

Feuille d'exercices n°23 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

25 mai 2011

Exercice 1 (*)

On obtient plus ou moins péniblement :

- $P + Q = 2X^3 - X^2 + 8X - 1$
- $PQ = -2X^5 + 6X^4 - 5X^3 + 16X^2 - 3X$
- $P^2 = (2X^3 + 5X - 1)^2 = 4X^6 + 25X^2 + 1 + 20X^4 - 4X^3 - 10X = 4X^6 + 20X^4 - 4X^3 + 25X^2 - 10X + 1$
- $P(X^2) = 2(X^2)^3 + 5(X^2) - 1 = 2X^6 + 5X^2 - 1$
- $P \circ Q = 2(-X^2 + 3X)^3 + 5(-X^2 + 3X) - 1 = -2X^6 + 18X^5 - 54X^4 + 54X^3 - 5X^2 + 15X - 1$
- $Q \circ P = -(2X^3 + 5X - 1)^2 + 3(2X^3 + 5X - 1) = -(4X^6 + 20X^4 - 4X^3 + 25X^2 - 10X + 1) + 6X^3 + 15X - 3 = -4X^6 - 20X^4 + 10X^3 - 25X^2 + 25X - 4$
- $3P^3Q - Q \circ P^2 = 3(2X^3 + 5X - 1)^3(-X^2 + 3X) + (4X^6 + 20X^4 - 4X^3 + 25X^2 - 10X + 1)^2 - 3(4X^6 + 20X^4 - 4X^3 + 25X^2 - 10X + 1)$
 $= (8X^9 + 125X^3 - 1 + 60X^7 + 150X^5 - 12X^6 + 6X^3 - 75X^2 + 15X - 60X^4)(-3X^2 + 9X) +$
 $(16X^{12} + 400X^8 + 16X^6 + 625X^4 + 100X^2 + 1 + 160X^{10} - 32X^9 + 200X^8 - 80X^7 + 8X^6 -$
 $160X^7 + 1\,000X^6 - 400X^5 + 40X^4 - 200X^5 + 80X^4 - 8X^3 - 500X^3 + 50X^2 - 20X) - 12X^6 -$
 $60X^4 + 12X^3 - 75X^2 + 30X - 3$
 $= (8X^9 + 60X^7 - 12X^6 + 150X^5 - 60X^4 + 131X^3 - 75X^2 + 15X - 1)(-3X^2 + 9X) + 16X^{12} +$
 $160X^{10} - 32X^9 + 600X^8 - 240X^7 + 1\,012X^6 - 600X^5 + 685X^4 - 496X^3 + 75X^2 + 10X - 2$
 $= (-24X^{11} + 72X^{10} - 180X^9 + 540X^8 + 36X^8 - 108X^7 - 450X^7 + 1\,350X^6 + 180X^6 - 540X^5 -$
 $393X^5 + 1\,179X^4 + 225X^4 - 675X^3 - 45X^3 + 135X^2 + 3X^2 - 9X) + 16X^{12} + 160X^{10} - 32X^9 +$
 $600X^8 - 240X^7 + 1\,012X^6 - 600X^5 + 685X^4 - 496X^3 + 75X^2 + 10X - 2$
 $= 16X^{12} - 24X^{11} + 232X^{10} - 212X^9 + 1\,176X^8 - 798X^7 + 2\,542X^6 - 1\,533X^5 + 2\,089X^4 -$
 $1\,216X^3 + 213X^2 + X - 2$

Calcul garanti fait main, et tout de même (j'avoue) vérifié ensuite à la machine, il y avait une toute petite erreur...

Exercice 2 (*)

Si on développe le polynôme P à l'aide de la formule du binôme (mais si, un peu de courage), on obtient $P(X) = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} 2^{n-k} X^k - \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} 3^{n-k} X^k = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} (2^{n-k} - 3^{n-k}) X^k$. Or, $2^{n-k} - 3^{n-k}$ vaut 0 lorsque $k = n$ (mais ne s'annule jamais pour les autres valeurs de k). Le polynôme P est donc en fait de degré $n - 1$, et de coefficient dominant $\binom{n}{n-1} (2^{n-1} - 3^{n-1}) = n(2^{n-1} - 3^{n-1})$.

Le polynôme Q est un produit de $n + 1$ polynômes de degré 1, il est donc de degré $n + 1$. Son coefficient dominant vaut 2^{n+1} (on l'obtient simplement en faisant le produit des coefficients dominants de tous les facteurs).

Le polynôme R est un produit de $n + 1$ polynômes, dont l'un est un polynôme constant (pour $k = 0$) et tous les autres sont de degré 1 ; il est donc de degré n . Son coefficient dominant vaut 1.

Exercice 3 (* à ***)

1. Le polynôme P est donc factorisable par $X - 1$ et par $X - 2$, c'est-à-dire que $P = (X - 1)(X - 2)Q$, avec $Q \in \mathbb{R}[X]$.
2. Il suffit de constater que les deux conditions données reviennent à dire que $P(X) - X$ vérifie les conditions de la question 1. Autrement dit, on a $P(X) - X = (X - 1)(X - 2)Q(X)$, soit $P(X) = X + (X - 1)(X - 2)Q(X)$, avec toujours $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$.
3. Si $P(X) = \sum_{k=0}^{k=n} a_k X^k$, on aura $P'(X) = \sum_{k=1}^{k=n} k a_k X^{k-1}$, donc $XP'(X) = \sum_{k=1}^{k=n} k a_k X^k$. Par identification, on aura $XP' = P$ si $a_0 = 0$ et, $\forall k \in \{1; \dots; n\}$, $a_k = k a_k$. Autrement dit, a_1 peut valoir n'importe quoi, mais tous les autres coefficients doivent être nuls. Cela revient à dire que P est de la forme $P = aX$, avec $a \in \mathbb{R}$.
4. Constatons pour commencer que le polynôme nul est solution de l'équation proposée. Intéressons-nous ensuite au degré d'un polynôme P vérifiant la condition demandée : si le terme dominant de P est de la forme $a_n X^n$ (avec $a_n \neq 0$), alors celui de P'' sera $n(n-1)a_n X^{n-2}$, donc celui de $(X^2 + 1)P''$ sera égal à $n(n-1)a_n X^n$ (tous les autres termes étant de degré inférieur). L'égalité demandée implique donc en particulier que $n(n-1)a_n X^n = 6a_n X^n$, c'est-à-dire que $n(n-1) = 6$, ou encore $n^2 - n - 6 = 0$. Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 1 + 24 = 25$, et admet deux solutions $n_1 = \frac{1-5}{2} = -2$ et $n_2 = \frac{1+5}{2} = 3$. Le degré d'un polynôme pouvant difficilement être égal à -2 , notre P est donc de degré 3. Autrement dit, $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, donc $P'' = 6aX + 2b$, et $(X^2 + 1)P'' = 6aX^3 + 2bX^2 + 6aX + 2b$. Par identification, les coefficients du polynôme P doivent vérifier $6a = 6a$; $6b = 2b$; $6c = 6a$ et $6d = 2b$. On en déduit que $b = d = 0$, et $c = a$, a pouvant valoir n'importe quoi. Autrement dit, $P = a(X^3 + X)$, avec $a \in \mathbb{R}$.
5. On peut constater à l'aide des deux premières conditions, de façon similaire à ce que nous avons fait au 2, que $P(X) - X$ admet 0 et 1 pour racines, et peut donc s'écrire sous la forme $X(X-1)Q(X)$. Autrement dit, on a $P(X) = X + X(X-1)Q(X)$. On en déduit que $P'(X) = 1 + (X-1)Q(X) + XQ(X) + X(X-1)Q'(X) = 1 + (2X-1)Q(X) + X(X-1)Q'(X)$. Les deux dernières conditions peuvent alors s'exprimer sous la forme $P'(0) = 1 - Q(0) = 2$, et $P'(1) = 1 + Q(1) = 3$, donc $Q(0) = -1$ et $Q(1) = 2$. Le polynôme $3X - 1$ prenant respectivement les valeurs -1 en 0 et 2 en 1, on peut constater que $Q(X) - (3X - 1)$ a pour racines 0 et 1, autrement dit que $Q(X) = 3X - 1 + X(X-1)R(X)$. En reprenant l'expression précédente de P , on obtient donc $P(X) = X + X(X-1)(3X - 1 + X(X-1)R(X)) = X + (X^2 - X)(3X - 1) + X^2(X-1)^2 R(X) = 2X - 4X^2 + 3X^3 + X^2(X-1)^2 R(X)$, avec $R \in \mathbb{R}[X]$. Une autre façon de voir les choses est de dire que les conditions données imposent que le reste de la division euclidienne de P par $X^2(X-1)^2$ soit égal à $2X - 4X^2 + 3X^3$.

Exercice 4 (**)

1. Il y a une racine très évidente qui est 1. On peut aussi constater (par exemple en jetant un oeil à l'énoncé de la question suivante) que -2 est racine de P : $P(-2) = -8 - 2 \times 4 - 5 \times (-2) + 6 = 0$.
2. On peut donc factoriser P sous la forme $P(X) = (X + 2)Q(X) = (X + 2)(aX^2 + bX + c) = aX^3 + (2a + b)X^2 + (2b + c)X + 2c$. Par identification, on obtient $a = 1$; $2a + b = -2$; $2b + c = -5$ et $2c = 6$, donc $a = 1$; $b = -4$ et $c = 3$, soit $P(X) = (X + 2)(X^2 - 4X + 3)$.
3. Le deuxième facteur a pour discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4$ et pour racines $x_1 = \frac{4-2}{2} = 1$ (tiens, on a retrouvé notre autre racine évidente) et $x_2 = \frac{4+2}{2} = 3$. On a donc $P(X) = (X + 1)(X - 1)(X - 3)$, d'où le tableau de signes suivant :

x	-2		1		3		
$P(x)$	-	0	+	0	-	0	+

4. La première inéquation se ramène au tableau de signe précédent en posant $X = \ln x$. On en déduit que $X \in]-2; 1[\cup]3; +\infty[$, donc $\mathcal{S} =]e^{-2}; e[\cup]e^3; +\infty[$. Pour la deuxième, on peut tout multiplier par e^x (qui est toujours strictement positif) et tout passer à gauche pour obtenir $e^{3x} - 2e^{2x} - 5e^x + 6 \leq 0$, ce qui se ramène encore une fois au tableau précédent en posant cette fois-ci $X = e^x$ (ce qui suppose donc $X > 0$). On obtient $X \in [1; 3]$ (on peut oublier l'autre intervalle puisque $X \geq 0$, soit $\mathcal{S} = [0; \ln 3]$).

Exercice 5 (**)

Le polynôme P a pour racine évidente -1 : $P(-1) = 1 - 3 - 6 + 8 = 0$, donc P est factorisable par $X + 1$: $P(X) = (X + 1)(aX^2 + bX + c) = aX^3 + (a + b)X^2 + (b + c)X + c$. Par identification, on obtient $a = -1$; $a + b = -3$; $b + c = 6$ et $c = 8$, soit $a = -1$; $b = -2$ et $c = 8$. On a donc $P(X) = (X + 1)(-X^2 - 2X + 8)$. Le deuxième facteur a pour discriminant $\Delta = 4 + 32 = 36$, donc admet deux racines $x_1 = \frac{2 - 6}{-2} = 2$, et $x_2 = \frac{2 + 6}{-2} = -4$. On en déduit que $P(X) = -(X + 1)(X - 2)(X + 4)$, d'où le tableau de signes suivant :

x	-4		-1		2		
$P(x)$	+	0	-	0	+	0	-

Le polynôme Q a pour racine évidente 2 : $Q(2) = 8 - 24 + 26 - 10 = 0$, donc $Q(X) = (X - 2)(aX^2 + bX + c) = aX^3 + (b - 2a)X^2 + (c - 2b)X - 2c$. Par identification, $a = 1$; $b - 2a = -6$; $c - 2b = 13$ et $-2c = -10$, soit $a = 1$; $b = -4$ et $c = 5$. On a donc $Q(X) = (X - 2)(X^2 - 4X + 5)$. Le deuxième facteur a pour discriminant $\Delta = 16 - 20 = -4$, donc ledit facteur est toujours positif, et on a le tableau de signes suivant :

x	2		
$P(x)$	−	0	+

Exercice 6 (* à **)

1.

$$\begin{array}{rcll}
 3X^3 & - & 5X^2 & + & X & + & 2 \\
 - & (3X^3 & - & 6X^2) & & & \\
 & & X^2 & + & X & + & 2 \\
 & - & (X^2 & - & 2X) & & \\
 & & & & 3X & + & 2 \\
 & & & - & (3X & - & 6) \\
 & & & & & & 8
 \end{array} \left| \begin{array}{l} X - 2 \\ 3X^2 + X + 3 \end{array} \right.$$

Conclusion : $3X^3 - 5X^2 + X + 2 = (X - 2)(3X^2 + X + 3) + 8$.

2.

$$\begin{array}{rcll}
 - & 5X^4 & + & 4X^3 & + & 6X^2 & & + & 1 \\
 - & (-5X^4 & + & 25X^3 & - & 15X^2) & & & \\
 & & - & 21X^3 & + & 21X^2 & & + & 1 \\
 - & (-21X^3 & + & 105X^2 & - & 63X) & & & \\
 & & & - & 84X^2 & + & 63X & + & 1 \\
 & & & - & (-84X^2 & + & 420X & - & 252) \\
 & & & & & - & 357X & + & 253
 \end{array} \left| \begin{array}{l} X^2 - 5X + 3 \\ -5X^2 - 21X - 84 \end{array} \right.$$

Conclusion : $-5X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 1 = (X^2 - 5X + 3)(-5X^2 - 21X - 84) - 357X + 253$ (eh oui, parfois, les résultats sont ignobles).

3.

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{r}
 X^5 - 7X^4 - X^2 - X + 9 \\
 - (X^5 - 5X^4 + 4X^3 + X^2) \\
 \quad - 2X^4 - 4X^3 - X^2 - X + 9 \\
 \quad - (-2X^4 + 10X^3 - 8X^2) \\
 \quad \quad - 14X^3 + 7X^2 - X + 9 \\
 \quad \quad - (-14X^3 + 70X^2 - 56X) \\
 \quad \quad \quad - 63X^2 + 55X + 9 \\
 \quad \quad \quad - (-63X^2 + 315X - 252) \\
 \quad \quad \quad \quad - 260X + 261
 \end{array}
 &
 \begin{array}{l}
 X^2 - 5X + 4 \\
 \hline
 X^3 - 2X^2 - 14X - 63
 \end{array}
 \end{array}$$

Conclusion : $X^5 - 7X^4 - X^2 - X + 9 = (X^2 - 5X + 4)(X^3 - 2X^2 - 14X - 63) - 260X + 261$

4. C'est évident le piège idiot de la liste : on ne peut pas faire de division euclidienne si on ne connaît pas la valeur de n , mais la division est en fait déjà écrite sous nos yeux en factorisant la première moitié de P par X^n : $X^{n+2} - 3X^n + 2X + 3 = X^n(X^2 - 3) + 2X + 3$. Comme le degré de $2X + 3$ est strictement inférieur à celui de $X^2 - 3$, on a bien effectué la division souhaitée.

Exercice 7 (* à ***)

- En posant $Y = X^2$, on cherche d'abord à factoriser $2Y^2 - 3Y - 2$, trinôme de discriminant $\Delta = 9 + 16 = 25$, admettant pour racines $Y_1 = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}$ et $Y_2 = \frac{3+5}{4} = 2$. On en déduit que $2Y^2 - 3Y - 2 = 2\left(Y + \frac{1}{2}\right)(Y - 2) = (2Y + 1)(Y - 2)$, et ensuite que $P(X) = (2X^2 + 1)(X^2 - 2) = (2X^2 + 1)(X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})$ (le premier facteur ne peut pas se factoriser plus puisqu'il n'a pas de racine).
- On pourrait avoir envie de poser $Y = X^4$ et procéder comme précédemment, mais un gros souci apparaît rapidement : le trinôme obtenu n'a pas de racine. En fait, c'est pire que ça : on sait dès le départ que le polynôme de degré 8 initial n'a pas de racine puisqu'il est toujours strictement positif. Il est néanmoins factorisable (ce n'est pas contradictoire, il ne faut simplement pas s'attendre à obtenir des facteurs de degré 1) en étant un peu (beaucoup ?) astucieux : $P(X) = X^8 + X^4 + 1 = (X^8 + 2X^4 + 1) - X^4 = (X^4 + 1)^2 - (X^2)^2$. On reconnaît maintenant une différence de deux carrés, qu'on sait factoriser : $P(X) = (X^4 + X^2 + 1)(X^4 - X^2 + 1)$. Chacun des deux facteurs peut à nouveau se factoriser en utilisant la même technique (encore une fois, pas de méthode plus simple) : $X^4 + X^2 + 1 = (X^2 + 1)^2 - X^2 = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)$; et $X^4 - X^2 + 1 = (X^2 + 1)^2 - 3X^2 = (X^2 + 1)^2 - (\sqrt{3}X)^2 = (X^2 + \sqrt{3}X + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)$. Finalement, on obtient la factorisation suivante pour P : $P(X) = (X^2 + \sqrt{3}X + 1)(X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)$ (comme prévu, aucun de ces quatre trinômes n'admet de racine, on ne peut donc pas factoriser plus).
- Commençons par poser $Y = X^3$ et cherchons à factoriser $Y^3 + Y^2 + Y + 1$. Il y a une racine évidente qui est -1 , on peut donc écrire $Y^3 + Y^2 + Y + 1 = (Y + 1)(aY^2 + bY + c) = aY^3 + (a + b)Y^2 + (b + c)Y + c$. Par identification on a $a = 1$; $a + b = 1$; $b + c = 1$ et $c = 1$, donc $a = c = 1$ et $b = 0$. Autrement dit, $Y^3 + Y^2 + Y + 1 = (Y + 1)(Y^2 + 1)$. Le deuxième facteur ne risque pas de se factoriser plus, on a donc $P(X) = (X^3 + 1)(X^6 + 1)$. Le premier facteur, $Y^3 + 1$, a pour racine évidente -1 (encore une fois), donc se factorise par $X + 1$. Une autre façon de voir les choses est d'utiliser l'identité remarquable vue en cours : $X^3 + 1 = X^3 - (-1)^3 = (X + 1)(X^2 - X + 1)$. Le trinôme $X^2 - X + 1$ a un discriminant négatif, on ne peut pas le factoriser. Reste à s'occuper du facteur $X^6 + 1$, pour lequel on ne risque pas de

trouver de racines puisqu'il est toujours positif. On peut utiliser la même astuce que ci-dessus : $X^6 + 1 = (X^2)^3 - (-1)^3 = (X^2 + 1)(X^4 - X^2 + 1)$. Le facteur $X^2 + 1$ n'admet toujours pas de racine et n'est pas factorisable, et si vous avez suivi les calculs de la question 2 de ce même exercice, vous savez déjà que $X^4 - X^2 + 1 = (X^2 + \sqrt{3}X + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)$. Conclusion de tous ces calculs : $X^9 + X^6 + X^3 + 1 = (X + 1)(X^2 - X + 1)(X^2 + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)$.

4. Celui-là est rapide si on pense à utiliser l'identité remarquable $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ (on ne vous a pas mis $P(X)$ sous cette forme-là pour rien !) : $P(X) = (1 + X)^3 + 8X^3 = (1 + X)^3 - (-2X)^3 = (1 + X + 2X)((1 + X)^2 - 2X(1 + X) + 4X^2) = (1 + 3X)(1 + 2X + X^2 - 2X - 2X^2 + 4X^2) = (1 + 3X)(3X^2 + 1)$. On ne peut pas factoriser plus que cela.

Exercice 8 (**)

Un polynôme de degré 3 est de la forme $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, on a donc dans ce cas $P(X + 1) - P(X) = a(X + 1)^3 + b(X + 1)^2 + c(X + 1) + d - (aX^3 + bX^2 + cX + d) = 3aX^2 + 3aX + a + 2bX + b + c$. Par identification, on aura $P(X + 1) - P(X) = X^2$ si $3a = 1$; $3a + 2b = 0$ et $a + b + c = 0$, soit $a = \frac{1}{3}$; $b = -\frac{3}{2}a = -\frac{1}{2}$ et $c = -a - b = \frac{1}{6}$ (et d peut être pris comme on le souhaite, on posera par exemple $d = 0$). Un polynôme satisfaisant est donc $P = \frac{1}{3}X^3 - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{6}X$. En exploitant l'égalité

$P(k + 1) - P(k) = k^2$ (valable pour tout entier k), on peut en déduire que $\sum_{k=0}^{k=n} k^2 = \sum_{k=0}^{k=n} P(k + 1) - P(k) = P(n + 1) - P(0)$ (c'est une somme télescopique. Comme $P(0) = 0$ et $P(n + 1) = \frac{1}{3}(n + 1)^3 - \frac{1}{2}(n + 1)^2 + \frac{1}{6}(n + 1) = \frac{(n + 1)(2(n + 1)^2 - 3(n + 1) + 1)}{6} = \frac{(n + 1)(2n^2 + 4n + 2 - 3n - 3 + 1)}{6} = \frac{(n + 1)(2n^2 + n)}{6} = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$, on retrouve une formule bien connue depuis quelques mois désormais.

Pour la deuxième partie de l'exercice, le principe est le même, mais en partant d'un polynôme de degré 5 (d'où les calculs un peu plus compliqués). Posons donc $P = aX^5 + bX^4 + cX^3 + dX^2 + eX + f$, alors (en révisant au passage notre triangle de Pascal) on a $P(X + 1) - P(X) = a(X + 1)^5 + b(X + 1)^4 + c(X + 1)^3 + d(X + 1)^2 + e(X + 1) + f - (aX^5 + bX^4 + cX^3 + dX^2 + eX + f) = 5aX^4 + 10aX^3 + 10aX^2 + 5aX + a + 4bX^3 + 6bX^2 + 4bX + b + 3cX^2 + 3cX + 1 + 2dX + d + e = 5aX^4 + (10a + 4b)X^3 + (10a + 6b + 3c)X^2 + (5a + 4b + 3c + 2d)X + a + b + c + d + e$. Par identification, tout ceci sera égal à X^4 si $5a = 1$; $10a + 4b = 0$; $10a + 6b + 3c = 0$; $5a + 4b + 3c + 2d = 0$ et $a + b + c + d + e = 0$ (et on peut prendre par exemple f égal à 0), soit $a = \frac{1}{5}$; $b = -\frac{5}{2}a = -\frac{1}{2}$; $c = -\frac{2}{3}b = \frac{1}{3}$ (puisque $10a + 4b = 0$, on a $2b + 3c = 0$) ; $d = -\frac{1}{2}(5a + 4b + 3c) = -\frac{1}{2}(1 - 2 + 1) = 0$, et enfin $e = -a - b - c - d = -\frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{-6 + 15 - 10}{30} = -\frac{1}{30}$. On obtient donc $P(X) = \frac{1}{5}X^5 - \frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{3}X^3 - \frac{1}{30}X$,

puis de manière similaire à ce qu'on a fait dans la première partie de l'exercice $\sum_{k=0}^{k=n} k^4 = P(n + 1) - P(0) = \frac{(n + 1)^5}{5} - \frac{(n + 1)^4}{2} + \frac{(n + 1)^3}{3} - \frac{n + 1}{30} = \frac{(n + 1)(6(n + 1)^4 - 15(n + 1)^3 + 10(n + 1)^2 - 1)}{30} = \frac{(n + 1)(6n^4 + 24n^3 + 36n^2 + 24n + 6 - 15n^3 - 45n^2 - 45n - 15 + 10n^2 + 20n + 10 - 1)}{30} = \frac{(n + 1)(6n^4 + 9n^3 + n^2 - n)}{30} = \frac{n(n + 1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30}$. Le dernier gros facteur ne se fac-

torise pas de façon immédiate, mais les plus curieux d'entre vous pourront constater que $-\frac{1}{2}$ en est une racine : $6\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 9\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 1 = -6 \times \frac{1}{8} + \frac{9}{4} - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{4} + \frac{9}{4} - \frac{2}{4} - \frac{4}{4} = 0$. On en

déduit que $6n^3 + 9n^2 + n - 1 = \left(n + \frac{1}{2}\right)(an^2 + bn + c) = an^3 + \left(b + \frac{1}{2}a\right)n^2 + \left(c + \frac{1}{2}b\right)n + \frac{1}{2}c$.
 Par identification, on obtient $a = 6$; $b + \frac{1}{2}a = 9$; $c + \frac{1}{2}b = 1$ et $\frac{1}{2}c = -1$; soit $a = 6$; $b = 6$ et $c = -2$. On a donc $6n^3 + 9n^2 + n - 1 = \left(n + \frac{1}{2}\right)(6n^2 + 6n - 2) = (2n + 1)(3n^2 + 3n - 1)$ (remarquez que le facteur $2n + 1$ déjà présent pour la formule de la somme des carrés refait ici son apparition). Reste encore à factoriser le dernier terme si on le souhaite. Il a pour discriminant $\Delta = 9 + 12 = 21$, et admet donc deux racines $n_1 = \frac{-3 - \sqrt{21}}{3}$ et $n_2 = \frac{-3 + \sqrt{21}}{3}$. ces deux racines étant assez peu sympathiques, on préférera garder la formule suivante :

$$\sum_{k=0}^{k=n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

Exercice 9 (***)

Dire que $(X - 1)^2$ divise $P - 1$ revient à dire que 1 est une racine double de $P - 1$ (c'est du cours), autrement dit que $(P - 1)(1) = 0$ et $(P - 1)'(1) = 0$. Plus simplement, cela revient à dire que $P(1) = 1$ et $P'(1) = 0$ (la dérivée de $P - 1$ étant P'). De même, dire que $(X + 1)^2$ divise $P + 1$ revient à dire que -1 est racine double de $P + 1$, donc $P(-1) = -1$ et $P'(-1) = 0$. Le polynôme P' étant le polynôme dérivé d'un polynôme de degré 3, il est de degré 2. Comme on lui connaît deux racines 1 et -1 , il est donc nécessairement de la forme $P'(X) = a(X - 1)(X + 1) = aX^2 - a$, avec $a \in \mathbb{R}$. Un peu d'anticipation sur le chapitre d'intégration permet alors d'affirmer que $P(X) = \frac{a}{3}X^3 - aX + b$, où a et b sont deux réels. Reprenons maintenant les deux conditions connues sur P : on sait que $P(1) = 1$, donc $\frac{a}{3} - a + b = 1$, et $P(-1) = -1$, donc $-\frac{a}{3} + a + b = -1$. On obtient $b = 0$ en additionnant les deux équations, donc elles se réduisent toutes deux à $\frac{a}{3} - a = 1$, soit $a = -\frac{3}{2}$. Conclusion $P(X) = -\frac{1}{2}X^3 + \frac{3}{2}X$.

Exercice 10 (***)

Commençons par constater qu'un tel polynôme est nécessairement de degré n : en effet, P' est toujours de degré strictement inférieur à P , donc $P' - P$ est toujours de même degré que P . posons alors $P = \sum_{k=0}^{k=n} a_k X^k$. On a donc $P' = \sum_{k=1}^{k=n} k a_k X^{k-1}$, et $P' - P = -a_n X^n + \sum_{k=0}^{k=n-1} ((k+1)a_{k+1} - a_k) X^k$. Pour avoir $P' - P = X^n$, il faut donc avoir $a_n = -1$ et, $\forall k \leq n-1$, $a_k = (k+1)a_{k+1}$, ou encore si on préfère, $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $a_{k-1} = k a_k$. On a donc $a_{n-1} = -n$, puis $a_{n-2} = -n(n-1)$, etc. Plus généralement, on aura $a_k = -n(n-1)\dots(n-k+1) = -\frac{n!}{k!}$, donc $P = -\sum_{k=0}^{k=n} \frac{n!}{k!} X^k$ (naturellement, une petite récurrence pour déterminer la valeur des coefficients ne nuirait pas à la rigueur de l'argumentation).