement de son cercle asymptote), mais on peut calculer facilement (pour une fois) des longueurs de portion de courbe : $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^A 1 + \operatorname{th}^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\, d\theta = \dfrac{1}{2}\left[\theta + \theta - 2\operatorname{th}\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right]_0^A = A - \operatorname{th}\left(\dfrac{A}{2}\right)$.

On enchaîne avec le calcul de la courbure. On écrit $\alpha = \theta + V$, avec $\tan(V) = \dfrac{2\operatorname{th}(\frac{\theta}{2})}{1 - \operatorname{th}^2(\frac{\theta}{2})}$, soit $(1 + \tan^2(V))\dfrac{dV}{d\theta} = \dfrac{(1 - \operatorname{th}^2(\frac{\theta}{2}))^2 + 2\operatorname{th}^2(\frac{\theta}{2})(1 - \operatorname{th}^2(\frac{\theta}{2}))}{(1 - \operatorname{th}^2(\frac{\theta}{2}))^2} = \dfrac{(1 - \operatorname{th}^2(\frac{\theta}{2}))(1 + \operatorname{th}^2(\frac{\theta}{2}))}{(1 - \operatorname{th}^2(\frac{\theta}{2}))^2}$. Comme $1 + \tan^2(V) = 1 + \dfrac{4\operatorname{th}^2(\frac{\theta}{2})}{(1 - \operatorname{th}^2(\frac{\theta}{2}))^2}$, on obtient après simplification $\dfrac{dV}{d\theta} = \dfrac{(1 - \operatorname{th}^2(\frac{\theta}{2}))(1 + \operatorname{th}^2(\frac{\theta}{2}))}{(1 + \operatorname{th}^2(\frac{\theta}{2}))^2} = \dfrac{(1 - \operatorname{th}^2(\frac{\theta}{2}))}{(1 + \operatorname{th}^2(\frac{\theta}{2}))}$, puis $\dfrac{d\alpha}{d\theta} = 1 + \dfrac{dV}{d\theta} = \dfrac{2}{1 + \operatorname{th}^2(\frac{\theta}{2})}$. Enfin, on conclut que $c = \dfrac{4}{(1 + \operatorname{th}^2(\frac{\theta}{2}))^2}$.

Exercice 3 (**)

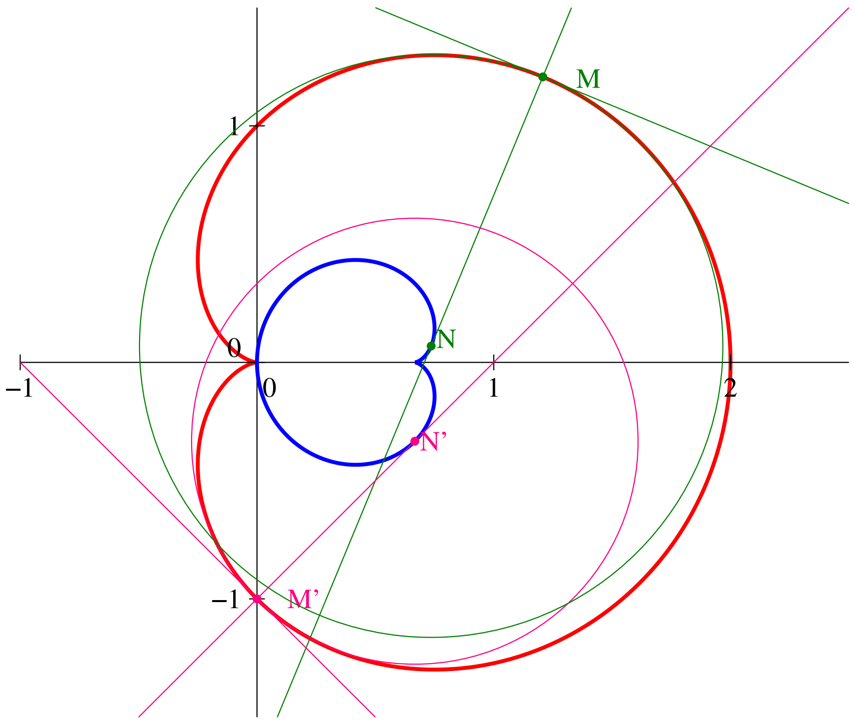
Considérons donc un point $M\left(x_M, \dfrac{1}{x_M}\right)$ appartenant à l'hyperbole (qui sera simplement paramétrée par son abscisse). Le vecteur tangent à $\mathcal{H}$ en M a pour coordonnées $\left(1, -\dfrac{1}{x_M^2}\right)$. On peut donc calculer $\|\overrightarrow{f'(x)}\| = \sqrt{1 + \dfrac{1}{x^4}} = \dfrac{\sqrt{1 + x^4}}{x^2}$. si on préfère, les vecteurs du repère de Frénet seront donnée par $\overrightarrow{T} = \left(\dfrac{x^2}{\sqrt{1 + x^4}}, -\dfrac{1}{\sqrt{1 + x^4}}\right)$ et $\overrightarrow{N} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{1 + x^4}}, \dfrac{x^2}{\sqrt{1 + x^4}}\right)$. Tant qu'on y est, calculons la courbure et les coordonnées du point I (ou au moins du vecteur $\overrightarrow{MI}$) : on peut écrire $\tan(\alpha) = \dfrac{y'}{x'} = -\dfrac{1}{x^2}$, soit en dérivant $(1 + \tan^2(\alpha))\dfrac{d\alpha}{dx} = \dfrac{2}{x^3}$, donc $\dfrac{x^4 + 1}{x^4}\dfrac{d\alpha}{dx} = \dfrac{2}{x^3}$ et $\dfrac{d\alpha}{dx} = \dfrac{2x}{1 + x^4}$. On peut en déduire la courbure $c = \dfrac{\frac{d\alpha}{dx}}{\|\overrightarrow{f'(x)}\|} = \dfrac{2x^3}{(1+x^4)^{\frac{3}{2}}}$, puis le rayon de courbure $R = \dfrac{1}{c} = \dfrac{(1+x^4)^{\frac{3}{2}}}{2x^3}$. En particulier, $\overrightarrow{MI} = R\overrightarrow{N} = \left(\dfrac{1+x^4}{2x^3}, \dfrac{1+x^4}{2x}\right)$.

Reste maintenant à déterminer les coordonnées du point N. Puisque $\overrightarrow{T}$ est un vecteur normal à la normale, la normale au point M a une équation de la forme $x_M^2(x - x_M) - (y - y_M) = 0$, soit $x_M^2(x - x_M) - y + \dfrac{1}{x_M} = 0$, ou encore $x_M^3(x - x_M) - x_M y + 1 = 0$. Si on souhaite ajouter la condition que le point N appartient à l'hyperbole, il faut avoir $y = \dfrac{1}{x}$, d'où $x_M^3(x - x_M) - \dfrac{x_M}{x} + 1 = 0$, soit $x_M^3 x^2 - x_M^4 x - x_M + x = 0$. On reconnait une équation du second degré, de discriminant $\Delta = (1 - x_M^4)^2 + 4x_M^4 = (1 + x_M^4)^2$, et admet donc pour racines $x_1 = \dfrac{-1 + x_M^4 + 1 + x_M^4}{2x_M^3} = x_M$ (solution peu intéressante mais normale, le point M lui-même appartenant certainement à l'hyperbole et à la normale), et $x_2 = \dfrac{-1 + x_M^4 - 1 + x_M^4}{2x_M^3} = -\dfrac{1}{x_M^3}$. Autrement dit, on prendra $N\left(-\dfrac{1}{x_M^3}, -x_M^3\right)$. On calcule alors facilement $\overrightarrow{NM} = \left(x_M + \dfrac{1}{x_M^3}, \dfrac{1}{x_M} + x_M^3\right) = \left(\dfrac{1+x_M^4}{x_M^3}, \dfrac{1+x_M^4}{x_M}\right) = 2\overrightarrow{MI}$. Une petit figure pour illustrer cette superbe propriété (le cercle osculateur est indiqué en orange) :

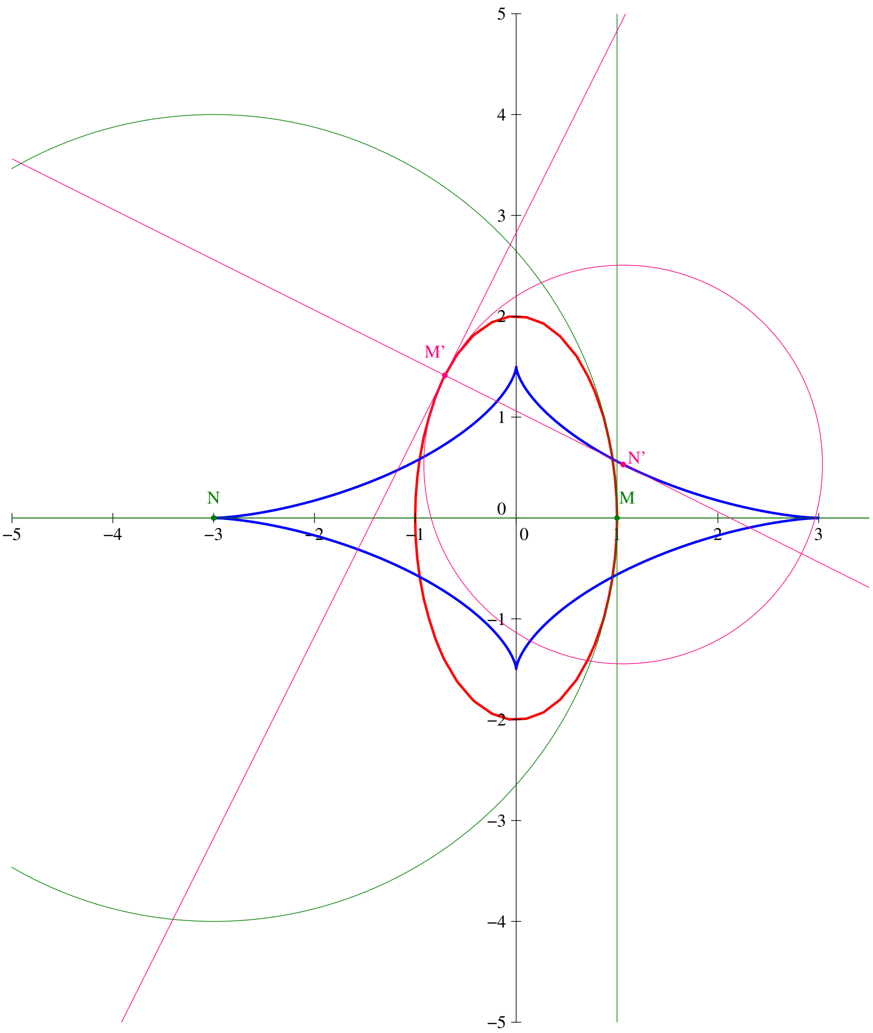


Exercice 4 (***)

- On commence encore une fois par étudier rapidement la courbe avant de faire le calcul des coordonnées du centre de courbure. La fonction ρ est 2π-périodique et paire, on peut donc étudier sur $[0, \pi]$ et compléter par symétrie par rapport à l'axe des abscisses. Comme $\rho'(\theta) = -\sin(\theta) \geqslant 0$, la fonction ρ est simplement décroissante sur $[0, \pi]$, partant de la valeur 2 en 0 (avec une tangente orthoradiale) et arrivant en l'origine pour $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. Bref, c'est une cardioïde tout ce qu'il y a de plus ordinaire.
Allons-y pour les calculs : $\dfrac{ds}{d\theta} = \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)} = \sqrt{1 + 2\cos(\theta) + \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)}$ $= \sqrt{2(1 + \cos(\theta))} = \sqrt{4\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)} = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ en utilisant la formule de duplication $\cos(\theta) = 2\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right) - 1$. On peut ensuite écrire $\alpha = \theta + V$, avec $\tan(V) = \dfrac{\rho}{\rho'} = \dfrac{1 + \cos(\theta)}{-\sin(\theta)}$. Allez, soyons astucieux pour éviter de dériver : $\tan(V) = \dfrac{2\cos^2(\frac{\theta}{2})}{-2\sin(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\theta}{2})} = -\dfrac{1}{\tan(\frac{\theta}{2})} = \tan\left(\dfrac{\theta}{2} + \dfrac{\pi}{2}\right)$. On peut donc poser $\alpha = \dfrac{3\theta + \pi}{2}$, et $\dfrac{d\alpha}{d\theta} = \dfrac{3}{2}$. On en déduit la courbure $c = \dfrac{\frac{d\alpha}{d\theta}}{\frac{ds}{d\theta}} = \dfrac{3}{4\cos(\frac{\theta}{2})}$, puis le rayon de courbure $R = \dfrac{4}{3}\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$. Restent à déterminer les vecteurs du repère de Frénet : $\overrightarrow{T} = -\dfrac{\sin(\theta)}{2\cos(\frac{\theta}{2})}\overrightarrow{u_\theta} + \dfrac{1 + \cos(\theta)}{2\cos(\frac{\theta}{2})}\overrightarrow{v_\theta}$, et $\overrightarrow{N} = -\dfrac{1 + \cos(\theta)}{2\cos(\frac{\theta}{2})}\overrightarrow{u_\theta} - \dfrac{\sin(\theta)}{2\cos(\frac{\theta}{2})}\overrightarrow{v_\theta}$. On en déduit que I a pour coordonnées dans le repère $(\overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{v_\theta})$: $\left(1 + \cos(\theta) - \dfrac{2}{3}(1 + \cos(\theta)), -\dfrac{2}{3}\sin(\theta)\right)$. Revenons dans le repère cartésien usuel : $\overrightarrow{OI} = \dfrac{1}{3}(1 + \cos(\theta))\cos(\theta)\overrightarrow{i} + \dfrac{1}{3}(1 + \cos(\theta))\sin(\theta)\overrightarrow{j} + \dfrac{2}{3}\sin^2(\theta)\overrightarrow{i} - \dfrac{2}{3}\sin(\theta)\cos(\theta)\overrightarrow{j}$, soit $I = \left(\dfrac{1}{3}\cos(\theta) + \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{3}\cos^2(\theta), \dfrac{1}{3}\sin(\theta)(1 + \cos(\theta) - 2\cos(\theta)\right)$ $= \left(\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3}(1 - \cos(\theta))\cos(\theta); \dfrac{1}{3}(1 - \cos(\theta))\sin(\theta)\right)$. On peut constater que dans le repère d'origine $A\left(\dfrac{2}{3}, 0\right)$ (pour se débarasser de la constante dans la première coordonnée), I a pour coordonnées $\dfrac{1}{3}((1 - \cos(\theta))\cos(\theta), (1 - \cos(\theta)\sin(\theta))$. Autrement dit, $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{3}(1 - \cos(\theta))\overrightarrow{u_\theta} = \dfrac{1}{3}(1 + \cos(\pi - \theta))\overrightarrow{u_\theta}$. On reconnait, à un facteur $\dfrac{1}{3}$ près, l'équation dont on est partis. Autrement dit, la développée de notre cardioïde est également une cardioïde homothétisée d'un rapport $\dfrac{1}{3}$, symétrisée par rapport à l'axe des ordonnées (car l'angle est passé de θ à $\pi - \theta$) et translatée pour avoir sa « pointe » située en A). On voir nettement mieux sur une figure (en rouge la cardioïde initiale, en bleu la cardioïde développée, en vert et en rose deux points de la courbe avec les tangentes, normales, centres de courbures et cercles osculateurs correspondants) :



- Pour les calculs, paramétrons notre ellipse par le paramétrage classique $\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & \cos(t) \\ y(t) & = & 2\sin(t) \end{array}\right.$. On ne va pas s'embêter à étudier quoi que ce soit pour une ellipse, passons directement aux calculs. Signalons quand même que $x'(t) = -\sin(t)$ et $y'(t) = 2\cos(t)$, ce qui permet de calculer $\dfrac{ds}{dt} = \sqrt{\sin^2(t) + 4\cos^2(t)}$. On en déduit les vecteurs du repère de Frénet : $\overrightarrow{T} = \left(-\dfrac{\sin(t)}{\sqrt{\sin^2(t)+4\cos^2(t)}}, \dfrac{2\cos(t)}{\sqrt{\sin^2(t)+4\cos^2(t)}}\right)$ et $\overrightarrow{N} = \left(-\dfrac{2\cos(t)}{\sqrt{\sin^2(t)+4\cos^2(t)}}, -\dfrac{\sin(t)}{\sqrt{\sin^2(t)+4\cos^2(t)}}\right)$. On peut maintenant passer au calcul de la courbure : $\tan(\alpha) = \dfrac{y'}{x'} = -\dfrac{2\cos(t)}{\sin(t)} = -\dfrac{2}{\tan(t)} = 2\tan\left(t + \dfrac{\pi}{2}\right)$. On en déduit en dérivant que $(1+\tan^2(\alpha))\dfrac{d\alpha}{dt} = 2\left(1 + \tan^2\left(t + \dfrac{\pi}{2}\right)\right)$. Comme $1 + \tan^2(\alpha) = 1 + 4\tan^2\left(t + \dfrac{\pi}{2}\right)$, alors $\dfrac{d\alpha}{dt} = \dfrac{2 + 2\frac{\cos^2(t)}{\sin^2(t)}}{1 + 4\frac{\cos^2(t)}{\sin^2(t)}} = \dfrac{2}{\sin^2(t) + 4\cos^2(t)}$. On peut alors enchaîner sur le calcul de la courbure $c = \dfrac{2}{(\sin^2(t) + 4\cos^2(t))^{\frac{3}{2}}}$, puis le rayon de courbure $R = \dfrac{1}{2}(\sin^2(t)+4\cos^2(t))^{\frac{3}{2}}$. On peut alors déterminer les coordonnées du centre de courbure I : $\left(\cos(t) - (\sin^2(t) + 4\cos^2(t))\cos(t), 2\sin(t) - \dfrac{1}{2}(\sin^2(t) + 4\cos^2(t))\sin(t)\right)$. Comme $\sin^2(t) + 4\cos^2(t) = 1+3\cos^2(t) = 4-3\sin^2(t)$, on peut simplifier tout ça en $I = \left(-3\cos^3(t), \dfrac{3}{2}\sin^3(t)\right)$, et on peut reconnaitre dans la courbe parcourue par les centres de courbure l'image d'une astroïde par une affinité de rapport $\dfrac{1}{2}$ dans la direction de l'axe des ordonnées (puisqu'au facteur $\dfrac{1}{2}$ près et à une symétrie près par rapport à l'axe des abscisses qui ne change rien, on a du $3\cos^3(t)$ et du $3\sin^3(t)$, ce qui est le paramétrage d'une astroïde). Allez, un beau schéma pour conclure :


M'
N'
N
M
0
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
5
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−5

TD n°14 : sujet d'annales.

PTSI B Lycée Eiffel

18 juin 2013

CONCOURS COMMUN 2009
DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Épreuve Spécifique de Mathématiques
(filière MPSI)

Mardi 19 mai 2009 de 08h00 à 12h00

Instructions générales :

Les candidats doivent vérifier que le sujet comprend 4 pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4, 4/4.

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Les candidats colleront sur leur première feuille de composition l'étiquette à code à barres correspondant à l'épreuve spécifique de Mathématiques.

L'emploi d'une calculatrice est interdit.

Remarque importante :

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Problème 1.

On rappelle que le nombre $e = \exp(1) \approx 2{,}72$, $\dfrac{1}{\sqrt{e}} \approx 0.61$, $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ et $\ln(3) \approx 1{,}10$.

I Etude d'une fonction.

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall\ x \in \mathbb{R}, f(x) = 3x\exp(-x^2) - 1 = 3xe^{-x^2} - 1$.

1 Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$, ainsi que les limites aux bornes du domaine de définition. Donner le tableau de variations de f. Préciser les branches infinies de la courbe représentative C_f de f.

2 Calculer $f''(x)$. Qu'en déduit-on pour le point de C_f d'abscisse 0 ?

3 Donner l'équation de la tangente en 0. Etudier la position de la courbe C_f par rapport à la tangente au point d'abscisse 0. Quel résultat retrouve-t-on ?

4 Donner l'allure de la courbe C_f de f.

5

a) Pourquoi f admet-elle des développements limités en 0 à n'importe quel ordre ?

b) Donner le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 5.

II Etude d'une équation différentielle.

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Soit E_n l'équation différentielle $xy'-(n-2x^2)y = n-2x^2$. Soit H_n l'équation homogène (dite aussi sans second membre) associée à E_n.

6 Résoudre H_n sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$.

7 En déduire les solutions de E_n sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$.

8 Donner toutes les fonctions f définies, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et solutions de E_n sur $\mathbb{R}$. On distinguera les cas $n = 1$ et $n \geq 2$.

III Etude de deux suites.

On suppose désormais dans toute la suite du problème que l'entier naturel n est supérieur ou égal à 2. Soit $f_n(x) = 3x^n e^{-x^2} - 1 = 3x^n \exp(-x^2) - 1$.

9 Quel est le signe de $f_n(0)$, de $f_n(1)$?

10 Etudier les variations de f_n sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Donner la limite de $f_n(x)$ quand x tend vers $+\infty$. En déduire que f_n s'annule sur $[0,+\infty[$ en deux réels notés u_n et v_n, qui vérifient $u_n < 1 < v_n$.

11 Quelle est la limite de la suite $(v_n)_{n\geq 2}$?

12

a) Calculer $\exp(-u_n{}^2) = e^{-u_n{}^2}$ en fonction de $u_n{}^n$.

b) En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$.

c) Déduire de ce qui précède la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq 2}$.

d) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est convergente. Soit l sa limite.

13 Soit g_n définie sur $]0, +\infty[$ par : $\forall x > 0,\ g_n(x) = \ln 3 + n\ln x - x^2$.

a) Soit $t > 0$. Montrer que $g_n(t) = 0$ si et seulement si $f_n(t) = 0$.

b) On suppose que : $l \neq 1$. Trouver une contradiction en utilisant ce qui précède. Conclusion ?

c) Soit la suite $(w_n)_{n\geq 2}$ définie par : $\forall n \geq 2\ w_n = u_n - 1$. Trouver en utilisant un développement limité de $g_n(1+w_n) = g_n(u_n)$ un équivalent simple de w_n.

IV Etude d'une courbe paramètrée.

Soit $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé. Soit M la courbe paramétrée définie sur $]0, +\infty[$ tel que pour tout t strictement positif, $M(t)$ ait pour coordonnées dans le repère R, $(x(t), y(t))$ avec

$$\begin{cases} x(t) = g_2(t) = \ln 3 + 2\ln(t) - t^2 \\ y(t) = t - \dfrac{1}{3}t^3 \end{cases}$$

14

a) Etudier les variations de x et y ainsi que leurs limites aux bornes du domaine de définition.

b) Etudier les branches infinies de la courbe M.

c) Etudier la nature du point $M(1)$. Donner un vecteur directeur de la tangente en $M(1)$ à la courbe.

15 Tracer l'allure de la courbe M.

Problème 2.

On notera $\mathbb{C}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes et $\mathbb{C}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ de degré inférieur ou égal à n où n est un entier naturel non nul. On note $\mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. On confondra polynôme et fonction polynôme. On notera $\deg(P(X))$ le degré d'un polynôme $P(X)$.

I Etude d'un polynôme.

16 Soit $U(X)$ le polynôme de $\mathbb{C}_2[X]$ suivant : $U(X) = X^2+(1-2i)X-2i$.

a) Donner les racines carrées de $-3+4i$.

b) Trouver les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme $U(X)$.

17 Soit le complexe z, $z = x+iy$ avec x et y réels.

a) Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de $U(z)$ en fonction de x et de y.

b) Soit le plan rapporté à un repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$. (On prendra $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ cm.)

i) Soit Γ_1 l'ensemble des points M de coordonnées (x, y) tels que $U(x+iy)$ est imaginaire pur. Donner la nature de Γ_1, son centre et son excentricité. Tracer Γ_1.

ii) Soit Γ_2 l'ensemble des points M de coordonnées (x, y) tels que $U(x+iy)$ est réel. Donner sa nature et son centre. Tracer Γ_2 sur le même dessin que Γ_1.

II Définition d'une application.

Soit n un entier naturel non nul fixé pour toute la suite du problème. Soit $T(X)$ un polynôme fixé de $\mathbb{C}[X]$ de degré n. Soit f l'application définie sur $\mathbb{C}[X]$ qui à tout $P(X)$ de $\mathbb{C}[X]$ associe $Q(X)+XR(X)$ où $Q(X)$ et $R(X)$ sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de $P(X^2)$ par $T(X)$. (On a donc $P(X^2) = Q(X)T(X)+R(X)$ avec $\deg(R(X)) < \deg(T(X))$). On notera f_n la restriction de f à $\mathbb{C}_n[X]$.

18 Montrer que f est une application linéaire.

19 Montrer que f_n est un endomorphisme de l'espace vectoriel $(\mathbb{C}_n[X], +, .)$.

20 Dans cette question uniquement $n = 2$ et $T(X) = X^2$.

a) Donner la matrice A de f_2 sur la base canonique $(1, X, X^2)$.

b) Calculer A^2. En déduire que f_2 est bijective et donner son application réciproque. En déduire la nature de f_2.

21 Dans cette question uniquement $n = 2$ et $T(X) = (X-1-i)(X+i)$. Donner l'image du polynôme $U(X) = X^2+(1-2i)X-2i$ par l'application f.

III Etude d'un cas particulier.

Soit a un complexe fixé. Dans cette partie uniquement, $n = 3$ et $T(X) = X^3+X^2+a$.

22 Montrer que f_3 a pour matrice sur la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{C}_3[X]$:

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -a-1 \\ 1 & 0 & a+1 & 1+a+a^2 \\ 0 & 0 & -a & -a-1 \\ 0 & 1 & 1 & 2a+2 \end{pmatrix}.$$

23 Calculer le déterminant de f_3.

24 Donner les valeurs de a pour lesquelles f_3 n'est pas bijective.

25 Dans cette question $a = -1$.

a) Donner une base de $\ker f_3$, le noyau de f_3.

b) Donner une base de $\mathrm{Im}\, f_3$, l'image de f_3.

c) Le noyau et l'image de f_3 sont-ils supplémentaires ?

IV Etude du noyau.

26 Soit $P(X)$ un polynôme non nul de degré p tel que : $2p < n$. Montrer que $f(P(X))$ est non nul.

27 Soit $P(X)$ un polynôme. Montrer qu'il appartient au noyau de f si et seulement si il existe un polynôme $R(X)$ de degré strictement inférieur à n tel que : $P(X^2) = R(X)(1-XT(X))$.

28 En déduire que si $P(X)$ est un élément du noyau de f alors il appartient à $\mathbb{C}_n[X]$.

29 Déduire de la question **27** que pour tout élément P du noyau de f et que pour tout k de $\mathbb{N}$ tel que $\deg(P(X))+k \leq n$ alors $X^k P(X)$ appartient au noyau de f.

30 On suppose dans cette question que le noyau de f n'est pas réduit au polynôme nul. Soit I l'ensemble des entiers naturels k tel qu'il existe un polynôme du noyau de f qui a pour degré k.

a) Montrer que I possède un plus petit élément d.

b) Soit $P_0(X)$ un polynôme du noyau ayant pour degré d. Soit $P_1(X)$ un autre polynôme du noyau ayant pour degré d. Montrer qu'il existe c de $\mathbb{C}$ tel que $P_1(X) = cP_0(X)$.

c) Montrer qu'un polynôme $P(X)$ appartient au noyau de f si et seulement s'il existe un polynôme $S(X)$ de degré inférieur ou égal à $n\text{-}d$ tel que $P(X) = S(X)P_0(X)$.

31 On suppose dans cette question que $T(X) = X^3+X^2-1$. Donner le noyau de f.

V Etude d'un produit scalaire.

Dans cette partie on prendra $T(X) = X^2$ et on considérera $g = f_2$ la restriction de f à $\mathbb{R}_2[X]$.

32 Montrer que g est bien un endomorphisme de l'espace vectoriel réel ($\mathbb{R}_2[X]$, +, .). Donner sa matrice A sur la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

33 Soit $<.\,,.>$ définie sur $\mathbb{R}_2[X]^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :

$\forall\, (U(X), V(X)) \in \mathbb{R}_2[X]^2, <U(X), V(X)> = U(1)\times V(1)+U'(1)\times V'(1)+U''(1)\times V''(1).$

(Où $U'(X)$ et $V'(X)$ sont les fonctions polynômes dérivées de $U(X)$ et $V(X)$ et $U''(X)$ et $V''(X)$ sont les fonctions polynômes dérivées secondes de U et V.)

Montrer que $<.\,,.>$ est un produit scalaire sur ($\mathbb{R}_2[X]$, +, .).

34 Montrer que la matrice A de g sur la base canonique est une matrice orthogonale. (C'est-à-dire $A\times{}^tA=I_3$ où ${}^tA$ est la matrice transposée de A et I_3 la matrice identité.)

35 L'application g est-elle une isométrie vectorielle pour le produit scalaire $<.\,,.>$? On pourra calculer $<1, 1>$ et $<g(1), g(1)>$.

Corrigé du TD n°14

J'ai repris le sujet sans le retaper, mais je vais tout de même vous gratifier d'un corrigé maison (je vais même tenter de faire un corrigé complètement rigoureux au niveau de la rédaction). Ce sujet est vraiment un excellent sujet de révision, balayant quasiment tout le programme avec beaucoup de questions classiques, pas extrêmement techniques mais demandant des calculs précis. Il est par contre d'une longueur vraiment exagérée, le finir en quatre heures relèverait de l'exploit, prenez donc votre temps pour tout faire correctement.

Problème 1

I Étude d'une fonction.

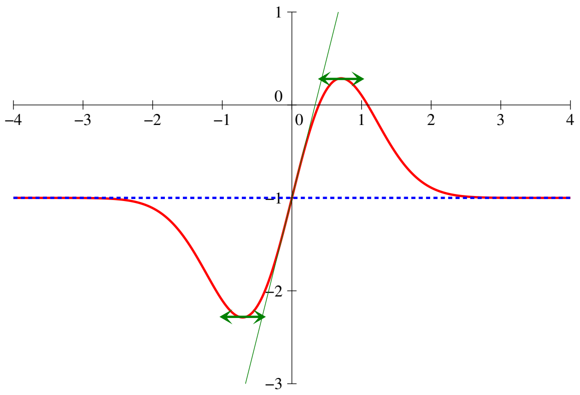
1. La fonction f est bien sûr de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ en tant que produit et composée de fonction usuelles. Sa dérivée est donnée par $f'(x) = 3e^{-x^2} - 6x^2e^{-x^2} = 3(1-2x^2)e^{-x^2}$. L'exponentielle étant toujours positive, la dérivée est du signe de $1 - 2x^2$, qui s'annule en $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, et sera positive entre les deux racines. La fonction f est donc décroissante sur $\left]-\infty, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et sur $\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$, et croissante sur $\left[-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$. Pour compléter le tableau de variations, calculons $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{3}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}} - 1 = \dfrac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{e}} - 1 \simeq \dfrac{3}{2} \times 1,41 \times 0,61 - 1 \simeq 0,28$ en utilisant les valeurs données dans l'énoncé. De même, $f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{e}} - 1 \simeq -2,28$. Passons aux branches infinies : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{-x^2} = 0$, et par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} 3xe^{-x^2} = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -1$, la courbe admet donc des deux côtés une asymptote horizontale d'équation $y = -1$. On peut résumer toutes ces informations dans le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$		$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
f	-1	$\searrow$	$-2,28$	$\nearrow$	$0,28$	$\searrow$	-1

2. On a déjà précisé que f était deux fois dérivable, et $f''(x) = -6xe^{-x^2} - 12xe^{-x^2} + 12x^3e^{-x^2} = 6x(2x^2-3)e^{-x^2}$. Cette dérivée seconde s'annule en 0 et change de signe puisque $2x^2 - 3$ reste négatif au voisinage de 0. On en déduit la présence d'un point d'inflexion en 0.

3. Puisque $f(0) = -1$ et $f'(0) = 3$, l'équation de la tangente en 0 est $y = 3x - 1$. Pour étudier la position relative de la courbe et de la tangente, on cherche le signe de $f(x) - (3x-1) = 3xe^{-x^2} - 3x = 3x(e^{-x^2} - 1)$. Comme $-x^2$ est toujours un réel négatif, $e^{-x^2} - 1 \leqslant 0$, notre expression est donc du signe opposé à celui de x. Autrement dit, la courbe est au-dessus de la tangente sur $\mathbb{R}^-$, et en-dessous sur $\mathbb{R}^+$. Elle traverse sa tangente en 0, ce qui confirme la présence d'un point d'inflexion.

4. On peut bien sûr tracer la tangente en 0 sur le même graphique que la courbe :



5. (a) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, elle admet donc des développements limités à tout ordre (par exemple en appliquant la formule de Taylor-Young).

   (b) Par une composition facile, $e^{-x^2} = 1 - x^2 + \dfrac{1}{2}x^4 + o(x^5)$, donc $f(x) = 3xe^{-x^2} - 1 = -1 + 3x - 3x^3 + \dfrac{3}{2}x^5 + o(x^6)$. Notons que ce qu'on obtient est tout à fait cohérent avec les résultats de la question 3.

II Étude d'une équation différentielle.

6. L'équation homogène normalisée s'écrit sous la forme $y' - \dfrac{n - 2x^2}{x}y = 0$, on ne peut effectivement la résoudre que sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$. Commençons par résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}$, il s'agit de déterminer une primitive de la fonction $a : x \mapsto \dfrac{n}{x} - 2x$, on peut prendre $A : x \mapsto n\ln(x) - x^2$, les solutions de l'équation (H_n) sont alors les fonctions de la forme $x \mapsto Ke^{n\ln(x)-x^2} = Kx^n e^{-x^2}$, avec $K \in \mathbb{R}$. De même, sur $\mathbb{R}^{-*}$, on cherche une primitive de a, qui va cette fois s'écrire sous la forme $x \mapsto n\ln(-x) - x^2$, les solutions sur $\mathbb{R}^{-*}$ sont donc de la forme $x \mapsto L(-x)^n e^{-x^2}$, avec $L \in \mathbb{R}$.

7. Il suffit maintenant de déterminer une solution particulière de l'équation complète. Pas besoin de beaucoup se fatiguer, la constante -1 est solution triviale. Les solutions sur $\mathbb{R}^{+*}$ sont donc les fonctions $y : x \mapsto Kx^x e^{-x^2} - 1$, et sur $\mathbb{R}^{-*}$ elles sont de la forme $y : x \mapsto L(-x)^n e^{-x^2}$. Petite parenthèse : dans ce genre de problème avec plusieurs parties aux liens pas toujours évidents, il est rassurant de trouver des solutions qui ont une allure proche de la fonction f étudiée dans la première partie.

8. Les solutions définies sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur intervalle de définition. Pour construire des fonctions solutions sur $\mathbb{R}$, il faut réussir à prolonger nos solutions en 0, et à les rendre dérivables en 0. Commençons par constater que $\lim\limits_{x\to 0^+} Kx^n e^{-x^2} - 1 = \lim\limits_{x\to 0^-} L(-x)^n e^{-x^2} - 1 = -1$, et ce quelle que soit la valeur de l'entier n. Le recollement de deux fonctions sera donc toujours continue en 0, en ajoutant évidemment la valeur $y(0) = -1$. De plus, si $x > 0$, on pourra écrire $\dfrac{y(x) - y(0)}{x - 0} = Kx^{n-1}e^{-x^2}$, qui admet toujours une limite en 0^+. Plus précisément, y sera donc dérivable à droite en 0, et $y'(0^+) = 0$ si $n \geqslant 2$, $y'(0^+) = K$ si $n = 1$. De même, les solutions définies sur $\mathbb{R}^{-*}$ sont dérivables en 0^-, avec une dérivée nulle si $n \geqslant 2$, et égale à $-L$ si $n = 1$ (ne pas oublier le $-x$ qui divisé par x laisse tout de même un signe $-$ devant l'exponentielle). Conclusion : dans le cas où $n \geqslant 2$, toutes les fonctions définies par $\begin{cases} y(x) = Kx^n e^{-x^2} \text{ si } x \geqslant 0 \\ y(x) = L(-x)^n e^{-x^2} \text{ si } x < 0 \end{cases}$ sont des solutions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Par contre, si $n = 1$, la condition $-L = K$ est indispensable pour que la fonction soit dérivable en 0, ce qui implique

que $\forall x < 0$, $y(x) = (-K) \times (-x)e^{-x^2} - 1 = Kxe^{-x^2} - 1$. Autrement dit, les fonctions solutions sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sont simplement de la forme $x \mapsto Kxe^{-x^2} - 1$, avec $K \in \mathbb{R}$ (et ces solutions sont effectivement clairement de classe $\mathcal{C}^1$).

III Étude de deux suites.

9. Calculons donc : $f_n(0) = -1$ est clairement négatif, et $f_n(1) = \dfrac{3}{e} - 1 > 0$ puisque $e < 3$ (on devrait tous savoir que $e \simeq 2.7$).
10. La fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et $f_n'(x) = 3nx^{n-1}e^{-x^2} - 6x^{n+1}e^{-x^2} = 3(n-2x^2)x^{n-1}e^{-x^2}$. Sur $\mathbb{R}^+$, cette dérivée est du signe de $n - 2x^2$, elle s'annule en $\sqrt{\frac{n}{2}}$, et f_n est croissante sur $\left[0, \sqrt{\dfrac{n}{2}}\right]$ et décroissante ensuite. Par ailleurs, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = -1$ par croissance comparée. La fonction f_n étant continue, elle est donc bijective sur l'intervalle $\left[0, \sqrt{\dfrac{n}{2}}\right]$, avec $f_n(0) < 0$ et $f_n\left(\sqrt{\dfrac{n}{2}}\right) \geqslant f_n(1) > 0$. D'après le théorème de la bijection, f_n s'annule donc une unique fois entre 0 et $\sqrt{\dfrac{n}{2}}$. Comme de plus $f_n(1) > 0$, la valeur d'annulation est comprise entre 0 et 1. De même, f_n est bijective sur $\left[\sqrt{\dfrac{n}{2}}, +\infty\right[$, à valeurs dans $]-1, \alpha]$, avec $\alpha > 0$, ce qui suffit à prouver l'existence et l'unicité d'une deuxième valeur d'annulation pour f_n.
11. On sait bien sûr que $v_n > 1$, mais surtout que $v_n > \sqrt{\dfrac{n}{2}}$, ce qui est beaucoup plus intéressant ! Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{\dfrac{n}{2}} = +\infty$, on en déduit immédiatement que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.
12. (a) Par hypothèse, $f_n(u_n) = 0$, c'est-à-dire $3u_n^n e^{-u_n^2} = 1$. On en déduit immédiatement que $e^{-u_n^2} = \dfrac{1}{3u_n^n}$.

    (b) Calculons donc $f_{n+1}(u_n) = 3u_n^{n+1}e^{-u_n^2} - 1 = \dfrac{3u_n^{n+1}}{3u_n^n} - 1 = u_n - 1$ en exploitant le résultat de la question précédente. Comme on sait que $u_n < 1$, $f_{n+1}(u_n) < 0$.

    (c) Puisque $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$ (par définition), le résultat de la question précédente prouve que $f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$. La fonction f_{n+1} étant strictement croissante sur l'intervalle $[0, 1]$ auquel appartiennent les deux réels u_n et u_{n+1}, on en déduit que $u_n < u_{n+1}$. La suite (u_n) est donc strictement croissante.

    (d) Étant croissante et majorée par 1, la suite (u_n) converge d'après le théorème de convergence monotone.
13. (a) Avec l'hypothèse $t > 0$, l'équation est équivalente à celle obtenue en passant tout à l'exponentielle, c'est-à-dire $3t^n e^{-t^2} = 1$, ce qui correspond bien à $f_n(t) = 0$.

    (b) Si $l \neq 1$, donc nécessairement $l < 1$ puisque la suite est majorée par 1, on pourra certainement écrire que $\lim\limits_{n \to +\infty} n\ln(u_n) = -\infty$, et $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(3) - n\ln(u_n) - u_n^2 = -\infty$. C'est très contradictoire avec le fait que cette quantité est censée être toujours nulle (puisque $g_n(u_n) = f_n(u_n) = 0$). La limite de la suite (u_n) est donc nécessairement égale à 1.

    (c) D'après la question précédente, $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$, ce qui permet d'utiliser les développements limités classiques en 0. Écrivons alors $g_n(u_n) = g_n(1 + w_n) = \ln(3) + n\ln(1 + w_n) - (1 + w_n)^2 = \ln(3) + nw_n - \dfrac{n}{2}w_n^2 - 1 - 2w_n - w_n^2 + o(w_n^2) = \ln(3) - 1 + (n-2)w_n + o(w_n)$. Puisqu'on sait que $g_n(u_n) = 0$, on en déduit que $(n-2)w_n \sim 1 - \ln(3)$, soit $w_n \sim$

$\dfrac{1-\ln(3)}{n-2} \sim \dfrac{1-\ln(3)}{n}$. Notons que cela permet d'obtenir un début de développement asymptotique pour la suite (u_n) : $u_n = 1 + \dfrac{1-\ln(3)}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Le terme $\dfrac{1-\ln(3)}{n}$ est négatif, ce qui est cohérent avec le fait que $u_n < 1$.

IV Étude d'une courbe paramétrée.

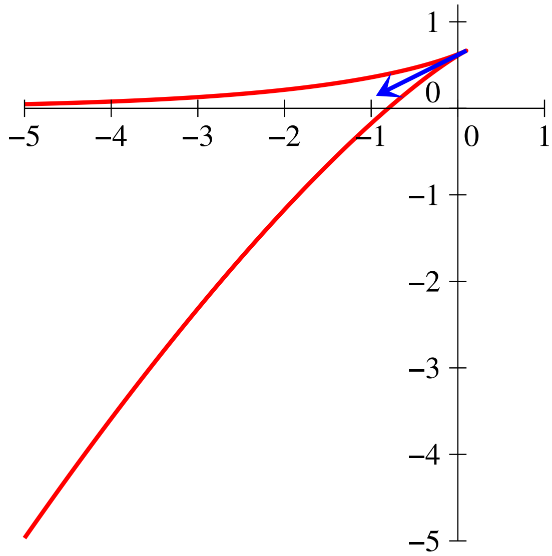
14. (a) Les deux fonctions sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, et $x'(t) = \dfrac{2}{t} - 2t = \dfrac{2(1-t^2)}{t}$, elle s'annule donc pour $t = 1$. De plus, $y'(t) = 1 - t^2$ s'annule également pour $t = 1$. On calcule sans difficulté $x(1) = \ln(3) - 1 \simeq 0,1$; $y(1) = \dfrac{2}{3}$; $\lim\limits_{t\to 0^+} x(t) = -\infty$; $\lim\limits_{t\to 0^+} y(t) = 0$; $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = -\infty$ (par croissance comparée) et $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = -\infty$. D'où le tableau de variations suivant :

t	0		1		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	0	$-$	
x	$-\infty$	↗	$\ln(3)-1$	↘	$-\infty$
$y'(t)$		$+$	0	$-$	
y	0	↗	$\dfrac{2}{3}$	↘	$-\infty$

(b) Les calculs de limites en 0 prouvent que l'axe des abscisses est asymptote à la courbe en 0. En $+\infty$, les deux fonctions coordonnées ont des limites infinies, mais comme $x(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} -t^2$ et $y(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{3}t^3$, on peut écrire $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{y(t)}{x(t)} = +\infty$, ce qui prouve l'existence d'une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$.

(c) Le point $M(1)$ est un point stationnaire. Inutile de s'embêter avec des développements limités pour déterminer sa nature, les dérivées sont ici très faciles à obtenir : $x''(t) = -\dfrac{2}{t^2} - 2$ et $y''(t) = -2t$, donc $\overrightarrow{f''(1)} = (-4, -2)$ est non nul, ce vecteur dirigera la tangente au point $M(1)$. Ensuite, $x'''(t) = \dfrac{4}{t^3}$ et $y'''(t) = -2$, donc $\overrightarrow{f'''(t)} = (4, -2)$ n'est pas colinéaire au vecteur tangent, on est en présence d'un point de rebroussement de première espèce.

15. Rien de spécial à signaler de plus sur la courbe :



Problème 2

I Étude d'un polynôme.

16. (a) Cherchons directement les racines sous formes algébrique : soit $z = a + ib$ tel que $z^2 = -3 + 4i$. en séparant partie réelle et imaginaire, on obtient les deux premières équations $a^2 - b^2 = -3$ et $2ab = 4$ (les deux réels a et b sont donc de même signe). De plus, la condition d'égalité de module permet de trouver $a^2 + b^2 = \| - 3 + 4i\| = \sqrt{9 + 16} = 5$. En additionnant la première et la troisième équation obtenues, $2a^2 = 2$, soit $a = \pm 1$. En les soustrayant, $2b^2 = 8$, soit $b = \pm 2$. Puisque a et b doivent être de même signe, les deux racines carrées recherchées sont $z_1 = 1 + 2i$ et $z_2 = -1 - 2i$.

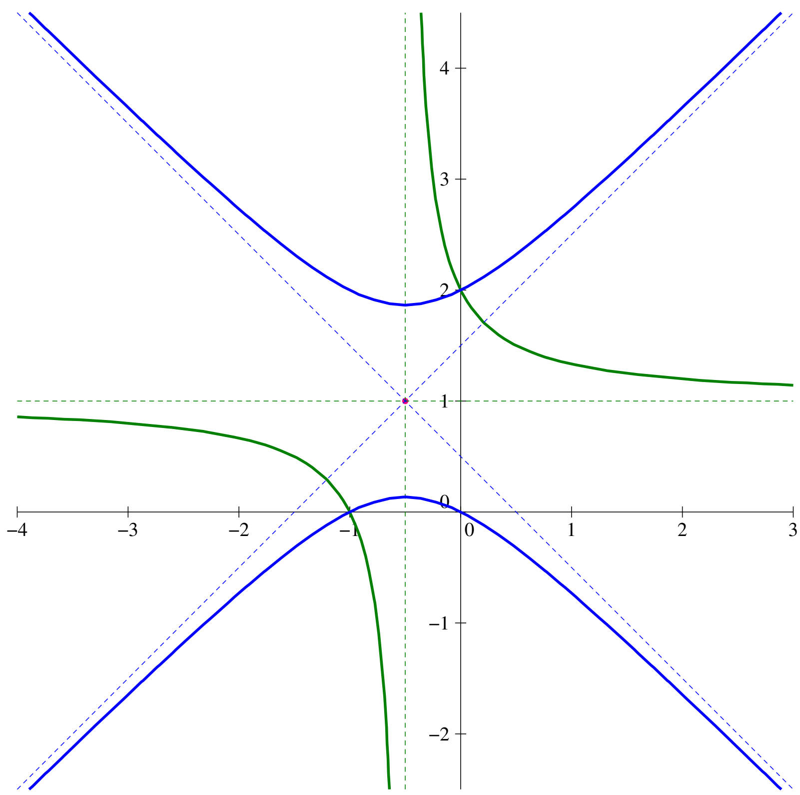
    (b) Le polynôme U a pour discriminant $\Delta = (1 - 2i)^2 + 8i = 1 - 4i - 4 + 8i = -3 + 4i$. Quelle surprise, les calculs de la question précédente vont nous resservir, les racines de U sont $r_1 = \dfrac{-1 + 2i + 1 + 2i}{2} = 2i$ et $r_2 = \dfrac{-1 + 2i - 1 - 2i}{2} = -1$. Bien sûr, on aurait pu remarquer tout de suite que -1 était racine évidente du polynôme U.

17. (a) Allons-y : $U(z) = (x+iy)^2 + (1-2i)(x+iy) - 2i = x^2 - y^2 + 2ixy + x + iy - 2ix + 2y - 2i = x^2 - y^2 + x + 2y + i(2xy - 2x + y - 2)$. La partie réelle de $U(z)$ est donc égale à $x^2 - y^2 + x + 2y$ et la partie imaginaire vaut $2xy - 2x + y - 2$.

    (b) i. L'ensemble Γ_1 est défini par l'équation $x^2 - y^2 + x + 2y = 0$, soit $\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} - (y - 1)^2 + 1 = 0$, donc $(y-1)^2 - \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{4}$. On reconnait l'équation d'une hyperbole de centre $\Omega_1 = \left(-\dfrac{1}{2}, 1\right)$. Dans le repère $(\Omega_1, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, l'équation de l'hyperbole devient $y'^2 - x'^2 = \dfrac{3}{4}$, soit $\left(\dfrac{2x'}{\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\dfrac{2x'}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1$. Les paramètres de l'hyperbole sont donc $a = b = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, ce qui donne une excentricité $e = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\dfrac{4}{3} + \dfrac{4}{3}} = \sqrt{2}$.

Pour le tracé de la courbe (qu'on donnera à la question suivante, puisque les deux courbes sont demandées en même temps), on peut ajouter que les deux asymptotes de l'hyperbole sont les deux bissectrices du repère $(\Omega_1, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ puisque $\dfrac{b}{a} = 1$. Attention aussi au fait que l'axe de l'hyperbole sera ici l'axe des ordonnées (dans le repère décalé) et non l'axe des abscisses.

ii. L'ensemble Γ_2 est défini par l'équation $2xy - 2x + y - 2 = 0$, il faut effectuer une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ pour se débarasser du terme en xy. Posons donc $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(X - Y)$ et $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(X' + Y')$ pour obtenir la nouvelle équation $(X - Y)(X + Y) - \sqrt{2}(X - Y) + \dfrac{\sqrt{2}}{2}(X + Y) - 2 = 0$, soit $X^2 - Y^2 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}X + \dfrac{3\sqrt{2}}{2}Y - 2 = 0$. On met sous forme canonique : $\left(X - \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 - \dfrac{1}{8} - \left(Y - \dfrac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \dfrac{9}{8} - 2 = 0$, soit $x'^2 - y'^2 = 1$ dans un repère dont le centre a pour coordonnées $X = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ et $Y = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$, soit $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \dfrac{-\sqrt{2}}{2} = -\dfrac{1}{2}$ et $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2} = 1$. Autrement dit, le centre de Γ_2 est Ω_1, c'est le même que celui de Γ_1. Par ailleurs, notre deuxième hyperbole a la même excentricité que la première puisqu'on a obtenu la même équation réduite après changement de repère. Les asymptotes sont les bissectrices dans le repère décalé et tourné de $\dfrac{\pi}{4}$, donc les droites horizontale et verticale passant par Ω_1 dans le repère d'origine. Ici, l'axe de l'hyperbole est l'axe des abscisses du repère tourné, c'est-à-dire la première bissectrice du repère $(\Omega_1, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Allez, une belle figure pour illustrer tout ça (Γ_1 en vert et Γ_2 en bleu, avec les asymptotes en pointillés) :



II Définition d'une application.

18. Considérons deux polynômes P_1 et P_2 appartenant à $\mathbb{C}[X]$, par définition, $P_1(X^2) = Q_1(X)$ $T(X) + R_1(X)$ et $P_2(X^2) = Q_2(X)T(X) + R_2(X)$, avec $f(P_1) = Q_1(X) + XR_1(X)$ et $f(P_2) = Q_2(X) + XR_2(X)$. Si λ et μ sont deux constantes complexes quelconques, alors $(\lambda P_1 + \mu P_2)(X^2) = \lambda P_1(X^2) + \mu P_2(X^2) = (\lambda Q_1(X) + \mu Q_2(X))T(X) + (\lambda R_1(X) + \mu R_2(X))$. Comme $d^\circ(\lambda R_1 + \mu R_2) \leqslant \max(d^\circ(R_1), d^\circ(R_2)) < n$, ce qu'on vient d'écrire est forcément (il y a unicité) la division euclidienne de $\lambda P_1(X^2) + \mu P_2(X^2)$ par T. Autrement dit, $f(\lambda P_1 + \mu P_2) = (\lambda Q_1(x) + \mu Q_2(X)) + X(\lambda R_1(X) + \mu R_2(X)) = \lambda f(P_1) + \mu f(P_2)$ en développant. Nous avons bien prouvé la linéarité de l'application f.

19. La restriction de f à n'importe quel sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$ est toujours linéaire. Encore faut-il que, pour un polynôme P fixé dans $\mathbb{C}_n[X]$, $f(P) \in \mathbb{C}_n[X]$. On sait déjà que $d^\circ(R) < d^\circ(T) = n$, donc $d^\circ(XR) = d^\circ(R) + 1 \leqslant n$. De plus, $P(X^2)$ est un polynôme de degré au plus égal à $2n$ (rappelons que le degré d'une composée de deux polynômes est le produit des degrés des deux polynômes), donc $P(X^2) - R(X)$ également. Autrement dit, $d^\circ(QT) \leqslant 2n$, ce qui implique $d^\circ(Q) \leqslant 2n - d^\circ(T) = n$. Le polynôme $f(P)$ est donc la somme de deux polynômes de degré inférieur ou égal à n, il appartient à $\mathbb{C}_n[X]$ et f_n est bien un endomorphisme.

20. (a) Il s'agit donc d'effectuer la division euclidienne de $P(X^2)$ par X^2 pour chacun des polynômes de la base canonique $(1, X, X^2)$. Comme $1 = O \times X^2 + 1$, $f(1) = 0 + X \times 1 = X$; comme $X^2 = 1 \times X^2 + 0$, $f(X) = 1 + X \times 0 = 1$; enfin, comme $X^4 = X^2 \times X^2 + 0$, $f(X^2) = X^2 + X \times 0 = X^2$. La matrice de f_2 dans la base canonique est donc $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

    (b) Un calcul vraiment extrêmement élémentaire donne simplement $A^2 = I$. La matrice A est donc inversible, et égale à sa propre inverse. L'application qu'elle représente dans la base canonique est donc bijective, et elle est sa propre réciproque. L'application f_2 est une symétrie vectorielle.

21. On a vu plus haut que $U(X) = (X + 1)(X - 2i)$ (enfin, on a seulement calculé ses racines mais comme il est unitaire, la factorisation en découle), donc $U(X^2) = (X^2 + 1)(X^2 - 2i)$. Or, $2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$ a pour racines carrées $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 1 + i$ et $-1 - i$, donc $U(X^2) = (X - i)(X + i)(X - 1 - i)(X + 1 + i)$. Autrement dit, $U(X^2) = (X - i)(X + 1 + i)T(X)$, ce qui nous donne la division euclidienne de $U(X^2)$ par T. On en déduit que $f(U) = (X - i)(X + 1 + i) = X^2 + X + 1 - i$.

III Étude d'un cas particulier.

22. Ces calculs sont similaires à ceux effectués dans la partie précédente. Commençons par écrire $1 = 0 \times T + 1$, donc $f_3(1) = X$; puis $X^2 = 0 \times T + X^2$, donc $f_3(X) = X^3$; ensuite, $X^4 = X \times (X^3 + X^2 + a) + (-X^3 - aX) = (X - 1) \times (X^3 + X^2 + a) + (-aX + X^2 + a)$, donc $f_3(X^2) = X - 1 + X \times (-aX + X^2 + a) = X^3 - aX^2 + (1 + a)X - 1$; enfin, $X^6 = X^3(X^3 + X^2 + a) - X^5 - aX^3 = (X^3 - X^2)(X^3 + X^2 + a) - aX^3 + X^4 + aX^2 = (X^3 - X^2 + X)(X^3 + X^2 + a) - aX^3 + aX^2 - X^3 - aX = (X^3 - X^2 + X - a - 1)T(X) + aX^2 - aX + (a + 1)X^2 + a^2 + a = (X^3 - X^2 + X - a - 1)T(X) + (2a + 1)X^2 - aX + a^2 + a$ (on peut évidemment effectuer une division euclidienne de façon plus classique pour obtenir le quotient et le reste). Reste à calculer $f(X^3) = (X^3 - X^2 + X - a - 1) + X((2a + 1)X^2 - aX + a^2 + a) = (2a + 2)X^3 - (a + 1)X^2 + (a^2 + a + 1)X - a - 1$. Toutes les valeurs obtenues correspondent aux coefficients de la matrice donnée dans l'énoncé.

23. On peut simplement développer le déterminant de la matrice successivement suivant les deux premières colonnes :
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & -a-1 \\ 1 & 0 & a+1 & 1+a+a^2 \\ 0 & 0 & -a & -a-1 \\ 0 & 1 & 1 & 2a+2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & -1 & -a-1 \\ 0 & -a & -a-1 \\ 1 & 1 & 2a+2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & -a-1 \\ -a & -a-1 \end{vmatrix} = -(a+1-a^2-a) =$$

$a^2 - 1$. On peut ajouter une phrase de conclusion si on veut : $\det(f_3) = a^2 - 1$.

24. L'application est bijective si et seulement si son déterminant est non nul. Ici, ce sera le cas si $a \notin \{-1, 1\}$.

25. (a) Dans ce cas, la matrice devient $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. un polynôme $P = a + bX + cX^2 + dX^3$ appartient au noyau de f_3 si ses coefficients sont solution du système suivant : $\begin{cases} -c = 0 \\ a + d = 0 \\ c = 0 \\ b + c = 0 \end{cases}$. Bref, on a $b = c = 0$ et $a = -d$, donc $\ker(f_3) = \{dX^3 - d \mid d \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(X^3 - 1)$.

    (b) On calcule simplement les images des vecteurs de la base canonique : $\mathrm{Im}(f_3) = \mathrm{Vect}(X, X^3, -1 + X^2 + X^3, X) = \mathrm{Vect}(X, X^3, X^3 + X^2 - 1)$. Comme le noyau de f_3 est de dimension 1 et $\mathbb{C}_3[X]$ de dimension 4, le théorème du rang nous assure que $\mathrm{Im}(f_3)$ est de dimension 3. La famille $(X, X^3, X^3 + X^2 - 1)$ est donc une base de $\mathrm{Im}(f_3)$.

    (c) Puisque la sommes des dimensions de nos deux sous-espaces vaut 4, il suffit par exemple de vérifier si $\ker(f_3) + \mathrm{Im}(f_3)$ est égal à $\mathbb{C}_3[X]$ pour savoir s'ils sont supplémentaires. Or, $\ker(f_3) + \mathrm{Im}(f_3) = \mathrm{Vect}(X^3 - 1, X, X^3, X^3 + X^2 - 1) = \mathrm{Vect}(X^3 - 1, X, X^3, X^2) = \mathrm{Vect}(-1, X, X^3, X^2)$ en remplaçant le dernier polynôme par la différence du dernier et du premier, puis le premier par sa somme avec le troisième (opération élémentaires qui ne modifient pas l'espace vectoriel engendré). La dernière famille obtenue étant très clairement génératrice de $\mathbb{C}_3[X]$, nos deux espaces sont bel et bien supplémentaires.

IV Étude de noyau.

26. Si $2d^\circ(P) < n$, alors $d^\circ(P(X^2)) < n = d^\circ(T)$. Dans ce cas, la division euclidienne de $P(X^2)$ par T est facile à effectuer : le quotient est nul, et le reste est égal à $P(X^2)$, ce qui implique que $f(P) = P(X^2)$, qui ne peut pas être nul puisque P est supposé non nul.

27. Supposons dans un premier temps que $f(P(X)) = 0$, alors, en notant Q et R le quotient et le reste de la division euclidienne de $P(X^2)$ par T, $Q(X) + XR(X) = 0$, autrement dit $Q(X) = -XR(X)$. En reportant cette relation dans la division euclidienne, $P(X^2) = -XR(X)T(X) + R(X) = R(X)(1 - XT(X))$, avec $d^\circ(R) < n$ d'après les propriétés de la division euclidienne. Réciproquement, si $P(X^2) = R(X)(1 - XT(X))$, alors $P(X^2) = -XR(X)T(X) + R(X)$, avec par hypothèse $d^\circ(R) < n$. Nous sommes donc forcément en présence de la division euclidienne de $P(X^2)$ par T, dont le quotient Q vérifie donc $Q(X) = -XR(X)$. En découle $P \in \ker(f)$.

28. C'est un raisonnement sur le degré similaire à ceux effectués plus haut : en notant k le degré de P, l'égalité $P(X^2) = R(X)(1 - XT(X))$ implique $2k = d^\circ(R) + n + 1 \leqslant n - 1 + n + 1 = 2n$, donc $k \leqslant n$. Cela signifie bien que $P \in \mathbb{C}_n[X]$.

29. Les hypothèse impliquent que $P(X^2) = R(X)(1 - XT(X))$, donc $(X^k P)(X^2) = X^{2k} P(X^2) = X^{2k} R(X)(1 - XT(X))$. Or, $d^\circ(R) = d^\circ(P(X^2)) - d^\circ(1 - XT(X)) = 2d^\circ(P) - n - 1$, donc $d^\circ(X^{2k} R) = 2(k + d^\circ(P)) - (n + 1) \leqslant n - 1$ puisqu'il est supposé que $k + d^\circ(P) \leqslant n$. Le polynôme $X^k P$ vérifie donc exactement la caractérisation de la question 27, il appartient donc au noyau de f.

30. (a) Si le noyau n'est pas réduit à 0, il existe au moins un polynôme non nul dans le noyau, donc au moins un entier naturel k dans l'ensemble I. Tout ensemble non vide d'entiers naturels admettant un minimum, la question est résolue.

(b) Utilisons la caractérisation de la question 27 : $P_0(X^2) = R_0(X)(1-XT(X))$ et $P_1(X^2) = R_1(X)(1-XT(X))$, avec $d^\circ(R_0) = 2d-(n+1) = d^\circ(R_1)$. Si R_0 et R_1 sont de même degré k, en notant a et b leurs coefficients dominants, $R_0 - \frac{a}{b}R_1$ sera de degré strictement inférieur. Notons donc $c = \frac{b}{a}$, alors $(P_0 - cP_1)(X^2) = (R_0 - cR_1)(X)(1-XT(X))$, avec donc $d^\circ(R_0 - cR_1) < k$, ce qui implique $d^\circ(P_0 - cP_1) < 2d$, donc $d^\circ(P_0 - cP_1) < d$. Mais alors $P_0 - cP_1$ est un polynôme appartenant au noyau de f (puisque combinaison linéaire d'éléments du noyau) et de degré plus petit que d. Cela n'est possible que si ce polynôme est nul, c'est-à-dire si $P_0 = cP_1$, ou si on préfère $P_1 = \frac{1}{c}P_0$.

(c) On a vu plus haut que, $\forall k \in \{0, \dots, n-d\}$, $X^k P_0(X) \in \ker(f)$. Par linéarité, si $S(X)$ est de degré inférieur ou égal à $n-d$, il s'écrit comme combinaison linéaire des monomes X^k, donc $S(X)P_0(X)$ appartient également au noyau. Supposons maintenant réciproquement que $P \in \ker(f)$, et effectuons la division euclidienne de P par P_0, en notant S son quotient et Z son reste : $P(X) = S(X)P_0(X) + Z(X)$. Puisque $d^\circ(S) \leqslant n$, $d^\circ(S) \leqslant n-d$, donc $SP_0 \in \ker(f)$ d'après ce qui précède. Par linéarité, Z appartient alors aussi au noyau de f. Or, Z est un polynôme de degré strictement inférieur à celui de P_0. Encore une fois, ce n'est possible que si $Z = 0$, c'est-à-dire si $P = SP_0$.

31. On a calculé dans la partie précédente le noyau de la restriction de f à $\mathbb{C}_3[X]$, qui était égal à $\mathrm{Vect}(X^3-1)$. Les question précédentes prouvent que le noyau de f (sans restriction) ne peut contenir que des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 et multiples de X^3-1 (qui est un polynôme de degré minimal dans le noyau). Autrement dit, $\ker(f) = \mathrm{Vect}(X^3-1)$, on ne peut pas multiplier ce polynôme par autre chose que des constantes sans dépasser le degré 3.

V Étude d'un produit scalaire.

32. La démonstration est rigoureusement la même que dans le cas où on travaille sur $\mathbb{C}$. La matrice dans la base canonique ne change pas non plus, la matrice recherchée est donc la matrice A calculée à la question 20.

33. L'application est clairement symétrique. Vérifions la linéarité à gauche, qui combinée avec la symétrie prouvera la bilinéarité : $< \lambda U(X) + \mu W(X), V(X) >= (\lambda U + \mu W)(1)V(1) + (\lambda U + \mu W)'(1)V'(1) + (\lambda U + \mu W)''(1)V''(1) = \lambda U(1)V(1) + \mu W(1)V(1) + \lambda U'(1)V'(1) + \mu W'(1)V'(1) + \lambda U''(1)V''(1) + \mu W''(1)V'(1) = \lambda < U(X), V(X) > + \mu < W(X), V(X) >$ en regroupant. De plus, $< U(X), U(X) >= U(1)^2 + U'(1)^2 + U''(1)^2$ est toujours positif, et ne peut s'annuler que si $U(1) = U'(1) = U''(1) = 0$. Le réel 1 est alors racine triple du polynôme U, ce qui n'est possible que si U est nul puisqu'il est supposé de degré inférieur ou égal à 2. L'application est donc définie positive en plus d'être symétrique et bilinéaire, il s'agit bien d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

34. La matrice A étant symétrique, ${}^tA = A$. Comme on a par ailleurs vérifié à la question 20 que $A^2 = I$, on peut donc écrire $A{}^tA = I$, ce qui prouve que A est une matrice orthogonale.

35. Calculons donc $< 1, 1 >= 1 \times 1 + 0 \times 0 + 0 \times 0 = 1$, et $< g(1), g(1) >=< X, X >= 1 \times 1 + 1 \times 1 + 0 \times 0 = 2$. Ces deux produits scalaires étant distincts, l'application g ne conserve pas la norme associée à notre produit scalaire, et ne peut donc pas être une isométrie.

Eh ben voilà, on a réussi à faire tenir le corrigé en strictement moins de dix pages !

Feuille d'exercices n°20 : Fonctions à deux variables

PTSI B Lycée Eiffel

19 juin 2013

Exercice 1 (*)

Déterminer pour chacune des fonctions suivantes si elle est prolongeable par continuité en $(0, 0)$:

1. $f(x, y) = \dfrac{y(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$
2. $f(x, y) = \dfrac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 + y^2}$
3. $f(x, y) = \dfrac{x^2 + 3y^2}{x^2 + 4y^2}$
4. $f(x, y) = (x^2 + y^2)^x$
5. $f(x, y) = \dfrac{\cosh(xy) - \cos(xy)}{x^2y^2}$
6. $f(x, y) = \dfrac{xy}{(1 + x)(1 + y)(x + y)}$
7. $f(x, y) = x \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$

Exercice 2 (**)

Calculer les dérivées partielles (premières et secondes) de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
2. $f(x, y) = \cos(xy)$
3. $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$
4. $f(x, y) = y^2 \sin\left(\dfrac{x}{y}\right)$
5. $f(x, y) = \mathrm{Argsh}(x + y)$
6. $f(x, y) = x^{y^x}$

Exercice 3 (*)

On considère la fonction $f : (x, y) \mapsto \dfrac{x^2y}{x^4 + y^2}$, prolongée par $f(0, 0) = 0$. Vérifier que la fonction f admet des dérivées suivant tout vecteur de $\mathbb{R}^2$, mais n'est pas continue en $(0, 0)$.

Exercice 4 (**)

Déterminer les points critiques de chacune des fonctions suivantes et, lorsque c'est possible, déterminer la nature de ces points critiques.

1. $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 3x - 6y$
2. $f(x,y) = x^3 + xy^2 + x^2 - y^2$
3. $f(x,y) = xe^y + ye^x$
4. $f(x,y) = x^2 + y^2 + (x+y-1)^2$
5. $f(x,y) = \sqrt{(x-2)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$

Exercice 5 (* à ***)

Calculer les intégrales doubles suivantes :

1. $\displaystyle\iint_D (x+y)e^{x+y}\, dx\, dy$, où $D = \{(x,y) \mid x \in [0,2], y \in [1,2]\}$.
2. $\displaystyle\iint_D xy\, dx\, dy$, où $D = \{(x,y) \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, x+y \leqslant 1\}$.
3. $\displaystyle\iint_D \sin(x+y)\, dx\, dy$, où $D = \{(x,y) \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, x+y \leqslant \pi\}$.
4. $\displaystyle\iint_D \frac{x^2}{x^2+y^2}\, dx\, dy$, où $D = \{(x,y) \mid \frac{1}{4} \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 1, x \geqslant 0\}$
5. $\displaystyle\iint_D x^2\, dx\, dy$, où D est l'intérieur de l'ellipse d'équation $x^2 = \dfrac{y^2}{4} = 1$.
6. $\displaystyle\iint_D \cos(x^2+y^2)\, dx\, dy$, où D est le disque de centre O et de rayon 3.
7. $\displaystyle\iint_D \frac{x^2+y^2}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy$, où D est le quart de disque trigonométrique correspondant aux angles compris entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$.
8. $\displaystyle\iint_D (x+y)^2\, dx\, dy$, où $D = \{(x,y) \mid y \geqslant 0, y \leqslant x^2+y^2 \leqslant x\}$
9. $\displaystyle\iint_D \frac{x^3}{x^2+y^2}\, dx\, dy$, où $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant 2x, y \geqslant 0\}$
10. $\displaystyle\iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}\, dx\, dy$, où $D = \{(x,y) \mid x \in [0,1], y \in [0,1], x^2+y^2 \leqslant 1\}$.

Corrigé de la feuille d'exercices n°20

Exercice 1 (*)

1. En passant en coordonnées polaires, $f(x,y) = \dfrac{\rho\cos(\theta)(\rho^2\cos^2(\theta) - \rho^2\sin^2(\theta))}{\rho^2} = \rho\cos(\theta)\cos(2\theta)$, qui a une limite nulle quand ρ tend vers 0. La fonction est donc prolongeable en posant $f(0,0) = 0$.

2. En passant en coordonnées polaires, $f(x,y) = 1 + \dfrac{2xy}{x^2+y^2} = 1 + \dfrac{2\rho\cos(\theta)\rho\sin(\theta)}{\rho^2} = 1 + \sin(2\theta)$. Cette expression n'ayant pas une limite unique quand ρ tend vers 0, la fonction n'est pas prolongeable. Plus précisément, on peut appliquer la caractérisation séquentielle de la limite : $f\left(0, \dfrac{1}{n}\right) = 1$ (qui a évidemment pour limite 1 quand n tend vers $+\infty$), mais $f\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{4}{2} = 2$, la fonction ne peut donc pas avoir de limite en $(0,0)$.

3. Ici, c'est vraiment facile en utilisant la caractérisation séquentielle : $f\left(\dfrac{1}{n}, 0\right) = 1$, et $f\left(0, \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{3}{4}$, donc la fonction n'a pas de limite en $(0,0)$ et n'est pas prolongeable.

4. En passant à l'exponentielle et en coordonnées polaires, $f(x,y) = e^{\rho\cos(\theta)\ln(\rho^2)}$. Par croissance comparée, $\lim\limits_{\rho\to 0} \rho\ln(\rho^2) = 0$, donc a fortiori, $\rho\cos(\theta)\ln(\rho^2)$ tend vers 0, et $f(x,y)$ est donc prolongeable par continutié en posant $f(0,0) = 1$.

5. Et si on utilisait un peu de développements limités ? Si x et y tendent tous les deux vers 0, le produit xy également. On peut donc écrire $\cosh(xy) - \cos(xy) = 1 + \dfrac{1}{2}x^2y^2 - 1 + \dfrac{1}{2}x^2y^2 + o(x^2y^2)$, soit $\cosh(xy) - \cos(xy) \sim x^2y^2$. On en déduit immédiatement que f a pour limite 1 en $(0,0)$, et est donc prolongeable par continuité.

6. Comme $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1}{(1+x)(1+y)} = 1$, il suffit de chercher la limite éventuelle de $g : (x,y) \mapsto \dfrac{xy}{x+y}$. On peut par exemple calculer $g\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{2n}$, qui a pour limite 0, et $g\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}, -\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{\frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})}{\frac{2}{n^2}} \sim \dfrac{1}{2}$ (notons ici que la fonction g, tout comme f n'est pas définie sur toute la droite d'équation $y = -x$). La fonction g et la fonction f ne sont donc pas prolongeables en $(0,0)$.

7. La fonction arctan étant bornée, on auran, partout où f est définie, $|f(x,y)| \leqslant \dfrac{\pi}{2}|x|$, qui tend vers 0 en $(0,0)$. On peut donc prolonger f en posant $f(0,0) = 0$.

Exercice 2 (**)

1. • On calcule d'abord $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

   • Par symétrie, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (puisque x et y sont interchangeables dans l'équation de f).

   • On obtient ensuite $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \dfrac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

   • Par symétrie $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

- Enfin, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{-\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = -\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, et la formule pour l'autre dérivée croisée est sans surprise la même.

2. Calculs faciles ici :
   - $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -y\sin(xy)$.
   - $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x\sin(xy)$.
   - $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -y^2\cos(xy)$.
   - $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -x^2\cos(xy)$.
   - $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -\sin(xy) - xy\cos(xy)$ (même formule pour la deuxième dérivée croisée).

3. Allons-y, en utilisant une fois de plus la symétrie du rôle joué par x et y :
   - $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y(x^2+y^2) - 2x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{y^3 - yx^2}{(x^2+y^2)^2}$.
   - $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^2}$.
   - Il faut un peu plus de courage pour les dérivées secondes : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{-2xy(x^2+y^2)^2 - 4x(x^2+y^2)(y^3-yx^2)}{(x^2+y^2)^4} = \dfrac{-2x^3y - 2xy^3 - 4xy^3 + 4x^3y}{(x^2+y^2)^3} = \dfrac{2x^3y - 6xy^3}{(x^2+y^2)^3}$.
   - De même $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{2xy^3 - 6x^3y}{(x^2+y^2)^3}$.
   - $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{(3y^2 - x^2)(x^2+y^2)^2 - 4y(x^2+y^2)(y^3-yx^2)}{(x^2+y^2)^4} = \dfrac{3y^2x^2 + 3y^4 - x^4 - x^2y^2 - 4y^4 + 4y^2x^2}{(x^2+y^2)^3} = \dfrac{-x^4 - y^4 + 6x^2y^2}{(x^2+y^2)^3}$ (encore une fois, la deuxième dérivée croisée est identique, il suffit d'échanger le rôle de x et y pour s'en rendre compte).

4. Vous commencez à connaitre la routine :
   - $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2 \times \dfrac{1}{y}\cos\left(\dfrac{x}{y}\right) = y\cos\left(\dfrac{x}{y}\right)$.
   - $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\sin\left(\dfrac{x}{y}\right) - x\cos\left(\dfrac{x}{y}\right)$.
   - Ensuite, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\sin\left(\dfrac{x}{y}\right)$.
   - $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2\sin\left(\dfrac{x}{y}\right) - \dfrac{2x}{y}\cos\left(\dfrac{x}{y}\right) - \dfrac{x^2}{y^2}\sin\left(\dfrac{x}{y}\right)$.
   - $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \cos\left(\dfrac{x}{y}\right) + \dfrac{x}{y}\sin\left(\dfrac{x}{y}\right)$.
   - Pour une fois l'égalité des deux dérivées croisées n'est pas évidente, faisons donc un dernier calcul : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2\cos\left(\dfrac{x}{y}\right) - \cos\left(\dfrac{x}{y}\right) + \dfrac{x}{y}\sin\left(\dfrac{x}{y}\right)$, ce qui donne bien la même formule que ci-dessus.

5. Un peu de révisions de dérivées classiques ici :
   - $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1+(x+y)^2}}$.
   - Par symétrie, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1+(x+y)^2}}$ (les deux dérivées partielles sont donc identiques).

- Puis $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\dfrac{\frac{2x+2y}{2\sqrt{1+(x+y)^2}}}{1+(x+y)^2} = -\dfrac{x+y}{(1+(x+y)^2)^{\frac{3}{2}}}$, et les trois autres dérivées partielles secondes sont identiques.

6. Puisque $f(x,y) = e^{e^{x\ln(y)}\ln(x)}$, on peut calculer :
   - $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(\ln(y)e^{x\ln(y)}\ln(x) + \dfrac{e^{x\ln(y)}}{x}\right)e^{e^{x\ln(y)}\ln(x)}$.
   - $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x}{y}e^{x\ln(y)}\ln(x)e^{e^{x\ln(y)}\ln(x)}$.
   - $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \left(\ln^2(y)e^{x\ln(y)}\ln(x) + \dfrac{\ln(y)}{x}e^{x\ln(y)} + \dfrac{\ln(y)xe^{x\ln(y)} - e^{x\ln(y)}}{x^2} + \left(\ln(y)e^{x\ln(y)}\ln(x) + \dfrac{e^{x\ln(y)}}{x}\right)^2\right)e^{e^{x\ln(y)}\ln(x)}$ (un volontaire pour simplifier ?).
   - $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \left(-\dfrac{x}{y^2}e^{x\ln(y)}\ln(x) + \dfrac{x^2}{y^2}e^{x\ln(y)}\ln(x) + \dfrac{x^2}{y^2}e^{2x\ln(y)}\ln^2(x)\right)e^{e^{x\ln(y)}\ln(x)}$.
   - $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) = \left(\dfrac{e^{x\ln(y)}\ln(x)}{y} + \dfrac{x}{y}\ln(y)\ln(x)e^{x\ln(y)} + \dfrac{1}{y}e^{x\ln(y)} + \dfrac{x}{y}\ln(y)\ln^2(x)e^{2x\ln(y)} + \dfrac{1}{y}\ln(x)e^{x\ln(y)}\right)f(x,y)$.
   - On constate, quoiqu'assez péniblement, que l'autre dérivée croisée donne exactement les mêmes termes.

Exercice 3 (*)

Soit donc un vecteur non nul $h = (k,l)$, le taux d'accroissement dans la direction de h vaut $\dfrac{t^3k^2l}{t(t^4k^4+t^2l^2)} = \dfrac{k^2l}{t^2k^4+l^2}$. Si k ou l est nul, le taux d'accroissement est tout le temps nul, donc a pour limite 0 quand t tend vers 0. Sinon, il a pour limite $\dfrac{k^2}{l}$. dans tous les cas, la fonction est dérivable dans la direction de h. Pourtant $f\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^4}} = \dfrac{1}{2}$, qui ne va sûrement pas tendre vers 0 quand n tend vers $+\infty$. La fonction f n'est donc pas continue en $(0,0)$.

Exercice 4 (**)

1. On calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x+y-3$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y+x-6$. Les points critiques ont donc des coordonnées solutions du système $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$. La somme des deux équations donne $x+y=3$, d'où $x = 3-(x+y) = 0$ et $y=3$. Pour déterminer la nature de l'unique point critique, on constate que $f(0,3) = -9$, et on essaie de déterminer le signe de $f(x,y)-f(0,3) = x^2+y^2+xy-3x-6y+9 = \left(x+\dfrac{y}{2}-\dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4}y^2 - \dfrac{9}{4} + \dfrac{3}{2}y + y^2 - 6y + 9 = \left(x+\dfrac{y}{2}-\dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}y^2 - \dfrac{9}{2}y + \dfrac{27}{4} = \left(x+\dfrac{y}{2}-\dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}y - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2$. Puisque cette expression est toujours positive, f admet un minimum global de valeur -9 en $(0,3)$.

2. Les dérivées sont $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2+y^2+2x$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy-2y$. L'annulation de la deuxième dérivée partielle se produit lorsque $y=0$ ou $x=1$. Si $x=1$, la première équation devient

$5 + y^2 = 0$, ce qui ne va pas être vérifié très souvent. Par contre, la condition $y = 0$ amène à $3x^2 + 2x$, soit $x = 0$ ou $x = -\frac{2}{3}$. Il y a donc deux points critiques pour f : $(0, 0)$ et $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$. L'application ne peut pas avoir d'extremum local puisque l'application partielle $x \mapsto x^3 + x^2$ obtenue en fixant $y = 0$ n'est pas bornée. On peut tout de même se demander si les points critiques correspondent à des extrêma locaux. Comme $f(0, 0) = 0$, on cherche le signe de $f(x, y)$ au voisinage de 0. On constate aisément que $f\left(0, \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n^2} < 0$ alors que $f\left(\frac{1}{n}, 0\right) = \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^2} > 0$. Il n'y a donc pas d'extremum local en $(0, 0)$. Pour le deuxième point critique, on calcule $f\left(-\frac{2}{3}, 0\right) = -\frac{8}{27} + \frac{4}{9} = \frac{4}{27}$, puis on cherche le signe au voisinage de $(0, 0)$ de $f\left(-\frac{2}{3} + h, k\right) - f\left(-\frac{2}{3}, 0\right) = \left(-\frac{2}{3} + h\right)^3 + k^2\left(h - \frac{2}{3}\right) + \left(h - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{27} = h^3 + \frac{1}{3}h^2 - \frac{8}{9}h + k^2h - \frac{2}{3}k^2$. Lorsque $k = 0$, l'application partielle $h \mapsto h^3 + \frac{1}{3}h^2 - \frac{8}{9}h$ s'annule en 0 en changeant de signe (il ne peut pas y avoir d'extremum local puisque sa dérivée ne s'annule pas en 0). La fonction f ne peut donc pas avoir d'extremum local en $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$.

3. On calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^y + ye^x$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = xe^y + e^x$. L'annulation de la première dérivée donne $e^y = -ye^x$, ce qui reporté dans la deuxième conduit à $-xye^x + e^x = 0$, soit $xy = 1$ (l'exponentielle ne pouvant évidemment pas s'annuler). On doit alors avoir $y = -\frac{e^y}{e^x} = -e^{y-x} = -e^{y-\frac{1}{y}}$, et de même $x = -e^{x-y} = -e^{x-\frac{1}{x}}$. Autrement dit, x et y annulent la fonction $g : x \mapsto x + e^{x-\frac{1}{x}}$. Cette dernière est strictement positive sur $\mathbb{R}^{+*}$, et strictement croissante sur $\mathbb{R}^{-*}$ puisque $g'(x) = 1 + \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)e^{x-\frac{1}{x}} > 0$. Elle ne peut donc s'annuler au maximum qu'une seule fois, ce qui est le cas en -1. On en déduit que le seule point critique de la fonction f est $(-1, -1)$. On calcule $f(-1, -1) = -\frac{2}{e}$, puis on tente de trouver le signe de $f(-1+h, -1+k) + \frac{2}{e} = (h-1)e^{k-1} + (k-1)e^{h-1} + \frac{2}{e} = \frac{h-1}{e}e^k + \frac{k-1}{e}e^h + \frac{2}{e}$. Malheureusement, nous ne disposons pas de méthode évidente pour connaître ce signe, on peut constater (je vous laisse faire les calculs) que les deux applications partielles admettent un maximum global au point critique, mais ça ne suffit pas à conclure. Pour un calcul supplémentaire, on peut par exemple étudier le cas où $h = k = \frac{1}{n}$, c'est-à-dire chercher le signe de $\frac{1-n}{ne}e^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{e}$ (quitte à diviser tout par 2), qui donne en utilisant un développement limité de l'exponentielle $\left(\frac{1}{ne} - \frac{1}{e}\right)\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \frac{1}{e} = \frac{1}{ne} + \frac{1}{n^2e} - \frac{1}{e} - \frac{1}{ne} - \frac{1}{2n^2e} + \frac{1}{e} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2e}$, qui est positif. La fonction f ne peut donc pas admettre d'extremum local en $(-1, -1)$ (le calcul qu'on vient d'effectuer nous indique que la courbe obtenue en coupant la surface représentative de f par un plan vertical contenant le vecteur $(1, 1)$ aura un minimum en $(-1, -1)$).

4. On peut toujours développer f sous la forme $f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - 2x - 2y + 1$, et calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x + 2y - 2$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y + 2x - 2$. En divisant tout par 2, on obtient comme conditions pour les coordonnées des points critiques $2x + y = x + 2y = 1$. La différence des deux équations mène à $x = y$, ce qui donne comme unique point critque $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. On calcule $f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$, puis on cherche le signe (au moins au voisinage de $(0, 0)$) de $\left(\frac{1}{3} + h\right)^2 + \left(\frac{1}{3} + k\right)^2 + \left(h + k - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} = \frac{1}{9} + \frac{2}{3}h + h^2 + \frac{1}{9} + \frac{2}{3}k + k^2 + h^2 + k^2 + \frac{1}{9} + 2hk -$

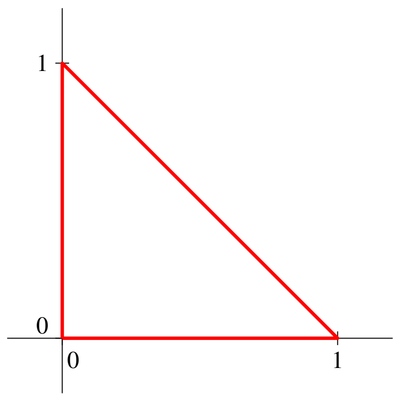
$\frac{2}{3}h - \frac{2}{3}k - \frac{1}{3} = 2h^2 + 2k^2 + 2hk = h^2 + k^2 + (h+k)^2$. Comme cette expression est toujours positive, notre point critique correspond à un minimum global.

5. Ce piège honteux n'est pas du tout un exercice sur les fonctions à deux variables, mais un petit exercice de géométrie du plan : en notant $M(x,y)$, $A(2,0)$ et $B(0,1)$, on a $f(M) = MA + MB$. Cette fonction atteint un minimum global en un point qui est le milieu de $[AB]$, donc pour $x = 1$ et $y = \frac{1}{2}$. La valeur du minimum en question vaut $AB = \sqrt{5}$. On peut bien sûr retrouver ces résultats par des calculs très moches à base de dérivées partielles.

Exercice 5 (* à ***)

1. Il s'agit simplement de calculer $\int_1^2 \int_0^2 (x+y)e^{x+y}\, dx\, dy$. On peut très bien faire une intégration par parties dans la première intégrale en ponsant $u(x) = x+y$ donc $u'(x) = 1$, et $v'(x) = e^{x+y}$, soit $v(x) = e^{x+y}$, pour obtenir $I = \int_1^2 [(x+y)e^{x+y}]_0^2 - \int_0^2 e^{x+y}\, dx\, dy = \int_1^2 (2+y)e^{2+y} - ye^y - [e^{x+y}]_0^2\, dy = \int_1^2 (1+y)e^{2+y} + (1-y)e^y\, dy$. Et une deuxième IPP pour finir (avec les conventions évidentes pour u et v') : $I = [(1+y)e^{2+y}]_1^2 - \int_1^2 e^{2+y}\, dy + [(1-y)e^y]_1^2 + \int_1^2 e^y\, dy = 3e^4 - 2e^3 - e^4 + e^3 - e^2 + e^2 - e = 2e^4 - e^3 - e$.

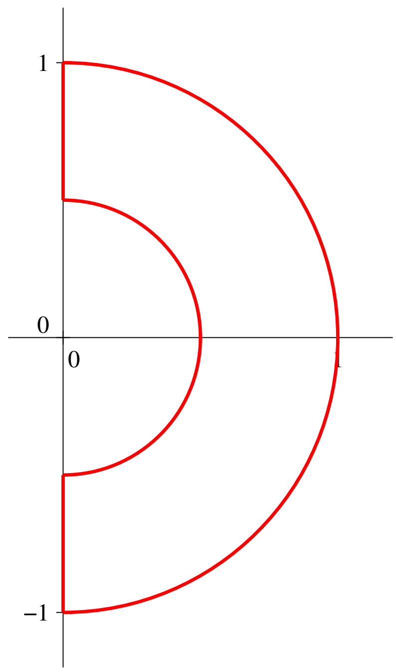
2. Commençons par faire un petit schéma pour visualiser le domaine d'intégration :



Il suffit donc de calculer $\int_0^1 \int_0^{1-x} xy\, dy\, dx = \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2}\right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 \frac{x(1-x)^2}{2}\, dx = \int_0^1 \frac{x^3}{2} - x^2 + \frac{x}{2}\, dx = \left[\frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$.

3. On ne va pas refaire un schéma cette fois-ci, le domaine d'intégration est un triangle similaire au précédent, et $I = \int_0^\pi \int_0^{\pi-x} \sin(x+y)\, dy\, dx = \int_0^\pi [-\cos(x+y)]_0^{\pi-x}\, dx = \int_0^\pi -\cos(x) - 1\, dx = [-\sin(x) - x]_0^\pi = -\pi$.

4. Le domaine d'intégration est une demi-couronne circulaire, située entre le cercle trigonométrique, et le cercle d'équation $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$, qui n'est autre que le cercle de centre O et de rayon $\frac{1}{2}$:



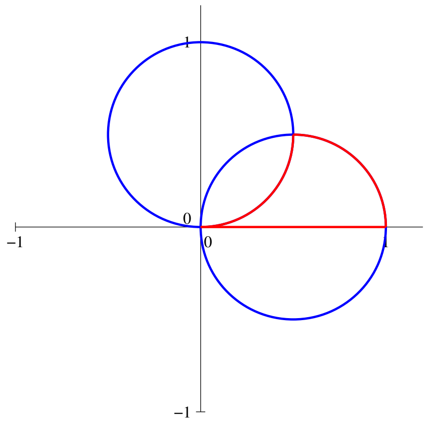
Il est évidemment préférable de passer en coordonnées polaires, le domaine étant aisément décrit par les condition $\rho \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. On obtient alors $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\rho^2 \cos^2(\theta)}{\rho^2} \times \rho \, d\rho \, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\theta) \, d\theta \times \int_{\frac{1}{2}}^{1} \rho \, d\rho$. Comme on sait que $\cos^2(\theta) = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$, on calcule directement $I = \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin(2\theta)}{4}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \times \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{\pi}{2} \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) = \frac{3\pi}{16}$.

5. Il faut bien sûr lire dans l'énoncé $x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$ pour l'équation de l'ellipse. On peut se contenter de calculer l'intégrale sur un quart d'ellipse et de la multiplier par 4, ce qui donne $I = 4\int_0^1 \int_0^{2\sqrt{1-x^2}} x^2 \, dy \, dx = 8\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2} \, dx$. Posons $x = \sin(\theta)$, donc $dx = \cos(\theta)d\theta$, pour obtenir $I = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\theta)\cos^2(\theta) \, d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(2\theta) \, d\theta$. Comme on sait que $\cos(4\theta) = 1 - 2\sin^2(2\theta)$, on peut écrire $\sin^2(2\theta) = \frac{1-\cos(4\theta)}{2}$, et $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \cos(4\theta) \, d\theta = \left[\theta - \frac{1}{4}\sin(4\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$.

6. On va bien sûr passer en coordonnées polaires : $I = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \cos(\rho^2)\rho \, d\rho \, d\theta = 2\pi \times \left[\frac{1}{2}\sin(\rho^2)\right]_0^3 = \pi\sin(9)$.

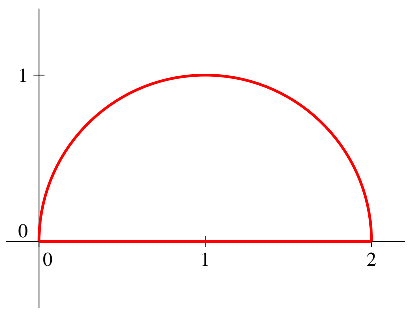
7. Encore un passage en coordonnées polaires assez évident : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \frac{\rho^2}{\rho\cos(\theta) + \rho} \times \rho \, d\rho \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos(\theta)} \, d\theta \times \int_0^1 \rho^2 \, d\rho$. La deuxième intégrale vaut facilement $\frac{1}{3}$. Pour la première, on peut constater que $1 + \cos(\theta) = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$, et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\cos^2(\frac{\theta}{2})} \, d\theta = \left[\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$. Finalement, $I = \frac{1}{3}$.

8. Commençons par tenter de visualiser le domaine d'intégration. La condition $y \geqslant 0$ ne pose évidemment pas de problème, les deux autres inégalités correspondent à des équations de cercle : $x^2 + y^2 - y = 0$ donne $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$, ce qui est l'équation du cercle de centre $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$. Pour avoir $x^2 + y^2 \geqslant y$, on doit se trouver à l'extérieur du disque correspondant. De même, la condition $x^2 + y^2 \leqslant x$ revient à dire qu'on est à l'intérieur du disque de rayon $\frac{1}{2}$ centré en $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. Une petite figure pour illustrer (le domaine d'intégration est délimité en rouge) :



Encore une fois, un passage en polaires est nécessaire. Le premier cercle a pour équation polaire $\rho \sin(\theta) = \rho^2$, soit $\rho) \sin(\theta)$, et le deuxième a pour équation $\rho = \cos(\theta)$. On observe que dans le domaine d'intégration, $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}$ (l'intersection des deux cercles autre que l'origine étant située sur la première bissectrice), et donc $\sin(\theta) \leqslant \rho \leqslant \cos(\theta)$, donc $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\sin(\theta)}^{\cos(\theta)} (\rho\cos(\theta)+\rho\sin(\theta))^2 \rho \, d\rho \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos(\theta)+\sin(\theta))^2 \int_{\sin(\theta)}^{\sin(\theta)} \rho^3 \, d\rho \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) + 2\cos(\theta)\sin(\theta) \left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_{\sin(\theta)}^{\cos(\theta)} d\rho = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\sin(2\theta))(\cos^4(\theta) - \sin^4(\theta)) \, d\theta$. Ce n'est pas si ignoble que ça : $\cos^4(\theta) - \sin^4(\theta) = (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) = \cos(2\theta)$, puis $I = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\theta) + \frac{1}{2}\sin(4\theta) \, d\theta = \left[\frac{1}{8}\sin(2\theta) - \frac{1}{32}\cos(4\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \frac{3}{16}$.

9. La condition $x^2 + y^2 = 2x$ correspond à un cercle d'équation $(x-1)^2 + y^2 = 1$, donc de rayon 1 et de centre $(1, 0)$. Ce qui donne un domaine d'intégration qui ressemble à ceci :



On peut le décrire en coordonnées polaires à l'aide des inégalités $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ et $0 \leqslant \rho \leqslant 2\cos(\theta)$ (on passe l'équation de cercle en polaires), donc $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos(\theta)} \frac{\rho^3 \cos^3(\theta)}{\rho^2} \rho \, d\rho \, d\theta =$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos(\theta)} \rho^2 \cos^3(\theta)\ d\rho\ d\theta = \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6(\theta)\ d\theta$. Cette dernière intégrale est un intégrale de Wallis. Rappelons qu'on peut les obtenir par récurrence sur n : en ponsant $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(t)\ dt$, alors $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}(t)(1-\sin^2(t))\ dt = I_{n-1} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}(t)\sin(t)\sin(t)\ dt$. On peut faire une IPP en dérivant l'un des sinus et en reconnaissant dans $\cos^{2n-2}(t)\sin(t)$ la dérivée de $-\frac{\cos^{2n-1}(t)}{2n-1}$ pour obtenir $I_n = I_{n-1} + \left[\frac{\cos^{2n-1}(t)}{2n-1}\sin(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2n-1}(t)}{2n-1}\cos(t)\ dt = I_{n-1} + 0 - \frac{1}{2n-1}I_n$. On en déduit que $I_n = \frac{2n-1}{2n}I_{n-1}$. Comme $I_0 = \frac{\pi}{2}$, on obtient en particulier $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6(\theta)\ d\theta = I_3 = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} = \frac{5\pi}{32}$. Il ne reste plus qu'à conclure : $I = \frac{8}{3} \times \frac{5\pi}{32} = \frac{5\pi}{12}$.

10. Le domaine d'intégration est simplement le quart de disque trigonométrique constitué des angles compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. En passant en coordonnées polaires, $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \frac{\rho^2 \sin(\theta)\cos(\theta)}{1+\rho^2}\rho\ d\rho\ d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin(2\theta)\ d\theta \times \int_0^1 \frac{\rho^3}{1+\rho^2}\ d\rho$. La première intégrale vaut $\left[-\frac{1}{4}\cos(2\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$, pour la deuxième on écrit $\frac{\rho^3}{1+\rho^2} = \frac{\rho^3+\rho}{1+\rho^2} - \frac{\rho}{1+\rho^2}$, donc $\int_0^1 \frac{\rho^3}{1+\rho^2}\ d\rho = \int_0^1 \rho - \frac{\rho}{1+\rho^2}\ d\rho = \left[\frac{\rho^2}{2} - \frac{\ln(1+\rho^2)}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{\ln(2)}{2}$, puis $I = \frac{1-\ln(2)}{4}$.

Troisième partie

Devoirs

Bon, alors, il est où ce paquet de copies ?

QCM de rentrée

PTSI B Lycée Eiffel

7 septembre 2012

Ce QCM est destiné à tester votre connaissance du programme de Terminale. Une question peut avoir une ou plusieurs réponses valides (mais jamais aucune), une mauvaise réponse enlève des points, une absence de réponse n'a pas d'incidence.

Géométrie

1. Le nombre complexe $z = 1 + i$:
   ☐ a pour module 2 ☐ a pour argument $\frac{\pi}{4}$ ☐ a pour module $\sqrt{2}$
   ☐ a pour argument $-\frac{7\pi}{4}$ ☐ a pour carré $2i$
2. L'équation $z^2 + 4 = 0$ a pour ensemble de solutions :
   ☐ l'ensemble vide ☐ les deux réels -2 et 2 ☐ le nombre complexe $2i$
   ☐ les nombres complexes $-2i$ et $2i$ ☐ les nombres complexes $-4i$ et $4i$
3. Quels sont parmi les nombres suivants ceux vérifiant $\cos(x) = \frac{1}{2}$?
   ☐ $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ☐ $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ ☐ $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$
   ☐ $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$ ☐ $x = \frac{\pi}{3} + 6k\pi$
4. Les vecteurs de l'espace $\overrightarrow{u}(1; 2; -1)$ et $\overrightarrow{v}(0; 2; 4)$ sont :
   ☐ sont coplanaires ☐ sont colinéaires ☐ sont orthogonaux
   ☐ ont un produit scalaire nul ☐ ont la même norme
5. Dans l'espace, deux droites peuvent être :
   ☐ disjointes sans être parallèles ☐ orthogonales à un même plan sans être parallèles
   ☐ orthogonales, et toutes deux orthogonales à une troisième droite
   ☐ orthogonales, et toutes deux parallèles à un même plan

Dénombrement

1. À la cantine, un élève a le choix entre trois entrées, deux plats et cinq desserts. Comme il est copain avec un des pions, il a le droit de prendre deux desserts différents (ainsi bien sûr qu'une entrée et un plat). Combien de menus peut-il ainsi constituer ?
   ☐ 60 ☐ 15 ☐ 30 ☐ 16
2. Six élèves s'assoient autour d'une table ronde. On considère que deux dispositions où tout le monde a les deux mêmes voisins sont identiques (même si tout le monde s'est décalé d'une place par exemple). Combien y a-t-il de dispositions distinctes ?
   ☐ 720 ☐ 120 ☐ 60 ☐ 6

Analyse

1. Le domaine de définition de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 9}$ est :
   ☐ $[0; +\infty[$ ☐ $]-\infty; -9] \cup [9; +\infty[$ ☐ $[3; +\infty[$ ☐ $]-\infty; -3] \cup [3; +\infty[$
2. La fonction ln est :
   ☐ strictement croissante ☐ stictement positive ☐ définie sur $]0; +\infty[$
   ☐ vérifie $\ln(a) \times \ln(b) = \ln(a + b)$ ☐ la dérivée de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$
   ☐ strictement négative si $x < 1$ ☐ vérifie $\ln(1) = e$
3. Deux suites (u_n) et (v_n) sont respectivement décroissante et croissante et vérifient $v_n \leqslant 2 \leqslant u_n$. On peut affirmer que :
   ☐ les deux suites convergent ☐ les deux suites convergent vers 2
   ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n > \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geqslant 2$
4. Une primitive de la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$ est donnée par :
   ☐ $F(x) = x + \ln x$ ☐ $F(x) = \dfrac{\frac{x^2}{2} + x}{\frac{x^2}{2}}$ ☐ $F(x) = x + e + \ln x$ ☐ $F(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$
5. La valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 xe^x \, dx$ est :
   ☐ 1 ☐ e ☐ $\dfrac{1}{2}$ ☐ $2e - 1$
6. L'équation différentielle $y' = 2y + 1$ a pour solutions les fonctions de la forme :
   ☐ $Ke^x - \dfrac{1}{2}$ ☐ $Ke^{2x} - 2$ ☐ $Ke^{2x} - \dfrac{1}{2}$ ☐ $Ke^{\frac{1}{2}x} - 2$

Pour les trois dernières questions, on vous donne le tableau de variations d'une fonction g :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
g	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	e	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

7. Combien l'équation $g(x) = 0$ admet-elle de solutions ?
   ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ une infinité ☐ on ne peut pas savoir
8. La tangente à la courbe représentative de g en son point d'abscisse -1 peut avoir pour équation :
   ☐ $y = 3x - 1$ ☐ $y = -3x$ ☐ $y = 2$ ☐ $y = x + 3$
9. La courbe représentative de g admet pour asymptotes :
   ☐ une asymptotes horizontale et peut-être une oblique
   ☐ deux asymptotes horizontales
   ☐ uniquement une asymptote horizontale
   ☐ une asymptote verticale et peut-être une oblique

Corrigé du QCM de rentrée

Géométrie

1. Le nombre complexe $z = 1 + i$:
   ☐ a pour module 2 ☒ a pour argument $\frac{\pi}{4}$ ☒ a pour module $\sqrt{2}$
   ☒ a pour argument $-\frac{7\pi}{4}$ ☒ a pour carré $2i$
2. L'équation $z^2 + 4 = 0$ a pour ensemble de solutions :
   ☐ l'ensemble vide ☐ les deux réels -2 et 2 ☐ le nombre complexe $2i$
   ☒ les nombres complexes $-2i$ et $2i$ ☐ les nombres complexes $-4i$ et $4i$
3. Quels sont parmi les nombres suivants ceux vérifiant $\cos(x) = \frac{1}{2}$?
   ☐ $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ☐ $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ ☒ $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$
   ☐ $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$ ☒ $x = \frac{\pi}{3} + 6k\pi$
4. Les vecteurs de l'espace $\overrightarrow{u}(1; 2; -1)$ et $\overrightarrow{v}(0; 2; 4)$ sont :
   ☒ sont coplanaires ☐ sont colinéaires ☒ sont orthogonaux
   ☒ ont un produit scalaire nul ☐ ont la même norme
5. Dans l'espace, deux droites peuvent être :
   ☒ disjointes sans être parallèles ☐ orthogonales à un même plan sans être parallèles
   ☒ orthogonales, et toutes deux orthogonales à une troisième droite
   ☒ orthogonales, et toutes deux parallèles à un même plan

Dénombrement

1. À la cantine, un élève a le choix entre trois entrées, deux plats et cinq desserts. Comme il est copain avec un des pions, il a le droit de prendre deux desserts différents (ainsi bien sûr qu'une entrée et un plat). Combien de menus peut-il ainsi constituer ?
   ☒ 60 ☐ 15 ☐ 30 ☐ 16
2. Six élèves s'assoient autour d'une table ronde. On considère que deux dispositions où tout le monde a les deux mêmes voisins sont identiques (même si tout le monde s'est décalé d'une place par exemple). Combien y a-t-il de dispositions distinctes ?
   ☐ 720 ☐ 120 ☒ 60 ☐ 6

Analyse

1. Le domaine de définition de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 9}$ est :
   ☐ $[0; +\infty[$ ☐ $]-\infty; -9] \cup [9; +\infty[$ ☐ $[3; +\infty[$ ☒ $]-\infty; -3] \cup [3; +\infty[$
2. La fonction ln est :
   ☒ strictement croissante ☐ stictement positive ☒ définie sur $]0; +\infty[$
   ☐ vérifie $\ln(a) \times \ln(b) = \ln(a+b)$ ☐ la dérivée de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$
   ☒ strictement négative si $x < 1$ ☐ vérifie $\ln(1) = e$
3. Deux suites (u_n) et (v_n) sont respectivement décroissante et croissante et vérifient $v_n \leqslant 2 \leqslant u_n$. On peut affirmer que :
   ☒ les deux suites convergent ☐ les deux suites convergent vers 2
   ☐ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n > \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ ☒ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \geqslant 2$
4. Une primitive de la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$ est donnée par :
   ☒ $F(x) = x + \ln x$ ☐ $F(x) = \dfrac{\frac{x^2}{2} + x}{\frac{x^2}{2}}$ ☒ $F(x) = x + e + \ln x$ ☐ $F(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$
5. La valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 xe^x \, dx$ est :
   ☒ 1 ☐ e ☐ $\dfrac{1}{2}$ ☐ $2e - 1$
6. L'équation différentielle $y' = 2y + 1$ a pour solutions les fonctions de la forme :
   ☐ $Ke^x - \dfrac{1}{2}$ ☐ $Ke^{2x} - 2$ ☒ $Ke^{2x} - \dfrac{1}{2}$ ☐ $Ke^{\frac{1}{2}x} - 2$

Pour les trois dernières questions, on vous donne le tableau de variations d'une fonction g :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
g	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	e	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

7. Combien l'équation $g(x) = 0$ admet-elle de solutions ?
   ☐ 0 ☐ 1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ une infinité ☐ on ne peut pas savoir
8. La tangente à la courbe représentative de g en son point d'abscisse -1 peut avoir pour équation :
   ☐ $y = 3x - 1$ ☐ $y = -3x$ ☒ $y = 2$ ☒ $y = x + 3$
9. La courbe représentative de g admet pour asymptotes :
   ☒ une asymptote horizontale et peut-être une oblique
   ☐ deux asymptotes horizontales
   ☐ uniquement une asymptote horizontale
   ☐ une asymptote verticale et peut-être une oblique

Devoir Surveillé n°1

PTSI B Lycée Eiffel

22 septembre 2012

Exercice 1

Cet exercice présente deux méthodes de calcul de la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$. Les deux questions sont complètement indépendantes l'une de l'autre. Pour tout l'exercice, on pose $\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

1. (a) Exprimer, pour un réel x quelconque, $\cos(4x)$ en fonction de $\cos(x)$.
   (b) En déduire que α est solution de l'équation $8x^4 - 8x^2 + x + 1 = 0$.
   (c) En trouvant deux racines évidentes à cette équation (l'un des deux n'est pas un nombre entier), factorisez-là.
   (d) Déterminer la valeur exacte de α.
2. (a) Démontrer la formule $\cos(x) + \cos(3x) = \dfrac{\sin(4x)}{2\sin(x)}$ (quand cela a un sens).
   (b) En déduire la valeur de $\alpha + \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$.
   (c) Calculer $\alpha \times \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$ (on doit obtenir une valeur rationnelle simple).
   (d) En déduire une équation du second degré vérifiée par α, et sa valeur exacte (on rappelle que deux nombres dont la somme vaut S et le produit P sont solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$).

Exercice 2

On considère la fonction f définie par $f(x) = \arccos(\tanh(x)) + \arctan(\sinh(x))$.

1. Rappeler le domaine de définition et la dérivée de chacune des fonctions arccos, tanh, arctan et sinh.
2. En déduire le domaine de définition et la dérivée de f (on rappelle la formule de dérivation d'une composée : $(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$).
3. Montrer que $f'(x) = 0$, et en déduire une expression très simplifiée de la fonction f.
4. Résoudre l'équation $\tanh(x) = \dfrac{5}{13}$ (donner les solutions uniquement à l'aide de la fonction ln).
5. Calculer $\arccos\left(\dfrac{5}{13}\right) + \arctan\left(\dfrac{5}{12}\right)$.

Exercice 3

On considère dans ce problème la famille de fonctions f_n définies par les équations $f_n(x) = x^n e^{-x^2}$, où $n \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f_n, et étudier, en fonction de la valeur de n, la parité de la fonction f_n.

2. Déterminer les limites de f_n aux bornes de son domaine de définition (on pourra à nouveau distinguer plusieurs cas).
3. Calculer la dérivée f_n' de la fonction f_n, et étudier les variations de la fonction f_n. On dressera en particulier un tableau de variations complet des fonctions f_0, f_1, f_2 et f_{-1}.
4. Déterminer les positions relatives des courbes représentatives des fonctions f_n et f_{n+1}. On constatera en particulier que toutes les courbes passent par un point commun.
5. Tracer dans un même repère les courbes des fonctions f_0, f_1, f_2 et f_{-1}.
6. On introduit pour cette dernière question la fonction auxiliaire g définie par $g(x) = x^x e^{-x}$.
   (a) Déterminer le domaine de définition de la fonction g, et étudier ses variations.
   (b) Déterminer ses limites, et donner une allure de sa représentation graphique.
   (c) Exprimer la valeur du maximum de la fonction f_n (lorsqu'il y en a un) à l'aide de la fonction g.
   (d) Pour quelle valeur de n ce maximum est-il le plus petit ?

Problème

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$, et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

I. Étude de f et de sa réciproque.

1. Étudier les variations et limites de la fonction f.
2. (a) Déterminer la dérivée seconde f'' de la fonction f et vérifier qu'elle s'annule en une unique valeur α.
   (b) Donner l'équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ en son point d'abscisse α. En quel point (T) coupe-t-elle l'axe des abscisses ?
   (c) Étudier la position relative de (T) et de $\mathcal{C}_f$ (on pourra dériver deux fois la différence des deux équations si besoin).
3. Tracer dans un même repère (T) et $\mathcal{C}_f$.
4. Montrer que la fonction f est bijective de $[-1; +\infty[$ vers un intervalle à préciser. On note g la réciproque de la fonction f sur cet intervalle. Donner le tableau de variations complet de la fonction g.
5. Exprimer la dérivée g' de la fonction g en fonction de x et de $g(x)$, sans utiliser d'exponentielle. En déduire une équation différentielle vérifiée par la fonction g.
6. Montrer que l'équation $2^x = x$ admet pour solution $x = -\dfrac{g(-\ln(2))}{\ln(2)}$ (qu'on ne cherchera bien sûr pas à expliciter plus).
7. Exprimer de même une solution de l'équation $x^x = 3$ en faisant intervenir la valeur $g(\ln(3))$.

II. Des fonctions auxiliaires.

On considère désormais, pour tout réel $a > 0$, la fonction h_a définie sur $\mathbb{R}$ par $h_a(x) = e^{-x} + ax^2$.

1. Établir le tableau de variations de la fonction h_a (en exploitant les résultats de la première partie). On montrera en particulier que h_a admet un minimum en un point m_a que l'on exprimera en fonction de a et à l'aide de la fonction g. Montrer que $h_a(m_a) = am_a(m_a + 2)$.
2. On note enfin i la fonction $i : a \mapsto m_a$ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$. Étudier les variations de la fonction i ainsi que ses limites.
3. Montrer que la valeur du maximum de h_a est une fonction croissante du paramètre a, et déterminer sa limite lorsque a tend vers $+\infty$.

Corrigé du DS1

Exercice 1

1. (a) On sait que $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$, donc $\cos(4x) = 2\cos^2(2x) - 1 = 2(2\cos^2(x) - 1)^2 - 1 = 2(4\cos^4(x) - 4\cos^2(x) + 1) - 1 = 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1$.

   (b) En posant $x = \frac{\pi}{5}$, on aura $4x = \frac{4\pi}{5} = \pi - x$, donc $\cos(4x) = -\cos(x)$. Au vu de la relation précédente, on a donc $8\alpha^4 - 8\alpha^2 + 1 = -\alpha$, soit $8\alpha^4 - 8\alpha^2 + x + 1 = 0$.

   (c) La racine la plus évidente est -1 : $8(-1)^4 - 8(-1)^2 - 1 + 1 = 0$. On peut donc factoriser : $8x^4 - 8x^2 + x + 1 = (x+1)(ax^3 + bx^2 + cx + d) = ax^4 + (a+b)x^3 + (b+c)x^2 + (c+d)x + d$. On a donc $a = 8$; $a + b = 0$, soit $b = -8$; $b + c = -8$ soit $c = 0$; $c + d = 1$ soit $d = 1$. Soit $8x^4 - 8x^2 + x + 1 = (x+1)(8x^3 - 8x^2 + 1)$. Reste à trouver une deuxième racine, $x = \frac{1}{2}$ convient puisque $\frac{8}{8} - \frac{8}{4} + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$. On peut donc à nouveau factoriser : $8x^3 - 8x^2 + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)(ex^2 + fx + g) = ex^3 + \left(f - \frac{1}{2}e\right)x^2 + \left(g - \frac{1}{2}f\right)x - \frac{1}{2}g$. Par identification, on obtient $e = 8$; $f - \frac{1}{2}e = -8$, soit $f = -4$; $g - \frac{1}{2}f = 0$ soit $g = -2$. Finalement, $8x^4 - 8x^2 + x + 1 = (x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)(8x^2 - 4x - 2)$.

   (d) Déterminons les racines du dernier facteur obtenu ci-dessus. Le trinome $4x^2 - 2x - 1$ (on peut factoriser par 2) a pour discriminant $\Delta = 4 + 16 = 20$, et admet deux racines $x_1 = \frac{2 + \sqrt{20}}{8} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$, et $x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$. La valeur de α est donc celle d'une des quatre racines trouvées pour l'équation. Ce n'est sûrement pas -1 puisque $\alpha > 0$ (c'est le cosinus d'un angle inférieur à $\frac{\pi}{2}$), pas non plus x_2 qui est également négative, et ça ne peut pas être $\frac{1}{2}$ puisqu'on sait qu'il s'agit du cosinus de l'angle $\frac{\pi}{3}$, et que la fonction cosinus ne peut pas prendre deux fois cette valeur avant $\frac{\pi}{2}$. Finalement, $\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$.

2. (a) Prenons plutôt les choses à l'envers : $\sin(4x) = 2\sin(2x)\cos(2x) = 4\sin(x)\cos(x)(2\cos^2(x) - 1) = 2\sin(x)(4\cos^2(x) - 2\cos(x))$, donc pour tous les angles vérifiant $\sin(x) \neq 0$, $\frac{\sin(4x)}{2\sin(x)} = 4\cos^2(x) - 2\cos(x) = \cos(3x) + \cos(x)$ puisqu'on sait que $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$.

   (b) On a donc $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \frac{\sin(\frac{4\pi}{5})}{2\sin(\frac{\pi}{5})}$. Or, $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$. Finalement, $\alpha + \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}$.

   (c) À l'aide de la formule de transformation d'un produit en somme, $\alpha \times \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{-2\pi}{5}\right)$. Or, $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$; et de même $\cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$. Au vu du résultat de la question précédente, on a donc $\alpha\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$.

   (d) Le réel α est donc solution de l'équation $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$, dont le discriminant est $\Delta = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$, et qui admet pour racines $x_1 = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$, et $x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$. Comme dans la première partie de l'exercice, on conclut pour des raisons de signe que $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$. On a au passage prouvé que $\cos\left(\dfrac{3\pi}{5}\right) = \dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$.

Exercice 2

1. Tout ça, c'est du cours : arccos est définie sur $[-1;1]$, de dérivée $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; tanh est définie sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\dfrac{1}{\cosh^2}$ ou $1-\tanh^2$; arctan est déifnie sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\dfrac{1}{1+x^2}$, et sinh est définie sur $\mathbb{R}$, de dérivée cosh.
2. Le terme $\arctan(\sinh(x))$ est défini sur $\mathbb{R}$, mais le terme $\arccos(\tanh(x))$ aussi, puisque tanh est à valeurs dans $]-1;1[$. Finalement, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Un peu de courage pour la dérivée : $f'(x) = -\dfrac{1}{\cosh^2(x)} \times \dfrac{1}{\sqrt{1-\tanh^2(x)}} + \cosh(x) \times \dfrac{1}{1+\sinh^2(x)}$.
3. Or, on sait d'une part que $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$, donc $\dfrac{1}{1+\sinh^2(x)} = \dfrac{1}{\cosh^2(x)}$; et $1 - \tanh^2(x) = \dfrac{1}{\cosh^2(x)}$, donc $\dfrac{1}{\sqrt{1-\tanh^2(x)}} = \cosh(x)$. On en déduit que $f'(x) = -\dfrac{1}{\cosh(x)} + \dfrac{1}{\cosh(x)} = 0$. La fonction f est donc constante. Reste à en calculer une valeur simple, par exemple $f(0) = \arccos(\tanh(0)) + \arctan(\sinh(0)) = \arccos(0) + \arctan(0) = \dfrac{\pi}{2} + 0 = \dfrac{\pi}{2}$. On a donc, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\pi}{2}$.
4. Cette équation revient à avoir $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{5}{13}$, soit $13(e^x - e^{-x}) = 5(e^x + e^{-x})$, ou encore $8e^x - 18e^{-x} = 0$. Cela donne $\dfrac{e^x}{e^{-x}} = \dfrac{18}{8}$, soit $e^{2x} = \dfrac{9}{4}$. On obtient pour unique solution $x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{9}{4}\right) = \ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$.
5. On aimerait bien exploiter la fonction f. Commençons donc par calculer $\sinh\left(\ln\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{e^{\ln\frac{3}{2}} - e^{-\ln\frac{3}{2}}}{2} = \dfrac{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}}{2} = \dfrac{5}{12}$. Comme ça tombien bien ! On conclut donc que $\arccos\left(\dfrac{5}{13}\right) + \arctan\left(\dfrac{5}{12}\right) = f\left(\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 3

1. La fonction f_n est définie sur $\mathbb{R}$ si $n \geqslant 0$, et sur $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$. Ce domaine de définition est toujours symétrique par rapport à 0, et le terme e^{-x^2} étant pair, f_n est paire si n est pair, et impaire si n est impair.
2. Lorsque $n < 0$, $\lim\limits_{x \to 0} e^{-x^2} = 1$, donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f_n(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^-} f_n(x) = +\infty$ si n est pair et $\lim\limits_{x \to 0^-} f_n(x) = -\infty$ si n est impair. Pour toutes les valeurs de n (y compris positives), $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f_n(x) = 0$ (c'est une application de la croissance comparée quand $n > 0$).
3. Calculons donc : $f_n'(x) = nx^{n-1} - 2x \times x^n e^{-x^2} = x^{n-1}(n - 2x^2)e^{-x^2}$. Si $n \leqslant 0$, le terme $n - 2x^2$ est toujours négatif, le signe de f_n' dépend donc uniquement de celui de x^{n-1}. Quand n est pair négatif, la fonction f_n est donc décroissante sur $]-\infty; 0[$ et croissante sur $]0; +\infty[$. Si n est impair négatif, f_n est croissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$. Si n est positif, la dérivée s'annule (outre éventuellement en 0) lorsque $x^2 = \dfrac{n}{2}$, donc en $x = \pm\sqrt{\dfrac{n}{2}}$. Là encore deux cas à distinguer : si n est positif impair, f_n est décroissante sur $\left]-\infty; -\sqrt{\dfrac{n}{2}}\right]$, croissante sur $\left[-\sqrt{\dfrac{n}{2}}; \sqrt{\dfrac{n}{2}}\right]$, et à nouveau décroissante sur $\left[\sqrt{\dfrac{n}{2}}; +\infty\right[$. Si n est positif pair, f_n est croissante sur $\left]-\infty; -\sqrt{\dfrac{n}{2}}\right]$, décroissante sur $\left[-\sqrt{\dfrac{n}{2}}; 0\right]$, croissante sur $\left[0; \sqrt{\dfrac{n}{2}}\right]$, et à nouveau décroissante sur $\left[\sqrt{\dfrac{n}{2}}; +\infty\right[$. Dans les deux cas, on a un maximum local en $\sqrt{\dfrac{n}{2}}$ de valeur $f\left(\sqrt{\dfrac{n}{2}}\right) = \left(\dfrac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}}$. Selon la parité de n, il y a un maximum ou un minimum de valeur égale ou opposée en $-\sqrt{\dfrac{n}{2}}$. Reste un dernier cas à traiter séparément, celui où $n = 0$: la fonction $f_0 : x \mapsto e^{-x^2}$ a simplement pour dérivée $f_0'(x) = -2xe^{-x^2}$, elle est croissante sur $\mathbb{R}^-$ et décroissante sur $\mathbb{R}^+$, avec pour maximum $f_0(0) = 1$. On obtient donc comme tableau de variations pour f_0 :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f_0	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Pour la fonction f_1 :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
f_1	0	$\searrow$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$	$\searrow$	0

Pour la fonction f_2 :

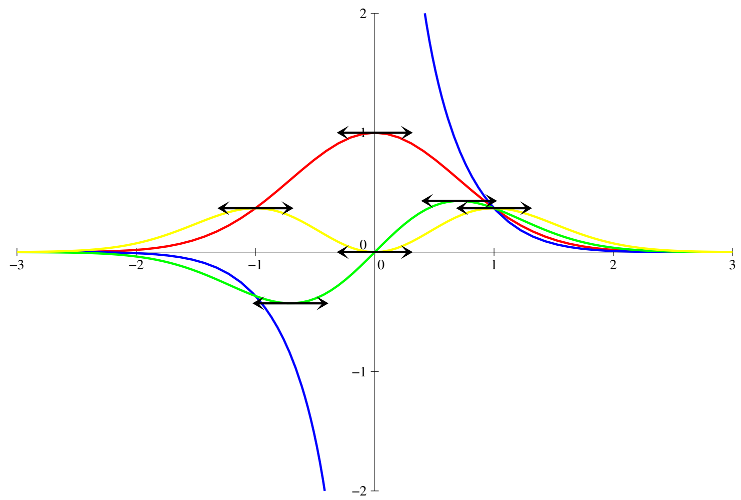
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f_1	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

Enfin, pour f_{-1} :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f_1	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0

4. On a $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1}e^{-x^2} - x^n e^{-x^2} = x^n(x-1)e^{-x^2}$. Les courbes passent par l'origine quand $n \geqslant 0$, mais surtout se coupent toutes en $x = 1$, au point d'ordonnée $\dfrac{1}{e}$. La courbe représentative de f_{n+1} est au-dessus de celle de f_n lorsque $x \geqslant 1$, en-dessous si $x \in]0;1]$. Sur $]-\infty;0[$, sans surprise, la courbe de f_{n+1} est en-dessous de celle de f_n si n est impair, au-dessus si n est pair (rien d'étonnant puisque f_n est positive sur $]-\infty;0[$ quand n est pair, et négative sinon). On peut toutefois noter que les courbes correspondant aux entiers pairs se coupent en $\left(-1;\dfrac{1}{e}\right)$ et celles correspondants aux entiers impairs en $\left(-1;-\dfrac{1}{e}\right)$.

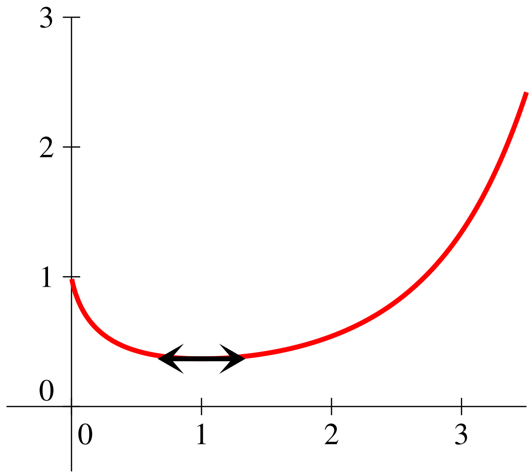
5. C'est évidemment un peu plus facile à faire à l'ordinateur, ça devrait ressembler à ceci (sur le corrigé en ligne, f_0 a la courbe rouge, f_1 la courbe verte, f_2 la courbe jaune et f_{-1} la courbe bleue) :



6. On introduit pour cette dernière question la fonction auxiliaire g définie par $g(x) = x^x e^{-x}$.

   (a) La fonction g est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$, on peut l'écrire sous la forme $g(x) = e^{x\ln(x)}e^{-x} = e^{x(\ln(x)-1)}$. La fonction est dérivable sur son domaine de définition, de dérivée $g'(x) = (\ln(x) - 1 + 1)e^{x(\ln(x)-1)} = \ln(x)e^{x(\ln(x)-1)}$. La fonction g est donc décroissante sur $]0;1]$, croissante sur $[1;+\infty[$. Elle admet pour minimum $g(1) = \dfrac{1}{e}$.

   (b) Sous la forme exponentielle, on a de façon immédiate $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, et en utilisant la croissance comparée $\lim\limits_{x\to 0} x(\ln(x) - 1) = 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$. Voici une allure de courbe :



(c) On a vu que ce maximum existait pour $n \geqslant 0$ et avait pour valeur $\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}}$, ce qui correspond exactement à la valeur de $g\left(\frac{n}{2}\right)$.

(d) Au vu des variations de la fonction g, cette valeur est minimale lorsque $\frac{n}{2} = 1$, soit $n = 2$.

Problème

I. Étude de f et de sa réciproque.

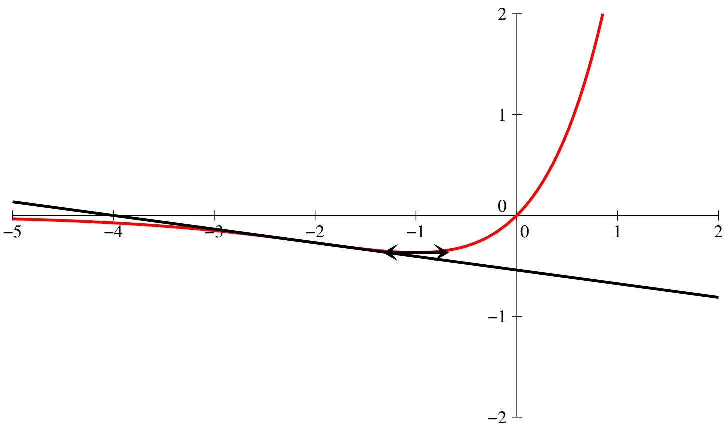
1. La fonction f a pour dérivée $f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$. La fonction admet donc un minimum en -1, de valeur $f(-1) = -\frac{1}{e}$. Sans difficulté, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, et en appliquant directement un résultat de croissance comparée, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

2. (a) La fonction f' est dérivable, de dérivée $f''(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$. Elle s'annule effectivement une seule fois, en $\alpha = -2$.

   (b) Puisque $f(-2) = -\frac{2}{e^2}$ et $f'(-2) = -\frac{1}{e^2}$, la tangente a pour équation $y = -\frac{1}{e^2}(x+2) - \frac{2}{e^2} = -\frac{1}{e^2}(x+4)$. Elle coupe l'axe des abscisses pour $x =_4$.

   (c) On cherche donc à étudier le signe de $f(x) + \frac{1}{e^2}(x+4) = xe^x + \frac{1}{e^2}(x+4)$. Cette expression a la même dérivée seconde que f, sa dérivée $(x+1)e^x + \frac{1}{e^2}$ est donc décroissante sur $]-\infty; -2]$ et croissante sur $[-2; +\infty[$. Comme elle vaut $-\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^2} = 0$ en -2, elle est donc toujours positive. L'expression $f(x) + \frac{1}{e^2}(x+4)$ est croissante sur $\mathbb{R}$, elle s'annule également en $x = -2$ (puisque la tangente y coupe la courbe représentative de f), on en déduit que la tangente est au-dessus de la courbe sur $]-\infty; -2]$, et en-dessous sur $[-2; +\infty[$.

3. Voici une allure de courbe :



4. La fonction f étant continue et strictement croissante sur $[-1; +\infty[$, elle y est bijective vers son intervalle image $\left[-\dfrac{1}{e}; +\infty\right[$. Le théorème de la bijection donne directement le tableau de variations de g :

x	$-\frac{1}{e}$	$+\infty$
f	-1 $\nearrow$	$+\infty$

5. En utilisant la formule de dérivation d'une réciproque, $g'(x) = \dfrac{1}{f'(g(x)} = \dfrac{1}{(g(x)+1)e^{g(x)}}$. Or, par définition, la fonction g vérifie $g(x)e^{g(x)} = x$. On peut donc écrire, lorsque $x \neq 0$, $e^{g(x)} = \dfrac{x}{g(x)}$, et $g'(x) = \dfrac{g(x)}{x(g(x)+1)}$. En particulier, la fonction g est solution de l'équation différentielle $xy'(y+1) = y$.
6. En effet, cette équation s'écrit $e^{x\ln(2)} = x$, soit en multipliant chaque membre par $\ln(2)$, $\dfrac{x\ln(2)}{e^{x\ln(2)}} = \ln(2)$, donc $-x\ln(2)e^{-x\ln(2)} = -\ln(2)$. Autrement dit $f(-x\ln(2)) = -\ln(2)$, ce qui équivaut à $-x\ln(2) = g(-\ln(2))$, soit $x = -\dfrac{g(-\ln(2)}{\ln(2)}$.
7. On peut écrire l'équation sous la forme $e^{x\ln(x)} = 3$, soit $x\ln(x) = \ln(3)$. En posant $X = \ln(x)$, on se ramène à l'équation $f(X) = \ln(3)$, soit $X = g(\ln(3))$. On a donc $\ln(x) = e^{g(\ln(3))}$, soit $x = e^{g(\ln(3))}$.

II. Des fonctions auxiliaires.

1. La fonction h_a est évidemment dérivable, de dérivée $h_a'(x) = -e^{-x} + 2ax = e^{-x}(-1 + 2af(x))$, qui est du signe de $2af(x) - 1$. Elle s'annule lorsque $f(x) = \dfrac{1}{2a}$ (valeur atteinte une unique fois par la fonction f), autrement dit en $m_a = g\left(\dfrac{1}{2a}\right)$. Son image par la fonction h est $h_a(m_a) = e^{-g(\frac{1}{2a})} + a\left(g\left(\dfrac{1}{2a}\right)\right)^2 = e^{-m_a} + am_a^2$. Or, par définition, $m_a = g\left(\dfrac{1}{2a}\right)$ implique $f(m_a) = \dfrac{1}{2a}$, soit $m_a e^{m_a} = \dfrac{1}{2a}$, donc $e^{-m_a} = 2am_a$, et $h_a(m_a) = 2am_a + am_a^2 = am_a(m_a+2)$.
2. Puisque $i(a) = g\left(\dfrac{1}{2a}\right)$, que $a \mapsto \dfrac{1}{2a}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, et que g est croissante sur son domaine de définition, i est une fonction décroissante. Par simple composition de limite, $\lim\limits_{a\to+\infty} i(a) = g(0) = 0$, et $\lim\limits_{a\to 0^+} i(a) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

3. Il suffit de constater que, si $a < b$, on aura $h_a(x) < h_b(x)$ sur $\mathbb{R}$. En particulier, $h_a(m_b) < h_b(m_b)$. Comme m_a est le minimum de la fonction h_a, on a également $h_a(m_a) \leqslant h_a(m_b)$, dont on déduit que $h_a(m_a) < h_b(m_b)$. La valeur du maximum est donc une fonction strictement croissante de la variable a. Reste à déterminer la limite quand a tend vers $+\infty$ de $am_a(m_a+2)$. On sait déjà que $\lim\limits_{a\to+\infty} m_a = 0$, donc $\lim\limits_{a\to+\infty} m_a + 2 = 2$. De plus, $am_a = \dfrac{1}{2}e^{-m_a}$, qui a pour limite $\dfrac{1}{2}$, donc $\lim\limits_{a\to+\infty} h_a(m_a) = 1$.

Devoir Surveillé n°2

PTSI B Lycée Eiffel

13 octobre 2012

Exercice 1

Dans un repère orthonormal du plan, on considère les points $A(-1,1)$, $B(3,-2)$, $C(-1,-3)$ et $D(2,1)$.

1. Montrer que le triangle ACD est rectangle.
2. Calculer l'aire de ce triangle de deux façons : à l'aide d'un calcul de déterminant, puis directement par un produit de longueurs en utilisant le fait qu'il s'agit d'un triangle rectangle.
3. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).
4. Déterminer les équations des hauteurs issues de A et C dans le triangle ABC, en déduire les coordonnées de l'orthocentre du triangle.
5. Déterminer une équation de la médiatrice du segment $[BD]$ en partant de la condition d'égalité de longueurs $MB = MD$. Retrouver cette équation en déterminant les coordonnées du milieu J de $[BD]$ et en partant d'une condition d'orthogonalité.
6. Déterminer les longueurs des trois côtés du triangle ACD. On notera $a = CD$, $d = AC$ et $c = AD$.
7. Déterminer les coordonnées du point I, barycentre du système $((A,a);(C,c);(D,d))$.
8. Calculer les distances du point I aux trois côtés du triangle, et en déduire ce que représente le point I pour le triangle ACD.
9. Faire une figure et y placer tous les points et droites étudiés dans l'exercice.

Problème 1 : résolution d'équations du troisième degré

Le but de cet exercice est de présenter une méthode de résolution (faisant intervenir les nombres complexes) des équations du troisième degré.

I. Un cas particulier

On s'intéresse pour l'instant à l'équation $z^3 - 6z^2 + 9z - 1 = 0$.

1. On pose $Z = z - 2$, déterminer une équation du troisième degré vérifiée par Z.
2. On décide désormais d'écrire $Z = u+v$, développer l'équation obtenue à la question précédente et prouver que $u^3 + v^3 + 3(uv - 1)(u + v) + 1 = 0$.
3. En imposant la condition $uv = 1$, montrer que u^3 et v^3 sont solutions de l'équation du second degré $x^2 + x + 1 = 0$.
4. Résoudre cette équation, et en déduire les valeurs possibles de u et de v.
5. Déterminer les solutions de l'équation initiale.

II. Généralisation

On considère désormais une équation du troisième degré quelconque $z^3 + az^2 + bz + c = 0$.

1. Montrer, qu'en faisant un changement de variable du type $Z = z + k$, on peut se ramener à une équation de la forme $Z^3 + pZ + q = 0$.
2. En posant $Z = u + v$ et $uv = -\dfrac{p}{3}$, montrer que l'équation se ramène à $u^3 + v^3 + q = 0$.
3. On pose $U = u^3$ et $V = v^3$, déterminer les valeurs de $U + V$ et de UV.
4. En déduire les valeurs de U et V, et expliquer comment terminer la résolution de l'équation du troisième degré initiale.
5. Résoudre à l'aide de cette méthode l'équation $z^3 - 3z^2 + (9 - 6i)z + (-5 + 12i)$.

Problème 2 : homographies du plan complexe

Une homographie est une application du plan complexe dans lui-même définie par une équation de la forme $f(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$, où a, b, c et d sont quatre nombres complexes vérifiant $ad - bc \neq 0$.

I. Un cas particulier

On étudie dans cette première partie l'application $f : z \mapsto \dfrac{iz - 1}{z + 1}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f, et montrer que f est bijective de $\mathcal{D}_f$ vers un ensemble à déterminer, en déterminant une expression de sa réciproque.
2. Déterminer les images par f de 2 et de $1+i$ (sous forme algébrique), ainsi que leurs antécédents.
3. Déterminer les nombres complexes invariants par f.
4. Déterminer les nombres complexes z ayant une image réelle par f, puis ceux ayant une image imaginaire pure.
5. Déterminer les nombres complexes z pour lequels $f(z) \in \mathbb{U}$.
6. Montrer que l'image du demi-plan constitué de tous les nombres complexes ayant une partie imaginaire strictement positive est délimitée par une droite dont on donnera une équation cartésienne.

II. Une étude plus générale

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et f l'homographie définie par $f(z) = \dfrac{e^{i\theta}}{z}$. Montrer que $\forall z \in \mathbb{U}$, $f(z) \in \mathbb{U}$.
2. On considère maintenant une homographie de la forme $f(z) = e^{i\theta}\dfrac{z + a}{\overline{a}z + 1}$, où a est un nombre complexe n'appartenant pas à $\mathbb{U}$. Montrer que, $\forall z \in \mathbb{U}$, $f(z)$ est bien défini, et $f(z) \in \mathbb{U}$.
3. On cherche à prouver que seules les deux types d'homographies précédentes conservent le cercle trigonométrique. Soit donc une homographie $f : z \mapsto \dfrac{az + b}{cz + d}$ telle que $\forall z \in \mathbb{U}$, $f(z) \in \mathbb{U}$.
   (a) Montrer que, si α et β sont deux nombres complexes quelconques, $|\alpha + \beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\overline{\alpha}\beta)$.
   (b) Établir que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $|a|^2 + |b|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\overline{a}be^{-i\theta}) = |c|^2 + |d|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\overline{c}de^{-i\theta})$.
   (c) Montrer que la condition $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\alpha + 2\,\mathrm{Re}(\beta e^{-i\theta}) = 0$ implique $\alpha = \beta = 0$. En déduire que $|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2$ et $\overline{a}b = \overline{c}d$.
   (d) Montrer que, si $a = 0$, f est du type étudié à la première question de cette deuxième partie.

(e) Montrer que, si $a \neq 0$, $|a| = |c|$ ou $|a| = |d|$.

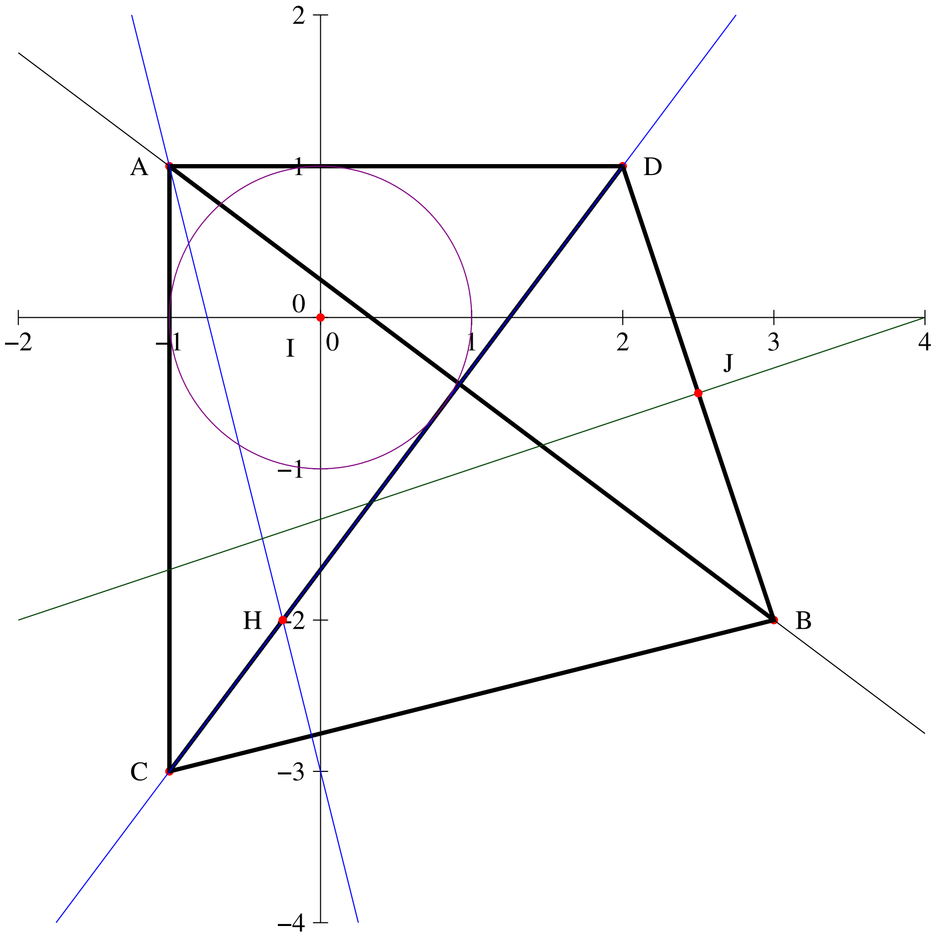
(f) Montrer que le premier cas est impossible, et prouver que f est alors du type étudié dans la deuxième question de cette partie.

Corrigé du DS2

Exercice 1

1. Puisqu'on est dans un repère orthonormal, on peut utiliser le produit scalaire : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = 0 \times 3 + 4 \times 0 = 0$, le triangle est donc rectangle en A (évidemment, si ça n'avait pas marché avec A, il aurait fallu tenter les deux autres sommets).
2. Par un calcul de déterminant, $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}\det(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{2} \times 12 = 6$. Sinon, plus directement, le triangle étant rectangle en A, la hauteur issue de C est confondue avec (AC) et $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2} \times AC \times AD$. Or, $AC = \sqrt{0+16} = 4$ et $AD = \sqrt{9+0} = 3$, donc $\mathcal{A} = 6$.
3. Partons par exemple du vecteur directeur $\overrightarrow{AB}(4, -3)$. Le point $M(x, y)$ appartient à la droite (AB) si et seulement si $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$, soit $\begin{vmatrix} x+1 & 4 \\ y-1 & -3 \end{vmatrix} = 0$. On obtient donc $-3(x+1) - 4(y-1) = 0$, soit en changeant tous les signes $3x + 4y - 1 = 0$.
4. Commençons par la hauteur issue de C. Un point $M(x, y)$ appartient à cette hauteur si $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CM} = 0$, soit $4(x+1) - 3(y+3) = 0$. On obtient donc comme équation $4x - 3y - 5 = 0$. Pour la deuxième hauteur, on commence par calculer les coordonnées de $\overrightarrow{BC}(-4, -1)$, puis on procède de même : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AM} = 0$ donne $-4(x+1) - (y-1) = 0$, soit $-4x - y - 3 = 0$. Pour obtenir les coordonnées de l'orthocentre, qui se situe à l'intersection de ces deux hauteurs, il ne reste plus qu'à résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcl} 4x & - & 3y & = & 5 \\ -4x & - & y & = & 3 \end{array}\right.$. La somme des deux équations donne immédiatement $-4y = 8$, soit $y = -2$. On en déduit que $4x = 5 + 3y = -1$, soit $x = -\dfrac{1}{4}$. L'orthocentre a donc pour coordonnées $\left(-\dfrac{1}{4}, -2\right)$.
5. Posons comme d'habitude $M(x, y)$ et écrivons l'égalité sur le carré des distances (une distance étant toujours positive, c'est rigoureusement équivalent). Cela donne $(x-3)^2 + (y+2)^2 = (x-2)^2 + (y-1)^2$. Ce n'est pas le moment d'être subtil, on développe tout : $x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1$, soit $-2x + 6y + 8 = 0$. On peut tout diviser par 2 pour avoir une équation légèrement plus simple : $-x + 3y + 4 = 0$. Autre possibilité, passer par le milieu $J\left(\dfrac{3+2}{2}, \dfrac{-2+1}{2}\right)$, soit $J\left(\dfrac{5}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$. Un point $M(x, y)$ appartient à la médiatrice de $[BD]$ si $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{JM} = 0$, soit $-\left(x - \dfrac{5}{2}\right) + 3\left(y + \dfrac{1}{2}\right) = 0$. On trouve donc $-x + \dfrac{5}{2} + 3y + \dfrac{3}{2} = 0$, soit $-x + 3y + 4 = 0$. Incroyable mais vrai, on retrouve bien la même équation que tout à l'heure.
6. On a déjà fait les deux tiers du boulot plus haut : $d = 4$ et $c = 3$. Reste à calculer $a = CD = \sqrt{9+16} = 5$.
7. On calcule $x_I = \dfrac{5x_A + 3x_C + 4x_D}{12} = \dfrac{-5-3+8}{12} = 0$; et $y_I = \dfrac{5y_A + 3y_C + 4y_D}{12} = \dfrac{5-9+4}{12} = 0$. Mince alors, le point I est en fait l'origine du repère !
8. Utilisons par exemple le calcul de distance faisant intervenir un vecteur directeur de la droite. On commence par $d(I, (AC)) = \dfrac{\det(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{AC})}{\| \overrightarrow{AC} \|} = \dfrac{-1 \times -4 - 1 \times 0}{4} = 1$. De même, $d(I, (AD)) = \dfrac{\det(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{AD})}{\| \overrightarrow{AD} \|} = \dfrac{-1 \times 0 + 1 \times 3}{3} = 1$, la distance est aussi égale à 1. Enfin, $d(I, (CD)) = \dfrac{\det(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{CD})}{\| \overrightarrow{CD} \|} = \dfrac{-1 \times 4 + 3 \times 3}{5} = 1$. Les distances de I aux trois côtés du triangle étant égales à 1, le point I est centre du cercle inscrit dans le triangle ACD. Ce cercle inscrit est donc le cercle trigonométrique, de centre O et de rayon 1.

9. En gras les triangles, en bleu les hauteurs de ABC (oui, il y en a une qui passe par D, je n'ai pas fait exprès !), en vert la médiatrice de $[BD]$, et en violet le cercle inscrit au triangle ACD :



Problème 1 : résolution d'équations du troisième degré

I. Un cas particulier

On s'intéresse pour l'instant à l'équation $z^3 - 6z^2 + 9z - 1 = 0$.

1. Puisque $z = Z + 2$, on peut écrire $(Z+2)^3 - 6(Z+2)^2 + 9(Z+2) - 1 = 0$, soit $Z^3 + 6Z^2 + 12Z + 8 - 6Z^2 - 24Z - 24 + 9Z + 18 - 1 = 0$, donc $Z^3 - 3Z + 1 = 0$.
2. Encore du calcul peu subtile, $(u+v)^3 - 3(u+v) + 1 = 0$ donne $u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 - 3u - 3v + 1 = 0$. En factorisant ce qu'on peut par $u+v$, $u^3 + v^3 + 3uv(u+v) - 3(u+v) + 1 = 0$, ce qui donne bien $u^3 + v^3 + 3(uv-1)(u+v) + 1 = 0$.
3. Si on impose $uv = 1$, on a donc $u^3 + v^3 + 1 = 0$, soit $u^3 + v^3 = -1$. Comme par ailleurs $u^3v^3 = (uv)^3 + 1^3 = 1$, on connait le produit P et la somme S des deux nombres u et v, ils sont donc solutions de l'équation du second degré $x^2 - Sx + P = 0$, soit ici $x^2 + x + 1 = 0$.
4. L'équation a pour discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3$, et admet donc pour racines complexes conjuguées $x_1 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = e^{e^{i\frac{2\pi}{3}}}$ et $x_2 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. On peut donc poser $u^3 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $v^3 = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ (ou le contraire, ça n'a aucune importance). Les valeurs possibles pour u sont donc les racines cubiques de $e^{i\frac{2\pi}{3}}$, c'est-à-dire $u_1 = e^{i\frac{2\pi}{9}}$; $u_2 = e^{i\frac{8\pi}{9}}$ et $u_3 = e^{i\frac{14\pi}{9}}$. De même, les valeurs possibles de v sont $v_1 = e^{-i\frac{2\pi}{9}}$; $v_2 = e^{-i\frac{8\pi}{9}}$ et $v_3 = e^{-i\frac{14\pi}{9}}$.

5. Avec la condition ajoutée $uv = 1$, les trois couples possibles sont (u_1, v_1) ; (u_2, v_2) et (u_3, v_3), qui donnent donc les trois valeurs possible de Z : $Z_1 = u_1 + v_1 = 2\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)$; $Z_2 = u_2 + v_2 = 2\cos\left(\frac{8\pi}{9}\right)$ et $Z_3 = u_3 + v_3 = 2\cos\left(\frac{14\pi}{9}\right)$. On en déduit les solutions de l'équation initiale : $z_1 = 2 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)$; $z_2 = 2 + 2\cos\left(\frac{8\pi}{9}\right)$ et $z_3 = 2 + 2\cos\left(\frac{14\pi}{9}\right)$. Remarquons que, malgré l'utilisation des nombres complexes, on obtient ici trois solution réelles.

II. Généralisation

1. Développons comme précédemment $(Z-k)^3 + a(Z-k)^2 + b(Z-k) + c = Z^3 - 3kZ^2 + 9k^2Z - k^3 + aZ^2 - 2akZ + ak^2 + bZ - bk + c = Z^3 + (a-3k)Z^2 + (9k^2 - 2ak + b)Z - k^3 + ak^2 - bk + c$. Si on veut faire disparaitre le terme en Z^2, il suffit de prendre $k = \frac{a}{3}$. On obtiendra alors $p = 9k^2 - 2ak + b = a^2 - 2\frac{a^2}{3} + b = \frac{a^2}{3} + b$; et $q = -k^3 + ak^2 - bk + c = -\frac{a^3}{27} + \frac{a^3}{9} - \frac{ab}{3} + c = -\frac{2a^2}{27} + \frac{ab}{3} + c$.
2. On procède comme dans la première partie : $(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0$ donne $u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 + p(u+v) + q = 0$, soit $u^3 + v^3 + (u+v)(3uv+p) + q = 0$. En posant $uv = -\frac{p}{3}$, on fait disparaitre le terme du milieu pour mettre sous la forme demandée.
3. Comme tout à l'heure, on a $U + V = -q$, et $UV = (uv)^3 = -\frac{p^3}{27}$.
4. Les nombres U et V sont donc solutions de l'équation $x^2 + qx - \frac{p^3}{27}$, qui a pour discriminant $\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27}$. Si $\Delta > 0$, on trouvera donc $U = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ et $V = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$. Si $\Delta < 0$, on aura des valeurs complexes conjuguées $U = -\frac{q}{2} + i\sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}$, et $V = -\frac{q}{2} - i\sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}$. Si $\Delta = 0$, on aura $U = V$, ce qui n'est pas gênant pour la suite de la résolution. On cherche ensuite les racines cubiques (complexes) des deux nombres U et V, on les apparie de façon à avoir un produit égal à 1 (il y aura toujours trois couples possibles), en calculant les sommes $u + v$ pour chacun des trois couples on trouve trois valeurs possibles pour Z, qui donnent les trois solutions $z = Z + k$.
5. Allons-y en commençant par poser $Z = z - 1$, on a donc $(Z+1)^3 - 3(Z+1)^2 + (9-6i)(Z+1) - 5 + 12i = 0$, soit $Z^3 + 3Z^2 + 3Z + 1 - 3Z^2 - 6Z - 3 + (9-6i)Z + 9 - 6i - 5 + 12i = 0$. En regroupant un peu, $Z^3 + 6(1-i)Z + 2 + 6i = 0$. On pose maintenant $Z = u + v$ pour obtenir $u^3 + 3u^3v + 3uv^2 + v^3 + 6(1-i)(u+v) + 2 + 6i = 0$, soit $u^3 + v^3 + 3(u+v)(uv + 2(1-i)) + 2 + 6i = 0$. On va donc imposer la condition supplémentaire $uv = 2i - 2$, et poser $U = u^3$ et $V = v^3$ pour obtenir les équations $U + V = -2 - 6i$, et $UV = (2i-2)^3 = -8i + 24 + 24i - 8 = 16 + 16i$. Les nombres U et V sont solution de l'équation du second degré $x^2 + (2+6i)x + 16 + 16i = 0$. Son discriminant est égal à $\Delta = (2+6i)^2 - 64 - 64i = 4 + 24i - 36 - 64 - 64i = -96 - 40i$. On cherche $\delta = a + ib$ tel que $\delta^2 = \Delta$, ce qui donne les conditions $a^2 - b^2 = -96$ et $2ab = -40$. On a alors le choix entre être très courageux et calculer le module de Δ (qui vaut 104), ou bien être observateur et remarquer que $a = 2$ et $b = -10$ est un couple solution. On peut donc prendre $\delta = 2 - 10i$, et trouver les solutions $U = \frac{-2 - 6i + 2 - 10i}{2} = -8i$ et $V = \frac{-2 - 6i - 2 + 10i}{2} = -2 + 2i$. Ouf, on obtient deux nombres dont les racines cubiques sont faciles à calculer. Pour u, on peut prendre $u_1 = 2i$, $u_2 = 2ie^{i\frac{2\pi}{3}} = 2e^{-i\frac{5\pi}{6}} = -\sqrt{3} - i$ et $u_3 = 2ie^{i\frac{4\pi}{3}} = 2e^{-i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} - i$. Pour $V = -2 + 2i = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$, on obtient $v_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 1 + i$; $v_2 = (1+i)e^{i\frac{2\pi}{3}} = (1+i)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

et $v_3 = (1+i)e^{i\frac{4\pi}{3}} = (1+i)\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + i\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$. Comme $2i(1+i) = -2+2i$, le couple (u_1, v_1) est une solution correcte, qui mène à $Z = u_1 + v_1 = 1 + 3i$. De même, $u_2 + v_3 = 2ie^{i\frac{2\pi}{3}} \times (1+i)e^{i\frac{4\pi}{3}} = -2+2i$, donc $Z = u_2 + v_3 = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} + i\frac{-3-\sqrt{3}}{2}$ convient. Enfin, la troisième possibilité est $Z_3 = u_3 + v_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}-3}{2}$. On en déduit aisément les solutions de l'équation initiale en se souvenant que $z = Z + 1$: $z_1 = 2 + 3i$; $z_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{2} - i\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ et $z_3 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}-3}{2}$.

Problème 2 : homographies du plan complexe

I. Un cas particulier

1. L'application est évidemment définie sur $\mathbb{C}\backslash\{1\}$. Essayons donc de déterminer sa réciproque, posons $Z = f(z) = \frac{iz-1}{z+1}$, alors $Zz + Z = iz - 1$, soit $z(Z - i) = -1 - Z$, ou encore $z = \frac{Z+1}{i-Z}$. Cette expression n'a un sens que si $Z \neq i$, et donne dans ce cas la valeur de l'unique antécédent par f de Z. L'application f est donc bijective de $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ vers $\mathbb{C}\backslash\{i\}$.

2. Calculons donc $f(2) = \frac{2i-1}{3} = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$; et $f(1+i) = \frac{i-1-1}{2+i} = \frac{(i-2)(2-i)}{5} = \frac{-3+4i}{5} = -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$. Pour les antécédents, on peut exploiter le calcul de la question précédente, on connait déjà la réciproque de f. L'unique antécédent de 2 sera donc égal à $\frac{3}{i-2} = \frac{3(i+2)}{-5} = -\frac{6}{5} - \frac{3}{5}i$. Celui de $1+i$ est donné par $\frac{2+i}{-1} = -2 - i$.

3. On cherche à résoudre l'équation $f(z) = z$, soit $z(z+1) = iz - 1$, ou encore $z^2 + (1-i)z + 1 = 0$. Il s'agit d'une équation du second degré de discriminant $\Delta = (1-i)^2 - 4 = -2i - 4$. On cherche $\delta = a + ib$ tel que $\delta^2 = \Delta$, ce qui donne les deux conditions $a^2 - b^2 = -4$ et $ab = -2$. En ajoutant la condittion sur le module, on obtient la troisième équation $a^2 + b^2 = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. En soustrayant et additionnant les équations extrêmes, on a $2a^2 = 2\sqrt{5} - 4$ et $2b^2 = 2\sqrt{5} + 4$, ce qui permet de choisir en constatant que a et b sont de signe contraire $\delta = \sqrt{\sqrt{5}-2} - i\sqrt{\sqrt{5}+2}$. On trouve alors deux points invariants par f : $z_1 = \frac{i-1+\delta}{2}$ et $z_2 = \frac{i-1i\delta}{2}$ (qu'on peut écrire entièrement si on le souhaite, mais ça n'a pas grand intérêt).

4. Posons $z = a + ib$, on a alors $f(z) = \frac{ai-b-1}{a+ib+1} = \frac{(ai-b-1)(a+1-ib)}{(a+1)^2+b^2}$
$= \frac{a^2i + ai + ab - ab - b + ib^2 - a - 1 + ib}{(a+1)^2+b^2} = \frac{-b-a-1+i(a^2+b^2+a+b)}{(a+1)^2+b^2}$. Pour avoir une image réelle, z doit donc vérifier $a^2 + b^2 + a + b = 0$, soit $\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = 0$. On reconnait l'équation d'un cercle de centre $A\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Pour que l'image de z soit imaginaire pure, on doit avoir $-b - a - 1 = 0$, soit $b = -a - 1$, donc z appartient à une droite du plan, d'équation $y = -x - 1$.

5. Pour avoir $f(z) \in \mathbb{U}$, il suffit d'avoir $|iz - 1| = |z + 1|$. En posant $z = a + ib$ et en élevant tout au carré, on trouve la condition $|ia - b - 1|^2 = |a + ib + 1|^2$, soit $(-b-1)^2 + a^2 = (a+1)^2 + b^2$. On développe tout : $b^2 + 1 + 2b + a^2 = a^2 + 2a + 1 + b^2$, soit très simplement $a = b$. Les nombres complexes ayant une image de module 1 sont donc situés sur la première bissectrice

des axes (on vérifie par exemple que c'est le cas pour $1+i$ dont on a calculé l'image plus haut : $\left|-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i\right| = \sqrt{\frac{9}{25}+\frac{16}{25}} = 1$).

6. On n'arrive pas à grand chose à partir de l'expression de $f(z)$. Mieux vaut repartir de la réciproque : en posant $Z = c + id$, $\frac{Z+1}{i-Z} = \frac{c+1+id}{-c+i(1-d)} = \frac{(c+1+id)(-c-i+id)}{c^2+(1-d)^2} = \frac{-c^2-ic+icd-c-i+id-icd+d-d^2}{c^2+(1-d)^2} = \frac{-c^2-c+d-d^2+i(-c-1+d))}{c^2+(1-d)^2}$. Les images des nombres ayant une partie imaginaire strictement positive sont les Z ayant un antécédent dont la partie imaginaire est positive, donc vérifiant $-c-1+d>0$, autrement dit $c+1<d$. Il s'agit du demi-plan situé au-dessus de la droite d'équation $y = x+1$ dans le plan complexe.

II. Une étude plus générale

1. Prenons donc un $z \in \mathbb{U}$, qui peut s'écrire sous la forme $e^{i\alpha}$. On a alors $f(z) = \frac{e^{i\theta}}{e^{i\alpha}} = e^{i(\theta-\alpha)} \in \mathbb{U}$.
2. Comme $a \notin \mathbb{U}$, on ne peut pas avoir $|\overline{a}| = 1$, donc $|\overline{a}e^{i\alpha}| \neq 1$. En particulier, $\overline{a}e^{i\alpha} \neq -1$, donc le dénominateur ne peut pas s'annuler si $z \in \mathbb{U}$. L'application est donc définie sur $\mathbb{U}$. Cherchons désormais à calculer $|f(z)| = \frac{|z+a|}{|\overline{a}z+1|} = \frac{|z+a|}{|\overline{a}z\overline{z}+\overline{z}|} \times |\overline{z}|$. Le nombre z étant de module 1, $|\overline{z}| = 1$ et $z\overline{z} = 1$ donc $|f(z)| = \frac{|z+a|}{\overline{a}+\overline{z}} = \frac{|z+a|}{|\overline{z+a}|} = 1$, donc $f(z) \in \mathbb{U}$.
3. (a) Écrivons $\alpha = a+ib$ et $\beta = c+id$, on a donc $|\alpha+\beta|^2 = (a+c)^2+(b+d)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+2(ac+bd)$. Or, $|\alpha|^2 = a^2+b^2$, $|\beta|^2 = c^2+d^2$ et $\overline{\alpha}\beta = (a-ib)(c+id) = ac+bd+i(ad-bc)$ a pour partie réelle $ac+bd$, ce qui donne bien la formule annoncée.

   (b) Par hypothèse, on doit avoir $|f(e^{i\theta})| = 1$, c'est-à-dire $|ae^{i\theta}+b| = |ce^{i\theta}+d|$. En élevant au carré et en utilisant la question précédente, $|ae^{i\theta}|^2 + |b|^2 + 2\operatorname{Re}(\overline{ae^{i\theta}}b) = |ce^{i\theta}|^2 + |d|^2 + 2\operatorname{Re}(\overline{ce^{i\theta}}d)$, soit en effet $|a|^2+|b|^2+2\operatorname{Re}(\overline{a}be^{-i\theta}) = |c|^2+|d|^2+2\operatorname{Re}(\overline{c}de^{-i\theta})$.

   (c) Écrivons le nombre β sous forme exponentielle $\beta = re^{i\mu}$. Pour $\theta = \mu$, on a $\beta e^{-i\theta} = re^{i\mu}e^{-i\mu} = r$, donc $2\operatorname{Re}(\beta e^{-i\theta} = 2r$, et on doit donc avoir $\alpha+2r = 0$. Si au contraire on prend $\theta = \mu+\pi$, on trouve $\beta e^{-i\theta} = re^{-i\pi} = -r$, donc on trouve la condition $\alpha - 2r = 0$. En additionnant ces deux équations, on trouve que $2\alpha = 0$ donc $\alpha = 0$, puis $2r = 0$, soit $|\beta| = 0$, ce qui implique $\beta = 0$.
   Or, en faisant passer tout à gauche dans l'égalité de la question précédente, $|a|^2+|b|^2-|c|^2-|d|^2+2\operatorname{Re}((\overline{a}b-\overline{c}d)e^{-i\theta}) = 0$. En appliquant le calcul qu'on vient d'effectuer, on a $|a|^2+|b|^2-|c|^2-|d|^2 = 0$ (c'est ce qui joue le rôle de α) et $\overline{a}b-\overline{c}d = 0$ (c'est notre β).

   (d) Si $a = 0$, la deuxième condition ci-dessus devient $\overline{c}d = 0$, donc on a soit $c = 0$ soit $d = 0$. Or on a supposé dès le départ que $ad-bc \neq 0$, donc on ne peut pas avoir à la fois $a = 0$ et $c = 0$. Il ne reste que la possibilité $d = 0$, dont on déduit $|b| = |c|$. On peut alors écrire que $\frac{b}{c} \in \mathbb{U}$, c'est-à-dire que $\frac{b}{c} = e^{i\theta}$. On en déduit que $f(z) = \frac{b}{cz} = \frac{e^{i\theta}}{z}$, qui est bien de la forme étudiée à la première question.

   (e) Si $a \neq 0$, on peut écrire $b = \frac{\overline{c}d}{\overline{a}}$ en exploitant notre deuxième condition. En remettant dans la première, $|a|^2 + \left|\frac{\overline{c}^2d^2}{\overline{a}^2}\right| = |c|^2+|d|^2$, soit en multipliant tout par $|\overline{a}|^2$ (qui est égal à $|a|^2$), $|a|^4+|c|^2|d|^2 = |a|^2|c|^2+|a|^2|d|^2$. On fait tout passer de l'autre côté et on peut factoriser : $(|a|^2-|c|^2)(|a|^2-|d|^2) = 0$. Celà implique bien $|a|^2 = |c|^2$ (donc $|a| = |c|$ puisqu'on parle de réels positifs), ou $|a|^2 = |d|^2$.

   (f) Supposons donc que $|a| = |c|$, soit $a = ce^{i\theta}$. On a alors $b = \frac{\overline{c}d}{\overline{a}} = \frac{\overline{c}d}{\overline{c}e^{-i\theta}} = de^{i\theta}$. Mais on a alors $ad-bc = cde^{i\theta}-cde^{i\theta} = 0$, ce qui est interdit ! On a donc $|a| = |d|$, soit $a = de^{i\theta}$, et

$b = \dfrac{\overline{c}d}{\overline{a}} = \dfrac{\overline{c}de^{i\theta}}{\overline{d}}$ donc $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} = \dfrac{de^{i\theta}z + \frac{\overline{c}de^{i\theta}}{\overline{d}}}{cz+d} = e^{i\theta}\dfrac{z+\frac{\overline{c}}{\overline{d}}}{\frac{c}{d}z+1}$, qui est exactement de la forme étudiée à la deuxième question en posant $a = \dfrac{\overline{c}}{\overline{d}}$.

Devoir Surveillé n°3

PTSI B Lycée Eiffel

24 novembre 2012

Exercice 1

On cherche dans cet exercice à déterminer toutes les fonctions dérivables f vérifiant l'équation fonctionnelle $\forall x \neq 0,\ f\left(\dfrac{1}{4x}\right) = f'(x)$.

1. On se place sur l'intervalle $]0;+\infty[$. Montrer que f est deux fois dérivable sur cet intervalle.
2. Déterminer une équation différentielle (E) d'ordre 2 dont f est solution.
3. En posant $t = \ln(x)$, ramener le problème à la résolution d'une équation différentielle à coefficients constants.
4. Résoudre cette équation, et en déduire les solutions de l'équation (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$.
5. Effectuer une résolution similaire de (E) sur $\mathbb{R}^{-*}$.
6. Parmi les solutions de (E), déterminer lesquelles sont réellement solutions du problème initial sur chacun des deux intervalles.
7. Déterminer s'il existe des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et dérivables sur $\mathbb{R}^*$ solutions à notre problème.

Exercice 2

Dans tout cet exercice, un repère orthonormal de l'espace $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est fixé. On considère les trois points $A(0,0,0)$; $B(2,1,-1)$ et $C(1,1,1)$.

1. Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$, en déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC), ainsi qu'un système d'équations paramétriques de ce même plan.
3. Déterminer le rayon de la sphère de centre $M_k(0,0,k)$ tangente au plan (ABC), où $k \in \mathbb{R}$. Parmi ces sphères, combien y-en-a-t-il ayant pour rayon 2 ? On note $\mathcal{S}$ la sphère de rayon 2 correspondant à la plus grande valeur de k.
4. Déterminer l'ensemble des points $D(x,y,z)$ vérifiant $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AB} = 0$. On donnera une équation paramétrique de cet ensemble.
5. Parmi tous les points obtenus à la question précédente, combien appartiennent au plan (ABC) ? Dans ce cas particulier, que représente le point D ?
6. On pose pour toute la suite du problème $D(2,-1,1)$. Déterminer les distances de D aux trois points A, B et C, ainsi que sa distance au plan (ABC).
7. En déduire le volume du tétraèdre $ABCD$.
8. Déterminer une équation du plan tangent à $\mathcal{S}$, perpendiculaire à (ABC) et à (BCD).
9. (a) On appelle hauteur issue d'un sommet dans un tétraèdre la droite passant par ce sommet et perpendiculaire à la face opposée. Déterminer une équation paramétrique des hauteurs issues de A et de D dans le tétraèdre $ABCD$.

(b) Montrer que ces deux droites sont sécantes en un point H (dont on donnera les coordonnées) et vérifier que H appartient à la hauteur issue de B (sans calculer d'équation de cette troisième hauteur).

(c) Déterminer un système d'équations cartésiennes de la perpendiculaire commune à (AD) et (BC), et vérifier que H appartient à cette perpendiculaire commune.

Problème

Le but de ce problème est d'étudier une équation du premier ordre non linéaire par une méthode originale : en prouvant que les réciproques des solutions sont elles-mêmes solutions d'une équation différentielle linéaire.

Première partie : Une étude de fonction.

On considère dans cette partie la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
2. Étudier les variations de la fonction f, en déduire qu'elle est bijective de $\mathcal{D}_f$ vers un intervalle à préciser.
3. Donner une expression simple de la réciproque g de la fonction f, ainsi que le tableau de variations de la fonction g.
4. Calculer la dérivée seconde f'' de f, étudier la convexité de f ainsi que la présence de points d'inflexion, et calculer l'équation des tangentes éventuelles aux points d'inflexion.
5. Tracer soigneusement les allures des courbes représentatives de f et de g dans un même repère (en tenant notamment compte des calculs effectués à la question précédente).

Deuxième partie : Une équation différentielle linéaire.

On considère dans cette partie l'équation différentielle $(E) : 2x(1-x)y' + y = (1-x)\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}$.

1. Sur quels intervalles va-t-on résoudre l'équation (E) ?
2. Déterminer deux constantes a et b telles que $\dfrac{1}{2x(1-x)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{1-x}$, et en déduire les solutions de l'équation homogène associée à (E).
3. Déterminer une solution particulière de (E) à l'aide de la méthode de variation de la constante, et en déduire les solutions de l'équation complète. Existe-t-il des solutions définies sur $\mathbb{R}$?
4. Déterminer l'unique solution définie sur $]0;1[$ et vérifiant $y\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.
5. Tracer une allure de cette solution, ainsi que de quelques autres solutions définies sur $]0,1[$ (on ne demande pas une étude détaillée de toutes les fonctions, mais une explication rapide de l'allure des courbes), dans un même repère.

Une équation non linéaire.

On va désormais s'intéresser à l'équation non linéaire $(F) : xy' + 2y(1-y) = 0$, qu'on cherche à résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}$.

1. Déterminer les fonctions constantes solutions de l'équation (F).
2. Pour tout la suite, on cherchera à décrire les solutions de l'équation à valeurs dans $]0;1[$. Montrer que ces solutions sont nécessairement décroissantes.

3. En déduire qu'elles sont bijectives, et que leurs réciproques sont solutions de l'équation homogène associée à (E).
4. En déduire que les solutions cherchées sont de la forme $y(x) = \dfrac{1}{1 + (\frac{x}{k})^2}$, où k est une constante strictement positive. Quelles sont les valeurs de k convenables (pour lesquelles y est effectivement à valeurs dans $]0;1[$) ?
5. Montrer que, si on fixe une valeur de x_0 strictement positive, et un réel $\alpha \in]0;1[$, il existe une unique solution parmi les précédentes vérifiant $y(x_0) = \alpha$.
6. Déterminer les points d'inflexion des solutions obtenues, et tracer une allure soignée de la courbe de la solution vérifiant $y(2) = \dfrac{1}{2}$.

Corrigé du DS3

Exercice 1

1. La fonction f et la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{4x}$ étant dérivables sur $]0;+\infty[$, leur composée est dérivable sur cet intervalle. La fonction f' est donc dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, et f y est deux fois dérivable.

2. Dérivons la relation de départ : $-\dfrac{1}{4x^2}f'\left(\dfrac{1}{4x}\right) = f''(x)$. Or, en remplaçant x par $\dfrac{1}{4x}$ dans la relation initiale, $f'\left(\dfrac{1}{4x}\right) = f(x)$. La fonction f est donc solution de l'équation $f''(x) = -\dfrac{1}{4x^2}f(x)$, ou encore $4x^2 f''(x) + f(x) = 0$.

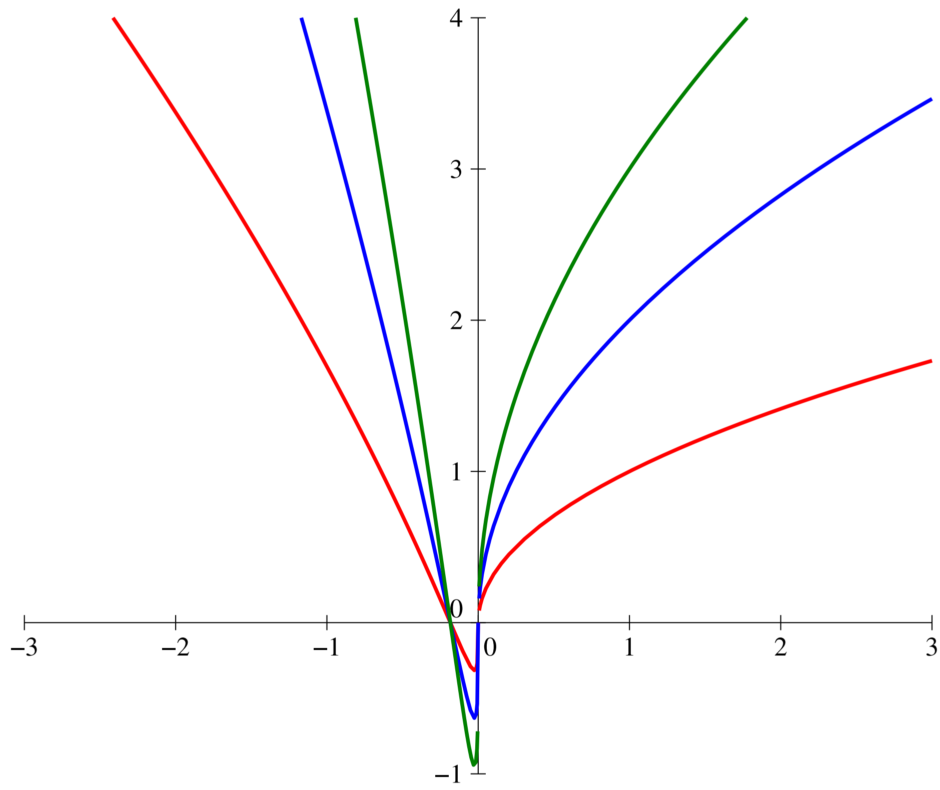
3. Posons donc $f(x) = g(\ln(x))$, ce qui est toujours possible sur l'intervalle $]0;+\infty[$. On a alors $f'(x) = \dfrac{1}{x}g'(\ln(x))$, puis $f''(x) = \dfrac{g''(\ln(x)) - g'(\ln(x))}{x^2}$. En reportant ces relations dans l'équation (E), on trouve $4g''(t) - 4g'(t) + g(t) = 0$, ce qui constitue bien une équation à coefficients constants.

4. Cette équation étant homogène, il suffit re résoudre son équation caractéristique $4r^2-4r+1 = 0$. On reconnait l'identité remarquable $(2r-1)^2 = 0$, donc l'équation admet pour solution double $r = \dfrac{1}{2}$, et les solutions de l'équation sont les fonctions $g : t \mapsto (A+Bt)e^{\frac{t}{2}}$. en reprenant le changement de variable effectué, on trouve pour les solutions de (E), $y(x) = (A+B\ln(x))e^{\frac{1}{2}\ln(x)} = (A+B\ln(x))\sqrt{x}$.

5. On pose cette fois $h(\ln(-x)) = f(x)$, et on obtient comme précédemment (les signes $-$ disparaissent en dérivant) $\dfrac{1}{x}h'(\ln(-x)) = f'(x)$ puis $f''(x) = \dfrac{h''(\ln(-x)) - h'(\ln(-x))}{x^2}$. L'équation vérifiée par h est donc la même que celle obtenue plus haut pour g, et on obtient $y(x) = (A+B\ln(-x))\sqrt{-x}$.

6. Commençons par regarder sur $\mathbb{R}^{+*}$: si $f(x) = (A+B\ln(x))\sqrt{x}$, alors $f'(x) = \dfrac{B}{x}\sqrt{x} + \dfrac{A+B\ln(x)}{2\sqrt{x}} = \dfrac{2B+A+B\ln(x)}{2\sqrt{x}}$; et $f\left(\dfrac{1}{4x}\right) = (A-B\ln(4x))\sqrt{\dfrac{1}{4x}} = \dfrac{A-2B\ln(2)-B\ln(x)}{2\sqrt{x}}$.
La fonction f ne peut donc être solution que si $B = 0$. On trouve alors $f(x) = A\sqrt{x}$. Sur $\mathbb{R}^{-*}$, si $f(x) = (A+B\ln(-x))\sqrt{-x}$, on obtient de façon très similaire $f'(x) = \dfrac{2B-A-B\ln(-x)}{2\sqrt{-x}}$ (la racine carrée a désormais une dérivée négative), et $f\left(\dfrac{1}{4x}\right) = \dfrac{A-2B\ln(2)-B\ln(-x)}{2\sqrt{-x}}$ (ici, rien ne change), donc f est solution si $2B - A = A - 2B\ln(2)$, soit $B(1+\ln(2)) = A$. Finalement, on a $f(x) = B(1+\ln(2)+\ln(-x))\sqrt{-x} = (1+\ln(-2x))\sqrt{-x}$.

7. Il en existe énormément puisque toutes les fonctions obtenues sur chacun des deux intervalles ont une même limite nulle en 0 (pour celles sur $]-\infty,0[$, c'est un résultat de croissance comparée qui nous permet de l'affirmer). Toute fonction f vérifiant $f(x) = B(1+\ln(-2x))\sqrt{-x}$ si $x < 0$; $f(0) = 0$; et $f(x) = A\sqrt{x}$ si $x > 0$ est donc solution du problème (A et B pouvant être des constantes distinctes). Ce n'était pas demandé, mais voici une allure des solutions (en rouge pour $A = B = 1$, en bleu $A = B = 2$ et en vert $A = B = 3$) :



Exercice 2

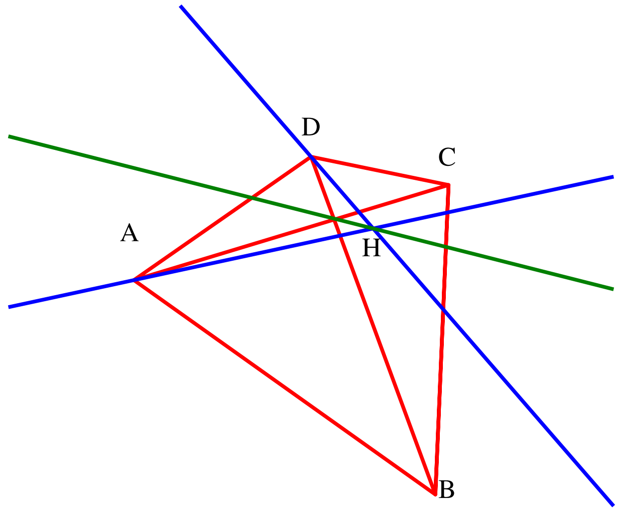
1. Puisque $\overrightarrow{AB} = (2, 1, -1)$ et $\overrightarrow{AC} = (1, 1, 1)$, on calcule $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (2, -3, 1)$. Ce produit vectoriel n'étant pas nul, les trois points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Un point $M(x, y, z)$ appartient au plan (ABC) si $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM}] = 0$, soit $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AM} = 0$. En reprenant le calcul précédent, on obtient l'équation $2x - 3y + z = 0$. Un système d'équations paramétriques est obtenu en prenant comme point du plan A et comme base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, ce qui donne $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & 2t & + & u \\ y & = & t & + & u \\ z & = & -t & + & u \end{array}\right.$, où $(t, u) \in \mathbb{R}^2$.
3. La sphère tangente au plan est celle dont le rayon est égal à la distance de son centre au plan. Ici, en reprenant l'équation cartésienne de (ABC), $d(M_k, (ABC)) = \dfrac{|k|}{\sqrt{4+9+1}} = \dfrac{|k|}{\sqrt{14}}$. La sphère a donc pour rayon $\dfrac{|k|}{\sqrt{14}}$. Il existe deux valeurs de k pour lesquelles ce rayon est égale à 2, $k = 2\sqrt{14}$, et $k = -2\sqrt{14}$.
4. Notons (x, y, z) les coordonnées du point D. On peut alors calculer $\overrightarrow{AD} = (x, y, z)$; $\overrightarrow{BD} = (x-2, y-1, z+1)$; $\overrightarrow{CD} = (x-1, y-1, z-1)$ et $\overrightarrow{BC} = (-1, 0, 2)$. Les trois conditions données s'écrivent respectivement $-x + 2z = 0$; $x + y + z - 2 = 0$ et $2x + y - z - 2 = 0$. Ce système se résout très rapidement : $x = 2z$, puis en injectant dans la deuxième équation $y = 2 - x - z = 2 - 3z$, et la troisième équation devient $4z + 2 - 3z - z - 2 = 0$, qui est toujours vérifiée. Les points recherchés sont donc de la forme $(2z, 2 - 3z, z)$, pour $z \in \mathbb{R}$. On reconnait le paramétrage d'une droite passant par le point de coordonnées $(0, 2, 0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = (2, -3, 1)$.
5. Si on injecte le paramétrage précédent dans l'équation cartésienne de (ABC), on trouve $4z - 6 + 9z + z = 0$, soit $z = \dfrac{6}{14} = \dfrac{3}{7}$. Il existe donc une unique solution dans (ABC), de coordonnées

$\left(\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{3}{7}\right)$. Ce point est l'orthocentre du triangle ABC, puisque les trois conditions de la question 4 associée à l'appartenance du point au plan (ABC) signifient qu'il appartient aux trois hateurs du triangle.

6. C'est du calcul facile : $AD = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$; $BD = \sqrt{0+4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$; $CD = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$. Enfin, en reprenant l'équation cartésienne, $d(D, (ABC)) = \frac{|4+3+1|}{\sqrt{14}} = \frac{8}{\sqrt{14}}$.
7. On connait la hauteur du tétraèdre grâce à la question précédente. L'aire de se base vaut $\frac{1}{2} \parallel \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \parallel = \frac{\sqrt{14}}{2}$, donc le volume du tétraèdre est $\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{14}}{2} \times \frac{8}{\sqrt{14}} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$.
8. Un plan perpendiculaire simultanément à (ABC) et (BCD) admet pour vecteur normal $\overrightarrow{BC} = (1, 0, -2)$ puisque la droite (BC) est commune aux deux plans. Ainsi, son équation cartésienne est de la forme $x - 2z + d = 0$. Si on veut qu'il soit tangent à $\mathcal{S}$, la distance du centre de $\mathcal{S}$ au plan doit être égale à 2 (rayon de la sphère), soit $\frac{|-4\sqrt{14}+d|}{\sqrt{1+4}} = 2$. La condition $|d - 4\sqrt{14}| = 2\sqrt{5}$ donne en fait deux valeurs possibles pour d, $d_1 = 2\sqrt{5} + 4\sqrt{14}$, et $d_2 = 4\sqrt{14} - 2\sqrt{5}$. Pour la valeur d_1 par exemple, l'équation du plan est $x - 2z + 4\sqrt{14} - 2\sqrt{5} = 0$.
9. (a) La hauteur issue de A devant être perpendiculaire au plan (BCD), elle est donc dirigée par un vecteur normal à (BCD). Choisissons par exemple $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} = (-1, 0, 2) \wedge (1, -2, 0) = (4, 2, 2)$. Tant qu'à faire, on peut diviser tout par 2, et comme la droite passe par le point A, on obtient le paramétrage $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2t \\ y & = & t \\ z & = & t \end{array}\right.$. Pour la hauteur issue de D, c'est encore plus rapide puisqu'on a déjà un vecteur normal calculé à la première question, on obtient le paramétrage $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & 2 & + & 2u \\ y & = & -1 & - & 3u \\ z & = & 1 & + & u \end{array}\right.$.

   (b) À l'aide des paramétrages, on obtient pour l'intersection le système $\left\{\begin{array}{rcrcr} 2t & = & 2 & + & 2u \\ t & = & -1 & - & 3u \\ t & = & 1 & + & u \end{array}\right.$.
   Les deux équations extrêmes sont équivalents, et les deux dernières équations impliquent $-1 - 3u = 1 + u$, soit $u = -\frac{1}{2}$, puis $t = \frac{1}{2}$. Le point d'intersection recherché a donc pour coordonnées $H\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Pour vérifier que H est sur la hauteur issue de B, il faut que $\overrightarrow{BH}$ soit orthogonal au plan (ACD), donc à $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$. Comme $\overrightarrow{BH} = \left(-1, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, on calcule $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = -1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}$; et $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AD} = -2 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 0$. Le point H est bien sur la troisième hauteur (et accessoirement sur la quatrième, celle issue de C, mais ce n'était pas demandé).

   (c) La perpendiculaire commune aux deux droites sera dirigée par $\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{BC} = (2, -1, -1) \wedge (-1, 0, 2) = (-2, -5, -1)$. On prendra plutôt $\overrightarrow{u} = (2, 5, 1)$ comme vecteur directeur. Notons $\mathcal{P}_1$ le plan contenant la droite (AD) et la perpendiculaire commune, il admet pour base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AD})$, donc pour vecteur normal $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{AD} = (2, 5, 1) \wedge (2, -1, 1) = (6, 0, -12)$. Quitte à tout diviser par 6, on obtient comme équation du plan $\mathcal{P}_\infty : x - 2z = 0$ (puisque le plan passe par A). De même, on note $\mathcal{P}_2$ le plan contenant (BC) et la perpendiculaire commune, qui a donc pour vecteur normal $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{BC} = (2, 5, 1) \wedge (-1, 0, 2) = (10, -5, 5)$. Une équation du plan $\mathcal{P}_2$ est donc $2x - y + z + d = 0$, avec $2 - 1 + 1 + d = 0$ pour que C appartienne au plan, d'où l'équation $2x - y + z - 2 = 0$. Finalement, un système d'équations cartésiennes de la perpendiculaire commune est $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & & & - & 2z & & & = & 0 \\ 2x & - & y & + & z & - & 2 & = & 0 \end{array}\right.$. Les coordonnées du point H vérifient bien les deux équations : $1 - 1 = 0$ et $2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 2 = 0$, il appartient donc à cette perpendiculaire commune. Si on n'avait que ça à faire, on vérifierait de même qu'il appartient aux autres perpendiculaires communes d'arêtes non coplanaires du tétraèdre $ABCD$. Une petite figure pour conclure, avec les deux hauteurs en bleu, et la perpendiculaire commune en vert.



Problème

Première partie : Une étude de fonction.

1. La fonction f est définie si $\dfrac{1-x}{x} \geqslant 0$. Un petit tableau de signes donne $\mathcal{D}_f =]0;1]$ (attention à bien mettre les crochets dans le bon sens).

2. La fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;1[$, de dérivée $f'(x) = \dfrac{\frac{-x-(1-x)}{x^2}}{2\sqrt{\frac{1-x}{x}}} = -\dfrac{1}{2x^2\sqrt{\frac{1}{x}-1}}$. Cette dérivée étant toujours négative, la fonction f est strictement décroissante. Comme de plus $f(1) = 0$, et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, f est bijective de $]0;1]$ sur $\mathbb{R}^+$.

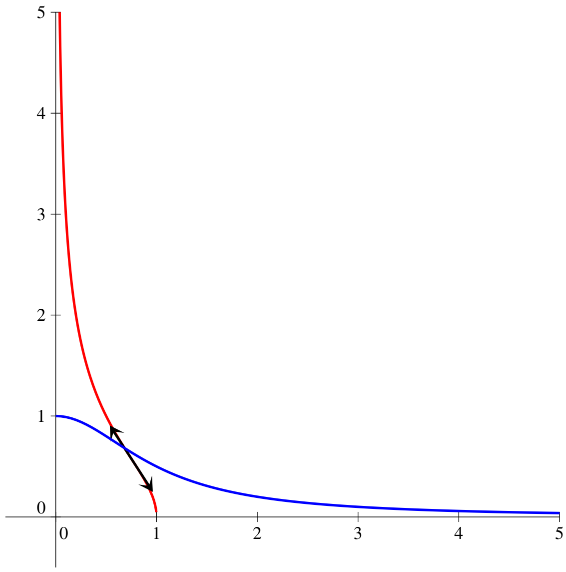
3. Cherchons à résoudre l'équation $f(x) = y$, soit $\sqrt{\dfrac{1-x}{x}} = y$, on peut élever au carré pour obtenir $\dfrac{1-x}{x} = y^2$, soit $1-x = xy^2$, puis $x(y^2+1) = 1$ et $x = \dfrac{1}{1+y^2}$. On a donc $g : y \mapsto \dfrac{1}{1+y^2}$, qui est définie sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $]0;1]$ ($g(0) = 1$ et $\lim\limits_{y\to+\infty} g(y) = 0$). Le théorème de la bijection nous assure que g est décroissante tout comme f.

4. Calculons donc (en reprenant la dernière expression de f') la dérivée seconde $f''(x) = \dfrac{4x\sqrt{\frac{1}{x}-1} - \frac{2x^2}{2x^2\sqrt{\frac{1}{x}-1}}}{4x^4(\frac{1}{x}-1)} = \dfrac{4x(\frac{1}{x}-1)-1}{4x^4(\frac{1}{x}-1)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{3-4x}{4x^4(\frac{1}{x}-1)^{\frac{3}{2}}}$. Cette dérivée seconde est du signe de $3-4x$, la fonction est donc convexe sur $\left]0;\frac{3}{4}\right]$ et concave sur $\left[\frac{3}{4};1\right]$, admettant un point

d'inflexion en $x = \frac{3}{4}$. On calcule donc $f\left(\frac{3}{4}\right) = \sqrt{\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$; et $f'\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{-1}{\frac{18}{16}\sqrt{\frac{1}{3}}} = -\frac{8\sqrt{3}}{9}$.

L'équation de la tangente au point d'inflexion est donc $y = -\frac{8\sqrt{3}}{9}\left(x - \frac{3}{4}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{8\sqrt{3}}{9}x + \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{16\sqrt{3}}{9}x + \sqrt{3}$.

5. Voici une allure, avec la tangente au point d'inflexion (f en rouge, g en bleu) :



Deuxième partie : Une équation différentielle linéaire.

1. La normalisation faisant apparaitre deux valeurs interdites, et le membre de droite n'est pas défini entre -1 (inclus) et 0, donc on résout séparément sur $]-\infty; -1[$; sur $]0; 1[$ et sur $]1; +\infty[$.

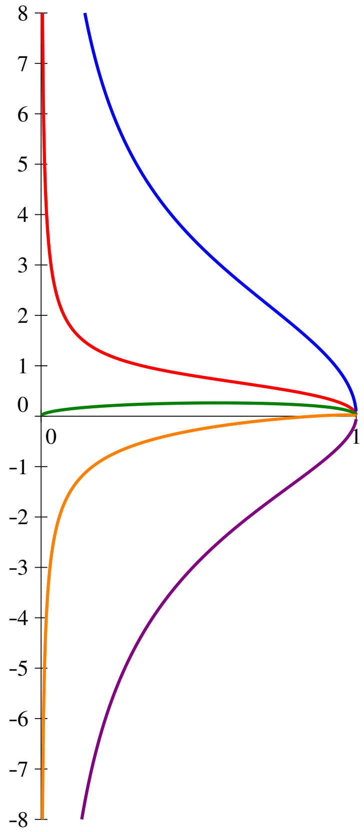
2. Mettons au même dénominateur le membre de droite : $\frac{a}{x} + \frac{b}{1-x} = \frac{a - ax + bx}{x(1-x)}$. En identifiant, ceci est égal à $\frac{1}{2x(1-x)}$ si $a = \frac{1}{2}$ et $a - b = 0$, soit $b = \frac{1}{2}$. On en déduit que $\frac{1}{2x(1-x)} = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2(1-x)}$. L'équation homogène normalisée $y' + \frac{1}{2x(1-x)}y = 0$ a donc pour solutions sur $]0; 1[$ les fonctions $y_h : x \mapsto Ke^{-\frac{1}{2}\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(1-x)} = K_1\sqrt{\frac{1-x}{x}} = K_1 f(x)$. Sur $]1; +\infty[$, on obtient de même $y_h(x) = K_2\sqrt{\frac{x-1}{x}}$; et sur $]-\infty; -1[$, $y_h(x) = K_3\sqrt{\frac{1-x}{-x}} = K_3\sqrt{\frac{1-x}{x}}$.

3. Effectuons par exemple le calcul sur $]0; 1[$, on cherche donc $y_p(x) = K(x)f(x)$, d'où $y_p'(x) = K'(x)f(x) - \frac{K(x)}{2x^2\sqrt{\frac{1-x}{x}}}$. La fonction y_p est alors solution si $2x(1-x)K'(x)f(x) - \frac{\sqrt{x(1-x)}}{x}K(x) + K(x)f(x) = (1-x)\sqrt{\frac{x}{1-x}}$, donc $K'(x) = \frac{1}{2x}\sqrt{\frac{x}{1-x}}\sqrt{\frac{x}{1+x}} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$. On en déduit que $K(x) = \arcsin(x)$ convient, ce qui donne pour solutions de l'équation complète les fonctions $y(x) = \left(\frac{1}{2}\arcsin(x) + K_1\right)\sqrt{\frac{1-x}{x}}$. De même, sur $]1; +\infty[$, on va trouver la condition $K'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}$, soit $K(x) = \text{Argsh}(x)$, donc $y(x) = \left(\frac{1}{2}\text{Argsh}(x) + K_2\right)\sqrt{\frac{1-x}{x}}$; et sur $]-\infty; -1[$,

on aura, à cause du $\sqrt{x^2}$ qui vaut $-x$, $K'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-1}}$, soit $K(x) = -\operatorname{Argsh}(-x)$, je vous épargne la tête des solutions complètes. Il n'y évidemment pas de solution définie sur $\mathbb{R}$ puisque l'équation ne peut pas avoir de sens sur l'intervalle $]-1,0[$.

4. En $\dfrac{1}{2}$, on a $\arcsin(x) = \dfrac{\pi}{6}$, donc $y(x) = \dfrac{\pi}{12} + K_1$ (la racine carrée vaut simplement 1), il faut donc choisir $K_1 = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{6}$. On a alors $y(x) = \left(\dfrac{1}{2}\arcsin(x) + \dfrac{\pi}{6}\right)\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$.

5. Tout ce qu'on peut dire assez facilement, c'est que toutes les fonctions vont tendre vers 0 en 1, et auront une limite égale à $\pm\infty$ (selon le signe de K_1) si $K_1 \neq 0$. Ensuite, les problèmes de Cauchy dans $]0,1[$ ne pouvant avoir qu'une seule solution, les courbes ne peuvent pas se couper ailleurs que pour $x = 1$. On ne peut rien dire sur les variations de la fonction, mais la présence d'une tangente verticale en $x = 1$ est assurée si $K \geqslant 0$. À partir de ces maigres informations, si on trace des courbes relativement simples, on ne sera pas loin de la réalité (en rouge, la solution de la question précédente, en vert celle correspondant à $K = 0$, qui a une limite nulle en 0 mais c'est difficile à prouver) :



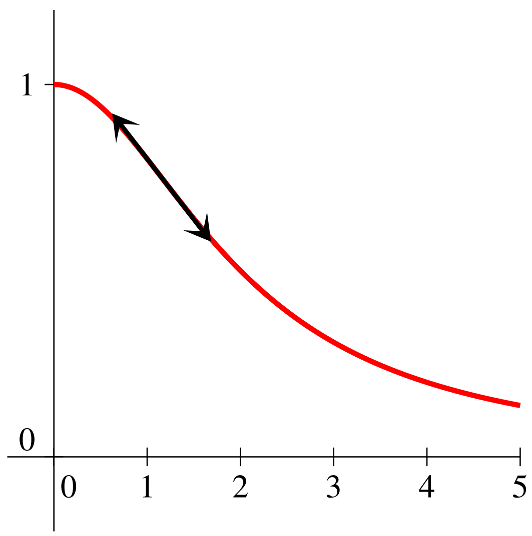
Une équation non linéaire.

On va désormais s'intéresser à l'équation non linéaire $(F) : xy' + 2y(1-y) = 0$, qu'on cherche à résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}$.

1. Si y est constante, sa dérivée est nulle, donc elle vérifie $2y(1-y) = 0$, c'est-à-dire $y = 0$ ou $y = 1$.

2. Si y est à valeurs dans $]0;1[$, on aura toujours $2y(1-y) \geqslant 0$, donc pour vérifier l'équation on doit nécessairement avoir $xy' \leqslant 0$, d'où $y' \leqslant 0$ (puisque $x \in]0;1[$). La fonction y est donc décroissante.

3. Une fonction continue et monotone est toujours bijective, notons $z = y^{-1}$, on sait que $z'(t) = \dfrac{1}{y'(z(t))}$ (où on pose $t = y(x)$), ou encore $y'(z(t)) = \dfrac{1}{z'(t)}$, avec. En remplaçant x par $z(t)$ dans l'équation (F), on obtient $z(t)y'(z(t)) + 2z(t)(1 - z(t)) = 0$, soit $\dfrac{z(t)}{z'(t)} + 2t(1-t) = 0$. On peut multiplier par $z'(t)$ pour trouver $z(t) + 2t(1-t)z'(t) = 0$. On reconnait bien l'équation annoncée.
4. La variable t ayant été supposée appartenir à $]0;1[$, on reprend les résultats de la partie précédente : $z(t) = Kf(t) = K\sqrt{\dfrac{1-t}{t}}$. On en déduit que $x = K\sqrt{\dfrac{1-y(x)}{y(x)}}$, soit $\dfrac{x^2}{K^2}y(x) = 1 - y(x)$, donc comme annoncé $y(x) = \dfrac{1}{1 + (\frac{x}{K})^2}$. On peut toujours prendre une constante K strictement positive, puisque 0 est exclu, et K et $-K$ donnent la même fonction pour y. Les valeurs obtenues pour $y(x)$ sont manifestement positives, et tout aussi manifestement plus petites que 1 (puisque le dénominateur est strictement supérieur à 1), donc toutes les solutions trouvées conviennent.
5. Cette condition impose $1 + \left(\dfrac{x_0}{K}\right)^2 = \dfrac{1}{\alpha}$, soit $\dfrac{x_0}{K} = \sqrt{\dfrac{1}{\alpha} - 1}$ (tout est positif), donc $K = \dfrac{x_0}{f(\alpha)}$.
6. Écrivons plutôt $y(x) = \dfrac{K^2}{K^2 + x^2}$, et dérivons deux fois : $y'(x) = -\dfrac{2K^2x}{(K^2+x^2)^2}$ (les solutions sont donc décroissantes sur $\mathbb{R}^{+*}$), et $f''(x) = \dfrac{-2K^2(K^2+x^2)^2 + 4x(K^2+x^2)(2K^2x)}{(K^2+x^2)^4} = \dfrac{-2K^4 - 2K^2x^2 + 8K^2x^2}{(K^2+x^2)^3} = \dfrac{2K^2(3x^2 - K^2)}{(K^2+x^2)^3}$. Cette dérivée seconde s'annule si $x = \dfrac{K}{\sqrt{3}}$, qui constitue donc l'unique point d'inflexion de la courbe. Remarquons que $y\left(\dfrac{K}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{3}{4}$, et $f'\left(\dfrac{K}{\sqrt{3}}\right) = -\dfrac{9}{8K\sqrt{3}}$. Si on impose la condition $f(2) = \dfrac{1}{2}$, on trouve $K = \dfrac{2}{f(\frac{1}{2})} = 2$, donc le point d'inflexion est atteint pour $x = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, et $f'\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right) = -\dfrac{9}{16\sqrt{3}}$. On peut tracer la courbe suivante :



Devoir Surveillé n°4

PTSI B Lycée Eiffel

14 décembre 2012

Exercice 1

Résoudre l'équation différentielle $xy'' - 2y' - x^5y = 2x^8 - x^5$ en effectuant le changement de variable $t = x^3$. Y a-t-il des solutions à cette équation définies sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2

On considère dans cet exercice la courbe d'équation polaire $\rho(\theta) = \tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ dans un repère orthonormal direct.

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction ρ ?
   Vérifier que $\forall \theta \in \mathcal{D}_\rho$, on a $\rho(\theta) = \dfrac{1+\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \dfrac{\cos(\theta)}{1-\sin(\theta)}$ (vous êtes priés de continuer l'exercice avec ces formules même si vous n'arrivez pas à les prouver, ce n'est pas facile).
2. Déterminer les symétries éventuelles de la courbe, puis donner le tableau de variations de la fonction ρ. Préciser les tangentes à la courbe en ses points de paramètre 0, $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{4}$.
3. Donner les coordonnées cartésiennes $x(\theta)$ et $y(\theta)$ du point de paramètre θ de la courbe (on montrera en particulier que $x(\theta) = 1 + \sin(\theta)$). En étudiant leurs limites en $\frac{\pi}{2}$, prouver que la courbe admet une asymptote à préciser en $\frac{\pi}{2}$.
4. Tracer l'allure de la courbe.
5. Soit M le point de la courbe de paramètre θ, la perpendiculaire à (OM) passant par M coupe la droite d'équation $x = 1$ en un point N.
   (a) Compléter la figure précédente en plaçant deux points M distincts et les points N correspondants.
   (b) Montrer que l'ordonnée du point N est égale à $\rho(\theta)$.
   (c) En déduire que $MN = 1$.

Exercice 3

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère la conique $\mathcal{C}$ d'équation $4x^2 + y^2 = 1$.

1. Déterminer la nature, l'excentricité, ainsi que les coordonnées des foyers de la conique $\mathcal{C}$.
2. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en son point $A\left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
3. Tracer la conique ainsi que la tangente déterminée à la question précédente.
4. On cherche à déterminer quels sont les points du plan par lesquelles passent deux tangentes à $\mathcal{C}$ qui sont orthogonales.

(a) Donner une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point de coordonnées (x_0, y_0).

(b) Montrer que la droite d'équation $ax+by=c$ est tangente à $\mathcal{C}$ si et seulement si $a^2+4b^2=4c^2$.

(c) En notant $m=-\dfrac{b}{a}$, montrer que la droite D passe par le point $M(x,y)$ en étant tangente à $\mathcal{C}$ si et seulement si $(1-y)^2m^2+2mxy+\dfrac{1}{4}-x^2=0$.

(d) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que deux droites tangentes à $\mathcal{C}$ passent par M. On donnera une interprétation géométrique simple de cette condition.

(e) Déterminer les points par lesquels passent deux tangentes perpendiculaires à $\mathcal{C}$, et représenter l'ensemble de ces points sur la figure de la question 3.

Exercice 4

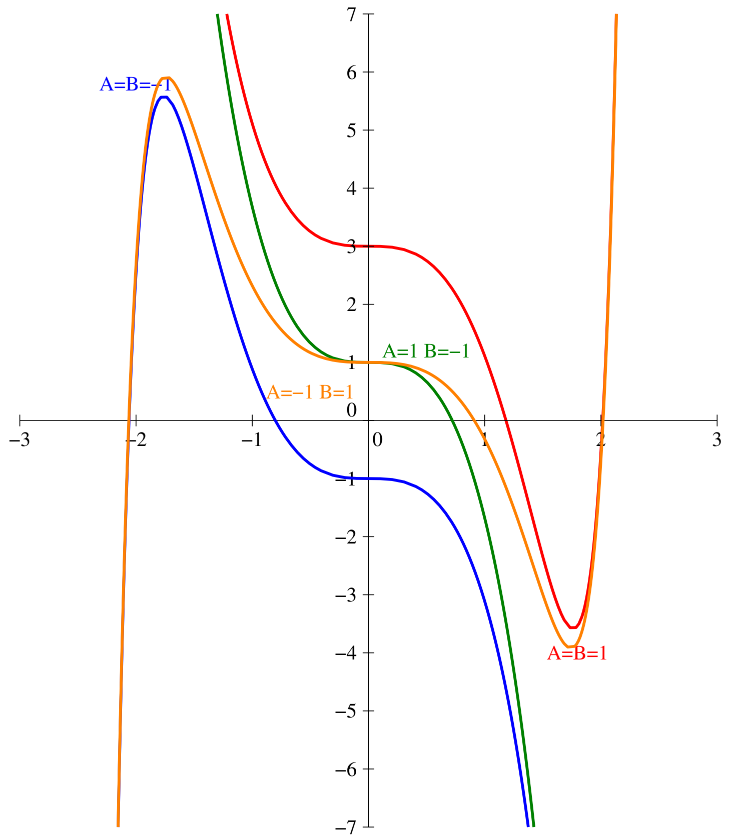
On considère la courbe paramétrée d'équation $\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & 2t+\dfrac{1}{2t+1} \\ y(t) & = & t^2-\dfrac{1}{2t+1} \end{array}\right.$

1. Étudier les variations des fonctions x et y (on notera que le numérateur du troisième degré qu'on doit obtenir pour une des deux fonctions a pour racine évidente -1).
2. Déterminer un vecteur tangent à l'arc en son unique point stationnaire.
3. Étudier les branches infinies de l'arc. On prouvera en particulier qu'il existe une droite asymptote Δ lorsque t tend vers $-\dfrac{1}{2}$, dont on mettra l'équation sous la forme $y=ax+b$, et on étudiera la position relative de la courbe et de Δ (en étudiant le signe de $y(t)-ax(t)-b$).
4. On cherche à déterminer les points doubles de l'arc. Montrer que, si on note $S=t+u$ et $P=tu$, les points de l'arc correspondant aux valeurs distinctes t et u du paramètre sont confondus si et seulement si $\left\{\begin{array}{rcl} 2P+S & = & 0 \\ S(4P+2S+1) & = & -2 \end{array}\right.$. En déduire les coordonnées des points doubles éventuels de l'arc.
5. Tracer une allure de l'arc, en respectant en particulier sa position par rapport à Δ.

Corrigé du DS4

Exercice 1

Posons donc, comme le suggère l'énoncé, $t = x^3$, ou plutôt $y(x) = z(t) = z(x^3)$ (la fonction cube étant bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, c'est certainement possible). On peut alors dériver : $y'(x) = 3x^2z'(x^3)$, puis $y''(x) = 6xz'(x^3) + 9x^4z''(x^3)$. L'équation initiale peut alors s'écrire $6x^2z'(x^3) + 9x^5z''(x^3) - 6x^2z'(x^3) - x^5z(x^3) = 2x^8 - x^5$, soit en divisant tout par x^5 (on fera une résolution séparée sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$) $9z''(t) - z(t) = 2t - 1$. L'équation homogène associée à cette nouvelle équation a pour équation caractéristique $9r^2 - 1 = 0$, qui admet deux racines réelles $r = \dfrac{1}{3}$ et $r = -\dfrac{1}{3}$. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions $z_h : t \mapsto Ae^{-\frac{t}{3}} + Be^{\frac{t}{3}}$. Une solution particulière évidente est la fonction $z_p : t \mapsto 1 - 2t$ (qui a une dérivée seconde nulle), donc les solutions sur $\mathbb{R}^{+*}$ sont les fonctions $z : t \mapsto Ae^{-\frac{t}{3}} + Be^{\frac{t}{3}} + 1 - 2t$, et sur $\mathbb{R}^{-*}$ elles sont de la même forme avec des constantes différentes : $z : t \mapsto Ce^{-\frac{t}{3}} + De^{\frac{t}{3}} + 1 - 2t$. On trouve ainsi des solutions de l'équation initiale de la forme $y : x \mapsto Ae^{-\frac{x^3}{3}} + Be^{\frac{x^3}{3}} + 1 - 2x^3$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ (et similairement avec des constantes C et D sur $\mathbb{R}^{-*}$). Toutes ces fonctions donnent des solutions définies sur $\mathbb{R}$ en prenant les mêmes constantes à gauche et à droite de 0, mais on peut également effectuer des recollement plus tordus. En effet, $\lim\limits_{x\to 0^+} y(x) = A+B+1$, et $\lim\limits_{x\to 0^-} y(x) = C+D+1$, ce qui impose la condition $A+B = C+D$, mais toutes les solutions ont une dérivée nulle en 0, indépendemment du choix des constantes (ce qui est logique au vu de l'équation différentielle, si on remplace x par 0, on obtient immédiatement la condition $y'(0) = 0$). Ainsi, la condition $A + B = C + D$ est suffisante pour pouvoir recoller des solutions en 0. Ce n'était pas demandé mais voici quelques allures de solutions pour conclure (ici, les moitiés de courbes oranges et vertes se recollent en 0) :



Exercice 2

1. La fonction ρ n'est pas définie si $\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$, soit $\frac{\theta}{2}\equiv\frac{\pi}{4}[\pi]$ et $\theta\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$. Donc $\mathcal{D}_\rho=\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

   Tentons de prouver la première égalité en utilisant uniquement des formules que vous connaissez bien, en l'occurence de l'addition en début de parcours et de la reconnaissance de duplication à la fin : $\rho(\theta)=\dfrac{\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}{\cos(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\frac{\theta}{2})+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\frac{\theta}{2})}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\frac{\theta}{2})-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\frac{\theta}{2})}=\dfrac{\cos(\frac{\theta}{2})+\sin(\frac{\theta}{2})}{\cos(\frac{\theta}{2})-\sin(\frac{\theta}{2})}$

   $$=\frac{(\cos(\frac{\theta}{2})+\sin(\frac{\theta}{2}))^2}{(\cos(\frac{\theta}{2})-\sin(\frac{\theta}{2}))(\cos(\frac{\theta}{2})+\sin(\frac{\theta}{2}))}=\frac{\cos^2(\frac{\theta}{2})+\sin^2(\frac{\theta}{2})+2\cos(\frac{\theta}{2})\sin(\frac{\theta}{2})}{\cos^2(\frac{\theta}{2})-\sin^2(\frac{\theta}{2})}=\frac{1+\sin(\theta)}{\cos(\theta)}.$$

   La deuxième égalité est facile une fois qu'on a la première : $\dfrac{1+\sin(\theta)}{\cos(\theta)}=\dfrac{\cos(\theta)}{1-\sin(\theta)}\Leftrightarrow 1-\sin(\theta)^2=\cos(\theta)^2$ par produit en croix, et on réconnait une formule trigonométrique classique.

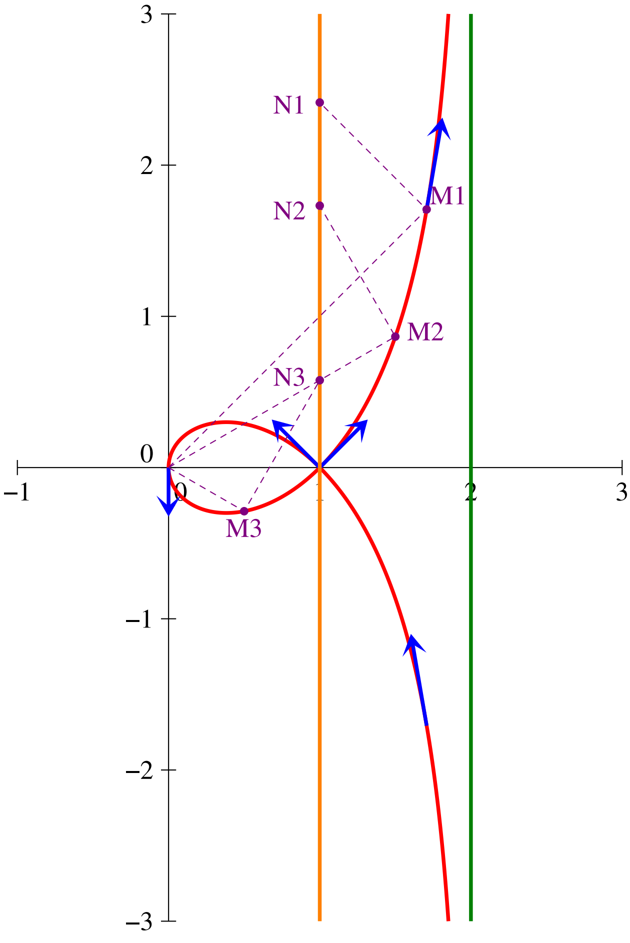
2. La fonction tan étant π-périodique, ρ sera 2π-périodique, on peut restreindre l'étude à un intervalle de largeur 2π. On peut également constater que $\rho(\pi-\theta)=\dfrac{1+\sin(\pi-\theta)}{\cos(\pi-\theta)}=\dfrac{1+\sin(\theta)}{-\cos(\theta)}=-\rho(\theta)$, ce qui signifie qu'il y a une symétrie de la courbe par rapport à (Ox) pour des valeurs de θ symétriques par rapport à $\frac{\pi}{2}$. On peut donc se contenter d'étudier ρ sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, la symétrie nous donnera la courbe sur $\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$.

   Pour l'étude de variations, on part de $\rho(\theta)=\dfrac{1+\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$, ce qui donne

   $\rho'(\theta)=\dfrac{\cos^2(\theta)+\sin(\theta)(1+\sin(\theta)))}{\cos^2(\theta)}=\dfrac{1+\sin(\theta)}{\cos^2(\theta)}$. La fonction sin ne prenant que des valeurs supérieures à -1, cette dérivée est toujours positive, s'annulant uniquement pour $\theta=-\frac{\pi}{2}$. Vu les tangentes qui nous sont demandées, on peut calculer $\rho'(0)=1$, et $\rho'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}}=2+\sqrt{2}$; ainsi que $\rho\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$ (on a ici un point stationnaire, mais il s'agit d'un point ordinaire puisque ρ change de signe à cet endroit), $\rho(0)=1$ et $\rho\left(\frac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}+1$. La tangente en 0 est dirigée par le vecteur $(1,1)$ et passe par le point $(1,0)$, elle a pour équation $y=x-1$; la tangente en $-\frac{\pi}{2}$ passe par l'origine et elle est radiale, il s'agit de l'axe des ordonnées ; enfin la tangente en $\frac{\pi}{4}$ a pour vecteur directeur $(2+\sqrt{2})\overrightarrow{u_{\frac{\pi}{4}}}+(1+\sqrt{2})\overrightarrow{v_{\frac{\pi}{4}}}=(\sqrt{2}+1)\overrightarrow{i}+(\sqrt{2}+1)\overrightarrow{j}-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)\overrightarrow{i}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)\overrightarrow{j}=\frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{i}+\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}+2\right)\overrightarrow{j}$, ou si l'on préfère $\overrightarrow{i}+(3+2\sqrt{2})\overrightarrow{j}$ (en multipliant tout par $\sqrt{2}$). Comme cette tangente passe par le point $\left((\sqrt{2}+1)\times\frac{\sqrt{2}}{2},(\sqrt{2}+1)\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2},1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, elle a pour équation $(3+2\sqrt{2})\left(x-1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-y+1+\frac{\sqrt{2}}{2}=0$, soit $y=(3+2\sqrt{2})x-4-3\sqrt{2}$. On peut résumer tout cela dans le tableau suivant :

θ	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$\rho'(\theta)$	0	$+$	1	$+$	$2+\sqrt{2}$	$+$	$\Vert$
ρ	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$1+\sqrt{2}$	$\rightarrow$	$+\infty \Vert$

3. Il suffit d'écrire que $x(\theta) = \rho(\theta)\cos(\theta) = 1+\sin(\theta)$, et $y(\theta) = \rho(\theta)\sin(\theta) = (1+\sin(\theta))\tan(\theta)$. On a sans aucune difficulté $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}^-} x(\theta) = 2$, et $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}^-} y(\theta) = +\infty$. La courbe admet donc en $\frac{\pi}{2}$ une asymptote verticale d'équation $x = 2$.
4. Voici la courbe, avec l'asymptote en vert et les tangentes remarquables en bleu (en tenant compte de la symétrie par rapport à (Ox) :



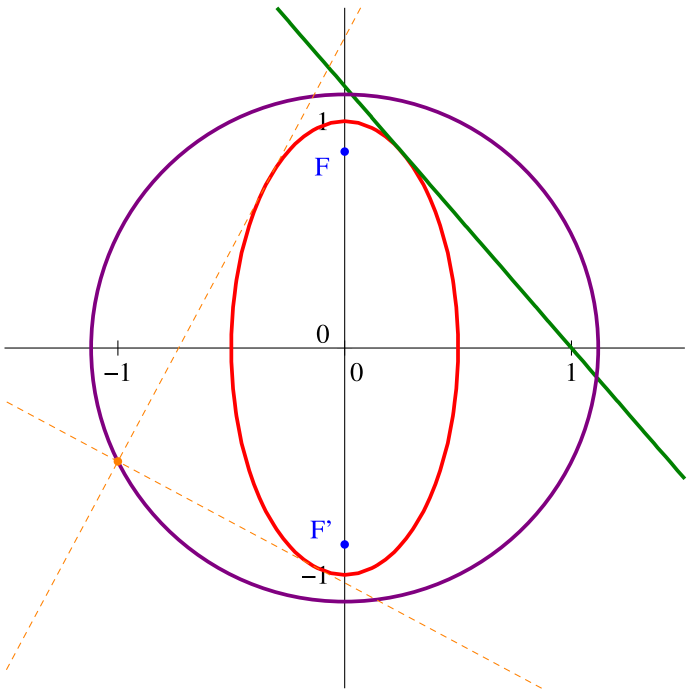
5. (a) Je vous en ai même mis trois, les points M et N en violet, tout comme le tracé du rayon et de la perpendiculaire, et la droite $x = 1$ en orange ;

   (b) La perpendiculaire a pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{OM(\theta)} = (\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))$ et elle passe par le point M, donc elle admet pour équation cartésienne $\rho\cos(\theta)(x - \rho\cos(\theta)) + \rho\sin(\theta)(x - \rho\sin(\theta)) = 0$, soit en simplifiant par ρ, $\cos(\theta)x + \sin(\theta)y = \rho$ (on pouvait aussi directement donner cette équation puisqu'il s'agit de l'équation normale de la droite). Pour $x = 1$, on obtient $y = \dfrac{\rho(\theta) - \cos(\theta)}{\sin(\theta)} = \dfrac{\frac{\cos(\theta)}{1-\sin(\theta)} - \cos(\theta)}{\sin(\theta)} = \dfrac{\cos(\theta) - \cos(\theta)(1-\sin(\theta))}{\sin(\theta)(1-\sin(\theta))} = \dfrac{\cos(\theta)}{1-\sin(\theta)} = \rho(\theta)$.

(c) On calcule simplement $MN^2 = (x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2$
$= (1+\sin(\theta)-1)^2 + \left((1+\sin(\theta))\tan(\theta) - \dfrac{1+\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\right)^2 = \sin^2(\theta) + (1+\sin(\theta))^2\left(\dfrac{\sin(\theta)-1}{\cos(\theta)}\right)^2 =$
$\sin^2(\theta) + \dfrac{(\sin^2(\theta)-1)^2}{\cos^2(\theta)} = \dfrac{\sin^2(\theta)(1-\sin^2(\theta)) + (1-\sin^2(\theta))(1-\sin^2(\theta))}{\cos^2(\theta)} = \dfrac{1-\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}$,
ce qui vaut bien 1. Cette constatation permet d'ailleurs de donner un moyen mécanique assez simple pour construire la courbe étudiée dans cet exercice. Les plus observateurs d'entre vous n'auront par ailleurs pas manqué de remarquer une similitude surprenant avec la strophoïde étudiée en cours.

Exercice 3

1. On reconnait une équation d'ellipse centrée en O, d'axe focal (Oy), de demi-grand axe $a = 1$ et de demi-petit axe $b = \dfrac{1}{2}$. On calcule aisément $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\dfrac{3}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, donc les foyers ont pour coordonnées $\left(0; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\left(0; -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Par ailleurs, l'excentricité est donnée par $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
2. On peut vérifier que le point appartient bien à notre ellipse : $4 \times \dfrac{1}{16} + \dfrac{3}{4} = 1$, c'est bon. L'équation de la tangente est donc $4 \times \dfrac{1}{4}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y = 1$, ou si on préfère $2x + \sqrt{3}y = 2$.
3. Voici la bête, avec l'ensemble demandé à la dernière question (et les tangentes perpendiculaires issues d'un point de cet ensemble) :



4. (a) C'est du cours : $4xx_0 + yy_0 = 1$.
   (b) Pour mettre l'équation de droite sous la forme donnée, il faut tout diviser par c (si c est nul, la droite ne sera jamais tangente à l'ellipse). La droite est alors tangente à l'ellipse

s'il existe un point (x_0, y_0) de l'ellipse tel que $\dfrac{a}{c} = 4x_0$ et $\dfrac{b}{c} = y_0$. Cela donne, compte tenu de l'équation de l'ellipse, la condition nécessaire et suffisante $4 \times \left(\dfrac{a}{4c}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{c}\right)^2 = 1$, soit en multipliant tout par $4c^2$ la condition annoncée $a^2 + 4b^2 = 4c^2$.

(c) La droite passe par lé point M si $c = ax + by$, remplaçons dans la condition obtenue à la question précédente : $a^2 + 4b^2 = 4(ax + by)^2$, soit $a^2 + 4b^2 = 4a^2x^2 + 8abxy + 4b^2y^2$. En divisant tout par a^2 (si a est nul l'énoncé de la question n'a pas de sens) et en constatant que $m^2 = \dfrac{b^2}{a^2}$, on trouve $1 + 4m^2 = 4x^2 - 8mxy + 4m^2y^2$. Il ne reste plus qu'à diviser tout par 4 et réordonner les termes : $m^2(1 - y^2) + 2mxy + \dfrac{1}{4} - x^2 = 0$.

(d) Deux tangentes (de pentes distinctes) passent par M si l'équation du second degré précédente (dont l'inconnue m est l'inverse de la pente de la tangente) admet deux solutions, donc si son discriminant est strictement positif. On calcule $\Delta = (2xy)^2 - 4\left(\dfrac{1}{4} - x^2\right)(1 - y^2) = 4x^2y^2 - 1 + y^2 + 4x^2 - 4x^2y^2 = 4x^2 + y^2 - 1$. La conditon recherchée est donc $4x^2 + y^2 - 1 > 0$. On fait un lien évident avec l'équation de l'ellipse : deux tangentes pasent par un point M si et seulement si ce point est situé à l'extérieur de l'ellipse.

(e) Deux droites sont perpendiculaires si le produit de leurs pentes (ou de leurs inverses) vaut -1. On cherche donc une condition pour que notre équation ait deux racines dont le produit vaut -1. Or, on sait que les racines de l'équation $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ont pour produit $\dfrac{\gamma}{\alpha}$. Ce produit vaut -1 si $\gamma = -\alpha$, c'est-à-dire ici si $\dfrac{1}{4} - x^2 = y^2 - 1$, soit $x^2 + y^2 = \dfrac{5}{4}$. On reconnait l'équation du cercle de centre O et de rayon $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 4

1. Les deux fonctions sont définies et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\backslash\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$. Dérivons : $x'(t) = 2 - \dfrac{2}{(2t+1)^2} = \dfrac{2(4t^2 + 4t + 1 - 1)}{(2t+1)^2} = \dfrac{8t(t+1)}{(2t+1)^2}$, ce qui s'annule pour $t = 0$ et $t = 1$ (et est négatif entre les racines). Pour la seconde fonction, $y'(t) = 2t + \dfrac{2}{(2t+1)^2} = \dfrac{2(4t^3 + 4t^2 + t + 1)}{(2t+1)^2}$. Le numérateur s'annule effectivement lorsque $t = -1$, on peut factoriser sous la forme $4t^3 + 4t^2 + t + 1 = (t+1)(at^2 + bt + c) = at^3 + (a+b)t^2 + (b+c)t + c$. Par identification, $a = 4$ puis $b = 0$ et 1, ce qui donne $y'(t) = \dfrac{2(t+1)(4t^2+1)}{(t^2+1)^2}$. Cette dérivée est du signe de $t + 1$, en particulier elle s'annule uniquement lorsque $t = 1$. On en profite pour calculer $x(0) = 1$, $y(0) = -1$; $x(-1) = -2 - 1 = -3$ et $y(-1) = 1 + 1 = 2$. Le calcul des limites ne présente aucune difficulté, d'où le tableau suivant :

t	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
x	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\infty \ \Vert\ +\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$		$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty \ \Vert\ -\infty$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

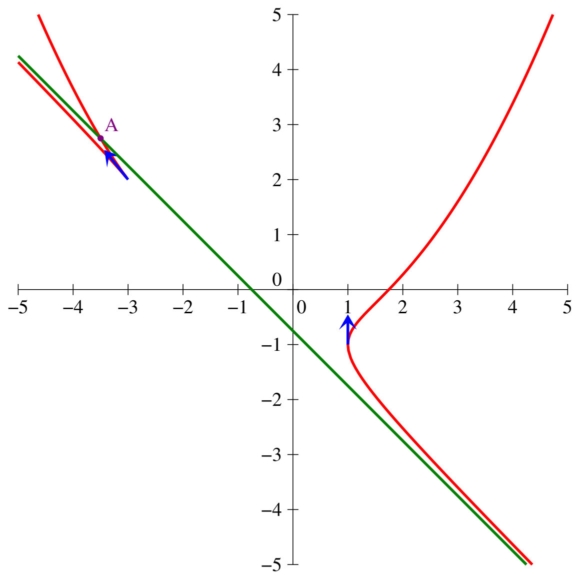
2. Les plus courageux calculeront les dérivées secondes, en partant de l'expression des dériovées qui n'est pas mise au même dénominateur (ça va plus vite !) : $x''(t) = \dfrac{8}{(2t+1)^3}$, donc $x''(-1) = -8$; et $y''(t) = 2 - \dfrac{8}{(2t+1)^3}$, donc $y''(t) = 10$. On peut donc prendre comme vecteur tangent $\overrightarrow{u}(-4, 5)$. Autre méthode, calculer la limite du quotient $\dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{2(t+1)(4t^2+1)}{(2t+1)^2} \times \dfrac{(2t+1)^2}{8t(t+1)} = \dfrac{4t^2+1}{4t}$, qui a pour limite $-\dfrac{5}{4}$ en -1. On retrouve évidemment la même direction pour la tangente que par l'autre méthode.

3. Commençons par le plus simple : en mettant tout au même dénominateur, $\dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{2t^3+t^2-1}{4t^2+2t+1}$, qui a des limites infinies en $+\infty$ et en $-\infty$. Il y a donc des deux côtés des branches paraboliques de direction (Oy).
   En $-\dfrac{1}{2}$, en utilisant le calcul précédant, $\dfrac{y(t)}{x(t)}$ a pour limite $\dfrac{2 \times (-\frac{1}{8}) + \frac{1}{4} - 1}{4 \times \frac{1}{4} - 1 + 1} = -1$. On calcule donc $y(t) + x(t) = t^2 + 2t$, qui a pour limite $\dfrac{1}{4} - 1 = -\dfrac{3}{4}$ en $-\dfrac{1}{2}$. Il y a donc une asymptote oblique Δ d'équation $y = -x - \dfrac{3}{4}$.
   Déterminons donc le signe de $y(t) + x(t) + \dfrac{3}{4} = t^2 + 2t + \dfrac{3}{4}$. Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 4 - 3 = 1$, il s'annule pour $t_1 = \dfrac{-2+1}{2} = -\dfrac{1}{2}$, et $t_2 = \dfrac{-2-1}{2} = -\dfrac{3}{2}$. La courbe est située en-dessous de Δ sur l'intervalle $\left[-\dfrac{3}{2}; -\dfrac{1}{2}\right[$, et en-dessous le reste du temps. Elle coupe l'asymptote quand $t = -\dfrac{3}{2}$, pour $x = -3 + \dfrac{1}{-2} = -\dfrac{7}{2}$, et $y = \dfrac{9}{4} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{11}{4}$ (qu'on peut aussi retrouver par l'équation de droite). Ce point sera noté A sur la courbe.

4. Commençons par écrire que $x(t) = x(u)$: $\dfrac{4t^2+2t+1}{2t+1} = \dfrac{4u^2+2u+1}{2u+1}$, soit après un produit en croix assez laid $8t^2u + 4tu + 2u + 4t^2 + 2t + 1 = 8tu^2 + 4tu + 2t + 4u^2 + 2u + 1$. Ca se simplfie pour donner $8t^2u - 8tu^2 + 4t^2 - 4u^2 + 0$, soit $4(t-u)(2tu + t + u) = 0$. Puisqu'on suppose $t \neq u$, on trouve bien la première condition $2P + S = 0$. Passons à la deuxième condition : $\dfrac{2t^3+t^2-1}{2t+1} = \dfrac{2u^3+u^2-1}{2u+1}$, d'où $4t^3u + 2t^2u - 2u + 2t^3 + t^2 - 1 = 4tu^3 + 2tu^3 - 2t + 2u^3 + u^2 - 1$. Comme tout à l'heure on passe tout du même côté et on factorise : $(t-u)(4tu(t+u) + 2tu + 2 + 2(t^2 + tu + u^2) + t + u) = 0$. On doit donc avoir $4SP + 2(t^2 + 2tu + u^2) + S = -2$, soit $4SP + 2S^2 + S = -2$, ce qui donne bien la condition de l'énoncé. Comme on a par ailleurs $2P + S = 0$, $4P + 2S = 2 \times 0 = 0$, donc on trouve $S = -2$, puis $2P = 2$, donc $P = 1$. Les nombres t et u sont donc racines de l'équation du second degré $x^2 + 2x + 1 = 0$. Mais cette

équation n'a qu'une seule racine double égale à -1. Il n'y a donc pas de point double sur cet arc paramétré.

5. Voilà :



Devoir Surveille n°5 (devoir commun)

PTSI B Lycée Eiffel

26 janvier 2013

Durée : 4H. Calculatrices interdites.

Exercice 1

On considère l'équation différentielle $(E) : (1+x^2)y' + (x-1)^2 y = x^3 - x^2 + x + 1$.

1. Déterminer une fonction affine solution particulière de (E).
2. En constatant que $(x-1)^2 = (1+x^2) - 2x$, déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{(x-1)^2}{1+x^2}$. En déduire les solutions de l'équation homogène associée à l'équation (E), puis toutes les solutions de l'équation (E).
3. Soit k un réel quelconque. Montrer qu'il existe une unique solution y_k de l'équation vérifiant $y_k(0) = k$, et vérifier que $y_k(x) = x + ke^{-x}(1+x^2)$. On notera désormais $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k.
4. Calculer $y_k'(1)$. Que peut-on en déduire pour les tangentes aux courbes $\mathcal{C}_k$ en leur point d'abscisse 1 ?
5. Montrer que, pour $k \neq 0$, toutes les fonctions y_k ont deux points d'inflexion dont les abscisses ne dépendent pas de la valeur de k.
6. Montrer que toutes les tangentes aux courbes $\mathcal{C}_k$ en leur point d'abscisse 3 sont coucourantes au point $A\left(\dfrac{11}{2}; \dfrac{11}{2}\right)$.
7. Montrer que toutes les courbes $\mathcal{C}_k$ admettent une même asymptote oblique en $+\infty$, et déterminer (en fonction de k) la position de la courbe par rapport à son asymptote.
8. Déterminer les variations de y_k dans le cas où $k \leqslant 0$. Tracer dans un même repère une allure des courbes $\mathcal{C}_{-1}$ et $\mathcal{C}_{-2}$, ainsi que leurs tangentes en 1 et en 3 (en exploitant les calculs des questions précédentes). On rappellera également les valeurs des fonctions correspondantes en 0. On donne $e^{-1} \simeq 0,37$, et $e^{-3} \simeq 0,05$

Exercice 2

On se place dans cet exercice dans un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ du plan et on considère la courbe γ paramétrée par $\begin{cases} x(t) &= t - \mathrm{th}(t) \\ y(t) &= \dfrac{1}{\mathrm{ch}(t)} \end{cases}$ (pour $t \in \mathbb{R}$). On notera $M(t)$ le point de γ de coordonnées $(x(t), y(t))$.

A. Étude de la courbe γ (appelée tractrice).

1. Montrer que γ admet un axe de symétrie et qu'on peut réduire l'étude de la courbe à $\mathbb{R}^+$.
2. Étudier les variations de x et de y sur $\mathbb{R}_+$.
3. Déterminer les limites de x et de y en $+\infty$.
4. Construire le tableau de variations commun de x et y.
5. Montrer que γ admet un point stationnaire, et déterminer la tangente en ce point.
6. Construire la courbe γ dans son intégralité (on donne $x(1) \simeq 0,24$ et $y(1) \simeq 0,65$).

B. Une propriété remarquable de la tractrice.

1. Pour tout réel t non nul, déterminer un vecteur directeur de la tangente à γ en $M(t)$.
2. En déduire que, pour tout t non nul, une équation de la tangente (T) à γ en $M(t)$ est $x + \mathrm{sh}(t)y - t = 0$.
3. Vérifier que cette équation convient encore lorsque $t = 0$.
4. Déterminer la distance $OM(0)$.
5. Soit t un réel non nul. Montrer que (T) admet un unique point d'intersection $P(t)$ avec l'axe (Ox), dont on déterminera les coordonnées.
6. Pour tout t non nul, calculer la distance $M(t)P(t)$. Que peut-on en déduire ?

C. Rayon de courbure de la tractrice.

On appelle point birégulier d'une courbe paramétrée tout point $M(t)$ de la courbe pour lequel $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ et $\dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$ sont non colinéaires. En un tel point, le rayon de courbure de la courbe est donné par la formule $R = \dfrac{\left\|\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right\|^3}{\det\left(\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}, \dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)}$.

1. Montrer que pour tout t non nul le point $M(t)$ de la tractrice est un point birégulier.
2. Calculer le rayon de courbure de la tractrice en son point $M(t)$ (pour t non nul).

Problème

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct. On note A le point d'affixe 1 et B le point d'affixe -1. On rappelle que le nombre complexe j est défini par $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

Pour tout entier naturel n et tout nombre complexe z, on pose $S_n(z) = 1 + z^2 + z^4 + \cdots + z^{2n}$.

A. Quelques cas particuliers.

1. Exprimer $S_n(z)$ et calculer $S_n(1+i)$ lorsque $n = 1$, puis $n = 2$.
2. Montrer que, si z est un nombre complexe de module 1, alors $\bar{z}S_1(z)$ est un nombre réel. La réciproque est-elle vraie ?
3. Donner le module et l'argument de $S_1(j)$.
4. Montrer par récurrence que, pour tout entier n, $S_{3n}(j) = 1$.
5. Calculer $S_n(z)$ lorsque $z = 1$ ou $z = -1$.

B. Étude du cas général.

Dans cette partie on suppose que z est distinct de 1 et de -1.

1. Montrer que, pour tout entier n, on a $S_n(z) = \dfrac{1 - z^{2n+2}}{1 - z^2}$.
2. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $S_n(z) = 0$ puis la valeur de la somme de ces solutions.
3. Soit z un nombre complexe de module r strictement inférieur à 1.
   (a) Montrer que, pour tout entier n, on a $\left|S_n(z) - \dfrac{1}{1-z^2}\right| = \dfrac{r^{2n+2}}{|1-z^2|}$.
   (b) En déduire, à l'aide de l'inégalité triangulaire, que $\left|S_n(z) - \dfrac{1}{1-z^2}\right| \leqslant \dfrac{r^{2n+2}}{1-r^2}$.
   (c) Calculer la limite de $\left|S_n(z) - \dfrac{1}{1-z^2}\right|$ quand n tend vers $+\infty$.

C. Autour d'une fonction de la variable complexe ...

Pour tout nombre complexe distinct de 1 et de -1, on pose $f(z) = \dfrac{1}{1-z^2}$.

1. Montrer que $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$.
2. Résoudre l'équation $f(z) = \dfrac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2z}$ (on ne cherchera pas à donner les solutions sous forme alébrique ou trigonométrique).
3. On note M le point d'affixe z. Montrer que $|f(z)| = 1 \Leftrightarrow AM.BM = 1$.
4. Soit z un nombre complexe de module 1 distinct de 1 et -1. On note $z = e^{i\theta}$.
   (a) Montrer que $f(z) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2\tan(\theta)}i$.
   (b) Pour quelles valeurs de θ a-t-on $|f(z)| = 1$? Représenter les points M correspondants.
5. Dans cette question z désigne un nombre complexe de module r strictement supérieur à 1.
   (a) Montrer que $|f(z)| \leqslant \dfrac{1}{r^2-1}$.
   (b) On note P le point d'affixe $f(z)$. Que peut-on dire de la position du point P lorsque r tend vers $+\infty$?

Corrigé du DS5

Exercice 1

1. Considérons donc une fonction de la forme $y(x) = ax+b$. Dans ce cas $y'(x) = a$, et $(1+x^2)y' + (x-1)^2y = a(1+x^2) + (x^2-2x+1)(ax+b) = a + ax^2 + ax^3 - 2ax^2 + ax + bx^2 - 2bx + b = ax^3 + (b-a)x^2 + (a-2b)x + a + b$. Par identification des coefficients, la fonction est donc solution de l'équation (E) si $a = 1$; $b - a = -1$; $a - 2b = 1$ et $a + b = 1$. Il suffit donc de prendre $a = 1$ et $b = 0$. Autrement dit, la fonction $y : x \mapsto x$ est solution particulière de (E).

2. En effet, $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 = (1+x^2) - 2x$, donc $\dfrac{(x-1)^2}{2x} = 1 - \dfrac{2x}{1+x^2}$ a pour primitive $x \mapsto x - \ln(1+x^2)$. L'équation homogène normalisée associée à l'équation (E) pouvant s'écrire $y' + \dfrac{(x-1)^2}{1+x^2}y = 0$, elle admet pour solutions toutes les fonctions $y : x \mapsto Ke^{-x+\ln(1+x^2)} = Ke^{-x}(1+x^2)$, où $K \in \mathbb{R}$. Notons qu'ici, comme $1 + x^2$ ne s'annule jamais, la normalisation ne pose aucun problème, on peut résoudre l'équation sur $\mathbb{R}$. Puisqu'on a déjà déterminé plus haut une solution particulière de l'équation (E), les solutions sont donc toutes les fonctions de la forme $x \mapsto x + Ke^{-x}(1+x^2)$.

3. Dans la forme obtenue à la question précédente, on a $y(0) = K$. Il suffit donc de poser $k = K$, et on trouve bien une solution y_k ayant l'équation annoncée.

4. Deux possibilités pour faire ce calcul. On peut dériver simplement la fonction y_k pour obtenir $y_k'(x) = 1 - ke^{-x}(1+x^2) + 2kxe^{-x} = 1 - ke^{-x}(1+x^2-2x) = 1 - ke^{-x}(x-1)^2$. Pour $x = 1$, on trouve $y_k'(1) = 1$, qui est indépendant de k. Toutes les courbes $\mathcal{C}_k$ admettent donc en 1 des tangentes de même pente, qui sont parallèles. Autre façon de présenter le calcul : on remplace x par 1 dans l'équation (E) pour obtenir $2y'(1) + 0y(1) = 1 - 1 + 1 + 1$, soit $y'(1) = 1$. La conclusion est évidemment la même.

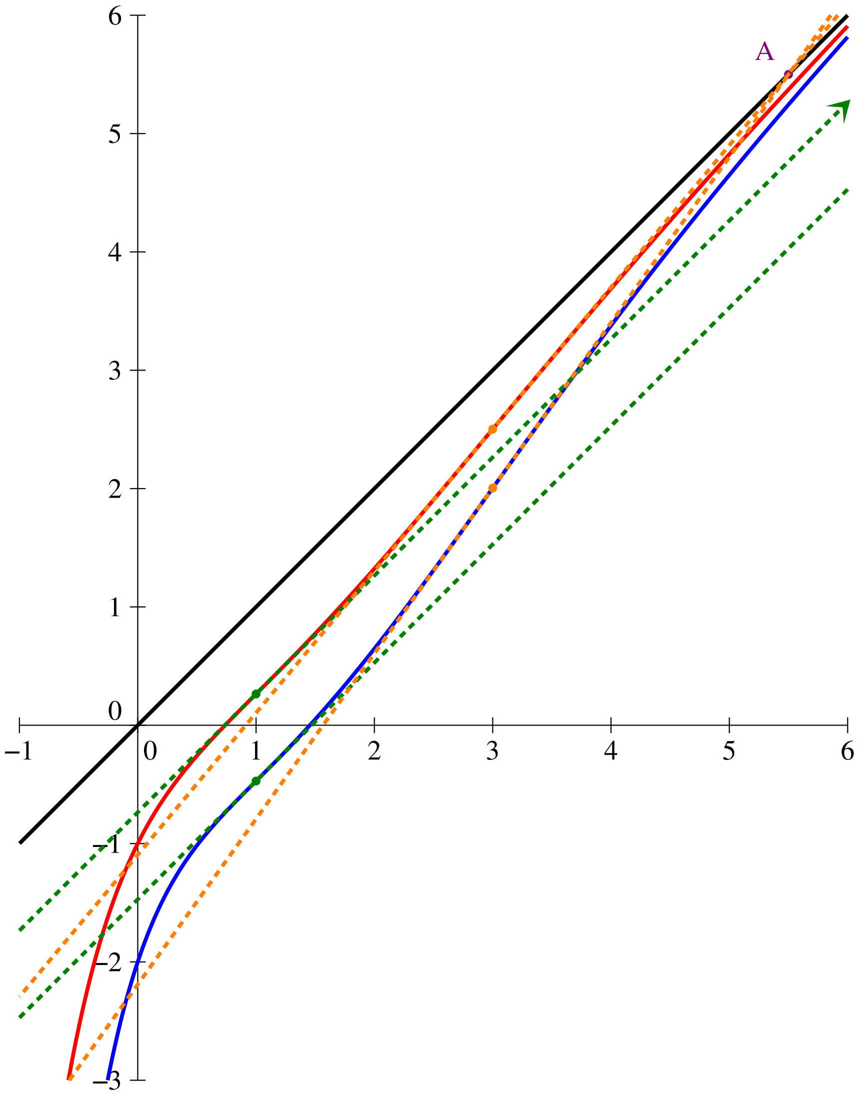
5. Dérivons une deuxième fois la fonction y_k, on trouve $y_k''(x) = ke^{-x}(x-1)^2 - ke^{-x}(2x-2) = ke^{-x}(x^2 - 2x + 1 - 2x + 2) = ke^{-x}(x^2 - 4x + 3)$. La courbe admet donc un point d'inflexion d'abscisse x si x est solution de l'équation du second degré $x^2 - 4x + 3 = 0$. Cette condition est effectivement indépendante de la valeur de k, le trinôme a pour discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4$, et admet pour racines $x_1 = \dfrac{4-2}{2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{4+2}{2} = 3$. Toutes les courbes ont donc deux points d'inflexion d'abscisses 1 et 3.

6. Comme $y_k'(3) = 1 - 4ke^{-3}$ et $y_k(3) = 3 + 10ke^{-3}$, la tangente à la courbe $\mathcal{C}_k$ en 3 a pour équation $y = (1 - 4ke^{-3})(x-3) + 3 + 10ke^{-3}$. En remplaçant x par $\dfrac{11}{2}$, ou si on préfère $x - 3$ par $\dfrac{5}{2}$, on obtient $y = \dfrac{5}{2} - 10ke^{-3} + 3 + 10ke^{-3} = \dfrac{11}{2}$, ce qui prouve bien que la tangente passe toujours par le point A.

7. Il suffit de constater que $y_k(x) - x = ke^{-x}(1+x^2)$, qui a pour limite 0 en $+\infty$ par croissance comparée. La droite d'équation $y = x$ est donc asymptote oblique à toutes les courbes en $+\infty$ (et coïncide accessoirement avec la courbe $\mathcal{C}_0$). Comme $e^{-x}(1+x^2)$ est toujours positif sur $\mathbb{R}$, le signe de $y_k(x) - x$ est simplement celui de k. Les courbes sont donc toujours au-dessus de l'asymptote lorsque $k > 0$, toujours en-dessous lorsque $k < 0$.

8. Dans ce cas, $ke^{-x}(x-1)^2$ est toujours négatif, donc $y_k'(x) = 1 - ke^{-x}(x-1)^2$ est strictement positif. La fonction y_k est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. La limite de y_k en $+\infty$ vaut toujours $+\infty$. De l'autre côté, $\lim\limits_{x\to-\infty} ke^{-x}(1+x^2) = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} y_k(x) = -\infty$ (on peut également obtenir cette limite en utilisant que $y_k(x) \leqslant x$ pour $k \leqslant 0$). Pour compléter les courbes, on calcule $y_k(1) = 1 + \dfrac{2k}{e}$, ce qui donne $y_{-1}(1) = 1 - \dfrac{2}{e} \simeq 0.26$ et $y_{-2}(1) = 1 - \dfrac{4}{e} \simeq -0.48$. Puisqu'on souhaite tracer les tangentes en 3, calculons également en reprenant les résultats obtenus à la question 3 : $y_{-1}(3) = 3 - 10e^{-3} \simeq 2.5$, et $y_{-2}(3) = 3 - 20e^{-3} \simeq 2$. Inutile

de calculer les pentes des tangentes, le fait qu'elles passent par le point A suffit à les tracer. On obtient le graphique suivant (asymptote en noir, $\mathcal{C}_{-1}$ en rouge, $\mathcal{C}_{-2}$ en bleu et tangentes en 3 en pointillés orange, celles en 1 en pointillés verts) :



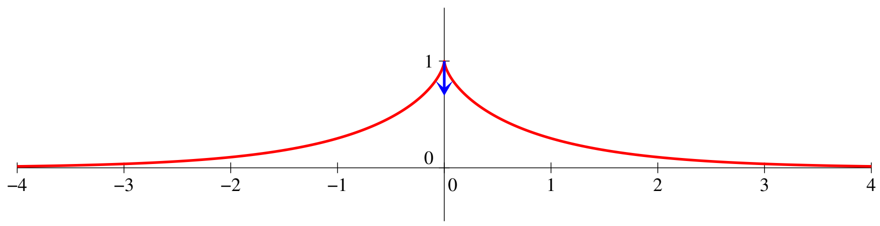
Exercice 2

A. Étude de la courbe γ (appelée tractrice).

1. Notons déjà que les deux fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$ (le ch au dénominateur ne s'annule jamais). La fonction ch étant paire et la fonction th étant impaire, les fonctions x et y sont respectivement imapire et paire. La courbe γ est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, et une étude sur $\mathbb{R}_+$, suivie de cette symétrie, suffit à obtenir l'intégralité de la courbe.
2. On peut par exemple calculer $x'(t) = 1 - (1 - \text{th}^2(t)) = \text{th}^2(t) \geqslant 0$, et $y'(t) = -\dfrac{\text{sh}(t)}{\text{ch}^2(t)} \leqslant 0$ sur $\mathbb{R}_+$. La fonction x est donc croissante, et la fonction y décroissante.
3. Puisque $\lim\limits_{t\to+\infty} \text{th}(t) = 1$, $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$. Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} \text{ch}(t) = +\infty$, $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 0^+$.
4. Pour compléter le tableau, il ne reste plus qu'à calculer $x(0) = 0 - \text{th}(0) = 0$, et $y(0) = \dfrac{1}{\text{ch}(0)} = 1$.

t	0		$+\infty$
$x'(t)$	0	$+$	
x	0	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$	0	$-$	
y	1	$\searrow$	0

5. Il y a bien un point stationnaire quand $t = 0$ puisque les deux dérivées s'annulent simultanément. Première méthode pour déterminer le vecteur tangente en ce point, on calcule les dérivées secondes : $x''(t) = 2\,\mathrm{th}(t)(1 - \mathrm{th}^2(t))$, qui s'annule en 0 ; et $y''(t) = \dfrac{-\mathrm{ch}^3(t) + 2\,\mathrm{sh}^2(t)\,\mathrm{ch}(t)}{\mathrm{ch}^4(t)}$, qui vaut -1 en 0. Il y a donc au point $M(0)$ une tangente dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}(0, -1)$, autrement dit verticale dirigée vers le bas.
   Deuxième méthode, on calcule $\dfrac{y'(t)}{x'(t)} = -\dfrac{\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{ch}^2(t)\,\mathrm{th}^2(t)} = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}(t)}$, qui tend vers $-\infty$ quand t tend vers 0. On retrouve une tangente verticale dirigée vers le bas. Notons que le point stationnaire sera ici un point de rebroussement de première espèce.
6. Voici une allure de la courbe :



B. Une propriété remarquable de la tractrice.

1. Au vu des calculs de la première partie, un tel vecteur sera $\left(\mathrm{th}^2(t), -\dfrac{\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{ch}^2(t)}\right)$, ou encore en multipliant tout par $\dfrac{\mathrm{ch}^2(t)}{\mathrm{sh}(t)}$, le vecteur plus simple $(\mathrm{sh}(t), -1)$.
2. La tangente a donc une équation de la forme $x + \mathrm{sh}(t)y + c = 0$, et doit passer par le point $M(t)$. Cela donne pour la constante c la condition $t - \mathrm{th}(t) + \dfrac{\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{ch}(t)} + c = 0$, soit $t + c = 0$. Autrement dit, $t = -c$, ce qui donne bien l'équation annoncée.
3. Pour $t = 0$, comme $\mathrm{sh}(0) = 0$, l'équation précédente devient $x = 0$, ce qui correspond à l'axe des ordonnées qui est bien tangente à la courbe en son point stationnaire.
4. Puisque $M(0)$ a pour coordonnées $(0, 1)$, cette distance vaut 1.
5. Remplaçons y par 0 dans l'équation de la tangente, on obtient $x = t$. La tangente coupe donc l'axe des abscisses au point $P(t)(t, 0)$.
6. On a donc $M(t)P(t)^2 = (t - \mathrm{th}(t) - t)^2 + \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(t)} = \mathrm{th}^2(t) + 1 - \mathrm{th}^2(t) = 1$. Cette distance est constante. Cette constatation est à l'origine d'une méthode de tracé de la courbe tractrice (et de son nom) : elle est obtenu en « tirant » un objet initialement placé au point $(0, 1)$ par une ficelle de longueur 1 à laquelle on fait parcourir l'axe des abscisses.

C. Rayon de courbure de la tractrice.

1. On a calculé plus haut $x''(t) = 2\,\mathrm{th}(t)(1-\mathrm{th}^2(t)) = \dfrac{2\,\mathrm{th}(t)}{\mathrm{ch}^2(t)}$, et $y''(t) = \dfrac{2\,\mathrm{sh}^2(t)\,\mathrm{ch}(t) - \mathrm{ch}^3(t)}{\mathrm{ch}^4(t)} = \dfrac{2\,\mathrm{sh}^2(t) - \mathrm{ch}^2(t)}{\mathrm{ch}^3(t)} = \dfrac{\mathrm{sh}^2(t) - 1}{\mathrm{ch}^3(t)}$. On peut donc calculer $\det\left(\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}, \dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right) = x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t) = \dfrac{\mathrm{th}^2(t)(\mathrm{sh}^2(t)-1)}{\mathrm{ch}^3(t)} + \dfrac{2\,\mathrm{th}(t)\,\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{ch}^4(t)} = \dfrac{\mathrm{sh}^4(t) - \mathrm{sh}^2(t) + 2\,\mathrm{sh}^2(t)}{\mathrm{ch}^5(t)} = \dfrac{\mathrm{sh}^2(t)(\mathrm{sh}^2(t)+1)}{\mathrm{ch}^5(t)} = \dfrac{\mathrm{sh}^2(t)}{\mathrm{ch}^3(t)}$. Cette expression ne s'annule effectivement jamais lorsque $t \neq 0$, tous les points non stationnaires de la courbe sont donc biréguliers.

2. Calculons le numérateur, qui vaut $(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{\frac{3}{2}} = \left(\mathrm{th}^4(t) + \dfrac{\mathrm{sh}^2(t)}{\mathrm{ch}^4(t)}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\dfrac{\mathrm{sh}^2(t)(\mathrm{sh}^2(t)+1)}{\mathrm{ch}^4(t)}\right)^{\frac{3}{2}} = \dfrac{\mathrm{sh}^3(t)}{\mathrm{ch}^3(t)} = \mathrm{th}^3(t)$. On en déduit que le rayon de courbure vaut $\dfrac{\mathrm{sh}^3(t)}{\mathrm{ch}^3(t)} \times \dfrac{\mathrm{ch}^3(t)}{\mathrm{sh}^2(t)} = \mathrm{sh}(t)$.

Problème

A. Quelques cas particuliers.

1. Pour $n = 1$, on a $S_1(z) = 1 + z^2$, donc $S_1(1+i) = 1 + (1+i)^2 = 1 + 1 + 2i - 1 = 1 + 2i$. Pour $n = 2$, $S_2(z) = 1 + z^2 + z^4$. Comme $(1+i)^2 = 2i$, $(1+i)^4 = (2i)^2 = -4$, et $S_2(1+i) = 2i - 3$.
2. Notons $z = e^{i\theta}$, dans ce cas $\bar{z} = e^{-i\theta}$ et $z^2 = e^{2i\theta}$, donc $\bar{z}S_1(z) = e^{-i\theta}(1 + e^{2i\theta}) = e^{-i\theta} + e^{i\theta} = 2\cos(\theta) \in \mathbb{R}$ (il existe de nombreuses autres façons de présenter le calcul, le recours à la forme exponentielles n'est pas du tout nécessaire). La réciproque est éviodemment fausse : si $z \in \mathbb{R}$, alors $S_1(z) \in \mathbb{R}$ et on n'a pas nécessairement $|z| = 1$ (on peut prouver que ce sont les seuls cas possibles).
3. On peut par exemple calculer $S_1(j) = 1 + e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{\frac{2i\pi}{3}}(e^{\frac{-2i\pi}{3}} + e^{\frac{2i\pi}{3}}) = 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)e^{\frac{2i\pi}{3}} = -e^{\frac{2i\pi}{3}} = e^{-\frac{i\pi}{3}}$. Ce nombre a pour module 1, et pour argument $-\dfrac{\pi}{3}$.
4. L'initialisation est évidente : $S_0(j) = 1$ puisque $S_0(z) = 1$ quel que soit le nombre complexe z. Supposons désormais que $S_{3n}(j) = 1$ pour un certin entier n, alors $S_{3(n+1)}(j) = S_{3n+3}(j) = S_{3n}(j) + j^{6n+2} + j^{6n+4} + j^{6n+6} = 1 + j^{6n+2}(1 + j^2 + j^4)$. Or, $1 + j^2 + j^4 = 1 + e^{\frac{2i\pi}{3}} + e^{\frac{4i\pi}{3}} = 1 + e^{\frac{2i\pi}{3}} + e^{-\frac{2i\pi}{3}} = 1 + 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = 0$. On trouve bien $S_{3n+3}(j) = 1$, ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et, par application du principe de récurrence, pour tous les entiers naturels n.
5. Puisqu'on a toujours $1^{2k} = 1$, $S_n(1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} 1 = n + 1$. De même pour $z = -1$ (les puissances paires de -1 sont également toutes égales à -1).

B. Étude du cas général.

1. On reconnait dans S_n une somme géométrique de raison z^2, raison qui sera différente de 1 lorsque z est différent de 1 ou -1. On peut donc écrire $S_n(z) = \dfrac{1 - (z^2)^{n+1}}{1 - z^2} = \dfrac{1 - z^{2n+2}}{1 - z^2}$.
2. Les solutions de l'équation $S_n(z) = 0$ sont donc les racines $(2n+2)$-èmes de l'unité, 1 et -1 exclus, autrement dit les complexes de la forme $z^{\frac{2ik\pi}{2n+2}}$, pour $k \in \{1; \dots; 2n+1\} \backslash \{n+1\}$. La somme de toutes les racines $(2n+2)$-èmes de l'unité étant nulle, la somme des solutions vaudra 0 puisqu'on a simplement supprimé deux racines dont la somme est nulle.

3. (a) Il suffit de constater que $S_n(z) - \dfrac{1}{1-z^2} = \dfrac{-z^{2n+2}}{1-z^2}$, et prendre le module de ce quotient : $|-z^{2n+2}| = |z|^{2n+2} = r^{2n+2}$.

   (b) L'inégalité triangulaire nous permet d'affirmer que $|1|-|z^2| \leqslant |1-z^2|$, soit $1-r^2 \leqslant |1-z^2|$. Comme r est supposé strictement inférieur à 1, $1-r^2 > 0$ et on peut passer à l'inverse pour obtenir $\dfrac{1}{|1-z^2|} \leqslant \dfrac{1}{1-r^2}$. Il ne reste plus qu'à tout multiplier par r^{2n+2} pour obtenir la majoration souhaitée.

   (c) Le numérateur du membre de droite de l'inégalité précédente est une suite géométrique de raison comprise entre 0 et 1, dont a pour limite 0. Par application du théorème des gendarmes, le membre de gauche qui est positif tend donc lui aussi vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

C. Autour d'une fonction de la variable complexe ...

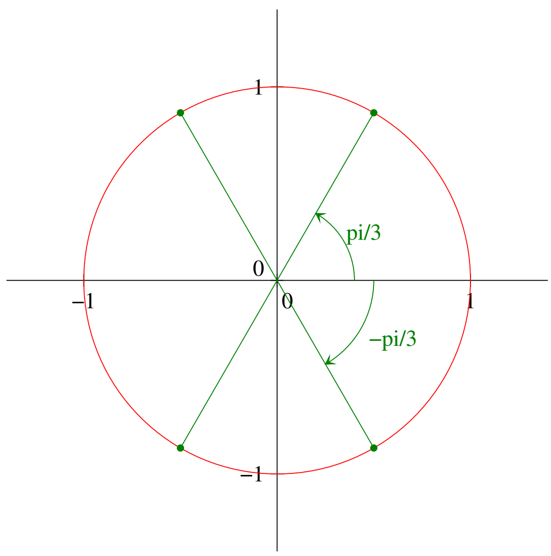
1. C'est à peu près immédiat : $f(\bar{z}) = \dfrac{1}{1-\bar{z}^2}$, et $\overline{f(z)} = \dfrac{\bar{1}}{\overline{1-z^2}} = \dfrac{1}{1-\bar{z}^2}$.

2. Cette équation se ramène à $e^{i\frac{\pi}{4}}(1-z^2) = 2z$, soit en multipliant tous les coefficients par $\sqrt{2}$, $(1+i)z^2 + 2\sqrt{2}z - 1 - i = 0$. Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 8 + 4(1+i)^2 = 8(1+i) = 8\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. Une racine carrée de Δ est donc $\delta = \sqrt{8\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{8}}$, et l'équation admet deux solutions $z_1 = \dfrac{\delta - 2\sqrt{2}}{2+2i}$, et $z_2 = \dfrac{-\delta - 2\sqrt{2}}{2+2i}$.

3. En effet, $|f(z)| = 1 \Leftrightarrow |1-z^2| = \dfrac{1}{1} = 1 \Leftrightarrow |(1-z)(1+z)| = 1 \Leftrightarrow |1-z| \times |1+z| = 1$. Comme $AM = |1-z|$ et $BM = |-1-z| = |1+z|$, l'équivalence demandée en découle.

4. (a) On calcule $f(z) = \dfrac{1}{1-e^{2i\theta}} = \dfrac{1}{e^{i\theta}(e^{-i\theta} - e^{i\theta})} = \dfrac{e^{-i\theta}}{2i\sin\theta} = \dfrac{\cos(\theta) + i\sin(\theta)}{2i\sin(\theta)} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\cos(\theta)}{2\sin(\theta)}i = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2\tan(\theta)}i$

   (b) On veut $|f(z)|^2 = 1$, soit $\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4\tan^2(\theta)} = 1$, soit $4\tan^2(\theta) = \dfrac{4}{3}$, donc $\tan(\theta) = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. ces valeurs correspondent à $\theta \equiv \dfrac{\pi}{3}[\pi]$ et $\theta \equiv -\dfrac{\pi}{3}[\pi]$ (ce qui fait quatre points sur le cercle trigonométrique.



5. (a) On a déjà fait un calcul très approchant dans la partie précédente : par inégalité triangulaire, $|z^2| - |1| \leqslant |z^2 - 1|$, donc $|1 - z^2| = |z^2 - 1| \geqslant r^2 - 1 > 0$ vu l'hypothèse faite sur r. En passant à l'inverse, on obtient immédiatement $|f(z)| \leqslant \dfrac{1}{r^2 - 1}$.

   (b) La question précédente prouve qu'on a alors $|f(z)|$ qui tend vers 0 (encore un coup du théorème des gendarmes avec un module positif). Autrement dit, le point P se rapproche de l'origine du repère.

Devoir Surveillé n°6

PTSI B Lycée Eiffel

15 février 2013

Durée : 2H45. Calculatrices interdites.

Exercice 1

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n par $f_n(x) = x - n\ln(x)$.

1. (a) Étudier la fonction f_n sur son domaine de définition (variations et limites).
   (b) Déterminer la position relative des courbes représentatives des fonctions f_n.
   (c) Tracer dans un même repère une allure rapide des courbes représentatives de f_1, f_2 et f_3.
   (d) Expliquer pourquoi, si $n \geqslant 3$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions, qu'on notera u_n et v_n (u_n étant la plus petite des deux), et qui vérifient $0 < u_n < n < v_n$.
2. (a) Montrer que $\forall n \geqslant 3$, $u_n \in]1; e[$.
   (b) Montrer que $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$, en déduire la monotonie et la convergence de la suite (u_n).
   (c) En utilisant un encadrement de $\ln(u_n)$, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
   (d) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(u_n)}{u_n - 1} = 1$, en déduire un équivalent simple de $u_n - 1$.
3. (a) Déterminer la limite de la suite (v_n).
   (b) Calculer $f_n(n\ln(n))$, en déduire que $n\ln(n) < v_n$.
   (c) Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $n > 2\ln(n)$.
   (d) En déduire le signe de $f_n(2n\ln(n))$, puis que $n\ln(n) < v_n < 2n\ln(n)$.
   (e) En déduire un équivalent simple de $\ln(v_n)$.

Exercice 2

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit $n+1$ polynômes de degré n en posant $\forall k \in \{0;\dots;n\}$, $B_{n,k} = \binom{n}{k} X^k(1-X)^{n-k}$. On identifiera systématiquement les polynômes et les fonctions polynômiales associées.

1. Que valent les polynômes $B_{3,k}$ pour les différentes valeurs de k pour lesquelles ils sont définis ?
2. Étudier rapidement les polynômes $B_{3,k}$ sur l'intervalle $[0,1]$, et tracer une allure de leurs courbes représentatives sur ce même intervalle.
3. Que vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=3} B_{3,k}$? Généraliser ce résultat, et en déduire que $\forall x \in [0,1]$, $B_{n,k}(x) \in [0,1]$ (quelles que soient les valeurs de n et de k).
4. Exprimer le polynôme dérivé $B'_{n,k}$ en fonction de $B_{n-1;k-1}$ et de $B_{n-1,k}$.
5. On définit une application φ sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $\varphi(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}$. Montrer que φ est un endomorphisme de groupes de $\mathbb{R}_n[X]$.
6. Déterminer le noyau de φ. Que peut-on en déduire ?
7. On pose $f(x) = x$, et on note f_n la fonction définie sur $[0;1]$ par $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(x)$. Montrer que, $\forall x \in [0;1]$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$.
8. Effectuer la même démonstration qu'à la question précédente en prenant cette fois-ci $f(x) = x^2$.

Exercice 3

On cherche dans cet exercice à étudier la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$.

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite (u_n).
2. Montrer que, $\forall n \geqslant 2$, $\ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant \ln(n) - \ln(n-1)$.
3. En déduire que, $\forall n \geqslant 1$, $\ln(n+1) \leqslant u_n \leqslant 1 + \ln(n)$.
4. En déduire la nature et un équivalent simple de la suite (u_n).
5. On pose $v_n = u_n - \ln(n)$. Montrer que la suite (v_n) converge (on ne cherchera pas à déterminer sa limite), et en déduire qu'on peut écrire $u_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$, où $\gamma = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n$.
6. On pose désormais $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.
   (a) Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. En déduire la nature de la suite (S_n).
   (b) Montrer que $S_{2n} = H_{2n} - H_n$.
   (c) En utilisant le résultat de la question 5, déterminer la limite l de la suite (S_n).
   (d) Montrer que, $\forall n \geqslant 1$, $|S_n - l| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

Corrigé du DS6

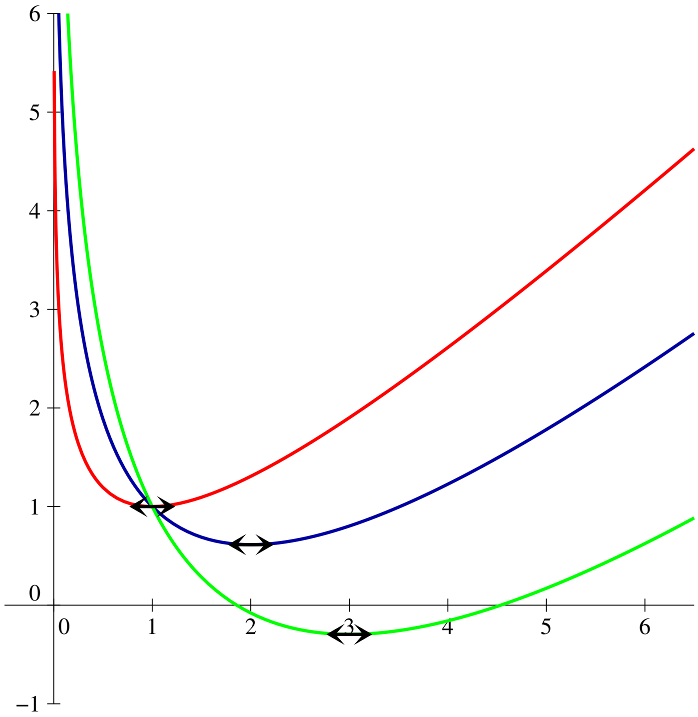
Exercice 1

1. (a) La fonction f_n est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $f_n'(x) = 1 - \dfrac{n}{x}$. Cette dérivée s'annule pour $x = n$, par ailleurs $\lim\limits_{x \to 0} f_n(x) = +\infty$ (n est supposé strictement positif) et par croissance comparée, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$. Enfin, $f_n(n) = n - n\ln(n) = n(1 - \ln(n))$. D'où le tableau de variations suivant :

x	0	n	$+\infty$
f	$+\infty$ $\searrow$	$n(1-\ln(n))$	$\nearrow$ $+\infty$

(b) Calculons donc $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x - (n+1)\ln(x) - x + n\ln(x) = -\ln(x)$. Cette expression est positive si $x \in]0;1]$, négative sur $[1;+\infty[$. Les courbes sont donc « de plus en plus haut » sur $]0;1]$, et « de plus en plus bas » sur $[1;+\infty[$. Elles ont toutes un point commun : $f_n(1) = 1$ quelle que soit la valeur de n.

(c) Voici les allures demandées (f_1 en rouge, f_2 en bleu, f_3 en vert), avec minimum indiqué.



(d) Lorsque $n \geqslant 3$, on a $\ln(n) > 1$ puisque $3 > e$, donc $n(1 - \ln(n)) < 0$. Or, au vu du tableau de variations de la fonction f_n, celle-ci est bijective de $]0;n[$ vers $]n(1-\ln(n));+\infty[$, et de $]n;+\infty[$ vers $]n(1-\ln(n));+\infty[$. Si $n \geqslant 3$, 0 a donc exactement deux antécédents, l'un (celui qu'on notera u_n) sur l'intervalle $]0;n[$, et l'autre sur $]n;+\infty[$ (qui correspond à v_n).

2. (a) On a déja remarqué plus haut que $f_n(1) = 1 > 0$. De plus, $f_n(e) = e - n\ln(e) = e - n < 0$ avec $n \geqslant 3$. Puisque $f_n(1) > f_n(u_n) > f_n(e)$, et la fonction f_n étant strictement décroissante sur l'intervalle $]0;n[$ auquel appartiennent ces trois valeurs, on a bien $1 < u_n < e$.

(b) Calculons donc $f_n(u_{n+1}) = u_{n+1} - n\ln(u_{n+1})$. Or, par définition, on sait que $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$, c'est-à-dire que $u_{n+1} - (n+1)\ln(u_{n+1}) = 0$ ou encore $u_{n+1} = (n+1)\ln(u_{n+1})$. En remplaçant dans le calcul précédant, on a donc $f_n(u_{n+1}) = (n+1)\ln(u_{n+1}) - n\ln(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$. Comme on vient de voir que tous les termes de la suite étaient strictement supérieurs à 1, $\ln(u_{n+1}) > 0$, donc $f_n(u_{n+1}) > f_n(u_n)$. La fonction f_n étant toujours décroissante sur l'intervalle considéré, $u_{n+1} < u_n$ et la suite (u_n) est donc décroissante. Comme elle est par ailleurs minorée par 1, elle converge certainement.

(c) Au vu de l'encadrement $1 < u_n < e$, et en utilisant le fait que $u_n = n\ln(u_n)$, on a $1 < n\ln(u_n) < e$, soit $\frac{1}{n} < \ln(u_n) < \frac{e}{n}$. Les deux termes extrêmes de cet encadrement ont manifestement pour limite 0, une application du théorème des gendarmes nous permet d'affirmer que $\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) = 0$, donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

(d) Puisque u_n tend vers 1, $u_n - 1$ tend vers 0, donc $\ln(u_n) = \ln(1+(u_n-1)) \sim u_n - 1$, ce qui correspond exactement à dire que $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n - 1} = 1$. On a donc $u_n - 1 \sim \ln(u_n) \sim \frac{u_n}{n} \sim \frac{1}{n}$.

3. (a) Puisque $n < v_n$, le théorème de comparaison nous donne immédiatement $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

(b) Calculons donc : $f_n(n\ln(n)) = n\ln(n) - n\ln(n\ln(n)) = n\ln(n) - n\ln(n) - n\ln(\ln(n)) = -n\ln(\ln(n))$. Comme $n \geqslant 3$, $\ln(n) > 1$, et $\ln(\ln(n)) > 0$, donc $f_n(n\ln(n)) < 0$. Comme, par définition, $f_n(v_n) = 0$, et que sur $]n; +\infty[$, intervalle auquel appartiennent ces deux valeurs, f_n est croissante, on en déduit que $n\ln(n) < v_n$.

(c) On peut reprendre intelligemment les calculs de la toute première question : la fonction f_2 est strictement positive sur $\mathbb{R}^{+*}$, donc on a $\forall x > 0$, $x > 2\ln(x)$. L'inégalité demandée en découle.

(d) Calculons à nouveau : $f_n(2n\ln(n)) = 2n\ln(n) - n\ln(2n\ln(n)) = 2n\ln(n) - n\ln(n) - n\ln(2\ln(n)) = n(\ln(n) - \ln(2\ln(n))$. Or, comme $n > 2\ln(n)$, $\ln(n) > \ln(2\ln(n))$, donc $f_n(2n\ln(n)) > 0$. On en déduit comme tout à l'heure que $v_n < 2n\ln(n)$.

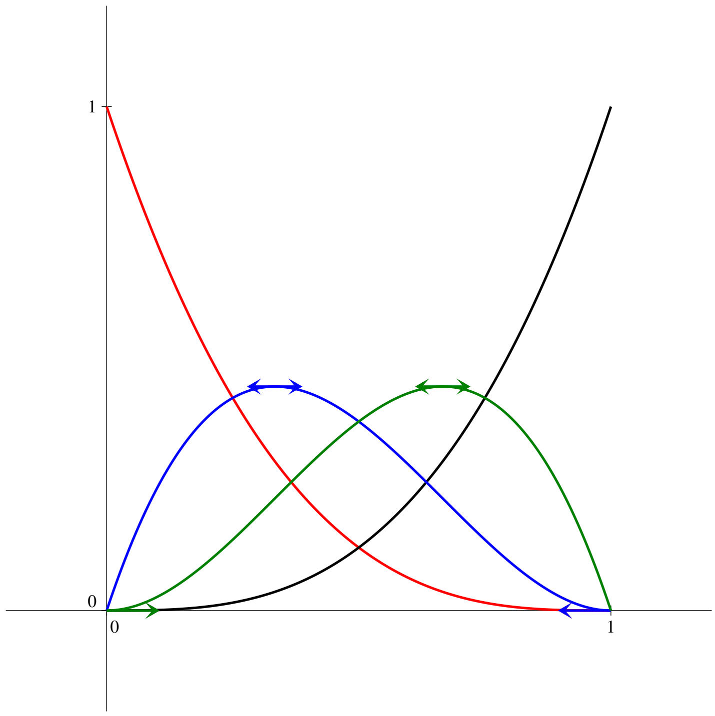
(e) Au vu de ce qui précède, $\ln(n) + \ln(\ln(n)) \leqslant \ln(v_n) \leqslant \ln(2) + \ln(n) + \ln(\ln(n))$, donc $1 + \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)} \leqslant \frac{v_n}{\ln(n)} \leqslant 1 + \frac{\ln(2)}{\ln(n)} + \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)}$. Or, on sait que $\lim_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$, et $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ (croissance comparée), donc par composition de limites, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)} = 0$. Les deux membres extrêmes de l'encadrement précédent ont donc pour limite 1, et on peut appliquer le théorème des gendarmes pour obtenir $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(v_n)}{\ln(n)} = 1$, soit $\ln(v_n) \sim \ln(n)$. On ne peut bien évidemment pas en déduire d'équivalent simple de v_n.

Exercice 2

1. Il suffit de recopier la définition : $B_{3,0} = \binom{3}{0} X^0(1-X)^{3-0} = (1-X)^3 = 1 - 3X + 3X^2 - X^3$; $B_{3,1} = \binom{3}{1} X^1(1-X)^2 = 3X(1-X)^2 = 3X - 6X^2 + 3X^3$; $B_{3,2} = 3X^2(1-X) = 3X^2 - 3X^3$ et $B_{3,3} = X^3$.

2. Le polynôme $B_{3,0}$ est décroissant sur $[0;1]$ (et même sur $\mathbb{R}$!), sa dérivée s'annulant accessoirement en 1, et il vaut 1 en 0 et 0 en 1. Au contraire, le polynôme $B_{3,3}$ est croissant, de dérivée nulle en 0, s'annule en 0 et vaut 1 en 1. Ensuite, $B'_{3,1} = 3 - 12X + 9X^2 = 3(1 - 4X + 3X^2)$. La parenthèse a pour racine évidente 1, et s'annule également en $\frac{1}{3}$ pusique le produit des racines doit être égal à $\frac{1}{3}$. La fonction $B_{3,1}$ est croissante sur $\left[0; \frac{1}{3}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{2}{3}; 1\right]$, avec pour maximum $3 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$. Inutile de refaire les calculs pour le dernier polynôme :

$B_{3,2}(x) = B_{3,1}(1-x)$, donc sa dérivée s'annule en 0 et en $\dfrac{2}{3}$, avec un maximum $\dfrac{4}{9}$ également. Ce qui donne les courbes suivantes ($B_{3,0}$ en rouge, $B_{3,1}$ en bleu, $B_{3,2}$ en vert et $B_{3,3}$ en noir) :



3. Calculons $B_{3,0}+B_{3,1}+B_{3,2}+B_{3,3} = 1-3X+3X^2-X^3+3X-6X^2+3X^3+3X^3-3X^3+X^3 = 1$. En fait, cette façon de faire le calcul est débile, on a en général $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} B_{n,k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k(1-X)^{n-k} = (X+1-X)^n = 1$ en utilisant la formule du binôme de Newton (qui est certainement valable sur l'anneau commutatif $\mathbb{K}[X]$). Comme tous les polynômes $B_{n;k}$ prennent des valeurs positives sur $[0,1]$ (puisque x et $1-x$ sont positifs sur cet intervalle), on aura toujours $0 \leqslant B_{n,k} \leqslant 1$ sur $[0,1]$.
4. Calculons de façon formelle : $B'_{n,k} = k\dbinom{n}{k}X^{k-1}(1-X)^{n-k}+(n-k)\dbinom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k-1}$. Dans la première moitié, on peut utiliser la formule $k\dbinom{n}{k} = n\dbinom{n-1}{k-1}$ pour obtenir $n\dbinom{n-1}{k-1}X^{k-1}(1-X)^{n-1-(k-1)} = nB_{n-1,k-1}$. Dans la deuxième moitié, on constate que $(n-k)\dbinom{n}{k} = \dfrac{(n-k)n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n!}{k!(n-1-k)!} = n\dbinom{n-1}{k}$ et on fait pareil pour trouver $n\dbinom{n-1}{k}X^k(1-X)^{n-1-k} = nB_{n-1,k}$. Finalement, $B'_{n,k} = n(B_{n-1,k-1} - B_{n-1,k})$.
5. L'application φ est bien une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même puisque tous les polynômes $B_{n,k}$ sont de degré n, donc la somme définissant φ est au pire de degré n. De plus, $\varphi(P+Q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(P+Q)\left(\frac{k}{n}\right)B_{n,k} = \sum_{k=0}^{n}P\left(\frac{k}{n}\right)B_{n,k} + \sum_{k=0}^{n}Q\left(\frac{k}{n}\right)B_{n,k}$. Il s'agit donc bien d'un endomorphisme de groupes.
6. Le noyau est constitué des polynômes P pour lesquels $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}P\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k} = 0$. Notons pour simplifier $a_k = P\left(\dfrac{k}{n}\right)\dbinom{n}{k}$, on a alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_kX^k(1-X)^{n-k}$, et notons p le plus

petit indice pour lequel $a_p \neq 0$. On peut factoriser par X^p pour obtenir $X^p(a_p(1-X)^{n-p} + a_{p+1}X(1-X)^{n-p-1} + \dots)$. L'anneau $\mathbb{K}[X]$ étant intègre, on doit avoir $a_p(1-X)^{n-p} + a_{p+1}X(1-X)^{n-p-1} + \dots + a_n X^{n-p} = 0$. En remplaçant X par 0, on trouve alors $a_p = 0$ (tous les autres termes s'annulent), ce qui contredit la définition de a_p. La seule possibilité est alors que tous les coefficients a_p soient nuls, ce qui impose que $P\left(\frac{k}{n}\right) = 0$ pour tout entier k. Autrement dit, le polynôme P possède (au moins) $n+1$ racines distinctes, ce qui est délicat pour un polynôme de degré inférieur ou égal à n. Le seul élément du noyau est donc le polynôme nul, et l'application φ est injective.

7. On a donc $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{k+1}(1-x)^{n-1-k} = x\sum k = 0^{n-1}\binom{n-1}{k} x^k(1-x)^{n-1-k} = x(x+1-x)^{n-1} = x$. Cette expression a certainement pour limite x quand n tend vers $+\infty$!
8. Pour calculer la somme, il est pratique d'écrire le $\frac{k^2}{n^2}$ sous la forme $\frac{k(k-1)}{n^2} + \frac{k}{n^2}$, ce qui donne $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)}{n^2}\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2}\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=2}^{n} \frac{n(n-1)}{n^2}\binom{n-2}{k-2} x^k(1-x)^{n-k} + \frac{x}{n}$ en reprenant le calcul de la question précédente pour la deuxième moitié. On continue le calcul : $f_n(x) = \frac{n-1}{n}\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k} x^{k+2}(1-x)^{n-2-k} + \frac{x}{n} = \frac{n-1}{n}x^2(x+1-x)^{n-2} + \frac{x}{n} = \frac{n-1}{n}x^2 + \frac{x}{n}$. cette expression converge bien vers x^2. On peut en fait démontrer (mais c'est nettement plus compliqué !) que, pour toute fonction f continue sur $[0;1]$, $f_n(x)$ converge vers $f(x)$.

Exercice 3

1. Calculoon donc : $u_1 = 1$; $u_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$; $u_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$ et $u_4 = \frac{11}{6} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12}$.
2. Une belle façon de faire est de passer par l'intégration : $\forall x \in [n, n+1]$, $\frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{n}$. En intégrant entre n et $n+1$ on trouve $\int_n^{n+1} \frac{1}{n+1}\,dx \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{n}\,dx$, soit $\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}$. Il suffit de remplacer n par $n-1$ dans l'inégalité de gauche pour obtenir celle de droite de l'encadrement demandé (c'est pour ça qu'elle n'est valable que si $n \geqslant 2$).
3. Additionnons les encadrements précédents : $\sum_{k=2}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \ln(k) - \ln(k-1)$, ce qui donne par télescopage $\ln(n+1) - \ln(2) \leqslant u_n - 1 \leqslant \ln(n)$, donc $\ln(n+1) - \ln(2) + 1 \leqslant u_n \leqslant \ln(n) + 1$. Comme $\ln(2) < 1$, on a a fortiori $\ln(n+1) \leqslant u_n$.
4. Puisque $u_n \geqslant \ln(n+1)$, la suite diverge vers $+\infty$. Par ailleurs, $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leqslant \frac{u_n}{\ln(n)} \leqslant \frac{\ln(n)+1}{\ln(n)}$, soit $1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)} \leqslant \frac{u_n}{\ln(n)} \leqslant 1 + \frac{1}{\ln(n)}$. Les deux membres extrêmes de l'encadrement tendent vers 1, le théorème des gendarmes permet donc d'affirmer que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\ln(n)} = 1$, soit $u_n \sim \ln(n)$.
5. D'une part $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1}$, donc $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \leqslant 0$ d'après la question 2, donc la suite (v_n) est décroissante. D'autre part, en reprenant l'encadrement de la question

3, $v_n \geqslant \ln(n+1)-\ln(n) \geqslant 0$, donc la suite (v_n) est minorée. D'après le théorème de convergence monotone, elle converge. On peut donc écrire $v_n = \gamma + o(1)$, soit $u_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

6. (a) Trois choses à vérifier, comme d'habitude, d'abord $S_{2n+1} - S_{2n} = \dfrac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} = \dfrac{1}{2n+1}$, qui tend certainement vers 0. De plus, $S_{2(n+1)} - S_{2n} = S_{2n+2} - S_{2n} = \dfrac{(-1)^{2n+3}}{2n+2} + \dfrac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} = \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+2} > 0$, donc la suite (S_{2n}) est croissante. de même, $S_{2n+3} - S_{2n+1} = \dfrac{1}{2n+3} - \dfrac{1}{2n+2} < 0$, donc (S_{2n+1}) est décroissante. Les deux suites sont donc adjacentes.

   (b) On peut écrire $S_{2n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = u_{2n} - u_n$.

   (c) Utilisons donc : $S_{2n} = u_{2n} - u_n = \ln(2n) + \gamma + o(1) - \ln(n) - \gamma - o(1) = \ln(2n) - \ln(n) + o(1) = \ln(2) + o(1)$, ce qui signifie exactement que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \ln(2)$. Comme (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes, (S_{2n+1}) a également pour limite $\ln(2)$, et d'après un résultat du cours, on peut alors conclure que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \ln(2)$.

   (d) Au vu de l'adjacence des deux sous-suites, on a toujours $S_n \leqslant l \leqslant S_{n+1}$ (ou le contraire, selon la parité de n), donc $|S_n - l| \leqslant |S_{n+1} - S_n|$. Or, $S_{n+1} - S_n = \pm\dfrac{1}{n+1}$, ce dont l'inégalité demandée découle.

Devoir Surveillé n°7

PTSI B Lycée Eiffel

30 mars 2013

Durée : 4H. Calculatrices interdites.

Exercice 1

Dans tout cet exercice, on s'intéresse au sous-ensemble E de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ constitué des matrices vérifiant $a_{11}+a_{12}+a_{13}=a_{21}+a_{22}+a_{23}=a_{31}+a_{32}+a_{33}=a_{11}+a_{21}+a_{31}=a_{12}+a_{22}+a_{32}=a_{13}+a_{23}+a_{33}$. Pour une matrice $A\in E$, on notera $s(A)=a_{11}+a_{12}+a_{13}$.

On note également I la matrice identité d'ordre 3, et $J=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.

1. Montrer que I et J appartiennent à E, et déterminer les valeurs de $s(I)$ et $s(J)$.
2. Montrer que E est un sous-groupe de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R},+)$.
3. Soit K la matrice définie par $K=\begin{pmatrix}x&x&y\\-x&z&x\\z&-1&x\end{pmatrix}$, où x, y et z sont trois réels. Déterminer les valeurs possibles de x, y et z pour que K appartienne à E.
4. Soient A et B deux matrices de E, montrer que $AB\in E$ et que $s(AB)=s(A)s(B)$.
5. (a) Calculer AJ et JA pour une matrice A quelconque de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que A appartient à E si et seulement si $AJ=JA$.
   (c) Vérifier que, si $A\in E$, alors $AJ=s(A)J$.
6. Soit A une matrice inversible de E. En utilisant les résultats de la question précédente, montrer que $A^{-1}\in E$, que $s(A)\neq 0$, et exprimer $s(A^{-1})$ en fonction de $s(A)$.
7. Soit $A\in E$, on note $B=\dfrac{1}{3}s(A)J$ et $C=A-B$. On note également $F=\{M\in E\mid s(M)=0\}$.
   (a) Montrer que B appartient à E.
   (b) Calculer BC et CB.
   (c) En déduire que, $\forall n\geqslant 1$, $(A-B)^n=A^n-B^n$.
   (d) Montrer que toute matrice de E peut s'écrire sous la forme $M+\lambda J$, où $M\in F$.

Exercice 2

Dans cet exercice, on souhaite déterminer toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et dérivables en 0 (aucune hypothèse de continuité ou de dérivabilité n'est faite ailleurs qu'en 0) vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = \dfrac{2f(x)}{1+f(x)^2}$.

1. Déterminer les fonctions constantes solutions du problème.
2. Montrer que la fonction th est solution du problème.
3. Pour une fonction solution, déterminer les valeurs possibles de $f(0)$.
4. Montrer que, si f est une fonctions solution, elle est bornée par -1 et 1.
5. On suppose dans cette question qu'il existe un réel a pour lequel $0 < |f(a)| < 1$.
   (a) Montrer qu'il existe un réel b tel que $f(a) = \text{th}(b)$.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\text{th}\left(\dfrac{b}{2^n}\right) = f\left(\dfrac{a}{2^n}\right)$.
   (c) Montrer que $\dfrac{f(\frac{a}{2^n})}{\frac{a}{2^n}}$ a une limite finie quand n tend vers $+\infty$. En déduire les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$ (en fonction de a et b).
   (d) Conclure que, si $f'(0) \neq 0$, la fonction f est la fonction $x \mapsto \tanh(bx)$.
6. On suppose dans cette question qu'il existe un réel a pour lequel $f(a) = 1$.
   (a) Que peut-on alors dire de la suite $\left(f\left(\dfrac{a}{2^n}\right)\right)$?
   (b) En déduire $f(0)$, puis montrer que $f'(0) = 0$ et en déduire la fonction f.
7. Traiter le cas où $f(a) = 0$ de façon similaire à la question précédente.

Problème

On donne pour ce problème les valeurs numériques suivantes : $\dfrac{1}{\sqrt{e}} \simeq 0,6$; $\dfrac{3}{2e} \simeq 0,55$; $\ln(2) \simeq 0,7$ et $\ln(2)^2 \simeq 0,5$.

I. Une première étude de fonction

On définit la fonction i sur $]0;+\infty[$ par $i(x) = x^2 + x - 2 - x^2\ln(x)$.

1. Calculer la dérivée i' de la fonction i ainsi que sa dérivée seconde i''.
2. Montrer que la fonction i est prolongeable par continuité en 0. La fonction ainsi prolongée est-elle dérivable en 0 ?
3. Étudier la convexité de la fonction i. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de i en son unique point d'inflexion.
4. Montrer que i' s'annule en une unique valeur α. Montrer que $\alpha > 1$.
5. En déduire le tableau de variations de i, et montrer que i s'annule deux fois sur $]0;+\infty[$: en 1 et en une valeur β qu'on ne cherchera pas à déterminer.
6. Étudier la branche parabolique de i en $+\infty$.
7. Tracer une allure soignée de la courbe de i en exploitant tous les calculs effectués dans cette première partie (on donne $\alpha \simeq 2$ et $\beta \simeq 3$).

II. Une deuxième étude de fonction

On définit désormais une fonction f par $f(x) = \dfrac{(x+2)(x-1)}{x\ln(x)}$

1. Déterminer le domaine de définition de f. Montrer qu'on peut la prolonger par continuité en posant $f(1) = 3$.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
3. Calculer $f'(x)$ et montrer que son signe est le même que celui de $g(x) = \ln(x) - \dfrac{x^2+x-2}{x^2+2}$.
4. En admettant que $\ln(x) \underset{x\to 1}{=} x - 1 - \dfrac{1}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$, montrer que f est dérivable en 1 et que $f'(1) = -\dfrac{1}{2}$.
5. Calculer $g'(x)$ et montrer que son signe est le même que celui de $h(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 - 2x + 4$.
6. En constatant que $h(1) = h(-2) = 0$, factoriser h et en déduire le tableau de variations de g.
7. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution autre que 1, que l'on notera λ (mais qu'on ne sait pas calculer). En déduire le tableau de variations de f (on donne $f(\lambda) \simeq 2,9$).

III. Une suite récurrente

On définit désormais une suite récurrente (u_n) en posant $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que $f([2;4]) \subset [2;4]$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $2 \leqslant u_n \leqslant 4$.
2. En exploitant les résultats de la première partie, donner le signe de $f(x) - x$ et en déduire que β est l'unique point fixe de la fonction f.
3. En **admettant** que la fonction f' est croissante sur $[2;4]$, montrer que $\forall x \in [2;4]$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{4}$.
4. Montrer successivement les propriétés suivantes :
   (a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \beta| \leqslant \dfrac{1}{4}|u_n - \beta|$
   (b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \beta| \leqslant \dfrac{2}{4^n}$
   (c) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \beta$.

Corrigé du DS7

Exercice 1

1. En effet, $1+0+0=0+1+0=0+0+1=1$ donc $I\in E$ et $s(I)=1$; pour J les sommes sont toutes identiques et égales à $1+1+1$ donc $s(J)=3$.
2. Il faut avoir $2x+y=z=z+x-1$ (les trois sommes sur les colonnes sont les mêmes, dans le désordre). La condition $z=z+x-1$ impose $x=1$, et l'autre égalité devient alors $z=y+2$. Toutes les matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 1 & y \\ -1 & y+2 & 1 \\ y+2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ sont donc dans l'ensemble E.
3. Si $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 \\ c'_1 & c'_2 & c'_3 \end{pmatrix}$, alors
$AB=\begin{pmatrix} a_1a'_1+a_2b'_1+a_3c'_1 & a_1a'_2+a_2b'_2+a_3c'_2 & a_1a'_3+a_2b'_3+a_3c'_3 \\ b_1a'_1+b_2b'_1+b_3c'_1 & b_1a'_2+b_2b'_2+b_3c'_2 & b_1a'_3+b_2b'_3+b_3c'_3 \\ c_1a'_1+c_2b'_1+c_3c'_1 & c_2a'_2+c_2b'_2+c_3c'_2 & c_3a'_3+c_2b'_3+c_3c'_3 \end{pmatrix}$
La somme des termes de la première ligne correspond exactement au développement de $(a_1+a_2+a_3)(a'_1+b'_1+c'_1)=s(A)s(B)$. Des calculs très similaires prouvent que les cinq autres sommes sont identiques.
4. (a) On calcule $AJ=\begin{pmatrix} a_1+a_2+a_3 & a_1+a_2+a_3 & a_1+a_2+a_3 \\ b_1+b_2+b_3 & b_1+b_2+b_3 & b_1+b_2+b_3 \\ c_1+c_2+c_3 & c_1+c_2+c_3 & c_1+c_2+c_3 \end{pmatrix}$. Similairement, $JA=\begin{pmatrix} a_1+b_1+c_1 & a_2+b_2+c_2 & a_3+b_3+c_3 \\ a_1+b_1+c_1 & a_2+b_2+c_2 & a_3+b_3+c_3 \\ a_1+b_1+c_1 & a_2+b_2+c_2 & a_3+b_3+c_3 \end{pmatrix}$
   (b) Il suffit d'écrire l'égalité des neuf coefficients de AJ et JA pour constater qu'elles se ramènent aux égalités des six sommes du début de l'énoncé.
   (c) Dans le cas où $A\in E$, chacun des coefficients de AJ correspondant à l'une des six sommes égales à $s(A)$, on a $AJ=\begin{pmatrix} s(A) & s(A) & s(A) \\ s(A) & s(A) & s(A) \\ s(A) & s(A) & s(A) \end{pmatrix}=s(A)J$.
5. Si A est inversible, on peut multiplier l'égalité $AJ=s(A)J$ à gauche par A^{-1} pour obtenir $J=s(A)A^{-1}J$. De même, comme $AJ=JA$, on aura $J=JAA^{-1}=AJA^{-1}=s(A)JA^{-1}$. Autrement dit, $A^{-1}J=JA^{-1}=\dfrac{1}{s(A)}J$ (ici, $s(A)$ ne peut être nul sinon au vu des relations obtenues on aurait $J=0$, ce qui n'est manifestement pas le cas). La caractérisation des matrices de E vue précédemment permet alors d'affirmer que $A^{-1}\in E$, et que $s(A^{-1})=\dfrac{1}{s(A)}$.
6. (a) Calculons $JB=\dfrac{1}{3}s(A)J^2$, et $\dfrac{1}{3}BJ=s(A)J^2$. Les deux matrices sont égales, donc $B\in E$.
   (b) On a $BC=BA-B^2=\dfrac{1}{3}s(A)JA-\dfrac{1}{9}s(A)^2J^2=\dfrac{1}{3}s(A)^2J-\dfrac{1}{3}s(A)^2J^2$. Comme $J^2=3J$, on a $BC=\dfrac{1}{3}s(A)^2J-\dfrac{1}{3}s(A)^2J=0$. De même, $CB=0$.
   (c) On vient de voir que B et C commutent, on peut donc écrire, en utilisant la formule du binome de Newton, que $(B+C)^n=\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k}B^kC^{n-k}$. Dans cette somme, seuls le premier et le dernier terme sont non nuls (dans tous les autres, on a un produit BC qui est nul), donc $(B+C)^n=B^n+C^n$. Comme $C=A-B$, cela donne $(B+A-B)^n=B^n+(A-B)^n$, ou encore $(A-B)^n=A^n-B^n$.

(d) On a $A = B + C$, où B est proportionnelle à J. Reste donc à vérifier que $C \in F$. En effet, $CJ = AJ - BJ = s(A)J - \frac{1}{3}s(A)J^2 = s(A)J - s(A)J = 0$, de même pour JA. La matrice C est donc bien dans E, avec $s(C) = 0$. Autrement dit, $C \in F$.

Exercice 2

1. Les constantes solutions sont les réels k vérifiant $k = \frac{2k}{1+k^2}$, soit $k(1+k^2) = 2k$. Soit $k = 0$, soit $1 + k^2 = 2$, donc $k = \pm 1$. Il y a donc trois fonctions constantes solutions.
2. Puisque vous n'êtes pas censés connaitre de formules de trigonométrie hyperbolique compliquées, faisons un calcul brutal : $\frac{2\,\mathrm{th}(x)}{1+\mathrm{th}(x)^2} = \frac{\frac{2e^x - 2e^{-x}}{e^x+e^{-x}}}{1 + \frac{(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}} = \frac{2(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2 + (e^x + e^{-x})^2} = \frac{2(e^{2x} - e^{-2x})}{2e^{2x} + 2e^{-2x}} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}} = \mathrm{th}(2x)$.
3. En remplaçant x par 0, on trouve $f(0) = \frac{2f(0)}{1+f(0)^2}$, ce qui est exactement l'équation résolue à la première question. On a donc $f(0) = 0$, $f(0) = -1$ ou $f(0) = 1$.
4. On peut toujours écrire $f(x) = \frac{2f(\frac{x}{2})}{1+f(\frac{x}{2})^2}$. Si on prouve que $\frac{2t}{1+t^2}$ est toujours compris entre -1 et 1 quelle que soit la valeur du réel t, la fonction f sera donc bornée par -1 et 1. On peut effectuer une étude de fonction pour obtenir l'encadrement, ou être astucieux : $(t+1)^2 \geqslant 0$ implique $2t \geqslant -t^2 - 1$, soit en divisant par $t^2 + 1$ (qui est positif), $\frac{2t}{t^2+1} \geqslant -1$. De même, comme $(t-1)^2 \geqslant 0$, on peut dire que $2t \leqslant 1 + t^2$, et en divisant à nouveau par $t^2 + 1$, on trouve cette fois-ci $\frac{2t}{t^2+1} \leqslant 1$. On a bien prouvé que $\frac{2t}{t^2+1} \in [-1; 1]$, soit en posant $t = f\left(\frac{x}{2}\right)$, $f(x) \in [-1; 1]$.
5. (a) La fonction th effectue une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1; 1[$ (c'est du cours). Par hypothèse, $f(a) \in]-1; 1[$, donc $f(a)$ admet un (unique) antécédent b par la fonction th, ce qui signifie bien que $\mathrm{th}(b) = f(a)$.

   (b) Ca sent la récurrence. La propriété est vraie au rang 0, c'est l'objet de la question précédente. Supposons donc que $\mathrm{th}\left(\frac{b}{2^n}\right) = f\left(\frac{a}{2^n}\right)$. On veut prouver la propriété au rang $n+1$, or on sait que $f\left(\frac{a}{2^n}\right) = \frac{2f(\frac{a}{2^{n+1}})}{1+(f(\frac{a}{2^{n+1}}))^2}$, et comme la fonction th vérifie également l'équation fonctionnelle, $\mathrm{th}\left(\frac{b}{2^n}\right) = \frac{2\,\mathrm{th}(\frac{b}{2^{n+1}})}{1+(\mathrm{th}(\frac{b}{2^{n+1}}))^2}$. On en déduit que $\frac{2f(\frac{a}{2^{n+1}})}{1+(f(\frac{a}{2^{n+1}}))^2} = \frac{2\,\mathrm{th}(\frac{b}{2^{n+1}})}{1+(\mathrm{th}(\frac{b}{2^{n+1}}))^2}$. Or, si $\frac{2t}{1+t^2} = \frac{2u}{1+u^2}$, on aura $2t(1+u^2) = 2u(1+t^2)$, soit $t + tu^2 - u - ut^2 = 0$, ou encore $t - u + ut(u-t) = 0$, ou encore $(t-u)(1-ut) = 0$. Ceci ne peut se produire que si $t = u$ ou $t = \frac{1}{u}$. En posant $t = f\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)$ et $u = \mathrm{th}\left(\frac{b}{2^{n+1}}\right)$, on ne peut pas avoir $t = \frac{1}{u}$ puisque ces deux nombres sont strictement compris entre -1 et 1. La seule possibilité est donc $t = u$, ce qui prouve notre propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.

   (c) On vient de prouver que $\frac{f(\frac{a}{2^n})}{\frac{a}{2^n}} = \frac{\mathrm{th}(\frac{b}{2^n})}{\frac{a}{2^n}} = \frac{b}{a} \times \frac{\mathrm{th}(\frac{b}{2^n})}{\frac{b}{2^n}}$. On reconnait dans le deuxième quotient le taux d'accroissement de la fonction th en 0 (puisque $\mathrm{th}(0) = 0$). Comme

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b}{2^n} = 0$, et $\text{th}'(0) = 1$, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\text{th}(\frac{b}{2^n})}{\frac{b}{2^n}} = 1$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(\frac{a}{2^n})}{\frac{a}{2^n}} = \dfrac{b}{a}$. On en déduit que $f\left(\dfrac{a}{2^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{b}{2^n}$, et en particulier que $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\dfrac{a}{2^n}\right) = 0$. La fonction f étant dérivable, donc continue en 0, un passage à la limite permet d'affirmer que $f(0) = 0$. On reconnait alors dans le quotient $\dfrac{f(\frac{a}{2^n})}{\frac{a}{2^n}}$ le taux d'accroissement de la fonction f en 0. Comme ce quotient a pour limite $\dfrac{b}{a}$, on a $f'(0) = \dfrac{b}{a}$.

(d) Pour tous les réels x pour lesquels $0 < |f(x)| < 1$, on vient de prouver que $f(x) = \text{th}(bx)$, avec $\dfrac{b}{x} = f'(0)$, donc $f(x) = \text{th}(f'(0)x)$. La question était en fait mal posée, puisque le b des questions précédentes dépend du choix de a, alors qu'ici on prouve que $f(x) = \text{th}(bx)$ pour une valeur de b constante (égale à $f'(0)$). Pour montrer que l'égalité $f(x) = \text{th}(bx)$ est vraie sur $\mathbb{R}$, il faut par ailleurs ajouter que $f(x)$ ne peut jamais (sauf en 0) être égal à -1, 0 ou 1 pour que le raisonnement puisse être appliqué. C'est l'objet des dernières questions du problème.

6. (a) La suite est constante égale à 1, démontrons-le par récurrence. C'est vrai pour $n = 0$ par hypothèse, supposons-le vrai au rang n. On a alors $1 = f\left(\dfrac{a}{2^n}\right) = \dfrac{2f(\frac{a}{2^{n+1}})}{1 + (f(\frac{a}{2^{n+1}}))^2}$. Notons $t = f\left(\dfrac{a}{2^{n+1}}\right)$, on a donc $\dfrac{2t}{1+t^2} = 1$, soit $2t = 1 + t^2$ ou encore $t^2 - 2t + 1 = 0$. Cette équation ayant pour unique solution 1, on en déduit que $t = 1$, ce qui prouve notre propriété au rang $n + 1$. La suite est bien constante.

   (b) Par passage à la limite et en exploitant la continuité de f en 0, $f(0) = 1$. On peut alors écrire le taux d'accroissement de f en 0 : $\dfrac{f(x) - 1}{x}$. Or, pour $x = \dfrac{a}{2^n}$, qui a une limite nulle quand n tend vers $+\infty$, ce quotient est nul, et sa limite l'est donc également. Par conséquent, $f'(0) = 0$. La fonction f est alors nécessairement constante égale à 1. En effet, sinon, il existerait un a pour lequel $f(a) \neq 1$. Si $f(a)$ n'est pas égal à 0 ou -1, on est dans le cas de la question 5, et on ne peut pas avoir $f'(0) = 0$, c'est absurde. Si $f(a) = -1$, on démontre exactement de la même façon que ce qu'on vient de faire que $f(0) = -1$ (la suite $\left(f\left(\dfrac{a}{2^n}\right)\right)$ est alors constante égale à -1), pas possible non plus. Enfin, si $f(a) = 0$, on va voir dans la dernière question que $f(0) = 0$. On ne donc pas avoir d'autres valeurs que 1 pour la fonction f. De même, s'il existe un a pour lequel $f(a) = -1$, la fonction est constante égale à -1.

7. C'est exactement pareil. La suite $\left(f\left(\dfrac{a}{2^n}\right)\right)$ est alors nulle : en effet, c'est vrai au rang 0 par hypothèse, et si $\dfrac{2t}{1+t^2} = 0$, alors $t = 0$ (pour le coup c'est immédiat !), ce qui prouve l'hérédité. On en déduit par passage à la limite que $f(0) = 0$, et en regardant le taux d'accroissement que $f'(0) = 0$. Même raisonnement que ci-dessus pour conclure alors que $f = 0$.

Problème

I. Une première étude de fonction

1. La fonction i est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0; +\infty[$, et $i'(x) = 2x + 1 - 2x\ln(x) - x = x + 1 - 2x\ln(x)$; $i''(x) = 1 - 2\ln(x) - 2 = -1 - 2\ln(x)$.
2. Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \ln(x) = 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0} i(x) = 2$. La fonction est donc prolongeable par continuité en posant $i(0) = -2$. De plus, un calcul similaire donne $\lim\limits_{x\to 0} i'(x) = 1$. Le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$ permet alors d'affirmer que i est dérivable en 0, et que $i'(0) = 1$.

3. Il faut étudier le signe de $i''(x) = -1 - 2\ln(x)$. Cette expression s'annule lorsque $\ln(x) = -\frac{1}{2}$, c'est-à-dire pour $x = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$. La fonction i est convexe sur $\left]0; \frac{1}{\sqrt{e}}\right[$, et concave sur $\left]\frac{1}{\sqrt{e}}; +\infty\right[$. L'unique point d'inflexion a pour abscisse $\frac{1}{\sqrt{e}}$. Comme $i\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{1}{e} + \frac{1}{\sqrt{e}} - 2 - \frac{1}{e} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2e} + \frac{1}{\sqrt{e}} - 2$, et $i'\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}} + 1 - \frac{2}{\sqrt{e}} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{e}} + 1$, l'équation de la tangente en ce point a pour équation $y = \left(\frac{2}{\sqrt{e}} + 1\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{e}}\right) + \frac{3}{2e} + \frac{1}{\sqrt{e}} - 2$ (on peut développer si on le souhaite, mais ça ne se simplifie pas vraiment).

4. L'étude du signe de i'' permet d'obtenir le tableau de variations suivant pour i' :

x	0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$		$+\infty$
i'	1	$\nearrow$	$\frac{2}{\sqrt{e}} + 1$	$\searrow$	$-\infty$

En effet, $i'(x) \underset{+\infty}{\sim} -2x\ln(x)$, donc $\lim_{x \to +\infty} i'(x) = -\infty$. La fonction i' est donc strictement positive sur $\left[0; \frac{1}{\sqrt{e}}\right]$, et effectue ensuite une bijection de $\left[\frac{1}{e}; +\infty\right[$ sur $\left]-\infty; \frac{2}{\sqrt{e}} + 1\right]$. En particulier, il existe un unique $\alpha \in \left[\frac{1}{\sqrt{e}}; +\infty\right[$ tel que $i'(\alpha) = 0$. Comme par ailleurs $i'(1) = 2 > 0$, et que i' est strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{\sqrt{e}}; +\infty\right[$, on a bien $\alpha > 1$.

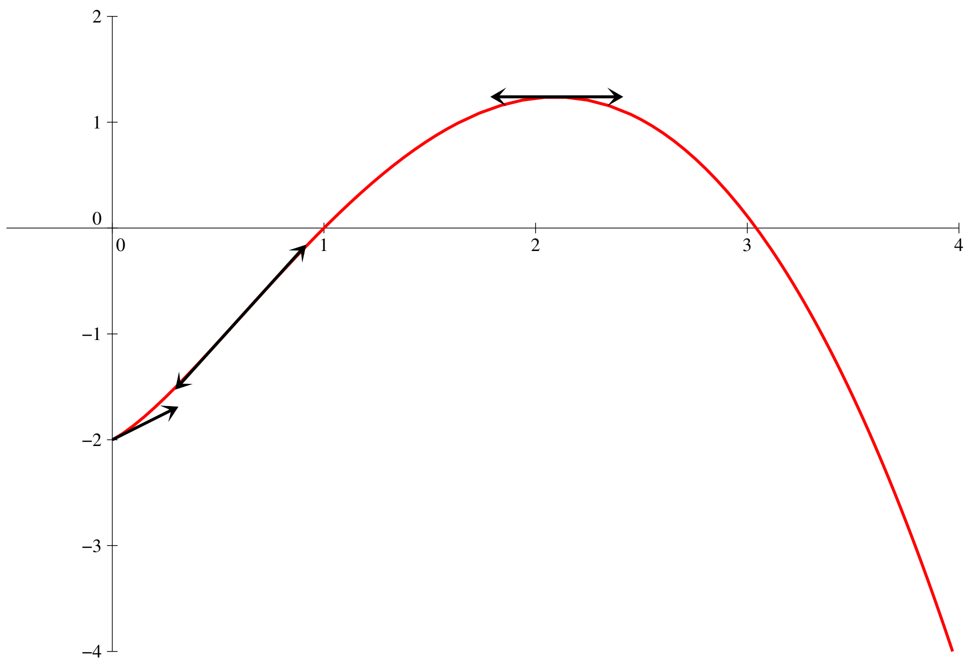
5. On déduit du signe de i' le tableau de variations de i :

x	0		1		α		$+\infty$
i	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$i(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

En effet, $i(0) = 1 + 1 - 2 - 0 = 0$, et comme $i(x) \underset{+\infty}{\sim} -x^2\ln(x)$, $\lim_{x \to +\infty} i(x) = -\infty$. Comme $\alpha > 1$, on en déduit que $i(\alpha) > 0$, et en exploitant la bijectivité de i de $[\alpha; +\infty[$ sur $]-\infty; \alpha]$, on obtient l'existence d'un unique $\beta \in [\alpha; +\infty[$ tel que $i(\beta) = 0$.

6. On a déjà vu à la question précédente que $\lim_{x \to +\infty} i(x) = -\infty$. De plus, $\frac{i(x)}{x} \underset{+\infty}{\sim} -x\ln(x)$, donc $\lim_{x \to +\infty} \frac{i(x)}{x} = -\infty$, et la courbe de i admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Oy).

7. Pour tracer l'allure sur votre copie, puisqu'on donnait $\alpha \simeq 2$, vous pouviez calculer une valeur approchée du maximum : $i(\alpha) \simeq i(2) \simeq 4 - 4\ln(2) \simeq 1,2$. Il fallait bien entendu que la courbe coupe l'axe des abscisses en 1 et en $\beta \simeq 3$, il fallait placer la tangente de pente 1 au point de départ $(0; -2)$ de la courbe, et placer la tangente au point d'inflexion en utilisant que $\frac{1}{\sqrt{e}} \simeq 0,6$; $i\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) \simeq -0,85$ et $i'\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) \simeq 2,2$. Sans oublier enfin la branche parabolique à respecter en $+\infty$, ce qui donne une courbe de ce type :



II. Une deuxième étude de fonction

1. Avec un $\ln(x)$ au dénominateur de la fraction, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$. Mais en utilisant l'équivalent classique $\ln(x) = \ln(1+x-1) \underset{x\to 1}{\sim} x-1$, $f(x) \underset{x\to 1}{\sim} \dfrac{(x+2)(x-1)}{x(x-1)} \sim \dfrac{x+2}{x}$. Comme $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+2}{x} = 3$, on peut en effet prolonger la fonction par continuité en posant $f(1) = 3$.
2. Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0^-$, et $\lim\limits_{x\to 0}(x+2)(x-1) = -2$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$. Par ailleurs, $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{x\ln(x)} \sim \dfrac{x}{\ln(x)}$, et c'est à nouveau la croissance comparée qui permet de conclure : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
3. La fonction f est dérivable partout sauf éventuellement en 1 comme quotient de fonctions usuelles, et $f'(x) = \dfrac{(2x+1)(x\ln(x)) - (\ln(x)+1)(x^2+x-2)}{(x\ln(x))^2} = \dfrac{x^2\ln(x) + 2\ln(x) - x^2 - x + 2}{(x\ln(x))^2} = \dfrac{x^2+2}{(x\ln(x))^2} \times g(x)$. Comme $\dfrac{x^2+2}{(x\ln(x))^2}$ est toujours strictement positif, f' est bien du signe de g.
4. En 1, le dénominateur de $f'(x)$ est simplement équivalent à $(\ln(x))^2$, donc à $(x-1)^2$. Regardons le numérateur, en posant pour simplifier $X = x-1$ (qui tendra donc vers 0) : $x^2\ln(x)+2\ln(x)-x^2-x+2 = (X+1)^2\left(X - \dfrac{1}{2}X^2 + o(X^2)\right) + 2\left(X - \dfrac{1}{2}X^2 + o(X^2)\right) - X(X-3)$. on peut tout développer en ne gardant que les termes qui ne sont pas négligeables par rapport à X^2 : $X - \dfrac{1}{2}X^2 + 2X^2 + 2X - X^2 - X^2 + 3X + o(X^2) = -\dfrac{1}{2}X^2 + o(X^2)$. Quand on divise par le dénominateur qui est équivalent à $(x-1)^2 = X^2$, on trouve bien $f'(x) \underset{1}{\sim} -\dfrac{1}{2}$, donc la fonction est dérivable en 1 (théorème du prolongement $\mathcal{C}^1$), et $f'(1) = -\dfrac{1}{2}$.
5. La fonction g est $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $g'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{(2x+1)(x^2+2) - 2x(x^2+x-2)}{(x^2+2)^2} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2x^3+x^2+4x+2-2x^3-2x^2+4x}{(x^2+2)^2} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x^2-8x-2}{(x^2+2)^2} = \dfrac{(x^2+2)^2 + x(x^2-8x-2)}{x(x^2+2)^2} = \dfrac{x^4+4x^2+4-x^3-8x^2-2x}{x(x^2+2)^2} = \dfrac{h(x)}{x(x^2+2)^2}$.
Le dénominateur de cette fraction étant toujours positif sur $]0;+\infty[$, g' est bien du signe de h.

6. En effet, $h(1) = 1+1-4-2+4 = 0$ et $h(-2) = 16-8-4\times 8+4+4 = 0$. On peut donc factoriser h sous la forme $h(x) = (x-1)(x+2)(ax^2+bx+c) = (x^2+x-2)(ax^2+bx+c)$. On doit donc avoir, en développant, $ax^4+(a+b)x^3+(c+b-2a)x^2+(c-2b)x-2c = x^4+x^3-4x^2-2x+4$. Par identification, on obtient les conditions $a = 1$; $a+b = 1$; $c+b-2a = -2$; $c-2b = -2$ et $-2c = 4$, ce qui donne la solution unique $a = 1$; $b = 0$ et $c = -2$. Autrement dit, $h(x) = (x-1)(x+2)(x^2-2)$. On peut alors dresser le tableau de signe de h sur $]0;+\infty[$, et le tableau de variations de g sur ce même intervalle :

x	0		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$h(x)$	4	$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$g(\sqrt{2})$	$\nearrow$	$+\infty$

Pour remplir ce tableau, on a calculé $g(1) = 0 - \dfrac{0}{3} = 0$; constaté que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+x-2}{x^2+2} = -1$, donc $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$; et que $\dfrac{x^2+x-2}{x^2+2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.

7. La lecture du tableau de variations (on invoquera à nouveau le théorème de la bijection pour être très rigoureux) permet en effet de constater que g s'annule une deuxième fois sur l'intervalle $[\sqrt{2};+\infty[$. Comme g est négative sur $]0;\lambda]$ et positive sur $[\lambda;+\infty[$, on a le tableau de variations suivant pour f :

x	0		λ		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	$\simeq 2,9$	$\nearrow$	$+\infty$

III. Une suite récurrente

1. D'après la dernière question de la partie précédente, f est, selon la valeur de λ, soit croissante, soit décroissante puis croissante sur $[2;4]$. dans les deux cas, toutes les valeurs qu'elle prend sont plus grandes que $f(\lambda)$, donc supérieures à 2 (en fait, on peut déterminer la position de λ par rapport à 2 en calculant $g(2) = \ln(2) - \dfrac{2}{3} > 0$; on a donc $\lambda < 2$, et f est croissante sur $[2;4]$). De plus, $f(2) = \dfrac{4}{2\ln(2)} = \dfrac{2}{\ln(2)} < 4$ car $\ln(2) > \dfrac{1}{2}$; et $f(4) = \dfrac{18}{4\ln(4)} = \dfrac{9}{4\ln(2)} \simeq \dfrac{9}{2,8} < 4$. On en déduit que $f([2;4]) \subset [2;4]$. On peut alors prouver par récurrence que $u_n \in [2;4]$. C'est certainement vrai pour $u_0 = 2$, et si on le suppose vrai pour u_n, alors $f(u_n) = u_{n+1} \in [2;4]$ au vu du calcul précédent.

2. On constate que $f(x) - x = \dfrac{i(x)}{x\ln(x)}$. On peut alors dresser le tableau de signes suivant :

x	0		1		β		$+\infty$
$i(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$x\ln(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)-x$		$+$	2	$+$	0	$-$	

L'équation $f(x) = x$ admet donc pour unique solution $x = \beta$.

3. Il suffit donc de calculer $f'(2) = \dfrac{6\ln 2 - 4}{(2\ln(2))^2} \simeq \dfrac{0,2}{(2\ln(2))^2} > 0$ (peut importe la valeur exacte, puisque f' est croissante sur $[2;4]$, elle atteindra sa plus grande valeur en 4) et $f'(4) =$

$\dfrac{36\ln(2)-18}{(4\ln(4))^2} = \dfrac{18(2\ln(2)-1)}{64(\ln(2))^2} = \dfrac{9(2\ln(2)-1)}{32(\ln(2))^2} \simeq \dfrac{3,6}{16} < \dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4}$. On a donc, $\forall x \in [2;4]$, $0 \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{1}{4}$, et a fortiori $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{4}$.

4. (a) Tous les élémentes permettant d'apppliquer l'IAF sont réunis : la valeur absolue de la dérivée est majorée sur $[2;4]$, $u_n \in [2;4]$, et $\beta \in [2.4]$ au vu de la valeur approchée donnée dans l'énoncé. De plus, $f(\beta) = \beta$ et $f(u_n) = u_{n+1}$, ce qui permet bien d'obtenir $|u_{n+1} - \beta| \leqslant \dfrac{1}{4}|u_n - \beta|$.

   (b) C'est la récurrence hyper classique. Pour $n = 0$, $|u_0 - \beta| = |2 - \beta| < 2$, donc la propriété est vraie au rang 0. En supposant l'inégalité vraie au rang n, on applique successivement le résultat donné par l'IAF et l'hypothèse de récurrence pour obtenir $|u_{n+1} - \beta| \leqslant \dfrac{1}{4}|u_n - \beta| \leqslant \dfrac{1}{4} \times \dfrac{2}{4^n} = \dfrac{2}{4^{n+1}}$, ce qui achève la récurrence.

   (c) Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{4^n}$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \beta| = 0$, c'est-à-dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \beta$.

Devoir Surveillé n°8

PTSI B Lycée Eiffel

19 avril 2013

Durée : 4H. Calculatrices interdites.

Exercice 1

Pour tout couple d'entiers naturels (a, b), on note $I_{a,b}$ l'intégrale $I_{a,b} = \displaystyle\int_0^1 t^a(1-t)^b\ dt$.

1. Comparer les valeurs de $I_{a,b}$ et $I_{b,a}$.
2. Calculer $I_{a,0}$ pour tout entier naturel a.
3. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer une relation entre $I_{a,b}$ et $I_{a+1,b-1}$.
4. Déduire des deux questions précédentes une expression de $I_{a,b}$ à l'aide de factorielles.
5. Calculer à l'aide d'un changement de variable intelligent (c'est-à-dire un tout petit peu plus malin que $x = \sin(t)$ ou $x = \cos(t)$) et des résultats précédents $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5(t)\cos^7(t)\ dt$.
6. On pose désormais, pour tout entier naturel k, $F_n(k) = \displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n u^k\ du$. La valeur de k est fixée pour tous les calculs qui suivent (à l'exception de la dernière question), seul l'entier n varie.
   (a) Montrer que $F_n(k) = n^{k+1} I_{k,n}$.
   (b) En **admettant** que la suite $\left(1 - \dfrac{k}{n}\right)^n$ est croissante à partir du rang k, montrer que $(F_n(k))$ est également croissante à partir d'un certain rang.
   (c) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n$, en déduire que $F_n(k) \leqslant \displaystyle\int_0^n e^{-u}u^k\ du$.
   (d) Prouver l'existence d'un réel A tel que, $\forall u \geqslant A$, $e^{-u} \leqslant \dfrac{1}{u^{k+2}}$.
   En déduire que $F_n(k) \leqslant \displaystyle\int_0^A e^{-u}u^k\ du + \frac{1}{A}$.
   (e) Démontrer enfin la convergence de la suite $(F_n(k))$ vers une valeur que l'on notera désormais $F(k)$.
   (f) Que vaut $F_n(1)$? En déduire la valeur de $F(1)$.
   (g) Montrer que, $\forall k \geqslant 0$, $F(k+1) = (k+1)F(k)$. En déduire la valeur de $F(k)$.

Exercice 2

On définit dans cet exercice une fonction f par $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} g(t)\ dt$, où $g(t) = \dfrac{1}{t + \sin(t)}$.

1. En étudiant les variations de $t \mapsto t + \sin(t)$, déterminer le signe de $t + \sin(t)$, et en déduire le domaine de définition de g.
2. Déterminer rigoureusement le domaine de définition de la fonction f.
3. Calculer f', et dresser le tableau de variations de la fonction f.
4. Expliquer pourquoi, si h est une fonction impaire, $\displaystyle\int_{-a}^{-b} h(t)\ dt = \int_a^b h(t)\ dt$. En déduire la parité de la fonction f.
5. On cherche à déterminer la limite éventuelle de f en $+\infty$.
   (a) Montrer que, $\forall x > 0$, $\left| f(x) - \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t}\ dt \right| \leqslant \int_x^{2x} \frac{1}{t(t + \sin(t))}\ dt.$
   (b) Justifier l'existence d'un réel A tel que, $\forall t \geqslant A$, $t + \sin(t) \geqslant \dfrac{t}{2}$.
   (c) Montrer que f admet une limite finie en $+\infty$, que l'on déterminera.
6. On cherche désormais à déterminer la limite éventuelle de f en 0.
   (a) Déterminer un équivalent simple de $g(t)$ en 0.
   (b) On pose $u(t) = g(t) - \dfrac{1}{2t}$. Montrer que g se prolonge par continuité en 0.
   (c) Justifier que u est bornée sur l'intervalle $[-1; 1]$, et en déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{x\to 0} \int_x^{2x} u(t)\ dt$.
   (d) Déterminer la limite de f en 0, peut-on prolonger f en une fonction dérivable en 0 ?
7. Tracer une allure possible de la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$.

Problème : exemples de pseudo-inverses d'applications linéaires.

Dans tout le problème, on dit qu'une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est pseudo-inversible s'il existe une application linéaire $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vérifiant les conditions suivantes :

- $g \circ f \circ g = g$
- $f \circ g \circ f = f$
- $f \circ g = g \circ f$

L'application g est alors appelée pseudo-inverse de f.
Les trois parties du problème sont largement indépendantes, on peut tout à fait se lancer dans les calculs des deux dernières parties sans avoir traité la première.

I. Quelques propriétés générales

1. Montrer qu'une application bijective f est pseudo-inversible et que f^{-1} est un pseudo-inverse de f.
2. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ et A sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Montrer que f est pseudo-inversible si et seulement s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA$; $ABA = A$ et $BAB = B$. La matrice B sera alors appelée pseudo-inverse de la matrice A.
3. On souhaite montrer l'unicité du pseudo-inverse d'une matrice (et donc de celui d'un endomorphisme). Supposons donc qu'il existe deux matrices B_1 et B_2 vérifiant les relations de la question précédente, en calculant AB_1AB_2 de deux façons différentes, montrer que $B_1A = AB_2$, puis que $B_1 = B_2$.
4. Une symétrie est-elle toujours pseudo-inversible (si oui, donner son pseudo-inverse) ? Même question pour un projecteur.
5. Montrer que, si f est pseudo-inversible alors, pour tout entier naturel k, f^k l'est également.

II. Un exemple concret.

On considère dans cette partie l'application $f : (x, y, z) \mapsto (x + y, 2x + 3y + z, 3x + 5y + 2z)$.

1. Donner la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Vérifier que $f^3 - 6f^2 + 4f = 0$. L'application f est-elle bijective ?
3. Déterminer le noyau et l'image de f, et donner une base de chaque.
4. On note $\mathcal{B}$ la famille constituée des trois vecteurs $e_1 = (0, 1, 2)$; $e_2 = (1, 2, 3)$ et $e_3 = (1, -1, 1)$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Déterminer la matrice de passage de la base canonique vers la base $\mathcal{B}$, et calculer son inverse P^{-1}.
6. Montrer que (e_1, e_2) est une base de $\mathrm{Im}(f)$, et vérifier que $\mathrm{Im}(f)$ et $\ker(f)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
7. Déterminer la matrice A' de f dans la base $\mathcal{B}$.
8. Vous avez du trouver à la question précédente $A' = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On note pour cette question $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. Vérifier que M est inversible et donner son inverse $N = \begin{pmatrix} \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta \end{pmatrix}$.
9. Vérifier que la matrice $B' = \begin{pmatrix} \varepsilon & \zeta & 0 \\ \eta & \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est le pseudo-inverse de la matrice A'.
10. En déduire le pseudo-inverse B de la matrice A en fonction de B' et de P, puis explicitement.
11. On note p l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est BA. De quelle type d'application s'agit-il ? Déterminer ses éléments caractéristiques (noyau, image). On pourra commencer par regarder à quoi ressemble la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$.

III. Un second exemple.

Cette partie (et les notations utilisées) sont indépendantes de la précédente. On considère désormais la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrice A dans la base canonique, et $C(A)$ l'ensemble des matrices qui commutent avec A.

1. Montrer que $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Déterminer explicitement $C(A)$, et en donner un base.
3. On suppose désormais que la matrice A admet un pseudo-inverse B. Montrer qu'il existe trois réels (a, b, c) tels que $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.
4. En exploitant l'égalité $B = BAB$, montrer que $a = 0$.
5. En continuant à exploiter les relations entre A et B, aboutir à une contradiction, et en déduire que A n'a pas de pseudo-inverse.
6. Déterminer $\ker(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$. Ces deux sous-espaces sont-ils supplémentaires ? Émettre une conjecture sur une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme admette un pseudo-inverse.

Corrigé du DS8

Exercice 1

1. En effectuant le changement de variable $u = 1 - t$, on aura $t = 1 - u$ donc $dt = -du$, et $I_{a,b} = \int_1^0 -(1-u)^a u^b \, du = \int_0^1 u^b (1-u)^a \, du = I_{b,a}$. Les deux intégrales sont donc égales.
2. Calculons : $I_{a,0} = \int_0^1 t^a \, dt = \left[\dfrac{t^{a+1}}{a+1}\right]_0^1 = \dfrac{1}{a+1}$.
3. On va effectuer une IPP en posant $u'(t) = t^a$ et $v(t) = (1-t)^b$, soit $u(t) = \dfrac{t^{a+1}}{a+1}$ et $v'(t) = -b(1-t)^{b-1}$, ce qui donne $I_{a,b} = \left[\dfrac{t^{a+1}}{a+1}(1-t)^b\right]_0^1 + \int_0^1 \dfrac{t^{a+1}}{a+1} b(1-t)^{b-1} \, dt = \dfrac{b}{a+1} I_{a+1,b-1}$ (le crochet étant nul en 0 comme en 1 si $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 1$).
4. Successivement, $I_{a,b} = \dfrac{b}{a+1} I_{a+1,b-1} = \dfrac{b(b-1)}{(a+1)(a+2)} I_{a+2,b-2} = \dots$ $= \dfrac{b(b-1)(b-2)\dots 1}{(a+1)(a+2)\dots(a+b)} I_{a+b,0} = \dfrac{b!}{(a+1)(a+2)\dots(a+b)(a+b+1)} = \dfrac{a!b!}{(a+b+1)!}$. Les plus courageux écriront une récurrence propre pour la première partie du calcul.
5. Posons donc, intelligemment, $x = \sin^2(t)$ (qui est bien une bijection sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$). On peut alors écrire $dx = 2\sin(t)\cos(t) \, dt$, donc $\sin^5(t)\cos^7(t) \, dt = \sin^4(t)\cos^6(t)\sin(t)\cos(t) \, dt = x^2(1-x)^3 \dfrac{dx}{2}$. Finalement, $I = \dfrac{1}{2}\int_0^1 x^2(1-x)^3 \, dx = \dfrac{1}{2} I_{2,3} = \dfrac{1}{2}\dfrac{2! \times 3!}{6!} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{60} = \dfrac{1}{120}$.
6. (a) Faisons le changement de variable $t = \dfrac{u}{n}$, on aura bien sûr $dt = \dfrac{du}{n}$, et $F_n(k) = \int_0^1 (1-t)^n (nt)^k \times n \, dt = n^{k+1} \int_0^1 (1-t)^n t^k \, dt = n^{k+1} I_{n,k}$.

   (b) À partir du rang k, on aura donc certainement $F_n(k) \leqslant \int_0^n \left(1 - \dfrac{u}{n+1}\right)^{n+1} u^k \, du$. Mais attention, les bornes dans $F_{n+1}(k)$ sont 0 et $n+1$, et pas 0 et n, il faut donc ajouter que les fonctions intégrées sont positives sur $[0;1]$ pour en déduire que $\int_0^n \left(1 - \dfrac{u}{n+1}\right)^{n+1} u^k \, du \leqslant F_{n+1}(k)$. La suite $(F_n(k))$ est donc croissante à partir du rang k.

   (c) Passons sous forme exponentielle : $\left(1 - \dfrac{k}{n}\right)^n = e^{n \ln(1 - \frac{k}{n})}$. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{k}{n} = 0$, on peut dire que $\ln\left(1 - \dfrac{k}{n}\right) \sim -\dfrac{k}{n}$, donc on déduit facilement la limite demandée, qui vaut e^{-k}. La suite étant croissante à partir du rang k, c'est-à-dire à partir du rang 1 ici puisqu'on va appliquer le résultat à $u \in [0;1]$ (on se demande bien qui a eu l'idée de mettre un k à cet endroit-là), on peut dire que $\left(1 - \dfrac{u}{n}\right)^n \leqslant e^{-u}$, dont découle la majoration par intégration de l'inégalité.

   (d) Il suffit de dire que $\lim\limits_{u \to +\infty} e^{-u} u^{k+2} = 0$ (c'est de la croissance comparée). Il existe donc certainement un A à partir duquel $e^{-u} u^{k+2} \leqslant 1$ (on applique la définition de la limite avec $\varepsilon = 1$), d'où l'inégalité demandée. On peut alors écrire, au moins lorsque $n \geqslant A$, que $F_n(k) \leqslant \int_0^n e^{-u} u^k \, du \leqslant \int_0^A e^{-u} u^k \, du + \int_A^n e^{-u} u^k \, du$. Cette deuxième intégrale peut être majorée, au vu de ce qui précède, par $\int_A^n \dfrac{1}{u^2} \, du = \left[-\dfrac{1}{u}\right]_A^n = -\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{A} \leqslant \dfrac{1}{A}$. La majoration demandée en découle.

(e) On a vu plus haut que la suite était croissante à partir d'un certain rang, la question précédente prouve qu'elle est majorée (le membre de droite ne dépend plus de n), d'après le théorème de convergence monotone, elle converge.

(f) Reprenons la première relation démontrée : $F_n(1) = n^2 I_{1,n} = n^2 \dfrac{n!}{(n+2)!} = \dfrac{n^2}{(n+1)(n+2)} \sim \dfrac{n^2}{n^2}$, donc $F(n) = \lim\limits_{n\to+\infty} F_n(k) = 1$.

(g) Commençons par constater que $F_n(k+1) = n^{k+2} I_{k+1,n} = n^{k+2} \dfrac{k+1}{n+1} I_{k,n+1}$ en utilisant la relation $I_{a,b} = \dfrac{b}{a+1} I_{a+1,b-1}$ avec $a = k$ et $b = n+1$. Autrement dit, $F_n(k+1) = \dfrac{n(k+1)}{n+1} n^{k+1} I_{k,n+1} = (k+1)\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{k+2} (n+1)^{k+1} I_{k,n+1} = (k+1)\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{k+2} F_{n+1}(k)$. Quand on fait tendre n vers $+\infty$, k étant constant, $\lim \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{k+2} = 1$, donc on obtient bien $F(k+1) = (k+1)F(k)$. Par une récurrence triviale, on prouve alors que $F(k) = k!$. C'est vrai pour $k = 1$ d'après le calcul de la question précédente, et en le supposant vrai au rang k, alors $F(k+1) = (k+1)k! = (k+1)!$.

Exercice 2

1. La fonction $t \mapsto t + \sin(t)$ a pour dérivée $1 + \cos(t)$, qui est positive sur $\mathbb{R}$ (strictement sauf pour les réels vérifiant $\cos(t) = -1$, qui sont en nombre fini sur tout intervalle borné), donc elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme par ailleurs elle s'annule évidemment en 0, elle sera strictement négative sur $\mathbb{R}^{-*}$ et strictement positive sur $\mathbb{R}^{+*}$. En particulier, $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}^*$.

2. La fonction f est définie en x si, $\forall t \in [x, 2x]$, $t \neq 0$. C'est le cas si $x > 0$ (dans ce cas, $[x; 2x] \subset \mathbb{R}^{+*}$) et si $x > 0$. Pour $x = 0$, on peut convenir que $f(0)$ ou ne rien convenir du tout, on dira donc que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$.

3. On devrait commencer à avoir l'habitude de ce genre de calcul de dérivée. En notant G une primitive quelconque de g, on a $f(x) = G(2x) - G(x)$, donc $f'(x) = 2g'(2x) - g(x) = \dfrac{2}{2x+\sin(2x)} - \dfrac{1}{x+\sin(x)}$. Mettons donc au même dénominateur : $f'(x) = \dfrac{2(x+\sin(x)) - (2x+\sin(2x))}{(2x+\sin(2x))(x+\sin(x))} = \dfrac{2\sin(x) - \sin(2x)}{(2x+\sin(2x))(x+\sin(x))}$. D'après l'étude réalisée dans la première question, les deux facteurs du dénominateur sont soit tous les deux négatifs (si $x < 0$), soit tous les deux positifs, donc leur produit est positif. La dérivée est donc du signe de $2\sin(x) - \sin(2x) = 2\sin(x) - 2\sin(x)\cos(x) = 2\sin(x)(1-\cos(x))$. Comme $1 - \cos(x) \geqslant 0$, $f'(x)$ est du signe de $\sin(x)$. La fonction f est donc croissante sur chaque intervalle de la forme $[2k\pi; (2k+1)\pi]$ et décroissante sur chaque intervalle de la forme $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$, pour $k \in \mathbb{Z}$.

4. On peut faire un petit dessin, ou utiliser de façon plus rigoureuse le changement de variable $x = -t$, qui donne $\displaystyle\int_{-a}^{-b} h(t)\, dt = \int_a^b -h(-x)\, dx = \int_a^b h(x)\, dx$. Ici, la fonction g est impaire, donc $f(-x) = \displaystyle\int_{-x}^{-2x} g(t)\, dt = \int_x^{2x} g(t)\, dt = f(x)$. La fonction f est paire (ce qui est cohérent avec les variations obtenues.

5. (a) Un bête calcul : $\left| f(x) - \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t}\, dt \right| = \left| \int_x^{2x} \frac{1}{t+\sin(t)} - \frac{1}{t}\, dt \right| = \leqslant \int_x^{2x} \frac{|t - (t+\sin(t))|}{t(t+\sin(t))} \leqslant \int_x^{2x} \frac{1}{t(t+\sin(t))}\, dt$ puisque $|\sin(t)| \leqslant 1$.

(b) Puisque $-1 \leqslant \sin(t) \leqslant 1$, $t + \sin(t) \geqslant t - 1$. Il suffit de prendre $t \geqslant 2$ pour avoir $t - 1 \geqslant t - \dfrac{t}{2} = \dfrac{t}{2}$.

(c) En reprenant la majoration précédente, on aura $\forall t \geqslant A$, $\left| f(x) - \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t}\ dt \right| \leqslant \displaystyle\int_x^{2x} \frac{2}{t}^2\ dt = \left[-\frac{2}{t}\right]_x^{2x} = -\frac{2}{2x} + \frac{2}{x}$. Cette quantité tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. D'un autre côté, $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t}\ dt = [\ln(t)]_x^{2x} = \ln(2x) - \ln(x) = \ln(2)$. La combinaison des deux résultats permet d'affirmer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ln(2)$.

6. (a) Tout le monde sait que $\sin(t) \underset{0}{\sim} t$, donc $t + \sin(t) \underset{t\to 0}{=} t + t + o(t) \sim 2t$, et $g(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{2t}$.

(b) On calcule $g(t) - \dfrac{1}{2t} = \dfrac{\sin(t) - t}{2t(t + \sin(t))} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{-\frac{t^3}{3}}{2t(2t)} \sim -\dfrac{t}{12}$. La limite de cette différence est donc nulle, on peut prolonger u par continuité en posant $u(0) = 0$.

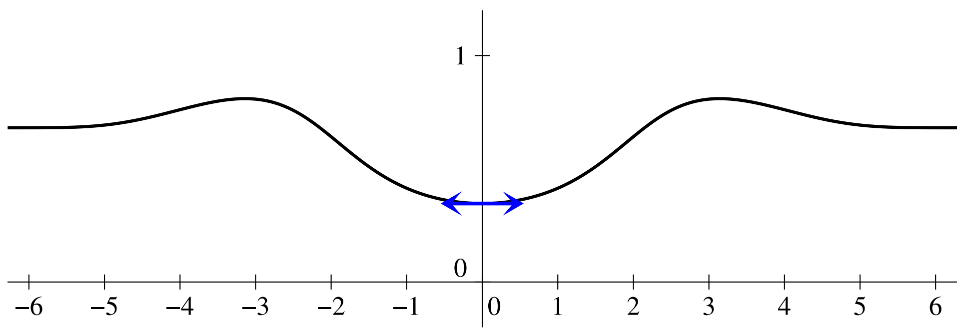
(c) La fonction prolongée est continue sur $[-1;1]$, elle y est donc bornée d'après le théorème du maximum. Notons M le maximum de $|u|$ sur $[-1;1]$, alors $\forall x \in \left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right]$, $\left|\displaystyle\int_x^{2x} u(t)\ dt\right| \leqslant \displaystyle\int_x^{2x} |u(t)|\ dt \leqslant \int_x^{2x} M\ dt = Mx$. On en déduit immédiatement que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \int_x^{2x} u(t)\ dt = 0$.

(d) Il suffit d'écrire que $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} u(t) + \frac{1}{2t}\ dt \underset{x\to 0}{=} o(1) + \left[\frac{\ln|t|}{2}\right]_x^{2x} = o(1) + \frac{1}{2}(\ln(|2x|) - \ln(|x|)) = \frac{1}{2}\ln(2) + o(1)$. Autrement dit, $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{\ln(2)}{2}$. Pour savoir si le prolongement est dérivable, tentons d'appliquer le théorème du prolongement $\mathcal{C}^1$: $f'(x) = \dfrac{2\sin(x)(1-\cos(x))}{(2x + \sin(2x))(x + \sin(x))} \underset{0}{\sim} \dfrac{2x \times \frac{x^2}{2}}{4x \times 2x} \sim \dfrac{x}{6}$. La dérivée a pour limite 0 en 0, la fonction f est donc dérivable en 0 et y admet une tangente horizontale (notons que, si elle est dérivable, elle a nécessairement une tangente horizontale en 0 en tant que fonction paire).

7. On ne connait à peu près que ça de la fonction :

x	-2π		$-\pi$		0		π		2π
f	$f(-2\pi)$	$\nearrow$	$f(-\pi)$	$\searrow$	$\frac{\ln(2)}{2}$	$\nearrow$	$f(\pi)$	$\searrow$	$f(2\pi)$

On est bien évidemment complètement incapables de calculer les valeurs en π et en 2π (de l'autre côté, par parité, les valeurs sont les mêmes), on fait donc ce qu'on peut. La courbe ressemble à ça :



Problème : exemples de pseudo-inverses d'applications linéaires.

I. Quelques propriétés générales

1. Il suffit de constater que $f^{-1} \circ f \circ f^{-1} = \mathrm{id} \circ f^{-1} = f^{-1}$ et $f \circ f^{-1} \circ f = \mathrm{id} \circ f = f$. De plus, $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}$, les trois propriétés sont donc vérifiées, f^{-1} est un pseudo-inverse de f.
2. Si f est pseudo-inversible, en notant B la matrice de son pseudo-inverse dans la base canonique, la matrice de $f \circ g \circ f$ sera alors ABA, on aura donc $ABA = A$. De même, $BAB = B$ et le fait que f et g commutent se traduit par $AB = BA$. Réciproquement, si une telle matrice B existe, en notant g l'application linéaire de matrice B dans la base canonique, on passera de même des relations sur les matrices à celles sur les endomorphismes.
3. Calculons : $(AB_1A)B_2 = AB_2$ puisque $AB_1A = A$, mais puisque A commute avec B_1 et B_2, on a aussi $AB_1AB_2 = B_1(AB_2A) = B_1A$. On en déduit en effet que $B_1A = AB_2$. On peut en déduire que $B_1 = B_1AB_1 = B_1(B_1A) = B_1AB_2$. De même, $B_2 = B_2AB_2 = (AB_2)B_2 = B_1AB_2$. Finalement, $B_1 = B_2$. Le pseudo-inverse est donc unique.
4. Une symétrie s est bijective (de réciproque s, puisque $s \circ s = \mathrm{id}$) donc la première question permet d'affirmer que s est pseudo-inversible, et qu'elle est son propre pseudo-inverse. Un projecteur p est en fait également son propre pseudo-inverse : $p \circ p \circ p = p \circ p = p$ (ce qui prouve simultanément les deux premières conditions !), et p commute évidemment avec lui-même.
5. On peut subtilement conjecturer que, si g est le peudo-inverse de f, g^k sera celui de f^k. En effet, puisque f et g commutent, $g^k \circ f^k \circ g^k = (g \circ f \circ g)^k = g^k$, de même dans l'autre sens, et bien entendu g^k et f^k commutent. Notons que le résultat reste vrai pour $k = 0$, où on se rend compte que id est son propre pseudo-inverse.

II. Un exemple concret.

1. On écrit simplement $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.
2. Travaillons plus simplement avec les matrices : $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 11 & 16 & 5 \\ 19 & 28 & 9 \end{pmatrix}$ puis $A^3 = \begin{pmatrix} 14 & 20 & 6 \\ 58 & 84 & 26 \\ 102 & 148 & 46 \end{pmatrix}$.
   On vérifie péniblement que $A^3 - 6A^2 + 4A = 0$, ce qui se traduit bien par $f^3 - 6f^2 + 4f = 0$. On peut factoriser pour obtenir $f \circ (f^2 - 6f + 4\,\mathrm{id}) = 0$. Si f était bijective, on pourrait alors composer par f^{-1} pour obtenir $f^2 - 6f + 4\,\mathrm{id} = 0$, ce qui n'est pas vrai puisque $A^2 - 6A + 4I = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. L'application f n'est donc pas bijective.
3. Pour déterminer la noyau, il faut résoudre $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ 3x + 5y + 2z = 0 \end{cases}$. Une fois n'est pas coutume, une petite substitution est très efficace, la première équation donne $y = -x$, la deuxième $z = -2x - 3y = x$, et la dernière, sans grande surprise puisque l'application n'est pas bijective, s'annule. On en déduit que $\ker(f) = \{(x, -x, x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1, -1, 1))$. Pour l'image, on calcule les images des trois vecteurs de la base canonique :
   $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((1,2,3); (1,3,5); (0,1,2)) = \mathrm{Vect}((1,2,3); (0,1,2))$ puisque $(1,3,5) = (1,2,3) + (0,1,2)$.
4. Vérifions directement que le système $(x, y, z) = a(0,1,2) + b(1,2,3) + c(1,-1,1)$ a une unique solution. Écrivons explicitement le système : $\begin{cases} b + c = x \\ a + 2b - c = y \\ 2a + 3b + c = z \end{cases}$. La combinaison

$L_3 - 2L_2$ donne $-b+3c = z-2y$, donc en ajoutant L_1, $4c = z-2y+x$, soit $c = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}z$. On en déduit $b = x - c = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}z$ puis $a = y + c - 2b = -\frac{5}{4}x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{4}z$. La solution est unique, la famille est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

5. Notons donc P la matrice de passage, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Il est inutile de faire quoi que ce soit pour calculer la matrice inverse, nous l'avons déjà obtenue en résolvant le système de la question précédente ! La matrice P^{-1} est celle permettant de faire le passage de $\mathcal{B}$ vers la base canonique, autrement celle dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de la base canonique dans $\mathcal{B}$. Il suffit de remplacer dans les formules obtenus ci-dessus pour trouver $P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.
6. La famille (e_1, e_2) est certainement une base de $\operatorname{Im}(f)$, c'est celle que nous avions obtenue tout à l'heure. La supplémentarité de $\ker(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ découle du fait que la famille $\mathcal{B}$ est une base : tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ peut s'écrire de façon unique comme somme d'un vecteur du noyau et d'un vecteur de l'image de f.
7. Deux possibilités : soit on calcule $P^{-1}AP$, qui nous donnera la matrice de f dans $\mathcal{B}$; soit on calcule directement $f(0,1,2)$ et $f(1,2,3)$ et on exprime ces deux images dans la base $\mathcal{B}$ (le troisième vecteur a une image nulle puisqu'il est dans le noyau). Ici, ça va aussi vite : $f(0,1,2) = (1,5,9) = 3\times(0,1,2)+(1,2,3)$; et $f(1,2,3) = (3,11,19) = 5\times(0,1,2)+3\times(1,2,3)$. Conclusion : $A' = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
8. Tout va bien, on a trouvé une matrice conforme à ce que dit l'énoncé. Posons donc $M = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Utilisons nos vastes connaissances sur les matrices d'ordre 2 : $\det(M) = 4$ donc la matrice M est inversible et $N = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.
9. C'est un calcul assez bêta, on constate facilement que $B'A' = A'B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, les trois conditions pour le pseudo-inverse sont alors facilement vérifiées.
10. On peut conjecturer que $B = PB'P^{-1}$. Vérifions-le : on aura alors $BA = PB'P^{-1}PA'P^{-1} = PB'A'P^{-1}$, et de même $AB = PA'B'P^{-1}$. Puisque A' et B' commutent, ce sera aussi le cas de A et B. De même, $BAB = PB'A'B'P^{-1} = PB'P^{-1} = B$ et $ABA = A$. Le pseudo-inverse de A est donc bien la matrice B. On calcule sans enthousiasme $PB' = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, puis $B = PB'P^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 7 & 4 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -9 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.
11. Dans la base $\mathcal{B}$, la matrice de p est $P^{-1}BAP = P^{-1}BPP^{-1}AP = B'A'$ qu'on a calculée plus haut. On reconnait une matrice de projection, plus précisément la matrice de la projection sur $\operatorname{Im}(f)$ parallèlement à $\ker(f)$. Du coup, aucun calcul supplémentaire à faire. Si on y tient on peut donner la matrice de p dans la base canonique : $BA = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

III. Un second exemple.

1. C'est quasiment immédiat : la matrice nulle commute avec tout le monde, y compris A, et si B et D sont deux matrices commutant avec A, alors $A(\lambda B+\mu D) = \lambda AB+\mu AD = \lambda BA+\mu DA = (\lambda B+\mu D)A$, ce qui prouve la stabilité par combinaisons linéaires.

2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. On calcule sans difficulté $AM = \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $MA = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & d & e \\ 0 & g & h \end{pmatrix}$.
   Les deux matrices sont égales si et seulement si $d = g = h = 0$; $a = e = i$ et $f = b$. Autrement dit, $C(A) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \text{Vect}\left(I, A, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$.

3. Puisque le pseudo-inverse doit commuter avec la matrice A, c'est une conséquence triviale de la question précédente.

4. En repartant d'une matrice B de la forme précédente, $BA = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis $BAB = \begin{pmatrix} 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Si on veut que cette matrice soit égale à B, il faut en effet avoir $a = 0$.

5. Si $a = 0$, on vient en fait de voir que $BAB = 0$, donc on devrait avoir $B = 0$, ce qui est absurde (car on ne pourra alors jamais avoir $ABA = A$). La matrice A ne peut donc pas avoir de pseudo-inverse.

6. L'application g est très facile à décrire analytiquement : $g(x, y, z) = (y, z, 0)$. Le noyau est donc assez trivialement constitué des vecteurs vérifiant $x = 0$. Si on y tient, $\ker(g) = \text{Vect}((1, 0, 0))$. Tout aussi facilement, $\text{Im}(g) = \text{Vect}((1, 0, 0); (0, 1, 0))$ en prenant les images de la base canonique. Les deux sous-espaces ne peuvent pas être supplémentaires puisqu'ils ont intersection contenant tout le noyau (une droite en l'occurence). On peut conjecturer des deux exemples précédents qu'une application linéaire est pseudo-inversible si et seulement si son noyau et son image sont en somme directe. Démonstration laissée en exercice au lecteur.

Concours Blanc

PTSI B Lycée Eiffel

4 juin 2013

Durée : 4H. Calculatrices interdites.

Exercice 1

A. Étude d'une fonction.

On considère dans cette partie la fonction $f : x \mapsto x - e^{-x} - 1$ définie sur $\mathbb{R}$. On notera $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. On donne pour tous les calculs de l'exercice les valeurs approchées suivantes : $e^{-1} \simeq 0,4$ et $e^{-2} \simeq 0,1$.

1. Étudier les branches infinies de f. On prouvera en particulier l'existence d'une asymptote (D) en $+\infty$, donc on précisera l'équation.
2. Donner le développement limité à l'ordre 3 de f en 0. En déduire une équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 0, ainsi que la position relative de $\mathcal{C}$ et (D) au voisinage de 0.
3. Étudier les variations de la fonction f, et dresser son tableau de variations.
4. Calculer f'', et étudier la convexité de la fonction f.
5. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, et que $\alpha \in [1, 2]$.
6. Tracer une allure soignée de la courbe $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé, en faisant figurer sur le même graphique sa tangente (T) et son aymptote (D). On pourra utiliser $\alpha \simeq 1,3$.

B. Approximation de α à l'aide d'une suite récurrente.

On considère désormais la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^{-x} + 1$. On définit également la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = h(u_n)$.

1. Montrer que h admet pour unique point fixe le réel α défini dans la première partie.
2. Montrer que, $\forall x \in [1, 2]$, $|h'(x)| \leqslant \dfrac{1}{e}$.
3. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1, 2]$.
4. Justifier soigneusement que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{e}|u_n - \alpha|$.

   En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{e^n}$.
5. En déduire la convergence de la suite (u_n). Déterminer une valeur de n pour laquelle u_n est à une distance inférieure à 10^{-2} de sa limite (on ne demande pas une valeur concrète).

Exercice 2

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}$$

On note I la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose $u = (2, 1, -2)$.

1. (a) Montrer que $\ker(f) = \text{Vect}(u)$.
   (b) La matrice A est-elle inversible ?
2. (a) Déterminer le vecteur v de $\mathbb{R}^3$, dont la deuxième coordonnée dans $\mathcal{B}$ vaut 1, et tel que $f(v) = u$.
   (b) Déterminer le vecteur w de $\mathbb{R}^3$, dont la deuxième coordonnée dans $\mathcal{B}$ vaut 1, et qui vérifie $f(w) = v$.
   (c) Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$ que l'on notera $\mathcal{B}'$.
   (d) On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Calculer l'inverse P^{-1} de la matrice P, que représente la matrice P^{-1} ?
   (e) Calculer $P^3 - 2P^2 - 2P + I$, puis retrouver la valeur de P^{-1} en exploitant le résultat obtenu.
3. (a) Écrire la matrice N de f relativement à la base $\mathcal{B}'$.
   (b) Donner la relation liant les matrices A, N, P et P^{-1}, puis en déduire que, pour tout entier k supérieur ou égal à 3, on a : $A^k = 0$.
4. On note C_N (respectivement C_A) l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec N (respectivement A).
   (a) Montrer que si g est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ commutant avec f, alors $g(u) = 0$.
   (b) Montrer que C_N est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et que $C_N = \text{Vect}(I, N, N^2)$. On admet que C_A est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (c) Établir que : $M \in C_A \Leftrightarrow P^{-1}MP \in C_N$. En déduire que $C_A = \text{Vect}(I, A, A^2)$. Quelle est la dimension de C_A ?

Exercice 3

Dans cet exercice, la lettre n désigne un entier naturel non nul.
On note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = xe^{-\frac{n}{x}}$ si $x \neq 0$ et $f_n(0) = 0$.
On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. (a) Montrer que f_n est continue à droite en 0.
   (b) Montrer que f_n est dérivable à droite en 0 et donner la valeur du nombre dérivé à droite en 0 de f_n.
2. (a) Montrer que f_n est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Pour tout réel x non nul, calculer $f_n'(x)$ puis étudier son signe.
   (b) Calculer les limites de f_n en $+\infty$, $-\infty$ et 0^-, puis donner le tableau de variations de f_n.
3. (a) Rappeler le développement limité à l'ordre 2 de e^u lorsque u est au voisinage de 0.
   (b) En déduire que, lorsque x est au voisinage de $+\infty$ ou au voisinage de $-\infty$, on a :
   $f_n(x) = x - n + \dfrac{n^2}{2x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

(c) En déduire qu'au voisinage de $+\infty$, ainsi qu'au voisinage de $-\infty$, $\mathcal{C}_n$ admet une asymptote oblique D_n dont on donnera une équation. Préciser la position relative de D_n et C_n aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$.

(d) Donner l'allure de la courbe $\mathcal{C}_1$.

4. (a) Montrer qu'il existe un unique réel, que l'on notera u_n, tel que $f_n(u_n) = 1$.

   (b) Vérifier que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n est strictement supérieur à 1 et que u_n est solution de l'équation $x\ln(x) = n$.

   (c) Montrer que la fonction $g : x \mapsto x\ln(x)$ réalise une bijection de $[1, +\infty[$ vers un intervalle à déterminer. En déduire, en utilisant la fonction g^{-1}, que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

   (d) Justifier la relation $\ln(u_n) + \ln(\ln(u_n)) = \ln(n)$, puis montrer que $\ln(u_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$. En déduire un équivalent de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

5. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement croissante.

   (b) Montrer que : $f_n(u_{n+1}) = e^{\frac{1}{u_{n+1}}}$.

   (c) On pose $I_n = \displaystyle\int_{u_n}^{u_{n+1}} f_n(t)\, dt$. Montrer que : $1 \leqslant \dfrac{I_n}{u_{n+1} - u_n} \leqslant e^{\frac{1}{u_{n+1}}}$.

   (d) En déduire un équivalent de I_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

6. On s'intéresse désormais à la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \displaystyle\int_x^{2x} f_1(t)\, dt = \int_x^{2x} te^{-\frac{1}{t}}\, dt$.

   (a) Déterminer le signe de g sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

   (b) Montrer que, $\forall t \geqslant \dfrac{1}{\ln(2)}$, $te^{-\frac{1}{t}} \geqslant \dfrac{t}{2}$, en déduire une fonction simple minorant g sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{\ln(2)}, +\infty\right[$, et déterminer en particulier la branche infinie de g au voisinage de $+\infty$. On admet qu'en $-\infty$, la branche infinie sera du même type que celle obtenue en $+\infty$.

   (c) En utilisant les résultats de début d'exercice, montrer que f_1 est bornée sur $[0, 1]$, et en déduire $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$.

   (d) Montrer qu'il existe un réel $c < 0$ tel que, $\forall t \in [c, 0[$, $e^{-\frac{1}{t}} \geqslant -\dfrac{1}{t^3}$, et en déduire que $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = +\infty$.

   (e) En notant F une primitive de f_1 sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, exprimer g en fonction de F. En déduire que g est dérivable sur chacun de ces deux intervalles, et calculer sa dérivée.

   (f) Étudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variations.

   (g) Donner une allure de la courbe représentative de la fonction g (on donne $g(1) \simeq 0,78$ et $g\left(-\dfrac{1}{4\ln(2)}\right) \simeq 1,33$).

Corrigé du Concours Blanc

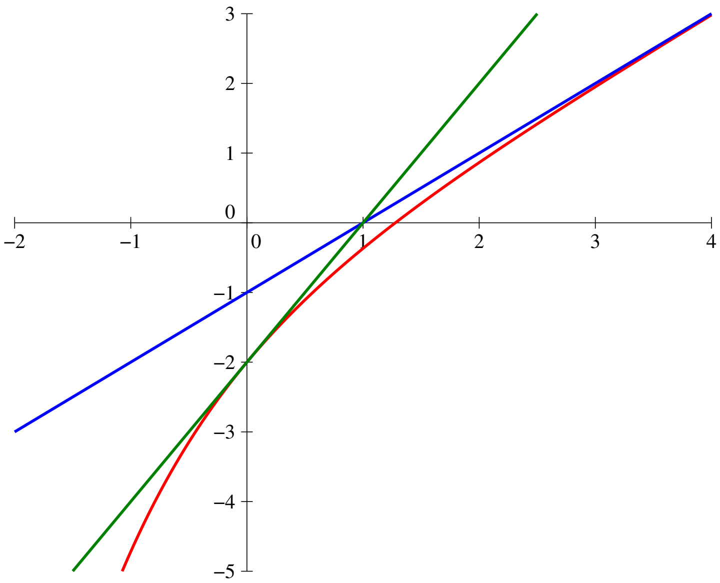
Exercice 1

A. Étude d'une fonction.

1. Comme $f(x) \underset{x\to-\infty}{} e^{-x}$, la courbe admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Oy). En $+\infty$, on peut se contenter d'écrire $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} x-1+o(1)$ (puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$) pour conclure que $(D) : y = x-1$ est asymptote à $\mathcal{C}$.
2. On commence par écrire $e^{-x} = 1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$, puis $f(x) = -2+2x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$. La tangente (T) a donc pour équation $y = 2x-2$, et le terme d'ordre 2 étant positif, la courbe sera au-dessus de sa tangente au voisinage de 0.
3. La fonction est bien sûr dérivable (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}$, et $f'(x) = 1+e^{-x}$ est positive sur $\mathbb{R}$, donc la fonction f est strictement croissante. Ce qui donne le tableau de variations absolument passionnant qui suit :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

4. On calcule donc $f''(x) = -e^{-x}$. La dérivée seconde est toujours négative, la fonction est donc concave sur $\mathbb{R}$.
5. La fonction est continue et, au vu des calculs précédents, la fonction effectue une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. En particulier, 0 admet un unique antécédent α par f. Comme de plus $f(1) = -e^{-1} < 0$, et $f(2) = 1-e^{-2} > 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction f s'annule entre 1 et 2, ce qui prouve que $\alpha \in [1,2]$.
6. Voici une allure (la courbe en rouge, la tangente en vert et l'asymptote en bleu) :



B. Approximation de α à l'aide d'une suite récurrente.

1. En effet, $h(x) = x \Leftrightarrow e^{-x}+1 = x \Leftrightarrow x-1-e^{-x} = 0$, ce qui ne se produit que lorsque $x = \alpha$ d'après les résultats de la première partie.

2. La fonction h est évidemment dérivable, de dérivée $h'(x) = -e^{-x}$. Sur l'intervalle $[1, 2]$, cette dérivée est négative et croissante, minorée par $-e^{-1}$ (et accessoirement majorée par $-e^{-2}$), donc $\forall x \in [1, 2]$, $-\dfrac{1}{e} \leqslant h'(x) \leqslant 0$, ce qui prouve que $|h'(x)| \leqslant \dfrac{1}{e}$.
3. On prouve cette propriété par récurrence. C'est certainement vrai au rang 0 puisque $u_0 = 1 \in [1, 2]$, et si on le supposé vérifié au rang n alors $-2 \leqslant -u_n \leqslant -1$, donc $1 + e^{-2} \leqslant 1 + e^{-u_n} \leqslant 1 + e^{-1}$. Vu les valeurs approchées données en début d'exercice, a fortiori $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$, ce qui prouve l'hérédité de la propriété, qui est donc vraie pour tout entier naturel n.
4. Il s'agit bien sûr d'appliquer l'inégalité des accroissements finis. La fonction est dérivable sur $[1, 2]$, sa dérivée est majorée en valeur absolue par $\dfrac{1}{e}$, les deux réels u_n et α appartiennent à l'intervalle $[1, 2]$, donc $|f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \dfrac{1}{e}|u_n - \alpha|$, soit $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{e}|u_n - \alpha|$.
   On prouve la deuxième inégalité par récurrence. Au rang 0, $|u_0 - \alpha| = \alpha - 1 \simeq 0,3$, et $\dfrac{1}{e} = e^{-1} \simeq 0,4$, donc l'inégalité est vérifiée. Si on la suppose vraie au rang n, il suffit d'appliquer le résultat de la première partie de la question pour en déduire que $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{e}|u_n - \alpha|$, puisq l'hypothèse de récurrence pour conclure que $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{e} \times \dfrac{1}{e^n}|u_n - \alpha| = \dfrac{1}{e^{n+1}}|u_n - \alpha|$.
5. Puisque $\dfrac{1}{e} < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{e^n} = 0$. Le théorème des gendarmes assure alors que $|u_n - \alpha|$, qui est toujours positif, tend vers 0. Autrement dit, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$. La distance à la limite est inférieure à 10^{-2} quand $\dfrac{1}{e^n} \leqslant 10^{-2}$, soit $e^n \geqslant 100$, donc $n \geqslant \ln(100)$ (en pratique, $n \geqslant 5$ suffit donc, peut-être même moins pusique notre majoration n'est évidemment pas une égalité).

Exercice 2

1. (a) Pour déterminer le noyau de f, on résout le système $\begin{cases} 2x + 10y + 7z = 0 \\ x + 4y + 3z = 0 \\ -2x - 8y - 6z = 0 \end{cases}$. Les deux dernières équations du système sont équivalentes, de plus $L_1 + L_3$ donne $2y + z = 0$, soit $z = -2y$. En reportant dans la première équation, $2x - 4y = 0$, soit $x = 2y$. On trouve donc $\ker(f) = \{(2y, y, -2y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((2, 1, -2))$.
   (b) La matrice est inversible si et seulement si l'application f est bijective, ce qui n'est pas le cas puisque le résultat de la question précédente prouve que f n'est pas injective.
2. (a) On chercher donc $v = (x, 1, z)$, tel que $f(v) = u$, c'est-à-dire $\begin{cases} 2x + 10 + 7z = 2 \\ x + 4 + 3z = 1 \\ -2x - 8 - 6z = -2 \end{cases}$.
   Les deux dernières équations sont à nouveau équivalentes, se réduisant à $x = -3z - 3$. On reporte dans la première équation pour trouver $-6z - 6 + 10 + 7z = 2$, soit $z = -2$. Autrement dit, $v = (3, 1, -2)$.
   (b) Même principe qu'à la question précédente, on cherche $w = (x, 1, z)$ tel que $\begin{cases} 2x + 10 + 7z = 3 \\ x + 4 + 3z = 1 \\ -2x - 8 - 6z = -2 \end{cases}$. Les deux dernières équations n'ayant pas changé, on a toujours $x = -3z - 3$, et la première équation devient $-5z - 6 + 10 + 7z = 3$, soit $z = -1$, puis $w = (0, 1, -1)$.
   (c) La famille est constituée de trois vecteurs dans un espace de dimension 3, il suffit de prouver qu'elle est libre. On peut le faire à l'aide d'un calcul de rang : $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$

$\text{rg}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (on a effectué successivement les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 - L_3$). Cette dernière matrice est de rang 3, c'est donc également le cas de la famille $\mathcal{B}'$, qui constitué une base de $\mathbb{R}^3$.

(d) Commençons par écrire la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. On peut l'inverser en appliquant l'algorithme du pivot de Gauss :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow L_1 - 2L_2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1/2 - 3/2L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Conclusion : $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, cette matrice est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{B}$.

(e) Calculons donc $P^2 = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ -4 & -6 & -1 \end{pmatrix}$ puis $P^3 = \begin{pmatrix} 17 & 24 & 6 \\ 4 & 5 & 2 \\ -12 & -16 & -5 \end{pmatrix}$, on obtient alors $P^3 - 2P^2 - 2P + I = \begin{pmatrix} 17-14-4+1 & 24-18-6 & 6-6 \\ 4-2-2 & 5-4-2+1 & 2-2 \\ -12+8+4 & -16+12+4 & -5+2+2+1 \end{pmatrix} = 0$.
Puisque $P^3 - 2P^2 - 2P + I = 0$, on peut écrire $I = P(-P^2 + 2P + 2I)$, ce qui prouve d'une part que la matrice P est inversible, et d'autre part que $P^{-1} = -P^2 + 2P + 2I$. Le calcul explicite de $-P^2 + 2P + 2I$ donne évidemment la même matrice que celle obtenue par le pivot de Gauss.

3. (a) Inutile de faire de gros calculs, puisque $f(u) = 0$, $f(v) = u$ et $f(w) = v$, la matrice est $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) C'est une formule du cours : $N = P^{-1}AP$, ou si on préfère $A = PNP^{-1}$. Or, on vérifie facilement que la matrice N est nilpotente d'ordre 3 : $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis $N^3 = 0$, et de même pour les puissances suivantes. Or, $A^k = PN^kP^{-1}$ (on le prouve par exemple par récurrence, c'est vrai au rang 1 d'après ce qui précède, et en le supposant au rang n, alors $A^{k+1} = A^k \times A = PN^kP^{-1}PNP^{-1} = PN^{k+1}P^{-1}$. On en déduit la nullité de A^k pour $k \geqslant 3$.

4. (a) Par hypothèse, $g \circ f(u) = f \circ g(u)$. Comme $f(u) = 0$, cela implique $f(g(u)) = 0$, c'est-à-dire $g(u) \in \ker(f)$. D'après le calcul effectué dans la première question du problème, $g(u) \in \text{Vect}(u)$, soit $g(u) = \lambda u$. Ce n'est pas suffisant pour prouver la nullité de $g(u)$, qui n'est en fait pas toujours assurée ! Par exemple, l'application identité commute certainement avec f mais ne vérifie sûrement pas $g(u) = 0$. Hum, une imprécision coupable de l'énoncé.

   (b) Le fait que C_N est un sous-espace vectoriel se démontre classiquement : si $AN = NA$ et $BN = NB$, alors quels que soient les réels λ et μ, $(\lambda A + \mu B)N = \lambda AN + \mu BN = \lambda NA + \mu NB = N(\lambda A + \mu B)$. Pour en déterminer une base, le plus simple est de faire un calcul explicite. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, alors $AN = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & d & e \\ 0 & g & h \end{pmatrix}$ et $NA = \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, les deux matrices commutent donc si $d = g = h = 0$; $a = e = i$ et $b = f$. Autrement dit, $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = aI + bN + cN^2$, ce qui prouve bien que $C_N = \text{Vect}(I, N, N^2)$.

   (c) C'est un simple calcul : $AM = MA$ est équivalent (puisque les matrices sont inversibles) à $P^{-1}AMP = P^{-1}MAP$, soit $P^{-1}APP^{-1}MP = P^{-1}MPP^{-1}AP$. Puisque $N = P^{-1}AP$, on trouve la condition $NP^{-1}MP = P^{-1}MPN$, soit $P^{-1}MP \in C_A$. D'après la question précédente, $P^{-1}MP = \alpha I + \beta N + \gamma N^2$, donc $M = P(\alpha I + \beta N + \gamma N^2)P^{-1} = \alpha I + \beta A + \gamma A^2$, ce qui prouve que $C_A = \text{Vect}(I, A, A^2)$. On connait une famille génératrice de C_A constituée de trois matrices, reste à vérifier qu'elle est libre. On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$, il est alors facile de prouver que I, A et A^2 forment une famille libre : si $\alpha I + \beta A + \gamma A^2 = 0$, alors $\beta = 0$ en regardant par exemple le coefficient en bas à droite de la matrice, puis $\alpha = 0$ en regardant le coefficient en haut à gauche, et alors $\gamma = 0$ puisque la matrice A^2 n'est pas nulle. On conclut que C_A est de dimension 3.

Exercice 3

1. (a) Il n'y a même pas de forme indéterminée : $\lim\limits_{x \to 0^+} -\dfrac{n}{x} = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{-\frac{n}{x}} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f_n(x) = 0$, ce qui coïncide avec la valeur imposée pour $f_n(0)$ et prouve donc la continuité à droite de f_n en 0.

   (b) On peut passer directement par le taux d'accroissement : $\dfrac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = e^{-\frac{n}{x}}$. D'après les calculs précédents, ce taux d'accroissement tend vers 0 en 0^+, donc f_n est dérivable à droite en 0, et y admet une demi-tangente horizontale.

2. (a) La fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ comme produit de fonctions usuelles. On calcule $f_n'(x) = e^{-\frac{n}{x}} + \dfrac{n}{x^2} \times xe^{-\frac{n}{x}} = \left(1 + \dfrac{n}{x}\right) e^{-\frac{n}{x}}$. Sur $]0, +\infty[$, cette dérivée est toujours positive. Elle s'annule pour $x = -n$, est positive également sur $]-\infty, -n]$, et négative sur $[-n, 0[$.

   (b) Comme $\lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{-\frac{n}{x}} = 1$, on obtient facilement $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$.

En 0^-, il faut invoquer la croissance comparée. Si on veut être très rigoureux, on pose $X = -\frac{n}{x}$, $X \underset{x\to 0^-}{=} +\infty$, et $f_n(x) = -n\frac{e^X}{X}$, qui a pour limite $-\infty$ par croissance comparée.

3. (a) Rappelons donc que $e^u \underset{u\to 0}{=} 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + o(u^2)$.

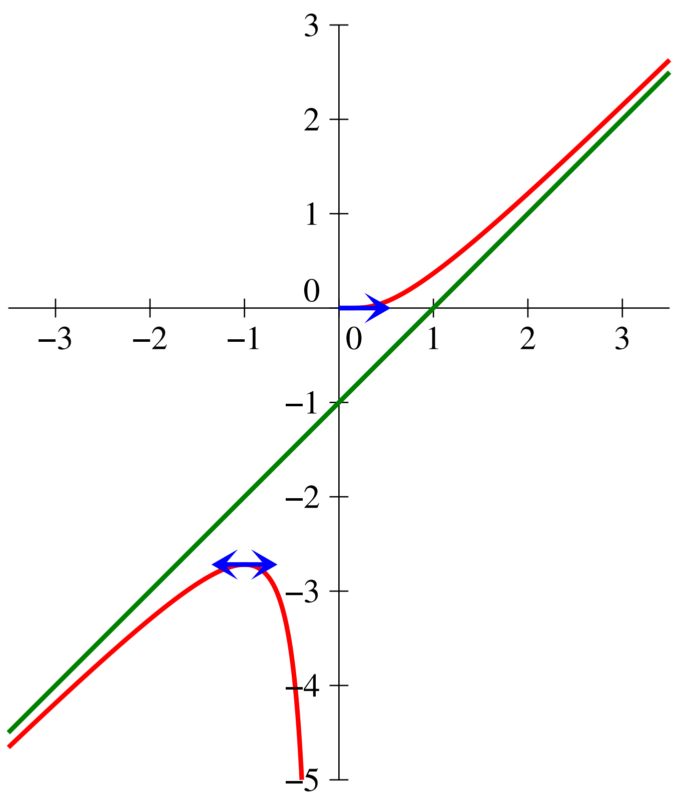
(b) Puisque $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{-\frac{n}{x}} = 0$, on peut appliquer le développement limité précédent à $u = \frac{-n}{x}$ pour obtenir $e^{-\frac{n}{x}} \underset{x\to\pm\infty}{=} 1 - \frac{n}{x} + \frac{n^2}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x}\right)$. Il ne reste plus qu'à multiplier le tout par x pour trouver le résultat demandé.

(c) En particulier, $f_n(x) = x - n + o(1)$, ce qui prouve que la droite d'équation $y = x - n$ est asymptote oblique à la courbe à la fois en $+\infty$ et en $-\infty$. Par ailleurs, le terme suivant du développement est du signe de x, donc la courbe sera située au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$, et en-dessous au voisinage de $-\infty$.

(d) Récapitulons le tableau de variations de la fonction f_1, en calculant $f_1(-1) = -e^1 = -e$:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
f_1	$-\infty$	$\nearrow$	$-e$	$\searrow$	$-\infty$ | 0	$\nearrow$	$+\infty$

Sur la courbe, on indique bien entendu la demi-tangente en 0 et l'asymptote :



4. (a) Sur $\mathbb{R}^{-*}$, la fonction f_n est toujours strictement négative, donc ne peut pas prendre la valeur 1. Sur $[0, +\infty[$, f_n est continue et strictement croissante, et effectue une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même. En particulier, 1 admet un unique antécédent (strictement positif) par f_n.

(b) Il suffit pour cela de calculer $f_n(1) = e^{-n} < 1$. La fonction étant strictement croissante sur $\mathbb{R}+$, $1 < u_n$. Par ailleurs, $u_n e^{-\frac{n}{u_n}} = 1$ implique, en passant au ln, que $\ln(u_n) - \dfrac{n}{u_n} = 0$, soit $u_n \ln(u_n) = n$.

(c) La fonction g est dérivable sur $[1, +\infty[$, de dérivée $g'(x) = \ln(x) + 1 > 0$, elle est donc strictement croissante et bijective. Comme $g(1) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, la fonction g est bijective de $[1, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$. La fonction g^{-1} est donc définie et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, et vérifie $\lim\limits_{x\to+\infty} g^{-1}(x) = +\infty$. Comme $u_n = g^{-1}(n)$ (c'est une conséquence immédiate des résultats de la question précédente), on peut en effet en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

(d) On sait déjà que $u_n \ln(u_n) = n$, et les deux membres étant supérieurs ou égaux à 1, on peut prendre le ln des deux côtés pour obtenir $\ln(u_n) + \ln(\ln(u_n)) = \ln(n)$. Or, en posant $X = \ln(u_n)$, qui tend vers $+\infty$, on peut affirmer en utilisant la croissance comparée que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(X)}{X} = 0$, c'est-à-dire que $\ln(\ln(u_n)) = o(\ln(u_n))$. On en déduit que $\ln(n) = \ln(n) + \ln(\ln(n)) \sim \ln(u_n)$. Attention à ne pas en déduire que u_n est équivalente à n, ce serait faux ! Reprenons plutôt l'égalité $u_n \ln(u_n) = n$. en appliquant l'équivalent qu'on vient d'obtenir, $u_n = \dfrac{n}{\ln(u_n)} \sim \dfrac{n}{\ln(n)}$.

5. (a) C'est une conséquence directe du fait que $u_n = g^{-1}(n)$ et que la fonction g^{-1} a le même sens de variations que g, donc est croissante.

(b) Par définition, $f_{n+1}(u_{n+1}) = 1$, c'est-à-dire que $u_{n+1} = e^{\frac{n+1}{u_{n+1}}}$. On peut alors calculer $f_n(u_{n+1}) = u_{n+1} e^{-\frac{n}{u_{n+1}}} = e^{\frac{n+1}{u_{n+1}} - \frac{n}{u_{n+1}}} = e^{\frac{1}{u_{n+1}}}$.

(c) La fonction f_n est croissante sur $[u_n, u_{n+1}]$, minorée par $f_n(u_n) = 1$ et majorée par $f_n(u_{n+1}) = e^{\frac{1}{u_{n+1}}}$, on peut donc encadrer I_n en écrivant $\displaystyle\int_{u_n}^{u_{n+1}} 1\ dt \leqslant \int_{u_n}^{u_{n+1}} f_n(t)\ dt \leqslant \int_{u_n}^{u_{n+1}} e^{\frac{1}{u_{n+1}}}\ dt$. Autrement dit, $u_{n+1} - u_n \leqslant I_n \leqslant e^{\frac{1}{u_{n+1}}}(u_{n+1} - u_n)$. Comme $u_{n+1} - u_n > 0$, on divise pour obtenir l'encadrement souhaité.

(d) Le membre de droite de l'encadrement précédent a pour limite 1 quand n tend vers $+\infty$ puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_{n+1}} = 0$. En appliquant le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{I_n}{u_{n+1} - u_n} = 1$, soit $I_n \sim u_{n+1} - u_n$.

6. On s'intéresse désormais à la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \displaystyle\int_x^{2x} f_1(t)\ dt = \int_x^{2x} te^{-\frac{1}{t}}\ dt$.

(a) Si $x > 0$, $[x, 2x] \subset \mathbb{R}^{+*}$, intervalle sur lequel la fonction f_1 est strictement positive. Comme $x < 2x$, l'intégrale définissant g est positive. Si $x < 0$, $[x, 2x] \subset \mathbb{R}^{-*}$, intervalle sur lequel la fonction f_1 est négative. Mais comme cette fois-ci $2x < x$, l'intégrale sera tout de même positive. La fonction g est donc positive sur chacun de ses deux intervalles de définition.

(b) C'est une majoration directe : si $t \geqslant \dfrac{1}{\ln(2)}$, $-\ln(2) \leqslant -\dfrac{1}{t} \leqslant 0$, donc $\dfrac{1}{2} \leqslant e^{-\frac{1}{t}}$, la minoration demandée en découle. On peut intégrer l'inégalité entre x et $2x$ pour obtenir $g(x) \geqslant \displaystyle\int_x^{2x} \frac{t}{2}\ dt = \left[\frac{t^2}{4}\right]_x^{2x} = \frac{3x^2}{4}$. En particulier, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = +\infty$, la fonction g admet donc en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Oy).

(c) La fonction f_1 est continue sur $[0, 1]$, donc certainement bornée sur ce même intervalle. Notons m et M les bornes de f_1, on peut alors écrire, si $x > 0$, $\displaystyle\int_x^{2x} m\ dt \leqslant \int_x^{2x} f_1(t)\ dt \leqslant$

$\displaystyle\int_x^{2x} M\ dt$, soit $mx \leqslant g(x) \leqslant Mx$. En particulier, une application directe du théorème des gendarmes permet de dire que $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 0$.

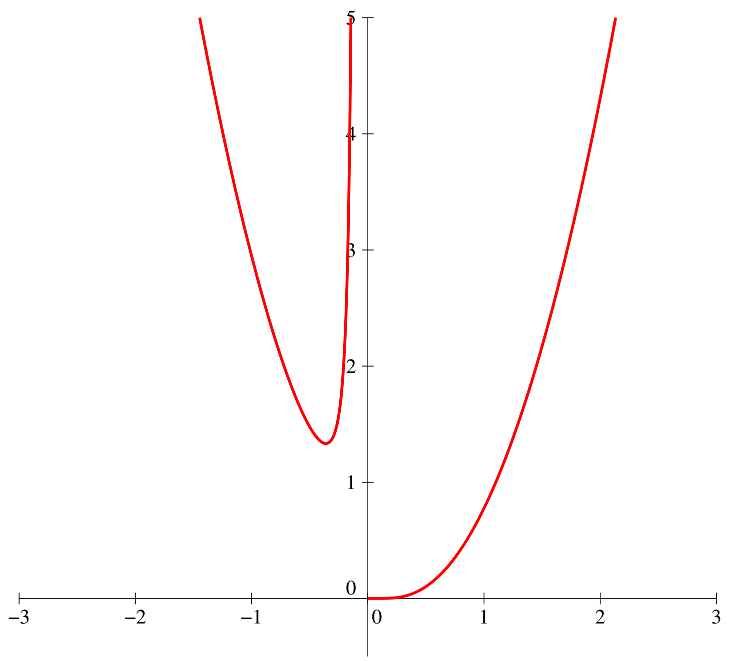
(d) Par croissance comparée, $\lim\limits_{t\to 0-} -t^3 e^{-\frac{1}{t}} = +\infty$ (encore une fois, si on veut être extrêmement rigoureux, on pose $X = -\dfrac{1}{t}$, et on se ramène au calcul de $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{e^X}{X^3}$). En particulier, il existe certainement un voisinage à gauche de 0 pour lequel $-t^3 e^{-\frac{1}{t}} \geqslant 1$, donc $e^{-\frac{1}{t}} \geqslant -\dfrac{1}{t^3}$ (on a bien divisé par une quantité positive). On peut donc écrire, en multipliant par t et en intégrant entre x et $2x$, que $g(x) \geqslant \displaystyle\int_x^{2x} \frac{-1}{t^2}\ dt = \left[\frac{1}{t}\right]_x^{2x} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{x} = -\frac{1}{2x}$. Comme $\lim\limits_{x\to 0^-} -\dfrac{1}{2x} = +\infty$, on en déduit effectivement que $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = +\infty$.

(e) Si F est une primitive de f_1, on peut simplement écrire $g(x) = F(2x) - F(x)$. La fonction F étant bien sûr dérivable de dérivée f_1, g l'est aussi, et $g'(x) = 2f_1(2x) - f_1(x)$ (sur chacun des deux intervalles de définition).

(f) Reprenons le calcul là où nous l'avons laissé à la question précédente : $g'(x) = 4xe^{-\frac{1}{2x}} - xe^{-\frac{1}{x}} = xe^{-\frac{1}{2x}}(4 - e^{-\frac{1}{2x}})$. La parenthèse s'annule lorsque $e^{-\frac{1}{2x}} = 4$, soit $-\dfrac{1}{2x} = 2\ln(2)$, ou encore $x = -\dfrac{1}{4\ln(2)}$ (valeur qu'on notera x_0). La dérivée dépend par ailleurs du signe de x, ce qui donne le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		x_0		0		$+\infty$
g	$+\infty$	$\searrow$	$g(x_0)$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ 0	$\nearrow$	$+\infty$

(g) Avec les informations que l'on a, on peut tracer une allure proche de la courbe suivante :



Devoir à la maison n°1

PTSI B Lycée Eiffel

à rendre pour le 18 septembre 2012

Problème (vieux sujet de bac)

On considère la fonction définie pour tout réel x par : $f(x) = \dfrac{4(1-e^x)}{1+e^x}$, et on note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ (unité graphique : 1cm).

Partie A

1. Étudier les limites de f en $+\infty$ puis en $-\infty$, et interpréter graphiquement les résultats obtenus.
2. Former le tableau des variations de f.
3. Trouver une équation de la tangente (T) a la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse nulle.
4. Démontrer que f est une fonction impaire.
5. Construire $\mathcal{C}$ et (T) dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Partie B

1. Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-3}^{0} \frac{e^x}{1+e^x}\, dx$.
   On donnera le resultat sous forme d'un logarithme népérien d'un quotient.
2. Vérifier que, pour tout reel x, $f(x) = 4 - \dfrac{8e^x}{1+e^x}$.
3. Déduire des questions précédentes l'aire, en cm^2, de la partie de la courbe comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'equations $x = -3$ et $x = 0$. Donner une valeur décimale approchée a 10^{-2} près de cette aire.
4. On considère ici la région du plan comprise entre la courbe $\mathcal{C}$, la droite (T) et les droites d'équations $x = -3$ et $x = 0$. Calculer, en cm^2, l'aire de cette region. Donner une valeur décimale approchée a 10^{-2} près de cette aire.

Partie C

Résolution de l'équation $f(x) = \alpha$ ou α est un nombre réel donné.

1. En utilisant les résultats de la partie A, montrer que, si α n'appartient pas à l'intervalle $]-4;4[$, l'équation n'a pas de solution.
2. On suppose desormais que $-4 < \alpha < 4$.
   (a) Démontrer qu'il existe une solution et une seule pour cette equation.
   (b) Pour $\alpha = 2$, exprimer cette solution à l'aide d'un logarithme népérien.
   (c) Pour α quelconque appartenant à l'intervalle $]-4;4[$, exprimer cette solution en fonction de α.

Partie D

On se propose d'étudier l'existence des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) + x = 0$.

1. À partir de la représentation graphique de f, indiquer le nombre de solutions de cette équation.
2. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = f(x) + x$.
   (a) Vérifier que, pour tout reel x, on a $\varphi'(x) = 1 - \dfrac{8e^x}{(e^x + 1)^2}$.
   (b) En déduire les variations de φ (on pourra commencer par résoudre l'équation $X^2 - 6X + 1 = 0$).
   (c) Déterminer la limite de φ en $+\infty$.
3. (a) À partir des résultats précédents, déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) + x = 0$ appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$.
   (b) Retrouver ainsi, de manière rigoureuse, les résultats trouvés à la question 1.

Corrigé du DM1

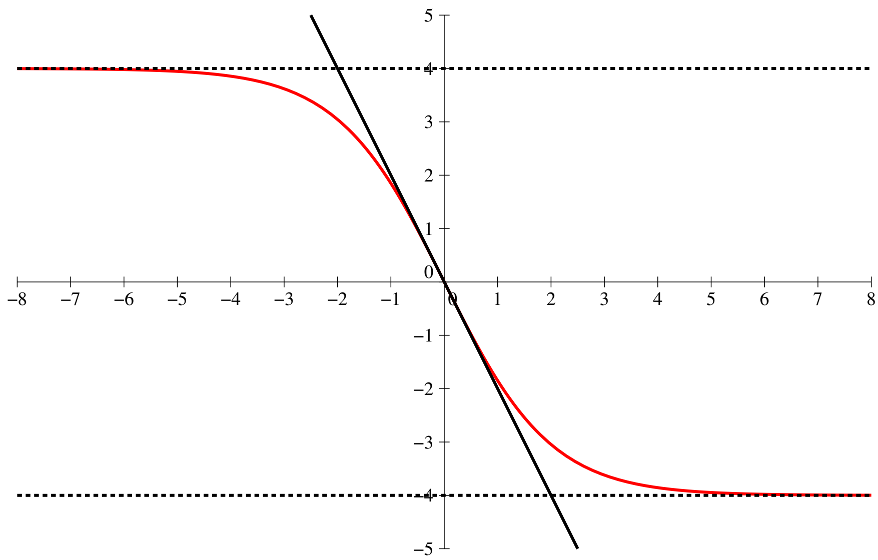
Problème (vieux sujet de bac)

Partie A

1. Le calcul le plus facile est celui de la limite en $-\infty$, où on a sans difficulté $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 4$ en exploitant le fait que $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$. De l'autre côté, pour être rigoureux, on peut factoriser par e^x pour faire disparaitre l'indétermination : $f(x) = \dfrac{4e^x(e^{-x}-1)}{e^x(e^{-x}+1)} = -4\dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$. De là, on conclut facilement : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -4$. Il y a donc une asymptote horizontale d'équation $y = 4$ en $-\infty$, et une autre d'équation $y = -4$ en $+\infty$.
2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = 4\dfrac{-e^x(1+e^x) - e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^2} = -4e^x\dfrac{2}{(1+e^x)^2} = \dfrac{-8e^x}{(1+e^x)^2}$. Cette dérivée est toujours négative (puisque l'exponentielle est positive), donc la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$. D'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
f	4	$\searrow$ -4

3. Puisque $f(0) = 0$ et $f'(0) = \dfrac{-8}{2^2} = -2$, la tangente (T) a pour équation $y = -2x$.
4. Le domaine de définition de f est évidemment symétrique par rapport à 0, et $f(-x) = \dfrac{4(1-e^{-x})}{1+e^{-x}} = -f(x)$ au vu du calcul effectué plus haut pour la limite de f en $+\infty$. La fonction f est donc impaire.
5. Voici les courbes :



Partie B

1. On reconnait dans l'intégrale un quotient de la forme $\dfrac{u'}{u}$, qui s'intègre donc directement : $I = [\ln(1+e^x)]_{-3}^{0} = \ln(2) - \ln(1+e^{-3}) = \ln\left(\dfrac{2}{1+e^{-3}}\right)$.

2. Partons donc du résultat annoncé : $4 - \dfrac{8e^x}{1+e^x} = \dfrac{4+4e^x-8e^x}{1+e^x} = \dfrac{4(1-e^x)}{1+e^x} = f(x)$.
3. Puisque l'unité du repère est 1 cm, l'aire recherchée correspond à $\displaystyle\int_{-3}^{0} f(x)\ dx = \int_{-3}^{0} 4 - \dfrac{8e^x}{1+e^x} = 12 - 8\ln\left(\dfrac{2}{1+e^{-3}}\right)$. La calculatrice donne une valeur approchée de 6.84.
4. Puisque la courbe est située sous sa tangente sur $[-3; 0]$, cette nouvelle aire correspond à $\displaystyle\int_{-3}^{0} -2x - f(x) = [-x^2]_{-3}^{0} - \int_{-3}^{0} f(x)\ dx = 9 - 12 + 8\ln\left(\dfrac{2}{1+e^{-3}}\right) = 8\ln\left(\dfrac{2}{1+e^{-3}}\right) - 3 \simeq 2.16$.

Partie C

1. En effet, au vu des limites de la fonction et de sa décroissance, f est minorée (strictement) par -4 et majorée par 4, l'équation $f(x) = \alpha$ ne peut donc avoir de solution que si $-4 < \alpha < 4$.
2. (a) La fonction f étant continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, elle est bijective de $\mathbb{R}$ vers $]-4; 4[$. Tout réel $\alpha \in]-4; 4[$ admet donc un unique antécédent par f, ce qui revient à dire que l'équation $f(x) = \alpha$ admet une unique solution.

   (b) Pour $\alpha = 2$, l'équation à résoudre est $\dfrac{4(1-e^x)}{1+e^x} = 2$, soit $4 - 4e^x = 2 + 2e^x$, ou encore $2 = 6e^x$, soit $e^x = \dfrac{1}{3}$, et $x = \ln\left(\dfrac{1}{3}\right) = -\ln(3)$.

   (c) Le principe est le même : $4 - 4e^x = \alpha + \alpha e^x$, soit $4 - \alpha = e^x(4+\alpha)$, ou encore $e^x = \dfrac{4-\alpha}{4+\alpha}$. Le membre de droite étant strictement positif quand $\alpha \in]-4; 4[$, l'équation admet pour unique solution $x = \ln\left(\dfrac{4-\alpha}{4+\alpha}\right)$.

Partie D

1. Graphiquement, si on trace la droite d'équation $y = -x$ sur le même graphique que la courbe $\mathcal{C}$, il semble y avoir trois point d'intersection, autrement dit trois solutions à l'équation $f(x) = -x$, et donc à l'équation $f(x) + x = 0$. L'une d'elles est la solution évidente 0, les deux autres sont symétriques par rapport à 0.
2. (a) C'est immédiat au vu de la dérivée obtenue pour f dans la partie A.

   (b) Sous la forme précédente, le signe de φ' ne saute pas aux yeux (et le lien avec l'indication de l'énoncé non plus), mettons donc tout au même dénominateur : $\varphi'(x) = \dfrac{(e^x+1)^2 - 8e^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{e^{2x} + 2e^x + 1 - 8e^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{e^{2x} - 6e^x + 1}{(e^x+1)^2}$. La dérivée est du signe de son numérateur, qui peut se mettre en posant $X = e^x$ sous la forme $X^2 - 6X + 1$. Ce trinome a pour discriminant $\Delta = 36 - 4 = 32$. L'équation $X^2 - 6X + 1$ admet donc deux solutions réelles, $X_1 = \dfrac{6+\sqrt{32}}{2} = 3 + 2\sqrt{2}$, et $X_2 = 3 - 2\sqrt{2}$. Le trinome $X^2 - 6X + 1$ est négatif entre ces deux racines, et positif en dehors. Les valeurs de X_1 et X_2 étant toutes deux strictement positives ($2\sqrt{2} = \sqrt{8} < 3 = \sqrt{9}$), $x = \ln(X)$, s'annule également en deux valeurs, $x_1 = \ln(X_1)$ et $x_2 = \ln(X_2)$. La fonction φ est décroissante sur $[x_1; x_2]$, croissante le reste du temps.

   (c) Puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -4$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$.
3. (a) On peut constater que $x_1 > 0$ (X_1 étant très manifestement plus grand que 1), et $x_2 < 0$ (c'est moins manifeste, mais en fait $X_2 = \dfrac{1}{X_1} : \dfrac{1}{3+2\sqrt{2}} = \dfrac{3-2\sqrt{2}}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})} =$

$\dfrac{3-2\sqrt{2}}{9-8} = 3-2\sqrt{2}$, ce qui implique que $X_2 < 1$). Sur $[0; +\infty[$, la fonction φ est donc décroissante puis croissante, admettant un minimum égal à $\varphi(x_2)$, une limite $+\infty$ en $+\infty$ et vérifiant $\varphi(0) = 0$. La fonction s'annule donc une seule fois sur $]0; +\infty[$, en une valeur plus grande que x_2 (c'est une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires).

(b) On peut effectuer le même raisonnement sur l'intervalle $]-\infty; 0[$, ou plus simplement utiliser l'imparité de φ pour prouver qu'elle s'annule également une seule fois sur $]-\infty; 0[$, en une valeur opposée de la précédente. On retrouve bien les trois solutions prévues à la question 1.

Devoir à la maison n°2

PTSI B Lycée Eiffel

à rendre pour le 5 octobre 2012

Exercice

Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \arctan(x)$ de deux façons différentes : via un calcul de dérivée ; et par un calcul direct. Dans les deux cas, on veillera à bien justifier que l'égalité est vrai sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Problème

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{C}^*$ par $f(z) = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$. On identifiera le point M d'affixe z dans le plan complexe avec le nombre complexe z.

1. Déterminer les antécédents par f de 0, de 1, et de $1+i$.
2. Soit $a \in]-1;1[$ (a est donc un nombre réel). Montrer que a admet par f deux antécédents, qui sont de module 1 et conjugués l'un de l'autre.
3. Montrer que tout nombre complexe admet au un antécédent par f (on dit que l'application f est surjective), et déterminer le nombre d'antécédents de chaque nombre complexe.
4. (a) Déterminer l'ensemble des nombres complexes z pour lesquels $f(z) \in \mathbb{R}$.
   (b) Déterminer l'ensemble des nombres complexes z pour lesquels $f(z) \in i\mathbb{R}$.
   (c) Déterminer l'ensemble des nombres complexes z pour lesquels la partie imaginaire de $f(z)$ est strictement positive.
5. Montrer que les points 1, -1, z et $\dfrac{1}{z}$ sont cocycliques ou alignés. En déduire une construction géométrique de $f(z)$ à partir de z.
6. En notant A et B les points d'affixe 1 et -1 ; M, M' les points d'affixe z et $\dfrac{1}{z}$, et N le point d'affixe $f(z)$, montrer que, si M est distinct de A et de B, (MM') est bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB})$.
7. Soit $z_0 \notin i\mathbb{R}$. On construit une suite de nombres complexes (z_n) en posant, $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = f(z_n)$.
   (a) Déterminer les quatre premiers termes (z_0 exclus, on va jusqu'à z_4) de la suite dans le cas où $z_0 = 1+i$.
   (b) Montrer que la suite (z_n) est bien définie.
   (c) Montrer que, si $z_n = -1$ pour un certain entier n, alors $z_0 = -1$.
   (d) On suppose désormais $z_0 \neq -1$, et on pose $u_n = \dfrac{z_n - 1}{z_n + 1}$. Justifier que (u_n) est bien définie, et déterminer u_{n+1} en fonction de u_n.
   (e) En déduire u_n en fonction de n et de u_0.
   (f) Que peut-on dire de $|u_0|$ selon la partie réelle de z_0 ?
   (g) Étudier la convergence de (z_n) en fonction de z_0 (on dit qu'une suite de nombres complexes (z_n) converge si sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent toutes deux, ou alternativement si $|z_n - l|$ tend vers 0, où l est la limite de la suite).

Corrigé du DM2

Exercice

Commençons par la méthode bourrine, on pose donc $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) - \arctan(x)$. Il faut déjà réussir à déterminer le domaine de définition de f. En constatant que $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant x^2 < x^2+1$, on peut prendre la racine carrée pour obtenir $|x| < \sqrt{x^2+1}$, soit $-\sqrt{x^2+1} < x < \sqrt{x^2+1}$. On a donc toujours $-1 < \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1$, donc $\arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$ existe sur $\mathbb{R}$ tout entier. Comme la fonction arctan est également définie sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ également puisque l'expression à l'intérieur de l'arcsinus ne prend jamais les valeurs -1 et 1. Dérivons donc : $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1} - \frac{2x^2}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} \times \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+1}}} - \dfrac{1}{x^2+1} = \dfrac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} \times \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1-x^2}} - \dfrac{1}{x^2+1} = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{1}{x^2+1} = 0$. La fonction f est donc constante. Comme $f(0) = \arcsin(0) - \arctan(0) = 0$, f est la fonction nulle, ce qui prouve l'égalité demandée.

Deuxième méthode, on pose $x = \tan(\theta)$, avec $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$ (on peut toujours, la focntion tan étant bijective de cet intervalle sur $\mathbb{R}$. On a bien évidemment $\arctan(\tan(\theta)) = \theta$ sur cet intervalle (ce ne serait pas vrai pour un θ quelconque), et par ailleurs $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{\tan(\theta)}{\sqrt{1+\tan^2(\theta)}} = \tan(\theta)\sqrt{\cos^2(\theta)}$. Comme $\cos(\theta)$ est positif sur l'intervalle considéré, $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \tan(\theta)\cos(\theta) = \sin(\theta)$. Et comme on est justement dans l'intervalle où $\arcsin(\sin(\theta)) = \theta$ (la vie est bien faite), on trouve $\arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \theta$, ce qui prouve l'égalité.

Problème

1. Commençons par 0 : il faut résoudre $\dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right) = 0$. En mettant au même dénominateur et en se débarassant du $\dfrac{1}{2}$, on se ramène à $z^2 + 1 = 0$, soit deux antécédents $z = i$ et $z = -i$. De même, les antécédents de 1 sont donnés par les solutions de l'équation $\dfrac{z^2+1}{z} = 2$, soit $z^2 - 2z + 1 = 0$. On reconnait à gauche l'identité remarquable $(z-1)^2$, le seul antécédent de 1 est donc 1 lui-même. Restent enfin les antécedents de $1+i$, qui vont cette fois découler de la résolution de $\dfrac{z^2+1}{z} = 2+2i$, soit $z^2 - (2+2i)z + 1 = 0$. Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = (2+2i)^2 - 4 = 4 + 8i - 4 - 4 = 4(2i-1)$. Cherchons donc à déterminer une racine carrée de $2i-1$ (il suffira de la multiplier par 2 ensuite) en posant $\delta = a + ib$, et en cherchant à avoir $\delta^2 = 2i - 1$. On obtient les conditions $a^2 - b^2 = -1$ et $2ab = 2$, et en ajoutant la condition sur le module $a^2 + b^2 = \sqrt{5}$. On en déduit que $2a^2 = \sqrt{5} - 1$ et $2b^2 = \sqrt{5} + 1$, soit en constatant que a et b doivent être de même signe $\delta = \sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}} + i\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}}$, soit une racine carrée de Δ égale à $\tau = \sqrt{2\sqrt{5}-2} + i\sqrt{2\sqrt{5}+2}$. Enfin, les antécédents de $1+i$ seront les deux nombres complexes $z_1 = \dfrac{2+2i+\tau}{2} = 1 + i + \delta$, et $z_2 = 1 + i - \delta$.

2. Reprenons la même méthode qu'à la question précédente : $\dfrac{z^2+1}{z} = 2a$ donne $z^2 - 2az + 1 = 0$. Cette équation a un discriminant $\Delta = 4a^2 - 4 = 4(a^2-1)$. Comme $a \in]-1; 1[$, on peut poser $a = \cos(\theta)$, où $\theta \in \mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{R}\right\}$. On a alors $\Delta = -4\sin^2(\theta)$, dont une racine carrée est

$2i\sin(\theta)$. L'équation admet deux solutions complexes $z_1 = \dfrac{2a + 2i\sin(\theta)}{2} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta}$, et son conjugué $z_2 = e^{-i\theta}$. Ces deux solutions ont bien pour module 1, et sont distinctes avec la condition qu'on a imposée à θ.

3. Revenons à notre équation $z^2 - 2az + 1 = 0$, avec cette fois-ci $a \in \mathbb{C}$. Cette équation a toujours au moins une solution (complexe) donc l'application f est effectivement surjective. Elle en aura même toujours deux, sauf dans les cas où on tombe sur un discriminant nul. Ce discriminant étant égal à $4(a^2 - 1)$, il s'annule lorsque $a = 1$ (cas déjà constaté dans la première question) ou $a = -1$. Toutes les autres valeurs de a auront exactement deux antécédents par f.

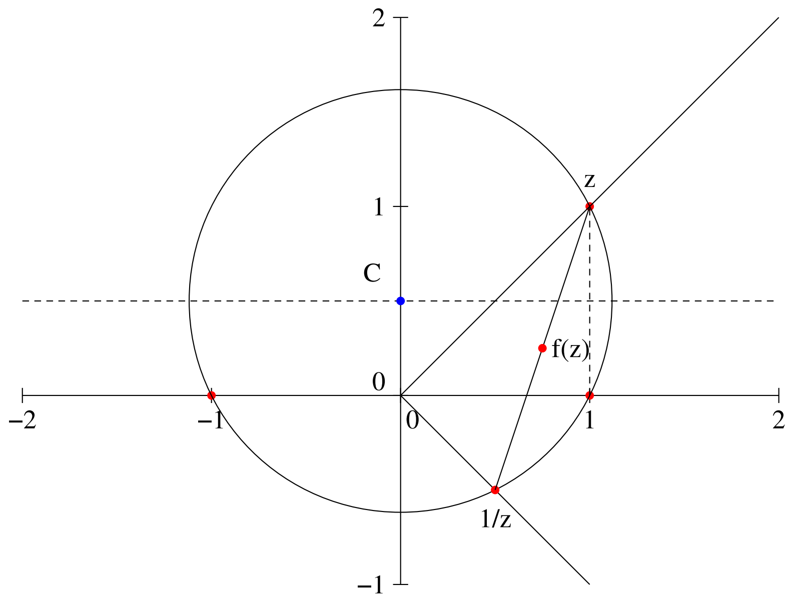
4. (a) Le facteur $\dfrac{1}{2}$ n'ayant aucune importance ici, $f(z) \in \mathbb{R}$ se produira si $\dfrac{z^2+1}{z} \in \mathbb{R}$, soit $(z^2+1)\overline{z} \in \mathbb{R}$. Posons donc $x + iy$, on a alors $(z^2+1)\overline{z} = (a^2 - b^2 + 2iab + 1)(a - ib)$. La partie imaginaire de ce nombre doit être nulle, soit $-a^2b + b^3 + 2a^2b - b = 0$. En factorisant par b, on a soit $b = 0$, soit $a^2 + b^2 - 1 = 0$. Autrement dit, z doit être un nombre réel (pas de surprise, il est évident que les images par f de nombres réels sont réelles) ou appartenir au cercle trigonométrique (pas de surprise non plus, on a vu à la question 2 que $f(e^{i\theta}) = \cos(\theta) \in \mathbb{R}$.

   (b) On reprend bien évidemment le calcul précédent (inutile de le refaire), et cette fois c'est la partie réelle qui doit être nulle, soit $a^3 - b^2a + 2ab^2 + a = 0$. On factorise cette fois-ci par a pour obtenir $a = 0$ ou $a^2 + b^2 + 1 = 0$. Le nombre complexe z doit donc appartenir à l'axe imaginaire (là encore, pas de surprise, si z est un imaginaire pur, $\dfrac{1}{z}$ aussi, et $f(z)$ également) ou ...rien du tout puisque la deuxième équation est celle d'un cercle de rayon négatif, autrement dit de l'ensemble vide.

   (c) Reprenons encore le même calcul, on doit avoir cette fois-ci $a(a^2+b^2-1) > 0$ (les divisions par 2 ou par $|z|$ qu'on a effectués au départ pour simplifier les équations ne changent rien au signe du résultat obtenu). Deux possiblités : soit $a > 0$ et $a^2+b^2 > 1$, c'est-à-dire qu'on se trouve dans le demi-plan supérieur et au-dessus de la forontière formée par le demi-cercle trigonométrique ; soit $a < 0$ et $a^2+b^2 < 1$, on est alors à l'intérieur du demi-disque trigonométrique inférieur.

5. Si z est réel, les points sont de toute évidence alignés. Sinon, la condition de cocyclicité se traduit par $\arg\left(\dfrac{z-1}{\frac{1}{z}-1}\right) = \arg\left(\dfrac{z+1}{\frac{1}{z}+1}\right)$ $[\pi]$ (quatre points A, B, C et D sont cocycliques si $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) = (\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}})[\pi]$), soit $\arg\left(\dfrac{z^2+z}{z+1}\right) = \arg\left(\dfrac{z^2-z}{1-z}\right)$. Cela se simplifie en $\arg(z) = \arg(-z)[\pi]$, c'est vrai. Si on suppose connues les constructions géométriques de base à la règle et au compas (médiatrices notamment), on peut alors procéder comme suit pour construire $f(z)$: on construit le cercle circonscrit au triangle formé par les images de 1, -1 et z, puis on construit l'intersection de ce cercle avec la symétrique de la demi-droite (Oz) par rapport à l'axe réel (en effet $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ est un multiple positif de $\overline{z}$, donc est situé sur cette demi-droite).

   Il ne reste plus qu'à construire le milieu du segment reliant z et $\dfrac{1}{z}$. Illustration sur la figure ci-dessous (évidemment, il n'y a pas tous les traits de construction), avec $z = 1 + i$. En pointillés, le tracé permettant d'obtenir une médiatrice du triangle et de construire le centre C du cercle circonscrit (la deuxième médiatrice est l'axe imaginaire, ce sera le cas pour n'importe quel choix de z), en traits pleins le cercle et les demi-droite évoqués ci-dessus.



6. On peut déjà constater que les points N, M et M' sont alignés puisque N est le milieu de $[MM']$. Il faut donc uniquement vérifier la condition sur les angles, c'est-à-dire que $\arg\left(\dfrac{z-\frac{1}{z}}{f(z)-1}\right) = \arg\left(\dfrac{f(z)+1}{z-\frac{1}{z}}\right)$, soit encore en multipliant tout par $2z$, $\arg\left(\dfrac{2z^2-2}{z^2+1-2z}\right) = \arg\left(\dfrac{z^2+1+2z}{2z^2-2}\right)$. On reconnait de belles identités remarquables, en écrivant les arguments de quotients comme différences d'arguments, on doit avoir $\arg(2(z^2-1)) - \arg((z-1)^2) = \arg((z+1)^2) - \arg(2(z^2-1))$, soit $\arg(z+1)+\arg(z-1)-2\arg(z-1) = 2\arg(z+1)-\arg(z-1)-\arg(z+1)$. Encore une fois, on ne peut que constater que cette égalité est toujours vérifiée.

7. (a) Courage, calculons : $\dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1-i}{2}$, donc $z_1 = \dfrac{1}{2}\left(1+i+\dfrac{1-i}{2}\right) = \dfrac{3+i}{4}$.
On recommence : $\dfrac{4}{3+i} = \dfrac{4(3-i)}{10} = \dfrac{6-2i}{5}$, donc $z_2 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3+i}{4}+\dfrac{6-2i}{5}\right)$ $= \dfrac{15+5i+24-8i}{40} = \dfrac{39-3i}{40}$.
Et on y retourne : $\dfrac{40}{39-3i} = \dfrac{40(39+3i)}{1530} = \dfrac{52+4i}{51}$, donc $z_3 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{39-3i}{40}+\dfrac{52+4i}{51}\right) = \dfrac{1\ 989-153i+2\ 080+160i}{4\ 080} = \dfrac{4\ 069+7i}{4\ 080}$.
Et un dernier pour la route, en maudissant intérieurement le concepteur du sujet : $\dfrac{4\ 080}{4\ 069+7i} = \dfrac{4\ 080(4\ 069-7i)}{16\ 556\ 810} = \dfrac{97\ 656-168i}{97\ 393}$, donc
$z_4 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4\ 069+7i}{4\ 080}+\dfrac{97\ 656-168i}{97\ 393}\right) = \dfrac{396\ 292\ 117+681\ 751i+398\ 436\ 480-685\ 440i}{794\ 726\ 880} = \dfrac{46\ 748\ 741-217i}{46\ 748\ 640}$. À défaut de trouver ces calculs palpitants, on peut constater que la partie réelle de z_n a l'air de se rapprocher rapidement de 1, et la partie imaginaire de 0.

(b) Pour que la suite soit bien définie, il faut qu'on soit toujours capable de calculer $f(z_n)$, ce qui nécessite d'avoir $z_n \neq 0$. Or, on a vu plus haut que les antécédents des imaginaires purs (0 compris) étaient imaginaires purs. Prouvons donc par récurrence que z_n ne sera jamais imaginaire pur, ce qui prouvera que z_{n+1} est toujours calculable et donc que la suite est bien définie. C'est en fait une récurrence triviale : $z_0 \notin i\mathbb{R}$ par hypothèse, et si $z_n \notin i\mathbb{R}$, z_{n+1} non plus puisqu'il possède un antécédent par f qui n'est pas imaginaire pur. La suite est donc bien définie.

(c) On peut rédiger sous forme de récurrence descendente : si $z_n = -1$, alors $z_{n-1} = -1$ puisque -1 n'a que lui-même comme antécédent. On prouve ainsi que tous les termes de la suite précédent z_n sont égaux à -1, jusqu'à $z_0 = -1$.

(d) En effet, puisqu'on aura jamais $z_n = -1$ d'après la question précédente, la suite (u_n) est bien définie. De plus, $u_{n+1} = \dfrac{z_{n+1} - 1}{z_{n+1} + 1} = \dfrac{\frac{1}{2}(z_n + \frac{1}{z_n}) - 1}{\frac{1}{2}(z_n + \frac{1}{z_n}) + 1} = \dfrac{z_n^2 - 1 - 2z_n}{z_n^2 + 1 + 2z_n} = \left(\dfrac{z_n - 1}{z_n + 1}\right)^2 = u_n^2$.

(e) Prouvons par récurrence que $u_n = (u_0)^{2^n}$. C'est vrai au rang 0 : $u_0 = (u_0)^1$. Supposons la propriété vraie au rang n, alors d'après la question précédente et l'hypothèse de récurrence, $u_{n+1} = (u_n)^2 = (u_0^{2^n})^2 = (u_0)^{2^{n+1}}$, ce qui achève de prouver la formule.

(f) On a $u_0 = \dfrac{z_0 - 1}{z_0 + 1}$, donc $|u_0| = \dfrac{|z_0 - 1|}{|z_0 + 1|}$. En posant $z_0 = a + ib$, on trouve $|u_0| = \dfrac{|a + ib - 1|}{|a + ib + 1|} = \sqrt{\dfrac{(a-1)^2 + b^2}{(a+1)^2 + b^2}}$. Ce module sera égal à 1 si $(a-1)^2 = (a+1)^2$, c'est-à-dire lorsque $a = 0$, ce qui est exclus depuis qu'on a décrété que $z_0 \notin i\mathbb{R}$. On aura $|u_0| < 1$ lorsque $a > 0$ car on a alors $(a-1)^2 < (a+1)^2$ puisque $|a-1| < |a+1|$, et de même $|u_0| > 1$ si $a < 0$.

(g) Si z_0 a une partie réelle négative, on aura $|u_n| = |u_0|^{2^n}$ qui va diverger vers $+\infty$ puisque $|u_0| > 1$, la suite (u_n) ne peut pas converger, et (z_n) non plus (si cette dernière convergeait vers l, (u_n) convergerait vers $\dfrac{l-1}{l+1}$ au vu de la définition de u_n). Par contre, si $|u_0| < 1$, le module de u_n va converger vers 0, et la suite (u_n) également (mis sous forme trigonométrique, on n'a aucune difficulté à voir que partie réelle et imaginaire vont tendre vers 0). Comme $u_n = \dfrac{z_n - 1}{z_n + 1}$, on a $u_n z_n + u_n = z_n - 1$, soit $z_n = \dfrac{-1 - u_n}{u_n - 1}$. Ce quotient va converger vers $\dfrac{-1}{-1} = 1$, ce qui confirme les observation faites à partir de $z_0 = 1 + i$.

Devoir à la maison n°3

PTSI B Lycée Eiffel

à rendre pour le 13 novembre 2012

Exercice 1

On cherche dans cet exercice toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2(2f'(x)+1)$. On va pour cela raisonner par analyse et synthèse (c'est-à-dire qu'on va chercher à déterminer le plus de caractéristiques possibles des solutions du problème, de manière à leur donner une forme précise, et on vérifiera ensuite que les fonctions de cette forme sont effectivement solutions).

1. Soit donc f une telle fonction. Prouver que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Déterminer une équation linéaire du second ordre vérifiée par f.
3. En posant $g(t) = f(e^t)$, déterminer une équation linéaire du second ordre à coefficients constants dont g est solution.
4. Résoudre cette équation.
5. En déduire les solutions possibles de l'équation de départ.
6. Conclure.

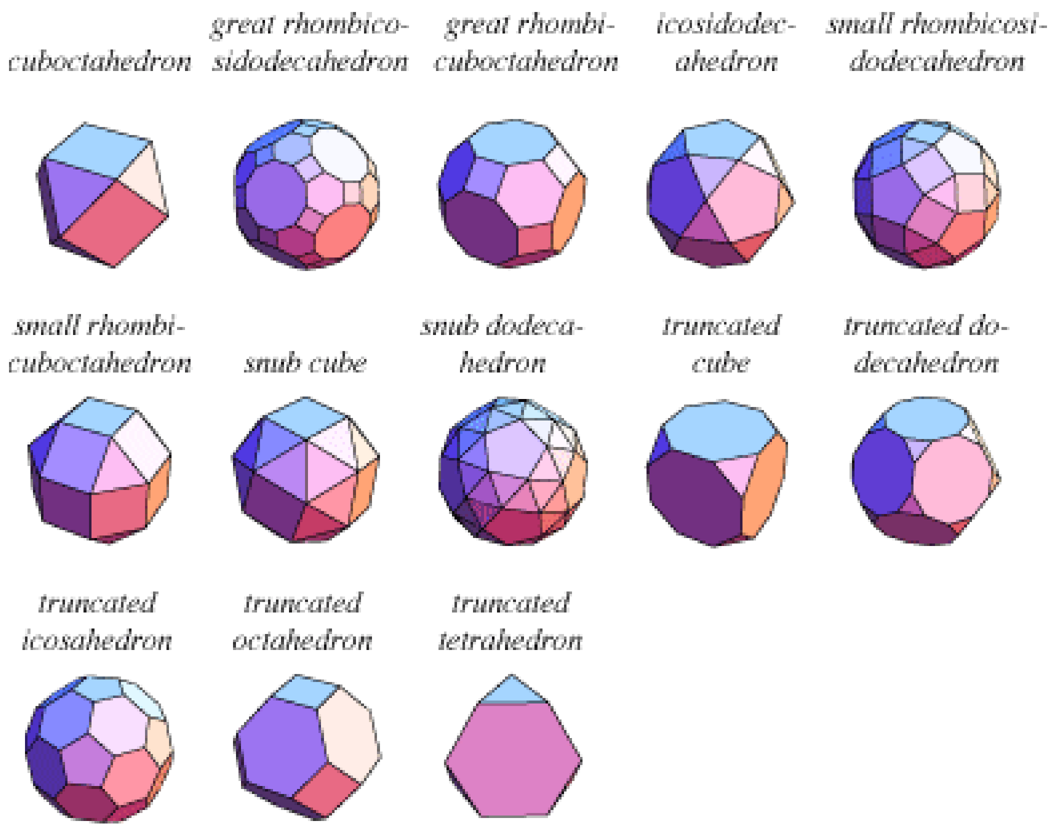
Exercice 2

On s'intéresse dans cet exercice à l'équation différentielle $(1-x)y' + xy = e^x$.

1. Sur quels intervalles va-t-on se placer pour résoudre l'équation normalisée ?
2. Résoudre sur chacun de ces intervalles l'équation homogène associée à notre équation différentielle. On pourra remarquer que $\frac{x}{1-x} = \frac{1}{1-x} - 1$.
3. En déduire les solutions de l'équation complète sur les intervalles définis à la première question.
4. Étudier l'existence de solutions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ tout entier.
5. Montrer qu'il existe une unique solution définie sur $\mathbb{R}$, qu'on notera f_α, vérifiant $f(0) = \alpha$, et que toutes ces solutions ont des tangentes parallèles en 0.
6. Montrer que les tangentes en leur point d'abscisse 2 aux courbes représentatives des fonctions f_α sont toutes concourantes.
7. Étudier les fonctions f_α sur $\mathbb{R}$ (variations, limites).
8. Tracer dans un même graphique les courbes intégrales correspondant à $\alpha = 0$, $\alpha = 1$, $\alpha = 2$ et $\alpha = -1$.

Pour s'occuper pendant les vacances

Un polyèdre régulier est un solide de l'espace constitué de faces qui sont toutes des polygones réguliers isométriques. On sait depuis l'Antiquité qu'il n'existe que cinq polyèdres réguliers : le tétraèdre (quatre faces triangulaires), le cube (six faces carrées), l'octaèdre (huit faces triangulaires), le dodécaèdre (douze faces pentagonales) et l'icosaèdre (vingt faces triangulaires). Si on autorise deux types de polygones réguliers au lieu d'un seul, on peut définir une nouvelle classe d'objets appelés polyèdres semi-réguliers, qui sont beaucoup plus nombreux. Parmi eux se trouvent notamment les 13 solides d'Archimède, dont vous trouverez ci-dessous une allure (ainsi que le nom anglais ; c'est pas très beau mais je n'ai pas eu envie de refaire toutes les figures à la main moi-même). Votre mission consiste à dessiner un patron d'un de ces solides (et vous avez le droit de constuire le solide en question et de le poser sur votre bureau pour décorer si vous le souhaitez).



Corrigé du DM3

Exercice 1

1. Pour que f puisse vérifier l'équation de départ, il faut certainement qu'elle soit dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. Réécrivons cette équation un peu différemment : $2f'(x) = \dfrac{1}{x^2}f\left(\dfrac{1}{x}\right) - 1$. Le membre de droite est obtenu comme produit et composée de fonctions dérivables, donc il constitue une fonction dérivable, ce qui prouve que f' est dérivable. La fonction f est donc deux fois dérivable.

2. Pour obtenir du second ordre, dérivons l'équation de départ : $-\dfrac{1}{x^2}f'\left(\dfrac{1}{x}\right) = 2x(2f'(x)+1) + 2x^2f''(x)$. Reste à exprimer le membre de gauche plus simplement. Pour cela, on reprend la relation obtenue dans la première question pour $2f'(x)$ et on l'applique à $\dfrac{1}{x}$ (attention à bien modifier également le $\dfrac{1}{x^2}$ à droite) : $2f'\left(\dfrac{1}{x}\right) = x^2f(x) - 1$. On peut remplacer pour obtenir $-\dfrac{1}{x^2} \times \dfrac{x^2f(x)-1}{2} = 4xf'(x) + 2x + 2x^2f''(x)$, soit $-\dfrac{1}{2}f(x) + \dfrac{1}{2x^2} = 4xf'(x) + 2x + 2x^2f''(x)$. La fonction f est donc solution de l'équation linéaire $2x^2f'' + 4xf' + \dfrac{1}{2}f = \dfrac{1}{2x^2} - 2x$.

3. Autrement dit, on pose $f(x) = g(\ln(x))$, ce qui est toujours possible sur $\mathbb{R}^{+*}$. On peut alors dériver deux fois : $f'(x) = \dfrac{1}{x}g'(\ln(x))$, puis $f''(x) = \dfrac{1}{x^2}g''(\ln(x)) - \dfrac{1}{x^2}g'(\ln(x))$. Remettons tout ça dans l'équation obtenue à la question précédente : $2g''(\ln(x)) - 2g'(\ln(x)) + 4g'(\ln(x)) + \dfrac{1}{2}g(\ln(x)) = \dfrac{1}{2x^2} - 2x$. En posant $t = \ln(x)$, soit $x = e^t$, la fonction g est donc solution de l'équation à coefficients constants $2g''(t) + 2g'(t) + \dfrac{1}{2}g(t) = \dfrac{1}{2}e^{-2t} - 2e^t$.

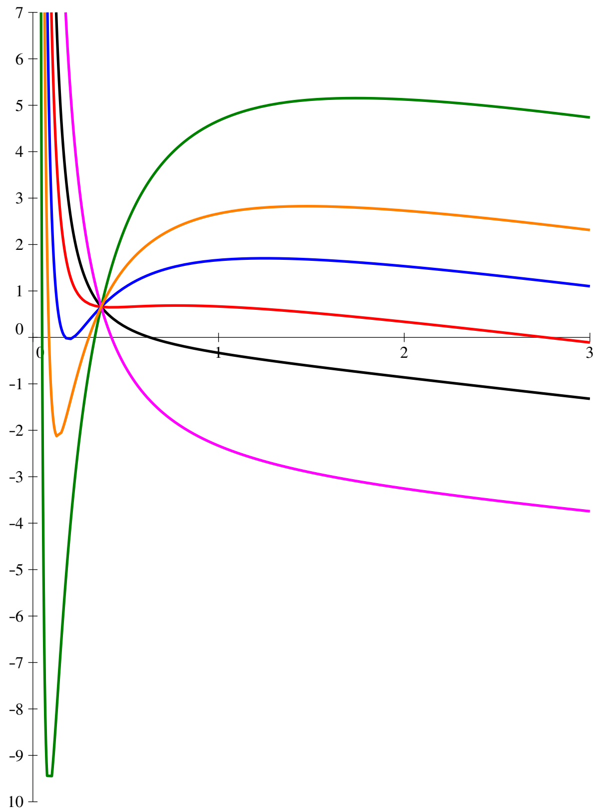
4. L'équation caractéristique associée à l'équation homogène est $2r^2 + 2r + \dfrac{1}{2} = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 4 - 4 = 0$, et admet donc pour racine double $r = -\dfrac{1}{2}$. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions $g_h : t \mapsto (A+Bt)e^{-\frac{t}{2}}$. Pour déterminer une solution particulière de l'équation complète, utilisons le principe de superposition. On cherche d'abord une solution à l'équation $2g'' + 2g' + \dfrac{1}{2}g = \dfrac{1}{2}e^{-2t}$ sous la forme $y_1(t) = ae^{-2t}$. Cela implique $y_1'(t) = -2ae^{-2t}$ et $y_1''(t) = 4ae^{-2t}$, donc y_1 est solution si $8ae^{-2t} - 4ae^{-2t} + \dfrac{a}{2}e^{-2t} = \dfrac{1}{2}e^{-2t}$, soit $a = \dfrac{1}{9}$. De même, on cherche une solution à l'équation $2g'' + 2g' + \dfrac{1}{2}g = 2e^t$ sous la forme $y_2(t) = be^t$, avec cette fois la condition $2b + 2b + \dfrac{1}{2}b = 2$, donc $b = \dfrac{4}{9}$. Une solution particulière de l'équation est donc donnée par $g_p(t) = \dfrac{1}{9}e^{-2t} - \dfrac{4}{9}e^t$, et les solutions complètes de l'équation sont les fonctions $g : t \mapsto (A+Bt)e^{-\frac{t}{2}} + \dfrac{1}{9}e^{-2t} - \dfrac{4}{9}e^t$.

5. En remontant le changement de variables effectué, on doit avoir $f(x) = g(\ln(x)) = \dfrac{A + B\ln(x)}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{9x^2} - \dfrac{4}{9}x$.

6. Comme on a travaillé uniquement par implications, il reste à vérifier si les fonctions obtenues sont vraiment solutions du problème. D'un côté, on a $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \sqrt{x}(A - B\ln(x)) + \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{4}{9x}$; de l'autre $f'(x) = \dfrac{\frac{B}{\sqrt{x}} - \frac{A+B\ln(x)}{2\sqrt{x}}}{x} - \dfrac{2}{9x^3} - \dfrac{4}{9} = \dfrac{2B - A - B\ln(x)}{2x\sqrt{x}} - \dfrac{2}{9x^3} - \dfrac{4}{9}$, donc $x^2(2f'(x)+1) =$

$\sqrt{x}(2B-A-B\ln(x))-\frac{4}{9x}-\frac{8}{9}x^2+x^2=\sqrt{x}(2B-A-B\ln(x))-\frac{4}{9x}+\frac{x^2}{9}$. Les deux expressions coincident à l'unique condition que $2B-A=A$, soit $A=B$. Les fonctions solutions du problème initial sont donc toutes les fonctions $f : x \mapsto \frac{A(1+\ln(x))}{\sqrt{x}}+\frac{1}{9x^2}-\frac{4}{9}x$.

Et même si ce n'était pas demandé, on peut tracer quelques allures de courbes, ici en noir la courbe correspondant à $A=0$, en rouge $A=1$, en bleu $A=2$, en orange $A=3$, en vert $A=5$, en rose $A=-2$. Toutes les courbes passent par un point commun pour $x=\frac{1}{e}$ (puisqu'alors $1+\ln(x)=0$), d'ordonnée $\frac{e^2}{9}-\frac{4}{9e}\simeq 0.66$.



Exercice 2

On s'intéresse dans cet exercice à l'équation différentielle $(1-x)y'+xy=e^x$.

1. Puisqu'il faut diviser par $1-x$, on va effectuer une résolution séparée sur $]-\infty;1[$ et sur $]1;+\infty[$.
2. On cherche donc à résoudre l'équation linéaire $y'+\left(\frac{1}{1-x}-1\right)y=\frac{e^x}{1-x}$. L'équation homogène associée a pour solutions les fonctions $y_h : x \mapsto Ke^{x+\ln|1-x|}=Ke^x(1-x)$ (quitte à changer le signe de la constante sur $]-\infty;1[$).
3. Pour trouver une solution particulière à l'équation, rien de mieux ici que d'utiliser la méthode de variation de la constante : on cherche $y_p(x)=K(x)(1-x)e^x$, ce qui donne $y_p'(x)=K'(x)(1-x)e^x-K(x)e^x+K(x)(1-x)e^x$. La fonction y_p est donc solution de l'équation initiale si $K'(x)(1-x)e^x-K(x)e^x+K(x)(1-x)e^x+K(x)e^x-K(x)e^x(1-x)=\frac{e^x}{1-x}$, c'est-à-dire si $K'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$. On peut choisir $K(x)=\frac{1}{1-x}$, soit $y_p(x)=e^x$. Bon, euh oui, en fait on

aurait pu se rendre compte que cette solution était plus ou moins évidente. Les solutions de l'équation complète sont donc les fonctions $y : x \mapsto (1 + K(1-x))e^x$.

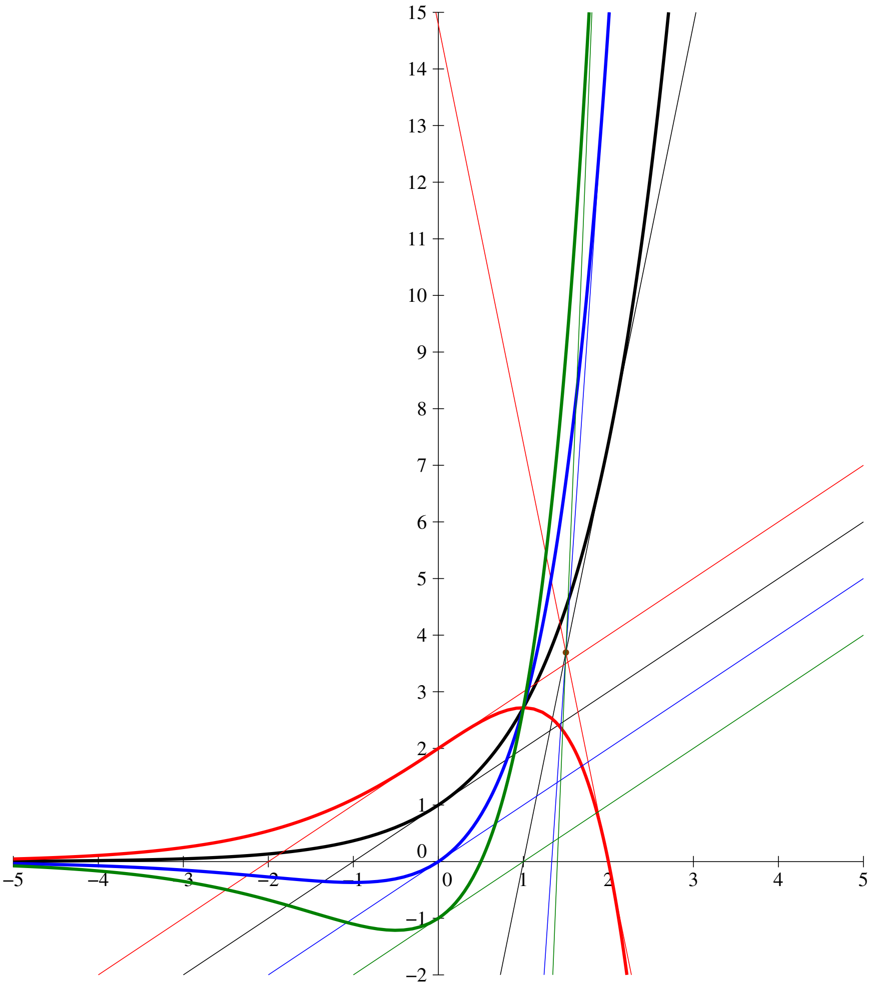
4. Les fonctions obtenues sont certainement définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. Elles vérifient toutes $y(1) = e$, et comme $y'(x) = (-K + 1 + K(1-x))e^x = (1 - Kx)e^x$, on a $y'(1) = (1-K)e$. On ne peut donc pas recoller des morceaux ayant une valeur distincte de la constante K.

5. Avec la forme précédente, $y(0) = 1+K$, donc $f(0) = \alpha$ se produit si et seulement si $K = \alpha - 1$. La solution cherchée est bien unique. De plus, $y'(0) = 1$ quelle que soit la valeur de K, donc les tangentes de toutes les solutions en 0 sont effectivement parallèles.

6. Continuons nos petits calculs : $y(2) = (1-K)e^2$, et $y'(2) = (1-2K)e^2$. L'équation de la tangente au point d'abscisse 2 est donc $(1-2K)e^2(x-2) + (1-K)e^2 = [(1-2K)x + 3K - 1]e^2$. Si on veut que toutes ces droites soient concourantes, il faut trouver une valeur de x pour laquelle l'expression précédente ne dépend pas de K, ce qui est effectivement le cas si $-2Kx + 3K = 0$, soit $x = \dfrac{3}{2}$. On a alors toujours $y = \dfrac{e^2}{2}$, les tangentes se coupent donc au point de coordonnées $\left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{e^2}{2}\right)$.

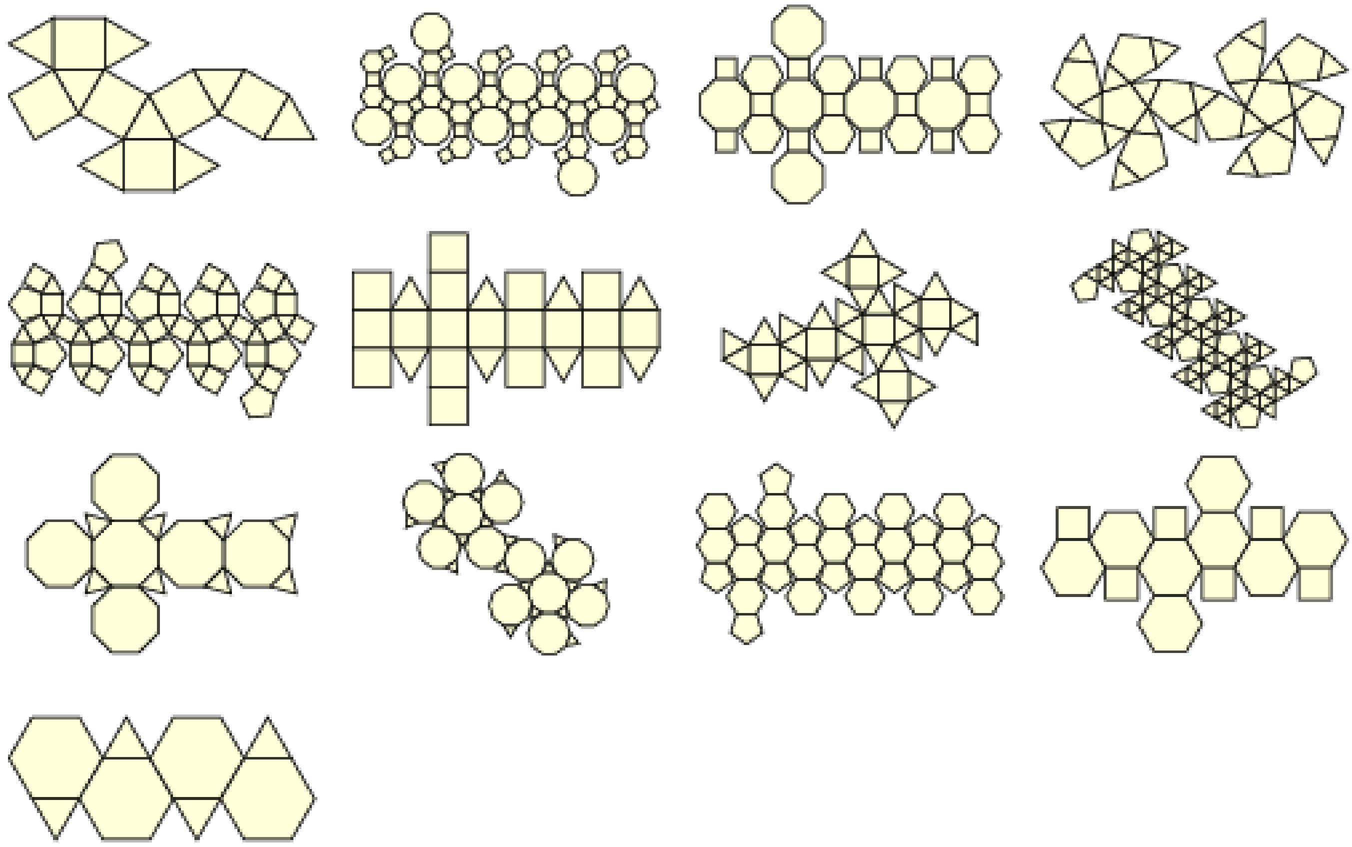
7. Rien de bien difficile, la dérivée s'annule pour $x = \dfrac{1}{K}$ (sauf évidemment dans le cas particulier $K = 0$, où y est simplement la fonction exponentielle qu'on n'a pas vraiment besoin d'étudier), la fonction est croissante sur $\left]-\infty; \dfrac{1}{K}\right[$ et croissante sur $\left]\dfrac{1}{K}; +\infty\right[$, la limite de y en $-\infty$ est toujours nulle (pas croissance comparée), en $+\infty$ ça dépend du signe de K : si $K < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = +\infty$, et si $K > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = -\infty$.

8. On peut bien évidemment tracer les tangentes étudiées plus haut en plus des courbes des fonctions, qui correspondent à $K = -1$, $K = 0$ (fonction exponentielle), $K = 1$ et $K = -2$. En bleu $\alpha = 0$, en noir $\alpha = 1$, en rouge $\alpha = 2$ et en vert $\alpha = -1$. Les tangentes en 0 ont pour équations respectives $y = x$, $y = x + 1$, $y = x + 2$ et $y = x + 3$. Et les tangentes en 2 ont pour équation respectives $y = (3x - 4)e^2$, $y = (x - 1)e^2$, $y = (-x + 2)e^2$ et $y = (5x - 7)e^2$.

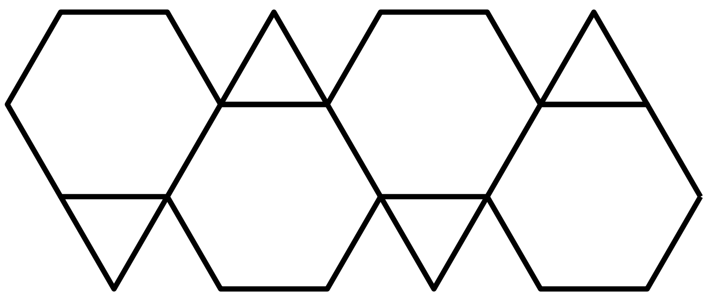


Pour s'occuper pendant les vacances

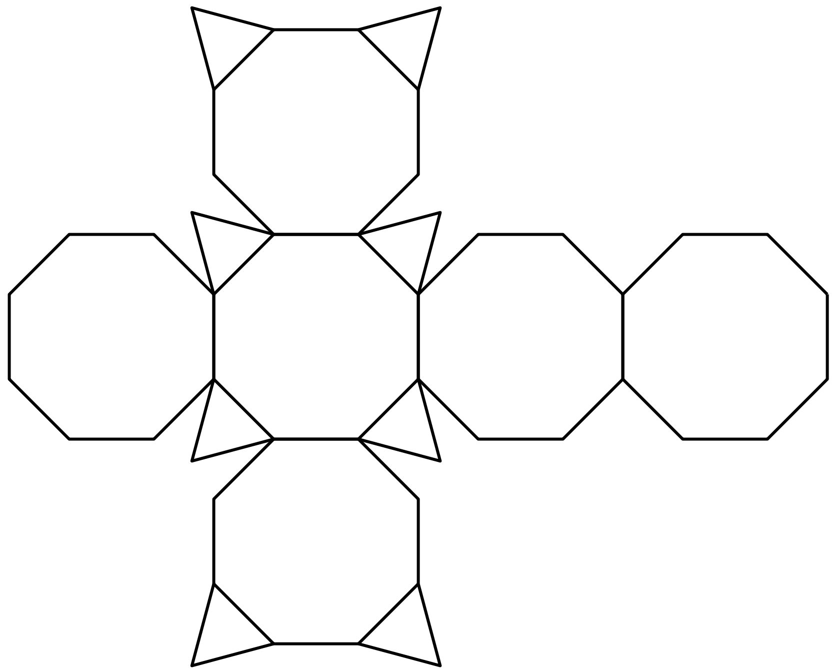
Je vous mets pour commencer une image illisible contenant les patrons de tous les solides d'Archimède, issue de la même page que le fichier inclus dans votre énoncé de DM. De gauche à droite sur la première ligne : le cuboctaèdre, l'icosidodécaèdre tronqué, le cuboctaèdre tronqé, l'icosidodécaèdre. Deuxième ligne : le petit rhombicosidodécaèdre, le petit rhombicuboctaèdre, le cube adouci et le dodécaèdre adouci. Troisième ligne : le cube tronqué, le dodécaèdre tronqué, l'icosaèdre tronqué et l'octaèdre tronqué. Et tout seul dans son coin sur la quatrième ligne, le tétraèdre tronqué.



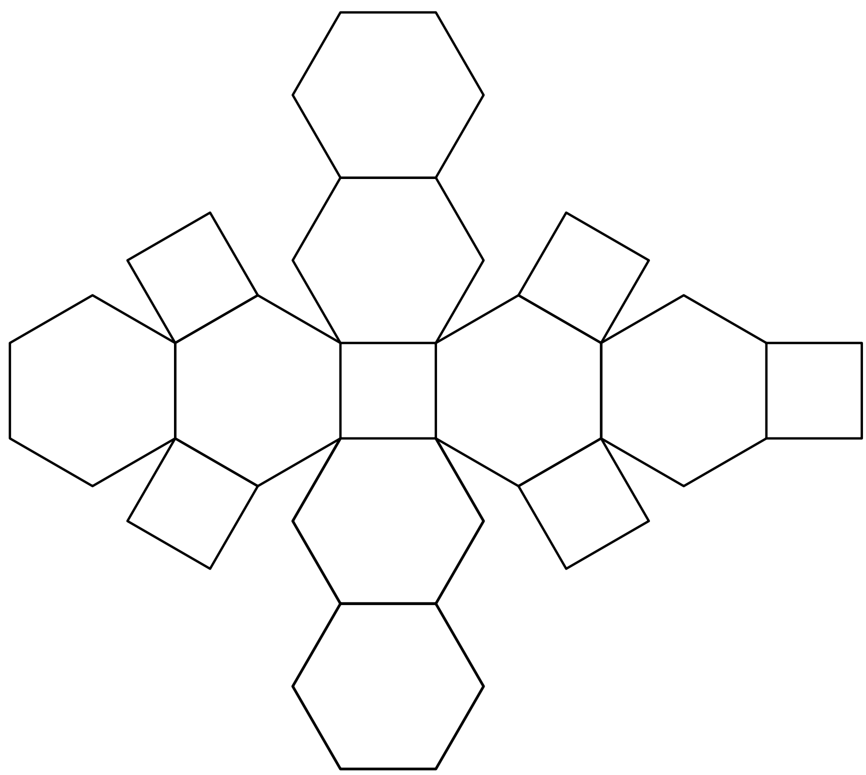
Et comme vous allez protester à juste titre que c'est vraiment illisible, j'en mets quelques-uns en plus gros (ceux qui ne prennent pas douze pages pour qu'on puisse voir quelque chose). Commençons par le tétraèdre tronqué, constitué du nombre ridiculement petit de huit faces (quatre hexagones, quatre triangles équilatéraux). Il se nomme ainsi car on peut l'obtenir à partir du tétraèdre régulier en coupant ses coins.



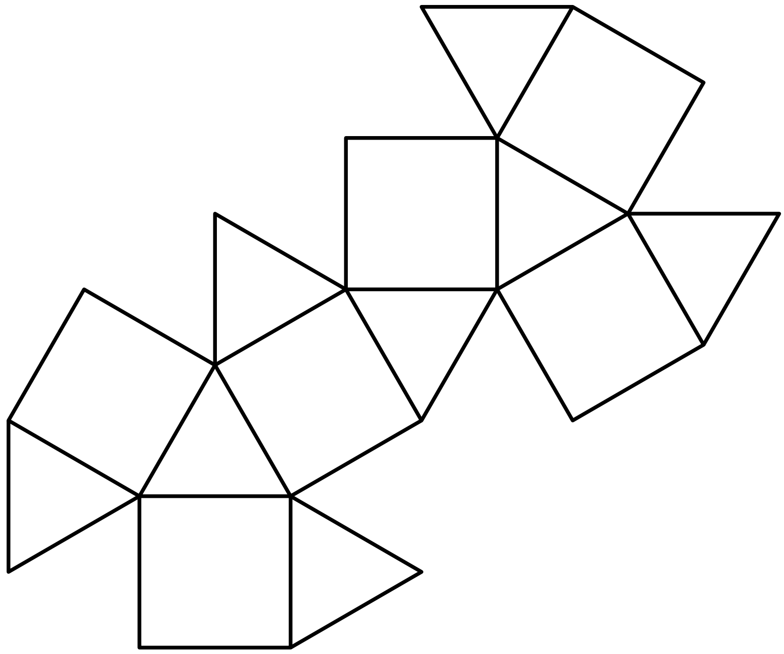
Enchainons avec le cube tronqué (vous l'aurez deviné, on peut l'obtenir en coupant les coins d'un cube) qui a 14 faces, six octogones et huit triangles équilatéraux.



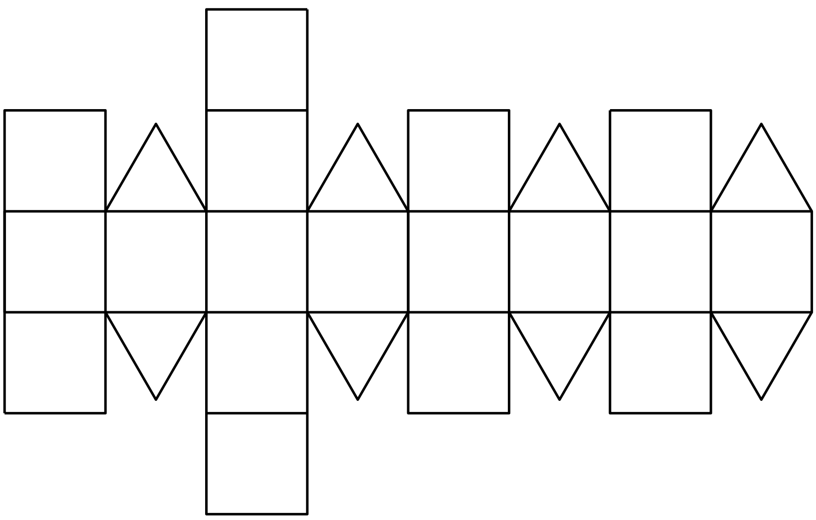
Toujours avec 14 faces, nous avons l'octaèdre tronqué : six carrés et huit hexagones.



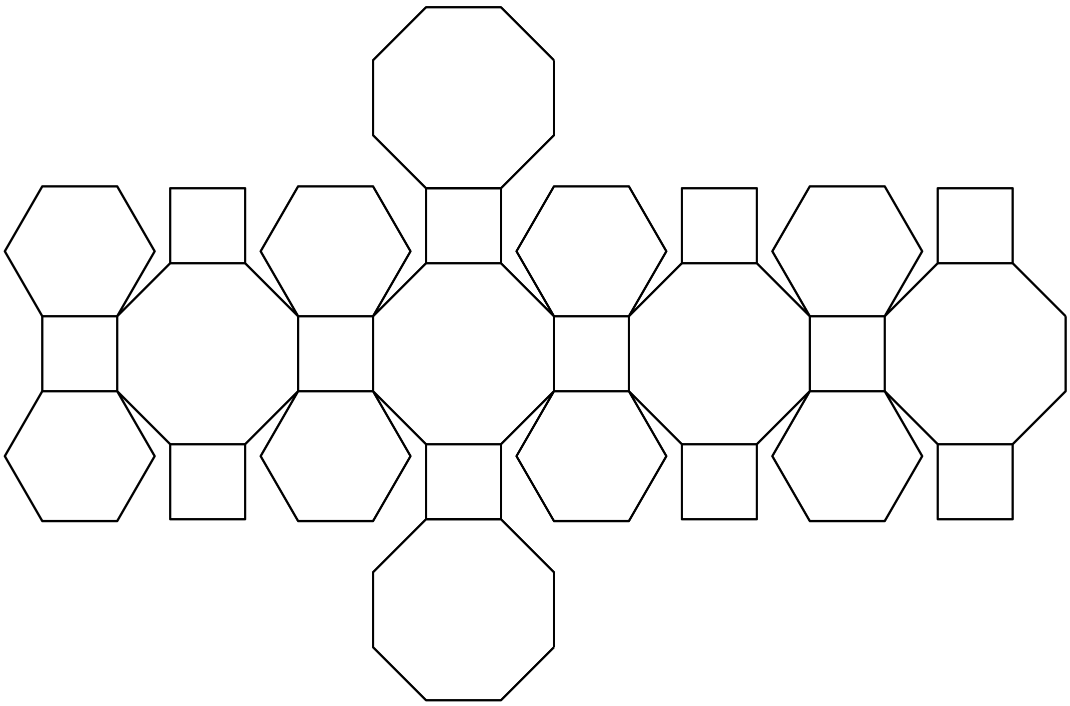
Dernier specimen à 14 faces, qui pour le coup n'est obtenu en tronquant personne, le cuboctaèdre, six carrés et huit triangles équilatéraux.



On enchaîne avec 26 faces pour le petit rhombicuboctaèdre (dix-huit carrés et huit triangles équilatéraux) :



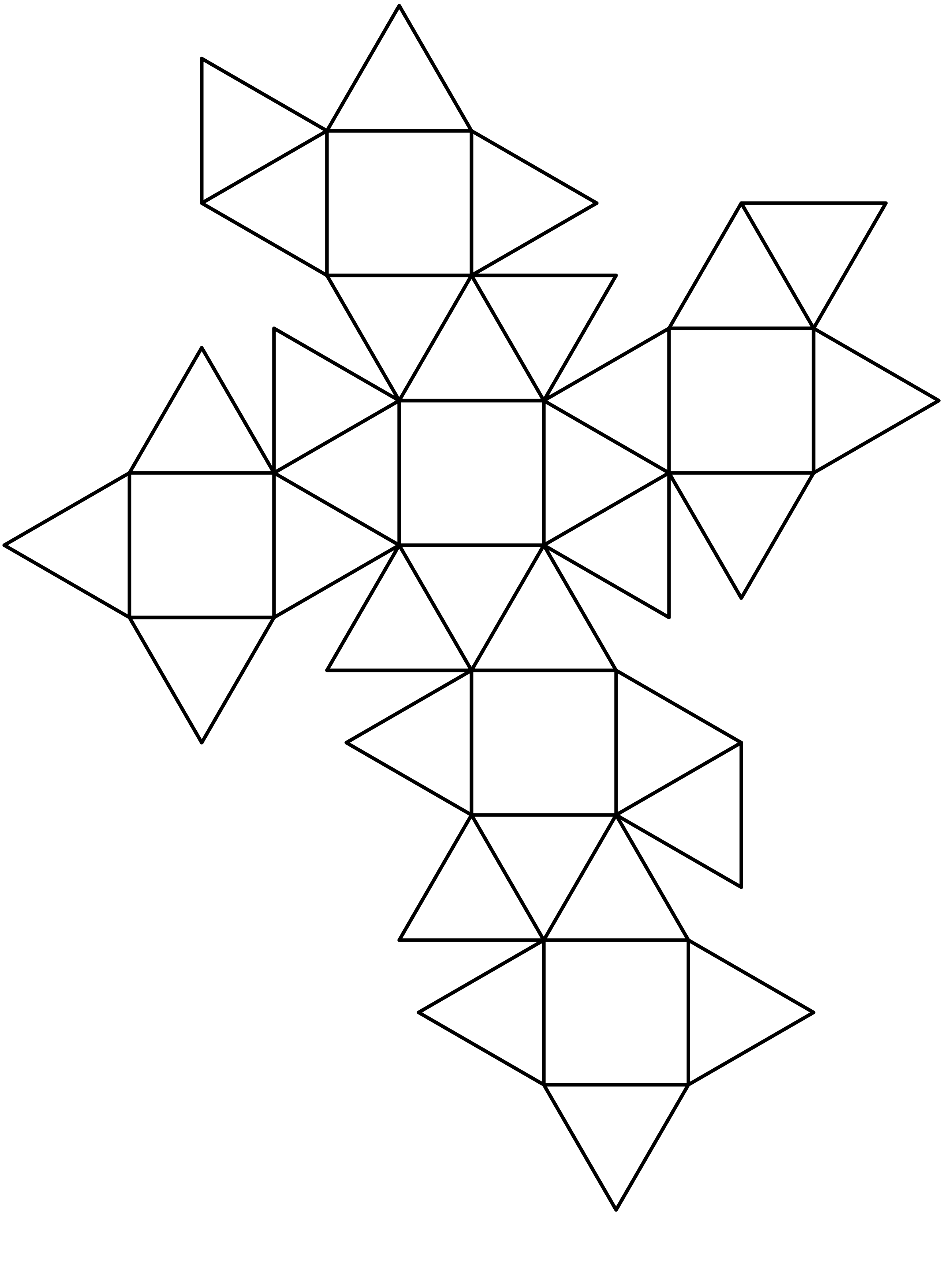
Et également 26 faces pour le cuboctaèdre tronqué (oui, on peut tronquer des polyèdres qui ne sont déjà plus réguliers et obtenir d'autres solides d'Archimède), premier à avoir trois types de faces avec douze carrés, huit hexagones et six octogones.



Je vous épargne les patrons suivants. À 32 faces, nous avons le dodécaèdre tronqué (vingt triangles équilatéraux et douze décagones, bon courage pour tracer un patron avec des décagones) ; l'icosaèdre tronqué (douze pentagones et vingt hexagones, c'est lui le ballon de football) et l'icosidodécaèdre (vingt triangles équilatéraux et douze pentagones). On passe à 38 faces pour le cube adouci (six carrés et pas moins de trente-deux triangles équilatéraux), puis à 62 pour l'icosidodécaèdre tronqué (trente carrés, vingt hexagones et douze décagones, forcément, en tronquant des horreurs on obtient pas des trucs très beaux) et pour le petit rhombicosidodécaèdre (vingt triangles équilatéraux, trente carrés et douze pentagones) et enfin le record : 92 faces pour le cube dodécaèdre adouci (douze pentagones et quatre-vingt triangles équilatéraux). En fait, le cube et le dodécaèdre adoucis peuvent être visualisés en partant du cube et du dodéaèdre, et en insérant des rangées de triangles équilatéraux autour de chaque face (d'où leur nom).

Vous pouvez compter le nombre de faces F, d'arêtes A et de sommets S pour chacun de ces solides, et vérifier qu'on a toujours $S - A + F = 2$. Prenons par exemple le petit rhombicosidodécaèdre : il a 62 faces. Chacune des 20 faces triangulaires contient trois arêtes, chaque face carrée quatre arêtes et chaque face pentagonale cinq arêtes, donc $3 \times 20 + 4 \times 30 + 5 \times 12 = 240$ arêtes, à diviser par deux puisque chaque arête est commune à deux faces. Notre solide contient donc 120 arêtes. Même type de calcul pour les sommets, en constantant que chaque sommet est commun à quatre faces : on tombe donc sur $\dfrac{240}{4} = 60$ sommets. On vérifie que $62 - 120 + 60 = 2$.

Allez, pour finir en beauté, un patron de cube adouci :



Devoir à la maison n°4

PTSI B Lycée Eiffel

à rendre pour le 7 décembre 2012

Exercice

Tracer le plus précisément possible l'arc paramétré défini par la fonction $f : t \mapsto \left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & 2t^2 - 3t \\ y(t) & = & 2t + \dfrac{3}{t} \end{array} \right.$.

Montrer que la courbe a trois points d'inflexion et que ces points sont alignés.

Problème (deuxième problème du sujet Petites Mines 2006)

Soit n un entier naturel. Si n est non nul, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui associe à un réel x lorsque c'est possible $f_n(x) = \dfrac{\sin(x)}{2 - \cos(x)} - \dfrac{x}{n}$. On note f_0 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui associe à un réel x lorsque c'est possible $f_0(x) = \dfrac{\sin(x)}{2 - \cos(x)}$.

Généralités sur f_n.

Soit n un entier naturel fixé.

1. Déterminer le domaine de définition D de f_n.

2. f_n est-elle paire ? f_n est-elle impaire ? On justifiera sa réponse.

3. f_n est-elle 2π-périodique ?

4. Montrer qu'il suffit d'étudier f_n sur $[0, \pi]$ pour tracer sa courbe sur D tout entier. On justifiera sa réponse.

Étude de la fonction f_0.

5. Étudier la dérivabilité de f_0 sur D. Déterminer l'expression de sa dérivée.

6. Étudier le signe de la dérivée de f_0 sur $[0, \pi]$.

7. Déterminer le tableau de variations sur $[0, \pi]$ et tracer l'allure de la courbe de f_0 sur $\mathbb{E}$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé (on rappelle que : $\sqrt{3}$ a pour valeur $1,732$ comme valeur approchée par défaut à 10^{-3} près).

8. Déterminer les valeurs maximales et minimales atteintes par $f_0(x)$ quand x parcourt $\mathbb{R}$. En déduire la valeur maximale atteinte par $|f_0(x)|$ lorsque x parcourt $\mathbb{R}$.

Utilisation d'une primitive de f_0.

9. Déterminer une primitive de f_0 sur $\mathbb{R}$. En déduire $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(t)}{2 - \cos(t)}\, dt$.

Soit l'équation différentielle $(E) : y'(x) + \dfrac{\sin(x)}{2 - \cos(x)} y(x) = 2\sin(x)$.

10. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation sans second membre (H) associée à (E).

11. Chercher une solution particulière de (E) sous la forme $x \mapsto a\cos(x) + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

12. Trouver la fonction h définie sur $\mathbb{R}$, solution de (E) et qui vérifie : $h(0) = 1$.

Étude d'une courbe polaire.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Soit Γ la courbe définie par l'équation polaire : $\rho = \dfrac{\sin(\theta)}{2-\cos(\theta)}$. Pour tout réel θ on notera $\overrightarrow{u_\theta}$ le vecteur $\overrightarrow{u_\theta} = \cos(\theta)\overrightarrow{i} + \sin(\theta)\overrightarrow{j}$ et $M(\theta)$ le point du plan tel que $\overrightarrow{OM(\theta)} = \dfrac{\sin(\theta)}{2-\cos(\theta)}\overrightarrow{u_\theta}$.

13. Soit un élément θ de D. Montrer qu'il existe une symétrie s telle que $s(M(\theta)) = M(-\theta)$.

14. Déterminer une équation cartésienne de la tangente à Γ au point $M\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

15. Tracer l'allure de la courbe Γ.

Étude de la fonction : $g : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x(2-\cos(x))}$

16. Déterminer le domaine de définition de g.

17. Montrer que g admet une limite finie l en 0.

On prolonge g par continuité en posant : $g(0) = l$.

On admet que g est dérivable sur $]0, \pi]$ et que pour tout x de $]0, \pi]$, $g'(x)$ est strictement négatif.

18. Montrer que g est une bijection entre $[0, \pi]$ et un ensemble I à définir. On notera h sa réciproque.

Étude d'une suite qui annule f_n.

Soit n un entier naturel non nul.

19. Montrer que si a est un réel strictement positif qui annule f_n, alors a appartient à l'intervalle $[0, n\sqrt{3}]$.

20. Montrer qu'il existe un unique réel x_n appartenant à $]0, \pi]$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

21. Montrer que la suite (x_n) est convergente et déterminer sa limite.

Corrigé du DM4

Exercice

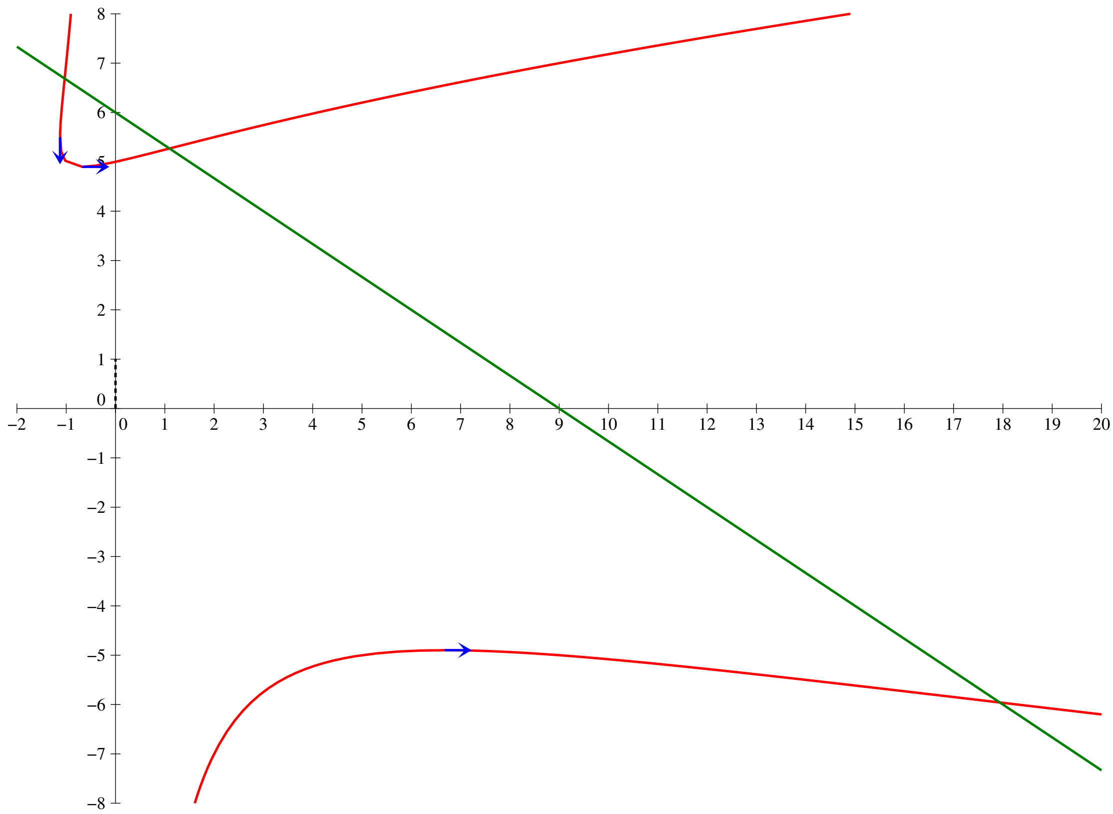
La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$. Les deux fonctions coordonnées sont dérivables sur leur ensemble de définition, de dérivées $x'(t) = 4t - 3$ (qui s'annulera uniquement pour $t = \dfrac{3}{4}$), et $y'(t) = 2 - \dfrac{3}{t^2} = \dfrac{2t^2-3}{t^2}$, qui s'annule lorsque $t^2 = \dfrac{3}{2}$, soit $t = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. On calcule $x\left(\dfrac{3}{4}\right) = 2 \times \dfrac{9}{16} - \dfrac{9}{4} = -\dfrac{9}{8}$; $y\left(\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{3}{2} + 4 = \dfrac{11}{2}$; $x(0) = 0$; $x\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right) = 2 \times 32 - 3\sqrt{\dfrac{3}{2}} = 3\left(1 - \sqrt{\dfrac{3}{2}}\right) \simeq -0.67$; $y\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right) = 2\sqrt{\dfrac{3}{2}} + 3\sqrt{\dfrac{2}{3}} = 2\sqrt{6} \simeq 4.9$; $x\left(-\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right) = 3\left(1 + \sqrt{\dfrac{3}{2}}\right) \simeq 6.7$; $y\left(-\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right) = -2\sqrt{6}$. Voila le tableau de variations correspondant :

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		0		$\frac{3}{4}$		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$x'(t)$		$-$		$-$	-3	$-$	0	$+$		$+$	
$x(t)$	$+\infty$	$\searrow$	6.7	$\searrow$	0	0	$\searrow$	$-\frac{9}{8}$	$\nearrow$	-0.67	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$+$	0	$-$	‖	$-$		$-$	0	$+$	
$y(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-2\sqrt{6}$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{11}{2}$	$\searrow$	$2\sqrt{6}$	$\nearrow$	$+\infty$

Outre l'asymptote verticale en 0 (qui est simplement l'axe des ordonnées), on peut étudier les branches infinies en $\pm\infty$, où les deux fonctions coordonnées ont des limites infinies. On calcule sans difficulté $\lim\limits_{t\to\pm\infty} \dfrac{y(t)}{x(t)} = 0$, il y a donc une branche parabolique de direction (Ox) des deux côtés.

Reste le calcul des points d'inflexion : $x''(t) = 4$ et $y''(t) = \dfrac{6}{t^3}$, donc $x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t) = \dfrac{6(4t-3)}{t^3} - \dfrac{4(2t^2-3)}{t^2} = \dfrac{-8t^3+36t-18}{t^3}$. On ne sait pas trouver les racines du numérateur, mais il en possède au maximum trois. Comme par ailleurs $\lim\limits_{t\to-\infty} -8t^3+36t-18 = +\infty$; $-8\times 0^3+36\times 0-18 < 0$; $-8\times 1^3+36\times 1-18 = 10 > 0$; et $\lim\limits_{t\to+\infty} -8t^3+36t-18 = -\infty$, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer qu'il y aura une racine dans chacun des intervalles $]-\infty;-1[$; $]-1;0[$ et $]0;+\infty[$, et donc trois racines au total, soit trois points d'inflexion. Inutile de trouver ces racines pour prouver que les trois points correspondants sont alignés : ils seront sur une même droite s'ils vérifient une équation de la forme $ax(t) + by(t) + c = 0$, soit $\dfrac{2at^3 - 3at^2 + 2bt^2 + 3b + ct}{t} = 0$. On retrouve la condition donnant les points d'inflexion en prenant $2a = -8$, $2b - 3a = 0$, $c = 36$ et $3b = -18$, soit $a = -4$, $b = -6$ et $c = 36$. Puisqu'on a trouvé une solution au système, les trois points d'inflexion sont donc situés sur la droite d'équation $-4x - 6y + 36 = 0$, ou encore $2x + 3y - 18 = 0$, ou enfin $y = -\dfrac{2}{3}x + 6$.

Voici la courbe, avec la droite contenant les points d'inflexion en vert :



Problème

Généralités sur f_n.

1. Un cosinus pour difficilement être égal à 2, toutes les focntions sont définies sur $\mathbb{R}$.

2. Puisque $f_n(-x) = \dfrac{-\sin(x)}{2-\cos(x)} + \dfrac{x}{n} = -f_n(x)$, toutes les fonctions sont impaires.

3. Non. Ah, il faut détailler ? En fait, la fonction f_n n'est pas 2π-périodique lorsque $n \geqslant 1$, puisqu'on a alors $f_n(x+2\pi) = f_n(x) - \dfrac{2\pi}{n}$, par contre f_0 est bien 2π-périodique.

4. Vu la relation observée à la question précédente, la courbe représentative de f_n est invariante par translation de vecteur $2\pi\overrightarrow{i} + \dfrac{2\pi}{n}\overrightarrow{j}$. Cette même courbe est par ailleurs symétrique par rapport à O à cause de l'imparité de f_n. On peut donc se contenter d'étudier sur $[0;\pi]$, on complétera la courbe par symétrie pour obtenir $[-\pi;0]$, puis par translation.

Étude de la fonction f_0.

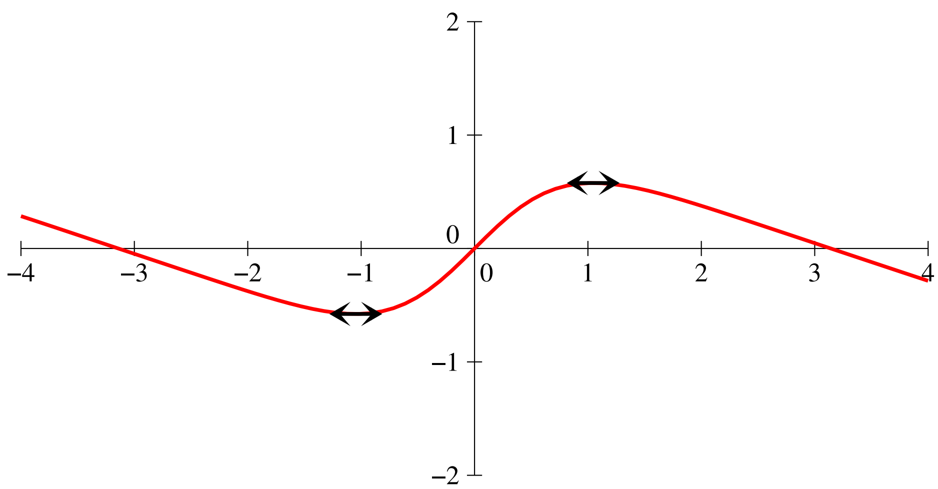
5. La fonction est dérivable comme quotient de fonctions usuelles, de dérivée
$f_0'(x) = \dfrac{\cos(x)(2-\cos(x)) - \sin(x)\times\sin(x)}{(2-\cos(x))^2} = \dfrac{2\cos(x)-1}{(2-\cos(x))^2}$.

6. Cette dérivée est du signe de $2\cos(x)-1$, qui s'annule lorsque $\cos(x) = \dfrac{1}{2}$, soit $x = \dfrac{\pi}{3}$. Elle est positive sur $\left[0;\dfrac{\pi}{3}\right]$ et négative sur $\left[\dfrac{\pi}{3};\pi\right]$.

7. Calculons $f_0\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2-\frac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
f			$\frac{\sqrt{3}}{3}$		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	0				0

Un repère orthonormal n'est pas très adapté au tracé de la courbe, mais pusiqu'on nous le demande, respectons l'énoncé :



8. La fonction étant 2π-périodique, il suffit de trouver les valeurs extrêmes sur $[-\pi; pi]$. Par imparité, les valeurs obtenues sur $[-\pi; 0]$ seront opposées de celles obtenues sur $[0; \pi]$. Le maximum sur $\mathbb{R}$ est donc $\frac{\sqrt{3}}{3}$ et le minimum $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. En valeur absolue, $|f_0(x)| \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Utilisation d'une primitive de f_0.

9. La fonction f_0 étant de la forme $\frac{u'}{u}$, elle a pour primitive $\ln(2 - \cos(x))$ (pas besoin de valeur absolue, c'est toujours positif), donc $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(t)}{23 - \cos(t)}\, dt = [\ln(2 - \cos(x))]_0^{\frac{\pi}{3}} = \ln\left(\frac{3}{2}\right) - \ln(1) = \ln(3) - \ln(2) \simeq 0.4$.

10. Puisqu'on connait une primitive de f_0, c'est immédiat, les solutions sont les fonctions y_h : $x \mapsto Ke^{-\ln(2-\cos(x))} = \frac{K}{2 - \cos(x)}$.

11. Cherchons donc, si $y_p(x) = a\cos(x) + b$, alors $y_p'(x) = -a\sin(x)$, et $y_p'(x) + \frac{\sin(x)}{2 - \cos(x)} y_p(x) = -a\sin(x) + \sin(x)\frac{a\cos(x) + b}{2 - \cos(x)}$. Il suffit clairement de prendre $a = -1$ et $b = 2$ pour trouver $y_p' + f_0 y_p = 2\sin(x)$. Les solutions complètes sont alors les fonctions $x \mapsto 2 - \cos(x) + \frac{K}{2 - \cos(x)}$.

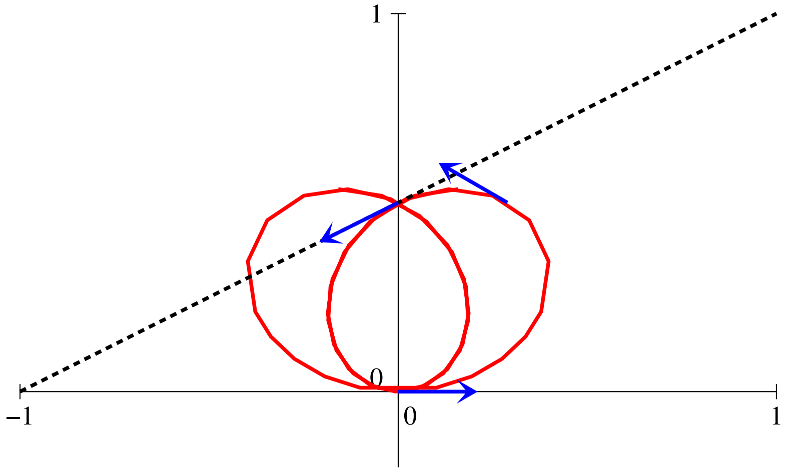
12. La condition $h(0) = 1$ donne $1 + K = 1$, soit $K = 0$, donc $h(x) = 2 - \cos(x)$.

Étude d'une courbe polaire.

13. Il suffit de constater que $\rho(-\theta) = -\rho(\theta)$ (à cause de l'imparité de f_0) pour conclure à une symétrie par rapport à (Oy).

14. Calculons $\rho\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$, et $\rho'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{4}$ (en reprenant la formule obtenue pour f_0'), donc $\overrightarrow{f'\left(\frac{\pi}{2}\right)} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{u_{\frac{\pi}{2}}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{v_{\frac{\pi}{2}}} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{i} - \frac{1}{4}\overrightarrow{j}$. La tangente a donc pour vecteur normal $\left(\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}\right)$ et passe par le point $\left(0; \frac{1}{2}\right)$, donc a pour équation $\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}y = -\frac{1}{4}$, ou si l'on préfère $x - 2y + 1 = 0$.

15. On peut simplement tracer une tangente radiale en 0 et en π (où la courbe passe par l'origine), et une tangente orthoradiale en $\frac{\pi}{3}$ (où la courbe passe par le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}; \frac{1}{2}\right)$), en plus évidemment de la tangente calculée à la question précédente.



Étude de la fonction : $g : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x(2-\cos(x))}$

16. Encore une question extrêmement difficile : $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}^*$.

17. Puisqu'on sait que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \frac{1}{2-1} = 1$.

18. Étant continue et strictement décroissante, la fonction est sûrement bijective. Puisque $g(0) = 1$ et $g(\pi) = 0$, on aura $I = [0; 1]$.

Étude d'une suite qui annule f_n.

19. Constatons que, si $f_n(a) = 0$, alors $\frac{\sin(a)}{2-\cos(a)} = \frac{a}{n}$, donc $\frac{a}{n} = f_0(a)$. Comme on sait que $|f_0(a)| \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$ (cette majoration est valable partout), on en déduit que $|a| \leqslant \frac{n\sqrt{3}}{3}$, soit $a \in [0; n\sqrt{3}]$.

20. Sur $]0; \pi]$, la condition $f_n(x_n) = 0$ équivaut à $\frac{\sin(x_n)}{x_n(2-\cos(x_n))} = \frac{1}{n}$, soit $g(x_n) = \frac{1}{n}$. Comme la fonction g est bijective de $[0; \pi]$ vers $[0; 1]$, cette équation admet en effet une unique solution.

21. D'après la question précédente, on peut écrire $x_n = h\left(\frac{1}{n}\right)$. Comme la fonction h est continue et que $h(0) = \pi$ (puisque $g(\pi) = 0$), on aura $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} h\left(\frac{1}{n}\right) = \pi$.

Devoir à la maison n°5

PTSI B Lycée Eiffel

à rendre pour le 18 janvier 2013

Exercice 1

On considère sur $\mathbb{N}^2$ la relation suivante : $(n,p)R(n',p')$ si $n+p < n'+p'$, ou bien $n+p = n'+p'$ et $n \leqslant n'$.

1. Montrer que R est une relation d'ordre totale sur $\mathbb{N}^2$.
2. Déterminer un couple d'entiers qui soit, au sens de cette relation R, inférieur à $(1,5)$ et supérieur à $(2,3)$. Combien y a-t-il de tels couples ?
3. Combien y a-t-il de couples d'entiers inférieurs à un couple (n,p) donné ?

Exercice 2

On cherche à calculer la somme suivante : $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+2)(k+4)}$

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que $\dfrac{1}{k(k+2)(k+4)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+2} + \dfrac{c}{k+4}$.
2. En déduire la somme recherchée à l'aide d'un télescopage.
3. Effectuer une nouvelle démonstration de la formule obtenue, par récurrence cette fois-ci.

Exercice 3

On considère une grille de morpion (trois lignes, trois colonnes) dont on veut colorier chacune des cases en bleu, en vert ou en rouge (aucune case ne doit rester blanche). Combien y a-t-il de coloriages possibles respectant chacune des conditions suivantes :

1. Les quatre coins de la grille sont bleus.
2. Chaque ligne contient trois cases de la même couleur.
3. Chaque ligne contient trois cases de couleurs différentes.
4. Aucune case de la grille n'est rouge.
5. La grille contient trois cases vertes, trois rouges et trois bleues.
6. Il y a au moins sept cases bleues dans la grille.
7. Si une case bleue n'est pas sur la dernière ligne, il y a nécessairement une case verte en dessous.
8. Chaque case bleue ne contient que des cases rouges comme voisines.

Joyeux Noël et bonne année !

Corrigé du DM5

Exercice 1

1. La relation est symétrique : $(n,p)R(n,p)$ pusique $n+p = n+p$ et $n \leqslant n$ (deuxième condition de validation de la relation R. Elle est antisymétrique : supposons qu'on ait à la fois $(n,p)R(n',p')$ et $(n',p')R(n,p)$. On ne peut pas avoir $n+p < n'+p'$, sinon la condition $(n',p')R(n,p)$ est impossible à réaliser. De même $n'+p' < n+p$ est impossible. On a donc $n+p = n'+p'$ et le fait que la relation soit vérifiée dans les deux sens impose que $n \leqslant n'$ et $n' \leqslant n$. Autrement dit, $n = n'$, ce dont on déduit que $p = p'$ pour avoir $n+p = n'+p'$. Finalement, les deux couples sont bien égaux. Enfin, la relation est transitive : supposons que $(n,p)R(n',p')$ et $(n',p')R(n'',p'')$. Si on a $n+p < n'+p'$ ou $n'+p' < n''+p''$, on aura $n+p < n''+p''$, donc $(n,p)R(n'',p'')$. Dans le cas contraire, c'est que $n+p = n'+p' = n''+p''$, et on doit avoir $n \leqslant n' \leqslant n''$, ce qui implique $n \leqslant n''$, et la relation $(n,p)R(n'',p'')$ est toujours vérifiée.

   Pour prouver que l'ordre est total, considérons deux couples d'entiers (n,p) et (n',p'). Si $n+p \neq n'+p'$, on a soit $n+p < n'+p'$, et donc $(n,p)R(n',p')$, soit $n+p > n'+p'$ ce qui implique $(n',p')R(n,p)$. Si $n+p = n'+p'$, on aura de façon similaire soit $n \leqslant n'$, et $(n,p)R(n',p')$, soit $n \leqslant n'$, et $(n',p')R(n,p)$. Dans tous les cas, on arrive à comparer les couples (n,p) et (n',p').

2. Pour qu'un couple (n,p) soit « compris entre » $(2,3)$ et $(1,5)$, il faut qu'il vérifie $n+p = 5$ ou $n+p = 6$. Si $n+p = 5$, on doit avoir $n \geqslant 2$ pour que le couple soit plus grand que $(2,3)$. Si $n+p = 6$, on doit cette fois avoir $n \leqslant 1$. Cela laisse comme possibilité les couples $(2,3)$, $(3,2)$, $(4,1)$, $(5,0)$, $(0,6)$ et $(1,5)$. Si on veut des « inégalités » strictes, il y a donc quatre couples possibiles.

3. Il y a tous les couples (n',p') pour lesquels $n'+p' < n+p$, et tous ceux pour lesquels $n'+p' = n+p$, et $n' \leqslant n$. Les couples vérifiant $n'+p' = k$, pour un entier k fixé, sont au nombre de $k+1$ (en effet, on peut prendre n'importe quelle valeur entre 0 et k pour n, et on doit ensuite imposer $p = k-n$), ce qui donne un nombre de couples vérifiant $n'+p' < n+p$ égal à $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n+p-1} k+1 = \sum_{k=1}^{n+p} k = \frac{(n+p)(n+p+1)}{2}$. On y ajoute les $n+1$ couples de la forme $(i, n+p-i)$, pour $0 \leqslant i \leqslant n$ (ce sont les couples dont la somme des coordonnées vaut $n+p$) pour obtenir un total de $\dfrac{(n+p)(n+p+1)}{2} + n + 1$ couples inférieurs (ou égaux) à (n,p).

Exercice 2

1. Partons donc de la forme finale : $\dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+2} + \dfrac{c}{k+4} = \dfrac{a(k+2)(k+4) + bk(k+4) + ck(k+2)}{k(k+2)(k+4)} = \dfrac{a(k^2+6k+8) + b(k^2+4k) + c(k^2+2k)}{k(k+2)(k+4)} = \dfrac{(a+b+c)k^2 + (6a+4b+2c)k + 8a}{k(k+2)(k+4)}$. Pour que l'identification fonctionne, on doit donc avoir $a+b+c = 0$, $6a+4b+2c = 0$ et $8a = 1$, soit $a = \dfrac{1}{8}$, $b+c = -\dfrac{1}{8}$ et $4b+2c = -\dfrac{3}{4}$. On peut procéder par substitution : $c = -\dfrac{1}{8} - b$, donc $4b - \dfrac{1}{4} - 2b = -\dfrac{3}{4}$, soit $2b = -\dfrac{1}{2}$ et $b = -\dfrac{1}{4}$. Reste $c = -\dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{8}$. Conclusion de ce superbe calcul : $\dfrac{1}{k(k+2)(k+4)} = \dfrac{1}{8} \times \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{k+2} + \dfrac{1}{8} \times \dfrac{1}{k+4}$.

2. Il se produit un magnifique télescopage, qu'on peut par exemple rédiger avec des changements d'indices :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+2)(k+4)} \\
&= \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{8} \times \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{4} \times \frac{1}{k+2} + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{8} \times \frac{1}{k+4} \\
&= \frac{1}{8} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} - \frac{1}{4} \sum_{k=3}^{k=n+2} \frac{1}{k} + \frac{1}{8} \sum_{k=5}^{k=n} \frac{1}{k} \\
&= \frac{1}{8} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \sum_{k=5}^{k=n} \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \sum_{k=5}^{k=n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) \\
&\quad -\frac{1}{8} \left(\sum_{k=5}^{k=n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4}\right) \\
&= \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{24} + \frac{1}{32} - \frac{1}{12} - \frac{1}{16} - \frac{1}{4(n+1)} - \frac{1}{4(n+2)} \\
&\quad + \frac{1}{8(n+1)} + \frac{1}{8(n+2)} + \frac{1}{8(n+3)} + \frac{1}{8(n+4)} \\
&= \frac{12+4+3-8}{96} + \\
&\quad \frac{-(n+2)(n+3)(n+4) - (n+1)(n+3)(n+4) + (n+1)(n+2)(n+4) + (n+1)(n+2)(n+3)}{8(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \\
&= \frac{11}{96} + \\
&\quad \frac{-(n^3+9n^2+26n+24) - (n^3+8n^2+19n+12) + (n^3+7n^2+14n+8) + (n^3+6n^2+11n+6)}{8(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \\
&= \frac{11}{96} - \frac{4n^2+20n+22}{8(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \\
&= \frac{11}{96} - \frac{2n^2+10n+11}{4(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}
\end{aligned}$$

3. Essayons donc de prouver par récurrence la propriété

$$P_n : \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+2)(k+4)} = \frac{11}{96} - \frac{2n^2+10n+11}{4(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}.$$

Pour $n = 1$, la somme se réduit à $\frac{1}{1 \times 3 \times 5} = \frac{1}{15}$, et la formule donne comme valeur $\frac{11}{96} - \frac{2+10+11}{4 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = \frac{11}{96} - \frac{23}{480} = \frac{55}{480} - \frac{23}{480} = \frac{32}{480} = \frac{1}{15}$, donc la propriété P_1 est vérifiée.

Supposons désormais la propriété vérifiée au rang n, on peut alors écrire

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{1}{k(k+2)(k+4)} &= \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+2)(k+4)} + \frac{1}{(n+1)(n+3)(n+5)} \\
&= \frac{11}{96} - \frac{2n^2+10n+11}{4(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} + \frac{1}{(n+1)(n+3)(n+5)} \\
&= \frac{11}{96} - \frac{(2n^2+10n+11)(n+5) - 4(n+2)(n+4)}{4(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)} \\
&= \frac{11}{96} - \frac{2n^3+10n^2+11n+10n^2+50n+55-4n^2-24n-32}{4(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)} \\
&= \frac{11}{96} - \frac{2n^3+16n^2+37n+23}{4(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}
\end{aligned}$$

On constate que -1 est racine évidente du numérateur de la deuxième fraction, on peut donc écrire $2n^3+16n^2+37n+23 = (n+1)(an^2+bn+c) = an^3+(a+b)n^2+(b+c)n+c$. Par identification, on obtient $a=2$, $b=14$ et $c=23$. On peut donc écrire, en reprenant le calcul précédant, $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{1}{k(k+2)(k+4)} = \frac{11}{96} - \frac{2n^2+14n+23}{4(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}$. Le dénominateur de la deuxième fraction est bien celui donné par la formule de P_{n+1}, reste à vérifier que le numérateur est le bon, il devrait être égal à $2(n+1)^2+10(n+1)+11 = 2(n^2+2n+1)+10n+10+11 = 2n^2+14n+23$, c'est exactement ce qu'on a obtenu. La propriété P_{n+1} est donc vérifiée et, par principe de récurrence, la formule est vraie pour tout entier n.
Remarque finale : les plus malins (ou les moins masochistes ?) d'entre vous auront évidemment laissé la formule sous la forme $\dfrac{11}{96} - \dfrac{1}{8(n+1)} - \dfrac{1}{8(n+2)} + \dfrac{1}{8(n+3)} + \dfrac{1}{8(n+4)}$, pour laquelle l'hérédité de la récurrence est très rapide à démontrer en utilisant le calcul de la première question.

Exercice 3

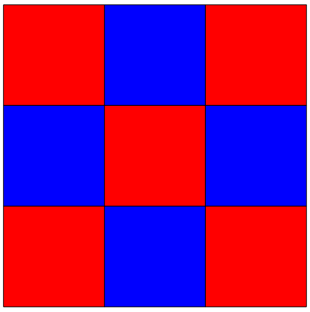
Commençons par remarquer que le nombre total de coloriages possibles est de 3^9 (trois couleurs possibles pour chacune des neuf cases), soit 19 683.

1. Il reste cinq cases à colorier comme on le souhaite, soit $3^5 = 243$ coloriages possibles.
2. On a donc trois choix de couleur possible pour chacune des lignes, soit $3^3 = 27$ possibilités.
3. Pour chaque ligne, il faut choisir dans quel ordre apparaissent les trois couleurs, ce qui laisse $3! = 6$ possibilités. Au total on aura donc $6^3 = 216$ coloriages possibles.
4. Il n'y a plus que deux couleurs disponibles, soit $2^9 = 512$ coloriages possibles.
5. On choisit l'emplacement des trois cases vertes parmi les neuf cases disponibles, soit $\binom{9}{3} = 84$ possibilités. Ensuite, il faut choisir trois cases rouges parmi les six restantes : $\binom{6}{3} = 20$ possibilités, et il n'y a plus le choix, les trois dernières cases doivent être bleues. il y a donc 1 680 coloriages possibles.
6. Il y a donc soit sept cases bleues, soit huit, soit neuf. Un seul coloriage contient neuf cases bleues. S'il y en a huit, on choisit la case qui n'est pas bleue (neuf possibilités) et on a deux couleurs pour la colorier, soit 18 coloriages. Enfin, s'il y a sept cases bleueues, on a $\binom{9}{2} = 36$ choix pour les deux cases non bleues, et 2^2 possibilités pour les colorier, soit 144 coloriages. Au total, cela fait 163 possibilités.

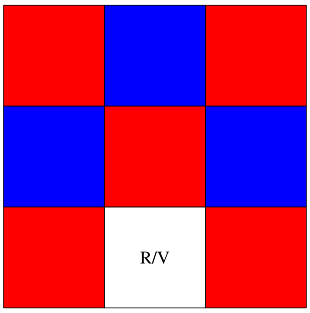
7. Pour cette condition, on peut colorier indépendamment chacune des trois colonnes de la grille. Si on met une case bleue en haut de colonne, il faut une verte en-dessous, et n'importe quoi en bas, trois possibilités. Si on met une verte ou une rouge en haut, on peut soit mettre une bleue puis une verte en dessous, soit une rouge ou verte puis n'importe quoi, donc $1+2\times 3 = 7$ possibilités. Pour une colonne, cela fait $3 + 2 \times 7 = 17$ choix. Comme il y a trois colonnes, on trouve au total $17^3 = 4\ 913$ coloriages.

8. Donnons le nom de bords aux quatre cases de la grille qui ne sont pas situées dans les coins ni au centre, et essayons de distinguer les cas selon le nombre de bords bleus.

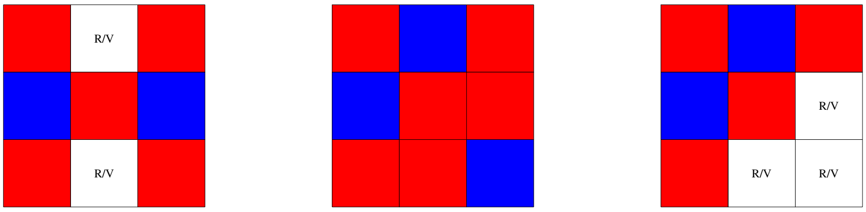
- si les quatre bords sont bleus, toutes les autres cases doivent être rouges, un seul choix possible.



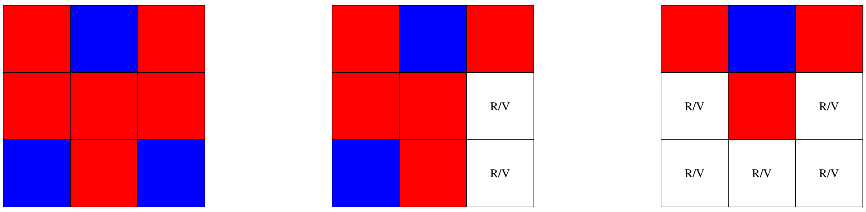
- si trois bords sont bleus, cela impose aux quatre coins et au centre d'être rouges, mais le quatrième bord peut être choisi rouge ou vert (pas bleu, sinon on a quatre bords bleus, cas déjà compté ci-dessus). Il y a quatre choix pour décider quel bord n'est pas bleu, puis deux pour sa couleur, huit possibilités.



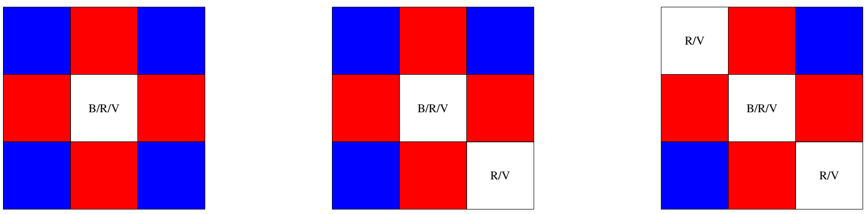
- si deux bords opposés sont bleus (soit haut et bas, soit gauche et droite), les quatre coins et le centre doivent être rouges, et on fait ce qu'on veut (vert ou rouge) de chacun des deux bords restants, soit $2\times 2^2 = 8$ cas. Si deux bords consécutifs sont bleus, on a trois coins et le centre qui sont forcément rouges. Il reste une possibilité de mettre le dernier coin bleu (et les deux bords restants automatiquement rouges), ou de choisir du rouge/vert aléatoirement pour les trois cases restantes. Il y a quatre possibilités de choix pour les deux bords consécutifs, puis $1+2^3 = 9$ possibilités ensuite, soit 36 cas. Au total, on a donc 44 coloriages avec deux bords bleus.



- supposons un seul bord bleu, cela impose deux coins et le centre rouge. On a alors une possibilité de mettre les deux coins restants bleus (les autres cases seront rouges ; on peut choisir un des deux coins et le mettre bleu, ce qui impose deux bords rouges, et il reste un coin et un bord qu'on colorie en vert ou rouge, $2 \times 2^2 = 8$ coloriages ; ou bien on ne met aucun coin bleu, et on a pas moins de cinq cases avec lesquels on fait ce qu'on veut (sans mettre de bleu), $2^5 = 32$ possibilités. Comme il faut au départ choisir quel bord est bleu, cela donne $4 \times (1 + 8 + 32) = 164$ coloriages avec un bord bleu.



- Enfin, restent les cas sans bord bleu. Si on met les quatre coins bleus, on aura quatre bords rouges et un centre bleu/rouge/vert, trois cas. Si on met trois coins bleus (quatre choix de coin non bleu), on a les quatre bords rouges, un coin rouge/vert et le centre bleu/rouge/vert, $4 \times 2 \times 3 = 24$ cas ; si on met deux coins opposés bleus (deux possibilités), les quatre bords sont rouges et il reste deux bords rouge/vert et le centre bleu/rouge/vert, $2 \times 2^2 \times 3 = 24$ cas ; si on met deux coins consécutifs bleus (quatre possibilités), on a trois bords rouges et quatre cases rouge/vert (en oubliant le cas du centre bleu), $4 \times 2^4 = 64$ cas, auquels on ajoute le cas du centre bleu avec deux coins bleus, et donc quatre bords rouges et deux cases rouge/vert, soit $4 \times 2^2 = 16$ cas ; si on met un seul coin bleu sans le centre bleu, on a six cases rouge/vert et $4 \times 2^6 = 256$ cas ; un coin et le centre bleus, il reste trois coins rouge/vert et $4 \times 2^3 = 32$ cas. Enfin, si on ne met aucun coin bleu, soit le centre est bleu et on a le choix du rouge/vert pour les quatre coins ($2^4 = 16$ cas), soit rien n'est bleu et on a $2^9 = 512$ cas de coloriages uniquement rouge/vert. Ajoutons tout ça : $3 + 24 + 24 + 80 + 288 + 528 = 947$ cas.



etc ...

- Conclusion (enfin !), on trouve $1 + 8 + 44 + 164 + 947 = 1\ 164$ coloriages convenables.

Devoir à la maison n°6

PTSI B Lycée Eiffel

à rendre pour le 8 février 2013

Exercice 1

On considère un hexagone régulier dans le plan, et on note G l'ensemble des isométries de cet hexagone (c'est-à-dire l'ensemble des isométries du plan laissant globalement stable l'hexagone ; si vous préférez, chacun des sommets de l'hexagone doit être envoyé par l'isométrie sur un sommet de l'hexagone, lui-même ou un autre sommet).

1. Montrer que (G, o) est un groupe (on pourra admettre que l'ensemble de toutes les isométries du plan est un groupe, et montrer que G en est un sous-groupe).
2. Montrer que, si on note O le centre de l'hexagone, il existe six rotations de centre O (en comptant l'identité) qui sont des isométries de l'hexagone. Montrer que ces six rotations forment un sous-groupe de G.
3. Montrer qu'il existe également six réflexions appartenant à G, mais que celles-ci ne forment pas un sous-groupe de G.
4. Prouver que G est uniquement constitué des 12 éléments précisés dans les questions précédentes.

Exercice 2

Dans tout ce problème, on s'intéresse à des suites (u_n) vérifiant une relation de récurrence du type $u_{n+1} = ku_n(1 - u_n)$, où k sera un réel fixé pouvant varier d'une question à l'autre. Par ailleurs, on pose $u_0 = a$, avec $a \in]0; 1[$ (cette condition restant vérifiée tout au long du problème). On notera d'ailleurs $I =]0; 1[$.

I. Étude de quelques valeurs sympathiques de k.

1. Dans cette première question, on suppose que $k \in]0; 1[$.
   (a) Montrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0; 1[$.
   (b) Déterminer la monotonie de la suite (u_n), et en déduire sa limite.
   (c) Montrer qu'il existe une suite géométrique (v_n) de raison $q < 1$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$.
   (d) Montrer qu'il existe une autre suite géométrique (w_n) de raison $q' < 1$ telle que $u_n = o(w_n)$.
2. Dans cette deuxième question, on considère le cas particulier $k = 1$.
   (a) Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.
   (b) Montrer que $\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$ admet une limite (à préciser, bien entendu).
   (c) En appliquant le théorème de Cesaro (ex. 13 de la feuille n°9), montrer que $\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_0}\right)$ possède une limite finie, et en déduire un équivalent simple de u_n.
3. Dans cette troisième question, on suppose $k \in]1; 2[$.
   (a) Déterminer les limires possibles de la suite (u_n).

(b) Montrer en revenant à la définition de la limite et en effectuant un raisonnement par l'absurde que la suite (u_n) ne peut pas tendre vers 0 (question difficile).

(c) Montrer que, si $0 < a < \dfrac{1}{2}$, la suite est monotone et déterminer sa limite, que l'on notera désormais α.

(d) Que se passe-t-il si $a > \dfrac{1}{2}$? Et si $a = \dfrac{1}{2}$?

(e) On pose $v_n = \dfrac{f(u_n) - f(\alpha)}{u_n - \alpha}$, où $f : x \mapsto kx(1-x)$. Déterminer la limite de la suite (v_n), et trouver une suite simple devant laquelle $u_n - \alpha$ est négligeable.

(f) On pose désormais $t_n = u_n - \dfrac{(u_{n+1} - u_n)^2}{u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n}$. Déterminer la limite de la suite (t_n), et montrer que $t_n - \alpha = o(u_n - \alpha)$.

II. Un cas nettement plus rigolo.

On suppose dans toute cette partie que $k = 4$.

1. Pour tout réel θ, exprimer $f(\sin^2(\theta))$ en fonction de $\sin(2\theta)$.
2. Montrer que, si $a = \sin^2\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ ou $a = \sin^2\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$, la suite (u_n) est périodique, et préciser sa période.
3. Déterminer toutes les valeurs de a pour lesquelles la suite est périodique de période 2.
4. Déterminer les valeurs possibles pour la limite de la suite (u_n).
5. Montrer que la suite (u_n) n'est jamais convergente (difficile).

III. De plus en plus rigolo.

On suppose dans toute cette partie que $k = 6$, et on pose $f : x \mapsto 6x(1-x)$.

1. Déterminer l'ensemble $I_1 = \{x \in I \mid f(x) \notin I\}$.
2. On note de même, pour tout entier n, $I_n = \{x \in I \mid f^{n-1}(x) \in I \text{ mais } f^n(x) \notin I\}$ (ou si vous préférez $f^{n-1}(x) \in I_1$). Montrer que I_n n'est jamais vide.
3. On note $P = \{x \in I \mid \forall n \in \mathbb{N}, f^n(x) \in I\}$. Montrer que P n'est pas vide.
4. Montrer que, si $x \in P$, la suite (u_n) est bornée, mais si $x \in I_n$ (peu importe la valeur de n), la suite tend vers $-\infty$.
5. On tente de faire calculer les termes successifs de la suite à une machine peu performante. On constate que, quelle que soit la valeur initiale donnée, la suite semble tendre vers $-\infty$. Comment expliquer celà ?

Corrigé du DM6

Exercice 1

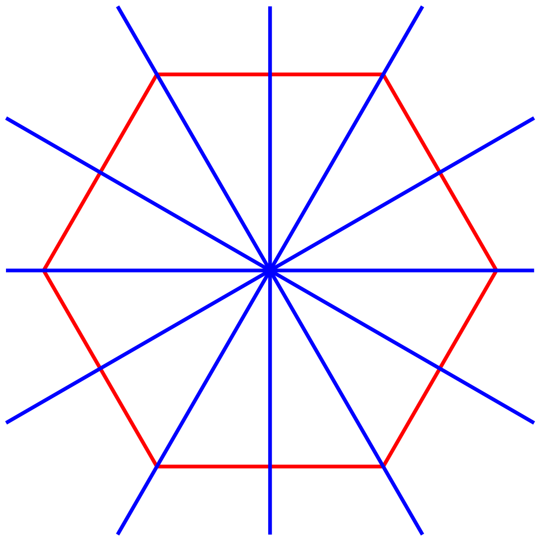
1. Montrons donc que G est un sous-groupe de l'ensemble de toutes les isométries du plan.

   - G contient certainement l'élément neutre de l'ensemble des isométries, qui est l'identité (en effet, si personne ne bouge, l'hexagone est laissé stable).
   - si f et g sont deux isométries laissant l'Hexagone stable, $g \circ f$ aussi. En effet, la composée de deux isométries est une isométrie, et en notant H l'hexagone, on peut écrire $g \circ f(H) = g(f(H)) = g(H) = H$.
   - si f est une isométrie laissant l'hexagone stable, sa réciproque f^{-1} est aussi une isométrie, et $f^{-1}(H) = H$, puisqu'une isométrie étant bijective, pour tout point A de l'hexagone, on peut certainement trouver un point B tel que $f(B) = A$, et $B \in H$ pour avoir $f(H) = H$.

2. Une rotation qui laisse stable l'hexagone doit nécessairement envoyer un sommet donné (notons-le A) sur un point de l'hexagone à même distance de O que A. Les seuls points convenables sont les six sommets de l'hexagone. Mais une fois choisie l'image du point A, l'angle de la rotation est fixé, et donc la rotation elle-même également. Il y a donc six rotations possibles, une pour chaque image possible pour le point A, ou si on préfère six angles, à savoir 0 (c'est l'identité), $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, π (symétrie centrale de centre O), $\frac{4\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{3}$. Ces six rotations forment un sous-groupe car l'identité en fait partie, que la composée de deux de ces rotations est certainement une rotation de centre O laissant stable l'hexagone (on additionne simplement les angles modulo 2π, et que la réciproque d'une telle rotation est aussi une rotation de centre O et d'angle opposé modulo 2π. Si on préfère, on peut dresser le tableau de groupe suivant, en notant r_i la rotation d'angle $\frac{i\pi}{3}$, pour i variant entre 0 et 5 :

$\circ$	r_0	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5
r_0	r_0	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5
r_1	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_0
r_2	r_2	r_3	r_4	r_5	r_0	r_1
r_3	r_3	r_4	r_5	r_0	r_1	r_2
r_4	r_4	r_5	r_0	r_1	r_2	r_3
r_5	r_5	r_0	r_1	r_2	r_3	r_4

3. Comme pour les rotations, une réflexion est en fait forcément déterminée par l'image d'un sommet A. En effet, une fois l'image de ce sommet choisie parmi les sommets de l'hexagone, son voisin dans le sens trigonométrique sur H doit être envoyé sur le voisin de son image dans le sens indirect (les réflexions sont des isométries indirectes) et son autre voisin sur l'autre voisin. Ces images suffisent à caractériser la réflexion. On fait sans peine la liste des six réflexions possibles : les trois réflexions dont les axes sont les grandes diagonales de l'hexagone (passant par deux sommets opposés), et les trois réflexions dont les axes sont les médiatrices du segment joignant deux sommets consécutifs de H (voir dessin ci-dessous pour les six droites). Ces six réflexions ne peuvent certainement pas former un sous-groupe puisque l'identité n'en fait pas partie !



4. Il suffit en fait de reprendre les raisonnements précédents. On prend un sommet A de l'hexagone, on a six choix pour son image (qui doit être un des sommets de H), et deux possibilités une fois cette image choisie : soit on garde ses voisins dans le même sens, et on aura une rotation, soit on inverse le sens et on aura une réflexion. On démontrerait de la même façon qu'un polygône régulier à n côtés a toujours $2n$ isométries, n rotations et n réflexions, qui forment un groupe appelé groupe diédral d'ordre n.

Exercice 2

I. Étude de quelques valeurs sympathiques de k.

1. (a) En effet, $u_0 \in]0;1[$ par hypothèse, et en supposant $u_n \in]0;1[$, on aura également $1 - u_n \in]0;1[$, donc $u_n(1-u_n) \in]0;1[$. Le facteur k étant supposé strictement inférieur à 1, on en déduit que $u_{n+1} \in]0;1[$, ce qui achève la récurrence.

   (b) Calculons donc $u_{n+1} - u_n = ku_n(1-u_n) - u_n = u_n(k-1-u_n)$. Puisque $k < 1$ et $u_n > 0$, $u_{n+1} - u_n < 0$, et la suite est donc décroissante. Comme elle est décroissante et minorée, elle converge nécessairement. Sa limite l doit vérifier l'équation $l = kl(1-l)$ par passage à la limite de la relation de récurrence. Cette équation peut se factoriser sous la forme $l(1-k+kl) = 0$. Elle admet donc pour solutions $l = 0$ et $l = \dfrac{k-1}{k}$. Cette deuxième solution est, pour les valeurs de k qui nous concernent pour l'instant, strictement négative, et ne peut donc pas constituer une limite valide pour la suite (u_n) dont tous les termes sont positifs. La suite converge donc vers 0.

   (c) Puisque $0 < 1 - u_n < 1$, la relation de récurrence implique que $0 < u_{n+1} < ku_n$. Par une récurrence immédiate, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant k^n a$. En effet,c'est vrai pour u_0 (c'est même alors une égalité), et si $u_n \leqslant k^n a$, alors $u_{n+1} < ku_n \leqslant k \times k^n a = k^{n+1}a$. On peut donc prendre pour (v_n) la suite géométrique de raison $k < 1$ et de premier terme a.

   (d) Posons $q' = \dfrac{1+k}{2}$, et $w_n = q'^n a$, la suite (w_n) est bien géométrique, de raison strictement inférieure à 1 puisque $k < 1$ (donc $k + 1 < 2$), et $u_n = o(w_n)$ car $v_n = o(w_n)$. En effet, $\dfrac{v_n}{w_n} = \left(\dfrac{k}{q'}\right)^n$ a pour limite 0 puisque $\dfrac{k}{q'} < 1$.

2. (a) On peut faire exactement le même raisonnement que dans la partie précédente : la suite est à valeurs dans $]0;1[$ (récurrence identique à celle de la première question), et décroissante

(calcul à nouveau identique), donc convergente. De plus, le seul point fixe quand $k = 1$ est 0 donc la limite est nécessairement nulle.

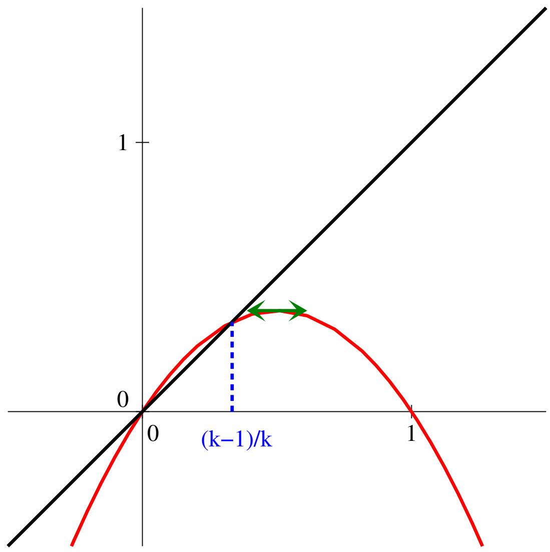
(b) Calculons $\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{u_n(1-u_n)} - \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1-(1-u_n)}{u_n(1-u_n)} = \dfrac{1}{1-u_n}$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - u_n = 1$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} = 1$.

(c) Remarquons que $\dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{u_{k+1}} - \dfrac{1}{u_k} = \dfrac{1}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n+1} \dfrac{1}{u_k} - \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{u_k}\right) = \dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{a}\right)$. D'après le théorème de Cesaro, cette expression a la même limite que celle calculée à la question précédente, autrement dit 1. Comme $\dfrac{1}{n+1} \times \dfrac{1}{a}$ tend certainement vers 0, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{(n+1)u_{n+1}} = 1$, donc $u_{n+1} \sim \dfrac{1}{n+1}$, ou encore $u_n \sim \dfrac{1}{n}$.

3. (a) Aucune raison que ça ait changé depuis tout à l'heure, les limites possibles sont 0 et $\dfrac{k-1}{k}$.

(b) Supposons donc que (u_n) tende vers 0, on peut alors affirmer que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n_0$, $|u_n| < \varepsilon$. On en déduit que $1 - \varepsilon < 1 - u_n < 1 + \varepsilon$, ce dont on déduit que $|u_{n+1}| = k|u_n||1-u_n| > k(1-\varepsilon)|u_n|$. Choisissons une valeur de ε (qui sera désormais fixée) strictement inférieure à $1 - \dfrac{1}{k}$ (on peut puisque, k étant strictement supérieur à 1, cette quantité est bien strictement positive), alors $1 - \varepsilon > \dfrac{1}{k}$, donc $k(1-\varepsilon) > 1$. Dans ce cas, on aura, à partir du rang n_0, $|u_{n+1}| > |u_n|$. Autrement dit, la suite $(|u_n|)$ sera strictement croissante à partir du rang n_0, et ne peut alors tendre vers 0. Ah, si, c'est possible à condition que u_{n_0} lui-même soit égal à 0. Mais pour cela, on doit avoir u_{n_0-1} qui vérifie l'équation $ku_{n_0-1}(1-u_{n_0-1}) = 0$, ce qui impliquerait que u_{n_0-1} soit lui-même égal à 0 ou 1, ce qui est impossible 1 n'a aucun antécédant par la fonction de récurrence, comme on va le voir juste après, et quitte à remplacer u_{n_0} par le premier terme nul de la suite, u_{n_0-1} ne peut pas être également nul). Conclusion : la suite ne peut pas tendre vers 0.

(c) Le plus simple est de revenir aux classiques des études de suites récurrentes, l'étude de la fonction $f_k : x \mapsto kx(1-x)$. Cette fonction est évidemment dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f_k'(x) = k - 2kx$, qui s'annule en $\dfrac{1}{2}$. Elle admet donc un maximum de valeur $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{k}{4} < \dfrac{1}{2}$ Elle admet comme on l'a déjà vu deux points fixes : 0 et $\dfrac{k-1}{k} = 1 - \dfrac{1}{k}$, qui dans ce paragraphe se trouve toujours entre 0 et $\dfrac{1}{2}$, et le signe de $f(x) - x$ est positif uniquement entre 0 et $\dfrac{k-1}{k}$. On peut alors faire la représentation graphique suivante :



Il faut en fait distinguer deux cas. Commençons par le cas où $0 < a < \dfrac{k-1}{k}$ et prouvons par récurrence que tous les termes de la suite sont alors dans ce même intervalle $\left]0; \dfrac{k-1}{k}\right[$. C'est vrai par hypothèse pour u_0, et si on le suppose vrai pour u_n, la croissance de f_k sur cet intervalle permet d'affirmer que $f(0) < f(u_n) < f\left(\dfrac{k-1}{k}\right)$, soit $0 < u_{n+1} < \dfrac{k-1}{k}$, exactement ce qu'on veut. Comme $f(x) - x > 0$ sur cet intervalle, on en déduit que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$, donc la suite est croissante. Puisqu'elle est majorée, elle converge, vers un des deux points fixes de f. Or, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant a > 0$, donc la suite ne peut converger vers 0. Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{k-1}{k}$. Le cas où $\dfrac{k-1}{k} \leqslant a < \dfrac{1}{2}$ est identique. On prouve cette fois-ci que l'intervalle $\left[\dfrac{k-1}{k}; \dfrac{1}{2}\right[$ est stable par la fonction (il suffit d'utiliser le fait que $f\left(\dfrac{1}{2}\right) < \dfrac{1}{2}$), donc tous les termes de la suite sont dans cet intervalle, et la suite sera par conséquent décroissante. Elle converge alors nécessairement vers $\dfrac{k-1}{k}$.

(d) Dans le cas où $a > \dfrac{1}{2}$, le tableau de variations de f_k permet d'affirmer que $u_1 \in \left]0; \dfrac{1}{2}\right[$ (en effet, $f_k(1) = 0$). La suite extraite obtenue en oubliant simplement le terme u_0 vérifie alors exactement les conditions de la question précédente, ce qui suffit à prouver que (u_n) converge vers α. Par contre, elle peut n'être monotone qu'à partir du rang 1.

(e) On reconnait un taux d'accroissement : puisque (u_n) tend vers α et que la fonction f est certainement dérivable en α, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = f'(\alpha) = k - 2(k-1) = 2 - k$. Notons que $0 < 2 - k < 1$ avec les hypothèses faites sur k. Il existe donc certainement un réel q vérifiant $2 - k < q < 1$. À partir d'un certain rang n_0, la suite (v_n) convergeant vers $2 - k$, elle devra vérifier $|v_n| < q$. On prouve alors par une récurrence facile que $\forall n \geqslant n_0$, $|u_n - \alpha| < q^{n-n_0}|u_{n_0} - \alpha|$. La suite $(u_n - \alpha)$ est donc majorée par une suite géométrique de raison strictement inférieure à 1, et comme dans la question 1.d, on en déduit sans problème une seconde suite géométrique de raion strictement inférieure par rapport à laquelle u_n est négligeable.

(f) On sait déjà que u_n tend vers $\alpha = \dfrac{k-1}{k}$, reste à déterminer la limite du quotient de droite, qui est une belle forme indéterminée (numérateur et dénominateur tendent tous les deux vers 0). Pour alléger un tout petit peu les calculs, on va remplacer provisoirement les u_n par des x et calculer $\dfrac{(f(x)-x)^2}{f(f(x))-2f(x)+x}$, en remplaçant quand on le pourra les $k-1$ par des $k\alpha$. Le numérateur vaut donc $(kx(1-x)-x)^2 = ((k-1)x-kx^2)^2 = (k\alpha x-kx^2)^2 = k^2x^2(\alpha-x)^2 = k^2x^2(x-\alpha)^2$. Passons au cas plus désagréable du dénominateur : $f(kx(1-x))-2kx(1-x)+x = k^2x(1-x)(1-kx+kx^2)-2kx(1-x)+x = k^2x(1-(k+1)x+2kx^2-kx^3)-2kx(1-x)+x = x(k^2-k^2(k+1)x+2k^3x^2-k^3x^3-2k+2kx+1) = x((k-1)^2+(2k-k^2-k^3)x+2k^3x^2-k^3x^3) = x(k^2\alpha^2+k(k+2)(1-k)x+2k^3x^2-k^3x^3 = k^2x(\alpha^2-(k+2)\alpha x+2kx^2-kx^3)$. Comme $\alpha = 1-\dfrac{1}{k}$, on a $k = \dfrac{1}{1-\alpha}$, et $k+1 = \dfrac{1+2(1-\alpha)}{1-\alpha}$, donc le dénominateur peut s'écrire sous la forme $k^3x(\alpha^2(1-\alpha)-(3-2\alpha)\alpha x+2x^2-x^3) = k^3x(\alpha^2-\alpha^3+(2\alpha^2-3\alpha)x+2x^2-x^3)$. La parenthèse de degré 3 devrait s'annuler lorsque $x=\alpha$, en effet ça donne $\alpha^2-\alpha^3+2\alpha^3-3\alpha^2+2\alpha^2-\alpha^3 = 0$. On peut donc factoriser cette parenthèse sous la forme $(x-\alpha)(ax^2+bx+c) = ax^3+(b-\alpha a)x^2+(c-\alpha b)x-\alpha c$. Par identification des coefficients, $a=-1$; $b-\alpha a = 2$ donc $b = 2-\alpha$ et $c = \alpha^2-\alpha$. On en déduit pour le dénominateur la forme $k^3x(x-\alpha)(-x^2+(2-\alpha)x+\alpha^2-\alpha)$, avec une dernière parenthèse qui ne s'annule plus en α. Finalement, en revenant au calcul initial, $\dfrac{(f(x)-x)^2}{f(f(x))-2f(x)+x} = \dfrac{k^2x^2(x-\alpha)^2}{k^3x(x-\alpha)(-x^2+(2-\alpha)x+\alpha^2-\alpha)} = \dfrac{x(x-\alpha)}{k(-x^2+(2-\alpha)x+\alpha^2-\alpha)} = \dfrac{(\alpha-1)x(x-\alpha)}{x^2+(\alpha-2)x+\alpha-\alpha^2}$. Si on préfère, $\dfrac{(u_{n+1}-u_n)^2}{u_{n+2}-2u_{n+1}+u_n} = \dfrac{(\alpha-1)u_n}{u_n^2+(\alpha-2)u_n+\alpha-\alpha^2}(u_n-\alpha)$. Quand n tend vers $+\infty$, le quotient devant $u_n-\alpha$ a pour limite $\dfrac{(\alpha-1)\alpha}{\alpha^2+\alpha^2-2\alpha+\alpha-\alpha^2} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{\alpha^2-\alpha} = 1$. Autrement dit, notre expression est globalement équivalente à $u_n-\alpha$ (et en particulier tend vers 0), donc $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0$.

De plus, $t_n-\alpha = u_n-\alpha-\dfrac{(\alpha-1)u_n}{u_n^2+(\alpha-2)u_n+\alpha^2-\alpha}(u_n-\alpha)$
$= \left(1-\dfrac{(\alpha-1)u_n}{u_n^2+(\alpha-2)u_n+\alpha^2-\alpha}\right)(u_n-\alpha)$. Le calcul effectué ci-dessus prouve que la parenthèse a pour limite $1-1=0$, ce qui signifie bien que $t_n-\alpha = o(u_n-\alpha)$.

II. Un cas nettement plus rigolo.

1. Calculons donc $f(\sin^2(\theta)) = 4\sin^2(\theta)(1-\sin^2(\theta)) = 4\sin^2(\theta)\cos^2(\theta) = (2\sin(\theta)\cos(\theta))^2 = \sin^2(2\theta)$.

2. D'après la question précédente, on aura dans le premier cas $u_1 = \sin^2\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$, puis $u_2 = \sin^2\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$. Mais comme $\dfrac{4\pi}{5} = \pi-\dfrac{\pi}{5}$, $u_2 = a$, et la suite sera donc 2-périodique (pour une suite récurrente, dès qu'un terme est identique à un terme précédemment obtenu, la suite est récurrente, puisque la relation reste la même). De même, en partant de $a = \sin^2\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$, on aura $u_1 = \sin^2\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$ puis $u_2 = \sin^2\left(\dfrac{8\pi}{5}\right) = a$ (car cette fois $\dfrac{8\pi}{5} = 2\pi-\dfrac{2\pi}{5}$, les sinus sont opposés mais leurs carrés sont bien égaux), la suite est également 2-périodique.

3. La suite sera périodique de période 2 si $u_2 = a$. Or, $u_1 = 4a(1-a)$ et $u_2 = 4u_1(1-u_1) = 4(4a(1-a))(1-4a(1-a)) = 16a(1-a)(1-4a+4a^2)$. Cette quantité est égale à a si $a=0$ (mais dans ce cas la suite est périodique de période 1 puisque constante égale à 0) ou si $16(1-a)(1-4a+4a^2) = 1$, soit $16(1-5a+8a^2-4a^3) = 1$, donc $64a^3-128a^2+80a-15 = 0$. Bon, seul souci, résoudre cette équation est essentiellement impossible. En fait, on peut s'en sortir en affirmant que $\dfrac{3}{4}$, qui est un point fixe de la fonction f (cf ci-dessous), est nécessairement

une racine de l'équation (puisque, si $a = \frac{3}{4}$, la suite est constante, et en particulier $u_2 = a$). Les deux valeurs $\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\sin^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ sont également des racines d'après les calculs précedntes, et ces racines sont différentes de $\frac{3}{4}$, ce qui fait déjà trois racines distinctes. Comme le polynôme est de degré 3, il ne peut pas avoir d'autres racines, et les seules valeurs pour lesquelles la suite est 2-périodique (sans être constante) sont les deux obtenues à la question précédente.
Autre méthode : puisque $a \in]0;1[$, on peut écrire $a = \sin^2(\theta)$ pour un certain angle θ. Dans ce cas, les calculs de la première question donnent $u_2 = \sin^2(4\theta)$. On a donc $a = u_2$ si $\sin^2(\theta) = \sin^2(4\theta)$, ce qui ne peut se produire que si $4\theta \equiv \theta[\pi]$ ou $4\theta \equiv \pi - \theta[\pi]$. La deuxième équation donne les valeurs $\theta = \frac{\pi}{5}$ et $\theta = \frac{2\pi}{5}$, la première donne $\theta = \frac{\pi}{3}$ (les autres possibilités ont un même carré du sinus). Or, on vérifie à la main que cet angle ne convient pas, on aurait alors $a = \frac{1}{4}$, donc $u_1 = 4 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$, puis $u_2 = 4 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. La suite est alors stationnaire mais pas 2-périodique.

4. Ce sont encore et toujours les mêmes, à savoir 0 et $\frac{k-1}{k} = \frac{3}{4}$.
5. L'énoncé est en fait imprécis : la suite n'est jamais convergente sauf si elle est stationnaire (on vient de voir qu'en partant de $a = \frac{1}{4}$, la suite convergerait certainement vers $\frac{3}{4}$). Pour le fait que la suite ne peut pas tendre vers 0, c'est exactement le même raisonnement qu'au I.3.c (le fait que k soit plus gros rend même le raisonnement plus facile). Pour $\frac{3}{4}$, on peut en fait s'en sortir de la même façon. Supposons que la suite converge vers $\frac{3}{4}$ sans stationner, donc sans jamais atteindre la valeur $\frac{3}{4}$, alors il existe un rang n_0 à partir duquel, par exemple, $0,7 < u_n < 0,8$. Or, $u_{n+1} - \frac{3}{4} = 4u_n(1-u_n) - \frac{3}{4} = -4u_n^2 + 4u_n - \frac{3}{4}$. Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4$, et admet pour racines $x_1 = \frac{-4-2}{-8} = \frac{3}{4}$ et $x_2 = \frac{-4+2}{-8} = \frac{1}{4}$. Autrement dit, $u_{n+1} - \frac{3}{4} = -4\left(u_n - \frac{1}{4}\right)\left(u_n - \frac{3}{4}\right) = (-4u_n + 1)\left(u_n - \frac{3}{4}\right)$. Mais pour les valeurs de n choisies, $-2.2 < -4u_n + 1 < -1.8$, donc on aura $\left|u_{n+1} - \frac{3}{4}\right| > 1.8\left|u_n - \frac{3}{4}\right|$. En particulier, la distance de u_n à $\frac{3}{4}$ est une suite strictement croissante, ce qui empêche (u_n) de converger vers $\frac{3}{4}$ (sauf suite stationnaire).

III. De plus en plus rigolo.

1. Étudions les variations de f sur I : $f'(x) = 6 - 12x$ s'annule toujours en $\frac{1}{2}$. La fonction est donc croissante sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{2};1\right]$. Elle admet pour maximum $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$. Pour determiner les réels dont l'image n'est pas dans I, il faut déterminer les antécédents de 1 : l'équation $f(x) = 1$ revient à $6x^2 - 6x + 1 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 36 - 24 = 12$, et a donc pour racines $x_1 = \frac{6-\sqrt{12}}{12} = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$, et $x_2 = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$. On en déduit, au vu des variations de la fonction f, que $I_1 = [x_1, x_2]$.
2. On peut prouver cette propriété par récurrence. C'est vrai pour I_1 qu'on vient de calculer explicitement. Supposons maintenant I_n non vide, il contient donc un réel (au moins) $x \in]0;1[$. Mais alors l'équation $f(x) = x$ admet certainement des solutions dans $]0;1[$ (puisque f est surjective de $]0;1[$ vers $\left]0;\frac{3}{2}\right[$ d'après son tableau de variations), donc x admet des antécédents

par f dans I. Ces antécédents sont des éléments de I_{n+1}, qui n'est donc pas vide.

3. L'ensemble P contient par exemple le point fixe $\frac{5}{6}$, qui vérifie, pour tout entier n, $f^n(x) = \frac{5}{6} \in I$. En fait, P contient une infinité de réels, mais c'est plus dur à prouver.
4. Si $a \in P$ (et pas x comme écrit par erreur dans l'énoncé), on a par définition de P, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < f^n(a) < 1$, soit $0 < u_n < a$. La suite est donc bien bornée. Par contre, si $a \in I$, il existe un entier n pour lequel $u_n \in \left]1; \frac{3}{2}\right[$. Da'près le tableau de variations de la fonction f, on a alors $u_{n+1} < 0$. À partir de ce rang, l'intervalle $]-\infty; 0[$ étant stable, tous les termes de la suite seront strictement négatifs (à ce stade du problème, on s'épargnera la récurrence triviale). Comme $f(x) - x < 0$ sur $]-\infty; 0[$, la suite est alors décroissante à partir d'un certain rang. Si elle était minorée, elle convergerait vers un des points fixes de f, donc vers 0 ou $\frac{5}{6}$, ce qui est difficile pour une suite de réels strictement négatifs qui décroît. La suite ne peut donc converger, étant décroissante, elle diverge vers $-\infty$.
5. En fait, l'ensemble des valeurs pour lesquelles la suite diverge est dense dans I, alors qu'au contraire l'ensemble P est constitué de valeurs isolées dans I. Théoriquement, si on donne à la machine une valeur initiale dans P, elle devrait garder des termes bornés pour la suite. Mais en pratique, les erreurs d'arrondis et approximations successives de la machine font qu'elle va toujours finir par calculer un terme de la suite qui va glisser de P vers une valeur pour laquelle la suite s'envole (négativement, puisque vers $-\infty$).

Devoir à la maison n°7

PTSI B Lycée Eiffel

à rendre pour le 19 mars 2013

Problème

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dire **stochastique** si tous ses coefficients sont positifs et si, $\forall i \in \{1;\dots;n\}$, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$. On considèrera dans ce problème qu'une suite de matrice $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ **converge** vers la matrice A si chacun des coefficients $(A_p)_{i,j}$ a pour limite $A_{i,j}$ quand n tend vers $+\infty$.

I. Étude d'un exemple dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On considère dans cette première partie la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que $A^2 = aA + bI_2$.
2. Prouver que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$, $A^n = a_nA + b_nI$.
3. Déterminer des relations de récurrence sur les suites (a_n) et (b_n), et en déduire les valeurs de a_n et b_n.
4. Déterminer explicitement la matrice A^n.
5. Montrer que la suite de matrices (A^n) converge, et que sa limite est une matrice stochastique.

II. Étude d'un exemple dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Dans cette deuxième partie, on pose $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les puissances de la matrice J.
2. Écrire B comme combinaison des matrices I_3 et J, et en déduire les puissances de la matrice B à l'aide de la formule du binôme de Newton.
3. Montrer que la suite (B^n) converge, et que sa limite est une matrice stochastique.

III. Étude générale des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On considère désormais une matrice stochastique d'ordre 2 : $A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix}$, avec $(a, b) \in [0,1]^2$.

1. Calculer A^p dans le cas où $a = b = 1$, et $a = b = 0$. On exclut ces deux cas particuliers pour les questions suivantes.
2. On considère le polynôme $P = (X-1)(X-a-b+1)$, calculer $P(A)$.
3. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par P.
4. En déduire les puissances de la matrice A.
5. Montrer que la suite (A^p) converge vers une limite à préciser.

IV. Une étude plus générale.

On considère désormais une matrice stochastique (à n lignes et n colonnes) dont tous les coefficients sont strictement positifs. On note m le plus petit coefficient de A ; $\alpha_j^{(p)}$ le plus petit coefficient de la colonne numéro j de la matrice A^p, et $\beta_j^{(p)}$ le plus grand coefficient de cette même colonne. Enfin, on note $\delta_j^{(p)} = \beta_j^{(p)} - \alpha_j^{(p)}$.

1. Montrer que si la suite (A^p) converge, sa limite B est une matrice stochastique, et vérifie $B^2 = B$ et $BA = AB$.
2. Montrer que, $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall j \in \{1; \ldots ; n\}$, $\alpha_j^{(p)} \leqslant \alpha_j^{(p+1)} \leqslant \beta_j^{(p+1)} \leqslant \beta_j^{(p)}$, et $\delta_j^{(p+1)} \leqslant (1-2m)\delta_j^{(p)}$.
3. En déduire que la suite (A^p) converge. Que peut-on dire des lignes de la matrice limite B ?
4. Déterminer la limite de la suite (A^p) lorsque $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ (on pourra exploiter le fait que A est une matrice symétrique).

Corrigé du DM7

Problème

I. Étude d'un exemple dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Calculons donc $A^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{9}+\frac{1}{3} & \frac{2}{9}+\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6}+\frac{1}{4} & \frac{1}{3}+\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{5}{12} & \frac{7}{12} \end{pmatrix}$. En étudiant attentivement les coefficients non diagonaux, on se convainc que $a = \dfrac{5}{6}$ (mais oui, $\dfrac{5}{6} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{9}$). Ensuite, $A^2 - \dfrac{5}{6}A = \dfrac{1}{6}I$. On trouve donc $A^2 = \dfrac{5}{6}A + \dfrac{1}{6}I$.
2. C'est évidemment une récurrence classique : c'est vrai au rang 2 d'après la question précédente mais aussi au rang 1 en posant $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$; et même au rang 0 puisque $A^0 = I = 0 \times A + 1 \times I$. Supposons donc $A^n = a_nA + b_nI$, alors $A^{n+1} = A^n \times A = (a_nA + b_nI) \times A = a_nA^2 + b_nA = a_n\left(\dfrac{5}{6}A + \dfrac{1}{6}I\right) + b_nA = \left(\dfrac{5}{6}a_n + b_n\right)A + \dfrac{1}{6}a_nI$. La relation est vérifiée au rang $n+1$, elle est donc vrai pour tout entier n.
3. Les relations de récurrence découlent de la question précédente : $a_{n+1} = \dfrac{5}{6}a_n + b_n$, et $b_{n+1} = \dfrac{1}{6}a_n$. On en déduit que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = \dfrac{5}{6}a_{n+1} + b_n = \dfrac{5}{6}a_{n+1} + \dfrac{1}{6}a_n$. La suite (a_n) est donc récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique $x^2 - \dfrac{5}{6}x - \dfrac{1}{6}$ a pour racine évidente 1, et pour deuxième racine $-\dfrac{1}{6}$ puisque le produit des racines vaut $-\dfrac{1}{6}$. On en déduit que a_n peut se mettre sous la forme $a_n = \alpha + \beta\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n$. À l'aide des valeurs initiales, on va déterminer α et β : pour $n = 0$, $a_0 = \alpha + \beta = 0$; et $a_1 = \alpha - \dfrac{\beta}{6} = 1$. Autrement dit $\alpha + \dfrac{\alpha}{6} = 1$, donc $\alpha = \dfrac{6}{7}$, puis $\beta = -\dfrac{6}{7}$. On obtient donc $a_n = \dfrac{6}{7}\left(1 - \left(-\dfrac{1}{6}\right)^n\right)$, puis $b_n = \dfrac{1}{6}a_{n-1} = \dfrac{1}{7}\left(1 - \left(-\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}\right)$ (la formule fonctionne également quand $n = 0$ puisqu'elle donne bien $b_0 = 1$).
4. On sait que $A^n = a_nA + b_nI$, ce qui permet d'écrire, si on y tient vraiment, $A^n = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} + \frac{4}{7}(-\frac{1}{6})^n & \frac{4}{7} - \frac{4}{7}(-\frac{1}{6})^n \\ \frac{3}{7} - \frac{3}{7}(-\frac{1}{6})^n & \frac{4}{7} + \frac{3}{7}(-\frac{1}{6})^n \end{pmatrix}$.
5. Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{6}\right)^n$, tous les coefficients de la matrice précédente ont une limite finie, la suite de matrices (A^n) converge donc vers $\begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$, qui est bien une matrice stochastique puisque $\dfrac{3}{7} + \dfrac{4}{7} = 1$.

II. Étude d'un exemple dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. On calcule bêtement $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, puis $J^3 = J^2$, et on en déduit que, $\forall n \geqslant 2$, $J^n = J^2$.
2. On remarque aisément que $B = \dfrac{1}{2}(I + J)$. Les matrices I et J commutant bien entendu, on peut écrire, lorsque $n \geqslant 2$, que $B^n = \dfrac{1}{2^n}(J+I)^n = \dfrac{1}{2}^n \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^kI^{n-k}$. Il faut isoler les termes correspondant à $k = 0$ et $k = 1$ pour pouvoir écrire $J^k = J^2$ dans tout le reste de la somme,

on trouve alors $B^n = \dfrac{1}{2}^n \left(I + nJ + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} J^2 \right)$. Comme on sait que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$, on peut simplifier : $B^n = \dfrac{1}{2^n}(I + nJ + (2^n - n - 1)J^2) = \dfrac{1}{2}^n I + \dfrac{n}{2^n} J + \left(1 - \dfrac{n+1}{2^n}\right) J^2$. Si on tient à écrire la matrice explicitement, $B^n = J = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & \frac{n}{2^n} & 1 - \frac{n+1}{2^n} \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 1 - \frac{1}{2^n} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Là encore, aucune difficulté pour trouver la limite de chacun des coefficients, on trouve $\lim\limits_{n \to +\infty} B^n = J^2$, qui est bien une matrice stochastique.

III. Étude générale des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Si $a = b = 1$, la matrice A n'est autre que l'identité, toutes se spuissances sont donc égales à I. Si $a = b = 0$, par contre, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on calcule $A^2 = I$, puis $A^3 = A$, et la suite des puissances de A est 2-périodique : si n est pair, $A^n = I$, si n est impair, $A^n = A$. C'est le seul cas où la suite ne converge pas.
2. Calculons donc : $A - I = \begin{pmatrix} a-1 & 1-a \\ 1-b & b-1 \end{pmatrix}$, et $A - (a+b-1)I = \begin{pmatrix} 1-b & 1-a \\ 1-b & 1-a \end{pmatrix}$. Le produit de ces deux matrices donne $P(A) = 0$ (on a pour chaque coefficient une somme de deux termes opposés.
3. La polynôme P étant de degré 2, on peut écrire la division sous la forme $X^n = PQ + a_n X + b_n$. On regarde ce que donne cette égalité pour les deux racines du polynôme P, à savoir 1 et $a + b - 1$: $1 = a_n + b_n$ et $(a + b - 1)^n = a_n(a + b - 1) + b_n$. En soustrayant les deux équations, on trouve $a_n(a + b - 2) = (a + b - 1)^n - 1$, soit $a_n = \dfrac{(a+b-1)^n - 1}{a+b-2}$. On en déduit $b_n = 1 - a_n = \dfrac{a+b-1-(a+b-1)^n}{a+b-2}$. En conclusion, le reste recherché vaut $\dfrac{(a+b-1)^n - 1}{a+b-2} X + \dfrac{a+b-1+(a+b-1)^n}{a+b-2}$.
4. Puisque $P(A) = 0$, on peut déduire des calculs précédents que $A^n = \dfrac{(a+b-1)^n - 1}{a+b-2} A + \dfrac{a+b-1+(a+b-1)^n}{a+b-2} I$
5. On peut écrire les quatre coefficients de la matrice A^n, ou plus simplement passer directement à la limite dans l'égalité précédente. Puisque $a \leqslant 1$, $b \leqslant 1$, et qu'on a éliminé le cas $a = b = 1$, on aura toujours $a + b - 1 < 1$ (et $a + b - 1 > -1$ puisque les deux nombres sont positifs et ne sont pas tous les deux nuls), donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (a + b - 1)^n$. La suite (A^n) a donc pour limite $\dfrac{a+b-1}{a+b-2} I - \dfrac{1}{a+b-2} A$, ou encore $\dfrac{1}{a+b-2} \begin{pmatrix} b-1 & a-1 \\ b-1 & a-1 \end{pmatrix}$. Cette matrice est bien stochastique pusique la somme des coefficients de chaque ligne vaut $\dfrac{a+b-2}{a+b-2} = 1$ (et que tous les coefficients de la matrice sont bien positifs, le coefficient $\dfrac{1}{a+b-2}$ étant négatif.

IV. Une étude plus générale.

1. Il suffit de constater que si la matrice A est stochastique, toutes ses puissances seront stochastiques. En effet, le produit de deux matrices stochastiques est stochastique : $\sum_{j=1}^{n} (AB)_{ij} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \left(\sum_{j=1}^{n} b_{kj} \right)$. Par hypothèse, si B est stochastique, quelle

que soit la valeur de k, $\sum_{j=1}^{n} b_{kj} = 1$, donc il ne reste que $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} = 1$ puisque A est stochastique. Le fait que A^n est toujours stochastique est alors une récurrence immédiate : c'est vrai pour A par hypothèse, et si c'est pour A^n, le produit $A^n \times A$ est un produit de deux matrices stochastiques est stochastique. Autrement dit, la somme des coeffients de la ligne numéro i sur A^n est toujours égale à 1. Si on suppose que chacun de ces coefficients a une limite finie b_{ij} lorsque n tend vers $+\infty$, par somme de limite, on aura certainement $\sum_{j=1}^{n} b_{ij} = 1$, et la matrice B sera donc stochastique.

Pour prouver que $B^2 = B$, on peut constater la chose suivante : si (A^n) a pour limite B, alors $(A^{2n}) = ((A^n)^2)$ aura pour limite B^2. C'est une simple conséquence du fait que les coefficients du carré d'une matrice sont obtenus à partir de ceux de la matrice à l'aide de sommes et de produits et que ces opérations sont conservées par passage à la limite (faites une démonstration formelle si vous le souhaitez). Or, la suite (A^{2n}) est une sous-suite de la suite (A^n) qui converge vers B, donc elle converge aussi vers B (si vous n'êtes pas convaincu par le fait qu'on puisse affirmer celà sur une suite de matrices, songez qu'on est simplement en train de faire cette affirmation sur chacune des n^2 suites de réels constitués de chacun des coefficients de la matrice A^n). Conclusion $B^2 = B$ puisque les deux matrices sont limites d'une même suite.

Pour montrer que $AB = BA$, plein de possiblités, une notamment utilise le même genre d'astuce que pour $B^2 = B$. La sous-suite (A^{n+1}) converge certainement vers B. Or, $A^{n+1} = A \times A^n$ converge aussi vers AB, donc $B = AB$. De même, $A^{n+1} = A^n \times A$, donc $BA = AB = B$ (c'est même plus fort que ce qui était demandé).

2. Ce n'est pas si compliqué que ça en a l'air. Quand on effectue le produit $A \times A^p$, $(A^{p+1})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(A^p)_{kj} \geqslant \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\alpha_j^{(p)}$ puisque tous les coefficients $(A^p)_{kj}$ sont plus grands que $\alpha_j^{(p)}$ par définition de $\alpha_j^{(p)}$. Or, $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} = 1$ puisque la matrice A est stochastique, donc $(A^{p+1})_{ij} \geqslant \alpha_j^{(p)}$.

   Autrement dit, tous les coefficients de la colle j dans A^{p+1} sont plus grands que $\alpha_j^{(p)}$. A fortiori le plus petit d'entre eux, d'où $\alpha_j^{(p+1)} \geqslant \alpha_j^{(p)}$. On démontre de la même façon que $\beta_j^{(p+1)} \leqslant \beta_j^{(p)}$ en majorant cette fois-ci tous les coefficients de la colonne par $\beta_j^{(p)}$.

   La dernière inégalité demande un peu plus de soin : en reprenant la calcul précédent, on peut isoler dans la somme le terme correspondant à $\beta_j^{(p)}$, notons son indice de ligne l, pour écrire $(A^{p+1})_{ij} \geqslant \sum_{k \neq l} a_{ik}\alpha_j^{(p)} + a_{il}\beta_j^{(p)} \geqslant (1 - a_{il})\alpha_j^{(p)} + m\beta_j^{(p)}$ (puisque m est le plus petit de tous les éléments de la matrice A. Tout cela est supérieur à $\alpha_j^{(p)} - m\alpha_j^{(p)} + m\beta_j^{(p)} = \alpha_j^{(p)} + m\delta_j^{(p)}$, donc $\alpha_j^{(p+1)} \geqslant \alpha_j^{(p)} + m\delta_j^{(p)}$. Un calcul exactement symétrique donne $\beta_j^{(p+1)} \leqslant \beta_j^{(p)} - m\delta_j^{(p)}$. Il ne reste plus qu'à soustraire les deux inagélités pour obtenir celle demandée.

3. Par une récurrence immédiate, on aura alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\delta_j^{(n)} \leqslant (1 - 2m)^n \delta_j^{(0)} = (1 - 2m)^n$ (dans la matrice idéntité, la différence entre le plus grand et le plus petit coefficient d'une colonne vaut toujours 1. Comme $m > 0$ (la matrice ne contient que des termes strictement positifs par hypothèse), et comme $\delta_j^{(n)}$ est toujours positif par définition, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim_{n \to +\infty} \delta_j^{(n)} = 0$. On en déduit aisément que les suites $(\alpha_j^{(n)}$ et $\beta_j^{(n)}$ sont adjacentes : en effet, on a prouvé plus haut que l'une était croissante et l'autre décroissante, et on vient d'expliquer que leur limite tendait vers 0. Les deux suites sont donc convergentes vers une même limite l_j (qui dépend quand même de j). Mais si le plus grand et le plus petit coefficient de la colonne convergent vers une même limite, par théorème des gendarmes, tous les

termes de la colonne, qui sont compris entre les deux, convergent également vers l_j. Ainsi, tous les coefficients de la suite de matrices (A^n) ont une limite, et la suite converge. Par ailleurs, on a prouvé que les limites étaient identiques pour tous les coefficients d'une même colonne, donc toutes les lignes de la matrice B sont identiques.

4. On sait que la suite (A^n) converge vers une matrice B dont toutes les lignes sont identiques. Mais il est évident dans ce cas que la suite $({}^tA^n)$ converge vers ${}^tB$ (on se contente de mettre les coefficients à un endroit différent dans la matrice, ça ne va sûrement pas changer les limites !). Comme les deux suites sont en fait identiques puisque $A =^t A$, on en déduit que $B =^t B$. La matrice B est donc une matrice symétrique dont toutes les lignes sont identiques, tous ses coefficients sont nécessairement égaux (puisque ses colonnes sont alors elles aussi identiques). Comme la somme des coefficients sur une lignes doit donner 1, chaque coefficient doit donc être égal à $\dfrac{1}{3}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Devoir à la maison n°8

PTSI B Lycée Eiffel

à rendre pour le 16 avril 2013

Problème

Dans tout ce problème, on s'intéresse aux propriétés d'un endormorphisme f sur un espace vectoriel réel E, vérifiant $f \circ f = \frac{1}{2}(f + \mathrm{id}_E)$. On notera $f \circ f = f^2$ dans tout le problème.

I. Une somme directe intéressante.

On note p l'endormorphisme de E défini par $p = \frac{2}{3}f + \frac{1}{3}\,\mathrm{id}_E$.

1. Montrer que p est un projecteur.
2. Vérifier que $\mathrm{Im}(p) = \{x \in E \mid f(x) = x\}$.
3. On note q le projecteur sur $\ker(p)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(p)$, exprimer q comme combinaison linéaire de f et de p.
4. En déduire que $E = \ker(f - \mathrm{id}_E) \oplus \ker\left(f + \frac{1}{2}\,\mathrm{id}_E\right)$.
5. Factoriser le polynôme $X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}$. Conjecturer une généralisation du résultat prouvé dans cette première partie.

II. Expression des puissances de f.

1. Montrer, en utilisant les résultats de la première partie, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^n = p + \left(-\frac{1}{2}\right)^n q$.
2. Montrer que f est un automorphisme de E.
3. La relation obtenue pour f^n reste-t-elle valable si $n = -1$? Plus généralement si $n \in \mathbb{Z}$?

III. Un exemple concret.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x, y, z) = \left(-2x + y + z; -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z; -3x + y + 2z\right)$. On note M la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Calculer M^2, et en déduire que $f^2 = \frac{1}{2}(f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$.
2. Déterminer $\ker(f - \mathrm{id})$ et $\ker\left(f + \frac{1}{2}\,\mathrm{id}\right)$, et donner une base de chacun de ces deux noyaux.
3. Déterminer l'expression des projecteurs p et q tels que définis dans la première partie.
4. En déduire l'expression de f^n, et celle de M^n.
5. Calculer M^{-1} à l'aide du pivot de Gauss, et vérifier la cohérence avec les résultats précédents.

Corrigé du DM8

Problème

I. Une somme directe intéressante.

1. Comme f et id commutent, on peut calculer $p^2 = \left(\frac{2}{3}f + \frac{1}{3}\,\mathrm{id}\right)^2 = \frac{4}{9}f^2 + \frac{4}{9}f + +\frac{1}{9}\,\mathrm{id} = \frac{2}{9}(f + \mathrm{id}) + \frac{4}{9}f + \frac{1}{9}\,\mathrm{id} = \frac{2}{3}f + \frac{1}{3}\,\mathrm{id} = p$. L'application p est donc un projecteur.
2. Puisque p est un projecteur, son image est constituée des vecteurs x vérifiant $p(x) = x$, c'est-à-dire $\frac{2}{3}f(x) + \frac{1}{3}x = x$. On en déduit très facilement que la condition est équivalente à avoir $f(x) = x$.
3. Pour tout vecteur x, on peut écrire $p(x) + q(x) = x$. En effet, si on écrit x sous la forme $x = x_1 + x_2$, avec $x_1 \in \ker(p)$ et $x_2 \in \mathrm{Im}(p)$, alors $p(x) = x_2$ et $q(x) = x_1$, donc $p(x) + q(x) = x_1+x_2 = x$. Autrement dit, $q = \mathrm{id} - p$. Comme par ailleurs $p = \frac{2}{3}f + \frac{1}{3}\,\mathrm{id}$ implique $\mathrm{id} = 3p - 2f$, on en déduit que $q = 3p - 2f - p = 2p - 2f$.
4. On sait que, p étant un projecteur, $E = \ker(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$. On a vu à la question 2 que $\mathrm{Im}(p) = \{x \mid f(x) = x\} = \ker(f - \mathrm{id})$. Par ailleurs, $\ker(p) = \mathrm{Im}(q)$. Comme q est un projectur, $\mathrm{Im}(q) = \{x \mid q(x) = x\} = \{x \mid 2p(x) - 2f(x) = x\}$. Or, $2p(x) - 2f(x) = \frac{4}{3}f(x) + \frac{2}{3}x - 2f(x)$, donc $2p(x) - 2f(x) = x \Leftrightarrow -\frac{2}{3}f(x) = \frac{1}{3}x$, ou encore $f(x) = -\frac{1}{2}x$. Autrement dit, $\mathrm{Im}(q) = \ker\left(f + \frac{1}{2}\,\mathrm{id}\right)$, ce qui donne bien l'égalité souhaitée.
5. Le polynôme admet 1 comme racine évidente et se factorise sous la forme $(X-1)\left(X + \frac{1}{2}\right)$. On peut conjecturer que, pour tout endomorphisme f vérifiant une relation du type $af^2+bf+c = 0$, on aura $E = \ker(f - x_1\,\mathrm{id}) \oplus \ker(f - x_2\,\mathrm{id})$, où x_1 et x_2 sont les racines du polynôme ax^2+bx+c (dans le cas où ce polynôme admet deux racines réelles). En fait, ce résultat se généralise encore largement : si f est annulé par un polynôme P admettant pour racines $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, alors $E = \ker(f - \alpha_1\,\mathrm{id}) \oplus \cdots \oplus \ker(f - \alpha_k\,\mathrm{id})$, mais il faut pour comprendre cette égalité connaitre les sommes directes de plus de deux sous-espaces vectoriels, que nous n'avons pas étudiées cette année.

II. Expression des puissances de f.

1. Tentons une démonstration par récurrence. Au rang 0, $f^0 = \mathrm{id}$ et $p+q = \mathrm{id}$ (résultat utilisé plus haut), donc la relation est vraie. Supposons-là vérifiée au rang n, alors $f^{n+1} = f \circ f^n = f \circ p + \left(-\frac{1}{2}\right)^n f \circ q$. Or, $f \circ p = \frac{2}{3}f^2 + \frac{1}{3}f = \frac{1}{3}(f + \mathrm{id}) + \frac{1}{3}f = \frac{2}{3}f + \frac{1}{3}\,\mathrm{id} = p$; et $f \circ q = f \circ (2p - 2f) = 2p - 2f^2 = 2p - f - \mathrm{id}$. En utilisant $\mathrm{id} = 3p - 2f$, on trouve $f \circ q = -p + f = -\frac{1}{2}(2p - 2f) = -\frac{1}{2}q$. en reportant ces deux égalités dans notre calcul précédent, on trouve $f^{n+1} = p + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} q$, ce qui est bien la formule attendue au rang $n+1$. Par principe de récurrence, elle est donc valable pour tout entier n.
2. Reprenons la relation initiale $f^2 = \frac{1}{2}(f + \mathrm{id})$. On peut l'écrire sous la forme $f \circ \left(f - \frac{1}{2}\,\mathrm{id}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{id}$, ou encore $f \circ (2f - \mathrm{id}) = \mathrm{id}$. L'application f est donc bijective, de réciproque $f^{-1} = 2f - \mathrm{id}$.

3. La relation nous donnerait $f^{-1} = p + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-1} q = p - 2q$. Or, $p - 2q = p - 2(2p - 2f) = 4f - 3p = 4f - 2f - \mathrm{id} = 2f - \mathrm{id}$. La relation reste donc valable pour $n = -1$. Pour regarder ce qui se passe pour un n négatif quelconque, on peut refaire une récurrence. On vient de vérifier que, pour $n = -1$, la formule était vraie. Supposons-là au rang $-n$ (si ça vous choque vraiment de faire une récurrence sur des entiers négatifs, vous appelez Q_n la propriété $f^{-n} = p + (-2)^n q$), et calculons $f^{-n-1} = f^{-1} \circ f^{-n} = (2f - \mathrm{id}) \circ (p + (-2)^n q) = 2f \circ p + (-2)^n (2f \circ q) - p - (-2)^n \circ q$. En utilisant les relations $f \circ p = p$ et $f \circ q = -\dfrac{1}{2} q$, on trouve $f^{-n-1} = 2p - (-2)^n q - p - (-2)^n q = p + (-2)^{n+1} q$, ce qui prouve la propriété au rang $n+1$. Celle-ci reste donc valable pour tous les entiers relatifs.

   On pouvait aussi, alternativement, prouver que la formule donnait bien pour $-n$ la réciproque de f^n, autrement dit que $\left(p + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n q\right) \circ (p + (-2)^n q) = \mathrm{id}$. En effet, cette expression se développe en $p^2 + (-2^n) p \circ q + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n q \circ p + q$. Or, $p \circ q = p \circ (2p - 2f) = \left(\dfrac{2}{3} f + \dfrac{1}{3} \mathrm{id}\right)\left(-\dfrac{2}{3} f + \dfrac{2}{3} \mathrm{id}\right) = -\dfrac{4}{9} f^2 + \dfrac{2}{9} f + \dfrac{2}{9} \mathrm{id} = 0$ puisque $f^2 = \dfrac{1}{2}(f + \mathrm{id})$. De même, $q \circ p = 0$ (tout celà commute puisqu'on peut tout exprimer en fonction de f et de id). Il ne reste donc de notre calcul que $p + q$, qui est bien égal à l'identité.

III. Un exemple concret.

1. D'après l'énoncé, $M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, on calcule donc $M^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$. Comme $M + I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, on constate bien l'égalité $M^2 = \dfrac{1}{2}(M + I)$, d'où découle $f^2 = \dfrac{1}{2}(f + \mathrm{id})$.

2. Appartenir à $\ker(f - \mathrm{id})$ est équivalent à vérifier l'équation $f(x) = x$, ce qui nous mène au système $\begin{cases} -2x + y + z = x \\ -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z = y \\ -3x + y + 2z = z \end{cases}$. Quitte à multiplier la deuxième équation par deux, les trois équations se ramènent à $-3x + y + z = 0$, soit $z = 3x - y$. Autrement dit, $\ker(f - \mathrm{id}) = \{(x, y, 3x - y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}((1, 0, 3); (0, 1, -1))$.

   De même, le deuxième noyau se calcule en résolvant $\begin{cases} -2x + y + z = -\frac{1}{2}x \\ -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z = -\frac{1}{2}y \\ -3x + y + 2z = -\frac{1}{2}z \end{cases}$. Multiplions partout par 2 et passons tout à gauche pour obtenir $\begin{cases} -3x + 2y + 2z = 0 \\ -3x + 4y + z = 0 \\ -6x + 2y + 5z = 0 \end{cases}$.
   La différence des deux premières équations donne $2y - z = 0$, et $2L_1 - L_3$ donne $2y - z = 0$ aussi. Sans surprise, le système n'est donc pas de Cramer, on peut exprimer $z = 2y$, puis $3x = 2y + 2z = 6y$, donc $x = 2y$. Finalement, $\ker\left(f + \dfrac{1}{2}\mathrm{id}\right) = \{(2y, y, 2y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((2, 1, 2))$.

3. Notons P et Q les matrices respectives des deux projecteurs dans la base canonique. On cal-

cule $P = \dfrac{2}{3}M + \dfrac{1}{3}I = \begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ -2 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$, puis $Q = 2P - 2M = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 2 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ (ou plus simplement $Q = I - P$ pour le même résultat). Autrement dit, si on tient vraiment à donner les expression analytiques, $p(x,y,z) = \left(-x + \dfrac{2}{3}y + \dfrac{2}{3}z; -x + \dfrac{4}{3}y + \dfrac{1}{3}z; -2x + \dfrac{2}{3}y + \dfrac{5}{3}z\right)$, et $q(x,y,z) = \left(2x - \dfrac{2}{3}y - \dfrac{2}{3}z; x - \dfrac{1}{3}y - \dfrac{1}{3}z; 2x - \dfrac{2}{3}y - \dfrac{2}{3}z\right)$.

4. D'après les calculs de la deuxième partie, $f^n(x) = p(x) + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n q(x)$. On va se contenter d'écrire sa matrice $M^n = \begin{pmatrix} -1-(-\frac{1}{2})^{n-1} & \frac{2}{3}(1-(-\frac{1}{2})^n) & \frac{2}{3}(1-(-\frac{1}{2})^n) \\ -1+(-\frac{1}{2})^n & \frac{1}{3}(4-(-\frac{1}{2})^n) & \frac{1}{3}(1-(-\frac{1}{2})^n) \\ -2-(-\frac{1}{2})^{n-1} & \frac{2}{3}(1-(-\frac{1}{2})^n) & \frac{1}{3}(5+(-\frac{1}{2})^{n-1}) \end{pmatrix}$.

5. Si on applique la formule précédente, on devrait trouver $M^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ -6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ (faites attention aux $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$, qui valent alors $(-2)^2 = 4$). Eh bien, vérifions :

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow 2L_2$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow 2L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 - L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow 5L_1 - L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_2 - L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 10 & -4 & -4 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 10 & -4 & -4 \\ -30 & 20 & 10 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow 5L_3 - 2L_2$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 10 & -4 & -4 \\ -30 & 20 & 10 \\ 60 & -20 & -30 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow -L_1/2 \\ L_2 \leftarrow L_2/10 \\ L_3 \leftarrow -L_3/10 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ -6 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad = M^{-1}$$

Le pivot n'a sûrement pas été appliqué de façon optimale mais en tout cas ça marche !

cm

Devoir à la maison n°9

PTSI B Lycée Eiffel

à rendre pour le 15 mai 2012

Ce sujet est un sujet de révisions tiré d'une annale de concours récente (et à peine modifiée). Le sujet est donc faisable en quatre heures, et porte sur toutes les parties du programme.

Problème 1

Partie I

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Montrer que f admet en 0 un prolongement par continuité que l'on continuera à noter f.
3. La fonction prolongée est-elle dérivable en 0 ? Si oui, préciser $f'(0)$. Calculer par ailleurs la dérivée f' de la fonction f.
4. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations. On pourra utiliser la fonction auxiliaire $k : x \mapsto x - (1+x)\ln(1+x)$.
5. On considère la courbe Γ d'équation polaire $\rho = f(\theta)$.
   (a) Préciser l'allure de Γ lorsque θ tend vers $+\infty$, ainsi que le coefficient directeur de la tangente au point de paramètre $\theta = 0$.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{\theta \to -1} \rho(\theta)\sin(\theta+1)$. En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe Γ quand θ tend vers -1.
   (c) Tracer l'allure de Γ, en faisant apparaitre la tangente et l'asymptote évoquées aux questions précédentes.

Partie II

On s'intéresse dans cette partie à l'intégrale $L = \displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt$.

Pour tout entier naturel n, on note $P_n(X) = X - \dfrac{X^2}{2} + \dfrac{X^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{X^n}{n}$, et $Q_n(X) = X - \dfrac{X^2}{4} + \dfrac{X^3}{9} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{X^n}{n^2}$.

1. Expliquer pourquoi l'intégrale L est bien définie.
2. Justifier que $\forall t \in [0;1]$, $1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^{n-1}t^{n-1} = \dfrac{1-(-1)^n t^n}{1+t}$.
3. En déduire que $\forall x \in [0;1]$, $P_n(x) = \ln(1+x) - \displaystyle\int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\ dt$.

   On notera désormais, pour $x \in [0;1]$, $R_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\ dt$.
4. Établir la majoration $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.
5. Comparer, pour $x \in]0;1]$, $Q_n'(x)$ et $\dfrac{P_n(x)}{x}$.

6. En notant g_n l'application définie sur $]0;1]$ par $g_n(x) = \dfrac{P_n(x)}{x} - \dfrac{\ln(1+x)}{x}$, et par $g_n(0) = 0$, montrer que $|Q_n(1) - L| \leqslant \displaystyle\int_0^1 |g_n(x)|\, dx \leqslant \frac{1}{(n+1)^2}$. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} Q_n(1)$.
7. Déterminer un entier N tel que $Q_N(1)$ soit une approximation de L à 10^{-4} près.

Partie III

On s'intéresse à présent aux dérivées successives de f, que l'on note $f^{(n)}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;+\infty[$.
2. Calculer $f''(x)$.
3. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe un polynôme T_n à coefficients réels, et un réel a_n, tels que $f^{(n)}(x) = \dfrac{T_n(x)}{(1+x)^n x^n} + a_n \dfrac{\ln(1+x)}{x^{n+1}}$.
4. Montrer que tous les coefficients de T_n sont des entiers.
5. En utilisant la formule de Leibniz, calculer $f^{(n)}(x)$ et en déduire la valeur de T_n sans chercher à expliciter ses coefficients. Vérifier cette expression pour $n = 2$.

Problème 2

Le but de ce problème est d'étudier différentes matrices qui commutent avec leur transposée, c'est-à-dire qui vérifient ${}^tMM = M{}^tM$ (on notera cette relation $(\star)$ dans la suite de l'énoncé).

Partie I

Dans cette partie, toutes les matrices considérées seront dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
On note en particulier $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A et C vérifient la relation $(\star)$.
2. Calculer A^2. En déduire que, pour tout entier naturel n, A^n vérifie la relation $(\star)$.
3. Montrer que A est inversible. On note u l'endomorphisme de matrice A dans la base canonique.
4. Calculer $u(1,0)$ et $u(0,1)$. Montrer que u est une symétrie et préciser l'ensemble des vecteurs invariants par u. On note pour la suite $U = A + I$.
5. Montrer que la matrice U vérifie la relation $(\star)$. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists \alpha_n \in \mathbb{R}$, $U^n = \alpha_n U$. En déduire que toutes ses puissances U^n vérifient la relation $(\star)$.
6. On note E_2 l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant la relation $(\star)$. En considérant la matrice $A + C$, montrer que E_2 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
7. Étant donnée une matrice quelconque de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, déterminer des conditions nécessaires et suffisantes sur ses coefficients pour qu'elle appartienne à E_2.
8. En déduire que E_2 est la réunion de deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, dont on donnera une base.
9. Le produit de deux matrices de E_2 est-il toujours dans E_2 ?

Partie II

On se place dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On définit f l'endomorphisme vérifiant $f(1,0,0) = (0,0,-1)$; $f(0,1,0) = (1,0,0)$ et $f(0,0,1) = (0,1,0)$, et S sa matrice dans la base canonique. On note E_3 l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant la relation $(\star)$.

1. Écrire la matrice S.

2. Déterminer S^2 et montrer que S et S^2 appartiennent à E_3.
3. Montrer que, pour tous réels a, b et c, la matrice $R = a + bS + cS^2$ appartient à E_3.
4. En déduire que E_3 contient un espace vectoriel de dimension 3 que lon notera F.
5. Montrer que F est stable par multiplication matricielle.

Partie III

On se place à présent dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, et on définit la matrice B par $B = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base cononique est B. On note E_4 l'ensemle des matrices de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ vérifiant la relation $(\star)$.

1. Déterminer les réels a tels que $B \in E_4$. On pose pour la suite $a = -1$.
2. Déterminer une base de $\ker(u)$ et de $\operatorname{Im}(u)$.
3. Calculer $u(1, 1, -1, -1)$. Que remarque-t-on ?
4. Calculer $B \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
5. Montrer que la famille $\mathcal{B} = ((0, 1, 1, 0); (1, 1, -1, -1); (1, 0, 0, 1); (1, -1, 1, -1))$ est une base de $\mathbb{R}^4$ et donner la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$. En déduire l'existence d'une matrice inversible P que l'on précisera telle que $B = P\Delta P^{-1}$, où Δ est une matrice diagonale (on ne demande pas de préciser P^{-1}).
6. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $B^n = P\Delta^n P^{-1}$. En déduire une expression simple de B^{2p} et de B^{2p+1} en fonction de B et de B^2.

Corrigé du DM9

Problème 1

Partie I

1. La fonction f est définie sur $]-1;0[\cup]0;+\infty[$.

2. Puisque $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$, et on peut prolonger f par continuité en posant $f(0)=1$.

3. Calculons donc la dérivée (ailleurs qu'en 0) : $f'(x) = \dfrac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} = \dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{(1+x)x^2}$. Bon, il n'y aucun moyen évident de calculer la limite de cette dérivée en 0 (même problème si on passe directement par le taux d'accroissement). En fait, vous manquez un peu de développements limités pour faire cette question facilement, même si on peut s'en sortir avec le règle de l'Hôpital vue en exercice. Si on sait que $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\ } x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$, on effectue le calcul $f'(x) \underset{x\to 0}{=} \dfrac{x-(1+x)(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2))}{(1+x)x^2} = \dfrac{x-x+\frac{x^2}{2}-x^2+o(x^2)}{(1+x)x^2} \sim \dfrac{-x^2}{2x^2} \sim -\dfrac{1}{2}$. D'après le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, la fonction f est donc dérivable en 0, et $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.

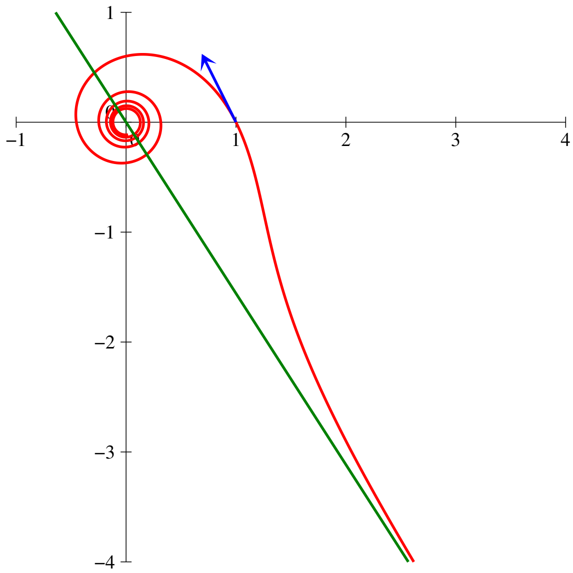
4. Commençons donc par étudier la fonction k : elle est définie et dérivable sur le même intervalle que f (y compris en 0), et $k'(x) = 1 - \ln(1+x) - \dfrac{1+x}{1+x} = -\ln(1+x)$. La fonction k est donc croissante sur $]-1,0]$ et décroissante sur $[0,+\infty[$. Comme $k(0)=0$, la fonction est toujours négative, et f' est donc du signe opposé à celui de $(1+x)x^2$, c'est-à-dire toujours négative. On calcule sans difficulté $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = +\infty$ (pas de forme indéterminée), et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (croissance comparée), pour obtenir le tableau de variations suivant :

x	-1	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$	1 $\searrow$	0

5. (a) Puisque $\lim\limits_{\theta\to+\infty} \rho(\theta) = 0$, la courbe va se rapprocher de l'origine du repère en spirale. En 0, on sait que $\rho(0)=1$ et $\rho'(0) = -\dfrac{1}{2}$, donc la tangente au point $(1,0)$ de paramètre 0 a pour vecteur directeur $\left(-\dfrac{1}{2}, 1\right)$. Autrement dit, en coordonnées cartésiennes, la tangente a pour équation $y = -2(x-1) = 2-2x$, et a notamment pour pente -2.

   (b) On sait que $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$. Ici, en posant $X = 1+\theta$, $\rho(\theta)\sin(1+\theta) = \dfrac{\ln(X)\sin(X)}{X-1} \sim \dfrac{X\ln(X)}{X-1}$, qui a une limite nulle par croissance comparée. La courbe polaire a donc pour asymptote quand θ tend vers -1 la droite d'équation polaire $\theta = -1$ (qui n'est d'ailleurs pas très commode à représenter, -1 radian n'étant pas franchement un angle usuel).

   (c) Voici ce que ça donne :



Partie II

1. Puisqu'on a prolongé la fonction par continuité en 0, il s'agit de l'intégrale sur un segment d'une fonction continue, elle est évidemment définie.
2. Il s'agit de reconnaître une somme partielle de suite géométrique de raison $-t$, la formule en découle trivialement.
3. On constate facilement que P_n est la primitive s'annulant en 0 de $1-x+x^2+\cdots+(-1)^{n-1}x^{n-1}$ (dérivez P_n si vous n'êtes vraiment pas convaincus), donc en réutilisant le résultat de la question précédente, $P_n(x) = \int_0^x \frac{1-(-1)^n t^n}{1+t}\,dt = \int_0^x \frac{1}{1+t} + \frac{(-t)^n}{1+t}\,dt = \ln(1+x) + \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\,dt$ (que de questions triviales dans ce sujet, ça fatiguerait presque).
4. Lorsque $t \in [0,1]$, $\frac{1}{1+t} \leqslant 1$, donc $|R_n(x)| = \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt \leqslant \int_0^x t^n\,dt = \frac{x^{n+1}}{n+1}$.
5. Calculons donc $Q_n'(x) = 1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{X^{n-1}}{n}$. Incroyable mais vrai c'est exactement $\frac{P_n(x)}{x}$.
6. D'après la question précédente, $\int_0^1 \frac{P_n(x)}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx = \int_0^1 Q_n'(x)\,dx - L = Q_n(1)-Q_n(0)-L$. Comme Q_n s'annule en 0, l'inégalité $|Q_n(1)-L| = \left|\int_0^1 g_n(x)\,dx\right| \leqslant \int_0^1 |g_n(x)|\,dx$ en découle. Par ailleurs, d'après la question précédant la précédente, $|g_n(x)| = \frac{|P_n(x)-\ln(1+x)|}{|x|} = \frac{|R_n(x)|}{x} \leqslant \frac{x^n}{n+1}$, donc $\int_0^1 |g_n(x)|\,dx \leqslant \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{(n+1)^2}$. On en déduit immédiatement que $\lim\limits_{n\to+\infty} |Q_n(1)-L| = 0$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} Q_n(1) = L$.
7. Vu l'inégalité obtenue à la question précédente, ce sera le cas dès que $\frac{1}{(n+1)^2} \leqslant 10^{-4}$, soit $n+1 \geqslant 10^2$, donc $n \geqslant 99$.

Partie III

1. C'est trivial, puisqu'il s'agit d'un quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.

2. On connait déjà la valeur de $f'(x) = \dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{(1+x)x^2} = \dfrac{1}{x(1+x)} - \dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$, calculons $f''(x) = -\dfrac{1+2x}{x^2(1+x)^2} - \dfrac{\frac{x^2}{1+x} - 2x\ln(1+x)}{x^4} = \dfrac{-1-2x}{x^2(1+x)^2} - \dfrac{1}{(1+x)x^2} + 2\dfrac{\ln(1+x)}{x^3}$.

3. Nous allons évidemment procéder par récurrence. C'est vrai au rang 1 et même au rang 2 d'après la question précédente (il suffit de mettre au même dénominateur les deux premiers termes obtenus pour f'', si on le suppose au rang n, alors $f^{(n+1)}(x) = \dfrac{T_n'(x)(1+x)^n x^n - nT_n(x)(1+x)^{n-1}x^n - nT_n(x)(1+x)^n x^{n-1}}{(1+x)^{2n}x^{2n}}$ $+a_n\dfrac{\frac{x^{n+1}}{1+x} - (n+1)x^n\ln(1+x)}{x^{2n+2}} = \dfrac{T_n'(x)x(1+x) - nT_n(x)(2x+1) + a_n(1+x)^n}{(1+x)^{n+1}x^{n+1}} - (n+1)a_n\dfrac{\ln(1+x)}{x^{n+2}}$, qui est bien de la forme souhaitée. Précisons au passage que le réel a_n est en fait toujours un entier (qu'on peut même expliciter facilement), ça va servir juste après.

4. C'est une récurrence triviale : ça marche au rang 1, et si on le suppose au rang n, alors $T_{n+1} = x(1+x)T_n' - n(1+2x)T_n + a_n(1+x)^n$ a tous ses coefficients entiers puisque chacun des termes qui le constitue est à coefficients entiers.

5. Tentons donc d'appliquer Leibniz avec $u(x) = \ln(1+x)$ et $v(x) = \dfrac{1}{x}$. On obtient sans peine $u^{(k)}(x) = (-1)^{k+1}\dfrac{(k-1)!}{(1+x)^k}$ (pour $k \geqslant 1$) et $h^{(k)}(x) = (-1)^k\dfrac{k!}{x^{k+1}}$. On obtient alors $f^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!\ln(1+x)}{x^{n+1}} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k-1}\dfrac{(k-1)!}{(1+x)^k}(-1)^{n-k}\dfrac{(n-k)!}{x^{n-k+1}}$ en isolant le terme correspondant à $k=0$. La somme se simplifie en $(-1)^{n-1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{n!(1+x)^{n-k}x^{k-1}}{k(1+x)^n x^n}$, ce qui donne par identification $T_n(x) = (-1)^{n-1}n!\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{(1+x)^{n-k}x^{k-1}}{k}$. Pour $n=2$, on trouve $T_2(x) = -2\left(1+x+\dfrac{x}{2}\right) = -2-3x$, qui correspond bien à la dérivée seconde obtenue plus haut.

Problème 2

Partie I

1. En fait, inutile de faire des calculs explicites : ${}^tA = A$, donc ${}^tAA = A{}^tA = A^2$; et ${}^tC = -C$, donc ${}^tCC = C{}^tC = -C^2$. Plus généralement, toutes les matrices symétriques et antisymétriques vérifient la relation $(\star)$.

2. On trouve $A^2 = I$, toutes les puissances de A seront donc alternativement égales à A et à I, qui vérifient toutes deux la relation.

3. Puisque $A^2 = I$, A est inversible et $A^{-1} = A$.

4. On peut expliciter $u(x,y) = (y,x)$, donc $u(1,0) = (0,1)$ et $u(0,1) = (1,0)$. Puisque $A^2 = I$, $u \circ u = \mathrm{id}$, et u est bien une symétrie. Les vecteurs invariants par u sont solutions du système défini par les équations $y = x$ et $x = y$. Ce sont donc tous les vecteurs (x,x), ou si on préfère $\mathrm{Vect}((1,1))$.

5. La matrice U est symétrique, je renvoie donc à la question 1. On calcule sans problème $U^2 = 2U$, puis on prouve par une récurrence triviale que $U^n = 2^{n-1}U$: c'est vrai au rang 1, et en le supposant vrai au rang n, alors $U^{n+1} = U^n \times U = 2^{n-1}U^2 = 2^nU$. Un multiple d'une matrice vérifiant la relation $(\star)$ la vérifie aussi, donc U^n la vérifie.

6. Considérons donc $A+C$, sa transposée est $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on calcule sans l'ombre d'une difficulté $(A+C)^t(A+C) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, mais ${}^t(A+C)(A+C) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Puisque E_2 n'est pas stable par somme, ce n'est pas un sous-espace vectoriel.
7. Notons donc $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et ${}^tM = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, on calcule $M^tM = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix}$ et ${}^tMM = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix}$. Manifestement, les deux matrices sont égales si et seulement si $b^2 = c^2$ et $ab+cd = ad+bc$.
8. La relation précédente équivaut à $b = c$ (dans ce cas, la deuxième équation est toujours vérifiée) ou $b = -c$ et $a - d = d - a$, soit $d = a$. La matrice M est donc au choix symétrique, donc appartenant à $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ ou de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, donc appartenant à $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ (qu'on peut résumer par $\text{Vect}(I, C)$)
9. Il faut trouver deux matrices de E_2 n'appartenant pas au même sous-espace vectoriel, et qui ne commutent pas (et encore, ça ne suffit pas toujours), par exemple U et C : $UC = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, qui n'est pas dans E_2 puisque pas symétrique et ayant des coefficients diagonaux différents.

Partie II

1. Je m'étendrai pas sur la difficulté extrême de cette question : $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. On calcule $S^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. On calcule sans plus de difficulté $S^tS = {}^tSS = I$, et $S^2\ {}^tS^2 = {}^tS^2S^2 = I$.
3. C'est un calcule facile : $(aI+bS+cS^2)(aI+b^tS+c^tS^2) = a^2I + b^2S^tS + c^2S^2\ {}^tS^2 + ab(S+^tS) + AC(S^2+^tS^2) + bc(S^tS^2 + S^2\ {}^tS)$. En exploitant les calculs de la question précédente, cela se simplifie en $(a^2+b^2+c^2)I + (ab+bc)(S+^tS) + (ac(S^2+^tS^2))$. Le calcul de ${}^t(aI+bS+cS^2)(aI+bS+cS^2)$ donne exactement la même chose.
4. Ben oui, on vient de prouver qu'il contient $\text{Vect}(I, S, S^2)$, qui est sûrement de dimension 3 puisque la famille est libre (il n'y qu'à regarder les matrices, elles ont des coefficients non nuls à des endroits différents).
5. Il suffit de constater que $S^3 = -I$, et calculer $(aI+bS+cS^2)(dI+eS+fS^2) = adI + (ae+bd)S + (af+be+cd)S^2 + (bf+ce)S^3 + cfS^4 = (ad-bf-ce)I + (ae+bd-cf)S + (af+be+cd)S^2$.

Partie III

1. On calcule un peu plus péniblement que dans les parties précédentes $B^tB = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+3 & 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ a+1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, puis

$${}^tBB = \begin{pmatrix} 4 & a+1 & 0 & 0 \\ a+1 & a^2+1 & a-1 & a+1 \\ 0 & a-1 & 2 & 0 \\ 0 & a+1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$. Toutes les conditions nécessaires à l'égalité des deux produits se ramènent à l'unique condition $a = -1$ (très suprenant au vu de la suite de l'énoncé).

2. Le noyau de u s'obtient en résolvant le système constitué des équations $x-y+z+t = -x+t = x-t = x+y-z+t = 0$, ce qui donne $x = t$ (les deux équation médianes sont équivalentes), et $2x+z-y = 2x+y-z = 0$. En soustrayant, $2z-2y = 0$, soit $z = y$, puis $2x = 0$, donc $x = 0 = t$. Finalement, $\ker(u) = \{(0, y, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((0, 1, 1, 0))$. On obtient beaucoup plus rapidement $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}((1, -1, 1, 1); (-1, 0, 0, 1); (1, 1, -1, 1))$ (on enlève l'image du troisième vecteur de la base canonique, qui est opposée à celle du deuxième, et on garde les trois autres puisque, d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}(u)) = 4 - \dim(\ker(u)) = 3$.
3. On calcule donc $u(1, 1, -1, -1) = (-2, -2, 2, 2)$ (par exemple en multipliant le vecteur colonne correspondant à gauche par B). On constate que l'image est proportionnelle au vecteur dont on est parti.
4. Encore du calcul palpitant : $B \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $B \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.
5. Puisque la famille est constituée de quatre vecteurs dans un espace de dimension 4, il suffit de vérifier qu'elle est libre, ce qui se fait en résolvant le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} & & b & + & c & + & d & = & 0 \\ a & + & b & & & - & d & = & 0 \\ a & - & b & & & + & d & = & 0 \\ & & -b & + & c & - & d & = & 0 \end{array}\right.$.
La somme des deux équations extrêmes donne directement $c = 0$, celle des deux équations du milieu $a = 0$. La première équation devient alors $d = -b$, et la deuxième $d = b$, la seule solution est la solution nulle et la famille est libre. Le seul vecteur dont on ne connaisse pas l'image par u est le premier, mais il est dans le noyau. Les trois autres ont des images proportionnelles à eux-même, avec coefficients respectifs -2, 2 et 2, donc la matrice cherchée est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, qu'on va tout de suite appeler Δ puisque la matrice est diagonale. Assez curieusement, la formule de changement de base est donnée dans le mauvais sens, mais peu importe puisque $B = P\Delta P^{-1}$ est équivalent à $\Delta = P^{-1}\Delta P$, ce qui veut dire que la matrice P est la matrice de passage de la base canonique vers $\mathcal{B}$, soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
6. Allez, une petit récurrence, c'est vrai au rang 1, et en le supposant au rang n, alors $B^{n+1} = B^n \times B = P\Delta^n P^{-1} P\Delta P^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$. Il suffit alors d'essayer de simplifier les puissances de Δ : $\Delta^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; puis, en distinguant puissances paires et impaires, $\Delta^{2p} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{2p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{2p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^{2p} \end{pmatrix} = 2^{2p-2}\Delta^2$; et $\Delta^{2p+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2^{2p+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{2p+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^{2p+1} \end{pmatrix} = 2^{2p}\Delta$. On en déduit facilement que $B^{2p} = P(2^{2p-2}\Delta^2)p^{-1} = 2^{2p-2}B^2$, et $B^{2p+1} = 2^{2p}B$. Pour information, il s'agissait du sujet commun des Petites Mines 2010.

Interrogation Écrite n°1

PTSI B Lycée Eiffel

13 septembre 2012

Tous les calculs doivent apparaitre sur la feuille.

1. Quelle est la contraposée de la phrase « Je suis en PTSI B, donc j'ai un prof de maths génial » ?

2. Rappeler tout ce que vous savez sur la fonction exponentielle (y compris la courbe) sans démonstration.

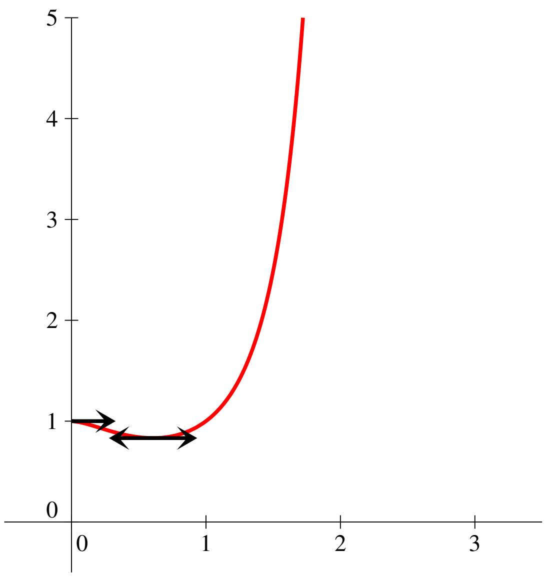
3. Démontrer la formule $\forall (x, y) > 0$, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.

4. Résoudre l'inéquation $ln(x + \sqrt{x-1}) > 0$.

5. Étudier la fonction $f : x \mapsto x^{(x^2)}$.

Corrigé de l'IE1

1. Je n'ai pas un prof de maths génial, je ne suis donc pas en PTSI B.
2. C'est du cours.
3. C'est également du cours, démontré en posant $f(x) = \ln(xy) - \ln(x) - \ln(y)$ et en démontrant que f est constamment nulle.
4. Inutile de s'embêter avec le domaine de définition (si ce n'est la positivité de x pour que la racine carrée ait un sens), on cherche à résoudre $x + \sqrt{x} - 1 > 1$, soit $x + \sqrt{x} - 2 > 0$. En posant $X = \sqrt{x}$, on se ramène à $X^2 + X - 2$, trinome ayant pour discriminant $\Delta = 1 + 8 = 9$, et admettant pour racines $X_1 = \dfrac{-1-3}{2} = -2$ et $X_2 = \dfrac{-1+3}{2} = 1$. Le trinome est positif à l'extérieur des racines, soit lorsque $x \geqslant 1$ (les valeurs inférieures à -2 étant non pertinentes ici). Conclusion : $\mathcal{S} = [1; +\infty[$.
5. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$, et peut s'écrire sous la forme $f(x) = e^{x^2\ln(x)}$. Elle est dérivable, de dérivée $f'(x) = (x + 2x\ln(x))e^{x^2\ln(x)} = x(1 + 2\ln(x))e^{x^2\ln(x)}$. Cette dérivée est du signe de $1 + 2\ln(x)$ et s'annule en particulier pour $x = e^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ (valeur comprise entre 0 et 1). La fonction f atteint à cet endroit un minimum de valeur $f(e^{-\frac{1}{2}}) = e^{-\frac{1}{2e}}$ (valeur comprise entre 0 et 1 également). De plus, par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to 0} x^2\ln(x) = 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$; et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (pas de difficulté de ce côté-là). Toujours en utilisant la croissance comparée, on peut également constater que $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$, ce qui prouve l'existence d'une tangente horizontale à la courbe représentative de f à l'origine.



Interrogation Écrite n°2

PTSI B Lycée Eiffel

2 octobre 2012

Tous les calculs doivent apparaitre sur la feuille.

1. Rappeler l'énoncé complet de l'inégalité trangulaire.

2. Déterminer (sous forme exponentielle) les racines cubiques de $z = 4 - 4\sqrt{3}i$.

3. Rappeler les formules d'Euler, et linéariser $\sin^4(\theta)$.

4. Résoudre l'équation $(1+i)z^2 + (4-2i)z - 4i = 0$.

5. On considère les quatre vecteurs $\overrightarrow{u}(2i-3)$, $\overrightarrow{v}(4+6i)$, $\overrightarrow{w}(5i-2)$ et $\overrightarrow{z}\left(5 - \dfrac{10}{3}i\right)$. Déterminer s'il y a des vecteurs colinéaires ou orthogonaux parmi eux.

Corrigé de l'IE2

1. Cf cours.
2. Il est tout de même plus simple de commencer par mettre z sous forme exponentielle : $|z| = \sqrt{16+16\times 3} = \sqrt{64} = 8$, donc $z = 8\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 8e^{-i\frac{\pi}{3}}$. Les racines cubiques de z ont donc pour module $\sqrt[3]{(8)} = 2$, et pour arguments $\theta = -\frac{\pi}{9}\left[\frac{2\pi}{3}\right]$. On a donc pour racines $z_1 = 2e^{-i\frac{\pi}{9}}$; $z_2 = 2e^{i(-\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi}{3})} = 2e^{i\frac{5\pi}{9}}$ et $z_3 = 2e^{i(-\frac{\pi}{9}+\frac{4\pi}{3})} = 2e^{i\frac{11\pi}{9}} = 2e^{-i\frac{7\pi}{9}}$.
3. Les formules d'Euler sont dans le cours, et $\sin^4(\theta) = \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^4 = \frac{1}{16}(e^{4i\theta} - 4e^{2i\theta} + 6 - 4e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta}) = \frac{1}{16}(2\cos(4\theta) - 4\cos(2\theta) + 6) = \frac{1}{8}\cos(4\theta) - \frac{1}{4}\cos(2\theta) + \frac{3}{8}$.
4. Commençons donc par calculer le discriminant de cette équation : $\Delta = (4-2i)^2 + 16i(1+i) = 16 - 16i - 4 + 16i - 16 = -4 = (2i)^2$. Inutile donc de s'embêter à faire des calculs ignobles, $\delta = 2i$, et les deux racines sont $z_1 = \frac{-4+2i-2i}{2(1+i)} = \frac{-2(1-i)}{2} = -1+i$, et $z_2 = \frac{-4+4i}{2(1+i)} = \frac{-2(1-i)^2}{2} = -(1-i)^2 = 2i$. Finalement, $\mathcal{S} = \{-1+i; 2i\}$.
5. Le plus simple est de calculer $\overline{z}z'$ pour chaque couple de vecteurs. Commençons par $\overline{2i-3}(4+6i) = (-3-2i)(4+6i) = -12-8i-18i+12 = -26i \in i\mathbb{R}$ donc les deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux. On enchaine avec $(-3-2i)(5i-2) = -15i+6+10+4i$, qui n'est ni réel ni imaginaire pur. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ ne sont donc ni colinéaires ni orthogonaux. Inutile de tester $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$, on n'obtendra rien : s'ils étaient colinéaires, $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{u}$ seraient orthogonaux, et vice-versa. On enchaine donc directement avec $(-3-2i)\left(5-\frac{10}{3}i\right) = -15+10i-10i-\frac{20}{3}$. Ce nombre étant réel, les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{z}$ sont colinéaires. On en déduit sans calcul que $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{z}$ sont orthogonaux.

Interrogation Écrite n°3

PTSI B Lycée Eiffel

19 octobre 2012

Tous les calculs doivent apparaitre sur la feuille.

1. Rappeler la définition des termes suivants : équation linéaire homogène du premier ordre, courbes intégrales, équation normalisée.

2. Expliquer en quoi consiste la méthode de variation de la constante.

3. Résoudre l'équation différentielle $y' = 3y + (3x+1)e^{2x}$.

4. Résoudre l'équation différentielle $2xy' - 3y = \sqrt{x}$. Déterminer la solution vérifiant $y(1) = 1$.

5. Résoudre l'équation différentielle $xy' + (x-2)y = x-2$, en étudiant le raccordement éventuel des solutions en 0.

Corrigé de l'IE3

1. Voir le cours.
2. Il s'agit, une fois obtenues les solutions de l'équation homogène de la forme $Ke^{-A(x)}$, de chercher une solution particulière de l'équation complète en posant $y_p(x) = K(x)e^{-A(x)}$.
3. L'équation homogène associée $y' - 3y = 0$ a pour solution générale Ke^{3x}. On peut ici chercher directement une solution particulière de la forme $y(x) = (ax + b)e^{2x}$. On aura alors $y'(x) = ae^{2x} + 2(ax + b)e^{2x} = (2ax + a + 2b)e^{2x}$, donc $y' - 3y = (2ax + a + 2b - 3ax - 3b)e^{2x} = (-ax + a - b)e^{2x}$. Cette expression sera égale à $(3x + 1)e^{2x}$ si $a = -3$ et $a - b = 1$, soit $b = -4$. Une solution particulière de l'équation est donc $y_p(x) = (-3x - 4)e^{2x}$, et les solutions de l'équation complète sont les fonctions $y(x) = (-3x - 4)e^{2x} + Ke^{3x}$.
4. On va résoudre l'équation sur $\mathbb{R}^{+*}$ (elle n'est de toute façon définie que sur $\mathbb{R}_+$ à cause de la racine carrée) et normaliser : $y' - \dfrac{3}{2x}y = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. L'équation homogène associée $y' - \dfrac{3}{2x}y = 0$ admet pour solutions les fonctions de la forme $Ke^{\frac{3}{2}\ln(x)} = Kx^{\frac{3}{2}} = Kx\sqrt{x}$. On peut par ailleurs constater que la fonction $y_p(x) = -\dfrac{\sqrt{x}}{2}$ est une solution évidente de l'équation complète : $2xy_p' - 3y = \dfrac{2x}{-4\sqrt{x}} + \dfrac{3}{2}\sqrt{x} = -\sqrt{x}$. Les solutions de l'équation complète sont donc les fonctions $y(x) = -\dfrac{\sqrt{x}}{2} + Kx\sqrt{x}$. Aucune de ces fonctions n'est dérivable en 0 (à cause de la racine carrée, le terme en $x\sqrt{x}$ est quant à lui dérivable), donc il n'y a pas de solution qu'on puisse prolonger par continuité en 0. Pour avoir $y(1) = 1$, on doit avoir $-\dfrac{1}{2} + K = 1$, soit $K = \dfrac{3}{2}$, l'unique solution du problème de Cauchy est la fonction $y(x) = \left(\dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2}\right)\sqrt{x}$.
   Pour ceux qui n'auraient pas vu la solution évidente, on peut toujours faire varier la constante : on cherche $y_p(x) = K(x) \times x^{\frac{3}{2}}$, donc on a $y_p'(x) = K'(x)x^{\frac{3}{2}} + \dfrac{3}{2}K(x)\sqrt{x}$, soit $2xy' - 3y = 2K'(x)x^{\frac{5}{2}} + 3K(x)x^{\frac{3}{2}} - 3K(x)x^{\frac{3}{2}} = 2K'(x)x^{\frac{5}{2}}$. On veut que cette expression soit égale à $\sqrt{x}$, soit $K'(x) = \dfrac{1}{2x^2}$. On peut par exemple prendre $K(x) = -\dfrac{1}{2x}$, ce qui donne $y_p(x) = -\dfrac{1}{2x} \times x^{\frac{3}{2}} = -\dfrac{1}{2}\sqrt{x}$. On retrouve exactement notre solution évidente.
5. Normalisons l'équation : $y' + \dfrac{x-2}{x}y = \dfrac{x-2}{x}$, qu'on va résoudre séparement sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$. L'équation homogène associée $y' + \left(1 - \dfrac{2}{x}\right)y = 0$ a pour solutions les fonctions de la forme $Ke^{-x+2\ln(x)} = K\dfrac{x^2}{e^x}$ (valables sur chacun des deux intervalles). La fonction constante égale à 1 est une solution évidente de l'équation complète, donc les solutions sont de la forme $y(x) = 1 + K\dfrac{x^2}{e^x}$. Ces fonctions ont toutes pour limite 1 quand x tend vers 0 (que ce soit à droite ou à gauche). En 0, l'équation différentielle stipule que $0 \times y'(0) - 2y(0) = -2$ soit $y(0) = 1$, ce qui est donc toujours vérifié. Reste à voir si les fonctions recollées sont dérivables en 0. On a $y'(x) = \dfrac{2Kx}{e^x} - \dfrac{x^2}{e^x}$, qui tend vers 0 (à gauche comme à droite) quelle que soit la valeur de K. On peut donc recoller comme on veut les solutions, en prenant des valeurs de K différentes de chaque côté de 0. Par exemple, la fonction f définie par $f(x) = 1 + \dfrac{x^2}{e^x}$ quand $x \geqslant 0$ et $f(x) = 1 - \dfrac{x^2}{e^x}$ quand $x \leqslant 0$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation.

Interrogation Écrite n°4

PTSI B Lycée Eiffel

28 novembre 2012

Tous les calculs doivent apparaitre sur la feuille.

Étudier la fonction paramétrée $f : t \mapsto \begin{cases} x(t) & = & \dfrac{t - \frac{5}{4}}{t^2 - 1} \\ y(t) & = & \dfrac{t^2 + t + 2}{t - 1} \end{cases}$

On effectuera les calculs suivants :

- Étude des variations et tableau de variations de la fonction, avec étude des points stationnaires éventuels.
- Étude des branches infinies éventuelles.
- Tracé de la courbe soignée.
- Si le temps le permet, recherche de points doubles.

Corrigé de l'IE4

Étude de la fonction paramétrée $f : t \mapsto \begin{cases} x(t) &= \dfrac{t-\frac{5}{4}}{t^2-1} \\ y(t) &= \dfrac{t^2+t+2}{t-1} \end{cases}$

Étude des variations

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$. Elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition. En particulier, $x'(t) = \dfrac{t^2-1-2t(t-\frac{5}{4})}{(t^2-1)^2} = \dfrac{-t^2+\frac{5}{2}t-1}{(t^2-1)^2}$. Le trinome au numérateur a pour discriminant $\Delta = \dfrac{25}{4} - 4 = \dfrac{9}{4}$, et admet donc deux racines $t_1 = \dfrac{-\frac{5}{2}-\frac{3}{2}}{-2} = 2$ et $t_2 = \dfrac{-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}}{-2} = \dfrac{1}{2}$. La dérivée x' sera positive entre ces deux valeurs, on peut déjà calculer les coordonnées des points correspondants : $x\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\frac{1}{2}-\frac{5}{4}}{\frac{1}{4}-1} = \dfrac{-\frac{3}{4}}{-\frac{3}{4}} = 1$; $y\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+2}{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{\frac{11}{4}}{-\frac{1}{2}} = -\dfrac{11}{2}$; $x(2) = \dfrac{2-\frac{5}{4}}{3} = \dfrac{1}{4}$ et $y(2) = 8$. Passons à l'autre fonction coordonnées : $y'(t) = \dfrac{(2t+1)(t-1)-(t^2+t+2)}{(t-1)^2} = \dfrac{t^2-2t-3}{(t-1)^2}$. Le numérateur a pour discriminant $\Delta = 4+12 = 16$, et admet deux racines $t_3 = \dfrac{2-4}{2} = -1$ et $t_4 = \dfrac{2+4}{2} = 3$. Cette fois, la dérivée sera positive à l'extérieur des racines. On calcule comme tout à l'heure $y(-1) = \dfrac{1-1+2}{-2} = -1$ (la fonction x n'est pas définie en -1) ; $x(3) = \dfrac{3-\frac{5}{4}}{8} = \dfrac{7}{32}$ (un peu moins d'un quart) et $y(3) = \dfrac{14}{2} = 7$.

Calcul des limites et branches infinies

En $-\infty$ comme en $+\infty$, les limites se calculent à l'aide du quotient des termes de plus haut degré. On obtient immédiatement $\lim\limits_{t\to\pm\infty} x(t) = 0$; $\lim\limits_{t\to-\infty} y(t) = -\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = +\infty$. L'axe des ordonnées est donc asymptote verticale à la courbe des deux côtés, on part en $-\infty$ « en bas » de l'axe, et on arrive « en haut » en $+\infty$. En -1, on a déjà vu que y valait -1. De plus, $\lim\limits_{t\to-1^-} x(t) = \dfrac{-\frac{9}{4}}{0^+} = -\infty$, et $\lim\limits_{t\to-1^+} x(t) = +\infty$. On a donc en -1 une asymptote horizontale d'équation $y = -1$, qu'on rejoint « à gauche » en -1^-, et dont on part « à droite » en -1^+. Reste le cas le plus pénible, celui de 1 où les deux fonctions ont des limites infinies. Plus précisément, $\lim\limits_{t\to1^-} x(t) = \dfrac{-\frac{1}{4}}{0^-} = +\infty$; $\lim\limits_{t\to1^+} x(t) = -\infty$; $\lim\limits_{t\to1^-} y(t) = \dfrac{4}{0-} = -\infty$ et $\lim\limits_{t\to1^+} y(t) = +\infty$. Il faut calculer la limite du quotient $\dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{(t^2+t+2)(t^2-1)}{(t-1)(t-\frac{5}{4})} = \dfrac{(t^2+t+2)(t+1)}{t-\frac{5}{4}}$, qui vaut $\dfrac{4\times2}{-\frac{1}{4}} = -32$ quand t tend vers 1. On continue donc en calculant $y(t)+32x(t) = \dfrac{t^2+t+2}{t-1} + \dfrac{32t-40}{t^2-1} = \dfrac{(t^2+t+2)(t+1)+32t-40}{(t-1)(t+1)} = \dfrac{t^3+2t^2+35t-38}{(t-1)(t+1)}$. Le numérateur ayant pour racine évidente 1, on peut le factoriser sous la forme $(t-1)(at^2+bt+c) = at^3+(b-a)t^2+(c-b)t-c$, ce qui donne par identification $a = 1$; $b-a = 2$ donc $b = 3$; et $c-b = 35$ donc $c = 38$. Après simplification, on a donc $y(t)+32x(t) = \dfrac{t^2+3t+38}{t+1}$, qui prend pour valeur 21 quand $t = 1$. Il y a donc en 1 une asymptote oblique d'équation $y = -32x+21$, qu'on atteint « par le bas » en 1^-, et « par le haut » en 1^+.

Tableau de variations complet

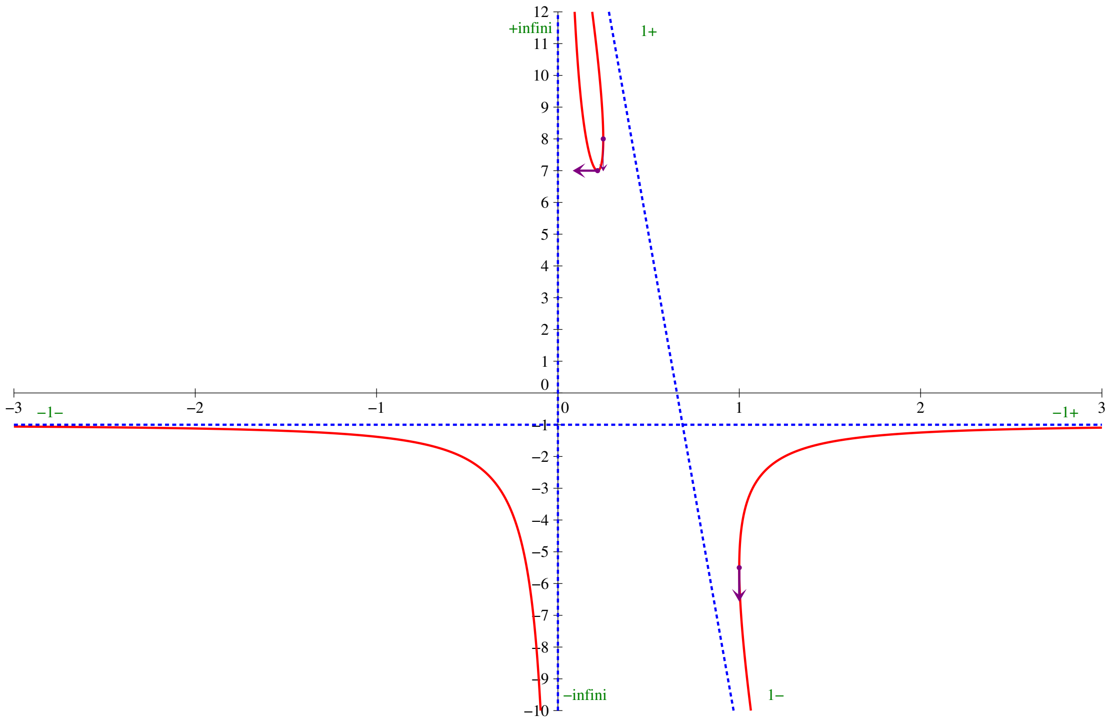
t	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		1		2		3		$+\infty$
$x'(t)$		$-$	$\parallel$	$-$	0	$+$	$\parallel$	$+$	0	$-$		$-$	
x	0	$\searrow$	$-\infty \parallel +\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty \parallel -\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	$\frac{7}{32}$	$\searrow$	0
$y'(t)$		$+$	0	$-$		$-$	$\parallel$	$-$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\frac{11}{2}$	$\searrow$	$-\infty \parallel +\infty$	$\searrow$	8	$\searrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$

Recherche de points doubles

Le calcul est un peu lourd mais faisable avec ce que vous connaissez. On cherche deux valeurs t et u du paramètre pour lesquelles $x(t) = x(u)$ et $y(t) = y(u)$. La première équation peut s'écrire, en faisant le produit en croix $\left(t - \frac{5}{4}\right)(u^2 - 1) = \left(u - \frac{5}{4}\right)(t^2 - 1)$. On développe tout et on passe tout à gauche (en alternant les termes de gauche et ceux de droite) : $tu^2 - ut^2 - t + u - \frac{5}{4}u^2 + \frac{5}{4}t^2$, soit en factorisant tout par $(u - t)$, $(u - t)\left(ut + 1 - \frac{5}{4}(u + t)\right) = 0$. Si on exclut le cas inintéressant où $t = u$, en notant $S = t + u$ et $P = tu$, on obtient la première condition $P + 1 - \frac{5}{4}S = 0$. Passons à la condition sur y, qui donne en faisant le même type de calcul $(t^2+t+2)(u-1) = (u^2+u+2)(t-1)$ puis $t^2u - ut^2 - t^2 + u^2 - t + u + 2u - 2t = 0$, donc en factorisant $(t-u)(P-S-1-2) = 0$. On trouve donc la deuxième condition $P = S + 3$, ce qui en injectant dans la première équation donne $S + 4 - \frac{5}{4}S = 0$, soit $\frac{1}{4}S = 4$, donc $S = 16$, puis $P = 19$. On connait la somme et le produit des réels u et t, ils sont solutions de l'équation du second degré $t^2 - 16t + 19 = 0$. Cette équation a pour discriminant $\Delta = 256 - 76 = 180 = (2\sqrt{45})^2$, et admet deux racines $t_5 = \frac{16 - 2\sqrt{45}}{2} = 8 - \sqrt{45}$, et $t_6 = 8 + \sqrt{45}$. Ces deux valeurs du paramètre correspondent à l'unique point double de la courbe. On peut calculer ses coordonnées, par exemple $x(8 + \sqrt{45}) = \frac{8 + \sqrt{45} - \frac{5}{4}}{64 + 16\sqrt{45} + 45 - 1} = \frac{27 + 4\sqrt{45}}{4(108 + 16\sqrt{45})} = \frac{1}{16}$; et $y(8 + \sqrt{45}) = \frac{64 + 16\sqrt{45} + 45 + 8 + \sqrt{45} + 2}{7 + \sqrt{45}} = \frac{119 + 17\sqrt{45}}{7 + \sqrt{45}} = 17$. Le point double a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{16}, 17\right)$. Oui, je sais, c'est moche.

Courbe détaillée

La courbe est en rouge, les asymptotes en bleu pointillé (y compris l'axe des ordonnées), les points admettant des tangentes horizintales ou verticales en violet, avec la tangente orientée dans le sens de parcours, et j'ai ajouté en vert de quel côté on se trouve de chaque asymptote pour les limites. On ne voit pas le point double sur cette courbe car il se situe au-dessus, mais vu la position des asymptotes (verticale et oblique) et le sens de parcours de la courbe, il est obligatoire que la boucle qu'on voit partiellement en haut de ma courbe se coupe pour former un point double quelque part.



+infini
1+
−1−
−1+
−infini
1−

Interrogation Écrite n°5

PTSI B Lycée Eiffel

16 janvier 2013

Tous les calculs doivent apparaitre sur la feuille.

1. Rappeler tout ce que vous savez sur les suites adjacentes (sans démonstration), ainsi que la définition de $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$, où $l \in \mathbb{R}$.

2. Donner la démonstration de l'unicité de la limite d'une suite.

3. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$. Montrer par récurrence double que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2^n$. En déduire la limite de la suite (u_n).

4. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4}$. On note également $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+4}$.
   - Résoudre l'équation $f(x) = x$. On note a la plus petit solution et b la plus grande.
   - On pose $v_n = \dfrac{u_n - b}{u_n - a}$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
   - En déduire l'expression de (u_n) en fonction de n. La suite (u_n) converge-t-elle ?

Corrigé de l'IE5

1. Je vous renvoie évidemment au cours pour cette première question de cours.
2. Et pour la deuxième également.
3. Allons-y, posons $P_n : u_n > 2^n$. On constate que P_0 est vraie ($2 > 2^0 = 1$), et P_1 également ($3 > 2^1 = 2$). Supposons désormais que P_n et P_{n+1} sont vérifiées, on a donc $2u_n > 2 \times 2^n = 2^{n+1}$, et $u_{n+1} > 2^{n+1}$, d'où $u_{n+2} > 2^{n+1} + 2^{n+1} = 2^{n+2}$. La propriété P_{n+2} est donc vraie et, par principe de récurrence double, P_n est vraie pour tout entier n.

   On peut même calculer u_n puisque la suite est récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique est $x^2 - x - 2 = 0$, qui a pour racines (évidentes non ?) -1 et 2. On peut donc affirmer que $u_n = A(-1)^n + B2^n$, avec $u_0 = A + B = 2$, et $u_1 = -A + 2B = 3$. En additionnant les deux équations, $3B = 5$, donc $B = \frac{5}{3}$. On trouve ensuite $A = \frac{1}{3}$, donc $u_n = \frac{5 \times 2^n + (-1)^n}{3}$.
4.
   - Résolvons donc : $x^2 + 4x = 2x + 3$, soit $x^2 + 2x - 3 = 0$. Cette équation a pour discriminant $\Delta = 4 + 12 = 16$, et pour racines $a = \frac{-2-4}{2} = -3$, et $b = \frac{-2+4}{2} = 1$.
   - Remarquons qu'il faudrait tout de même vérifier que u_n ne peut jamais être égal à a, ce qui peut se prouver par récurrence (le seul antécédent de a par f étant a lui-même). On calcule ensuite $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 3} = \frac{\frac{2u_n+3}{u_n+4} - 1}{\frac{2u_n+3}{u_n+4} + 3} = \frac{2u_n + 3 - u_n - 4}{u_n + 4} \times \frac{u_n + 4}{2u_n + 3 + 3u_n + 12} = \frac{u_n - 1}{5u_n + 15} = \frac{1}{5}v_n$. La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$.
   - Comme $v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 3} = -\frac{1}{3}$, on a donc $v_n = -\frac{1}{3 \times 5^n}$. Reste à en déduire la valeur de u_n. Puisque $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$, $v_n u_n + 3v_n = u_n - 1$, soit $u_n(v_n - 1) = -1 - 3v_n$, ou encore $u_n = \frac{1 + 3v_n}{1 - v_n}$. Il ne reste plus qu'à remplacer : $u_n = \frac{1 - \frac{1}{5^n}}{1 + \frac{1}{3 \times 5^n}} = \frac{3 \times 5^n - 3}{3 \times 5^n + 1}$. Sous la première forme, comme $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{5^n} = 0$ (suite géométrique de raison comprise entre -1 et 1), un calcul élémentaire prouve que $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$.

Interrogation Écrite n°6

PTSI B Lycée Eiffel

27 février 2013

Tous les calculs doivent apparaitre sur la feuille.

1. Rappeler tout ce qu'il y a dans le cours concernant la transposition (définition et propriétés).

2. Écrire la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

3. Calculer les produits BC et CB pour les matrices $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Calculer à l'aide de la formule du binôme de Newton les puissances de la matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Calculer l'inverse de la matrice $E = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Corrigé de l'IE6

1. Comme d'habitude, je vous renvoie au cours.
2. On peut écrire $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -2 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ (les coefficients fiagonaux de A se retrouvent dans la partie symétrique, pour les autres, la matrice symétrique contient la moyenne de chacun des coeffients et de son symétrique par rappor à la diagonale, et la partie antisymétrique l'écart entre cette moyenne et le coefficient).
3. On calcule donc $BC = \begin{pmatrix} 11 & 7 \\ 5 & -11 \end{pmatrix}$ et $CB = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -9 \\ 5 & 12 & 4 \\ -9 & -18 & -9 \end{pmatrix}$.
4. On peut écrire $D = I_3 + N$, avec $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui vérifie $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$. La matrice N est nilpotente, et commute évidemment avec I_3, on peut utiliser la formule du binôme de Newton pour obtenir $D^n = (N+I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k I^{n-k}$. Comme on a $D^k = 0$ pour tous les entiers supérieurs ou égaux à 3, $D^n = I + nN + \dfrac{n(n-1)}{2} N^2 = \begin{pmatrix} 1 & -n & 2n + n(n-1) \\ 0 & 1 & -2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -n & n(n+1) \\ 0 & 1 & -2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
5. Appliquons bêtement l'algorithme du pivot de Gauss :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow 2L_1 + 3L_3 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 + L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 6 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -6 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1/4 \\ L_2 \leftarrow L_2/2 \\ L_3 \leftarrow -L_3/2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La matrice E est donc inversible, d'inverse $E^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Interrogation Écrite n°7

PTSI B Lycée Eiffel

5 avril 2013

Tous les calculs doivent apparaitre sur la feuille.

1. Rappeler ce qu'est une famille génératrice dans un espace vectoriel. Déterminer si, dans $\mathbb{R}^3$, la famille $((1,-3,1);(2,1,-1),(5,-1,-1))$ est libre.

2. Montrer que l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^2 \\ P & \mapsto & (P(1), P'(1)) \end{array} \right.$ est une application linéaire. Déterminer son noyau et son image. Vérifier que $\ker(f) = \text{Vect}((X-1)^2, X(X-1)^2)$, et expliquer ce résultat.

3. On considère l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2y-2z, x+y-2z, x-y) \end{array} \right.$.
   (a) Montrer que f est une application linéaire (en revenant vraiment à la définition).
   (b) Déterminer l'image et le noyau de f. L'application f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?
   (c) Montrer que $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont supplémentaires.
   (d) Soit p la projection sur $\text{Im}(f)$ parallèlement à $\ker(f)$, donner l'expression de $p(x,y,z)$.
   (e) Calculer $f^2(x,y,z)$ et $f^3(x,y,z)$, et vérifier que $f^3 - f^2 - 2f = 0$.
   (f) On pose $r = \dfrac{1}{6}(f^2+f)$ et $s = \dfrac{1}{3}(f^2-2f)$, montrer que r et s sont des projecteurs, et que $f \circ r = 2r$ et $f \circ s = -s$.
   (g) Montrer que, $\forall n \geqslant 1$, $f^n = 2^n r + (-1)^n s$. En déduire l'expression de $f^n(x,y,z)$.

Corrigé de l'IE7

1. La définition de famille génératrice est évidemment dans le cours (mais si, vous savez, le cours qui n'est pas encore en ligne). Pour savoir si la famille donnée est libre, on part de l'égalité $a(1,-3,1)+b(2,1,-1)+c(5,-1,-1)=(0,0,0)$, ce qui nous amène à résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} a & + & 2b & + & 5c & = & 0 \\ -3a & + & b & - & c & = & 0 \\ a & - & b & - & c & = & 0 \end{array}\right.$. La somme des deux dernières équations donne $-2a-2c=0$, soit $c=-a$. En substituant dans la première équation, on trouve alors $2b-4a=0$, et dans la deuxième $-2a+b=0$. Ces deux équations étant équivalentes, le système n'est pas de Cramer et la famille n'est pas libre. Par exemple, $a=1$, $b=2$ et $c=-1$ constitue une solution non triviale du système. Autrement dit, $(1,-3,1)+2(2,1,-1)=(5,-1,-1)$.

2. Vérifions donc que, si $(P,Q)\in\mathbb{R}_3[X]^2$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, $f(\lambda P+\mu Q)=\lambda f(P)+\mu f(Q)$. Celà revient simplement à dire que $(\lambda P+\mu Q)(1)=\lambda P(1)+\mu Q(1)$, ce qui est vrai, et $(\lambda P+\mu Q)'(1)=\lambda P'(1)+\mu Q'(1)$, ce qui découle des propriétés élémentaires de la dérivation.

   Pour déterminer le noyau de f, écrivons $P=aX^3+bX^2+cX+d$. On a alors $P(1)=P'(1)=0$ si et seulement si $a+b+c+d=3a+2b+c=0$. On obtient donc les conditions $c=-3a-2b$, puis $d=-a-b-c=2a+b$. On en déduit que $\ker(f)=\{aX^3+bX^2-(3a+2b)X+2a+b \mid (a,b)\in\mathbb{R}^2\}=\mathrm{Vect}(X^3-3X+2;X^2-2X+1)$. Pour l'image, le plus simple est de calculer les images des polynômes consituant la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. Ainsi, $f(1)=(1,1)$; $f(X)=(1,1)$; $f(X^2)=(1,2)$ et $f(X^3)=(1,3)$. Autrement dit, $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}((1,1);(1,1);(1,2);(1,3))$. Le deuxième vecteur $(1,1)$ est évidemment inutile. de plus, $(1,2)-(1,1)=(0,1)\in\mathrm{Im}(f)$; et $(1,1)-(0,1)=(1,0)\in\mathrm{Im}(f)$, donc $\mathrm{Im}(f)$ contient les deux vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On a donc $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}^2$.

   On constate que $(X-1)^2=X^2-2X+1\in\ker(f)$, c'est un des deux vecteurs qu'on a obtenu pour notre base de $\ker(f)$.De plus, $X(X-1)^2=X^3-2X^2+X=(X^3-3X+2)-2(X^2-2X+1)\in\ker(f)$ puisque c'est une combinaison linéaire de ses deux vecteurs de base. Réciproquement, $X^3-3X+2=2(X-1)^2+2(X-1)^2\in\mathrm{Vect}((X-1)^2,X(X-1)^2)$ donc $\ker(f)=\mathrm{Vect}((X-1)^2,X(X-1)^2)$. Ce qui revient à dire que $\ker(f)=\{(aX+b)(X-1)^2 \mid (a,b)\in\mathbb{R}^2\}$, ce qui correspond aux polynômes de degré 3 admettant 1 comme racine double, donc exactement ceux vérifiant $P(1)=P'(1)=0$.

3. On considère l'application $f:\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2y-2z,x+y-2z,x-y) \end{array}\right.$.

   (a) Calculons $f(\lambda(x,y,z)+\mu(x',y',z'))=f(\lambda x+\mu x',\lambda y+\mu y',\lambda z+\mu z')=(2\lambda y+2\mu y'-2\lambda z-2\mu z',\lambda x+\mu x'+\lambda y+\mu y'-2\lambda z-2\mu z',\lambda x+\mu x'-\lambda y-\lambda y')=\lambda(2y-2z,x+y-2z,x-y)+\mu(2y'-2z',x'+y'-2z',x'-y')=\lambda f(x,y,z)+\mu f(x',y',z')$. L'application f est bien une application linéaire.

   (b) Le noyau est constitué des triplets solutions du système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & 2y & - & 2z & = & 0 \\ x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ x & - & y & & & = & 0 \end{array}\right.$. Les équations extrêmes donnent immédiatement $x=y=z$, en reportant dans la deuxième on trouve alors $0=0$ qui est toujours vérifié donc $\ker(f)=\{(x,x,x)\mid x\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}((1,1,1))$. Pour l'image, on peut calculer les images des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$: $f(1,0,0)=(0,1,1)$; $f(0,1,0)=(2,1,-1)$ et $f(0,0,1)=(-2,-2,0)$. Comme $(2,1,-1)=-(-2,-2,0)-(0,1,1)$, on peut l'oublier et conclure que $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}((0,1,1),(-2,-2,0))=\mathrm{Vect}((0,1,1),(1,1,0))$. L'application n'est donc pas injective (le noyau contient d'autres vecteurs que le vecteur nul) ni surjective (le vecteur $(1,0,0)$ par exemple n'appartient pas à l'image, on ne peut pas l'écrire comme combinaison linéaire de $(1,1,0)$ et $(0,1,1)$). A fortiori, f n'est pas bijective.

   (c) Commençons par prouver que $\ker(f)\cap\mathrm{Im}(f)=\{0\}$. Soit donc un vecteur u appartenant à la fois à $\ker(f)$ et à $\mathrm{Im}(f)$. On peut alors écrire u, d'une part sous la forme (x,x,x) pour un certain réel x, d'autre part comme combinaison linéaire $a(0,1,1)+b(1,1,0)=(b,a+b,a)$. On doit donc avoir à la fois $x=a$, $x=b$ et $x=a+b$, ce qui n'est possible que si $x=a=b=0$, soit $u=0$.

Montrons maintenant que $\ker(f)+\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}^3$. Soit donc $u=(x,y,z)$, on cherche trois réels a, b et c tels que $u=a(1,1,1)+b(1,1,0)+c(0,1,1)$, ce qui se traduit par le système $\left\{\begin{array}{ccccccc} a & + & b & & & = & x \\ a & + & b & + & c & = & y \\ a & & & + & c & = & z \end{array}\right.$. En soustrayant la première et la troisième ligne du système à la deuxième, on obtient immédiatement $c=y-x$ et $b=y-z$. Ensuite, $a=x-b=x-y+z$. On peut donc écrire n'importe quel vecteur de l'espace comme somme d'un vecteur du noyau et d'un vecteur de l'image de f. ces deux sous-espaces sont bien supplémentaires.

(d) La question précédente nous permet d'affirmer que $(x,y,z)=(x-y+z)(1,1,1)+(y-z)(1,1,0)+(y-x)(0,0,1)$, avec le premier terme de la somme de droite appartenant à $\ker(f)$, et les deux suivants à $\mathrm{Im}(f)$. La projection sur $\mathrm{Im}(f)$ parallèlement à $\ker(f)$ donne donc $p(x,y,z)=(y-z)(1,1,0)+(y-x)(0,1,1)=(y-z,2y-x-z,y-x)$. On vérifie facilement si on le souhaite que $p^2=p$.

(e) Calculons donc : $f^2(x,y,z)=f(f(x,y,z))=(2(x+y-2z)-2(x-y),2y-2z+x+y-2z-2(x-y),2y-2z-x-y+2z)=(4y-4z,-x+5y-4z,-x+y)$; puis $f^3(x,y,z)=(2(-x+5y-4z)-2(-x+y),4y-4z-x+5y-4z-2(-x+y),4y-4z+x-5y+4z)=(8y-8z,x+7y-8z,x-y)$. Il ne reste plus qu'à vérifier que $f^3(x,y,z)-f^2(x,y,z)+2f(x,y,z)=(8y-8z,x+7y-8z,x-y)-(4y-4z,-x+5y-4z,-x+y)-(4y-4z,2x+2y-4z,2x-2y)=(0,0,0)$, ce qui est vrai.

(f) Calculons $r\circ r=\dfrac{1}{36}(f^2+f)\circ(f^2+f)=\dfrac{1}{36}(f^4+2f^3+f^2)$, Comme $f^3=f^2+2f$, $f^4=f\circ(f^2+2f)=f^3+2f^2=3f^2+2f$, et $r^2=\dfrac{1}{36}(3f^2+2f+2f^2+4f+f^2)=\dfrac{1}{36}(6f^2+6f)=\dfrac{1}{6}(f^2+f)=r$, donc r est un projecteur. De même, $s^2=\dfrac{1}{9}(f^2-2f)\circ(f^2-2f)=\dfrac{1}{9}(f^4-4f^3+4f^2)=\dfrac{1}{9}(3f^2+2f-4f^2-8f+4f^2)=\dfrac{1}{9}(3f^2-6f)=\dfrac{1}{3}(f^2-2f)=s$, donc s est également un projecteur. De plus, $f\circ r=\dfrac{1}{6}(f^3+f^2)=\dfrac{1}{6}(2f^2+2f)=\dfrac{2}{6}(f^2+f)=2r$, et $f\circ s=\dfrac{1}{3}(f^3-2f^2)=\dfrac{1}{3}(-f^2+2f)=-s$.

(g) Prouvons par récurrence la propriété $P_n : f^n=2^nr+(-1)^ns$. Au rang 1, on a $2r-s=\dfrac{1}{3}(f^2+f)-\dfrac{1}{3}(f^2-2f)=\dfrac{1}{3}(3f)=f$, donc P_1 est vraie. Supposons que P_n est vraie, alors d'après les résultats de la question précédente, $f^{n+1}=f\circ f^n=f\circ(2^nr+(-1)^ns)=2^nf\circ r+(-1)^nf\circ s=2^{n+1}r+(-1)^{n+1}s$. On en déduit que $f^n=\dfrac{2^n}{6}(f^2+f)+\dfrac{(-1)^n}{3}(f^2-2f)=\dfrac{2^{n-1}+(-1)^n}{3}f^2+\dfrac{2^{n-1}-2(-1)^n}{3}f$, soit $f^n(x,y,z)=\dfrac{1}{3}((2^{n-1}+(-1)^n)(4y-4z)+(2^{n-1}-2(-1)^n)(2y-2z),\dots)$, qu'on peut simplifier si on a du temps à perdre.

Interrogation Écrite n°8

PTSI B Lycée Eiffel

21 mai 2013

Tous les calculs doivent apparaitre sur la feuille.

1. Calculer le DL à l'ordre 5 en 0 de $f(x) = e^{x^2}$.

2. Calculer le DL à l'ordre 5 en 0 de $g(x) = \sin(x)\cos(x)$.

3. Calculer le DL à l'ordre 5 en 0 de $h(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$.

4. Calculer le DL à l'ordre 5 en 0 de $i(x) = (1+x)^x$.

5. Calculer le DL à l'ordre 5 en 0 de $j(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$.

Corrigé de l'IE8

1. Il suffit de remplacer x par x^2 dans le DL de e^x, qu'on peut par ailleurs limiter à l'ordre 3 pour obtenir un DL de f à l'ordre 6 : $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$, donc $e^{x^2} = 1 + x^2 + \dfrac{x^4}{2} + o(x^5)$ (le terme suivant est en x^6).
2. Un produit de DL usuels, à mener à l'ordre 5 chacun, puis on ne garde que les termes d'ordre au plus 5 : $g(x) = \left(x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + o(x^5)\right)\left(1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^5)\right) = x - \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{x^5}{24} - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{12} + \dfrac{x^5}{120} + o(x^5) = x - \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + o(x^5)$.
3. En appliquant le DL de $(1+x)^\alpha$ avec $\alpha = \dfrac{1}{2}$, on trouve $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{x^3}{16} - \dfrac{5x^4}{128} + \dfrac{7x^5}{256} + o(x^5)$. On en déduit, en remplaçant x par $-x$, que $\sqrt{1-x} = 1 - \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{x^3}{16} - \dfrac{5x^4}{128} - \dfrac{7x^5}{256} + o(x^5)$, puis en additionnant que $h(x) = 2 - \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{5x^4}{64} + o(x^5)$.
4. Commençons par écrire $i(x) = (1+x)^x = e^{x\ln(1+x)}$. Comme $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + o(x^4)$, $x\ln(1+x) = x^2 - \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{x^4}{3} - \dfrac{x^5}{4} + o(x^5)$. On peut maintenant composer avec le DL de l'exponentielle pour trouver $i(x) = 1 + x^2 - \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{x^4}{3} - \dfrac{x^5}{4} + \dfrac{1}{2}\left(x^2 - \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{x^4}{3} - \dfrac{x^5}{4}\right)^2 + o(x^5)$. Inutile d'aller plus loin, il ne restera aucun terme d'ordre inférieur ou égal à 5. On va d'ailleurs tout développer en ne gardant que les termes utiles : $i(x) = 1 + x^2 - \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{x^4}{3} - \dfrac{x^5}{4} + \dfrac{1}{2}x^4 - \dfrac{1}{2}x^5$ (seul le premier double produit ne dépasse pas le degré 5), soit $i(x) = 1 + x^2 - \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{5x^4}{6} - \dfrac{3x^5}{4} + o(x^5)$.
5. Commençons par calculer $\dfrac{1}{1 + (x + x^2)} = 1 - (x+x^2) + (x+x^2)^2 - (x+x^2)^3 + (x+x^2)^4 - (x+x^2)^5 + o(x^5) = 1 - x - x^2 + x^2 + 2x^3 + x^4 - x^3 - 3x^4 - 3x^5 + x^4 + 4x^5 - x^5 + o(x^5) = 1 - x + x^3 - x^4 + o(x^5)$. Ne reste plus qu'à faire le produit par $1 + x^2$: $j(x) = (1 - x + x^3 - x^4 + o(x^5))(1 + x^2) = 1 - x + x^3 - x^4 + x^2 - x^3 + x^5 + o(x^5) = 1 - x + x^2 - x^4 + x^5 + o(x^5)$.

Quatrième partie

Colles

Vous reprendrez bien un peu de Maple ? Ah ben non en fait, on saute la partie consacrée à l'informatique.

Semaine du 17/09 au 21/09 2012

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera systématiquement noté en-dessous de la moyenne.

Fonctions usuelles

- Manipulations de symboles logiques (quantificateurs, implications).
- Vocabulaire de base sur les foncions (domaine de définition, parité et périodicité, variations, minimum, maximum, majorant et minorant).
- Notion de bijection, théorème de la bijection et formule de dérivation de la bijection réciproque (résultats admis).
- Fonction logarithme népérien (définie comme primitive de la fonction inverse) : **propriétés algébriques, variations et limites**.
- Fonction exponentielle (définie comme réciproque de ln) : **propriétés algébriques, dérivée, variations et limites**.
- Fonctions logarihmes et exponentielles de base quelconque.
- Fonctions puissances : rappels sur les puissances entières et les racines n-èmes, fonctions puissances quelconques (**dérivée, variations limites**).
- Croissances comparées.

Trigonométrie

- Rappels sur le cercle trigonomérique, définition des lignes trigonométriques, valeurs remarquables (**calcul des lignes des angles** $\frac{\pi}{4}$**,** $\frac{\pi}{6}$ **et** $\frac{\pi}{3}$).
- Périodicité et symétries des lignes trigonométriques.
- Formules trigonométriques : $\cos^2 + \sin^2 = 1$, **formules d'addition et de duplication**.

Prévisions pour la semaine suivante : même programme, avec les fonctions trigonométriques et leurs réciproques.

Semaine du 24/09 au 28/09 2012

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera systématiquement noté en-dessous de la moyenne.

Fonctions usuelles

- Manipulations de symboles logiques (quantificateurs, implications).
- Vocabulaire de base sur les foncions (domaine de définition, parité et périodicité, variations, minimum, maximum, majorant et minorant).
- Notion de bijection, théorème de la bijection et formule de dérivation de la bijection réciproque (résultats admis).
- Fonction logarithme népérien (définie comme primitive de la fonction inverse) : **propriétés algébriques, variations et limites**.
- Fonction exponentielle (définie comme réciproque de ln) : **propriétés algébriques, dérivée, variations et limites**.
- Fonctions logarihmes et exponentielles de base quelconque.
- Fonctions puissances : rappels sur les puissances entières et les racines n-èmes, fonctions puissances quelconques (**dérivée, variations limites**).
- Croissances comparées.

Trigonométrie

- Rappels sur le cercle trigonomérique, définition des lignes trigonométriques, valeurs remarquables (**calcul des lignes des angles** $\frac{\pi}{4}$**,** $\frac{\pi}{6}$ **et** $\frac{\pi}{3}$).
- Périodicité et symétries des lignes trigonométriques.
- Formules trigonométriques : $\cos^2 + \sin^2 = 1$, **formules d'addition et de duplication**, transformations de sommes en produits et de produits en sommes.
- Fonctions trigonométriques : fonctions sinus, cosinus et tangente (on doit être capable d'étudier intelligemment tout fonction issue de ces fonctions trigonométriques de base, et notamment choisir un intervalle d'étude le plus petit possible).
- Fonctions trigonométriques réciproques arccos, arcsin et arctan : variations, courbe et **calcul de dérivée**.

Fonctions hyperboliques

- Fonctions hyperboliques cosh, sinh et tanh : **dérivée, variations, limites, courbe**.
- Pas de fonctions hyperboliques réciproques pour cette semaine.

Prévisions pour la semaine suivante : fonctions trigonométriques et hyperboliques ainsi que leurs réciproques, un peu de complexes.

Semaine du 01/10 au 05/10 2012

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera systématiquement noté en-dessous de la moyenne.

Trigonométrie

- Rappels sur le cercle trigonomérique, définition des lignes trigonométriques, valeurs remarquables (**calcul des lignes des angles** $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{6}$ **et** $\frac{\pi}{3}$).
- Périodicité et symétries des lignes trigonométriques.
- Formules trigonométriques : $\cos^2 + \sin^2 = 1$, **formules d'addition et de duplication**, transformations de sommes en produits et de produits en sommes.
- Fonctions trigonométriques : fonctions sinus, cosinus et tangente (on doit être capable d'étudier intelligemment tout fonction issue de ces fonctions trigonométriques de base, et notamment choisir un intervalle d'étude le plus petit possible).
- Fonctions trigonométriques réciproques arccos, arcsin et arctan : variations, courbe et **calcul de dérivée**.

Fonctions hyperboliques

- Fonctions hyperboliques cosh, sinh et tanh : **dérivée, variations, limites, courbe**.
- Fonctions hyperboliques réciproques Argch, Argsh et Argth : **dérivée, variations, limites, courbe**.

Nombres complexes

- Définitions et opérations élémentaires : parties réelle et imaginaire, conjugaison.
- Module d'un nombre complexe, interprétation géométrique, **propriétés**, **inégalité triangulaire** (seule l'inégalité $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$ est à savoir prouver).
- Nombres complexes de module 1, notation exponentielle, argument d'un nombre complexe, interprétation géométrique, propriétés, utilisation en trigonométrie (**formules de Moivre et d'Euler**, exemples de linéarisation ou de calculs de sommes).
- Pas de racines n-èmes cette semaine.

Prévisions pour la semaine suivante : Tout sur les complexes (racines n-èmes, second degré, utilisation en géométrie).

Semaine du 08/10 au 12/10 2012

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera systématiquement noté en-dessous de la moyenne.

Nombres complexes

- Définitions et opérations élémentaires : parties réelle et imaginaire, conjugaison.
- Module d'un nombre complexe, interprétation géométrique, **propriétés**, **inégalité triangulaire** (seule l'inégalité $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$ est à savoir prouver).
- Nombres complexes de module 1, notation exponentielle, argument d'un nombre complexe, interprétation géométrique, propriétés, utilisation en trigonométrie (**formules de Moivre et d'Euler**, exemples de linéarisation ou de calculs de sommes).
- **Racines n-èmes de l'unité**, calcul des racines n-èmes d'un nombre complexe (sous forme exponentielle).
- Résolution des équations du second degré à coefficients complexes (on doit savoir expliquer la **méthode de recherche des racines carrées du discriminant sous forme algébrique**).
- Affixe d'un vecteur, d'un barycentre, calculs d'angles et de distances à l'aide des affixes complexes.
- Calcul de produits scalaires et de déterminants à l'aide des nombres complexes.
- Expression complexe des isométries et similitudes. Reconnaissance d'une similitude directe à partir de son équation.

Prévisions pour la semaine suivante : Encore les complexes, et de la géométrie plane.

Semaine du 15/10 au 19/10 2012

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera systématiquement noté en-dessous de la moyenne.

Nombres complexes

- Affixe d'un vecteur, d'un barycentre, calculs d'angles et de distances à l'aide des affixes complexes.
- Calcul de produits scalaires et de déterminants à l'aide des nombres complexes.
- Expression complexe des isométries et similitudes. Reconnaissance d'une similitude directe à partir de son équation.

Géométrie plane

- Vecteurs du plan : opérations, structure d'espace vectoriel (sans donner de définition générale).
- Bases et repères, coordonnées d'un point et d'un vecteur, changement de repère (pas de formule générale à apprendre par coeur, mais on doit savoir faire les calculs sans hésitation).
- Repérage polaire.
- Produit scalaire : définition géométrique, propriétés, **expression dans un repère orthonormal**.
- Déterminant : définition géométrique et application pour les calculs d'aire, propriétés, expression dans un repère orthonormal direct.
- Équations de droites : équation cartésienne, **équation normale** $x\cos(\theta) + y\sin(\theta) = p$ (avec interprétation géométrique des paramètres p et θ), équation paramétrique, **équation polaire**.
- Vecteur directeur d'une droite, vecteur normal à une droite.
- **Distance d'un point à une droite** (quatre expressions).

Prévisions pour la semaine suivante : géométrie plane, équations différentielles (début).

Semaine du 22/10 au 26/10 2012

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera systématiquement noté en-dessous de la moyenne.

Géométrie plane

- Vecteurs du plan : opérations, structure d'espace vectoriel (sans donner de définition générale).
- Bases et repères, coordonnées d'un point et d'un vecteur, changement de repère (pas de formule générale à apprendre par coeur, mais on doit savoir faire les calculs sans hésitation).
- Repérage polaire.
- Produit scalaire : définition géométrique, propriétés, **expression dans un repère orthonormal**.
- Déterminant : définition géométrique et application pour les calculs d'aire, propriétés, expression dans un repère orthonormal direct.
- Équations de droites : équation cartésienne, **équation normale** $x\cos(\theta) + y\sin(\theta) = p$ (avec interprétation géométrique des paramètres p et θ), équation paramétrique, **équation polaire**.
- Vecteur directeur d'une droite, vecteur normal à une droite.
- **Distance d'un point à une droite** (quatre expressions).

Équations différentielles

- Vocabulaire : équations linéaires, ordre d'une équation, équation homogène, équation normalisée, courbes intégrales d'une équation.
- Équations linéaires du premier ordre : problème de Cauchy, **solutions de l'équation homogène associé**, expression de la solution générale, méthode de variation de la constante, principe de superposition, solutions particulières pour une équation à coefficients constants quand le second membre est un polynôme, produit d'un polynôme par une exponentielle, ou une fonction trigonométrique, exemple d'étude de raccordement de solutions pour une équation non normalisée.

Prévisions pour la rentrée : équations différentielles.

Semaine du 12/11 au 16/11 2012

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera systématiquement noté en-dessous de la moyenne.

Équations différentielles

- Vocabulaire : équations linéaires, ordre d'une équation, équation homogène, équation normalisée, courbes intégrales d'une équation.
- Équations linéaires du premier ordre : problème de Cauchy, **solutions de l'équation homogène associée**, expression de la solution générale, méthode de variation de la constante, principe de superposition, solutions particulières pour une équation à coefficients constants quand le second membre est un polynôme, produit d'un polynôme par une exponentielle, ou une fonction trigonométrique, exemple d'étude de raccordement de solutions pour une équation non normalisée.
- Description de la méthode d'Euler de résolution approchée d'une équation différentielle.
- Équations du second ordre à coefficients constants : équation caractéristique, expression des solutions de l'équation homogène (**cas complexe** et cas réel), solutions particulières dans le cas où le second membre est produit d'un polynôme par une exponentielle.

Prévisions pour la semaine suivante : équations différentielles (encore), géométrie dans l'espace.

Semaine du 19/11 au 23/11 2012

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera systématiquement noté en-dessous de la moyenne.

Équations différentielles

- Équations du second ordre à coefficients constants : équation caractéristique, expression des solutions de l'équation homogène (**cas complexe** et cas réel), solutions particulières dans le cas où le second membre est produit d'un polynôme par une exponentielle.

Géométrie dans l'espace

- Répérage cartésien, cylindrique et sphérique.
- Produit scalaire, produit vectoriel, produit mixte : définitions, propriétés, expression dans une base orthonormale directe (à savoir démontrer : **expression du produit vectoriel** (en admettant la bilinéarité), **antisymétrie du produit mixte** (en admettant l'alternance)), calculs d'aire et de volumes (**interprétation du produit mixte comme volume d'un parallélépipède**).
- Plans de l'espace : équation cartésienne, base d'un plan, vecteur normal à un plan, équation normale, parallélisme et perpendicularité, représentation paramétrique, distance d'un point à un plan.
- Droites de l'espace : équation cartésienne et paramétrage, distance d'un point à une droite, **perpendiculaire commune à deux droites** et distance entre deux droites.
- Sphères de l'espace : équation cartésienne, intersection d'une sphère et d'un plan, d'une sphère et d'une droite, de deux sphères.

Prévisions pour la semaine suivante : géométrie dans l'espace, courbes paramétrées.

Semaine du 26/11 au 30/11 2012

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera systématiquement noté en-dessous de la moyenne.

Géométrie dans l'espace

- Repérage cartésien, cylindrique et sphérique.
- Produit scalaire, produit vectoriel, produit mixte : définitions, propriétés, expression dans une base orthonormale directe (à savoir démontrer : **expression du produit vectoriel** (en admettant la bilinéarité), **antisymétrie du produit mixte** (en admettant l'alternance)), calculs d'aires et de volumes (**interprétation du produit mixte comme volume d'un parallélépipède**).
- Plans de l'espace : équation cartésienne, base d'un plan, vecteur normal à un plan, équation normale, parallélisme et perpendicularité, représentation paramétrique, distance d'un point à un plan.
- Droites de l'espace : équation cartésienne et paramétrage, distance d'un point à une droite, **perpendiculaire commune à deux droites** et distance entre deux droites.
- Sphères de l'espace : équation cartésienne, intersection d'une sphère et d'un plan, d'une sphère et d'une droite, de deux sphères.

Courbes planes

- Compléments sur les fonctions réelles : convexité, points d'inflexion ; étude des branches infinies.

Prévisions pour la semaine suivante : courbes paramétrées, courbes polaires.

Semaine du 03/12 au 07/12 2012

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera systématiquement noté en-dessous de la moyenne.

Courbes planes

- Compléments sur les fonctions réelles : convexité, points d'inflexion ; étude des branches infinies.
- Limites et dérivation de fonctions à deux variables, tangente en un point d'un arc paramétré, points stationnaires (les élèves connaissent les critères sur la parité des premières dérivées non colinéaires pour reconnaitre les différents types de points stationnaires, mais rien n'a évidemment été démontré en l'absence de développements limités).
- Asymptotes, branches infinies d'un arc paramétré (comme dans le cas des fonctions réelles, les élèves doivent parfaitement connaitre le plan d'étude d'une branche infinie).
- La notion de point double a été abordée mais très peu pratiquée par les élèves.
- Pas encore de courbes polaires cette semaine, on a passé du temps sur quelques exemples d'études complètes.

Prévisions pour la semaine suivante : courbes paramétrées, courbes polaires.

Semaine du 10/12 au 14/12 2012

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera systématiquement noté en-dessous de la moyenne.

Courbes planes

- Compléments sur les fonctions réelles : convexité, points d'inflexion ; étude des branches infinies.
- Limites et dérivation de fonctions à deux variables, tangente en un point d'un arc paramétré, points stationnaires (les élèves connaissent les critères sur la parité des premières dérivées non colinéaires pour reconnaitre les différents types de points stationnaires, mais rien n'a évidemment été démontré en l'absence de développements limités).
- Asymptotes, branches infinies d'un arc paramétré (comme dans le cas des fonctions réelles, les élèves doivent parfaitement connaitre le plan d'étude d'une branche infinie).
- La notion de point double a été abordée mais très peu pratiquée par les élèves.
- Courbes définies par une équation polaire : étude des symétries, variations (**formules donnant les deux premières dérivées d'une fonction polaire**), tangentes radiales et orthoradiales. Ont été vus sur des exemples mais ne sont pas exigibles sans aide : tracé de tangentes autres que les cas particuliers précédentes, branches infinies (notamment asymptotes quand $\lim_{\theta \to \theta_0} \rho(\theta) = \pm\infty$).

Prévisions pour la semaine suivante : courbes polaires, coniques.

Semaine du 17/12 au 21/12 2012

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera systématiquement noté en-dessous de la moyenne.

Courbes planes

- Courbes définies par une équation polaire : étude des symétries, variations (**formules donnant les deux premières dérivées d'une fonction polaire**), tangentes radiales et orthoradiales. Ont été vus sur des exemples mais ne sont pas exigibles sans aide : tracé de tangentes autres que les cas particuliers précédentes, branches infinies (notamment asymptotes quand $\lim\limits_{\theta \to \theta_0} \rho(\theta) = \pm\infty$).

Coniques

- Définitions monofocale, paramètre, excentricité d'une conique, équation cartésienne générale ($x^2 + y^2 = e^2(x + d)^2$), équation polaire dans un repère centré sur le foyer.
- Étude détaillée de la parabole : **équation réduite**, paramétrage, **équation des tangentes**.
- Étude détaillée de l'ellipse : définition du centre, du demi-grand axe et du demi-petit axe, lien entre les différentes caractéristiques géométriques (on doit pouvoir calculer rapidement les six nombres a, b, c, d, e et p à partir de deux d'entre eux), équation réduite, paramétrage, équation des tangentes. Lien entre cercles et ellipses : image d'un cercle par une affinité, image d'un cercle par une projection dans l'espace (résultats admis).
- Étude détaillée de l'hyperbole (les calculs n'ont pas été détaillés comme dans le cas de l'ellipse) : équation réduite, paramétrage, tangentes, équation des asymptotes, distance des foyers aux asymptotes.
- Définition bifocale de l'ellipse et de l'hyperbole.
- Courbes algébriques du second degré : discriminant, technique de réduction de l'équation dans le cas où l'équation contient un terme en xy, on doit savoir qu'une rotation de $\dfrac{\pi}{4}$ permet de s'en sortir quand les coefficients devant x^2 et y^2 sont les mêmes ; le cas général n'a été traité que sur un exemple).

Prévisions pour début 2013 : coniques, ensembles (récurrences, dénombrement).

Semaine du 07/01 au 11/01 2013

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera systématiquement noté en-dessous de la moyenne.

Coniques

- Définitions monofocale, paramètre, excentricité d'une conique, équation cartésienne générale ($x^2 + y^2 = e^2(x + d)^2$), équation polaire dans un repère centré sur le foyer.
- Étude détaillée de la parabole : **équation réduite**, paramétrage, **équation des tangentes**.
- Étude détaillée de l'ellipse : définition du centre, du demi-grand axe et du demi-petit axe, lien entre les différentes caractéristiques géométriques (on doit pouvoir calculer rapidement les six nombres a, b, c, d, e et p à partir de deux d'entre eux), équation réduite, paramétrage, équation des tangentes. Lien entre cercles et ellipses : image d'un cercle par une affinité, image d'un cercle par une projection dans l'espace (résultats admis).
- Étude détaillée de l'hyperbole (les calculs n'ont pas été détaillés comme dans le cas de l'ellipse) : équation réduite, paramétrage, tangentes, équation des asymptotes, distance des foyers aux asymptotes.
- Définition bifocale de l'ellipse et de l'hyperbole.
- Courbes algébriques du second degré : discriminant, technique de réduction de l'équation dans le cas où l'équation contient un terme en xy, on doit savoir qu'une rotation de $\frac{\pi}{4}$ permet de s'en sortir quand les coefficients devant x^2 et y^2 sont les mêmes ; le cas général n'a été traité que sur un exemple).

Ensembles

- Généralités sur les ensembles : lois de Morgan, complémentaire, produit cartésien de deux ensembles.
- Applications : injectivité, surjectivité, bijectivité, **stabilité de ces trois propriétés par composition**, réciproque d'une application, image et image réciproque d'un sous-ensemble par une application.
- Récurrence, sommes (**calcul des sommes classiques** $\sum_{i=0}^{n} i$, $\sum_{i=0}^{n} i^2$, $\sum_{i=0}^{n} i^3$, $\sum_{i=0}^{n} q^i$ et produits. Exemples de sommes télescopiques et de sommes doubles.

Prévisions pour la semaine suivante : ensembles (récurrences, dénombrement).

Semaine du 14/01 au 18/01 2013

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera systématiquement noté en-dessous de la moyenne.

Ensembles

- Généralités sur les ensembles : lois de Morgan, complémentaire, produit cartésien de deux ensembles.
- Applications : injectivité, surjectivité, bijectivité, **stabilité de ces trois propriétés par composition**, réciproque d'une application, image et image réciproque d'un sous-ensemble par une application.
- Récurrence, sommes (**calcul des sommes classiques** $\sum_{i=0}^{n} i$**,** $\sum_{i=0}^{n} i^2$**,** $\sum_{i=0}^{n} i^3$**,** $\sum_{i=0}^{n} q^i$) et produits. Exemples de sommes télescopiques et de sommes doubles.
- Dénombrement : cardinal d'un ensemble fini, **cardinal d'une union de deux ensembles** (dans la preuve on n'a pas détaillé le fait que l'application construite était bijective), formule de Poincaré, cardinal d'un produit cartésien. Listes, arrangements et combinaisons.
- Propriétés des coefficients binomiaux : **symétrie**, **formule** $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$, **formule de Pascal**. Triangle de Pascal, formule du binôme de Newton, cardinal de $\mathcal{P}(E)$.

Propriétés de $\mathbb{R}$

- Relations d'ordre. Borne supérieure d'une partie de $\mathbb{R}$. Partie entière d'un nombre réel.
- On évitera les exercices théoriques sur ce début de chapitre, qui ne devra pas constituer le coeur de l'interrogation cette semaine.

Prévisions pour la semaine suivante : suites (début).

Semaine du 21/01 au 25/01 2013

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera systématiquement noté en-dessous de la moyenne.

Propriétés de $\mathbb{R}$; suites réelles

- Relations d'ordre. Borne supérieure d'une partie de $\mathbb{R}$. Partie entière d'un nombre réel.
- On évitera les exercices théoriques sur ce début de chapitre, qui ne devra pas constituer le coeur de l'interrogation cette semaine.
- Suites réelles : définitions (monotonie, majorant/minorant, suite bornée, sous-suite).
- Suites classiques : suites arithmétiques et géométriques. On a également étudié en cours les suites arithmético-géométriques et récurrentes linéaires d'ordre 2 (les résultats les concernant ne sont pas à connaitre pas coeur, mais on doit savoir qu'une suite arithmético-géométrique se ramène à une suite géométrique par ajout d'une constante, et que les récurrentes linéaires se traitent de façon similaire aux équations différentielles d'ordre 2).
- Convergence de suites : définitions, **unicité de la limite**, **théorème de la limite monotone**, caractère borné d'une suite convergente. Limite d'une somme, d'un produit, d'un inverse, d'un quotient. Conservation des inégalités larges par passage à la limite, **théorème des gendarmes**. Limites de suites usuelles (arithmétiques et géométriques).
- Comparaison de suites : négligeabilité, O, équivalence, définitions et règles de calcul. Croissances comparées. Équivalents classiques (liste courte : équivalents quand u_n tend vers 0 de $\ln(1+u_n)$, $e^{u_n}-1$, $\sin(u_n)$, $\tan(u_n)$, $1-\cos(u_n)$). Équivalent d'un polynôme.
- Exemple d'étude de suite implicite (aucun résultat n'est à connaitre absolument, mais les élèves doivent savoir comment étudier la monotonie d'une suite implicite, ou la borner par exemple).

Prévisions pour la semaine suivante : suites (on ajoutera les suites récurrentes).

Semaine du 28/01 au 01/02 2013

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera systématiquement noté en-dessous de la moyenne.

Suites réelles

- Suites réelles : définitions (monotonie, majorant/minorant, suite bornée, sous-suite).
- Suites classiques : suites arithmétiques et géométriques. On a également étudié en cours les suites arithmético-géométriques et récurrentes linéaires d'ordre 2 (les résultats les concernant ne sont pas à connaitre pas coeur, mais on doit savoir qu'une suite arithmético-géométrique se ramène à une suite géométrique par ajout d'une constante, et que les récurrentes linéaires se traitent de façon similaire aux équations différentielles d'ordre 2).
- Convergence de suites : définitions, **unicité de la limite**, **théorème de la limite monotone**, caractère borné d'une suite convergente. Limite d'une somme, d'un produit, d'un inverse, d'un quotient. Conservation des inégalités larges par passage à la limite, **théorème des gendarmes**. Limites de suites usuelles (arithmétiques et géométriques).
- Comparaison de suites : négligeabilité, O, équivalence, définitions et règles de calcul. Croissances comparées. Équivalents classiques (liste courte : équivalents quand u_n tend vers 0 de $\ln(1+u_n)$, $e^{u_n}-1$, $\sin(u_n)$, $\tan(u_n)$, $1-\cos(u_n)$). Équivalent d'un polynôme.
- Exemple d'étude de suite implicite (aucun résultat n'est à connaitre absolument, mais les élèves doivent savoir comment étudier la monotonie d'une suite implicite, ou la borner par exemple).
- Exemple d'étude de suite récurrente : intervalles stables, points fixes, utilisation du signe de $f(x)-x$ pour déterminer la monotonie de la suite. L'utilisation d'inégalités des accroissements finis est exclue pour l'instant.

Prévisions pour la semaine suivante : groupes.

Semaine du 04/02 au 08/02 2013

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera systématiquement noté en-dessous de la moyenne.

Suites réelles

- Exemple d'étude de suite récurrente : intervalles stables, points fixes, utilisation du signe de $f(x)-x$ pour déterminer la monotonie de la suite. L'utilisation d'inégalités des accroissements finis est exclue pour l'instant.

Structures algébriques

- Vocabulaire : loi de composition interne, associativité, commutativité, élément neutre, symétrisabilité d'un élément, et propriétés élémentaires associées (**unicité de l'élément neutre et du symétrique si la loi est associative**).
- Structure de groupe, sous-groupes (on a démontré en cours le théorème sur les sous-groupes de $\mathbb{Z}$, mais cette démonstration ne doit pas faire l'objet d'une question de cours), morphismes de groupes, noyau et image d'un moprhisme, **caractérisation de l'injectivité par le noyau**.
- Structure d'anneau, anneaux intègres, sous-anneaux, morphismes d'anneau, corps. Manipulation de sommes et produits dans les anneaux, formule du binôme de Newton et factorisation de $a^n - b^n$.
- Arithmétique dans $\mathbb{Z}$: diviseurs, division euclidienne, ppcm et pgcd, nombres premiers et premiers entre eux, théorème de Bezout, décomposition en facteurs premiers.

Prévisions pour la semaine suivante : groupes, polynômes.

Semaine du 11/02 au 15/02 2013

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera systématiquement noté en-dessous de la moyenne.

Structures algébriques

- Vocabulaire : loi de composition interne, associativité, commutativité, élément neutre, symétrisabilité d'un élément, et propriétés élémentaires associées (**unicité de l'élément neutre et du symétrique si la loi est associative**).
- Structure de groupe, sous-groupes (on a démontré en cours le théorème sur les sous-groupes de $\mathbb{Z}$, mais cette démonstration ne doit pas faire l'objet d'une question de cours), morphismes de groupes, noyau et image d'un moprhisme, **caractérisation de l'injectivité par le noyau**.
- Structure d'anneau, anneaux intègres, sous-anneaux, morphismes d'anneau, corps. Manipulation de sommes et produits dans les anneaux, formule du binôme de Newton et factorisation de $a^n - b^n$.
- Arithmétique dans $\mathbb{Z}$: diviseurs, division euclidienne, ppcm et pgcd, nombres premiers et premiers entre eux, théorème de Bezout, décomposition en facteurs premiers.
- Polynômes : anneau $\mathbb{K}[X]$ (pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), degré coefficient dominant, polynôme unitaire. Divisibilité, division euclidienne, racines, **factorisation par $X - \alpha$ quand α est une racine**, multiplicité et caractérisation par les polynômes dérivés, polynômes scindés, polynômes irréductibles, décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$. Relations entre coefficients et racines d'un polynôme (on n'a pas vraiment insisté là-dessus).

Prévisions pour la semaine suivante : groupes, polynômes.

Semaine du 18/02 au 22/02 2013

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera systématiquement noté en-dessous de la moyenne.

Structures algébriques

- Polynômes : anneau $\mathbb{K}[X]$ (pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), degré coefficient dominant, polynôme unitaire. Divisibilité, division euclidienne, racines, **factorisation par $X - \alpha$ quand α est une racine**, multiplicité et caractérisation par les polynômes dérivés, polynômes scindés, polynômes irréductibles, décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$. Relations entre coefficients et racines d'un polynôme (on n'a pas vraiment insisté là-dessus).

Continuité

- Limites de fonctions : définitions, propriétés usuelles (rien n'a été démontré, on a repris les résultats vus sur les suites), composition de limites, caractérisation séquentielle de la limite, limites à gauche et à droite, **existence de limites pour les fonctions monotones**.
- Continuité : définition, continuité à gauche et à droite, prolongement par continuité, fonctions Lipschitziennes, **stabilité par somme et composition** des fonctions Lipschitziennes, continuité des fonctions Lipschitziennes.
- Relations de comparaison sur les fonctions : o, O et équivalence, voir les suites (j'ai uniquement ajouté l'équivalent $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$).
- Propriétés globales : théorème des valeurs intermédiaires, image d'un intervalle par une fonction continue, théorème du maximum, image d'une segment par une fonction continue, théorème de la bijection.

Prévisions pour la semaine suivante : continuité, un peu de matrices.

Semaine du 25/02 au 01/03 2013

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera systématiquement noté en-dessous de la moyenne.

Continuité

- Limites de fonctions : définitions, propriétés usuelles (rien n'a été démontré, on a repris les résultats vus sur les suites), composition de limites, caractérisation séquentielle de la limite, limites à gauche et à droite, **existence de limites pour les fonctions monotones**.
- Continuité : définition, continuité à gauche et à droite, prolongement par continuité, fonctions Lipschitziennes, **stabilité par somme et composition** des fonctions Lipschitziennes, continuité des fonctions Lipschitziennes.
- Relations de comparaison sur les fonctions : o, O et équivalence, voir les suites (j'ai uniquement ajouté l'équivalent $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$).
- Propriétés globales : théorème des valeurs intermédiaires, image d'un intervalle par une fonction continue, théorème du maximum, image d'une segment par une fonction continue, théorème de la bijection.

Calcul matriciel

- Vocabulaire : matrices carrées, diagonales, triangulaires, nilpotentes, matrice nulle, matrice identité, matrices symétriques et antisymétriques.
- Opérations : somme, produit par un scalaire, produit matriciel, transposition, trace (à savoir démontrer : **associativité du produit**, **I_n est un élément neutre pour le produit matriciel**, **transposée d'un produit**, **le produit de deux matrices triangulaires supérieures est triangulaire supérieur**.
- Exemple de calcul de puissances, notamment en utilisant la formule du binôme de Newton.

Prévisions pour la rentrée : matrices et systèmes (avec inversion et pivot de Gauss).

Semaine du 18/03 au 22/03 2013

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera systématiquement noté en-dessous de la moyenne.

Calcul matriciel

- Vocabulaire : matrices carrées, diagonales, triangulaires, nilpotentes, matrice nulle, matrice identité, matrices symétriques et antisymétriques.
- Opérations : somme, produit par un scalaire, produit matriciel, transposition, trace (à savoir démontrer : **associativité du produit**, I_n **est un élément neutre pour le produit matriciel**, **transposée d'un produit**, **le produit de deux matrices triangulaires supérieures est triangulaire supérieur**.
- Exemple de calcul de puissances, notamment en utilisant la formule du binôme de Newton, ou des polynômes annulateurs et des divisions euclidiennes.
- Trace d'une matrice carrée, linéarité de la trace, **formule** $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.
- Inversion de matrices : définition et propriétés élémentaires, opérations sur les lignes et les colonnes, algorithme du pivot de Gauss.
- Systèmes linéaires : vocabulaire (système incompatible, système de Cramer, système homogène), écriture matricielle, lien avec l'inversibilité de la matrice du système, algorithme du pivot de Gauss pour la résolution des systèmes.
- Déterminants de matrices carrées d'ordre 2 ou 3 : définition (uniquement par la règle de Sarrus), propriétés (déterminant d'un inverse, d'un produit), régles de calcul (effet d'une opération élémentaire sur une ligne ou une colonne, développements suivant une ligne ou une colonne), définition des cofacteurs et formule $A^t(\mathrm{com}(A))) = \det(A)I_n$; résolution des systèmes linéaires par la méthode de Cramer.

Prévisions pour la semaine suivante : même chose, avec un peu de dérivation.

Semaine du 25/09 au 29/03 2013

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera systématiquement noté en-dessous de la moyenne.

Calcul matriciel

- Inversion de matrices : définition et propriétés élémentaires, opérations sur les lignes et les colonnes, algorithme du pivot de Gauss.
- Systèmes linéaires : vocabulaire (système incompatible, système de Cramer, système homogène), écriture matricielle, lien avec l'inversibilité de la matrice du système, algorithme du pivot de Gauss pour la résolution des systèmes.
- Déterminants de matrices carrées d'ordre 2 ou 3 : définition (uniquement par la règle de Sarrus), propriétés (déterminant d'un inverse, d'un produit), régles de calcul (effet d'une opération élémentaire sur une ligne ou une colonne, développements suivant une ligne ou une colonne), définition des cofacteurs et formule $A^t(\mathrm{com}(A))) = \det(A)I_n$; résolution des systèmes linéaires par la méthode de Cramer.

Dérivation

- Vocabulaire : taux d'accroissement, nombre dérivé, dérivée à gauche et à droite, fonction dérivée.
- Formulaire : **dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une composée, d'une réciproque**.
- Dérivées successives et convexité : le cours ayant été fait il y a quelques mois, pas de question de cours sur ces sujets, mais les notions peuvent intervenir dans les exercices.
- **Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis**, applications : variations d'une fonction dérivable, théorème du prolongement $\mathcal{C}^1$, IAF et application aux suites récurrentes.

Prévisions pour la semaine suivante : dérivation, espaces vectoriels (début).

Semaine du 02/04 au 05/04 2013

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera systématiquement noté en-dessous de la moyenne.

Dérivation

- Vocabulaire : taux d'accroissement, nombre dérivé, dérivée à gauche et à droite, fonction dérivée.
- Formulaire : **dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une composée, d'une réciproque**.
- Dérivées successives et convexité : le cours ayant été fait il y a quelques mois, pas de question de cours sur ces sujets, mais les notions peuvent intervenir dans les exercices.
- **Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis**, applications : variations d'une fonction dérivable, théorème du prolongement $\mathcal{C}^1$, IAF et application aux suites récurrentes.

Espaces vectoriels

- Définition d'un espace vectoriel, exemples.
- Familles libres, génératrices, bases (pas de dimension pour l'instant), coordonnées et composantes dans une base.
- Sous-espaces vectoriels, espace vectoriel engendré par une famille (**preuve du fait qu'il s'agit du plus petit sous-ev contenant la famille**), intersection de sous-ev, somme de deux sous-ev, supplémentaire d'un sous-ev.
- Bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ (et $\mathbb{C}^n$), de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, de $\mathbb{K}_n[X]$.
- PAS d'applications linéaires cette semaine.

Prévisions pour la semaine suivante : espaces vectoriels (avec applications linéaires).

Semaine du 08/04 au 12/04 2013

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera systématiquement noté en-dessous de la moyenne.

Espaces vectoriels

- Définition d'un espace vectoriel, exemples.
- Familles libres, génératrices, bases (pas de dimension pour l'instant), coordonnées et composantes dans une base.
- Sous-espaces vectoriels, espace vectoriel engendré par une famille (**preuve du fait qu'il s'agit du plus petit sous-ev contenant la famille**), intersection de sous-ev, somme de deux sous-ev, supplémentaire d'un sous-ev.
- Bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ (et $\mathbb{C}^n$), de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, de $\mathbb{K}_n[X]$.
- Application linéaires : définition, noyau, image (déterminée en général en calculant les images des vecteurs d'une base).
- Homothéties, projecteurs et symétries (**caractérisation des projecteurs par** $p \circ p = p$).
- Aspect matriciel : matrice d'une famille de vecteurs dans une base, matrice d'une application linéaire, matrice d'une somme, d'une composée, d'une réciproque d'applications linéaires. Matrice de passage, **formule de changement de base** $M' = P^{-1}MP$ **pour un endororphisme**.
- PAS de dimension pour l'instant (ni de rang, bien évidemment).

Prévisions pour la semaine suivante : espaces vectoriels (avec applications linéaires), un peu d'intégration.

Semaine du 15/04 au 19/04 2013

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera systématiquement noté en-dessous de la moyenne.

Espaces vectoriels

- Définition d'un espace vectoriel, exemples.
- Familles libres, génératrices, bases (pas de dimension pour l'instant), coordonnées et composantes dans une base.
- Sous-espaces vectoriels, espace vectoriel engendré par une famille (**preuve du fait qu'il s'agit du plus petit sous-ev contenant la famille**), intersection de sous-ev, somme de deux sous-ev, supplémentaire d'un sous-ev.
- Bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ (et $\mathbb{C}^n$), de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, de $\mathbb{K}_n[X]$.
- Application linéaires : définition, noyau, image (déterminée en général en calculant les images des vecteurs d'une base).
- Homothéties, projecteurs et symétries (**caractérisation des projecteurs par** $p \circ p = p$).
- Aspect matriciel : matrice d'une famille de vecteurs dans une base, matrice d'une application linéaire, matrice d'une somme, d'une composée, d'une réciproque d'applications linéaires. Matrice de passage, **formule de changement de base** $M' = P^{-1}MP$ **pour un endororphisme**.
- PAS de dimension pour l'instant (ni de rang, bien évidemment).

Intégration

- Fonctions en escalier sur un segment, intégrale d'une fonction en escalier, linéarité, positivité, relation de Chasles.
- Approximation d'une fonction continue par des fonctions en escalier, intégrale d'une fonction continue, linéarité, positivité, relation de Chasles.
- Valeur moyenne d'une fonction, inégalité de la moyenne, **inégalité de Cauchy-Schwarz**.
- PAS de primitives pour l'instant, mais on pourra tout de même poser des exercices faisant intervenir les calculs de primitives vus en Terminale.

Prévisions pour la semaine suivante : intégration (avec l'aspect calculatoire).

Semaine du 22/04 au 26/04 2013

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera systématiquement noté en-dessous de la moyenne.

Intégration

- Fonctions en escalier sur un segment, intégrale d'une fonction en escalier, linéarité, positivité, relation de Chasles.
- Approximation d'une fonction continue par des fonctions en escalier, intégrale d'une fonction continue, linéarité, positivité, relation de Chasles.
- Valeur moyenne d'une fonction, inégalité de la moyenne, **inégalité de Cauchy-Schwarz**.
- Primitives, exemples d'études de suites d'intégrales et de fonctions définies par une intégrale.
- **Intégration par parties**, changement de variable.
- Intégration de fractions rationnelles (les principes de bases de la décomposition en éléments simples ont été vus sur des exemples, pas de théorie à connaître), exemple d'intégrations de fonctions trigonométriques ou de fonctions faisant intervenir des racines carrées.

Prévisions pour la rentrée : intégration (avec l'aspect calculatoire), dimension si on a le temps.

Semaine du 13/05 au 17/05 2013

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera systématiquement noté en-dessous de la moyenne.

Intégration

- Primitives, exemples d'études de suites d'intégrales et de fonctions définies par une intégrale.
- **Intégration par parties**, changement de variable.
- Intégration de fractions rationnelles (les principes de bases de la décomposition en éléments simples ont été vus sur des exemples, pas de théorie à connaître), exemple d'intégrations de fonctions trigonométriques ou de fonctions faisant intervenir des racines carrées.

Dimension des espaces vectoriels

- Espaces vectoriels de dimension finie : théorème de la base incomplète, toutes les bases ont même cardinal, une famille libre ou génératrice de n vecteurs est automatiquement une base. Formule de Grassmann, hyperplans (aucun détail n'a été vu sur cette notion).
- Rang d'une famille de vecteurs, d'une application linéaire, d'une matrice. **Théorème du rang**, équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité des endomorphismes, équivalence entre rang maximal et inversibilité d'une matrice carrée. Une matrice A est de rang r si $A = QJ_rP$, calcul du rang d'une matrice à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes.
- On profitera bien sûr de ce complément sur les espaces vectoriels pour réviser toutes les notions vues dans le précédent chapître.

Prévisions pour la semaine suivante : dimension, développements limités.

Semaine du 21/05 au 24/05 2013

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera systématiquement noté en-dessous de la moyenne.

Dimension des espaces vectoriels

- Espaces vectoriels de dimension finie : théorème de la base incomplète, toutes les bases ont même cardinal, une famille libre ou génératrice de n vecteurs est automatiquement une base. Formule de Grassmann, hyperplans (aucun détail n'a été vu sur cette notion).
- Rang d'une famille de vecteurs, d'une application linéaire, d'une matrice. **Théorème du rang**, équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité des endomorphismes, équivalence entre rang maximal et inversibilité d'une matrice carrée. Une matrice A est de rang r si $A = QJ_rP$, calcul du rang d'une matrice à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes.
- On profitera bien sûr de ce complément sur les espaces vectoriels pour réviser toutes les notions vues dans le précédent chapître.

Développements limités

- Formules de Taylor : pour les polynômes, **avec reste intégral**, **inégalité de Taylor-Lagrange**, formule de Taylor-Young.
- Développements limités : définition, propriétés élémentaires, développements limités usuels en 0 (à connaître par coeur : e^x, $\dfrac{1}{1-x}$, $\dfrac{1}{1+x}$, $\ln(1+x)$, sinh, cosh, sin, cos, $(1+x)^\alpha$; à savoir retrouver rapidement : tan (normalement les deux premiers termes sont connus par coeur), tanh, arctan, Argth, arcsin, arccos, Argch, Argsh), techniques de calcul (sommes, produit, intégration ; et sur des cas pas trop compliqués, quotient et composée, pas de formule générale à connaître pour ces derniers cas).

Prévisions pour la semaine suivante : Développements limités (avec application aux caluls de limites ou aux études asymptotiques), peut-être un peu d'espaces euclidiens.

Semaine du 27/05 au 31/05 2013

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera systématiquement noté en-dessous de la moyenne.

Développements limités

- Formules de Taylor : pour les polynômes, **avec reste intégral**, **inégalité de Taylor-Lagrange**, formule de Taylor-Young.
- Développements limités : définition, propriétés élémentaires, développements limités usuels en 0 (à connaître par coeur : e^x, $\dfrac{1}{1-x}$, $\dfrac{1}{1+x}$, $\ln(1+x)$, sinh, cosh, sin, cos, $(1+x)^\alpha$; à savoir retrouver rapidement : tan (normalement les deux premiers termes sont connus par coeur), tanh, arctan, Argth, arcsin, arccos, Argch, Argsh), techniques de calcul (sommes, produit, intégration ; et sur des cas pas trop compliqués, quotient et composée, pas de formule générale à connaître pour ces derniers cas).
- Applications : calculs de limites, études asymptotiques de fonctions (ou existence de tangente et position par rapport à la tangente), exemples de développements asymptotiques (de suites implicites notamment), étude de poinits stationnaires de courbes paramétrées.

- Pas de géométrie euclidienne cette semaine, on se concentre sur le programme du concours blanc.

Prévisions pour la dernière semaine : Géométrie euclidienne.

Semaine du 10/06 au 14/06 2013

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera systématiquement noté en-dessous de la moyenne.

Géométrie euclidienne

- Produit scalaire, norme et distances dans un espace vectoriel : identité de polarisation, règle du parallélogramme, inégalité triangulaire, Cauchy-Schwarz.
- Orthogonalité, supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel, bases orthogonales et orthonormales, procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
- Projections et symétries orthogonales, réflexions, distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel.
- Endomorphismes orthogonaux dans un espace euclidien, matrice orthogonale, notations $\mathcal{O}(E)$ et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, la matrice de passage entre deux bases orthonormales est orthogonales, une matrice orthogonale a pour déterminant ± 1.
- Isométries du plan : expression des matrices de rotation dans une base orthonormale, $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ est un groupe commutatif, expression des matrices de réflexion.
- Isométries dans l'espace : rotations dans l'espace, expression de leur matrice dans une base adaptée, calcul de l'image d'un vecteur (avec le cas particulier d'un vecteur dans le supplémentaire orthogonal de l'axe), détermination explicite de l'axe et de l'angle à partir de la matrice dans la base canonique.

Prévisions pour la suite : du repos bien mérité.

Annexe A

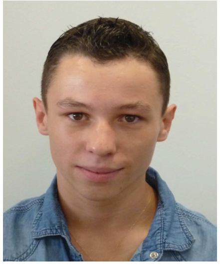
Trombinoscope

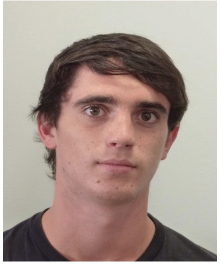
Pour finir ce bilan en beauté, après tant de texte et de formules absconses (et tout de même 341 figures illustratives), quelques images ne feront pas de mal. Et puis tout de même, que serait un bilan de cette année qui n'inclurait pas les principaux protagonistes de cette magnifique aventure, à savoir vous, les élèves ? Car, ne l'oublions pas, les profs auront beau continuer à dire pis que pendre de leurs protégés et à prétendre chaque année que « c'est terrible, le niveau baisse » (moi, quand je demande à un collègue ce qu'il pense de ses cours en début d'année et qu'il me répond ça, je compatis : « Ah, je sais, c'est dur de vieillir, mais ne t'inquiètes pas, c'est bientôt la retraite, t'arriveras bien à tenir jusqu'au bout même si tes cours ne ressemblent plus à rien ! »), ils ne seraient rien sans leurs élèves. Alors pour être certain de ne pas vous oublier trop vite (ben oui, on oublie quand même un peu. Vous, vous ne nous oublierez sûrement jamais, car vous n'avez « que » deux ou trois ans de prépa dans votre vie, et pas tant de profs que ça à graver dans votre mémoire, mais nous, avec une cinquantaine de gamins par an pendant quarante ans, on ne peut pas éviter un peu de perte), vous voila tout sagement alignés pour le trombi à la rentrée :

1 PTSIB 2012-2013

CLASSE (48 ELEVES)

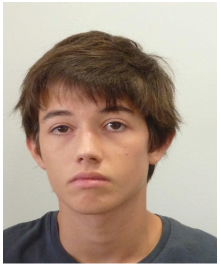

ANGLADE Julien


AUMOND Pierre

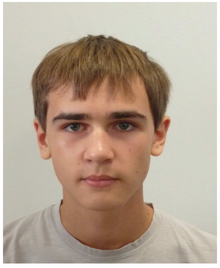

AYME Maxime


BEDOURET Florent

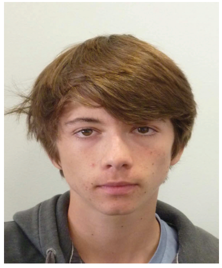

BELZ Laura


BERNARD Julien

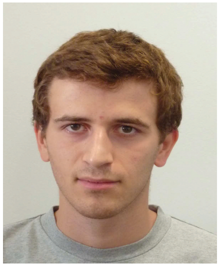

BRISSIER Germain


BUOT Geoffrey


CHAABANI Sahbi


CHARLET DE SAUVAGE Lucas

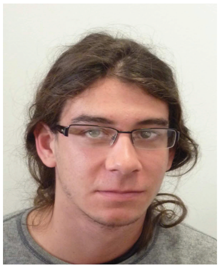

DEDIEU Benjamin

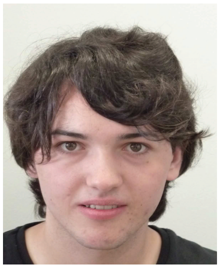

DORANGE Alexis


DUBOUE Camille


DUFOURG Nathan


DURAND Marine

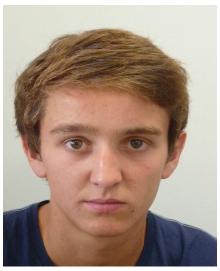

ESTAMPE Timothé

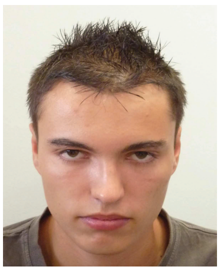

GARNIER Paul-Henri


GERMAIN Hugo

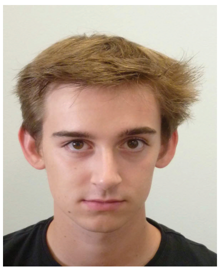

HEMERY Margaux


HOUËLCHE Jeyson


JEANNIN Baptiste

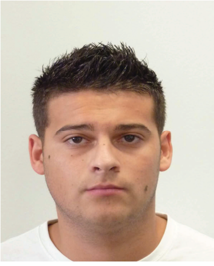

LAFARGE Rémi

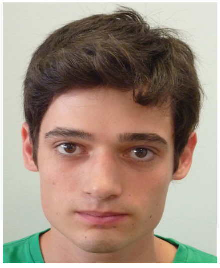

LAMARQUE Gauthier


LAMOTHE Thibaud

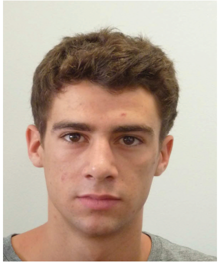

LANDES Arthur

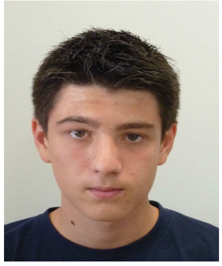
1 PTSIB 2012-2013
CLASSE (48 ELEVES)


LANOËLLE Mathieu


LAWNICZAK Jean-Clément


LELONG Alice

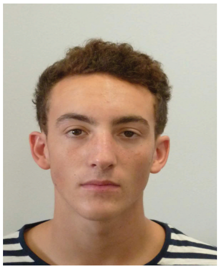

LESCANNE Nathan


LOSTEC Guillaume

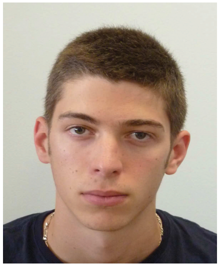

LUCKING Léo

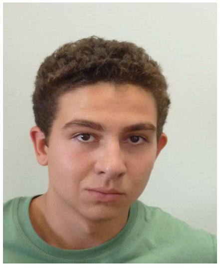

MAIRE Nicolas


MARC Emeric

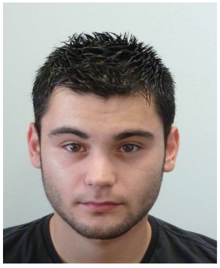

MOGENET Pierre-Marie


MOINEAU Charline

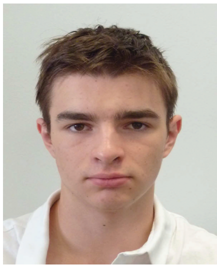

NERE Florian

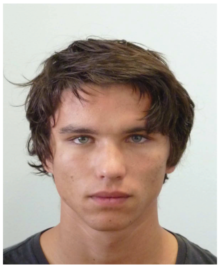

PASCAL Jean-Adrien


PICOT Marine

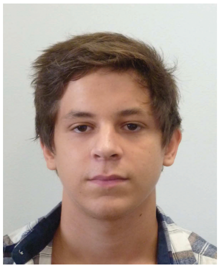

PIRIOU Grégory

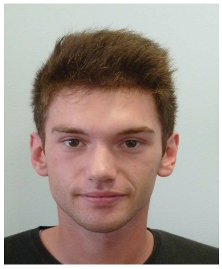

PLANDÉ Antoine


PLATEL Jean

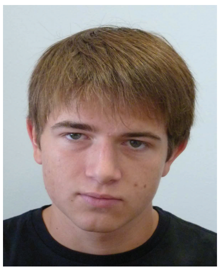

POUPEAU Yoann

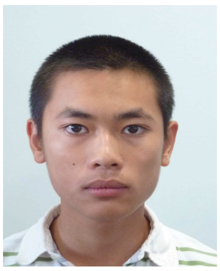

SEVAL Anaïs


SOLOM Emmanuel


SOUMAILLE Sacha


TALON Pierre-Louis


VANNUCCI Simon


VU Dominique

Annexe B

Pique-nique de fin d'année

Et puis, histoire de prouver une bonne fois pour toute que, non seulement on survit très bien à une année de prépa, mais on en sort même largement plus en forme qu'on n'y est rentré, voici quelques photos de l'incontournable, de l'inoubliable, du mythique goûter de fin d'année ! Bon, bien sûr, tous ceux qui étaient sur le trombi n'apparaitront pas sur ces quelques photos, pour des raisons diverses sur lesquelles nous ne nous étendrons pas, mais on va dire qu'on retrouvera ici un échantillon représentatif de la PTSIB version 2012-2013. On ne verra pas, par contre, d'images de la déculottée prise par certains d'entre vous à Mario Kart, et pas grand chose non plus du festin constitutif de ce fameux goûter. Bon, pour être tout à fait franc, il faut que je vous avoue quelque chose : niveau goûter, le niveau a un peu baissé quand je suis passé d'ECE en PTSI. On évitera les clichés sociologiques ou sexistes pour expliquer cet état de fait, nous le mettrons donc sur le dos des vases communiquants : on ne peut pas être à la fois meilleur en maths et plus doué pour la cuisine, c'est tout. Je vous laisse imaginer l'étendue du désastre quand je me mets derrière les fourneaux à la maison...

Lucas en pleine discussion avec Rémi (quoique, pas sûr que le premier cité écoute réellement ce que lui dit le second). Guillaume, Geoffrey et Julien, eux, ont carrément la tête ailleurs.

On sait maintenant pourquoi Guillaume, Geoffrey et Julien regardaient de l'autre côté, il y avait du beau monde, à savoir Thibaud, Charline, Julien et Nicolas (si je mets les prénoms, c'est juste pour être sûr de m'en rappeler quand je relirai ça dans 10 ans).

Il est donc possible de faire une photo d'élèves de PTSI majoritairement composée de filles, tout en ayant strictement plus d'une personne sur la photo. Ici, Émeric, Margaux, Anaïs, Alice, Marine (enfin, son dos, du moins) et Pierre.

Les flemmards ont préféré squatter le canapé : Timothé, Jean, Antoine et Simon. Non, je ne céderai pas à la tentation, je ne ferai pas de remarque sur le fait que je ne suis pas forcément très surpris de la composition du groupe de flemmards. Non, non, n'insistez pas. Bon, euh, on va dire que j'ai à moitié résisté.

Et flemmards mais en mode moins confortable, Marine, Yoann et Florian. Le mur n'est pas trop dur ?

Dans un magnifique contre-jour que j'ai la flemme de retoucher proprement (on a dit qu'on virait l'informatique de ce bilan, alors je ne vais pas aller sortir mon GIMP pour ça), Nicolas, Baptiste, Laura, Alice, Dominique, et un bout de tête de Raphaël. Il devait être vexé de voir son frère en gros plan en tête de ce bilan alors que lui n'y apparait même pas, alors il a tenté de s'incruster. Eh, Raph, bien essayé, mais t'es encore un peu petit !

Et comme je sais que Timothé m'en voudrait énormément si je ne l'avais pas gardée, la fameuse collection de chaussures de la PTSI B. C'est là-dessus que se finira vraiment cette longue année de mathématiques. J'espère que vous ne regrettez pas trop que ces chaussures vous aient conduit jusqu'à la salle G201 où vous aurez sacrifié une partie de vos jeunes années, et surtout qu'elle vous méneront désormais plus loin (un petit peu pour l'an prochain, puis, espérons-le, beaucoup plus loin pour la suite), vers un avenir heureux et sûrement beaucoup moins rempli de maths que le mien (ou que ce bilan, pour ce que ça vaut). Peu importe, les maths ne font pas le bonheur, ou du moins pas celui de tout le monde, et c'est très bien ainsi. Et si vous pouvez quand même en inclure un peu, du bonheur, dans les souvenirs des nombreuses heures que nous avons passées ensemble, j'en serai extrêmement satisfait !