Feuille d'exercices n°10 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

7 décembre 2010

Exercice 1 (**)

- Une petite transformation est nécessaire pour ramener cette série à un calcul connu, en l'occurence celui de la somme d'une série géométrique dérivée seconde :

$$\sum_{n=0}^{N} n^2x^n = \sum_{n=0}^{N} n(n-1)x^n + \sum_{n=0}^{N} nx^n = x^2\sum_{n=0}^{N} n(n-1)x^{n-2} + x\sum_{n=0}^{N} nx^{n-1}$$

La série est donc convergente si (et seulement si) $|x| < 1$, et sa somme vaut en appliquant les formules du cours

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2x^n = x^2 \times \frac{2}{(1-x)^3} + x \times \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{2x^2 + x(1-x)}{(1-x)^3} = \frac{x^2+x}{(1-x)^3} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{n-1}{3^n} = \sum_{n=0}^{N} \frac{n}{3^n} - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{N} n \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{3^n}$. La série est donc convergente, de somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-1}{3^n} = \frac{1}{3}\frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2} - \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \times \frac{9}{4} - \frac{3}{2} = \frac{3}{4} - \frac{3}{2} = -\frac{3}{4}$.

- $\displaystyle\sum_{n=2}^{N} \frac{n(n-1)x^n}{n!} = x^2\sum_{n=2}^{N} \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} = x^2\sum_{n=0}^{N-2} \frac{x^n}{n!}$, qui converge vers x^2e^x (note : on a commencé la somme de départ à $n = 2$ car les termes obtenus pour $n = 0$ et $n = 1$ seraient de toute façon nuls).

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{n^2 8^n}{n!} = \sum_{n=0}^{N} \frac{n(n-1)8^n}{n!} + \sum_{n=0}^{N} \frac{n8^n}{n!} = \sum_{n=2}^{N} \frac{8^n}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{N} \frac{8^n}{(n-1)!} = 8^2\sum_{n=2}^{N} \frac{8^{n-2}}{(n-2)!} + 8\sum_{n=1}^{N} \frac{8^{n-1}}{(n-1)!} = 8^2\sum_{n=0}^{N-2} \frac{8^n}{n!} + 8\sum_{n=0}^{N-1} \frac{8^n}{n!}$, qui converge vers $64e^8 + 8e^8 = 72e^8$.

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{4n^2+5n}{5^n} = 4\sum_{n=0}^{N} \frac{n^2}{5^n} + \sum_{n=0}^{N} \frac{n}{5^{n-1}}$ qui converge vers $4 \times \dfrac{\frac{1}{5} \times (\frac{1}{5}+1)}{(1-\frac{1}{5})^3} + \dfrac{1}{(1-\frac{1}{5})^2}$ (en utilisant le résultat du premier calcul de l'exercice pour la première somme) $= \dfrac{24}{25} \times \dfrac{5^3}{4^3} + \dfrac{5^2}{4^2} = \dfrac{30}{16} + \dfrac{25}{16} = \dfrac{55}{16}$.

- En constatant que $\forall n \geqslant 2$, $\dfrac{2n^2}{n^3-1} \geqslant \dfrac{2n^2}{n^3} = \dfrac{2}{n}$, on voit que notre série est une série à terme positifs dont le terme général est minoré par celui d'une série divergente, donc elle diverge.

- On utilise encore une fois le résultat du premier calcul de l'exercice : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n n^2}{3^n} = \frac{-\frac{1}{3} \times (-\frac{1}{3}+1)}{(1+\frac{1}{3})^3} = -\frac{2}{9} \times \frac{3^3}{4^3} = -\frac{6}{64} = -\frac{3}{32}$.

- Ici, on a une série exponentielle, c'est du cours ! $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{n!} = 4e^{-1} = \frac{4}{e}$.

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{n}{3^{2n+1}} = \frac{1}{3^3} \sum_{n=0}^{N} \frac{n}{3^{2n-2}} = \frac{1}{27} \sum_{n=0}^{N} \frac{n}{9^{n-1}}$ On reconnait une série géométrique dérivée, qui converge vers $\displaystyle\frac{1}{27} \frac{1}{(1-\frac{1}{9})^2} = \frac{1}{27} \times \frac{81}{64} = \frac{3}{64}$.

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{n+7}{2^n n!} = \sum_{n=1}^{N} \frac{n}{2^n n!} + \sum_{n=0}^{N} \frac{7}{2^n n!} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2^n n!} + \sum_{n=0}^{N} \frac{7}{2^n n!}$, qui converge vers $\displaystyle\frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}} + 7e^{\frac{1}{2}} = \frac{15}{2} e^{\frac{1}{2}}$.

- On reconnait une somme télescopique dans la somme partielle : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln k = \ln(n+1) - \ln 1$. Comme cette expression ne converge pas quand n tend vers $+\infty$, la série est divergente.

- Même principe avec un télescopage plus complexe : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}\right) = \sum_{k=1}^{n} 2\ln(k+1) - \ln k - \ln(k+2) = 2\sum_{k=2}^{n+1} \ln k - \sum_{k=1}^{n} \ln k - \sum_{k=3}^{n+2} \ln k = 2\ln 2 + 2\ln(n+1) - \ln 1 - \ln 2 - \ln(n+1) - \ln(n+2) = \ln 2 + \ln(n+1) - \ln(n+2) = \ln 2 + \ln \frac{n+1}{n+2}$. Cette expression converge quand n tend vers $+\infty$, donc la série est convergente, et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right) = \ln 2$.

Exercice 2 (**)

Le plus simple pour déterminer la nature de la série est de chercher à calculer sa somme. Suivant les conseils de l'énoncé, on calcule $\displaystyle\frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+1} = \frac{a(n+1)(n+2) + bn(n+2) + cn(n+1)}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a(n^2+3n+2) + b(n^2+2n) + c(n^2+n)}{n(n+1)(n+2)} = \frac{(a+b+c)n^2 + (3a+2b+c)n + 2a}{n(n+1)(n+2)}$. par identification des coefficients, on doit avoir $a+b+c=0$, $3a+2b+c=0$ et $2a=1$, soit $a=\dfrac{1}{2}$. Les deux autres équations donnent $b+c=-\dfrac{1}{2}$, soit $c=-b-\dfrac{1}{2}$, puis $2b+c=-\dfrac{3}{2}$, soit $b-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{3}{2}$, dont on déduit $b=-1$, puis $c=\dfrac{1}{2}$. On a donc finalement $\displaystyle\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)}$.

On peut faire un joli télescopage à partir de ceci : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}$. La somme partielle ayant une limite, la série converge, et on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$.

Exercice 3 (**)

Le principe est le même que dans l'exercice précédent : $\dfrac{1}{4n^2-1} = \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{a}{2n-1} + \dfrac{b}{2n+1}$, avec a et b vérifiant $a(2n+1)+b(2n-1) = 1$, soit $n(2a+2b)+a-b = 1$. On obtient facilement $a = -b$, puis $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = -\dfrac{1}{2}$, d'où $\dfrac{1}{4n^2-1} = \dfrac{1}{2(2n-1)} - \dfrac{1}{2(2n+1)}$. On a donc, en notant $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{2k+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)}$ (c'est une somme télescopique simple). La somme partielle converge, donc la série est convergente, et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$.

Exercice 4 (**)

1. On montre par une récurrence facile que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. En effet, c'est vrai pour u_0, et si on le suppose vrai pour u_n, comme $e^{-u_n} > 0$, on aura bien $u_{n+1} = e^{-u_n}u_n > 0$. De plus, comme $u_n > 0$, on a $e^{-u_n} < 1$, et donc $e^{-u_n}u_n < u_n$. Autrement dit, la suite (u_n) est décroissante. Comme elle est minorée par 0, elle converge vers une certaine limite l. On en déduit que $e^{-u_n}u_n$ tend vers le^{-l}, mais aussi vers l puisque cette expression est égale à u_{n+1}. On en déduit que $l = le^{-l}$, ce qui se produit si $l = 0$ ou si $e^{-l} = 1$, ce qui ne laisse que la possibilité $l = 0$. La suite (u_n) converge donc vers 0.
2. On remarque que $v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln(e^{-u_n}u_n) = -u_n + \ln u_n = v_n - u_n$, ce qu'on peut aussi écrire $u_n = v_n - v_{n+1}$. On en déduit que $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n}(v_k - v_{k+1}) = v_0 - v_{n+1}$ (il y a télescopage).
3. Comme u_n tend vers 0, la suite v_n diverge vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$, et la série (S_n) diverge donc vers $+\infty$.

Exercice 5 (*)

On a $S_{2n} - S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=2n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{k=2n}\frac{1}{k}$. Chacun des n termes de cette dernière somme étant plus grand que $\dfrac{1}{2n}$, la somme est plus grande que $n \times \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{2}$. Or, si la série harmonique convergait vers une certaine somme S, on devrait avoir $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \lim_{n\to+\infty} S_n = S$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_{2n} - S_n = 0$. Ce n'est manifestement pas le cas, donc la série harmonique ne converge pas (un petit raisonnement par l'absurde).

Exercice 6 (***)

1. On peut commencer par constater assez aisément que la suite (u_n) est décroissante puisque $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leqslant 0$. Cela donne bien envie de tenter de la minorer, par exemple par 0. Prouvons via une petite récurrence que tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $[0;1]$. C'est vrai pour u_0 par hypothèse. Supposons donc $0 \leqslant u_n \leqslant 1$, on a alors également $0 \leqslant 1 - u_n \leqslant 1$, donc $0 \leqslant u_n(1-u_n) \leqslant 1$. Or, $u_n(1-u_n) = u_n - u_n^2 = u_{n+1}$. Cette constatation achève la récurrence.

   La suite (u_n) étant décroissante minorée, elle converge. Comme $u_{n+1} = u_n - u_n^2$, on en déduit en prenant la limite de chaque côté que $l = l - l^2$, soit $-l^2 = 0$, ce qui n'est possible que si

$l = 0$. On peut en déduire que la suite (u_n) converge vers 0.

2. En revenant à la relation de récurrence, on constate que $u_n^2 = u_n - u_{n+1}$, d'où $\sum_{k=0}^{k=n} u_k^2 = \sum_{k=0}^{k=n} u_k - u_{k+1} = u_0 - u_{n+1}$ (par télescopage). D'après la question précédente, $\lim_{n\to+\infty} u_0 - u_{n+1} = u_0$, donc la série de terme général u_n^2 converge vers u_0.
3. La somme partielle va également être télescopique : $\sum_{k=0}^{k=n} \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) = \sum_{k=0}^{k=n} \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_0)$. Or, toujours en utilisant notre connaissance de la limite de (u_n), on a $\lim_{n\to+\infty} \ln(u_{n+1}) = -\infty$, ce qui signifie que la série considérére diverge.
4. En reprenant la relation de récurrence définissant la suite, on constate que $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(\frac{u_n - u_n^2}{u_n}\right) = \ln(1 - u_n) \sim -u_n$ puisque u_n est une suite qui converge vers 0. Deux séries de terme général équivalent ayant même nature (oui, je sais, dans le cours on a mis des séries à termes positifs, et celles-là sont à terme négatif, mais il suffit d'appliquer le théorème à leurs opposés pour que ça marche ; ce qui est important c'est que les séries soient de signe constant), $\sum u_n$ diverge.

Exercice 7 (*)

- $\frac{1}{k^2 - k} \sim \frac{1}{k^2}$, terme général d'une série convergente, donc $\sum \frac{1}{k^2 - k}$ converge.
- $\frac{1}{e^k + e^{-k}} \leqslant \frac{1}{e^k}$, terme général d'une série géométrique convergente, donc la série à termes positifs $\sum \frac{1}{e^k + e^{-k}}$ converge.
- $\frac{1}{k^3 + 2^k} \sim \frac{1}{k^3}$, terme général d'une série de Riemann convergente, donc la série à termes positifs $\sum \frac{1}{k^3 + 2^k}$ converge.
- $\ln \frac{n^2 + n^4}{2n^4}$ tend vers $\ln \frac{1}{2}$ quand n tend vers $+\infty$, donc la série diverge.
- $\sqrt{\frac{n+2}{n^3 - 5n + 1}} \sim \sqrt{\frac{1}{n^2}} \sim \frac{1}{n}$, terme général d'une série divergente, donc la série diverge.
- $\frac{\ln n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \frac{\ln n}{2^n}$. La deuxième fraction tendant rapidement vers 0 (par croissance comparée), on aura certainement (à partir d'un certain rang) $\frac{\ln n}{3^n} \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$, terme général d'une série géométrique convergeante, donc la série converge.

Exercice 8 (**)

La série de terme général $\frac{1}{(2k+1)^2}$ converge car son terme général est équivalent à $\frac{1}{4k^2}$. De même pour la série de terme général $\frac{1}{(2k+2)^2}$. On peut donc écrire que la série de terme général $\frac{1}{(2k+2)^2} + \frac{1}{(2k+1)^2}$ converge, et que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \frac{1}{(2k+2)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+2)^2}$. Or, la somme de gauche n'est autre que la somme des inverses des carrés de tous les entiers (on a juste séparé entiers pairs et impairs) qui vaut $\dfrac{\pi^2}{6}$. Quant à la deuxième somme à droite, elle vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{4(k+1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{4} \times \frac{\pi^2}{6}$. Conclusion : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} = \frac{3}{4}\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}$.