Corrigé du sujet EDHEC 2003

ECE3 Lycée Carnot

1er avril 2011

1. (a) Les hypothèses données dans l'énoncé peuvent se traduire sous forme de probabilités conditionnelles : $P_{A_n \cap A_{n-1}}(A_{n+1}) = \dfrac{2}{3}$ etc. En appliquant la formule des probabilités totales, on obtient $P(E_{n+1}) = P_{E_n}(E_n+1) + P_{F_n}(E_n+1) + P_{G_n}(E_n+1) + P_{H_n}(E_n+1)$. Or, les deux dernières probabilités sont nulles car E_{n+1}, qui suppose la partie n gagnée, est incompatible avec G_n et H_n, qui la supposent perdue. Quand aux deux premières, elles sont égales, pour une raison similaire, à $P_{A_n \cap A_{n-1}}(A_{n+1})$ et $P_{A_n \cap \bar{A}_{n-1}}(A_{n+1})$ respectivement, d'où la formule demandée.

   (b) De la même façon on démontre que $P(F_{n+1}) = \dfrac{1}{2}P(G_n) + \dfrac{1}{3}P(H_n)$; $P(G_{n+1}) = \dfrac{1}{3}P(E_n) + \dfrac{1}{2}P(F_n)$ et $P(H_{n+1}) = \dfrac{1}{2}P(G_n) + \dfrac{2}{3}P(H_n)$ (un simple coup d'oeil à l'énoncé de la question suivante suffisait d'ailleurs à trouver les coefficients ...).

   (c) C'est juste une autre façon d'exprimer les relations précédentes, le calcul de MU_n donnant les membres de droite des quatre relations.

2. (a) On calcule $PQ = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = 10I$. On en déduit que $P \times \dfrac{1}{10}Q = I$, autrement dit P est inversible d'inverse $P^{-1} = \dfrac{1}{10}Q$.

   (b) $MC_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$; $MC_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$; $MC_3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ et $MC_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. On constate que chacun des produits MC_i est proportionnel à C_i, avec comme coefficients de proportionnalité respectifs $-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{2}$ et 1 (en termes techniques que vous verrez plutôt l'an prochain, cela signifie que les quatre coefficients de proportionnalité sont des valeurs propres de la matrice M, et les colonnes C_i représentent les coordonnées de vecteurs propres associés à ces valeurs propres).

   (c) Si on a bien compris les calculs de la question précédente, il n'y a plus rien à faire : en regroupant les produits de colonnes, on a constaté que le produit MP donnait une matrice dont chaque colonne était proportionnelle à la colonne correspondante de P. Or, pour multiplier les colonnes d'une matrice par des constantes, il suffit de faire le produit à droite de cette matrice par la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les constantes en question. Ici, on a donc prouvé que $MP = PD$, où $D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   Ce qui, en multipliant l'égalité à droite par P^{-1}, revient à dire que $M = PDP^{-1}$.

3. (a) C'est une des récurrences à savoir faire les yeux fermés. On pose P_n : $M^n = PD^nP^{-1}$. Pour $n = 1$, on a $M^1 = M = PDP^{-1}$, donc P_1 est vérifiée. Supposons $M^n = PD^nP^{-1}$

alors $M^{n+1} = M^n M = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$. Par principe de récurrence, P_n est vérifiée pour toute valeur de n.

(b) On initialise à $n = 2$: on a $M^{2-2}U_2 = U_2$ (ce qui est vrai puisque $M^0 = I$), et si $U_n = M^{n-2}U_2$ alors $U_{n+1} = MU_n = MM^{n-2}U_2 = M^{n-1}U_2$. Donc $\forall n \geqslant 2$, $U_n = M^{n-2}U_2$.

(c) Il suffit de calculer la première colonne donc de faire le produit sur la première colonne.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{3}\right)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{6}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ 2\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ 2\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 2\left(\frac{1}{6}\right)^n + 6\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3 \\ 2\left(-\frac{1}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 \\ -2\left(-\frac{1}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 \\ \left(-\frac{1}{3}\right)^n + 2\left(\frac{1}{6}\right)^n - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3 \end{pmatrix}$$

Commme $U_n = M^{n-2}U_2$ et que $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (on a supposé que les deux premières parties étaient gagnées), U_n est simplement la première colonne de M_{n-2} donc $P(E_n) = \frac{1}{10}\left(-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} + 2\left(\frac{1}{6}\right)^{n-2} + 6\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + 3\right)$; $P(F_n) = \frac{1}{10}\left(2\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} - 2\left(\frac{1}{6}\right)^{n-2} -2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + 2\right)$; $P(G_n) = \frac{1}{10}\left(-2\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} - 2\left(\frac{1}{6}\right)^{n-2} + 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + 2\right)$ et $P(H_n) = \frac{1}{10}\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} + 2\left(\frac{1}{6}\right)^{n-2} - 6\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + 3\right)$.

(d) Comme $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{2}$ ont des valeurs absolues strictement inférieures à 1, on a $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0$. D'où les limites demandées.

4. (a) On a manifestement $A_k = E_k \cup F_k$ selon que la $k-1$ème partie a été gagnée ou non.

(b) Les deux événements E_k et F_k étant incompatibles on a simplement $P(X_k = 1) = P(A_k) = P(E_k) + P(F_k) = \frac{1}{10}\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-2} + 4\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} + 5\right)$, donc X_k suit une loi de Bernouilli de paramètre $\frac{1}{10}\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-2} + 4\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} + 5\right)$.

5. (a) Le joueur étant supposé avoir gagné les deux premières parties, $S_2 = 2$ est un événement certain donc $P(S_2 = 2) = 1$.

Pour $n = 3$, le joueur ayant gagné les deux premières parties, l'événement $(S_3 = 2)$ n'est autre que $\bar{A}_3$ donc $P(S_3 = 2) = 1 - \frac{1}{10}\left(\left(-\frac{1}{3}\right) + 4\left(\frac{1}{2}\right) + 5\right) = -\frac{1}{10}\left(\frac{-2+12+30}{6}\right) = 1 - \frac{40}{10 \times 6} = \frac{1}{3}$ (on a utilisé le résultat obtenu pour la probabilité de A_k pour $k = 3$).

On peut également se contenter de constater qu'on cherche à calculer $P_{A_1 \cap A_2}(\overline{A_3})$, qui est une des probabilités conditionnelles données en début d'énoncé, égale à $\frac{1}{3}$.

Pour $n \geqslant 4$, l'événement $S_n = 2$ signifie que toutes les parties de la troisième à la $n$ième ont été perdues. Or, pour $k = 4$, $P_{\overline{A_3}}(\overline{A_4}) = \frac{1}{2}$ et pour $k \geqslant 5$, $P_{\overline{A_{k-2}} \cap \overline{A_{k-1}}}(\overline{A_k}) = \frac{2}{3}$, donc par la formule des probabilités composées, $P(S_n = 2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \prod_{k=5}^{k=n} \frac{2}{3} = \frac{1}{6} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-4}$.

(b) L'événement $S_n = n$ signifie que le joueur a gagné toutes les parties, par un raisonnement similaire au précédent (et même plus simple), $P(S_n = n) = \prod_{k=3}^{k=n} \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$.

(c) Le nombre total de victoires est $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} X_k$ puisque X_k représente le succès ou l'échec à la $k$ième partie. On a donc $E(S_n) = \sum_{k=1}^{k=n} E(X_k) = E(X_1) + E(X_2) + \sum_{k=3}^{k=n} E(X_k) = 1 + 1 + \sum_{k=3}^{k=n} \frac{1}{10}\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-2} + 4\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} + 5\right) = 2 + \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{k=n-2}\left(-\frac{1}{3}\right)^k + \frac{2}{5}\sum_{k=1}^{k=n-2}\left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{n-2}{2} = \frac{n}{2} + 1 + \frac{1}{10} \times \left(-\frac{1}{3}\right) \times \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} - 1}{-\frac{1}{3} - 1} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{n}{2} + 1 + \frac{1}{40}\left(9\left(-\frac{1}{3}\right)^n - 1\right) - \frac{2}{5}\left(4\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right) = \frac{n}{2} + \frac{11}{8} + \frac{9}{40}\left(-\frac{1}{3}\right)^n - \frac{8}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

On peut constater que $E(S_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n}{2}$, ce qui signifie que le joueur tend à gagner la moitié des parties auxquelles il participe, ce qui est raisonnable puisque les quatre probabilités conditionnelles de gain données au tout début du problème ont une moyenne égale à $\frac{1}{2}$. Le terme constant $\frac{11}{8}$ vient du fait qu'on a supposé que le joueur démarrait avec deux victoires.