Feuille d'exercices n°15 : Variables aléatoires finies

ECE3 Lycée Carnot

9 février 2011

Exercice 1 (*)

On joue au jeu suivant : on parie sur un nombre compris entre 1 et 6, puis on lance trois dés et on gagne 3 euros si le nombre sort 3 fois, 2 euros s'il sort deux fois, 1 euro s'il sort une fois. On perd 1 euro s'il ne sort pas. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de la variable X représentant le gain du joueur.

Exercice 2 (* à **)

Dans une urne se trouvent deux boules bleues, deux jaunes et deux rouges. Pour chaque couleur, une des deux boules est numérotée 1 et l'autre 2. On tire successivement et sans remise toutes les boules de l'urne. Pour chacune des variables aléatoires suivantes, déterminer la loi et représenter la fonction de répartition, puis calculer l'espérance.

- X_1 est le rang du tirage de la première boule bleue.
- X_2 est le nombre de boules bleues restant après trois tirages.
- X_3 est le nombre de couleurs différentes restant après trois tirages.
- X_4 est le nombre de tirages nécessaires avant de n'avoir plus qu'une seule couleur dans l'urne.
- X_5 est la somme des numéros tirés en trois tirages.
- X_6 est le nombre de tirages nécessaires avant que cette somme atteigne 6.

Exercice 3 (**)

On lance simultanément quatre dés à 6 faces et on note X le plus grand chiffre obtenu. Déterminer la loi de X (on pourra commencer par calculer les probabilités $P(X \leq k)$), ainsi que son espérance et sa variance. Tracer la courbe de la fonction de répartition de X .

Exercice 4 (***)

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . On effectue des tirages sans remise dans cette urne jusqu'à ce que le numéro tiré ait un numéro supérieur ou égal au numéro tiré juste avant (ce qui suppose qu'on effectue au moins deux tirages ; par exemple une suite de tirage possible est 7, 4, 2, 5 et on s'arrête après ce quatrième tirage). On note X le nombre de tirages effectués.

1. Quels sont les valeurs prises par la variable X ?
2. Déterminer la loi de X puis son espérance (on pourra commencer par traiter les cas $n = 3$ et $n = 5$).
3. Quelle est la limite de $E(X)$ quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 5 (*)

Au bridge, on joue avec un jeu de 52 cartes et on attribue habituellement 4 points pour un As, 3 pour un Roi, 2 pour une Dame et 1 pour un Valet (et 0 pour tout autre carte). Un joueur pioche 13 cartes dans le jeu de 52, on note X le nombre de points contenu dans son jeu. Quelle est le nombre de points moyen d'une carte tirée au hasard dans le jeu? En déduire $E(X)$ (sans calculer sa loi).

Exercice 6 (***)

On lance n fois de suite deux pièces équilibrées et on cherche à déterminer la probabilité de l'évènement E_n : « Les deux pièces ont donné le même nombre de Piles lors des n lancers ».

1. Pour tout entier $k \leq n$, déterminer la probabilité que les deux pièces aient donné chacune k Piles en n lancers.
2. En déduire $P(E_n)$ sous forme d'une somme, puis explicitement.
3. On note désormais, pour tout entier $k \leq n$, B_k la variable aléatoire prenant pour valeur 1 si l'évènement E_k est réalisé et 0 sinon; et $X_n = B_1 + B_2 + \dots + B_n$.
Que représentent les variables B_k et la variable X_n ?
4. Exprimer l'espérance de X_n en fonction des réels $P(E_k)$.
5. Calculer $E(X_n)$ (la formule de Vandermonde pourrait servir).

Exercice 7 (d'après Ecricome 2008) (***)

Un joueur lance successivement n boules au hasard dans N cases numérotées de 1 à N (avec $N \geq 2$), chaque boule ayant probabilité $\frac{1}{N}$ de tomber dans chacune des N cases (et les tirages de boules étant indépendants les uns des autres). On cherche à étudier la variable aléatoire T_n égale au nombre de cases **non** vides après n lancers.

1. Déterminer en fonction de n et de N les valeurs prises par T_n .
2. Donner les lois de T_1 et de T_2 .
3. Déterminer, lorsque $n \geq 2$, les probabilités $P(T_n = 1)$, $P(T_n = 2)$ et $P(T_n = n)$ (en distinguant suivant que $n \leq N$ ou $n > N$).
4. À l'aide de la formule des probabilités totales, prouver que si $1 \leq k \leq n$, alors $P(T_{n+1} = k) = \frac{k}{N}P(T_n = k) + \frac{N - k + 1}{N}P(T_n = k - 1)$.
5. On considère dans cette question le polynôme $G_n(x) = \sum_{k=1}^{k=n} P(T_n = k)x^k$.
 - (a) Quelle est la valeur de $G_n(1)$?
 - (b) Exprimer $E(T_n)$ en fonction de $G'_n(1)$.
 - (c) En utilisant la relation démontrée à la question 4, montrer que $G_{n+1}(x) = \frac{1}{N}(x - x^2)G'_n(x) + xG_n(x)$.
 - (d) Dériver l'expression précédente et en déduire que $E(T_{n+1}) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)E(T_n) + 1$.
 - (e) En déduire la valeur de $E(T_n)$ et déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$.