Feuilles d'exercices n°6 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

17 novembre 2011

Exercice 1 (**)

1. Vrai, elle est minorée par le plus petit des termes précédant le rang à partir duquel elle est croissante (c'est-à-dire que si, par exemple, (u_n) est croissante à partir du rang 1000, la suite sera minorée par le plus petit des termes parmi u_0, u_1, ..., $u_{1\ 000}$; en effet, tous les termes suivants seront de toute façon plus grands que $u_{1\ 000}$).
2. Faux, par exemple $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge vers 0 mais $u_{n+1} - u_n$ change de signe en permanence.
3. C'est également faux, on peut par exemple prendre $u_n = n^2$ si n est pair, et $u_n = (n-1)^2 - 1$ si n est impair. La suite n'est pas croissante à partir d'un certain rang puisque chaque terme d'indice impair est plus petit que le terme d'indice pair qui le précède, et pourtant elle diverge vers $+\infty$.
4. C'est tout à fait faux, par exemple la suite utilisée dans la question précédente a des valeurs toujours plus grandes que $n-2$ (je vous laisse le vérifier) qui est une suite croissante.
5. Faux, par exemple $(-1)^n$ ne converge pas alors que sa valeur absolue est constante égale à 1 (et donc convergente).
6. Vrai, dire que $|u_n - 0| < \varepsilon$ est la même chose que $|u_n| - 0 < \varepsilon$.

Exercice 2 (* à **)

Première version du corrigé, en rédigeant tout le plus soigneusement possible :

- On peut écrire $u_n = \dfrac{3^n}{4^n} - \dfrac{2^n}{4^n} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. La suite est donc une différence de deux suites géométriques dont les raisons sont comprises entre -1 et 1. Ces deux suites convergent donc vers 0, et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- On peut développer : $u_n = 2e^{-n} - ne^{-n}$. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$, donc le premier terme de la différence tend vers 0. Le deuxième peut s'écrire sous la forme $\dfrac{n}{e^n}$, c'est un cas d'école de croissance comparée, il tend également vers 0. Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- Dans ce genre de cas, on cherche à factoriser par le terme le plus fort : $u_n = e^{2n}\left(\dfrac{2^n}{e^{2n}} - 1 + \dfrac{1}{e^{2n}}\right) = e^{2n}\left(\left(\dfrac{2}{e^2}\right)^n - 1 + \dfrac{1}{e^{2n}}\right)$. Dans la parenthèse, le premier terme est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{e^2} < 1$, donc il tend vers 0. Le dernier terme tend aussi manifestement vers 0, donc toute la parenthèse a pour limite -1. Multipliée par e^{2n} qui tend vers $+\infty$, elle nous donne $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
- Pour un quotient de polynôme, vous êtes autorisés à utiliser la règle du quotient des termes de plus haut degré : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2 - 3n + 2}{2n^2 + 5n - 34} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{2n^2} = \dfrac{1}{2}$.

- Aucune technique particulière ici. Comme $\lim_{n\to+\infty} -3n = -\infty$, on a $\lim_{n\to+\infty} e^{-3n} = 0$. Par ailleurs, $\lim_{n\to+\infty} \ln n = +\infty$, donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- On prend son courage à deux mains et on factorise tout : $u_n = \frac{\sqrt{n}}{n} \times \frac{2+3\frac{\ln n}{\sqrt{n}} - \frac{5}{\sqrt{n}}}{\frac{3\ln n}{n} - 3 + \frac{2}{n}}$. Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{3\ln n}{\sqrt{n}} = 0$ (par croissance comparée) et $\lim_{n\to+\infty} \frac{-5}{\sqrt{n}} = 0$, on aura $\lim_{n\to+\infty} 2+\frac{3\ln n}{\sqrt{n}} - \frac{5}{\sqrt{n}} = 2$. De même, au dénominateur, $\lim_{n\to+\infty} \frac{3\ln n}{n} = 0$ (toujours de la croissance comparée) et $\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0$, on aura $\lim_{n\to+\infty} \frac{3\ln n}{n} - 3 + \frac{2}{n} = -3$. Enfin, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- Utilisation de la quantité conjuguée très conseillée pour ce calcul :
$u_n = \frac{(\sqrt{n^2-1}-n)(\sqrt{n^2-1}+n)}{\sqrt{n^2-1}+n} = \frac{n^2-1-n^2}{\sqrt{n^2-1}+n} = \frac{-1}{\sqrt{n^2-1}+n}$.
Le dénominateur de cette fraction ayant clairement pour limite $+\infty$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- La principale difficulté est la manipulation des factorielles : $u_n = \frac{n! \times (n+1) \times (n+2)}{(n^2+1) \times n!} = \frac{(n+1)(n+2)}{n^2+1} = \frac{n^2+3n+2}{n^2+1}$. Reste à utiliser la règle des termes de plus haut degré pour obtenir $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.
- Il faut simplement faire les choses méthodiquement. D'un côté, $\lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{2n} = 0$, donc $\lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{1}{2n}} = e^0 = 1$; de l'autre côté, en utilisant la règle des termes de plus haut degré, $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n} = 1$, donc $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n}{n+2}\right) = \ln(1) = 0$. Il ne reste plus qu'à additionner les deux termes pour obtenir $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Deuxième version du corrigé, en utilisant les équivalents et avec une rédaction nettement moins détaillée :

- $\frac{3^n-2^n}{4^n} \sim \left(\frac{3}{4}\right)^n$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n-2^n}{4^n} = 0$.
- $\lim_{n\to+\infty} (-n+2)e^{-n} = 0$ par croissance comparée.
- $2^n - e^{2n} + 1 \sim -e^{2n}$, donc $\lim_{n\to+\infty} 2^n - e^{2n} + 1 = -\infty$.
- $\frac{n^2-3n+2}{2n^2+5n-34} \sim \frac{n^2}{2n^2} = \frac{1}{2}$, donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-3n+2}{2n^2+5n-34} = \frac{1}{2}$.
- $\lim_{n\to+\infty} \ln n + e^{-3n} = +\infty$ (il n'y a même pas de forme indeterminée ici).
- $\frac{2\sqrt{n}+3\ln n - 5}{\ln(n^3) - 3n + 2} \sim \frac{2\sqrt{n}}{-3n} \sim -\frac{2}{3\sqrt{n}}$, donc la limite vaut 0.
- $\sqrt{n^2-1} - n = \frac{n^2-1-n^2}{\sqrt{n^2-1}+n} = -\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$, donc $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2-1} - n = 0$.
- $\frac{(n+2)!}{(n^2+1)\times n!} = \frac{(n+1)(n+2)n!}{(n^2+1)n!} = \frac{n^2+3n+2}{n^2+1} \sim \frac{n^2}{n^2} = 1$, donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+2)!}{(n^2+1)\times n!} = 1$.
- $\lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{1}{2n}} = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n}{n+2}\right) = 0$, donc la limite recherchée est égale à 1.

Exercice 3 (**)

1. C'est une récurrence facile : $u_0 > 0$ par hypothèse, et si $u_n > 0$, alors $\frac{1}{u_n} > 0$, et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ est également strictement positif (et bien défini puisque u_n n'est pas nul).

2. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{u_n} > 0$ (au vu de la question précédente) donc la suite est strictement croissante.
3. Notons P_n la propriété $u_n^2 \geqslant 2n + u_0^2$. pour $n = 0$, elle se réduit à $u_0^2 \geqslant u_0^2$, ce qui est manifestement vrai. Supposons donc, pour un certain entier n, que P_n est vraie. On a alors $u_{n+1}^2 = \left(u_n + \dfrac{1}{u_n}\right)^2 = u_n^2 + 2u_n \times \dfrac{1}{u_n} + \dfrac{1}{u_n^2} = u_n^2 + 2 + \dfrac{1}{u_n^2}$. En utilisant l'hypothèse de récurrence et le fait que $\dfrac{1}{u_n^2} > 0$, on obtient $u_{n+1}^2 > 2n + u_0^2 + 2 = 2(n+1) + u_0^2$, ce qui prouve exactement la propriété P_{n+1}. D'après le principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout entier n.
   La suite (u_n^2) étant minorée par une suite arithmétique de limite $+\infty$, elle diverge vers $+\infty$. Et u_n étant toujours positif, on peut en déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 4 (***)

1. Commençons donc par prouver la croissance de f sur $\mathbb{R}_+^*$. On a $f(x) = x \ln \dfrac{x+a}{x} = x\ln(x+a) - x\ln x$, donc $f'(x) = \ln(x+a) + \dfrac{x}{x+a} - \ln x - 1$, et $f''(x) = \dfrac{1}{x+a} + \dfrac{x+a-x}{(x+a)^2} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x(x+a) + ax - (x+a)^2}{x(x+a)^2} = \dfrac{-a^2}{x(x+a)^2} < 0$. La fonction f' est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Or, $f'(x) = \ln\left(1 + \dfrac{a}{x}\right) + \dfrac{x}{x+a} - 1$ a pour limite 0 en $+\infty$ (en effet, ce qui se trouve dans le ln a pour limite 1 donc le terme avec le ln tend vers 0 ; et en conservant les termes de plus haut degré, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x+a} = 1$). Il est inutile ici (même si ce n'est pas spécialement difficile) de calculer la limite de f' en 0, on peut déjà conclure que f' est toujours positive, ce dont on déduit que f est bien croissante.
   Il faut maintenant faire le lien avec la suite (u_n) en remarquant que $\ln(u_n) = n \ln\left(1 + \dfrac{a}{n}\right) = f(n)$. La fonction f étant croissante, on aura certainement, pour tout entier n, $f(n) \leqslant f(n+1)$, c'est-à-dire $\ln(u_n) \leqslant \ln(u_{n+1})$. Un petit passage à l'exponentielle donne alors $u_n \leqslant u_{n+1}$, ce qui prouve que la suite (u_n) est croissante.
2. Le plus simple est de démontrer séparément chacune des deux inégalités en faisant tout passer d'un seul côté et en faisant des études de fonctions. Posons ainsi $g(t) = t - \ln(1+t)$. La fonction g est définie sur $\mathbb{R}_+$ (elle est même définie entre -1 et 0, mais pour ce qu'on nous demande, pas la peine de s'y intéresser), de dérivée $g'(t) = 1 - \dfrac{1}{1+t} = \dfrac{t}{1+t} \geqslant 0$. La fonction g est donc croissante, et comme $g(0) = 0$, elle est toujours positive, ce qui prouve que $t - \ln(1+t)$ sur $\mathbb{R}_+$, soit $\ln(1+t) \leqslant t$.
   De même, on pose $h(t) = \ln(1+t) - \dfrac{t}{1+t}$, fonction dont la dérivée vaut $\dfrac{1}{1+t} - \dfrac{1+t-t}{(1+t)^2} = \dfrac{1+t-1}{(1+t)^2} = \dfrac{t}{(1+t)^2} \geqslant 0$. Cette fonction est donc également croissante, et vérifie aussi $h(0) = 0$, d'où sa positivité sur $\mathbb{R}_+$ et l'encadrement souhaité.
3. On a vu que $\ln u_n = n \ln\left(1 + \dfrac{a}{n}\right)$, donc en posant $t = \dfrac{a}{n}$ et en appliquant l'encadrement de la question précédente, $\dfrac{\frac{a}{n}}{1 + \frac{a}{n}} \leqslant n \ln\left(1 + \dfrac{a}{n}\right) \leqslant \dfrac{a}{n}$, soit $\dfrac{\frac{a}{n}}{\frac{n+a}{n}} \leqslant \dfrac{1}{n} \ln u_n \leqslant \dfrac{a}{n}$, ou encore $\dfrac{a}{a+n} \leqslant \dfrac{1}{n} \ln u_n \leqslant \dfrac{a}{n}$. Il ne reste plus qu'à tout multiplier par n pour obtenir l'encadrement demandé.
4. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{na}{n+a} = a$ (on garde les termes de plus haut degré, a étant toujours une constante), le théorème des gendarmes permet d'affirmer que la suite $\ln(u_n)$ converge vers

a. La suite (u_n) a donc pour limite e^a.

5. Pour $a = 1$, on obtient le résultat classique suivant : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$.

Exercice 5 (**)

Il y a deux points sur les trois qui sont très faciles à prouver :

- $v_n - u_n = \dfrac{1}{n \times n!}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$.
- $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} > 0$, donc la suite (u_n) est croissante.

Ne reste plus qu'à prouver que (v_n) est décroissante : $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \dfrac{1}{(n+1) \times (n+1)!} - u_n - \dfrac{1}{n \times n!} = \dfrac{1}{(n+1)!} + \dfrac{1}{(n+1) \times (n+1)!} - \dfrac{1}{n \times n!} = \dfrac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n \times (n+1) \times (n+1)!} = \dfrac{n^2 + 2n - (n^2 + 2n + 1)}{n(n+1)(n+1)!} = \dfrac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0$. La suite (v_n) est donc bien décroissante, et les deux suites étant adjacentes, elles convergent donc vers une limite commune.

Notons donc l la limite commune des deux suites, et supposons que $l\dfrac{a}{b}$, avec a et b deux entiers naturels. Comme la suite (u_n) est strictement croissante, et la suite (v_n) strictement décroissante, on peut écrire, pour tout entier n, $u_n < l < v_n$, soit $\sum\limits_{k=0}^{k=n} \dfrac{1}{k!} < \dfrac{a}{b} < \sum\limits_{k=0}^{k=n} \dfrac{1}{k!} + \dfrac{1}{n \times n!}$. C'est en particulier vrai lorsque $n = b$: $\sum\limits_{k=0}^{k=b} \dfrac{1}{k!} < \dfrac{a}{b} < \sum\limits_{k=0}^{k=b} \dfrac{1}{k!} + \dfrac{1}{b \times b!}$. Multiplions cet encadrement par $b \times b!$: $b\sum\limits_{k=0}^{k=b} \dfrac{b!}{k!} < a \times b! < b\sum\limits_{k=0}^{k=b} \dfrac{b!}{k!} + 1$. À gauche, chaque quotient $\dfrac{b!}{k!}$ est un entier lorsque $k \leqslant b$ (en effet, $b!$ est un multiple de $k!$ pour tous les entiers k compris entre 0 et b), donc le membre de gauche est une somme d'entiers et appartient à $\mathbb{N}$. Notons ce nombre p. Le membre de droite est le même que celui de gauche, avec un simple $+1$, donc est égal à $p + 1$. On a donc $p < a \times b! < p + 1$. Autrement dit, le nombre $a \times b!$, qui est lui aussi un nombre entier, est strictement compris entre les deux entiers consécutifs p et $p + 1$. Ce n'est pas possible ! On a prouvé par l'absurde que l ne pouvait pas être un nombre rationnel (pour les curieux, la valeur de l est en fait le nombre e que nous connaissons bien depuis l'étude de la fonction exponentielle).

Exercice 6 (**)

1. Le terme d'indice n de la suite est constitué d'une somme de n réels dont le plus petit est $\dfrac{n}{n^2+n}$ et le plus gros $\dfrac{n}{n^2+1}$. On en déduit que $n \times \dfrac{n}{n^2+n} \leqslant u_n \leqslant n \times \dfrac{n}{n^2+1}$, d'où l'encadrement demandé.
2. Les deux suites extrêmes ayant pour limite 1 (quotient des termes de plus haut degré), une simple application du théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Exercice 7 (***)

1. Il suffit pour cela de prouver par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$. C'est vrai au rang 0 par hypothèse, et si u_n et v_n sont tous deux strictement positifs, ce sera aussi le cas de $u_n + v_n$ et de $u_n v_n$, donc de u_{n+1} et v_{n+1}. Ainsi, les deux suites sont bien définies.

2. Supposons $n \geqslant 1$ (pour $n=0$ l'inégalité est vraie par hypothèse). On a $v_n - u_n = \dfrac{u_{n-1}+v_{n-1}}{2} - \sqrt{u_{n-1}v_{n-1}} = \dfrac{u_{n-1}+v_{n-1}-2\sqrt{u_{n-1}}\sqrt{v_{n-1}}}{2} = \dfrac{(\sqrt{u_{n-1}}-\sqrt{v_{n-1}})^2}{2} > 0$, donc $u_n \leqslant v_n$.
3. C'est désormais facile en utilisant le résultat de la question précédente : $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n v_n} - u_n = \sqrt{u_n}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}) > 0$ puisque $v_n > u_n$, donc (u_n) est strictement croissante. De même, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n + v_n}{2} - v_n = \dfrac{u_n - v_n}{2} < 0$, donc (v_n) est décroissante.
4. On ne peut pas affirmer que les suites sont adjacentes car on ne sait pas si $(u_n - v_n)$ tend vers 0. Par contre, (u_n) étant croissante et majorée par exemple par v_0 (car $u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$ puisque la suite (v_n) est decroissante), le théorème de convergence monotone permet d'affirmer qu'elle est convergente vers une certaine limite l. De même, (v_n) est décroissante et minorée (encore plus simplement, par 0), donc converge vers une limite l'. La suite (v_{n+1}) converge aussi vers l', mais comme $v_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2}$, on a donc, par passage à la limite, $l' = \dfrac{l+l'}{2}$, d'où $\dfrac{l'}{2} = \dfrac{l}{2}$, soit $l = l'$. Finalement, les deux suites ont bien la même limite (appelée moyenne arithmético-géométrique des deux réels a et b).

Exercice 8 (*)

1. $\dfrac{5n - n^2 + 2n^7}{n^8 - 3n + 12} \sim \dfrac{2n^7}{n^8} \sim \dfrac{2}{n}$
2. $\sqrt{n+3} - \sqrt{n} = \dfrac{n+3-n}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}} = \dfrac{3}{\sqrt{n}(\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1)} \sim \dfrac{3}{2\sqrt{n}}$
3. $\dfrac{n^2}{\sqrt{n^2+n+1}} \sim \dfrac{n^2}{\sqrt{n^2}} \sim \dfrac{n^2}{n} \sim n$
4. $e^{-n} + e^{-2n} \sim e^{-n}$ (attention à bien garder comme équivalent la suite qui tend le moins vite vers 0)
5. $\dfrac{2\sqrt{n} + e^{3n} - 5\ln n}{n^2 - 3\ln(2n^4)} \sim \dfrac{e^{3n}}{n^2}$
6. $\dfrac{1}{n^2} + e^{-3n} \sim \dfrac{1}{n^2}$
7. $\ln\left(1 - \dfrac{2}{n^2} + \dfrac{1}{n}\right) \sim -\dfrac{2}{n^2} + \dfrac{1}{n} \sim \dfrac{1}{n}$ (on utilise l'équivalent vu en cours pour $\ln(1+u_n)$ lorsque u_n tend vers 0)
8. Attention à ne pas dire utiliser trop précipitamment l'équivalent vu en cours pour $\ln(1+u_n)$, puisque n^3 ne tend pas vraiment vers 0. Il faut plutôt factoriser : $\ln(1+n^3) = \ln(n^3) + \ln\left(1 + \dfrac{1}{n^3}\right)$. Le deuxième morceau tendant vers 0 et le premier vers $+\infty$, $u_n \sim \ln(n^3) \sim 3\ln n$.
9. $\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^n = e^{n\ln(1+\frac{1}{n^2})}$. Or $n\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right) \sim n \times \dfrac{1}{n^2} \sim \dfrac{1}{n}$. On ne peut pas passer cet équivalent à l'exponentielle, mais on peut en déduire que la suite (u_n) tend vers 1 (ce qui est dans l'exponentielle tend vers 0), donc $u_n \sim 1$.

Exercice 9 (**)

1. En effet, $2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \dfrac{2(n+1-n)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$. Or, comme $\sqrt{n} + \sqrt{n} \leqslant \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \leqslant \sqrt{n+1} + \sqrt{n+1}$, on a $\dfrac{1}{2\sqrt{n+1}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$, d'où l'encadrement souhaité en multipliant tout par 2.

2. En utilisant l'inégalité de droite de la question précédente, on obtient $2\sum_{k=1}^{k=n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) \leqslant S_n$. Or, la somme de gauche est une somme télescopique égale à $2(\sqrt{n+1}-1) = 2\sqrt{n+1}-2$. Cette expression a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, donc par théorème de comparaison, $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ (inutile d'utiliser l'inégalité de gauche de la question 1 ici, celle de droite suffit...).
3. Commençons par déterminer la monotonie de la suite (u_n) : $u_{n+1}-u_n = S_{n+1}-S_n-2\sqrt{n+1}+2\sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$, expression négative d'après la question 1. La suite (u_n) est donc décroissante. On a vu par ailleurs que $S_n \geqslant 2\sqrt{n+1}-2$, donc a fortiori $S_n \geqslant 2\sqrt{n}-2$, donc $u_n \geqslant -2$. La suite (u_n) étant décroissante et minorée, elle est convergente.
4. Puisque $\lim_{n\to+\infty} S_n - 2\sqrt{n} = l \in \mathbb{R}$, on en déduit $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{S_n-2\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} = 0$, soit $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{2\sqrt{n}} = 1$. Autrement dit, on a prouvé que $S_n \sim 2\sqrt{n}$.

Exercice 10 (d'après EDHEC) (***)

1. Calculons donc la dérivée $f_n'(x) = 5x^4+n$. Cette dérivée est toujours strictement positive (sauf en 0 pour $n=0$), la fonction est donc strictement croissante, quel que soit l'entier n.
2. Comme de plus $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, chaque fonction f_n est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Chaque réel a donc un unique antécédent par f_n et en particulier l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution.
3. Constatons que $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n^5}+1-1 = \dfrac{1}{n^5} > 0$. Comme la fonction f_n est strictement croissante, et $f_n(u_n) = 0$, on en déduit que $u_n < \dfrac{1}{n}$. Notons par ailleurs que $f_n(0) = -1$, donc par un raisonnement similaire on a toujours $0 < u_n$. Le théorème des gendarmes permet donc d'affirmer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

   Démonstration subsidiaire : monotonie de la suite (u_n). Pour déterminer la monotonie de la suite (u_n), il faut réussir à comparer u_n et u_{n+1}. Pour cela, dans le même esprit que les calculs précédents, on va chercher à calculer $f_n(u_n)$ et $f_n(u_{n+1})$. Le morceau facile, c'est $f_n(u_n) = 0$ (par définition). Plus compliqué, $f_n(u_{n+1}) = u_{n+1}^5 + nu_{n+1} - 1$. Or, on sait que, par définition, $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$, c'est-à-dire que $u_{n+1}^5 + (n+1)u_{n+1} - 1 = 0$, ou encore en développant $u_{n+1}^5 + nu_n + u_{n+1} - 1 = 0$, soit $u_{n+1}^5 + nu_{n+1} - 1 = -u_{n+1}$. Autrement dit, en reprenant le calcul précédent, $f_n(u_{n+1}) = -u_{n+1} < 0$ (puisqu'on a prouvé plus haut que tous les termes de la suite étaient positifs). En particulier, $f_n(u_{n+1}) < f_n(u_n)$. La fonction f_n étant strictement croissante, on en déduit que $u_{n+1} < u_n$, donc la suite (u_n) est décroissante.
4. On sait que $u_n^5 + nu_n - 1 = 0$, donc $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{u_n^5}{n}$. Comme (u_n) tend vers 0, $\dfrac{u_n^5}{n} = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, donc $u_n \sim \dfrac{1}{n}$.
5. Comme on vient de le voir, $\dfrac{1}{n} - u_n = \dfrac{u_n^5}{n} \sim \dfrac{\frac{1}{n^5}}{n} \sim \dfrac{1}{n^6}$.

Exercice 11 (****)

Supposons donc que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, et choisissons un $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite, il existe un entier n_0 à partir duquel on aura $|u_n| < \varepsilon$. Découpons alors v_n en deux parties : ce qui se passe avant n_0 et après n_0 : si $n > n_0$, $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} u_k = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n_0} u_k + \dfrac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{k=n} u_k$. La première somme est une constante (on peut modifier n, mais n_0, lui, est fixé), donc, quand on la divise par n, ça va finir par se rapprocher de 0. Autrement dit, $\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_1, \dfrac{1}{n}\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n_0} u_k\right| < \varepsilon$. Quand à la deuxième somme, elle est constituée de $n-n_0$ termes qui, d'après ce qu'on a dit plus haut, sont tous inférieurs (en valeur absolue) à ε, donc sa valeur absolue est inférieure à $(n-n_0)\varepsilon$, d'où $\dfrac{1}{n}\left|\displaystyle\sum_{k=n_0+1}^{k=n} u_k\right| \leqslant \dfrac{n-n_0}{n}\varepsilon \leqslant \varepsilon$ (puisque $\dfrac{n-n_0}{n} \leqslant 1$). Conclusion, lorsque $n \geqslant \max(n_0; n_1)$, on a $|v_n| \leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$. Ceci suffit à prouver que la suite (v_n) tend vers 0, et a donc bien la même limite que (u_n).

Passons désormais au cas général (qui va être facile en fait), c'est à dire lorsque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = l \neq 0$. Posons $w_n = u_n - l$, cette suite auxilaire a pour limite 0, donc on peut lui appliquer ce qu'on vient de démontrer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} w_k = 0$. Or, $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} w_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}(u_k - l) = \frac{1}{n}\left(\left(\sum_{k=1}^{k=n} u_k\right) - nl\right) = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} u_k\right) - l$. On en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} u_k = l$, ce qu'on voulait prouver. Note finale : ce résultat est connu sous le nom de théorème de Cesaro, il stipule que la moyenne des n premiers termes d'une suite convergente a la même limite que la suite elle-même.

Problème 1 (Ecricome 99) (***)

Préliminaire

1. L'équation caractéristique $x^2 - \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{3}$ a pour discriminant $\Delta = \dfrac{1}{9} + \dfrac{4}{3} = \dfrac{13}{9}$, et l'équation admet donc deux solutions $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{13}}{6}$ et $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{13}}{6}$. Le terme général de la suite est donc de la forme $x_n = \alpha\left(\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}\right)^n + \beta\left(\dfrac{1-\sqrt{13}}{6}\right)^n$.
2. Les deux racines x_1 et x_2 étant comprises strictement entre -1 et 1, la suite (x_n) est une somme de deux suites convergeant vers 0, d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.

Question 1

1.a : Prouvons donc par récurrence double la propriété $P_n : u_n \geqslant 1$. C'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$ par hypothèse. Supposons désormais la propriété vérifiée par u_n et u_{n+1}. On a alors $\sqrt{u_n} \geqslant 1$ et $\sqrt{u_{n+1}} \geqslant 1$, donc $u_{n+2} \geqslant 1 + 1 = 2$ et a fortiori $u_{n+2} \geqslant 1$, ce qui achève la récurrence.

1.b : PROGRAM valeurs ;

```
USES wincrt ;
VAR a,b,u,v,w : real ; i,n : integer ;
BEGIN
WriteLn('Choisissez des valeurs supérieures à 1 pour les réels a et b') ;
ReadLn(a,b) ;
WriteLn('Choisissez une valeur supérieure à 2 pour l'entier n') ;
ReadLn(n) ;
u := a ; v := b ;
FOR i := 2 TO n DO
```

```
BEGIN
w := sqrt(u)+sqrt(v);
u := v;
v := w;
END;
WriteLn('La valeur de u',n,' est ',v);
END.
```

Question 2

2.a : D'après la définition de v_n, on a $2(v_n+1) = \sqrt{u_n}$, ou encore $4(v_n+1)^2 = u_n$, soit $u_n = 4v_n^2 + 8v_n + 4$. Si la suite (v_n) converge vers 0, on en déduit bien, par somme de limites, que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$.

2.b : Calculons donc $\dfrac{v_{n+1}+v_n}{2(2+v_{n+2})} = \dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{u_{n+1}} - 1 + \frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1}{2(2+v_{n+2})} = \dfrac{u_{n+2}-4}{4(2+v_{n+2})} = \dfrac{4v_{n+2}^2 + 8v_{n+2}}{8+4v_{n+2}} = v_{n+2}$ (on a utilisé le calcul de la question précédente). On a donc $|v_{n+2}| = \dfrac{|v_{n+1}+v_n|}{2|2+v_{n+2}|}$. Or, on sait que $|v_{n+1}+v_n| \leqslant |v_{n+1}|+|v_n|$ (inégalité triangulaire) et d'autre part que $u_n \geqslant 1$, donc $v_n = \dfrac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1 \geqslant -\dfrac{1}{2}$. On peut en déduire que $2+v_{n+2} \geqslant \dfrac{3}{2}$, d'où finalement $|v_{n+2}| \leqslant \dfrac{|v_{n+1}|+|v_n|}{2\times\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{3}(|v_{n+1}|+|v_n|)$.

2.c : C'est une récurrence double, mais assez simple malgré tout : notons P_n la propriété $|v_n| \leqslant x_n$. Par hypothèse, P_0 et P_1 sont vraies (on a même égalité), et, si on suppose à la fois $|v_n| \leqslant x_n$ et $|v_{n+1}| \leqslant x_{n+1}$, on a alors, en utilisant le résultat de la question précédente, $|v_{n+2}| \leqslant \dfrac{1}{3}(|v_{n+1}|+|v_n|) \leqslant \dfrac{1}{3}(x_{n+1}+x_n) = x_{n+2}$, donc on a bien $|v_{n+2}| \leqslant x_{n+2}$, ce qui achève la récurrence.

Comme on sait (question préliminaire du problème) que (x_n) converge vers 0, et que par ailleurs $|v_n| \geqslant 0$ (comme toute valeur absolue qui se respecte), on peut conclure du théorème des gendarmes que $\lim\limits_{n\to+\infty} |v_n| = 0$. Si la valeur absolue de (v_n) tend vers 0, (v_n) également, et la question 2.a nous permet donc d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$.

Problème 2 (Maths III HEC/ESCP 2002) (***)

Partie A : Exemples

1. (a) On a dans ce cas $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} 2\times 3 = 6(n+1)$.

   (b) Dans ce deuxième exemple $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} 2^k \times 3^{n-k} = 3^n \sum_{k=0}^{k=n} 2^k \times 3^{-k} = 3^n \sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 3^n \frac{1-(\frac{2}{3})^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} = 3^{n+1}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) = 3^{n+1} - 2^{n+1}$.

2. ```
   PROGRAM suites;
   USES wincrt;
   VAR i,j,n : integer; w : real;
   BEGIN
   WriteLn('Choisissez l'entier n');
   readLn(n);
   FOR i := 0 TO n DO
   ```
   ```

```
BEGIN
w := 0;
FOR j := 0 TO i DO w := w+ln(j+1)/(i-j+1);
END;
END.
```

3. **Un résultat de convergence**

   (a) On calcule $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{k=m} u_k = \sum_{k=n+1}^{k=m} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{k=m-n-1} \frac{1}{2^{n+1+k}} = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{k=m-n-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1-\frac{1}{2^{m-n}}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}\left(1-\frac{1}{2^{m-n}}\right) = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^m} < \frac{1}{2^n} = u_n$, donc l'inégalité demandée est vraie.

   (b) Il s'agit « simplement » de découper la somme constituant w_{2n} en morceaux et de faire les bonnes majorations : $\displaystyle w_n = \sum_{k=0}^{k=2n} u_k v_{2n-k} = \sum_{k=0}^{k=n} u_k v_{2n-k} + \sum_{k=n+1}^{k=2n-1} u_k v_{2n-k} + u_{2n}v_0$. La première somme est égale à $u_0v_{2n} + u_1v_{2n-1} + \cdots + u_nv_n$. Comme la suite (v_n) est supposée décroissante et que tous les termes de (u_n) sont positifs, elle est inférieure ou égale à $\displaystyle(u_0 + u_1 + \cdots + u_n)v_n = u_0v_n + v_n \sum_{k=1}^{k=n} u_k \leqslant u_0v_n + u_0v_n = 2v_n$ (cette dernière inégalité découle de la question précédente). De même, en utilisant la décroissance de (v_n), la deuxième somme est inférieure ou égale à $\displaystyle v_1 \sum_{k=n+1}^{k=2n-1} u_k \leqslant v_1u_n$ (toujours d'après la question précédente). En additionnant ces majorations, on obtient bien $w_{2n} \leqslant 2v_n + v_1u_n + v_0u_{2n}$.

   La deuxième majoration est du même style : $\displaystyle w_{2n+1} = \sum_{k=0}^{k=n} u_k v_{2n+1-k} + \sum_{k=n+1}^{k=2n} u_k v_{2n+1-k} + u_{2n+1}v_0 \leqslant v_{n+1}u_0 + v_{n+1}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) + v_1 \sum_{k=n+1}^{k=2n} u_k + u_{2n+1}v_0 \leqslant 2v_{n+1} + v_1u_n + v_0u_{2n+1}$.

   (c) Les deux suites (u_n) et (v_n) ont pour limite 0 (pour (v_n), ça fait partie des hypothèses, et pour (u_n) c'est une conséquence du fait qu'il s'agit d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$). On en déduit aisément que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_0u_{2n} + 2v_n + v_1u_n = 0$, et pareil pour $2v_{n+1} + v_1u_n + v_0u_{2n+1}$. Comme de plus tous les termes de la suite (w_n) sont positifs (ils sont constitués d'une somme de réels positifs), le théorème des gendarmes permet de dire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} w_{2n} = \lim_{n\to+\infty} w_{2n+1} = 0$. Autrement dit, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 à partir duquel tous les termes pairs de la suite sont inférieurs à ε, et un entier n_1 à partir duquel tous les termes impairs aussi. Quand n est plus grand que le plus grand de ces deux entiers, tous les termes de la suite deviennent donc inférieurs à ε, ce qui prouve que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$.

   (d) D'après l'inégalité triangulaire, on aura $\displaystyle 0 \leqslant |(u' \times v)_n| = \left|\sum_{k=0}^{k=n}\left(-\frac{1}{2}\right)^k v_{n-k}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{k=n}\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^k v_{n-k}\right| = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{2^k} v_{n-k} = w_n$. Comme on vient de voir que la suite (w_n) convergeait vers 0, le théorème des gendarmes nous donne la convergence de $(|u' \times v|)$, et donc de $(u' \times v)$, vers 0.

Partie B : Application à l'étude d'un ensemble de suites

1. Si (u_n) est une suite décroissante, on a $\frac{1}{2}(u_n+u_{n-1}) \geqslant \frac{1}{2}(a_n+a_n) = a_n \geqslant a_{n+1}$, donc la suite appartient effectivement à A. Au contraire, si (u_n) est strictement croissante, on aura toujours $\frac{1}{2}(u_n+u_{n-1}) < u_n < u_{n+1}$, donc la suite n'appartient pas à A.

2. (a) La suite est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$. Son discriminant vaut $\Delta = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$, donc elle admet deux racines $r = \frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{2} = 1$ et $s = \frac{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{2} = -\frac{1}{2}$. Le terme général de la suite est donc bien de la forme $z_n = \alpha+\beta\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

   (b) La suite définie par $u_n = 1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n$, par exemple, appartient à A (elle vérifie la récurrence linéaire de la question précédente, et on vérifie facilement que ses termes sont tous positifs), mais n'est pas monotone puisque les termes d'indices pairs de la suites sont plus grands que 1 et les termes d'indices impairs plus petits que 1.

3. (a) Calculons donc, pour $n \geqslant 1$, $c_{n+1}-c_n = a_{n+1}+\frac{1}{2}a_n - a_n - \frac{1}{2}a_{n-1} = a_{n+1} - \frac{1}{2}(a_n+a_{n-1}) \leqslant 0$ puisque $(a_n) \in A$. La suite (c_n) est donc décroissante. Comme elle est par ailleurs constituée de termes positifs (puisque c'est le cas de (a_n)), elle est minorée, donc elle converge.

   (b) Il semble assez naturel de procéder à une récurrence. Pour $n = 0$, l'égalité stipule que $\left(-\frac{1}{2}\right)^0 c_0 = a_0$, ce qui est effectivement vrai. Supposons désormais l'égalité vérifiée au rang n, alors $\sum_{k=0}^{k=n+1}\left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n+1-k} = c_{n+1} + \sum_{k=0}^{k=n}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1} c_{n-k} = c_{n+1} - \frac{1}{2}a_n = a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{2}a_n = a_{n+1}$. La propriété est donc vérifiée au rang $n+1$, et la récurrence achevée. Ça calcul prouve que les suites $b \times c$ et a sont tout simplement identiques.

   (c) La suite (u_n) convergeant vers l, la suite ε a pour limite 0. De plus, elle est décroissante à partir du rang 1 tout comme (u_n), donc tous ses termes sont positifs (sinon elle ne pourrait pas converger vers 0). Elle vérifie donc les hypothèses faites sur la suite (v_n) dans la partie précédente, et on peut en conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = 0$.

   (d) Ce n'est pas si dur que ça en a l'air : $d_n = \sum_{k=0}^{k=n}\left(-\frac{1}{2}\right)^k (c_{n-k}-l) = \sum_{k=0}^{k=n}\left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n-k} - l\sum_{k=0}^{k=n}\left(-\frac{1}{2}\right)^k = a_n - l\frac{1-(-\frac{1}{2})^{n+1}}{1+\frac{1}{2}} = a_n + \frac{3}{2}l\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$. On peut également écrire que $a_n = d_n + \frac{3}{2}l\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$.

   La toute dernière question est un simple calcul de limite : on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = 0$, et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ (suite géométrique), donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{2}{3}l$.