Un sujet d'annales : Ecricome 2002

ECE3 Lycée Carnot

8 mars 2011

Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernables au toucher. On y prélève une boule, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne avec c boules de la couleur de la boule tirée (c étant évidemment un entier naturel). On répète cette épreuve, on réalise ainsi une succession de n tirages ($n \geqslant 2$).

I. Étude du cas $c = 0$.

On effectue donc ici n tirages avec remise de la boule dans l'urne.
On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n tirages et Y la variable aléatoire égale au numéro du premier tirage pour lequel on obtient une boule blanche (si on ne tire que des boules noires, on posera $Y = 0$).

1. Déterminer la loi de X. Donner la valeur de $E(X)$ et de $V(X)$.
2. Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, déterminer la probabilité $P(Y = k)$ de l'événement $(Y = k)$, puis déterminer $P(Y = 0)$.
3. Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} P(Y = k) = 1$.
4. Pour $x \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} kx^k = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}$.
5. En déduire $E(Y)$.

II. Étude du cas $c \neq 0$.

On considère les variables aléatoires $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ indicatrices des évènements « On tire une boule blanche au i-ème tirage ». On définit alors, pour tout p in $\{2, \dots, n\}$, la variable aléatoire Z_p, par $Z_p = \displaystyle\sum_{i=1}^{k=p} X_i$.

1. Que représente la variable Z_p ?
2. Donner la loi de X_1 et l'espérance $E(X_1)$ de X_1.
3. Déterminer les probabilités conditionnelles $P_{X_1=0}(X_2 = 0)$; $P_{X_1=0}(X_2 = 1)$; $P_{X_1=1}(X_2 = 0)$ et $P_{X_1=1}(X_2 = 1)$. En déduire la loi de X_2 puis l'espérance $E(X_2)$.
4. Déterminer la loi de probabilité de Z_2.
5. Déterminer l'univers image $Z_p(\Omega)$ de Z_p.
6. Soit $p \leqslant n - 1$.
   (a) Déterminer $P_{Z_p=k}(X_{p+1} = 1)$ pour $k \in Z_p(\Omega)$.
   (b) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que $P(X_{p+1} = 1) = \dfrac{1 + cE(Z_p)}{2 + pc}$.
   (c) En déduire, par un raisonnement par récurrence, que X_p est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.