Devoir Surveillé n°10

ECE3 Lycée Carnot

8 juin 2012

Problème

Soit n un entier naturel non nul. Une urne contient $2n$ boules indistinguables : deux boules numérotées 1, deux boules numérotées 2, ... , deux boules numérotées n. On effectue une suite d'expériences aléatoires se déroulant de la façon suivante : on tire simultanément deux boules dans l'urne ; si les deux boules tirées portent le même numéro, on les retire de l'urne, mais si elles ont des numéros distincts, on les remet dans l'urne avant d'effectuer l'expérience suivante.

On note X la variable aléatoire égale au rang de la première expérience pour laquelle on obtient des boules portant le même numéro, et Y la variable aléatoire égale au nombre d'expériences nécessaires avant que l'urne ne soit entièrement vide.

1. Déterminer les ensembles $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.
2. Montrer que la probabilité de l'événement A : « les deux boules tirées lors de la première expérience portent le même numéro » est donnée par $P(A) = \dfrac{1}{2n-1}$.
3. En déduire la loi (usuelle) suivie par X, et calculer son espérance et sa variance.
4. On suppose, dans cette question uniquement, que $n = 2$ (il y a donc quatre boules dans l'urne).
   (a) Trouver une relation (très) simple entre les variables X et Y.
   (b) En déduire la loi de Y, son espérance et sa variance.
5. On suppose désormais, dans cette question uniquement, que $n = 3$ (six boules dans l'urne).
   (a) Calculer $P(Y = 3)$, puis $P(Y = 4)$ (en expliquant bien vos calculs).
   (b) Montrer que, $\forall k \geqslant 3$, $P(Y = k+1) = \dfrac{4}{5}P(Y = k) + \dfrac{1}{5} \times \dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-2}$ (on pourra distinguer deux cas selon le résultat du premier tirage, et utiliser les résultats obtenus dans le cas où $n = 2$).
   (c) En déduire par récurrence que $\forall k \geqslant 3$, $P(Y = k) = \dfrac{1}{2}\left(\left(\dfrac{4}{5}\right)^{k-2} - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-2}\right)$.
   (d) Montrer que la variable $Y - 1$ admet une espérance, donner sa valeur et en déduire celle de $E(Y)$.
   (e) Montrer que la variable $Y(Y - 1)$ admet une espérance, calculer sa valeur, puis celle de $V(Y)$.
6. On revient désormais au cas général.
   (a) Déterminer la valeur de $P(Y = n)$.
   (b) Sans le justifier par un calcul rigoureux, expliquer pourquoi $E(Y) = (2n-1) + (2n-3) + \cdots + 3 + 1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}(2k-1)$.
   (c) Cacluler la somme précédente pour obtenir une formule simple pour $E(Y)$.