

Feuille d'exercices n°16 : Lois usuelles finies

ECE3 Lycée Carnot

4 mars 2011

Exercice 1 (*)

On lance des fusées vers Saturne. À chaque lancer, la probabilité de réussite est de 0.7. On effectue dix lancers successifs, quelle est la probabilité d'obtenir k lancers réussis ? Quel est le nombre moyen de lancers réussis ? Combien faudrait-il de lancers pour avoir 98% de chances qu'au moins un lancer ait réussi ?

Exercice 2 (*)

Dans une urne se trouvent 10 boules rouges et 5 vertes.

1. On pioche sans remise six boules dans l'urne et on note R le nombre de boules rouges obtenues et V le nombre de vertes. Donner la loi, l'espérance et la variance de R et de V (pas de calcul!).
2. Même question lorsque les tirages sont effectués avec remise.

Exercice 3 (**)

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n, p)$. On définit $Y = \frac{1}{1+X}$, donner l'espérance de Y . On suppose ensuite que $p = \frac{1}{2}$ et on pose $Z = \frac{a^X}{2n}$, calculer $E(Z)$.

Exercice 4 (*)

Les bouteilles de vin du supermarché du coin ont une chance sur 15 d'être bouchonnées et inbuables (indépendamment les unes des autres). Si on achète un lot de n bouteilles, à partir de quelle valeur de n aura-t-on en moyenne au moins une bouteille bouchonnée ?

Exercice 5 (***)

On désire analyser le sang d'une population de N individus pour détecter la présence d'un virus qui affecte les individus de la population avec une probabilité p . On a pour cela deux possibilités : soit on analyse le sang de chaque personne ; soit on regroupe les personnes en groupes de n , dont on analyse le sang en groupe. Si le test du groupe est positif, on analyse individuellement chaque individu du groupe.

1. On note X le nombre de groupes positifs. Donner la loi de X .
2. On note Y le nombre total d'analyses effectuées avec la seconde méthode. Calculer en fonction de N , n et p l'espérance de Y .
3. Comparez les deux méthodes dans le cas où $N = 1000$, $n = 10$ et $p = 0.01$.

Exercice 6 (**)

Un jeu de 32 cartes est truqué : on remplace une carte autre que l'as de pique par un deuxième As de pique. On tire au hasard dans ce jeu (simultanément) n cartes.

1. Quelle est (en fonction de n), la probabilité de déceler la supercherie ?
2. On suppose $n = 4$ et on tire plusieurs fois de suite 4 cartes au hasard dans le jeu (en remettant à chaque fois les cartes après le tirage). Quel est le nombre minimum de tirages à effectuer avant que la probabilité de découvrir la supercherie n'atteigne 95% ?

Exercice 7 (**)

Une piste rectiligne est divisée en cases numérotées $0; 1; \dots; k$, de gauche à droite. Une puce se déplace vers la droite de une ou deux cases au hasard à chaque saut. Au départ, elle est sur la case 0. Soit X_n le numéro de la case occupée par la puce après n sauts et Y_n le nombre de fois où la puce a sauté d'une case au cours des n premiers sauts.

1. Donner la loi, l'espérance et la variance de Y_n .
2. En déduire celles de X_n .

Exercice 8 (***)

Une secrétaire effectue n appels pour tenter de joindre n correspondants distincts. Pour chaque appel, elle a une probabilité p d'obtenir son correspondant, et $q = 1 - p$ de ne pas le joindre.

1. On note X le nombre de correspondants obtenus. Quelle est la loi de X ? Donner son espérance et sa variance.
2. La secrétaire tente une deuxième fois de joindre les $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre la première fois. On note Y le nombre de correspondants joints à la deuxième tentative, et $Z = X + Y$. Quelles sont les valeurs que peut prendre Z ?
3. Calculer $P(Z = 0)$ et $P(Z = 1)$ (pour cette dernière probabilité, on doit obtenir $npq^{2n-2}(1+q)$).
4. Démontrer que
$$P(Z = l) = \sum_{k=0}^l P((X = k) \cap (Y = l - k)).$$
5. Calculer $P_{X=k}(Y = h)$ pour les valeurs de k et h pour lesquelles cela a un sens, en déduire $P(Z = l)$.
6. Montrer que
$$\binom{n}{k} \binom{n-k}{l-k} = \binom{n}{l} \binom{l}{k}.$$
 En déduire que
$$P(Z = l) = \binom{n}{l} p^l (1+q)^l (q^2)^{n-l}.$$
7. En constatant que $p(1+q) = 1 - q^2$, reconnaître la loi suivie par Z .
8. Retrouver ce résultat en calculant la probabilité qu'un correspondant donné soit joint à l'issue des deux appels.