

# Feuilles d'exercices n°3 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

25 septembre 2010

## Exercice 1 (\*)

1.  $S_1 = \sum_{i=2}^{i=15} 3^i$
2.  $S_2 = \sum_{i=1}^{i=10} \frac{i}{2^i}$
3.  $S_3 = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{a^k}{k}$
4.  $S_4 = \sum_{i=1}^{i=25} -2i(-1)^i$

## Exercice 2 (\*\* à \*\*\*)

1.  $\sum_{k=1}^{k=n} (2k+1) = 2 \sum_{k=1}^{k=n} k + \sum_{k=1}^{k=n} 1 = n(n+1) + n = n(n+2)$
2.  $\sum_{k=945}^{k=2009} 3 = 3 \times 1\,065 = 3\,195$
3.  $\sum_{k=1}^{k=n} (6k^2 + 4k + 1) = 6 \sum_{k=1}^{k=n} k^2 + 4 \sum_{k=1}^{k=n} k + \sum_{k=1}^{k=n} 1 = n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + n$   
 $= n((n+1)(2n+1) + 2(n+1) + 1) = n(2n^2 + 5n + 4)$
4.  $\sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k = \sum_{k=0}^{k=n-1} (-1)^{k+1} = -\frac{1 - (-1)^n}{1 - (-1)} = \frac{(-1)^n - 1}{2}$
5.  $\sum_{k=1}^{k=n} k(2k^2 - 1) = 2 \sum_{k=1}^{k=n} k^3 - \sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n^2(n+1)^2}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n(n+1) - 1)}{2}$   
 $= \frac{n(n+1)(n^2 + n - 1)}{2}$
6.  $\sum_{k=1}^{k=18} \frac{1}{3^k} = \sum_{k=1}^{k=18} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{k=18} \left(\frac{1}{3}\right)^k - 1 = \frac{1 - \frac{1}{3^{19}}}{1 - \frac{1}{3}} - 1 = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{19}}\right) - 1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{18}}\right)$
7.  $\sum_{k=1}^{k=n} 3^{2k} = \sum_{k=1}^{k=n} 9^k = \sum_{k=0}^{k=n} 9^k - 1 = \frac{1 - 9^{n+1}}{1 - 9} - 1 = \frac{9^{n+1} - 1}{8} - 1 = \frac{9^{n+1} - 9}{8}$
8.  $\sum_{k=1}^{k=n} 2^k + k^2 + 2 = \sum_{k=1}^{k=n} 2^k + \sum_{k=1}^{k=n} k^2 + \sum_{k=1}^{k=n} 2 = \sum_{k=0}^{k=n} 2^k - 1 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2n$   
 $= 2^{n+1} - 2 + 2n + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 2(2^n + n - 1) + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
9.  $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{2^k}{3^{k+1}} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{2}{9} \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{2}{9} \sum_{k=0}^{k=n-1} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{2}{9} \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$

### Exercice 3 (\*\*)

Pour déterminer les réels, le mieux est de partir du résultat, tout mettre au même dénominateur puis identifier :  $\frac{a}{k-1} + \frac{b}{k} + \frac{c}{k+1} = \frac{ak(k+1) + b(k-1)(k+1) + ck(k+1)}{(k-1)k(k+1)} = \frac{ak^2 + ak + bk^2 - b + ck^2 + ck}{k(k^2-1)}$ . En identifiant, on obtient les conditions  $a + b + c = 0$ ;  $a + c = 1$  et  $-b = -5$ , soit  $b = 5$  puis  $a = -2$  et  $c = -3$  en résolvant le petit système.

$$\begin{aligned} \text{On en déduit que } \sum_{k=2}^{k=n} \frac{k-5}{k(k^2-1)} &= \sum_{k=2}^{k=n} \frac{-2}{k-1} + \frac{5}{k} + \frac{-3}{k+1} = -2 \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k-1} + 5 \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k} - 3 \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k+1} = \\ &-2 \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{1}{k} + 5 \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k} - 3 \sum_{k=3}^{k=n+1} \frac{1}{k} = -2 \sum_{k=3}^{k=n-1} \frac{1}{k} - 2 - 1 + 5 \sum_{k=3}^{k=n-1} \frac{1}{k} + \frac{5}{2} + \frac{5}{n} - 3 \sum_{k=3}^{k=n-1} \frac{1}{k} - \frac{3}{n} - \frac{3}{n+1} = \\ &-\frac{1}{2} + \frac{2}{n} - \frac{3}{n+1}. \end{aligned}$$

### Exercice 4 (\*\*)

1. C'est une somme télescopique :  $\sum_{k=1}^{k=n} (k+1)^3 - \sum_{k=1}^{k=n} k^3 = \sum_{k=2}^{k=n+1} k^3 - \sum_{k=1}^{k=n} k^3 = (n+1)^3 - 1$ .
2. Comme  $(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$ , on a  $\sum_{k=1}^{k=n} (k+1)^3 = \sum_{k=1}^{k=n} k^3 + 3 \sum_{k=1}^{k=n} k^2 + 3 \sum_{k=1}^{k=n} k + \sum_{k=1}^{k=n} 1$ .
3. Reprenons le calcul de la question précédente : on a en écrivant les choses légèrement différemment  $\sum_{k=1}^{k=n} (k+1)^3 - \sum_{k=1}^{k=n} k^3 = 3 \sum_{k=1}^{k=n} k^2 + 3 \sum_{k=1}^{k=n} k + \sum_{k=1}^{k=n} 1$ , soit en utilisant le résultat de la première question  $3 \sum_{k=1}^{k=n} k^2 + 3 \sum_{k=1}^{k=n} k + \sum_{k=1}^{k=n} 1 = (n+1)^3 - 1$ , ou encore  $3 \sum_{k=1}^{k=n} k^2 + 3 \frac{n(n+1)}{2} + n = (n+1)^3 - 1 = n^3 + 3n^2 + 3n$ .

$$\begin{aligned} \text{Faisons passer tout ce qu'on peut à droite : } 3 \sum_{k=1}^{k=n} k^2 &= n^3 + 3n^2 + 3n - \frac{3}{2}n^2 - \frac{3}{2}n - n = n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \\ \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{2} &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}. \text{ On retrouve donc la formule } \sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

### Exercice 5 (\*\*\*)

- $\sum_{1 \leq i, j \leq n} ij = \sum_{i=1}^{i=n} i \sum_{j=1}^{j=n} j = \sum_{i=1}^{i=n} i \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
- $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij = \sum_{j=1}^{j=n} j \sum_{i=1}^{i=j} i = \sum_{j=1}^{j=n} j \frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{j=n} j^3 + j^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{8} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$  (on peut factoriser si on le souhaite le résultat obtenu...).
- $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{j=n} \frac{1}{j} \sum_{i=1}^{i=j} i = \sum_{j=1}^{j=n} \frac{1}{j} \times \frac{j(j+1)}{2} = \sum_{j=1}^{j=n} \frac{j+1}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{j=n} j + 1 = \frac{1}{2} \left( \frac{n(n+1)}{2} + n \right) = \frac{n(n+3)}{2}$ .
- $\sum_{1 \leq i, j \leq n} |i-j| = \sum_{j=1}^{j=n} \left( \sum_{i=1}^{i=j} (j-i) + \sum_{i=j+1}^{i=n} (i-j) \right) = \sum_{j=1}^{j=n} \left( j^2 - \frac{j(j+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} - \frac{j(j+1)}{2} - (n-j)j \right) = \sum_{j=1}^{j=n} \left( j^2 - (n+1)j + \frac{n(n+1)}{2} \right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)^2}{2} + \frac{n^2(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \left( \frac{2n+1}{3} - (n+1) + n \right) = \frac{n(n+1)(2n-2)}{6} = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$
- $\sum_{1 \leq i, j \leq n} i2^j = \sum_{i=1}^{i=n} i \sum_{j=1}^{j=n} 2^j = \frac{n(n+1)}{2} \times \left( \sum_{j=0}^{j=n} 2^j - 1 \right) = \frac{n(n+1)}{2} \times (2^{n+1} - 1 - 1) = n(n+1)(2^n - 1)$

## Exercice 6 (\*\*)

$$\begin{aligned}
 1. \quad \prod_{k=2}^{k=n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) &= \prod_{k=2}^{k=n} \frac{k-1}{k} = \frac{\prod_{k=2}^{k=n} k-1}{\prod_{k=2}^{k=n} k} = \frac{\prod_{k=1}^{k=n-1} k}{\prod_{k=2}^{k=n} k} = \frac{1}{n} \\
 2. \quad \prod_{k=2}^{k=n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) &= \prod_{k=2}^{k=n} \frac{k^2-1}{k^2} = \prod_{k=2}^{k=n} \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{\prod_{k=2}^{k=n} (k-1) \prod_{k=2}^{k=n} (k+1)}{\left(\prod_{k=2}^{k=n} k\right)^2} = \frac{\prod_{k=1}^{k=n-1} k}{\prod_{k=2}^{k=n} k} \times \frac{\prod_{k=3}^{k=n+1} k}{\prod_{k=2}^{k=n} k} = \\
 &= \frac{1}{n} \times \frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n} \\
 3. \quad \prod_{k=1}^{k=n} (6k-3) &= \prod_{k=1}^{k=n} 3(2k-1) = 3^n \prod_{k=1}^{k=n} (2k-1) = 3^n \frac{\prod_{k=1}^{k=2n} k}{\prod_{k=1}^{k=n} 2k} = 3^n \frac{(2n)!}{2^n \times n!} = \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{(2n)!}{n!}
 \end{aligned}$$

## Exercice 7 (\*\*\*)

1. Prouvons par récurrence la propriété  $P_n : 2^n \leq n!$ . Puisque l'énoncé nous indique que  $n$  doit être plus grand que 4, initialisons pour  $n = 4$  : on a alors  $2^4 = 16$  et  $4! = 24$ , donc l'inégalité est vraie. Supposons désormais  $P_n$  vérifiée, c'est-à-dire que  $2^n \leq n!$ . On peut alors en déduire que  $2^{n+1} \leq 2n! \leq (n+1)n! = (n+1)!$  puisque 2 est certainement inférieur à  $n+1$  quand  $n$  est plus grand que 4. La propriété  $P_{n+1}$  est donc vraie, et par principe de récurrence,  $P_n$  est vraie pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 4.
2. Prouvons par récurrence la propriété  $P_n : \sum_{k=1}^{k=n} k \times k! = (n+1)! - 1$ . Pour  $n = 1$ ,  $\sum_{k=1}^{k=1} k \times k! = 1 \times 1! = 1$  et  $2! - 1 = 2 - 1 = 1$ , donc  $P_1$  est vraie. Supposons désormais  $P_n$  vraie pour un certain entier  $n$ , on a alors  $\sum_{k=1}^{k=n+1} k \times k! = \sum_{k=1}^{k=n} k \times k! + (n+1)(n+1)! = (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! = (n+1)!(1+n+1) - 1 = (n+2)! - 1$ , donc  $P_{n+1}$  est vérifiée et par principe de récurrence,  $P_n$  est vraie pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 1.
3. Prouvons par récurrence la propriété  $P_n : \sum_{k=1}^{k=2^n} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{n}{2}$ . Pour  $n = 0$ , le membre de gauche se réduit à 1, et celui de droite vaut également 1, donc l'inégalité est vraie. Supposons désormais  $P_n$  vraie, on a alors  $\sum_{k=1}^{k=2^{n+1}} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{k=2^n} \frac{1}{k} + \sum_{k=2^n+1}^{k=2^{n+1}} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{n}{2} + \sum_{k=2^n+1}^{k=2^{n+1}} \frac{1}{k}$  par hypothèse de récurrence. Reste à minorer la deuxième somme : elle est constituée de  $2^n$  termes dont le plus petit vaut  $\frac{1}{2^{n+1}}$ , elle est donc supérieure ou égale à  $2^n \times \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$ , donc la somme totale est plus grande que  $1 + \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n+1}{2}$ , ce qui prouve  $P_{n+1}$ . Par principe de récurrence,  $P_n$  est donc vraie pour tout entier  $n$ .

## Exercice 8 (\*\*)

On calcule  $u_1 = 1$ ,  $u_2 = 3$ ,  $u_3 = 7$ ,  $u_4 = 15$ , et ça devrait suffire à conjecturer que  $u_n = 2^n - 1$ . Prouvons donc par récurrence la propriété  $P_n : u_n = 2^n - 1$ . C'est vrai pour  $n = 0$ , et si on le suppose vérifié au rang  $n$ , alors  $u_{n+1} = 2u_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$ , ce qui prouve  $P_{n+1}$ . Par principe de récurrence, on a,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = 2^n - 1$ .

## Exercice 9 (\*\*)

Prouvons donc par récurrence la propriété  $P_n : u_n = 2n + \frac{1}{3^n}$ . Pour  $n = 0$ ,  $2 \times 0 + \frac{1}{3^0} = 1 = u_0$ , donc  $P_0$  est vraie. Supposons désormais  $P_n$  vérifiée, on a alors  $u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 4n + 6) = \frac{1}{3}(2n + \frac{1}{3^n} + 4n + 6) = \frac{1}{3^{n+1}} + 2n + 2 = \frac{1}{3^{n+1}} + 2(n+1)$ , ce qui prouve  $P_{n+1}$ , et par principe de récurrence,  $P_n$  est vraie pour tout entier  $n$ .

## Exercice 10 (\*\*\*)

On calcule  $u_3 = 3 \times 2 - 3 \times 0 + 0 = 6$ ,  $u_4 = 3 \times 6 - 3 \times 2 + 0 = 12$ ,  $u_5 = 3 \times 12 - 3 \times 6 + 2 = 20$ ,  $u_6 = 3 \times 20 - 3 \times 12 + 6 = 30$ , et même avec un peu de motivation  $u_7 = 3 \times 30 - 3 \times 20 + 12 = 42$ . Si on est suffisamment réveillés, on arrive à conjecturer que  $u_n = n(n-1)$  (chaque terme est le produit de l'indice par l'entier le précédent). Prouvons donc par récurrence **triple** la propriété  $P_n : u_n = n(n-1)$ . Il faut initialiser en vérifiant  $P_0$ ,  $P_1$  et  $P_2$ , ce qui ne pose aucun problème puisqu'on a de quoi vérifier jusqu'à  $P_7$  grâce aux calculs précédents. Supposons désormais  $P_n$ ,  $P_{n+1}$  et  $P_{n+2}$  vérifiées, on a alors  $u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n = 3(n+2)(n+1) - 3(n+1)n + (n-1)n = 3(n^2 + 3n + 2) - 3(n^2 + n) + n^2 - n = 3n^2 + 9n + 6 - 3n^2 - 3n + n^2 - n = n^2 + 5n + 6 = (n+3)(n+2)$ , ce qui prouve  $P_{n+3}$ , et par principe de récurrence triple,  $P_n$  est vraie pour tout entier  $n$ .

## Exercice 11 (\*\*\*)

- $S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + 2n + 1$ . Cette somme est constituée de  $n + 1$  termes.
- $$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 = 8 \sum_{k=0}^{k=n} k^3 + 12 \sum_{k=0}^{k=n} k^2 + 6 \sum_{k=0}^{k=n} k + \sum_{k=0}^{k=n} 1 = 2n^2(n+1)^2 + 2n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1) + n + 1 = (n+1)(2n^2(n+1) + 2n(2n+1) + 3n+1) = (n+1)(2n^3 + 6n^2 + 5n + 1).$$
- $$U_n = \sum_{k=0}^{k=2n+1} k^3 = \sum_{\substack{k \leq 2n \\ k \text{ pair}}} k^3 + \sum_{\substack{k \leq 2n+1 \\ k \text{ impair}}} k^3 = \sum_{k=0}^{k=n} (2k)^3 + \sum_{k=0}^{k=n} (2k+1)^3 = T_n + S_n.$$
- On a  $U_n = \sum_{k=0}^{k=n} k^3 = \frac{(2n+1)^2(2n+2)^2}{4} = (n+1)^2(2n+1)^2$  en utilisant la formule du cours pour la somme des cubes. De même,  $T_n = \sum_{k=0}^{k=n} (2k)^3 = \sum_{k=0}^{k=n} 8k^3 = 8 \times \frac{n^2(n+1)^2}{4} = 2n^2(n+1)^2$ .
- Comme  $S_n = U_n - T_n$ , on a donc  $S_n = (n+1)^2(2n+1)^2 - 2n^2(n+1)^2 = (n+1)^2((2n+1)^2 - 2n^2) = (n+1)^2(2n^2 + 4n + 1)$ . Notons que cette formule est bien la même que la précédente puisque  $(n+1)(2n^2 + 4n + 1) = 2n^3 + 2n^2 + 4n^2 + 4n + n + 1 = 2n^3 + 6n^2 + 5n + 1$ .
- Prouvons donc par récurrence la propriété  $P_n : \sum_{k=0}^{k=n} (2k+1)^3 = (n+1)^2(2n^2 + 4n + 1)$ . Pour  $n = 0$ , on obtient  $P_0 : \sum_{k=0}^{k=0} (2k+1)^3 = 1^2 \times 1 = 1$ , ce qui est vrai. Supposons désormais  $P_n$  vérifiée, on a alors 
$$\sum_{k=0}^{k=n+1} (2k+1)^3 = \sum_{k=0}^{k=n} (2k+1)^3 + (2(n+1)+1)^3 = (n+1)^2(2n^2 + 4n + 1) + (2n+3)^3 = (n^2 + 2n + 1)(2n^2 + 4n + 1) + 8n^3 + 36n^2 + 54n + 27 = 2n^4 + 4n^3 + n^2 + 4n^3 + 8n^2 + 2n + 2n^2 + 4n + 1 + 8n^3 + 36n^2 + 54n + 27 = 2n^4 + 16n^3 + 47n^2 + 60n + 28.$$
 Ne reste plus qu'à vérifier que ça correspond à la formule annoncée : on devrait obtenir  $(n+2)^2(2(n+1)^2 + 4(n+1) + 1) = (n^2 + 4n + 4)(2n^2 + 8n + 7) = 2n^4 + 8n^3 + 7n^2 + 8n^3 + 32n^2 + 28n + 8n^2 + 32n + 28 = 2n^4 + 16n^3 + 47n^2 + 60n + 28$ . Ça marche, donc  $P_{n+1}$  est vérifiée, et par principe de récurrence, toutes les propriétés  $P_n$  sont vraies.