EM Lyon 1997 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

22 juin 2011

Exercice 1

1. (a) En effet, $M^2 = \begin{pmatrix} 1+1+1 & \frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\frac{a}{b} & \frac{a}{c}+\frac{a}{c}+\frac{a}{c} \\ \frac{b}{a}+\frac{b}{a}+\frac{b}{a} & 1+1+1 & \frac{b}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{c} \\ \frac{c}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{a} & \frac{c}{b}+\frac{c}{b}+\frac{c}{b} & 1+1+1 \end{pmatrix} = 3M$.

   (b) Supposons donc qu'un certain réel λ soit valeur propre de la matrice M. On peut donc trouver une matrice-colonne X non nulle telle que $MX = \lambda X$. Mais alors, en multipliant cette égalité à gauche par M, on obtient $M^2X = \lambda MX$, donc en exploitant la question précédente, $3MX = \lambda MX$, ce qui ne peut se produire que si $\lambda = 3$, ou $MX = 0$, cette deuxième hypothèse signifiant que X est vecteur propre pour la valeur propre 0. Conclusion : les deux seules valeurs propres possibles sont 0 et 3.

2. (a) Cherchons donc les éléments du noyau (c'est-à-dire les vecteurs propres associés à la valeur propre 0). soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, alors $MX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{a}{b}y + \frac{a}{c}z = 0 \\ \frac{b}{a}x + y + \frac{b}{c}z = 0 \\ \frac{c}{a}x + \frac{c}{b}y + z = 0 \end{cases}$

   Les trois équations de ce système sont en fait équivalentes (en multipliant la première par $\frac{b}{a}$ et $\frac{c}{a}$ respectivement, on obtient la deuxième et la troisième). En gardant la première équation, le système est donc équivalent à $x = -\frac{a}{b}y - \frac{a}{c}z$, ses solutions sont donc $\mathcal{S} = \left\{\left(-\frac{a}{b}y - \frac{a}{c}z; y; z\right)\right\} = Vect\left(\left(-\frac{a}{b}, 1, 0\right); \left(-\frac{a}{c}, 0, 1\right)\right) = Vect((a, -b, 0); (a, 0, -c))$. Ces deux vecteurs n'étant pas proportionnel, le noyau est donc de dimension 2. Procédons de même pour déterminer les vecteurs propres associés à la valeur propre 3, ce qui revient à résoudre le système $\begin{cases} x + \frac{a}{b}y + \frac{a}{c}z = 3x \\ \frac{b}{a}x + y + \frac{b}{c}z = 3y \\ \frac{c}{a}y + \frac{c}{b}y + z = 3z \end{cases}$, ce qui donne $\begin{cases} 2x = \frac{a}{b}y + \frac{a}{c}z \\ 2y = \frac{b}{a}x + \frac{b}{c}z \\ 2z = \frac{c}{a}x + \frac{c}{b}y \end{cases}$ La deuxième équation donne $\frac{a}{b}y = \frac{x}{2} + \frac{a}{2c}z$, et la troisième $\frac{a}{c}z = \frac{x}{2} + \frac{a}{2b}y$. En remplaçant dans la première équation, on obtient $2x = \frac{x}{2} + \frac{a}{2c}z + \frac{x}{2} + \frac{a}{2b}y = x + x$ (en exploitant à nouveau la première équation du système initial), équation toujours vérifiée. On peut donc se limiter aux deux dernières équations du système. En multipliant par exemple la dernière par $\frac{2b}{c}$, on a $2y = \frac{4b}{c}z - \frac{2b}{a}x$, d'où en injectant dans la deuxième équation $\frac{4b}{c}z - \frac{2b}{a}x = \frac{b}{a}x + \frac{b}{c}z$, soit $z = \frac{c}{a}x$. En découle $2y = \frac{4b}{a}x - \frac{2b}{a}x$, donc $y = \dfrac{b}{a}x$, et enfin $\mathcal{S} = vect\left(\left(1, \dfrac{b}{a}, \dfrac{c}{a}\right)\right) = Vect((a,b,c))$.

(b) On vient de voir que $((a,b,c);(a,-b,0);(a,0,-c))$ formait une base constituée de vecteurs propres de la matrice M, qui est donc diagonalisable.

3. (a) On calcule donc $PQ = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I$. La matrice P est donc inversible, d'inverse $P^{-1} = \dfrac{1}{3}Q$.

(b) Pas vraiment besoin de calcul pour vérifier, au vu des calculs effectués plus haut, la matrice P est matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres 3, 0 et 0. Le produit $P^{-1}MP$ est donc la matrice diagonale D, d'où $M = P(P^{-1}MP)P^{-1} = PDP^{-1}$.

4. Considérons donc une matrice $Y = \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ j & k & l \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on a alors $DY - YD = \begin{pmatrix} 3d & 3e & 3f \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3d & 0 & 0 \\ 3g & 0 & 0 \\ 3j & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3e & 3f \\ -3g & 0 & 0 \\ -3j & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Pour avoir $DY - YD = 3Y$, tous les coefficients de la matrice doivent donc être nuls à l'exception de e et f, qui peuvent être choisis comme on veut.

5. Si $MX - XM = 3X$, alors $PDP^{-1}X - XPDP^{-1} = 3X$, soit en multipliant par P^{-1} à gauche et P à droite, $DP^{-1}XP - P^{-1}XPD = 3P^{-1}XP$. En notant $Y = P^{-1}XP$, Y est donc solution de l'équation $DY - YD = 3Y$ que nous venons de résoudre. on en déduit que $X = PYP^{-1} = P\begin{pmatrix} 0 & e & f \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} e+f & \frac{a(f-2e)}{b} & \frac{a(e-2f)}{c} \\ \frac{b(e+f)}{a} & f-2e & \frac{b(e-2f)}{c} \\ \frac{c(e+f)}{a} & \frac{c(f-2e)}{b} & e-2f \end{pmatrix}$
$= Vect\left(\left(\begin{pmatrix} 1 & \frac{-2a}{b} & \frac{a}{c} \\ \frac{b}{a} & -2 & \frac{b}{c} \\ \frac{c}{a} & \frac{-2c}{b} & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{b} & \frac{-2a}{c} \\ \frac{b}{a} & 1 & \frac{-2b}{c} \\ \frac{c}{a} & \frac{c}{b} & -2 \end{pmatrix}\right)\right)$, qui est bien un espace de dimension car les deux matrices ne sont pas proportionnelles (il suffit de regarder leur diagonale).

Exercice 2

1. (a) Notons h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^{-x} - x$. La fonction h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ comme somme de deux fonction décroissantes ($x \mapsto e^{-x}$ étant elle-même composée d'une fonction croissante et d'une décroissante, donc décroissante), et $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = +\infty$ (pas de forme indéterminée, tout tend vers $+\infty$), et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = -\infty$ (pas de forme indéterminée non plus). La foncton h est donc bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et s'annule une fois exactement sur $\mathbb{R}$. cela revient à dire que l'équation $e^{-x} - x = 0$ admet une solution unique, ce qui est équivalent à ce qu'on nous demande de prouver.

(b) Calculons les dérivées partielles de la fonction f : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - 2y - e^{-x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2x + 4y$. Les points critiques de la fonction vérifient donc (deuxième équation) $y = \dfrac{1}{2}x$, puis en réinjectant dans la première équation $x - e^{-x} = 0$. Cela est assez clairement équivalent au système donné dans l'énoncé.

(c) Pour cela, nous allons avoir besoin des dérivées partielles secondes : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 + e^{-x}$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 4$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -2$. On a donc $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) \times \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) - \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\right)^2 =$

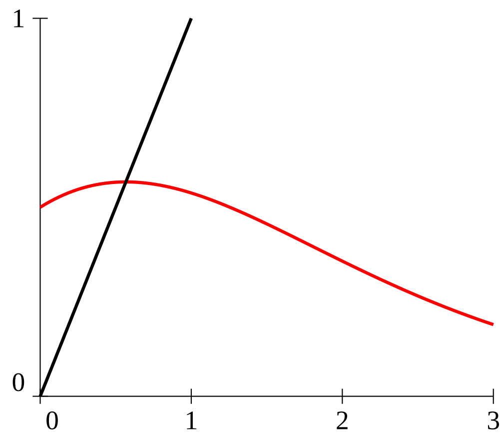
$4(2+e^{-x})-4>0$. Il y a donc un extremum, et comme les deux premières dérivées partielles secondes sont strictement positives en (x_0, y_0), il s'agit d'un minimum local.

2. (a) On constate que $g(x) = x \Leftrightarrow x(1+e^x) = 1+x \Leftrightarrow xe^x = 1 \leftrightarrow x = e^{-x}$. Ceci admet bien une solution égale à x_0 sur $\mathbb{R}_+$ (le réel x_0 est positif puisqu'il est égal par définition à e^{-x_0}). On a caractérisé plus haut x_0 comme unique point d'annulation de la fonction h. Or, $h\left(\frac{1}{2}\right) = e^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{\sqrt{4}} > 0$ car $\sqrt{e} < \sqrt{4}$; et $h(1) = \frac{1}{e} - 1 < 0$, donc par le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction h s'annule sur l'intervalle $\left]\frac{1}{2}; 1\right[$. Comme x_0 est son seul point d'annulation, $\frac{1}{2} < x_0 < 1$.

(b) La fonction g est évidemment $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$, et $g'(x) = \frac{1+e^x - e^x(1+x)}{(1+e^x)^2} = \frac{1-xe^x}{(1+e^x)^2}$. Au vu des calculs précédents, le numérateur s'annule une seule fois en x_0. De plus, $g(0) = \frac{1}{2}$; $g(x_0) = x_0$ (par définition), et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ car $g(x) \sim \frac{x}{e^x}$ en $+\infty$. D'où le tableau suivant :

x	0		x_0		$+\infty$
$g(x)$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	x_0	$\searrow$	0

Et la courbe correspondante :



(c) L'intervalle $[0; x_0]$ étant stable par g, on prouve par une récurrence immédiate que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0; x_0]$ (c'est vrai pour u_0 et si c'est vrai pour u_n, ce le sera aussi pour $u_{n+1} = g(u_n)$ par stabilité de l'intervalle par g). Or $g(x) - x = \frac{1+x-x-xe^x}{1+e^x} = \frac{1-xe^x}{1+e^x} \geqslant 0$, qui s'annule comme on l'a déjà vu uniquement en x_0. Cette expression est donc positive si $x \leqslant x_0$ (puisqu'elle est de signe constant et que par exemple $g(0) - 0 > 0$. On en déduit que $u_{n+1} - u_n = g(u_n) - u_n \geqslant 0$, puisque $u_n \leqslant x_0$, et la suite (u_n) est donc croissante. Elle est par ailleurs majorée par x_0, et converge donc vers un point fixe de la fonction g. Celle-ci n'en admettant qu'un seul, on a nécessairement $\lim_{n\to+\infty} u_n = x_0$.

(d) i. La fonction g' n'étant pas vraiment évidente à encadrer, la seule solution raisonnable est de dériver une deuxième fois : $g''(x) = \frac{(-xe^x - e^x)(1+e^x)^2 - 2e^x(1+e^x)(1-xe^x)}{(1+e^x)^4} = \frac{e^x(-x - xe^x - 1 - e^x - 2 + 2xe^x)}{(1+e^x)^3} = \frac{e^x(-3-x-(1-x)e^x}{(1+e^x)^3}$. Tout cela est négatif sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$, donc g' y est décroissante. Or, $g'(1) = \frac{1-e}{(1+e)^2} \simeq -0.124 > -\frac{1}{8}$ (si vous n'aviez pas de calculatrice, c'était tendu) ; et $g'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1-\frac{\sqrt{e}}{2}}{(1+\sqrt{e})^2} \simeq 0.025 < \frac{1}{8}$. L'encadrement sur la valeur absolue s'en déduit facilement.

ii. Comme $u_1 = g(u_0) = \frac{1}{2}$, et la suite (u_n) est croissante majorée par x_0, on a $\forall n \geqslant 1$, $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$. on a vu que x_0 appartenait à ce même intervalle, sur lequel $|g'|$ est majorée par $\frac{1}{8}$. On peut donc appliquer l'IAF à u_n et x_0 (qui est un point fixe de g) pour obtenir $|u_{n+1}-x_0| \leqslant \frac{1}{8}|u_n-x_0|$. Reste à faire une petite récurrence pour prouver l'inagilité demandée. Pour $n = 0$, $|u_0 - x_0| = x_0 < 1$, et le membre de droite vaut $\frac{1}{2}\times 8 = 4$, donc l'inégalité est sûrement vraie. Pour $n = 1$, on obtient $\left|\frac{1}{2} - x_0\right| \leqslant \frac{1}{2}$, ce qui est également vrai puisque $x_0 < 1$. Supposons désormais l'inégalité vérifiée pour un entier supérieur ou égal à 1, alors $|u_{n+1} - x_0| \leqslant \frac{1}{8}|u_n - x_0| \leqslant \frac{1}{8} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{8}\right)^{n-1} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{8}\right)^n$, ce qui prouve l'iénagilté au rang suivant et achève la récurrence.

iii. Pour avoir une valeur approchée à 10^{-8} près, il faut prendre n tel que $\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1} \leqslant 2\times 10^{-8}$, soit $(1-n)\log 8 \leqslant \log 2 - 8$, ou encore $n \leqslant 1 + \frac{8-\log 2}{\log 8}$, ce qui donne $n \geqslant 10$ (impossible de faire ces questions sans calculatrice, elle devait donc être autorisée aux concours en 97...). Reste à calculer une valeur approchée de u_{10} (toujours à la calculatric) pour obtenir $x_0 \simeq 0.56714329$.

iv. Calculons en utilisant le fait que $y_0 = \frac{x_0}{2}$: $f(x_0, y_0) = x_0^2 - x_0^2 + 2\frac{x_0^2}{4} + e^{-x_0} = \frac{x_0^2}{2} + x_0$. La valeur approchée précédente suffit à donner une valeur approchée à 10^{-7} près de $f(x_0, y_0)$, qui vaut environ 0.7279690.

Exercice 3

1. La variable Z est un exemple classique de décompte de succès en N tentatives, chaque succès ayant une probabilité $\frac{1}{6}$ de se produire. on a donc $Z \sim \mathcal{B}\left(N, \frac{1}{6}\right)$; $E(Z) = \frac{N}{6}$ et $V(Z) = \frac{5N}{36}$.
2. La loi conditionnelle de X sachant $Z = n$ est binomiale de paramètre (n, p), donc $P_{Z=n}(X = k) = 0$ si $k > n$, et $P_{Z=n}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ sinon.
3. Pour que la probabilité soit non nulle, il faut clairement avoir $n \leqslant N$, et $0 \leqslant k \leqslant n$, et dans ce cas, $P((Z = n) \cap (X = k)) = P(Z = n) \times P_{Z=n}(X = k) = \binom{N}{n}\left(\frac{1}{6}\right)^n\left(\frac{5}{6}\right)^{N-n}\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.
4. Utilisons la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(Z = n)$, pour n variant entre 0 et N : $P(X_0) = \sum_{n=0}^{N} P((Z = n) \cap (X = 0)) = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n}\left(\frac{1}{6}\right)^n\left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} q^n$
$= \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n}\left(\frac{q}{6}\right)^n\left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} = \left(\frac{q+5}{6}\right)^N$
5. Calculons ce que vaut chaque membre : $\binom{n}{k}\binom{N}{n} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{N!}{n!(N-n)!} = \frac{N!}{k!(n-k)!(N-n)!}$ et $\binom{N}{k}\binom{N-k}{n-k} = \frac{N!}{k!(N-k)!} \times \frac{(N-k)!}{(n-k)!(N-n)!} = \frac{N!}{k!(n-k)!(N-n)!}$. Les deux quanti-

tés sont bien égales, utilisons à nouveau la formule des probabilités totales : $P(X=k) = \sum_{n=k}^{N} \binom{N}{n} \left(\frac{1}{6}\right)^n \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum_{n=k}^{N} \binom{N}{k} \binom{N-k}{n-k} \left(\frac{1}{6}\right) n \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} p^k q^{n-k}$ $= \binom{N}{k} p^k \sum_{n=0}^{N-k} \left(\frac{1}{6}\right)^{n+k} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n-k} q^n = \binom{N}{k} \left(\frac{p}{6}\right) k \sum_{n=0}^{N-k} \left(\frac{q}{6}\right)^n \left(\frac{5}{6}\right)^{N-k-n} = \binom{N}{k} \left(\frac{p}{6}\right)^k \left(\frac{5+q}{6}\right)^{n-k}$.

6. Puisque $\frac{5+q}{6} = 1 - \frac{p}{6}$, on reconnait bien la loi binomiale demandée. En échangeant le rôle de p et q, on obtient de même $Y \sim \mathcal{B}\left(N, \frac{q}{6}\right)$.
7. Les deux variables ne sont bien évidemment pas indépendantes puisque par exemple $P(X = 0) \times P(Y=0) \neq 0$, alors que $P((X=0) \cap (Y=0)) = 0$ (on a effectué au moins un lancer puisque $N \neq 0$). La loi de couple peut être obtenue de la façon suivante : $P((X=k) \cap (Y = l)) = P((Z = k+l) \cap (X=k)) = \binom{N}{k+l} \binom{k+l}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^{k+l} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-k-l} p^k q^l$, et ceci pour tous les couples (k,l) tels que $k + l \leqslant N$.
8. Vous la ferez vous-même quand vous saurez ce qu'est une covariance ! Plus sérieusement, on sait que $V(Z) = V(X+Y) = \frac{5N}{36}$, et comme X et Y suivent des lois binômiales, $V(X) = \frac{Np(6-p)}{36}$ et $V(Y) = \frac{Nq(6-q)}{36}$. Or, il existe une jolie formule indiquand que $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X,Y)$, donc $Cov(X,Y) = \frac{1}{2}(V(Z) - V(X) - V(Y)) = \frac{5N - Np(6-p) - Nq(6-q)}{72} = \frac{N(p^2+q^2-1)}{72}$.