ECE3 2010-2011 : Le bilan

Guillaume LAFON

29 juillet 2011

Table des matières

Ce n'est qu'un au revoir...

« Ce n'est pas la fin. Ce n'est même pas le commencement de la fin. Mais, c'est peut-être la fin du commencement. » Non, ce n'est pas de moi, mais d'un type un peu plus doué que moi pour écrire, puisqu'il a eu un prix Nobel de littérature alors qu'il n'était même pas écrivain à temps plein (pour ceux qui se demanderaient encore de qui il s'agit, c'est Winston Churchill). Eh oui, c'est fini mais ce n'est que le début, pour vous qui avez encore quelques mois de souffrances et quelques dizaines d'épreuves à subir avant de quitter la prépa (eh oui, mon côté sadique a fait que je n'ai pas pu m'empêcher de vous le rappeler), et pour moi qui ai encore, d'après une petite interpolation linéaire fondée sur l'évolution corrélée de l'âge de départ à la retraite en France et du trou de la caisse des retraites, environ 230 années d'enseignement à effectuer avant de goûter un repos bien mérité (j'ai très bien entendu tous ceux qui ont glissé à l'oreille de leurs voisins que j'avais pas à me plaindre vu que prof c'est déjà des vacances permanentes !).

Mais quand même, il parait déjà bien loin ce 2 septembre où vous vous êtes tous retrouvés alignés pour la première devant nous, paraissant encore tout timides (ça n'a pas vraiment duré) et semblant vous demander à quelle sauce vous alliez être mangés (maintenant, vous le savez, l'ECE3 c'est hyper cool, ça passe tout tranquille ; non c'est pas ça ?). Vous ne vous en rendez peut-être pas (encore) compte, mais une, deux ou trois années de prépa, ça marque et ça transforme énormément les élèves. Le prof un peu moins, bien sûr, mais chaque année est toujours différente de la précédente, et on en garde un souvenir particulier. Je ne doute pas que vous ne m'oublierez jamais, non pas parce que je pense être un prof particulièrement marquant (je ne veux pas dire non plus que je pense que je ne le suis pas, hein, mais je vous laisse juges), mais tout simplement parce qu'on ne peut pas oublier quelqu'un qui vous a fait souffrir une dizaine d'heures par semaine pendant une année charnière de sa jeunesse. De mon côté, les risques que je vous oublie sont plus grands (déjà j'aurai sûrement Alzheimer avant vous, quoiqu'il parait que le bridge aide à retarder l'apparition de cette saloperie, alors j'ai peut-être mes chances), donc je me permets de faire une petite liste, nécessairement incomplète et subjective, de choses que je retiens à chaud de ces quelques centaines d'heures passées avec vous :

- Samir expliquant que le Maroc c'est pas seulement les chameaux lors de sa présentation le jour de la rentrée.
- les quelques pas de danse tentés par le proviseur lors de la journée d'intégration en début d'année.
- l'efficacité déjà presque mythique d'Apolline, Laura et Elisa à trois sur un seul clavier en TD d'info (il y aurait tellement d'autres choses à dire sur les TD d'info qu'on s'en tiendra là).
- les pannes de réveil d'à peu près tout le monde, avec, à tout seigneur tout honneur, une mention spéciale pour Freddy et ses retards systématiques à huit heures le matin.
- les mille deux cent quatre-vint seize questions de Margot en TD, qui ont sévèrement mis à l'épreuve ma capacité à équilibrer l'horaire consacré aux deux groupes.
- la bataille juridique que Simon-Pierre était prêt à me faire subir pour récupérer les morceaux de points que j'avais illégalement sucrés aux vilains sécheurs du cours d'anglais.
- un cours de maths en anglais (fait dans un état de fatigue avancé, si je recommence je me préparerai plus ! !) où on n'a finalement même pas parlé d'eigenvalues.
- les bavardages quasi permanents et autres coups d'oeil incessants au portable de deux ou trois

des plus blondes jeunes filles de la classe (pour l'an prochain, je m'achète ça : http ://www.willitblend.com/videos.aspx ?type=unsafe&video=iphone4)
- les apparitions furtives de la souris de la R1 (paix à son âme).
- les inimitables réflexions de Bertrand, notamment en TD d'info (ah, finalement, j'ai reparlé des TD d'info).
- le merveilleux financier d'anniversaire (vous croyez que si j'étais prof à Sciences Po j'aurais eu droit à un diplomate ?) offert le jour de mes 30 ans ; quand j'ai eu Jessica Alba au téléphone ce soir-là, elle était verte de jalousie, elle aurait bien échangé tous ses cadeaux contre mon gâteau.
- et, bien évidemment, la joyeuse ambiance de la soirée Car NO limit.

Eh oui, je ne vais pas vous faire un baratin insipide sur la merveilleuse aventure humaine que représente une année en classe prépa, mais tout de même, sachez qu'on est bien loin de se limiter à voir en vous des copies et des notes, et que ça fait toujours bizarre, quand l'été arrive, de laisser partir « ses » quarante et quelque gamins auxquels on s'est immanquablement attaché (j'ai encore une fois hésité à mettre un nombre supérieur à 40 dans la case « enfants à charge » de ma déclaration d'impôts annuelle, mais je ne suis pas sûr que ces gens-là aient un sens de l'humour très développé). Vous n'aurez qu'à demander à quelqu'un qui vit avec un prof de prépa la prochaine fois que vous en croiserez un, de quoi le prof en question parle systématiquement en revenant à la maison : de ses élèves ! Il ne peut pas s'empêcher de se demander pourquoi machin est absent depuis deux jours, de faire douze mille remarques à voix haute qui n'intéressent personne quand il corrige ses copies, d'aller faire un tour sur la page Facebook de sa classe (euh, oui, bon, ça c'est peut-être pas tout le monde), de penser à eux pendant les week-ends et les vacances et, un an plus tard, d'attendre leurs résultats aux concours avec presque autant d'appréhension que les élèves eux-même.

Vos résultats, je n'en doute pas, et malgré tout le mal qu'on a pu dire de vous par moments, seron bons ... si vous vous donnez la peine de réussir. Mais ce n'est pas vraiment le moment de discuter de cela, l'heure est aux vacances, au repos (même si vous avez prévu d'enchainer un mois de boulot avec un tour du monde, prenez du temps pour arriver en forme en septembre), à la détente active (que ce soit justement en bossant ses langues à l'étranger, en découvrant le monde du travail, ou simplement en jetant un oeil à ses cours de temps en temps, il y a mille façons de faire) et à l'oubli de la salle R1. Vous aurez bien le temps de vous préocupper de l'an prochain, et comme chaque année, septembre arrivera vite. D'ailleurs, le prof, dans son coin, se pose déjà des milliers de questions : le nouveau bâtiment sera-t-il vraiment prêt à temps ? Vais-je leur infliger des séances de calcul pendant trois semaines en début d'année ? Vais-je laisser les TD d'info à ces affreux horaires le vendredi après-midi ? Vais-je me décider à manger à la cantine plus de trois fois dans l'année ? Aurai-je un colloscope ingérable à mettre en place à cause de cours de langues rares à des horaires invraisemblables ? Et surtout, surtout, ils seront comment les nouveaux (quand je dis comment, je ne pense évidemment pas ici à leur niveau en maths, je **sais** déjà que je les trouverai plus mauvais que ceux de l'année d'avant, mais bien de questions existentielles du genre combien de gauchers ? combien de mecs ? y aura-t-il des jolies blondes ? euh, je vais m'arrêter là, je m'égare...) ? ? Et plus septembre approchera, plus le prof aura du mal à tenir en place, plus il sera excité à l'idée de faire une nouvelle rentrée ... comme un écolier !

Guillaume 'Roupoil' Lafon
29 juin 2011

Bon, ben voilà, pour ceux qui se demandaient, un Roupoil allant faire cours en costard, ça ressemblerait à ça. Mais ça restera très virtuel.

Première partie

Cours


BIENVENUE EN CLASSE PRÉPARATOIRE
...VOTRE GAMELLE ET VOTRE MATELAS SONT SOUS VOTRE BANC. VOUS AVEZ DROIT À UNE MINUTE PAR SEMAINE POUR ALLER FAIRE PIPI, ET UNE HEURE À NOËL POUR PARTIR RÉVEILLONNER EN FAMILLE..

Chapitre 1

Fonctions usuelles

Pour ce premier chapitre de l'année, on commence en douceur (enfin, tout est relatif, naturellement) avec un retour sur quelques notions et résultats sur les fonctions usuelles que vous avez pour la plupart déjà vus en lycée. Pour cette raison, mais également parce que nous manquons encore de définitions précises, ce chapitre comportera exceptionnellement peu de démonstrations (elles seront, je vous rassure tout de suite, refaites au cours de l'année). Disons que vous avez là une compilation de choses que nous utiliserons suffisamment souvent pour je considère normal que vous les ayez en permanence en tête.

1.1 Vocabulaire

1.1.1 Ensembles et domaines de définition

Nous reverrons plus en détail dans un chapitre ultérieur les opérations sur les ensembles, nous nous contenterons donc ici du strict minimum.

Définition 1. Un **ensemble** est une collection d'objets mathématiques. Il est souvent décrit par une propriété commune de ces objets, par exemple $[2;3[= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x < 3\}$. Le symbole $\in$ signifie « appartient à » et le symbole | signifie « tels que ». La notation entre accolades désigne toujours un ensemble en mathématiques.

Définition 2. Un ensemble F est **inclus** dans un ensemble E si tout élément de F appartient aussi à E. On le note $F \subset E$.

Remarque 1. Il ne faut pas confondre appartenance et inclusion. Ainsi, $\sqrt{7} \in [2;3[$, mais $[\pi - 1; \sqrt{7}] \subset [2;3[$.

Définition 3. Nous utiliserons tout au long de l'année les deux symboles supplémentaires suivants, appelés un peu pompeusement **quantificateur existentiel** et **quantificateur universel** :

- le symbole $\exists$ signifie « il existe » ; ainsi, le fait qu'une fonction f s'annule sur l'intervalle $[0;1]$ peut s'écrire plus mathématiquement $\exists x \in [0;1]$, $f(x) = 0$.
- le symbole $\forall$ signifie « quel que soit » ; ainsi, le fait qu'une fonction f soit nulle sur l'intervalle $[0;1]$ s'écrit $\forall x \in [0;1]$, $f(x) = 0$. Notez bien la différence entre ces deux exemples, il est évidemment essentiel de ne pas confondre les deux symboles.

Remarque 2. Dans les cas où a besoin de plusieurs quantificateurs pour exprimer une propriété (ça arrive souvent), l'ordre dans lequel on les dispose est aussi très important. On les lit naturellement de gauche à droite, ce qui donne par exemple :

- $\exists x \in \mathbb{R}$, $\forall y \neq x \in \mathbb{R}$, $f(x) > f(y)$ signifie que f admet un maximum (global) en x ($f(x)$ est plus grand que toutes les autres images par f).
- $\forall y \in \mathbb{R}$, $\exists x \neq y \in \mathbb{R}$, $f(x) > f(y)$ signifie que f n'admet pas de maximum (quelle que soit la valeur de y, on peut trouver un x ayant une image plus grande par f).

Définition 4. Le symbole $\Rightarrow$ est un symbole d'**implication** : $A \Rightarrow B$ signifie que la propriété B est vraie dès que A l'est (par contre, si A est fausse, B peut bien être vraie ou fausse, ça n'a pas d'importance). Le symbole $\Leftrightarrow$ est un symbole d'équivalence : $A \Leftrightarrow B$ signifie que A implique B **et** B implique A. Autrement dit, dès que l'une est vraie, l'autre aussi, et dès que l'une est fausse l'autre aussi. Autre façon de voir les choses : $A \Rightarrow B$ et sa **réciproque** $B \Rightarrow A$ sont toutes les deux vraies.

Exemple (théorème de Pythagore et réciproque) : Un triangle ABC est rectangle en $A \Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Remarque 3. Quand on calcule les longueurs des côtés d'un triangle, et qu'on invoque l'absence d'égalité de Pythagore pour prouver que le triangle n'est pas rectangle, on n'utilise pas la réciproque du théorème, mais bel et bien le théorème lui-même, ou plutôt sa **contraposée** : si $A \Rightarrow B$, la contraposée stipule que la négation de B implique la négation de A (on reviendra sur ce concept plus tard).

Définition 5. Le **domaine de définition** d'une fonction d'une variable réelle est $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ existe}\}$. Sauf mention du contraire, le domaine de définition est constitué de tous les réels pour lesquels $f(x)$ peut être calculé.

Exemples : Les trois cas nécessitant un peu de réflexion à notre niveau sont les suivants :
- annulation d'un dénominateur : si $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-4}$, alors $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-2; 2\}$.
- positivité sous une racine : si $f(x) = \sqrt{4-2x}$, alors $\mathcal{D}_f =]-\infty; 2]$.
- stricte positivité sous un ln : si $f(x) = \ln(x^2 - 9)$, alors $\mathcal{D}_f =]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[$

1.1.2 Parité et périodicité

Définition 6. Une fonction réelle f est **paire** si son domaine de définition est symétrique par rapport à 0 et si $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = f(x)$. Une fonction réelle f est **impaire** si son domaine de définition est symétrique par rapport à 0 et si $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = -f(x)$.

Exemples : La fonction $f : x \mapsto x^2 + 12$ est paire. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{x^2+1}$ est impaire.

Remarque 4. La représentation graphique d'une fonction paire dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. La représentation graphique d'une fonction impaire dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Définition 7. Une fonction réelle f est **périodique de période** T si, $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $x + T \in \mathcal{D}_f$ et $f(x+T) = f(x)$.

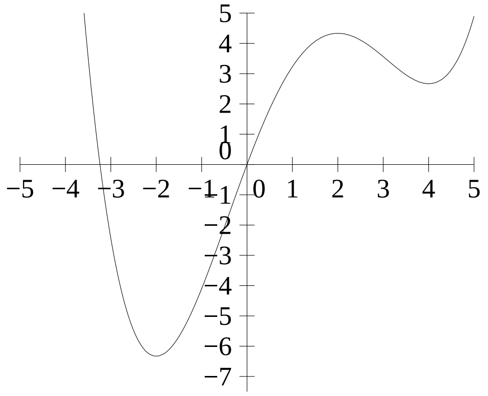
Remarque 5. La représentation graphique d'une fonction périodique de période T est stable par translation de vecteur $T\vec{i}$, où $\vec{i}$ est le vecteur unitaire de l'axe des abscisses. Nous verrons un exemple de telle fonction plus loin dans ce chapitre.

1.1.3 Monotonie et bornes

Définition 8. Une fonction réelle f est **croissante** (resp. **décroissante**) sur un intervalle I si, $\forall (x,y) \in I^2$, $x < y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$ (resp. $f(x) \geqslant f(y)$). Je vous épargne les définitions de croissance et décroissance stricte.

Définition 9. Une fonction réelle f admet un **maximum** (local) en x sur l'intervalle I si $x \in I$ et $\forall y \in I$, $f(y) \leqslant f(x)$. On parle de **maximum global** si $I = \mathcal{D}_f$. On définit de même **minimum local et global**.

Exemple : La fonction représentée ci-dessous admet un minimum global en -2, un minimum local en 4, un maximum local en 2 et pas de maximum global.



Définition 10. Le réel m est un **minorant** de la fonction f sur l'intervalle I si $\forall x \in I,\ f(x) \geqslant m$. De même, M est un **majorant** de f sur I si $\forall x \in I,\ f(x) \leqslant M$. On dit que f est bornée sur I si elle y admet à la fois un majorant et un minorant.

Remarque 6. Un minorant n'est pas la même chose qu'un minimum. Par exemple, la fonction carré a pour minimum 0 sur $\mathbb{R}$, mais elle est aussi minorée par -2, -15 et tout plein d'autres valeurs. Une fonction peut même être minorée sans avoir de minimum, par exemple la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$.

1.2 Variations

Ca paragraphe sera très court, puisque je ne reviendrai volontairement pas sur les calculs et autres propriétés des dérivées que vous avez vus au lycée (nous aurons un chapitre entier consacré à la dérivation dans quelques mois). Il va toutefois de soi que devez connaitre vos dérivées de fonctions usuelles sur le bout des doigts.

Proposition 1. Si f est une fonction dérivable en a, le nombre dérivé $f'(a)$ représente le coefficient directeur de la tangente en a à la courbe représentative de la fonction f. Plus précisément, cette tangente a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Et comme il n'y a pas que la dérivée dans la vie, rappelons les propriétés suivantes, valables pour des fonctions qui ne sont pas supposées dérivables.

Proposition 2. La somme de deux fonctions croissantes (resp. décroissantes) est croissante (resp. décroissante).

Si f et g sont de même monotonie sur I et $f(I)$ respectivement, alors $g \circ f$ est croissante sur I. Si f et g sont de monotonie opposée sur I et $f(I)$ respectivement, alors $g \circ f$ est décroissante sur I.

Exemple : Il faut faire très attention aux intervalles pour les composées. Prenons $h(x) = (2x-4)^2$. On peut écrire $h = g \circ f$, où f est une fonction affine croissante sur $\mathbb{R}$ et g la fonction carré décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$. Comme $f(]-\infty;2]) = \mathbb{R}_-$, et $f([2;+\infty[) = \mathbb{R}_+$, on peut conclure que h est décroissante sur $]-\infty;2]$ et croissante sur $[2;+\infty[$.

1.3 Logarithmes et exponentielles

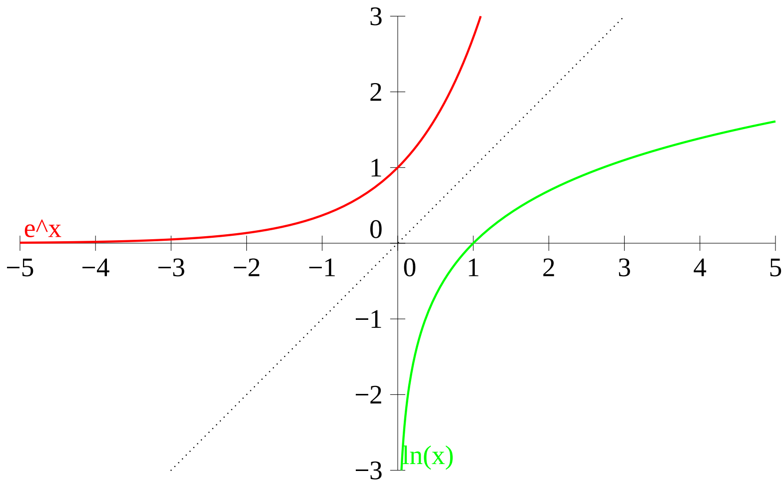
La cohérence des définitions et les résultats de ce paragraphe sont provisoirement admis.

1.3.1 La fonction logarithme népérien

Définition 11. La fonction **logarithme népérien**, notée ln est l'unique primitive de la fonction inverse définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et vérifiant $\ln 1 = 0$.

Proposition 3. Variations de la fonction ln : La fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.

Voici la courbe représentative du logarithme népérien, ainsi que celle de l'exponentielle :



Proposition 4. Régles de calcul avec la fonction ln : le logarithme népérien transforme les produits en somme et les quotients en différences. On a donc $\forall (x,y) > 0$, $\ln(xy) = \ln x + \ln y$; $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$. Cas particulier : $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$. Enfin, on a également, découlant de la première formule, $\ln(x^n) = n \ln x$ pour tout entier naturel n.

1.3.2 La fonction exponentielle

Définition 12. La fonction **exponentielle**, notée $\exp : x \mapsto e^x$ est la réciproque de la fonction ln. Elle est définie sur $\mathbb{R}$ par $x = \ln y \Leftrightarrow e^x = y$.

Proposition 5. La fonction exponentielle est dérivable, et elle est sa propre dérivée. Elle est strictement croisssante et strictement positive sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

Remarque 7. Les courbes de l'exponentielle et du logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Proposition 6. Les régles de calcul avec la fonction exponentielle sont les mêmes que les règles de calcul sur les puissances. Rappelons au passage que $e^1 = e \simeq 2,71$.

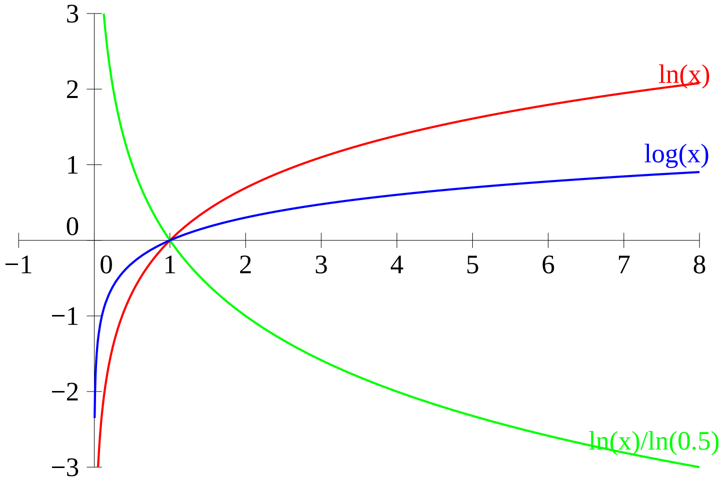
1.3.3 Logarithmes et exponentielles de base a

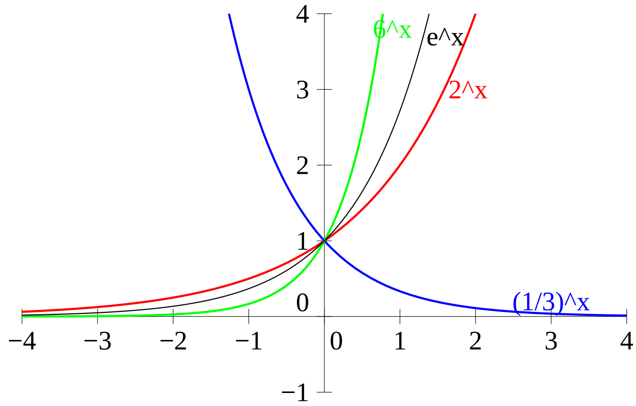
Définition 13. Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$, on définit la fonction **logarithme de base** a sur $]0;+\infty[$ par $\log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$, et la fonction **exponentielle de base** a sur $\mathbb{R}$ par $\exp_a(x) = e^{x \ln a}$ (plus simplement noté $\exp_a(x) = a^x$.

Proposition 7. Les fonctions $\log_a$ et $\exp_a$ sont réciproques l'une de l'autre. Elles vérifient les mêmes règles de calcul que ln et exp respectivement. Elles sont toutes deux strictement croissantes sur leur ensemble de définition si $a > 1$, et strictement décroissantes sinon.

Remarque 8. Le logarithme népérien n'est donc rien d'autre que le logarithme de base e. On note habituellement log la fonction logarithme de base 10, aussi appelé logarithme décimal.

Voici quelques exemples de courbes de fonctions logarithmes, puis de fonctions exponentielles :





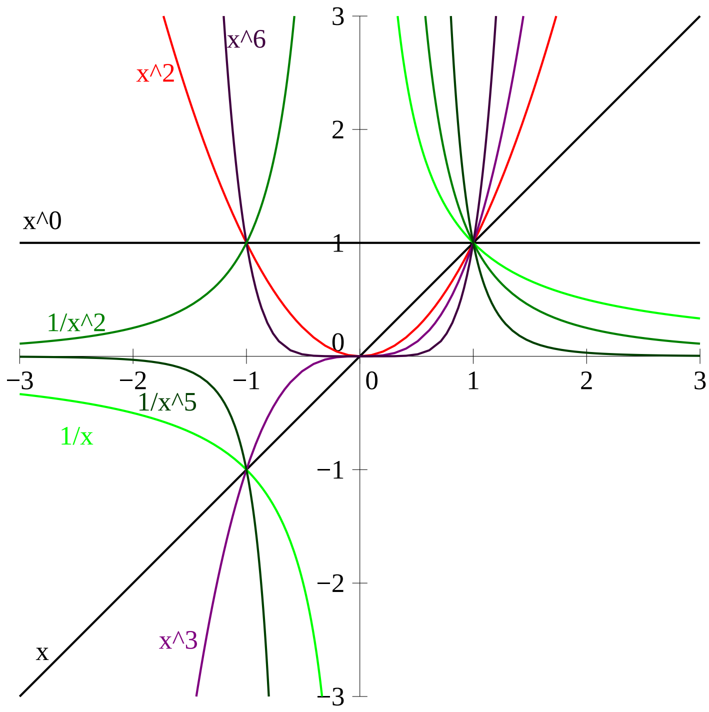
1.4 Fonctions puissances

1.4.1 Puissances entières

Pour tout entier naturel n, la fonction $f_n : x \mapsto x^n$ est définie sur $\mathbb{R}$. Si n est pair, la fonction f_n est paire. Si n est impair, f_n est impaire. La fonction f_0 est constante égale à 1. Pour n impair, la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$; pour n pair non nul, f_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Si n est un entier négatif, on définit également une fonction puissance sur $\mathbb{R}^*$ par $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{x^{-n}}$. La parité de ces fonctions est toujours la même que celle de n. Si n est impair, f_n est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ (mais ne dites surtout pas qu'elle est décroissante sur $\mathbb{R}^*$, on ne parle de monotonie que sur un intervalle). Si n est pair, f_n est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$ et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

Voici quelques exemples de courbes de puissances entières :



1.4.2 Puissances quelconques

À l'aide des fonctions ln et exp, on peut définir des fonctions puissances pour des puissances non entières, mais seulement sur $\mathbb{R}_+^*$:

Définition 14. La fonction f_a est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_a : x \mapsto e^{a \ln x}$. On la note plus simplement $f_a(x) = x^a$.

Proposition 8. Les fonctions puissances sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, et $f_a'(x) = ax^{a-1}$. La fonction f_a est strictement croissante si $a > 0$, strictement décroissante si $a < 0$.

Ces nouvelles fonctions puissances ressemblent en fait beaucoup aux précédentes. Pour la peine, je me dispense de vous donner des exemples de courbes représentatives.

Remarque 9. Si $a \neq 0$, la fonction f_a est réciproque de la fonction $f_{\frac{1}{a}}$. Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{\frac{1}{n}}$ correspond à la notion de racine n-ième. On a par exemple $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ et $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$.

1.5 Limites classiques

Quelques résultats qui peuvent servir, notamment ceux de croissance comparée, qui sont absolument fondamentaux.

Proposition 9. On a $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$ et $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Proposition 10. : Croissance comparée des fonctions usuelles en $+\infty$.

- $\forall a > 1$, $\forall b > 0$, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^b} = +\infty$
- $\forall b > 0$, $\forall c > 0$, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^b}{(\ln x)^c} = +\infty$

Autrement dit, on peut répartir de la façon suivante les fonctions usuelles en $+\infty$, les « plus fortes » étant à droite :
$(\ln x)^{\frac{1}{2}}$ $\quad \ln x$ $\quad (\ln x)^2$ $\quad (\ln x)^{47}$ $\qquad \sqrt{x}$ $\quad x$ $\quad x^2$ $\quad x^{2436525}$ $\qquad 1,2^x$ $\quad 2^x$ $\quad e^x$ $\quad 12^x$

Remarque 10. On peut déduire de ces résultats les autres propriétés suivantes :
- $\forall a > 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x \times x^n = 0$
- $\forall b > 0$, $\forall c > 0$, $\lim\limits_{x \to 0^+} x^b (\ln x)^c = 0$.

1.6 Valeur absolue, partie entière

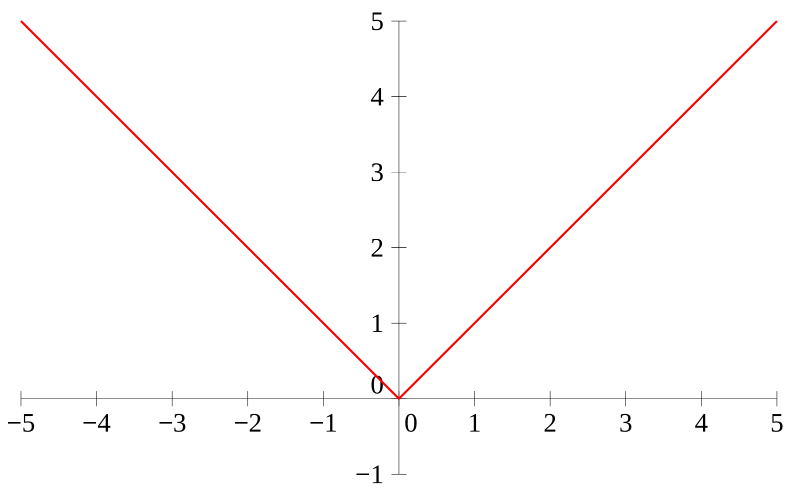
1.6.1 La fonction valeur absolue

Définition 15. La fonction **valeur absolue** est notée $x \mapsto |x|$. Elle est définie sur $\mathbb{R}$ par $|x| = x$ si $x \geqslant 0$ et $|x| = -x$ si $x \leqslant 0$.

Remarque 11. Autrement dit, la valeur absolue d'un réel x est sa distance à 0. Ainsi, une valeur absolue est toujours positive. On peut généraliser ce résultat en remarquant que, pour tous réels x et y, $|x - y|$ représente la distance entre x et y. Cette notion de distance est notamment très utile pour résoudre des équations et inéquations faisant intervenir des valeurs absolues. Cf la première feuille de TD pour des exercices faisant intervenir de telles résolutions, notons simplement deux cas à retenir absolument car ils nous serviront beaucoup par la suite :
- $|x - a| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow x \in [a - \varepsilon; a + \varepsilon]$ (où ε est un réel positif).
- $|x - a| \geqslant \varepsilon \Leftrightarrow x < a - \varepsilon$ ou $x > a + \varepsilon$.

Proposition 11. La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0. Elle est paire, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Voici la courbe représentative de la fonction valeur absolue, qui est en fait constituée de par sa définition de deux demi-droites :



Proposition 12. Quelques autres propriétés des valeurs absolues qui peuvent être utiles pour les calculs :
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $|-x| = |x|$
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|xy| = |x| \times |y|$
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}^*$, $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$
- **Inégalité triangulaire** $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|x + y| \leqslant |x| + |y|$

Démonstration.

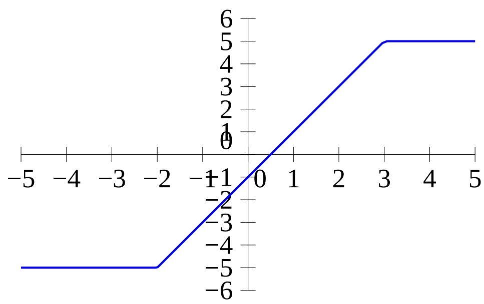
- Le premier point est une simple reformulation de la parité de la fonction valeur absolue.
- Si x et y sont de même signe, xy est positif, donc $|xy| = xy$, et $|x| \times |y| = xy$ ou $|x| \times |y| = (-x) \times (-y) = xy$ selon le signe commun de x et y. Si x et y sont de signe différent, $|x| \times |y| = -xy$, et xy étant négatif, $|xy| = -xy$. Dans tous les cas, ça marche !
- Pour le quotient, c'est exactement comme pour le produit, les règles de signe étant les mêmes.
- Si x et y sont tous deux positifs, $x+y$ l'est également et $|x+y| = x+y = |x|+|y|$. De même, si x et y sont négatifs, $|x+y| = -x-y = |x|+|y|$. Enfin, supposons x positif et y négatif (x et y jouant un rôle symétrique, le dernier cas sera démontré par la même occasion). On ne connait alors par le signe de $x+y$, mais ce qui est certain c'est que $y \leqslant x+y \leqslant x$. On a alors certainement $|x+y| \leqslant \max(|x|,|y|) \leqslant |x|+|y|$.

□

Exemple : Dans les cas où les valeurs absolues continuent à poser des problèmes de calcul, il est encore plus prudent de séparer plusieurs cas selon les valeurs de x. Imaginons que nous cherchions à tracer la courbe représentative de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x+2| - |x-3|$. Trois cas se présentent :

- si $x \leqslant -2$, $x+2$ et $x-3$ sont tous deux négatifs, donc $f(x) = -(x+2)+(x-3) = -5$
- si $-2 \leqslant x \leqslant 3$, $x+2$ est positif et $x-3$ négatif, donc $f(x) = x+2+x-3 = 2x-1$
- enfin, si $x \geqslant 3$, $f(x) = x+2-(x-3) = 5$

La courbe recherchée ressemble donc à ceci :



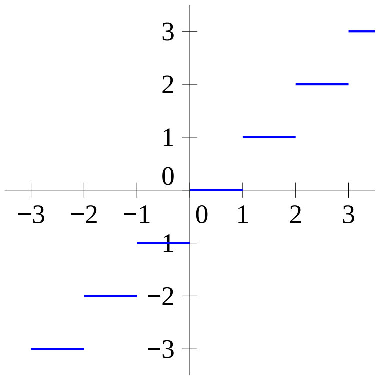
1.6.2 Les fonctions partie entière et décimale

Définition 16. La fonction **partie entière** est définie sur $\mathbb{R}$ de la façon suivante : $Ent(x)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x.

Exemples : $Ent(2,65743565678) = 2$; $Ent(5) = 5$; $Ent(-3,4) = -4$. Autrement dit, la partie entière de x est le seul entier vérifiant $Ent(x) \leqslant x \leqslant Ent(x)+1$.

Proposition 13. La fonction partie entière est constante par morceaux. Elle est continue sur tous les intervalles de la forme $]n;n+1[$, où $n \in \mathbb{Z}$.

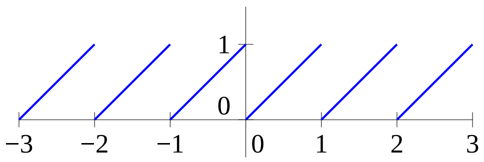
Voici la courbe de la fonction partie entière :



Définition 17. La fonction **partie fractionnaire** est définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x - Ent(x)$.

Proposition 14. La fonction partie fractionnaire coïncide avec la fonction $x \mapsto x$ sur l'intervalle $[0; 1[$, et est périodique de période 1. Elle est continue sur tout intervalle de la forme $[n; n+1[$ et toujours positive.

Voici la courbe de la fonction partie fractionnaire :



Chapitre 2

Sommes, produits, récurrence

Pour ce deuxième chapitre, un peu de théorie, puisque celui-ci va nous permettre de définir quelques notations et méthodes supplémentaires qui nous seront bien utiles par la suite (ou peut-être devrais-je dire plutôt pour les suites, puisqu'il s'agit du premier thème faisant intervenir de façon assez intensive le symbole somme et les récurrences).

2.1 Symbole Σ et propriétés

La somme est l'opération la plus élémentaire qui soit en mathématiques, vous l'utilisez d'aileurs fréquemment depuis une bonne dizaine d'années maintenant. Mais autant sommer deux ou trois nombres est chose aisée, autant l'affaire se complique quand on a besoin de faire la somme d'un grand nombre de termes (voire même d'une infinité, comme on le verra un peu plus tard). Plutôt que de recourir à des petits points à la fois peu rigoureux et inefficaces, on utilise une notation un peu plus complexe au premier abord, mais qui simplifie grandement les calculs une fois maîtrisée.

Définition 18. Le symbole $\sum$ signifie « somme ». Plus précisément, la notation $\sum_{i=2}^{i=7} a_i$ se lit par exemple « somme pour i variant de 2 à 7 des a_i » et peut se détailler de la façon suivante : $\sum_{i=2}^{i=7} a_i = a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7$.

Exemples : On notera $\sum_{i=1}^{i=5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$.

Dans l'autre sens, $2 + 4 + 6 + \cdots + 30 = \sum_{i=1}^{i=15} 2i$.

Remarque 12.

- Les bornes choisies, 2 et 7, ne sont que des exemples, on peut prendre n'importe quoi, y compris des bornes variables, par exemple $\sum_{i=n}^{i=n^2} a_i = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n^2-1} + a_{n^2}$. Par contre, la borne de départ doit toujours être plus petite que la borne d'arrivée (sinon la somme est nulle).
- La lettre i est une variable muette, autrement dit on peut la changer par n'importe quelle autre lettre sans changer la valeur de la somme. On choisit traditionnellement les lettres i, j, k, etc. pour les indices de sommes.
- Dans une somme, la variable muette prend toujours **toutes** les valeurs entières comprises entre la valeur initiale et la valeur finale.

Exemple : $\sum_{i=2}^{i=n} a = (n-1)a$ (faites bien attention au nombre de termes que contient la somme...).

Proposition 15. Règles de calcul sur les sommes. On a le droit d'effectuer les opérations suivantes :

- factoriser par une constante : $\sum_{i=0}^{i=n} ax_i = a\sum_{i=0}^{i=n} x_i$
- séparer ou regrouper des sommes de mêmes indices : $\sum_{i=0}^{i=n} a_i + b_i = \sum_{i=0}^{i=n} a_i + \sum_{i=0}^{i=n} b_i$
- séparer les indices en deux (relation de Chasles) : $\sum_{i=0}^{i=n} a_i = \sum_{i=0}^{i=p} a_i + \sum_{i=p+1}^{i=n} a_i$
- faire un changement d'indice : $\sum_{i=1}^{i=n} a_i = \sum_{j=0}^{j=n-1} a_{j+1}$ (on a posé $j = i - 1$)

Remarque 13. Tenter de simplifier d'une façon ou d'une autre $\sum_{i=0}^{i=n} a_i b_i$ est par contre une très bonne manière de s'attacher la rancoeur tenace de votre professeur ; les sommes et produits ne font pas bon ménage.

2.2 Démonstration par récurrence

La démonstration par récurrence est un schéma de démonstration que nous utiliserons extrêmement souvent cette année, et qu'il est donc essentiel de maîtriser parfaitement. Réaliser une bonne récurrence n'est pas très compliqué si on se force à bien en respecter la structure, la rigueur est donc de mise pour ne pas dire de bêtise !

Proposition 16. Principe de récurrence : On cherche à prouver simultanément un ensemble de propriétés P_n dépendant d'un entier naturel n. On procède de la manière suivante, qui devront être apparentes dans la rédaction de notre récurrence :

- **Énoncé** clair et précis des propriétés P_n et du fait qu'on va réaliser une récurrence.
- **Initialisation** : on vérifie que P_0 est vraie (habituellement un calcul très simple).
- **Hérédité** : on suppose P_n vraie pour un entier n quelconque (c'est l'hypothèse de récurrence) et on prouve P_{n+1} à l'aide de cette hypothèse (si on n'utilise pas l'hypothèse de récurrence, c'est qu'on n'avait pas besoin de faire une récurrence !).
- **Conclusion** : En invoquant le principe de récurrence, on peut affirmer avoir démontré P_n pour tout entier n.

Proposition 17.

- $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^{i=n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^{i=n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^{i=n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{i=1}^{i=n} i\right)^2$
- $\forall q \neq 1, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{k=n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Exemple 1 : Calcul de la somme des entiers.

- Nous allons démontrer par récurrence que la propriété P_n : $\sum_{i=0}^{i=n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ est vraie pour tout entier n.

- Pour $n = 0$, nous avons $\sum_{i=0}^{i=n} i = 0$ et $\frac{0(0+1)}{2} = 0$, donc P_0 est vraie.
- Supposons P_n vraie pour un entier n quelconque, c'est-à-dire que $\sum_{i=0}^{i=n} i = \frac{n(n+1)}{2}$. On peut alors effectuer le calcul suivant : $\sum_{i=0}^{n+1} i = \sum_{i=0}^{i=n} i + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, ce qui prouve P_{n+1}.
- D'après le principe de récurrence, nous pouvons donc affirmer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=0}^{i=n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Exemple 2 : Calcul de la somme des carrés des entiers.
Nous allons prouver par récurrence la propriété P_n : $\sum_{i=0}^{i=n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Pour $n = 0$, nous avons $\sum_{i=0}^{i=n} i^2 = 0^2 = 0$, et $\frac{0(0+1)(2 \times 0+1)}{6} = 0$, donc P_0 est vérifiée. Supposons désormais P_n vraie pour un entier n quelconque, on peut alors écrire $\sum_{i=0}^{i=n+1} i^2 = \sum_{i=0}^{i=n} i^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$, donc P_{n+1} est vérifiée. D'après le principe de récurrence, on peut conclure que P_n est vraie pour tout entier naturel n.

Exemple 3 : Calcul de la somme des cubes des entiers.
Nous allons prouver par récurrence la propriété P_n : $\sum_{i=0}^{i=n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. Pour $n = 0$, nous avons $\sum_{i=0}^{i=n} i^3 = 0^3 = 0$, et $\frac{0^2(0+1)^2}{4} = 0$, donc P_0 est vérifiée. Supposons désormais P_n vraie pour un entier n quelconque, on peut alors écrire $\sum_{i=0}^{i=n+1} i^3 = \sum_{i=0}^{i=n} i^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$, donc P_{n+1} est vérifiée. D'après le principe de récurrence, on peut conclure que P_n est vraie pour tout entier naturel n.

Exemple 4 : Calcul de sommes géométriques.
Nous allons prouver par récurrence la propriété P_n : $\sum_{k=0}^{k=n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Pour $n = 0$, nous avons $\sum_{k=0}^{k=n} q^k = q^0 = 1$, et $\frac{1-q^1}{1-q} = 1$, donc P_0 est vérifiée. Supposons désormais P_n vraie pour une entier n quelconque, on peut alors écrire $\sum_{k=0}^{k=n+1} q^k = \sum_{k=0}^{k=n} q^k + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$, donc P_{n+1} est vérifiée. D'après le principe de récurrence, on peut conclure que P_n est vraie pour tout entier naturel n.

Remarque 14. Variations du principe de récurrence :

Le monde mathématique n'étant pas parfait, une récurrence classique n'est hélas pas toujours suffisante pour montrer certaines propriétés. Il faut donc être capable de modifier légèrement la structure dans certains cas :

- si on ne cherche à montrer P_n que lorsque $n \geqslant n_0$ (n_0 étant un entier fixe dépendant du contexte), on peut toujours procéder par récurrence, mais en initialisant à n_0.
- il est parfois nécessaire que l'hypothèse de récurrence porte non pas sur une valeur de n, mais sur deux valeurs consécutives. On peut alors effectuer une récurrence double : on vérifie P_0 et P_1 lors de l'étape d'initialisation, et on prouve P_{n+2} à l'aide de P_n et P_{n+1} lors de l'hérédité.
- on peut même avoir besoin pour prouver l'hérédité que la propriété soit vérifiée pour **tous** les entiers inférieurs. Dans ce cas, on parle de récurrence forte : le plus simple est de modifier la définition de la propriété P_n pour lui donner un énoncé comment par $\forall k \leqslant n$. Ainsi, lorsqu'on suppose P_n vérifiée, on a une relation vraie pour toutes les valeurs de k inférieures ou égales à n (les plus malins d'entre vous noteront d'ailleurs qu'on peut toujours rédiger une récurrence sous forme de récurrence forte, ça ne demande pas plus de travail et ça ne peut pas être moins efficace ; c'est toutefois un peu plus lourd et déconseillé sauf nécessité).

Exemple : On considère une suite réelle définie de la façon suivante : $u_0 = 1$; $u_1 = 3$ et $\forall n \geqslant 2$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Notre but va être de prouver par récurrence double la propriété $P_n : u_n = 2^{n+1} - 1$.

- double initialisation : pour $n = 0$, $2^1 - 1 = 1 = u_0$, et pour $n = 1$, $2^2 - 1 = 3 = u_1$, donc P_0 et P_1 sont vérifiées.
- hérédité : on suppose que, pour un entier n fixé, P_n et P_{n+1} sont vraies, c'est-à-dire que $u_n = 2^{n+1} - 1$ et $u_{n+1} = 2^{n+2} - 1$. On peut alors calculer $u_{n+2} = 3(2^{n+2} - 1) - 2(2^{n+1} - 1) = 3 \times 2^{n+2} - 3 - 2^{n+2} + 2 = 2 \times 2^{n+2} - 1 = 2^{n+3} - 1$, donc P_{n+2} est vérifiée.
- conclusion : par principe de récurrence double, on peut conclure que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{n+1} - 1$.

Remarque 15. Le problème de ce genre de démonstration est évidemment qu'il faut déjà avoir une idée du résultat pour pouvoir le prouver par récurrence. Ainsi, dans le dernier exemple, il faut conjecturer la forme du terme général de la suite (par exemple en calculant ses premiers termes) avant de pouvoir vérifier la formule par récurrence.

2.3 Sommes télescopiques, sommes doubles et produits

2.3.1 Sommes télescopiques

Le concept de somme télescopique ne fait rien apparaitre de nouveau par rapport à ce que nous avons vu dans la première partie du cours, c'est simplement une technique qui permet de calculer explicitement certaines sommes. Nous allons donc la présenter sur un exemple.

Exemple : La somme télescopique consiste à constater que la différence de deux sommes ayant beaucoup de termes communs comporte en fait nettement moins de termes que ce qu'elle n'en a l'air au départ. Considérons $S = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i(i+1)}$. A priori pas évident à calculer, du moins tant qu'on a pas constaté que $\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} = \frac{i+1-i}{i(i+1)} = \frac{1}{i(i+1)}$. On peut alors faire le calcul suivant :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i+1} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i} - \sum_{j=2}^{j=n+1} \frac{1}{j} = 1 + \sum_{i=2}^{i=n} \frac{1}{i} - \sum_{j=2}^{j=n} \frac{1}{j} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Si la fin du calcul ne vous semble pas claire, on peut aussi voir les choses ainsi :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

2.3.2 Sommes doubles

Rien ne nous interdit de mettre une somme à l'intérieur d'une autre somme. Dans ce cas, il est toutefois très important d'utiliser deux indices différents pour les deux sommes, sous peine de confusion totale. Plusieurs notations sont possibles pour exprimer des sommes doubles : $\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{j=1}^{j=n} i\sqrt{j} = \sum_{j=1}^{j=n}\sum_{i=1}^{i=n} i\sqrt{j} = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} i\sqrt{j}$. Cette somme est constituée de n^2 termes qu'on peut par exemple représenter dans un tableau contenant n lignes et n colonnes. L'ordre dans lequel on place les deux sommes est indifférent (d'où également la possibilité de n'utiliser qu'une seule somme), on a donc intérêt à les placer dans l'ordre le plus pratique pour le calcul, ici par exemple :
$\sum_{j=1}^{j=n}\sum_{i=1}^{i=n} i\sqrt{j} = \sum_{j=1}^{j=n}\sqrt{j}\left(\sum_{i=1}^{i=n} i\right) = \sum_{j=1}^{j=n}\sqrt{j}\times\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}\sum_{j=1}^{j=n}\sqrt{j}$ (et on ne sait pas calculer la dernière somme).

2.3.3 Produits

Le fonctionnement est très similaire à celui des sommes :

Définition 19. Le symbole $\prod$ signifie « produit ». Par exemple, $\prod_{i=1}^{i=5} i = 1\times 2\times 3\times 4\times 5 = 120$.

Définition 20. On appelle **factorielle** de l'entier naturel n, et on note $n!$, le nombre $n! = \prod_{i=1}^{i=n} i$.

Exemples : $\prod_{i=1}^{i=n} a = a^n$; $\quad \frac{(n+1)!}{n!} = \frac{\prod_{i=1}^{i=n+1} i}{\prod_{i=1}^{i=n} i} = n+1$

Proposition 18. Les règles de calcul suivantes peuvent être utiles quand on manipule des produits :

- séparer ou regrouper des produits ayant les mêmes indices : $\prod_{i=1}^{i=n} a_i \times \prod_{i=1}^{i=n} b_i = \prod_{i=1}^{i=n} a_i b_i$
- séparer les indices (relation de Chasles) : $\prod_{i=1}^{i=n} a_i = \prod_{i=1}^{i=p} a_i \times \prod_{i=p+1}^{i=n} a_i$
- faire un changement d'indice : $\prod_{i=2}^{i=n+1} a_i = \prod_{j=1}^{j=n} a_{j+1}$

Remarque 16. Bien entendu, tenter de simplifier $\prod_{i=1}^{i=n}(a_i+b_i)$ serait une grave erreur que, j'en suis certain, vous ne commettrez pas deux fois (ni même une seule, si possible).

Exemple : Un petit calcul de produit pour finir ce paragraphe. $P = \prod_{i=1}^{i=n} 3i = \prod_{i=1}^{i=n} 3 \times \prod_{i=1}^{i=n} i = 3^n n!$

Chapitre 3

Suites classiques

Le premier grand thème à notre programme cette année, ce sont les suites. Pour ce premier chapitre qui leur sera consacré (il y en aura seulement deux), nous allons revenir sur des notions que vous avez déjà vues, en élargissant un peu le champ des suites classiques à connaitre. Vous avez vu au lycée les suites arithmétiques et géométriques (nous rappellerons les principaux résultats les concernant), nous en rajouterons deux autres types.

3.1 Généralités sur les suites

Définition 21. Une **suite réelle** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une liste infinie de nombres réels, habituellement numérotés à partir de 0. Ainsi, on note u_0 le premier terme de la suite, u_1 le deuxième etc. Le nombre u_n (pour n fixé) est appelé **terme d'indice** n de la suite, et u_n (n n'étant pas fixé) est appelé **terme général** de la suite (attention à ne pas confondre notamment u_n et (u_n)).

Remarque 17. Une autre façon de voir les choses est de dire qu'une suite (u_n) est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, où on choisit de noter l'image de l'entier n u_n plutôt que $u(n)$.

On peut définir une suite réelle de bien des façons, les plus fréquentes étant les suivantes :

- par la liste de ses éléments, par exemple $u_0 = 2$; $u_1 = 4$; $u_2 = 6$; $u_3 = 8$; $u_4 = 10$ etc. C'est la méthode la plus naturelle, mais elle trouve très vite ses limites puisqu'il faut que la suite soit suffisamment simple pour qu'on devine tous les termes à partir des premiers.
- par une formule explicite pour le terme général, par exemple $u_n = n^2 - 4n + 1$. C'est une définition qui ressemble beaucoup à la définition usuelle d'une fonction, et qui est extrêmement pratique pour les calculs. C'est celle qu'on cherchera à obtenir le plus souvent.
- de façon implicite, par exemple u_n est l'unique réel positif vérifiant $e^{u_n} - u_n - 2 = n$ (croyez-moi sur parole, il y en a un et un seul pour chaque valeur de n). Pas vraiment extrêmement pratique pour les calculs, mais on n'arrive pas toujours à obtenir une formule explicite. Dans ce cas, on arrive quand même à s'en sortir à l'aide d'études de fonctions, nous reverrons donc ce genre de suites plus tard dans l'année.
- un cas très fréquent est le cas de la définition par récurrence. Elle consiste à donner une relation de récurrence entre les termes de la suite, c'est-à-dire à exprimer u_{n+1} en fonction de u_n, et à préciser la valeur de u_0 (sinon, c'est comme pour une récurrence non initialisée, ça ne sert à rien). Par exemple, $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 - 5$. C'est beaucoup moins pratique pour les calculs qu'une définition explicite, mais c'est souvent la définition la plus naturelle que nous aurons d'une suite. Il peut arriver qu'une suite soit définie par récurrence double (u_{n+2} en fonction de u_{n+1} et u_n), auquel cas il faut préciser les valeurs de u_0 et u_1, voire par récurrence triple ou pire (mais c'est plus rare !).

Définition 22. Une suite réelle (u_n) est **croissante** (resp. **décroissante**) si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$ (resp. $u_n \geqslant u_{n+1}$; je vous fais grâce des définitions de croissance et décroissance stricte). Une suite réelle est **stationnaire** si elle est constante à partir d'un certain rang : $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n_0$, $u_n = u_{n_0}$.

Exemple : Une technique classique pour étudier le sens de variation d'une suite est de calculer $u_{n+1} - u_n$ et de déterminer son signe. Prenons la suite définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 2$, alors $u_{n+1} - u_n = u_n^2 + 2 > 0$, donc la suite est strictement croissante.
Dans le cas d'une suite à termes strictement positifs, on peut également calculer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et déterminer si ce quotient est supérieur ou inférieur à 1.

Définition 23. Une suite (u_n) est **majorée** (resp. **minorée**) par un réel m si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant m$ (resp. $u_n \geqslant m$). Elle est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemple : On est souvent amenés à effectuer des récurrences pour prouver des propriétés de croissance, majoration, etc. sur les suites. Considérons la suite définie par $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n} + 1$. Le calcul des premiers termes de la suite semble indiquer que la suite prend ses valeurs entre 2 et 3. Prouvons par récurrence pour tout $n \geqslant 1$ la propriété $P_n : u_n \in [2;3]$. Pour $n = 1$, $u_1 = \sqrt{4} + 1 = 3$ donc P_1 est vérifiée. Supposons désormais P_n vérifiée pour un certain entier n, alors $2 \leqslant u_n \leqslant 3$, donc $\sqrt{2} + 1 \leqslant \sqrt{u_n} + 1 \leqslant \sqrt{3} + 1$, et $u_{n+1} \in [\sqrt{2} + 1; \sqrt{3} + 1]$. Comme $2 < \sqrt{2} + 1 < \sqrt{3} + 1 < 3$, on peut conclure que P_{n+1} est vérifiée et, par principe de récurrence, que, $\forall n \geqslant 1$, $u_n \in [2;3]$.

Si vous êtes observateur, vous aurez aussi constaté que la suite (u_n) semblait décroissante. C'est un peu plus subtil à prouver par récurrence (essayez, vous verrez le problème), mais il existe d'autres méthodes pour déterminer le sens de variation de ce genre de suites, que nous étudierons plus tard.

Définition 24. On appelle **somme partielle d'indice** n de la suite (u_n) la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} u_k$.

Cette notion trouvera toute son importance dans le chapitre ultérieur consacré aux séries, mais nous allons commencer à calculer de telles sommes dans la deuxième partie de ce chapitre.

3.2 Quelques suites à connaitre

3.2.1 Suites arithmétiques

Définition 25. Une suite réelle (u_n) est appelée **suite arithmétique** de raison $r \in \mathbb{R}$ si elle vérifie la relation de récurrence suivante : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.

Proposition 19. Une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 vérifie les résultats suivants :

- formule explicite : $\forall n \in \mathbb{R}$, $u_n = u_0 + nr$.
- variations : si $r > 0$, la suite (u_n) est strictement croissante ; si $r < 0$, elle est strictement décroissante.
- sommes partielles : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} u_k = \frac{(u_0 + u_n)(n+1)}{2}$.

Démonstration.

- Une petite récurrence permet de prouver $P_n : u_n = u_0 + nr$. C'est vrai au rang 0 : $u_0 = u_0 + 0 \times r$, et en le supposant vrai au rang n, on a par définition $u_{n+1} = u_n + r = u_0 + nr + r = u_0 + (n+1)r$, donc P_{n+1} est vérifiée. D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.
- Cela découle de façon immédiate de la constatation que $u_{n+1} - u_n = r$.

- $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = \sum_{k=0}^{k=n} u_0 + kr = \sum_{k=0}^{k=n} u_0 + r\sum_{k=0}^{k=n} k = (n+1)u_0 + r\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(2u_0+nr))(n+1)}{2} = \frac{(u_0+u_0+nr)(n+1)}{2} = \frac{(u_0+u_n)(n+1)}{2}$. On a réutilisé pour ce calcul une des sommes classiques calculées au chapitre précédent.

□

Exemple : Dans la bonne ville de Glourz, l'abonnement annuel aux transports en commun coutait 200 zlourks en l'an 2 000, mais augmente de 6,5 zlourks chaque année. Si on note u_n la valeur de l'abonnement annuel à l'année 2 000+n, la suite (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 6,5$ et de premier terme $u_0 = 200$. Ainsi, le tarif de l'abonnement pour 2 010 sera de $u_{10} = 200 + 10 \times 6,5 = 265$ zlourks. Un habitant ayant vécu à Glourz entre 2 000 et 2 010 inclus (soit 11 années au total) et ayant pris son abonnement tous les ans aura payé au total $\sum_{k=0}^{k=10} u_k = \frac{11(u_0+u_{10})}{2} = \frac{11(200+265)}{2} =$ 2 557,5 zlourks.

3.2.2 Suites géométriques

Définition 26. Une suite réelle (u_n) est appelée **suite géométrique** de raison $q \in \mathbb{R}$ si elle vérifie la relation de récurrence suivante : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = q \times u_n$.

Proposition 20. Une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 vérifie les résultats suivants :

- formule explicite : $\forall n \in \mathbb{R}$, $u_n = u_0 \times q^n$.
- variations : si $q > 1$ et $u_0 > 0$, la suite (u_n) est strictement croissante ; si $0 < q < 1$ et $u_0 > 0$, elle est strictement décroissante (si $u_0 < 0$, c'est le contraire). Si $q < 0$, les termes de la suite sont de signe alterné.
- sommes partielles : $\forall n \in \mathbb{N}$, si $q \neq 1$, $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Démonstration.

- Une petite récurrence permet de prouver $P_n : u_n = u_0 \times q^n$. C'est vrai au rang 0 : $u_0 = u_0 \times q^0$, et en le supposant vrai au rang n, on a par définition $u_{n+1} = u_n \times q = u_0 \times q^n \times q = u_0 \times q^{n+1}$, donc P_{n+1} est vérifiée. D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$.
- On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_0 \times q^{n+1} - u_0 \times q^n = u_0 q^n (q-1)$. Toues les résultats concernant le sens de variation en découlent.
- $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = \sum_{k=0}^{k=n} u_0 \times q^k = u_0 \sum_{k=0}^{k=n} q^k = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. On a réutilisé pour ce calcul une des sommes classiques calculées au chapitre précédent.

□

Exemple : Dans la bonne ville de Schmurz, l'abonnement annuel aux transports en commun coutait 200 zlourks en l'an 2 000, mais augmente de 3% chaque année. Si on note u_n la valeur de l'abonnement annuel à l'année 2 000 + n, la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,03$ et de premier terme $u_0 = 200$ (en effet, $u_{n+1} = u_n + \frac{3u_n}{100} = u_n \times (1 + 0,03)$). Ainsi, le tarif de l'abonnement pour 2 010 sera de $u_{10} = 200 \times 1,03^{10} \simeq 268,8$ zlourks. Un habitant ayant vécu à Glourz entre 2 000 et 2 010 inclus (soit 11 années au total) et ayant pris son abonnement tous les ans aura payé au total $\sum_{k=0}^{k=10} u_k = 200\frac{1-1,03^{11}}{1-1,03} \simeq 2\ 561,6$ zlourks.

3.2.3 Suites arithmético-géométriques

Définition 27. Une suite réelle (u_n) est **arithmético-géométrique** s'il existe deux réels $a \notin \{0 : 1\}$ et $b \neq 0$ tels qu'elle vérifie la relation de récurrence suivante : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$.

Théorème 1. Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique, alors, en notant α l'unique solution de l'équation $x = ax + b$ (aussi appelée **équation de point fixe** de la suite), la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \alpha$ est une suite géométrique de raison a.

Démonstration. L'existence et l'unicité du réel α découlent du fait qu'on a imposé $a \neq 1$ dans la définition d'une suite arithmético-géométrique. Remarquons ensuite que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha = au_n + b - \alpha = au_n - a\alpha = a(u_n - \alpha) = av_n$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison a. □

Remarque 18. On déduit du théorème précédent que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + \alpha = v_0 \times a^n + \alpha = (u_0 - \alpha)a^n + \alpha$, ce qui donne une expression explicite du terme de u_n. En pratique, en présence d'une suite arithmético-géométrique, on présentera les calculs de la façon suivante :

- calcul du point fixe α.
- définition de la suite (v_n).
- vérification que (v_n) est suite géométrique.
- conclusion : expression du terme général u_n.

Exemple Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 1$. L'équation de point fixe de la suite est $x = 2x - 1$, qui a pour unique solution $\alpha = 1$, on pose donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 1$. On remarque que $v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = 2u_n - 2 = 2(u_n - 1) = 2v_n$, donc la suite (v_n) est géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = u_0 - 1 = 1$. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2^n$, donc $u_n = v_n + 1 = 2^n + 1$.

Si on le souhaite, on peut aisément calculer les sommes partielles de la suite (u_n) :
$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = \sum_{k=0}^{k=n} 2^k + \sum_{k=0}^{k=n} 1 = \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} + n + 1 = 2^{n+1} + n.$

3.2.4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition 28. Une suite réelle est dite **récurrente linéaire d'ordre** 2 si elle vérifie une relation de récurrence double linéaire à coefficients constants, c'est-à-dire que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$, où a et b sont deux réels non nuls.

Définition 29. Soit (u_n) une suite récurrente linéaire d'ordre 2. On appelle **équation caractéristique** de la suite l'équation du second degré $r^2 - ar - b = 0$.

Théorème 2. Si l'équation caractéristique d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 (u_n) admet deux racines réelles distinctes r et s, le terme général de la suite peut s'écrire sous la forme $u_n = \alpha r^n + \beta s^n$, α et β étant deux réels pouvant être déterminés à l'aide des deux premiers termes de la suite.
Si l'équation caractéristique admet une racine réelle double r, alors $u_n = (\alpha + \beta n)r^n$ (avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$).
Si l'équation caractéristique n'a pas de racine réelle, on ne peut malheureusement rien dire d'intéressant à notre niveau.

Démonstration. Constatons que, si r et s sont racines de l'équation caractéristique, toutes les suites de la forme $u_n = \alpha r^n + \beta s^n$ vérifient la récurrence linéaire : en effet, $r^2 = ar + b \Rightarrow r^{n+2} = ar^{n+1} + br^n$ (et de même pour s^{n+2}), donc $u_{n+2} = \alpha r^{n+2} + \beta s^{n+2} = \alpha(ar^{n+1} + br^n) + \beta(as^{n+1} + bs^n) = au_{n+1} + bu_n$. Comme de plus la suite u_n est complètement déterminée par ses deux premiers termes et la relation de récurrence double, une suite vérifiant cette même relation de récurrence et ayant les deux mêmes premiers termes que (u_n) est égale à celle-ci.

Le principe est le même dans le deuxième cas : $u_{n+2} = (\alpha + \beta n)r^{n+2} = (\alpha + \beta n)(ar^{n+1} + br^n) = \alpha ar^{n+1} + \alpha br^n + \beta nar^{n+1} + \beta nbr^n = au_{n+1} + bu_n$. Le point délicat de cette démonstration, que nous allons subtilement esquiver, est en fait d'arriver à prouver qu'il existe toujours une suite du type donné ayant les deux mêmes premiers termes que u_n. Nous nous contenterons pour l'instant d'admettre (et de constater sur des exemples) que c'est bien le cas, et qu'on ne peut pas en général se contenter d'une forme plus simple (par exemple avec une seule des deux racines dans le premier cas). $\square$

Exemple : Nous en avons déjà vu un en application du principe de récurrence. Mais désormais, nous disposons d'outils permettant justement d'éviter les récurrences et surtout de trouver facilement la forme du terme général de la suite. Prenons la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$; $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Son équation caractéristique est $r^2 - 5r + 6$, qui a pour discriminant $\Delta = 25 - 24 = 1$, et donc deux racines réelles $r = \dfrac{5+1}{2} = 3$ et $s = \dfrac{5-1}{2} = 2$. D'après le théorème précédent, on peut donc affirmer que $u_n = 3^n\alpha + 2^n\beta$. Les valeurs de u_0 et u_1 donnent respectivement $3^0\alpha + 2^0\beta = \alpha + \beta = 0$, et $3\alpha + 2\beta = 1$, dont on déduit $\beta = -\alpha$, puis $\alpha = 1$, donc $\beta = -1$. Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n - 2^n$.

Encore une fois, le calcul éventuel de sommes partielles ne pose guère de problème puisque la suite est une somme de deux suites géométriques.

Chapitre 4

Ensembles et applications

Les ensembles sont les objets les plus basiques que l'on puisse manipuler en mathématiques. En effet, tout objet mathématique est un ensemble, auquel on ajoute éventuellement d'autres propriétés qui en font une fonction, une matrice ou plus simplement un entier (oui, un entier est un ensemble comme un autre, même si je ne m'étendrai pas là-dessus ici). Et pourtant, on ne définit jamais ce qu'est un ensemble mathématique. En effet, la notion d'ensemble est tellement élémentaire qu'on ne peut pas s'appuyer sur une autre notion pour la décrire.

4.1 Ensembles

Définition 30. Un **ensemble** E est une collection d'objets. On peut définir un ensemble mathématique en nommant tous les objets le constituant, par exemple $E = \{4; 5; 6; 7; 8\}$ ou en les caractérisant par une propriété commune, par exemple $E = \{n \in \mathbb{N} \mid 4 \leqslant n \leqslant 8\}$. Ce deuxième type de définition fait souvent intervenir un autre ensemble.

Définition 31. Deux ensembles sont **égaux** s'ils sont constitués des mêmes éléments. Un ensemble E est **inclus** dans un ensemble F si tous les éléments de E appartiennent à F, ce qu'on note $E \subset F$. On dit aussi que E est un **sous-ensemble** de F, et on parle de **sous-ensemble propre** lorsqu'en plus $E \neq F$ (on peut également noter $E \subsetneq F$ pour un sous-ensemble propre).

Remarque 19. Pour prouver que $E \subset F$, on considère généralement un élément quelconque de E, et on essaie de prouver qu'il appartient à F. Pour montrer l'égalité de deux ensembles, on procèdera souvent par double inclusion : on prouve séparément $E \subset F$ et $F \subset E$.

Définition 32. L'ensemble ne contenant aucun élément, appelé **ensemble vide**, est noté $\emptyset$.

Définition 33. Soient A et B deux ensembles inclus dans un même ensemble E. On définit la réunion de A et de B par $A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \,\textbf{ou}\, x \in B\}$; et l'intersection de A et de B par $A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \,\textbf{et}\, x \in B\}$.

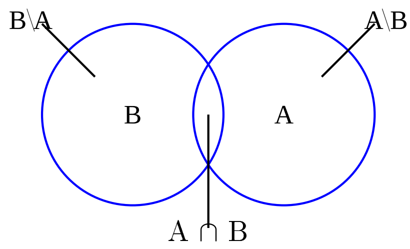
Remarque 20. On peut très bien définir des unions ou intersections de plus de deux ensembles, qu'on notera souvent en utilisant une variable muette comme pour les sommes et les produits. On peut même avoir des unions ou intersections infinies, par exemple, $\bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} \left] -\frac{1}{n}; \frac{1}{n} \right[= \{0\}$. En général, $x \in \bigcap_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \forall i \in I, x \in A_i$ et $x \in \bigcup_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \exists i \in I, x \in A_i$.

Proposition 21. Les propriétés élémentaires sur les opérations de réunion et d'intersection sont les suivantes :
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (on peut donc noter $A \cup B \cup C$).
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (on peut donc noter $A \cap B \cap C$).
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Démonstration. L'associativité des deux opérations (les deux premières propriétés) est évidente. L'ensemble $A \cup B \cup C$ est simplement constitué des éléments appartenant à un (au moins) des trois ensembles A, B et C, ceci ne dépend absolument pas de l'ordre dans lequel on fait les réunions. De même pour l'intersection.

Montrons que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Soit $x \in A \cap (B \cup C)$, cela signifie que $x \in A$ et soit $x \in B$, soit $x \in C$. Dans le premier cas, $x \in A \cap B$, dans le deuxième $x \in A \cap C$, donc dans les deux cas $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, et la première inclusion est vraie. Dans l'autre sens, si $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, on a soit $x \in A \cap B$, soit $x \in A \cap C$. Dans les deux cas, $x \in A$, et x appartient à l'un des deux ensembles B et C, donc $x \in A \cap (B \cup C)$, ce qui montre la deuxième inclusion. La deuxième propriété de distributivité se montre de façon similaire. □

Définition 34. Soit A un sous-ensemble d'un ensemble E. On définit le **complémentaire** de A dans E par $\overline{A} = \{x \in E \mid x \notin A\}$. Plus généralement, si B est un autre sous-ensemble de E, on peut définir le complémentaire de A dans B (aussi appelé différence de B et de A) par $B \backslash A = \{x \in B \mid x \notin A\}$.



Exemple : Soit $E = \mathbb{R}$ et $A = [-3; 5]$, alors $\overline{A} =]-\infty; 3[\cup]5; +\infty[$.

Proposition 22. Lois de Morgan. Deux propriétés symétriques à retenir :
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Démonstration. Ne pas appartenir à A ou à B est équivalent à n'appartenir ni à A, ni à B. C'est juste ceci que retranscrit la première loi de Morgan. La deuxième est similaire. □

Définition 35. Une **partition** d'un ensemble E est un ensemble de sous-ensembles A_1, ..., A_n de E vérifiant $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = E$ et $\forall i \in \{1; \dots; n\}$, $\forall j \neq i$, $A_i \cap A_j = \emptyset$. Autrement dit, tout élément de E appartient à un et un seul des ensembles A_i.

Exemple : Si on note $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ est pair }\}$ et $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ est impair }\}$, les ensembles A et B forment une partition de $\mathbb{N}$.

Remarque 21. On peut en fait définir de même la notion de partition infinie.

Définition 36. Le **produit cartésien** de deux ensembles E et F est l'ensemble constitué de tous les couples d'éléments (x, y), avec $x \in E$ et $y \in F$. On le note $E \times F$.

Remarque 22. Les notations sont très importantes : l'ensemble $\{2; 3\}$ est constitué de deux éléments (les entiers 2 et 3), alors que l'ensemble $\{(2, 3)\}$ est constitué d'un seul élément, la paire d'entiers $(2, 3)$.

Remarque 23. Encore une fois, on généralise facilement à plus de deux ensembles.

Remarque 24. Lorsque $E = F$, on note E^2 plutôt que $E \times E$, et plus généralement
$\underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{n \text{ fois}} = E^n$.

Définition 37. L'ensemble des parties d'un ensemble E, noté $\mathcal{P}(E)$, est l'ensemble dont les éléments sont les sous-ensembles de E.

Exemple : Si $E = \{1; 2; 3\}$, $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1; 2\}; \{1; 3\}; \{2; 3\}; \{1; 2; 3\}\}$.

4.2 Applications

Une application est un cas particulier de ce que vous avez l'habitude d'appeler une fonction. La différence est qu'une application doit être définie sur tout son ensemble de départ, alors qu'on parle par exemple de fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour la fonction inverse (mais on peut très bien parler de l'application inverse de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$).

Définition 38. Une **application** f est la donnée d'un ensemble E, appelé ensemble de départ de l'application, d'un ensemble F appelé ensemble d'arrivée, et pour chaque élément x de E, d'un unique élément de F noté $f(x)$. On appelle $f(x)$ **image** de l'élément x par f, et si $y \in E$, les éléments x de E vérifiant $f(x) = y$ sont appelés **antécédents** de y par f (un élément y peut très bien ne pas avoir d'antécédent, ou au contraire en avoir plusieurs).

Exemple : L'application $x \to x$, définie sur un ensemble quelconque E, est appelée application identité, souvent notée id (ou id_E si on veut bien préciser l'ensemble de départ). La fonction $x \mapsto \dfrac{3}{x-2}$ est une application de $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ dans $\mathbb{R}$.

Remarque 25. Deux applications sont identiques si elles ont même ensemble de départ, même ensemble d'arrivée et envoient un même élément sur une même image. Par exemple, les fonctions d'une variable réelle $f : x \mapsto x - 4$ et $g : x \mapsto \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x - 1}$ sont différentes, même si elles coïncident sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$: elles n'ont pas le même ensemble de définition.

Définition 39. Soit $f : E \to F$ une application et E' un sous-ensemble de E. L'application $g : E' \to F$ définie par $\forall x \in E'$, $g(x) = f(x)$ est appelée **restriction** de f au sous-ensemble E' et notée $f_{|E'}$. On dit egalement que f est un **prolongement** de g à E.

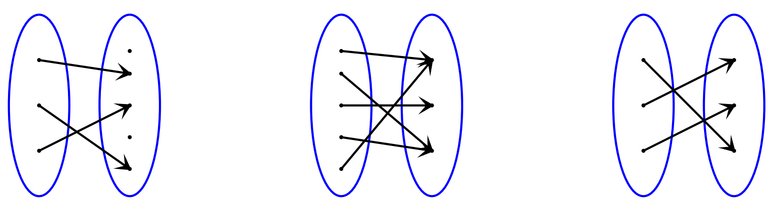
Exemple : La fonction $x \to x \ln x$, définie sur R_+^*, peut se prolonger en une fonction $\tilde{f}$ définie et continue sur R_+ en posant $\tilde{f}(0) = 0$. En pratique, on utilise souvent la même notation pour désigner le prolongement que pour la fonction d'origine, même si c'est un abus de notation.

Définition 40. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications, alors la **composée** de g et de f est l'application $g \circ f : E \to G$ définie par $g \circ f(x) = g(f(x))$.

Remarque 26. La composition n'est bien sûr pas commutative ; en général, $f \circ g$ n'est même pas définie quand $g \circ f$ l'est.

Exemple : On considère les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ et $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définies par $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt{x}$; alors $g \circ f(x) = |x|$ et $f \circ g(x) = x$ (la première composée étant définie sur $\mathbb{R}$ et la deuxième sur $\mathbb{R}_+$).

Définition 41. Soit $f : E \to F$ une application, f est dite **injective** si $\forall (x, x') \in E^2, f(x) = f(x') \Rightarrow x = y$; f est dite **surjective** si $\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$; enfin, f est dite **bijective** si elle est à la fois injective et surjective.



f injective $\quad$ f surjective $\quad$ f bijective

Remarque 27. Autrement dit, f est injective si tout élément de F a au plus un antécédent par f, surjective si tout élément de F a au moins un antécédent de F, et bijective si tout élément de F a exactement un antécédent par f. On peut aussi définir une application injective de la façon suivante : $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$.

Exemples : L'application $x \mapsto x^2$, qui va de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$, est surjective (tout réel positif admet une racine carrée) mais pas injective car par exemple 2 et -2 ont la même image par f. L'application racine carrée est par contre bijective de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même.

Proposition 23. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective. Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.

Démonstration. Supposons g et f injectives, et soient $x, x' \in E^2$ tels que $g(f(x)) = g(f(x'))$. Par injectivité de g, on a alors nécessairement $f(x) = f(x')$, puis par injectivité de f, $x = x'$, ce qui prouve l'injectivité de $g \circ f$. Supposons désormais g et f surjectives et soit $z \in G$. Par surjectivité de g, $\exists y \in F$, $z = g(y)$, puis par surjectivité de f, $\exists x \in E$, $y = f(x)$. Mais alors $z = g \circ f(x)$, donc z a un antécédent par $g \circ f$, ce qui prouve sa surjectivité. □

Remarque 28. La réciproque de ces propriétés est totalement fausse, voir la feuille d'exercices pour quelques exemples.

Proposition 24. Une application $f : E \to F$ est bijective si et seulement si il existe $g : F \to E$ telle que $g \circ f = id_E$ et $f \circ g = id_F$. L'application g est alors appelée **bijection réciproque** de f (ou réciproque tout court) et notée f^{-1}.

Remarque 29. Cette réciproque, bien que notée f^{-1}, n'a rien à voir avec la fonction inverse de f, que pour cette raison nous noterons toujours $\dfrac{1}{f}$. Notons au passage que f^{-1} est effectivement bijective, de réciproque f (c'est évident une fois le théorème démontré).

Démonstration. Supposons f bijective et soit $y \in F$. Il existe un unique antécédent x de y par f, on pose $g(y) = x$. On a alors par construction $f \circ g(x) = x$, donc $f \circ g = id_F$. De plus, si $x \in E$, $g(f(x))$ est un antécédent de $f(x)$, mais comme il n'y en qu'un ça ne peut être que x, donc on a aussi $g \circ f = id_E$.
Réciproquement, si $g \circ f = id_E$ et $f \circ g = id_F$, considérons x et x' tels que $f(x) = f(x')$, on a alors $g \circ f(x) = g \circ f(x')$, donc $x = x'$, ce qui prouve l'injectivité de f. Soit maintenant $y \in F$, alors $g(y)$ est un antécédent de y par f puisque $f \circ g(y) = y$, donc f est sujective. L'application f est donc bijective. □

Remarque 30. Vous connaissez déjà quelques exemples classiques de bijections réciproques, notamment ln (bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$) et exp (bijective réciproque de ln de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$). Vous savez également que les représentations graphiques de ces deux fonctions sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$. C'est une propriété générale des fonctions réciproques.

Exemple : L'application $f : x \mapsto 3x + 6$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et son application réciproque est l'application $g : x \mapsto \dfrac{1}{3}x - 2$. En effet, $g \circ f(x) = \dfrac{1}{3}(3x+6) - 2 = x$ et $f \circ g(x) = 3\left(\dfrac{1}{3}x - 2\right) + 6 = x$.

Proposition 25. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications bijectives, alors $g \circ f : E \to G$ est une application bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Démonstration. f et g étant à la fois injectives et surjectives, $g \circ f$ est à la fois injective et surjective (cf plus haut) donc bijective. De plus, $\forall x \in E$, $f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f(x) = f^{-1}((g^{-1} \circ g)(f(x))) = f^{-1}(f(x)) = x$ et de même $\forall x \in G$, $g \circ f \circ f^{-1} \circ g^{-1}(x) = x$. □

Définition 42. Soit $f : E \to F$ une application et $A \subset E$. On appelle **image** (directe) de A l'ensemble des images des éléments de A : $f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A, f(x) = y\}$. Soit maintenant $B \subset F$, on appelle **image réciproque** de B par F l'ensemble des antécédents d'élements de B : $f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$.

Remarque 31. La deuxième notation n'a pas été choisie de façon contradictoire avec la définition d'application réciproque (encore heureux). Si f est bijective, l'image réciproque d'une partie B de F est confondue avec son image directe par f^{-1}.

Exemple : Considérons l'application $f : x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors $f([2;5]) = [4;25]$; $f([-1;3]) = [0;9]$; $f^{-1}([4;9]) = [-3;-2] \cup [2;3]$.

Chapitre 5

Convergence de suites

Après un premier chapitre sur les suites assez général où rien d'extrêmement complexe n'avait été abordé, nous entrons dans le vif du sujet avec le principal sujet d'étude à notre programme cette année : la convergence. Ce chapitre est doublement important puisque toutes les très importantes notions vues ici seront reprises (et adaptées, bien entendu) dans le cadre des fonctions d'ici quelques mois. La notion de limite n'est sûrement pas une totale découverte pour vous, mais nous allons l'aborder cette année dans un cadre très rigoureux qui peut déstabiliser au premier abord. Certes, les définitions sont un peu complexes, mais une fois assimilées, elles sont en fait beaucoup plus maniables que la notion très floue que vous aviez pu voir jusqu'à présent.

5.1 Définitions

La notion de limite est intuitivement assez simple : on se rapproche « autant qu'on le souhaite » d'une certaine valeur quand n devient « suffisamment grand ». Pour rendre cette idée mathématiquement rigoureuse, il suffit en fait d'expliciter les deux expressions entre guillemets via l'utilisation de quantificateurs.

5.1.1 Limites finies

Définition 43. Une suite réelle (u_n) **converge** vers une **limite** $l \in \mathbb{R}$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n_0$, $|u_n - l| < \varepsilon$. On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$. Toute suite convergeant vers une limite l est appelée suite **convergente**. Sinon, la suite est dite **divergente** (même si elle peut avoir une limite infinie).

Rappelons que $|u_n - l| < \varepsilon$ signifie que $u_n \in]l - \varepsilon; l + \varepsilon[$. Autrement dit, aussi petit que soit l'intervalle que l'on prend autour du réel l (c'est-à-dire aussi proche de 0 que soit ε dans notre définition), les valeurs de la suite vont finir par être **toutes** dans cet intervalle, à condition qu'on attende suffisamment longtemps (jusqu'à n_0).

Méthode : Pour prouver qu'une suite donnée converge vers un certain réel à l'aide de cette définition (ce qu'on fera heureusement assez rarement, mais il est important de bien comprendre les mécanismes cachés derrière le formalisme), on procède ainsi :

- On fixe ε à une valeur strictement positive quelconque.
- On calcule $|u_n - l|$.
- On cherche une valeur de n_0 (qui va naturellement dépendre de ε) pour laquelle cette expression est inférieure à ε.

Exemple : Considérons la suite définie par $u_n = \dfrac{n+3}{n+2}$, et prouvons que sa limite vaut 1. Soit $\varepsilon > 0$, alors $|u_n - 1| = \left|\dfrac{n+3}{n+2} - 1\right| = \left|\dfrac{n+3-(n+2)}{n+2}\right| = \left|\dfrac{1}{n+2}\right| = \dfrac{1}{n+2}$. L'expression étant positive, il suffit de déterminer pour quelles valeurs de n on a $\frac{1}{n+2} < \varepsilon$, ce qui nous donne $n > \frac{1}{\varepsilon} - 2$. On peut donc choisir $n_0 = Ent\left(\frac{1}{\varepsilon} - 2\right) + 1$ (remarquez que, plus ε est proche de 0, plus n_0 devient grand, ce qui est logique).

Remarque 32. Le fait qu'une suite soit ou non convergente ne dépend absolument pas de ce qui se passe « au début » de la suite. Autrement dit, on peut très bien modifier par exemple le milliard de premiers termes d'une suite, ça ne change rien à sa limite éventuelle (on devra juste chercher nos n_0 un peu plus loin). Dans le même ordre d'idée, décaler les indices de la suite ou même en sauter une partie ne va pas changer grand chose : ainsi, si $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$, on aura $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$ et $\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = l$ (attention tout de même, pour cette dernière propriété, la réciproque n'est pas vraie).

Proposition 26. Soit (u_n) une suite convergente, alors sa limite l est unique.

Démonstration. Nous allons pour la première fois cette année recourir à un raisonnement par l'absurde pour démontrer cette proposition. Supposons donc que le résultat énoncé est faux, c'est-à-dire qu'une même suite (u_n) admet deux limites distinctes l et l' (notons par exemple l' la plus grande des deux), et tentons de montrer que ceci entraine une absurdité. Appliquons donc la définition de la limite avec $\varepsilon = \frac{l'-l}{3}$: on peut donc trouver d'une part un entier n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \in]l-\varepsilon; l+\varepsilon[$; d'autre part un entier n_1 tel que $\forall n \geqslant n_1$, $u_n \in]l'-\varepsilon; l'+\varepsilon[$. mais alors, dès que $n \geqslant \max(n_0, n_1)$, on a $u_n \in]l-\varepsilon; l+\varepsilon[\cap]l'-\varepsilon; l'+\varepsilon[$, ce qui est très gênant puisque cette intersection est vide d'après la définition de ε. Conclusion, l'hypothèse effectuée était absurde, et une suite ne peut pas avoir deux limites différentes. □

Proposition 27. Toute suite convergente est bornée.

Démonstration. Appliquons la définition de la limite avec par exemple $\varepsilon = 1$. On obtient un entier n_0 tel que, $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \in]l-1; l+1[$. Par ailleurs, les termes de la suite d'indice inférieur à n_0 sont en nombre fini, il en existe donc un qui est le plus grand (notons sa valeur M) et un qui est le plus petit (on va le noter m). Il est alors facile de constater que la suite est minorée par $\min(m, l-1)$ et majorée par $\max(M, l+1)$. □

Théorème 3. Théorème de convergence monotone :
Toute suite décroissante et minorée converge. Toute suite croissante et majorée converge.

Démonstration. Ce résultat, bien que relativement intuitif, est plus difficile à démontrer qu'il n'en a l'air, au point d'ailleurs que nous allons l'admettre (une des difficultés étant de caractériser la limite comme étant le plus petit majorant de la suite, et de montrer qu'une telle chose existe). □

Remarque 33. Attention ! Une suite croissante et majorée par un réel M ne converge pas nécessairement **vers M**. La suite a tout un paquet de majorants, dont un seul est sa limite.

Exemple : La suite définie par $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}dx$ est croissante (car, $\forall x \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x^{n+1} \leqslant x^n$, donc $\frac{1}{1+x^n} \leqslant \frac{1}{1+x^{n+1}}$), et majorée par 1 (car $\forall x \in [0;1]$, $\frac{1}{1+x^n} \leqslant 1$, donc $\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}dx \leqslant \int_0^1 1dx = 1$), donc convergente. Mais ces arguments ne prouvent en aucun cas que sa limite est 1. Le calcul de la limite est d'ailleurs loin d'être simple (nous reverrons des exemples de ce genre dans le chapitre sur l'intégration).

5.1.2 Limites infinies

Bien qu'étant divergentes, certaines suites ont un comportement plus intéressant que d'autres quand n tend vers $+\infty$. Ce sont celles qui deviennent « très grandes » ou « très négatives ». Encore une fois, un peu de formalisation sera nécessaire pour obtenir une définition maniable, mais c'est plutôt plus facile que dans le cas des limites finies.

Définition 44. Une suite réelle (u_n) **diverge vers** $+\infty$ si $\forall A \in \mathbb{R}$, $\exists n_0 \in \mathbb{R}$, $\forall n \geqslant n_0$, $u_n > A$. On le note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$. De même, une suite réelle (u_n) **diverge vers** $-\infty$ si $\forall A \in \mathbb{R}$, $\exists n_0 \in \mathbb{R}$, $\forall n \geqslant n_0$, $u_n < A$. On le note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Exemple : Considérons la suite définie par $u_n = n^2$ et montrons à l'aide de cette définition que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$. Comme pour le cas d'une limite finie, on commence pour cela par fixer la valeur de A. Constatons ensuite que $u_n > A \Leftrightarrow n > \sqrt{A}$ (si $A \geqslant 0$; mais si $A < 0$, il n'y a pas vraiment de souci puisque dans ce cas u_n est toujours supérieur à A). On peut donc choisir $n_0 = Ent(\sqrt{A}) + 1$, et on a bien $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Proposition 28. Une suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$. Une suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.

Démonstration. Soit (u_n) une suite croissante et non majorée. Cette dernière hypothèse signifie que $\forall A \in \mathbb{R}$, $\exists n_0 \in \mathbb{R}$, $u_{n_0} > A$. Mais la suite étant croissante, on a en fait $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant u_{n_0} > A$, ce qui prouve exactement la divergence vers $+\infty$. Inutile de refaire quoi que ce soit pour le deuxième cas : si (v_n) est décroissante non minorée, alors $(-v_n)$ est croissante non majorée, et on se ramène au cas précédent. □

5.2 Propriétés principales

5.2.1 Limites de suites usuelles

Proposition 29. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Si $r > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$. Si $r < 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$. Si $r = 0$, la suite (u_n) est constante égale à u_0 et converge donc vers u_0.

Démonstration. Supposons $r > 0$ et considérons $A \in \mathbb{R}$, alors $u_n > A \Leftrightarrow u_0 + nr > A \Leftrightarrow n > \dfrac{A - u_0}{r}$. On peut donc prendre $n_0 = Ent\left(\dfrac{A - u_0}{r}\right) + 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$. Si $r < 0$, le calcul est le même, si ce n'est que le signe de l'inégalité change quand on divise par r, d'où le fait que $u_n < A \Leftrightarrow n > \dfrac{u_0 - A}{r}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$. □

Proposition 30. Limites des suites géométriques.
Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 \neq 0$.

- si $q > 1$, la suite diverge vers $+\infty$ si $u_0 > 0$, vers $-\infty$ si $u_0 < 0$.
- si $q = 1$, la suite (u_n) est constante et converge vers u_0.
- si $-1 < q < 1$, la suite (u_n) converge vers 0.
- si $q \leqslant -1$, la suite (u_n) est divergente.

Démonstration.

- Si $q > 1$, on sait que $u_n = u_0 \times q^n$. En supposant $u_0 > 0$ (sinon on passe à l'opposé), on a donc $\ln u_n = \ln u_0 + n \ln q$, qui est une suite arithmétique de raison strictement positive, donc tendant vers $+\infty$.
- Sautons allègrement le cas $q = 1$ qui ne pose aucun problème, et considérons maintenant le cas où $|q| < 1$. Dans ce cas (et si $q \neq 0$, autre cas particulier ne posant aucun problème), on constate que $\dfrac{1}{|q|} > 1$. Constatons par ailleurs que $\dfrac{1}{|u_n|} = \dfrac{1}{u_0|q|^n}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{|q|}$ (et de premier terme $\dfrac{1}{u_0}$). D'après ce qui précède, elle converge donc vers $\pm\infty$. Son inverse tend alors vers 0 (oui, je sais, ça découle d'un résultat qui est un peu plus loin dans le cours), donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- Si $q = -1$, la suite oscille entre deux valeurs distinctes et n'a pas de limite. Si $q < -1$, $|u_n|$ diverge vers $+\infty$ (puisque c'est une suite géométrique de premier terme positif et de raison plus grande que 1), donc (u_n) n'est pas bornée et ne peut converger. Il est également facile de prouver qu'elle ne peut avoir une limite infinie puisque ses termes sont de signe alterné.

□

5.2.2 Opérations et limites

Comme on ne se contentera pas de travailler avec des suites aussi simples que les suites arithmétiques et géométriques, mais que celles-ci constituent tout de même les éléments de base de la construction d'un certain nombre de suites (à commencer par les suites arithmético-géométriques ou récurrentes linéaires), il est nécessaire de savoir calculer des limites de sommes ou de produits de suite. C'est assez intuitif, mais il faut surtout se souvenir des cas où on ne peut pas conclure, les fameuses **formes indéterminées**.

Proposition 31. Soient (u_n) et (v_n) deux suites ayant une limite (finie ou infinie), alors la limite de leur somme $(u_n + v_n)$ est donnée par le tableau suivant (f.i. signifiant forme indéterminée) :

$(u_n)\backslash(v_n)$	l'	$+\infty$	$-\infty$
l	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$f.i.$
$-\infty$	$-\infty$	$f.i.$	$-\infty$

Démonstration. Prouvons par exemple le cas où les deux suites ont une limite finie, notées respectivement l et l'. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe un entier n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \in \left]l - \dfrac{\varepsilon}{2}; l + \dfrac{\varepsilon}{2}\right[$ (oui, la division par 2 est volontaire, après tout $\dfrac{\varepsilon}{2}$ est un réel strictement positif auquel on peut appliquer la définition de la limite) ; et un entier n_1 tel que $\forall n \geqslant n_1$, $v_n \in \left]l' - \dfrac{\varepsilon}{2}; l' + \dfrac{\varepsilon}{2}\right[$. En notant $N = \max(n_0, n_1)$, on obtient alors en ajoutant les deux encadrements $\forall n \geqslant N$, $u_n + v_n \in]l + l' - \varepsilon, l + l' + \varepsilon[$, ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = l + l'$. Les autres cas se démontrent de façon similaire et ne présentent pas de grosse difficulté. □

Exemples : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 - 47 = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2} + 2 = 2$.

Proposition 32. Soit (u_n) une suite réelle et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Alors, si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda u_n = \lambda l$. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda u_n = \pm\infty$ (le signe dépendant du signe de la limite de (u_n) et de celui de λ suivant la règle des signes).

Démonstration. Prouvons le cas où la limite est finie. Soit $\varepsilon > 0$, alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, |u_n - l| < \dfrac{\varepsilon}{|\lambda|}$ (c'est la même astuce que pour la démonstration de la limite d'une somme), donc pour $n \geqslant n_0$, $|\lambda u_n - \lambda l| < \varepsilon$, ce qui prouve bien que $\lim\limits_{n \to +\infty} \lambda u_n = \lambda l$. Le cas des limites infinies est très similaire. □

Exemples : $\lim\limits_{n \to +\infty} -3n = -\infty$; $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3}{n} + 2n - 1 = +\infty$.

Proposition 33. Soient (u_n) et (v_n) deux suites ayant une limite (finie ou infinie), alors la limite de leur produit $(u_n v_n)$ est donnée par le tableau suivant :

$(u_n)\backslash(v_n)$	$l' > 0$	$l' < 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$l > 0$	$l.l'$	$l.l'$	0	$+\infty$	$-\infty$
$l < 0$	$l.l'$	$l.l'$	0	$-\infty$	$+\infty$
0	0	0	0	$f.i.$	$f.i.$
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$f.i.$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$f.i.$	$-\infty$	$+\infty$

Démonstration. Commençons par prouver le cas où les deux suites ont pour limite 0, et considérons $\varepsilon > 0$. Il existe deux réels n_0 et n_1 tels que, respectivement, $\forall n \geqslant n_0$, $|u_n| < \sqrt{\varepsilon}$; et $\forall n \geqslant n_1$, $|v_n| < \sqrt{\varepsilon}$. On en déduit que $\forall n \geqslant \max(n_0, n_1)$, $|u_n v_n| < \varepsilon$, ce qui prouve que $(u_n v_n)$ tend vers 0.

Supposons désormais que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l' \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - l) = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - l') = 0$, donc en utlisant ce qu'on vient juste de démontrer $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - l)(v_n - l') = 0$. Or, $(u_n - l)(v_n - l') = u_n v_n - l v_n - l' u_n + l l'$, ou encore $u_n v_n = (u_n - l)(v_n - l') + l v_n + l' u_n - l l'$. D'après les propositions démontrées auparavant (limite d'une somme et d'un produit par un réel), on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n v_n = 0 + ll' + l'l - ll' = ll'$. □

Remarque 34. Dans les cas où on tombe sur une forme indéterminée avec une somme de suites, il est souvent efficace de transformer la somme en produit en factorisant par un terme « le plus gros possible ». Notamment, dans le cas d'un polynôme, on factorise par le terme de plus haut degré : $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 - 3n + 2 = \lim\limits_{n \to +\infty} n^2 \left(1 - \dfrac{3}{n} + \dfrac{2}{n^2}\right) = +\infty$.

Définition 45. On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0^+$ lorsque la suite (u_n) tend vers 0 en étant positive à partir d'un certain rang. De même, on notera $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0^-$ si (u_n) est négative à partir d'un certain rang.

Proposition 34. Soit (u_n) une suite réelle qui ne s'annule plus à partir d'un certain rang, et ayant une limite, alors la limite de $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ est donnée par le tableau suivant :

(u_n)	$l \neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$	$\dfrac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-

Démonstration. Prouvons par exemple le cas où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0^+$. Soit $A > 0$, alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0$, $|u_n| < \dfrac{1}{A}$. Quitte à changer la valeur de n_0 pour atteindre le rang à partir duquel (u_n) est positive et ne s'annule plus, on a même $0 < u_n < \dfrac{1}{A}$, d'où $\dfrac{1}{u_n} > A$, ce qui prouve que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{u_n} = +\infty$. □

Remarque 35. Pas besoin de donner des règles pour le quotient de deux suites, puisqu'un quotient n'est rien d'autre que le produit par un inverse. Dans les cas où on tombe sur un quotient coriace, la méthode la plus efficace reste la plupart du temps de factoriser numérateur et dénominateur par leur terme « le plus fort ». Nous verrons un peu plus loin dans le cours une façon plus élégante de rédiger ce genre de calcul à l'aide de la notion d'équivalent.

Exemple : $u_n = \dfrac{\ln n + n^2 + 2}{e^n + \sqrt{n}} = \dfrac{n^2}{e^n} \times \dfrac{1 + \frac{2}{n^2} + \frac{\ln n}{n^2}}{1 + \frac{\sqrt{n}}{e^n}}$. En utilisant nos connaissances sur les croissances comparées, il est facile de constater que le premier quotient tend vers 0 et le deuxième vers 1, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

5.2.3 Théorèmes de comparaison

Proposition 35. Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergeant repectivement vers l et l' et telles que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang. Alors $l \leqslant l'$.

Démonstration. Petit raisonnement par l'absurde : supposons $l > l'$ et posons $\varepsilon = \dfrac{l - l'}{3}$, alors à partir d'un certain rang on aura $u_n \in \left]l - \dfrac{\varepsilon}{3}, l + \dfrac{\varepsilon}{3}\right[$ et $v_n \in \left]l' - \dfrac{\varepsilon}{3}, l' + \dfrac{\varepsilon}{3}\right[$. Mais comme $l' + \dfrac{\varepsilon}{3} < l - \dfrac{\varepsilon}{3}$ (par construction de ε), ceci est incompatible avec le fait que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang. L'hypothèse est donc absurde et $l \leqslant l'$. □

Remarque 36. Cette proposition est souvent utilisée sous la forme plus simple où l'une des deux suites est constante. Ainsi, si (u_n) converge et que $u_n \leqslant A$ à partir d'un certain rang, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \leqslant A$. Notamment, la limite d'une suite de signe constant est de même signe que la suite.

Remarque 37. L'inégalité sur la limite est toujours large, même si on a une inégalité stricte entre u_n et v_n. Par exemple, $\forall n \geqslant 1$, $1 + \dfrac{1}{n} > 1 + \dfrac{1}{n^2}$, mais ces deux suites ont la même limite.

Théorème 4. Théorème des gendarmes (ou théorème d'encadrement si vous voulez faire plus sérieux).
Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites vérifiant $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang, et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ (ces limites ont le droit d'être infinies).

Démonstration. Occupons-nous du cas où la limite commune de (u_n) et (w_n) est un réel l, et choisissons $\varepsilon > 0$. Alors à partir d'un certain rang, on aura $|u_n - l| < \varepsilon$ et $|v_n - l| < \varepsilon$. Autrement dit, u_n et v_n appartiennent tous deux à l'intervalle $]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$. Mais alors w_n, qui se situe entre les deux, appartient lui aussi à cet intervalle, et $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = l$. Le cas des limites infinies est tout aussi simple (une seule des deux suites encadrantes suffit même). □

Exemple : Considérons la suite définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{k=2n} \frac{1}{k^2}$. Très pénible à étudier avec sa somme à nombre de termes variable, mais si on ne veut que la limite, c'est beaucoup plus facile. Chacun des termes de la somme est compris entre le plus petit, en l'occurence $\dfrac{1}{(2n)^2}$, et le plus grand, à savoir $\dfrac{1}{(n+1)^2}$, donc $\dfrac{n}{(2n)^2} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n}{(n+1)^2}$ (il y a n dans la somme définissant u_n). Chacune des deux suites encadrant u_n ayant pour limite 0, le théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

5.2.4 Suites adjacentes

Définition 46. Deux suites (u_n) et (v_n) sont **adjacentes** si elles vérifient les deux propriétés suivantes :

- l'une est croissante et l'autre décroissante.
- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - v_n = 0$.

Théorème 5. Deux suites adjacentes convergent et ont la même limite.

Démonstration. Supposons par exemple (u_n) croissante et (v_n) décroissance, et commençons par constater que la suite $(u_n - v_n)$ est croissante et a pour limite 0. Cela implique que cette suite est à termes négatifs : en effet, si on avait, pour un rang n_0, $u_{n_0} - v_{n_0} = \alpha > 0$, $(u_n - v_n)$ serait supérieure à $\alpha > 0$ à partir d'un certain rang, donc ne pourrait pas converger vers 0. Conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$.
Mais alors, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$. Autrement dit, (u_n) est croissante et majorée donc convergente. De même, (v_n) est décroissante et minorée par u_0, donc converge également. Si on note l et l' leurs limites respectives, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = l - l' = 0$, donc $l = l'$, ce qui achève la démonstration. □

Exemple : Considérons les suites définies par $u_n = \sum\limits_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$ (rappelons au passage que $0! = 1$). Comme $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$, la suite (u_n) est croissante. Par ailleurs, $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)} - u_n - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{n} = \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2} = \frac{-1}{(n+1)^2}$, qui est négatif. La suite (v_n) est donc décroissante. Reste à vérifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$, ce qui n'a rien de difficile puisque $u_n - v_n = -\frac{1}{n}$. Les deux suites sont donc adjacentes (pour les curieux, leur limite commune vaut $\frac{\pi^2}{6}$).

5.3 Équivalents et négligeabilité

Dans cette dernière section, nous allons introduire de nouveaux concepts qui nous permettront de retranscrire de façon plus élégante certains résultats déjà vus, et surtout de se simplifier énormément les calculs de limite. Il s'agit de donner une définition précise à la notion d'odre de grandeur. Les résultats de croissance comparée stipulent par exemple que la fonction ln n'est pas du même ordre de grandeur que la fonction carré quand x tend vers $+\infty$, même si ces deux fonctions ont pour limite $+\infty$. Par contre, il paraitrait raisonnable, par exemple, de dire que x^2 et $x^2 + 2$ sont du même ordre de grandeur en $+\infty$ (l'écart entre les deux devenant négligeable).

5.3.1 Définitions

Définition 47. Deux suites (u_n) et (v_n) sont **équivalentes** si on peut écrire $u_n = a_n v_n$, où (a_n) est une suite vérifiant $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$. Plus simplement, si les deux suites ne s'annulent plus à partir d'un certain rang, cela revient à dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$. On le note $u_n \sim v_n$.

Remarque 38. Le fait que la limite du quotient soit égale à 1 transcrit bien la notion de même ordre de grandeur. Une suite équivalente à une constante $l \neq 0$ est tout simplement une suite convergeant vers l.

Exemple : $n^2 + 2n + 3 \sim n^2$; $n + \ln n \sim n$ puisque $\frac{n + \ln n}{n} = 1 + \frac{\ln n}{n}$ a pour limite 1.

Remarque 39. Une suite polynômiale est toujours équivalente à son terme de plus haut degré.

Proposition 36. Deux suites équivalentes ont la même limite (quand elles ont une limite).

Démonstration. Dans le cas où (v_n) a une limite finie l, il suffit de constater que $u_n = v_n \times \frac{u_n}{v_n}$ et utiliser les règles de calcul de la limite d'un produit (le cas où l'une des suites est nulle à partir d'un certain rang n'est pas vraiment gênant puisqu'alors l'autre l'est aussi, et les deux suites convergent manifestement vers 0). Si (v_n) a pour limite $+\infty$, on peut en utilisant la définition de l'équivalence avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$ trouver un entier n_0 à partir duquel $\frac{1}{2} \leqslant \frac{u_n}{v_n} \leqslant \frac{3}{2}$, autrement dit $\frac{v_n}{2} \leqslant u_n \leqslant \frac{3v_n}{2}$. Le théorème des gendarmes permet alors de conclure. □

Définition 48. Une suite (u_n) est négligeable devant une suite (v_n) si on peut écrire $u_n = \varepsilon_n v_n$, où (ε_n) est une suite vérifiant $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$. Plus simplement, si les deux suites ne s'annulent plus à partir d'un certain rang, cela revient à dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$. On le note $u_n = o(v_n)$ (et on le lit « (u_n) est un petit o de (v_n) »).

Remarque 40. Dire que deux suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes revient à dire que $u_n - v_n = o(u_n)$ (réfléchissez-y, c'est logique). De même, $u_n = o(v_n)$ est équivalent à dire que $u_n + v_n \sim v_n$.

Proposition 37. Croissance comparée des fonctions usuelles.

- Si $\alpha < \beta$, $n^\alpha = o(n^\beta)$
- $\forall a > 1$, $\forall b > 0$, $n^b = o(a^n)$
- $\forall b > 0$, $\forall c > 0$, $(\ln n)^c = o(n^b)$

Remarque 41. Ces résultats, combinés à la remarque précédente, permettent d'obtenir très rapidement des équivalents (et donc la limite) de sommes de suites usuelles, par exemple $2^n - 12n^2 - 3\ln n \sim 2^n$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (2^n - 12n^2 - 3\ln n) = +\infty$. En gros, déterminer un équivalent consiste à ne garder que le terme prépondérant et à supprimer tous les termes négligeables devant lui.

Proposition 38. Soient deux suites (u_n) et (v_n) telles que $(u_n) = o(v_n)$. Si (v_n) est convergente alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Si $|u_n|$ diverge vers $+\infty$, alors $|v_n|$ aussi.

Démonstration. La première propriété est une nouvelle fois une simple conséquence des formules de limite d'un produit. Quant à la deuxième, la démonstration ressemble à celle déjà vue dans le cas de l'équivalence. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$, on aura certainement $|v_n| > |u_n|$ à partir d'un certain rang (il suffit de prendre $\varepsilon = 1$ dans la définition), donc si $|u_n|$ diverge vers $+\infty$, $|v_n|$ aussi. Sans les valeurs absolues, on a des problèmes de signe, on ne peut donc pas conclure grand chose d'intéressant. □

5.3.2 Propriétés

Proposition 39. Principales propriétés de l'équivalence.

- (symétrie) Si $u_n \sim v_n$, alors $v_n \sim u_n$.
- (transitivité) Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$, alors $u_n \sim w_n$.
- (stabilité par produit) Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim t_n$, alors $u_n w_n \sim v_n t_n$.
- (stabilité par inverse) Si $u_n \sim v_n$ et v_n ne s'annule plus à partir d'un certain rang, alors $\frac{1}{u_n} \sim \frac{1}{v_n}$.
- (stabilité par passage à la valeur absolue) Si $u_n \sim v_n$, alors $|u_n| \sim |v_n|$.

Démonstration. Si les suites ne s'annulent plus à partir d'un certain rang, les propriétés découlent très facilement de la définition de l'équivalence. Par exemple, pour la deuxième, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_n}{w_n} = 1$ donc par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} \times \frac{v_n}{w_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{w_n} = 1$. Dans le cas où une suite est nulle à partir d'un certain rang, c'est aussi le cas de toutes les suites qui lui sont équivalentes, donc on ne travaille qu'avec des suites nulles à partir d'un certain rang, et les résultats sont évidents. □

Exemple : Ces résultats, notamment la stabilité par produit et inverse, sont essentiels, car ils vont nous permettre de calculer notamment des limites de quotient en passant par les équivalents, nous évitant les fastideuses factorisations. Un exemple : $\frac{3n^3 - 5n^2 + 3n - 1}{n^3 + 5\ln n} \sim \frac{3n^3}{n^3} = 3$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n^3 - 5n^2 + 3n - 1}{n^3 + 5\ln n} = 3$. Une grande majorité des formes indéterminées que nous rencontrerons pourront se résoudre de cette façon.

Remarque 42. **ATTENTION**, on ne peut pas additionner des équivalents, c'est même une source d'horreurs mathématiques hélas très utilisée. Par exemple $n^2 + n \sim n^2$, et $-n^2 - 3 \sim -n^2$, mais la somme nous donnerait $n - 3$ équivalent à 0, ce qui est risible. Plus subtil, les équivalents ne se composent pas non plus en général. Ainsi, on peut avoir $u_n \sim v_n$ mais $e^{u_n} \nsim e^{v_n}$.

Proposition 40. Principales propriétés de la relation de négligeabilité.

- (transitivité) Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$.
- (stabilité par produit) Si $u_n = o(v_n)$, alors $u_n w_n = o(v_n w_n)$.
- (stabilité par produit, bis) Si $u_n = o(v_n)$ et $w_n = o(t_n)$ alors $u_n w_n = o(v_n t_n)$.
- (passage au quotient) Si $u_n = o(v_n)$ et que les suites ne s'annulent plus à partir d'un certain rang, alors $\dfrac{1}{v_n} = o\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$.

Démonstration. Comme pour les propriétés de l'équivalence, tout cela est extrêmement facile à démontrer à l'aide des propriétés sur les limites. Laissé en exercice au lecteur ! $\square$

Chapitre 6

Dénombrement

Introduction

La combinatoire, science du dénombrement, sert comme son nom l'indique à compter. Il ne s'agit bien entendu pas de revenir au stade du CP et d'apprendre à compter sur ses doigts, mais bien de définir des objets et notations mathématiques permettant de compter le nombre d'éléments d'ensemble bien trop gros et compliqués pour être dénombrés à la main. Le dénombrement n'a pas en soi énormément d'intérêt, mais trouvera toute son utilité ensuite en probabilités : dans le cadre des probabilités finies, la probabilité d'un évènement se calcule en divisant le nombre de cas favorables par le nombre total de cas possibles, ce qui suppose qu'on sache calculer les nombres de cas en question.

Quelques exemples de problèmes faisant intervenir les objets que nous allons étudier dans ce cours :
- Un joueur de poker tire (simultanément) cinq cartes dans un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité qu'il obtienne un brelan (trois cartes de même rang) ?
- Il y a 45 élèves dans la classe. Quelle est la probabilité qu'il y en ait (au moins) deux parmi eux qui soient nés le même jour de l'année ?
- Six élèves de la classe s'assoient autour d'une table ronde à la cantine. De combien de façon peuvent-ils le faire ? Si deux d'entre eux ne se supportent pas, quelle est la probabilité qu'ils se retrouvent l'un en face de l'autre ? Si deux autres s'apprécient particulièrement, quelle est la probabilité qu'ils se retrouvent côte à côte ? Quelle est la probabilité que les deux conditions soient remplies simultanément ?

6.1 Cardinaux d'ensembles finis

6.1.1 Quelques définitions

Définition 49. Un ensemble E est **fini** s'il est en bijection avec l'ensemble $\{1; 2; \dots; n\}$, pour un entier naturel n. Cet entier n est alors unique. Il est appelé **cardinal** de l'ensemble E, et on le note $card(E)$, ou $|E|$, ou encore $\sharp E$.

Remarque 43. Cela correspond bien à la notion intuitive d'ensemble dont on peut compter les éléments. En effet, une bijection de E vers $\{1; \dots; n\}$ est simplement une façon d'étiquetter les éléments de E avec les numéros 1, 2, ..., n.

Proposition 41. Soit E un ensemble fini et F un sous-ensmble de E, alors F est un ensemble fini, et $|F| \leqslant |E|$, avec égalité si et seulement si $E = F$.

Démonstration. Cette propriété, comme souvent en ce qui concerne les ensembles finis, est assez évidente d'un point de vue intuitif, mais pas si simple à démontrer correctement. Nous nous en tiendrons au point de vue intuitif. □

Proposition 42. Soient E et F deux ensembles finis. Si E et F sont en bijection l'un avec l'autre, ils ont même cardinal.

Démonstration. Il existe par hypothèse une bijection f de E vers F. De plus, F étant fini, notons n son cardinal, il existe alors une bijection g de F dans $\{1;\dots;n\}$. L'application $g\circ f : E \to \{1;\dots;n\}$ est une composée d'applications bijectives, donc est bijective, ce qui prouve que E est de cardinal n. □

6.1.2 Cardinaux élémentaires

Proposition 43. Soient A et B deux sous-ensembles d'un même ensemble fini E. Alors $|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|$.

Démonstration. Commençons par constater que dans le cas où les deux ensembles A et B sont disjoints, on a $|A\cup B| = |A| + |B|$. Vous voulez une démonstration ? Soit f une bijection de A dans $\{1;\dots;n\}$ et g une bijection de B dans $\{1;\dots;p\}$, n et p étant les cardinaux respectifs de A et de B. On peut alors construire une bijection h de $A\cup B$ vers $\{1;\dots;n+p\}$ en posant $\forall x\in A$, $h(x) = f(x)$ et $\forall x \in B$, $h(x) = g(x)+p$ (intuitivement, cela revient à garder pour les éléments de A la numérotation donnée par l'application f, et à décaler pour les éléments de B la numérotation donnée par g, de façon à ne pas utiliser deux fois les mêmes numéros). Une fois ce fait admis, constatons que $A\cup B$ est l'union disjointe des trois ensembles $A\backslash B$, $B\backslash A$ et $A\cap B$. On a donc, en utilisant le résultat que nous venons de démontrer, $|A\cup B| = |A\backslash B| + |B\backslash A| + |A\cap B|$. Or, A étant union disjointe de $A\backslash B$ et de $A\cap B$, on a également $|A| = |A\backslash B| + |A\cap B|$, ou encore $|A\backslash B| = |A| - |A\cap B|$. De même, $|B\backslash A| = |B| - |A\cap B|$, donc on obtient $|A\cup B| = |A| - |A\cap B| + |B| - |A\cap B| + |A\cap B|$, ce qui donne bien la formule annoncée. □

Théorème 6. Formule du crible de Poincaré.

Soient A_1, A_2, …, A_n des sous-ensembles finis d'un même ensemble E, alors

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{k=1}^{n} \sum_{1\leqslant i_1<\dots<i_k\leqslant n} (-1)^{k+1}|A_{i_1}\cap\dots\cap A_{i_k}|$$

Proposition 44. La formule de Poincaré étant assez peu lisible, voici ce que ça donne pour $n = 3$ et $n = 4$:

$|A\cup B\cup C| = |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|$

$|A\cup B\cup C\cup D| = |A| + |B| + |C| + |D| - |A\cap B| - |A\cap C| - |A\cap D| - |B\cap C| - |B\cap D| - |C\cap D| + |A\cap B\cap C| + |A\cap B\cap D| + |A\cap C\cap D| + |B\cap C\cap D| - |A\cap B\cap C\cap D|$

Démonstration. La preuve de la formule générale, assez technique, se fait par récurrence. On se contentera de prouver la formule pour $n = 3$ en partant de la proposition précédente : $|A\cup B\cup C| = |(A\cup B)\cup C| = |A\cup B| + |C| - |(A\cup B)\cap C| = |A| + |B| - |A\cap B| + |C| - |(A\cap C)\cup(B\cap C)| = |A| + |B| - |A\cap B| + |C| - |A\cap C| - |A\cap B| + |A\cap C\cap B\cap C|$, ce qui donne bien la formule annoncée. □

Exemple : Dans un lycée de 300 élèves, 152 savent jouer au poker, 83 au tarot et 51 au bridge. De plus, 24 savent jouer à la fois au poker et au tarot, 14 au poker et au bridge, et 8 au tarot et au bridge. Enfin, 3 élèves maitrisent les trois jeux de cartes. Le nombre d'élèves jouant aux cartes est alors de $152 + 83 + 51 - 24 - 14 - 8 + 3 = 237$.

Proposition 45. Soit A un sous-ensemble fini d'un ensemble fini E, alors $|\bar{A}| = |E| - |A|$.

Démonstration. C'est une conséquence de la formule pour une union : E est union disjointe de A et de $\bar{A}$, donc $|E| = |A| + |\bar{A}|$. □

Proposition 46. Soient E et F deux ensembles finis, alors $E\times F$ est fini, et $|E\times F| = |E|\times|F|$.

Démonstration. Pas de preuve rigoureuse pour celui-ci, simplement une idée de la façon dont ça marche. Soit n le cardinal de E, et $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ses éléments, p le cardinal de F et $f_1, \ldots, f_p$ ses éléments. on peut placer les éléments de $E \times F$ dans un tableau de la façon suivante :

	e_1	e_2	$\ldots$	e_n
f_1	(e_1, f_1)	(e_2, f_1)	$\ldots$	(e_n, f_1)
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
f_p	(e_1, f_p)	(e_2, f_p)	$\ldots$	(e_n, f_p)

Il y bien $n \times p$ éléments dans le tableau, donc dans $E \times F$. □

6.2 Listes, arrangements et combinaisons

Définition 50. Soit E un ensemble fini de cardinal n, et $p \in \mathbb{N}$. Une p**-liste** d'éléments de E, ou p-uplet d'éléments de E, est simplement un élément de E^p.

Remarque 44. On peut très bien avoir plusieurs fois le même élément dans une p-liste. Par ailleurs, l'ordre des éléments de la p-liste est important.

Proposition 47. Le nombre de p-listes dans un ensemble de cardinal n vaut n^p.

Démonstration. C'est une conséquence de la formule de cardinal du produit vue un peu plus haut : comme $|E \times F| = |E| \times |F|$, on a $|E^p| = |E|^p$, ce qui prouve bien la propriété. □

Exemple : On lance 10 fois de suite un dé équilibré à six faces. Le nombre total de tirages possibles est 6^{10} (l'ordre est important, et on peut très bien tirer plusieurs fois le même chiffre ; il s'agit donc de listes).

Remarque 45. Le nombre de p-listes d'un ensemble à n éléments est aussi le nombre d'applications de l'ensemble $\{1; \ldots; p\}$ vers cet ensemble. En effet, se donner une telle application f revient à se donner les valeurs des images $f(1)$, $f(2)$, $\ldots$, $f(p)$, c'est-à-dire à se donner une liste de p éléments de E.

Définition 51. Soit E un ensemble à n éléments et $p \in \mathbb{N}$, on appelle **arrangement** de p éléments de E une p-liste d'éléments distincts de E.

Remarque 46. L'ordre des éléments est toujours important, par contre on ne peut plus avoir de répétition d'élément dans un arrangement.

Définition 52. Soient n et p deux entiers tels que $p \leqslant n$, on note $A_{n,p} = \dfrac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)$.

Proposition 48. Le nombre d'arrangements de p éléments dans un ensemble à n éléments vaut $A_{n,p}$.

Démonstration. Contentons-nous de l'idée intuitive : lorsqu'on construit un arrangement, on a n choix pour le premier élément, $n-1$ pour le deuxième, $\ldots$, $n-p+1$ pour le $p$ème, soit au total $n(n-1) \times (n-p+1) = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-p+1)(n-p)\ldots 2 \times 1}{n(n-1)\ldots 2 \times 1} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$. □

Exemple : Les arrangements interviendront quand on travaillera avec des tirages successifs sans remise (ce qui interdit les répétitions). Par exemple, si 10 athlètes participent à une course, le nombre de podiums possibles est $A_{10,3} = 10 \times 9 \times 8 = 720$. En effet, l'ordre des athlètes sur le podium est important, mais on ne peut pas avoir le même athlète sur deux marches du podium à la fois !

Remarque 47. Le nombre d'arrangements de p éléments dans un ensemble à n éléments est également le nombre d'applications injectives de $\{1; \ldots; p\}$ dans E.

Définition 53. Un arrangement de n éléments dans un ensemble à n éléments est aussi appelé **permutation**. Il y a donc $n!$ permutations dans un ensemble à n éléments.

Exemple : Le nombre de façons d'asseoir 6 personnes autour d'une table ronde est $6! = 720$. Si l'on veut que deux personnes spécifiées à l'avance ne soient pas en face l'une de l'autre, il reste $6 \times 4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 576$ placements (on place d'abord les deux ennemis : on a 6 possibilités pour le premier, mais 4 au lieu de 5 pour le deuxième puisqu'on doit éviter les deux places voisines du premier ; ensuite, tout se déroule comme précédemment). Si l'on veut maintenant que deux personnes parmi les 6 soient côte à côte, il y a $6 \times 2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 288$ placements (on place d'abord les deux copains : 6 possibilités pour le premier et, la table étant ronde, 2 places pour le deuxième à côté du premier). Enfin, si on impose les deux conditions simultanément, il y a toujours 12 façons de placer les deux amis pour commencer ; puis $4! - 4$ façons de placer les quatre autres sur les quatre places restantes (je vous laisse vérifier que parmi les 4! permutations, il y en 4 pour lesquelles les deux ennemis seront en face l'un de l'autre), soit $12 \times 20 = 240$ placements corrects. La probabilité correspondante est de $\dfrac{240}{720} = \dfrac{1}{3}$.

Exemple : Le nombre d'anagrammes d'un mot peut se calculer à l'aide de permutations. Il faut simplement diviser le nombre total du permutations du mot par $k!$ chaque fois qu'une même lettre apparait k fois dans le mot (ainsi, s'il y a trois E dans le mot, on divise par 3! car les permutations qui se contentent d'échanger les E entre eux ne modifient pas l'anagramme). Par exemple, le nombre d'anagrammes du mot DENOMBREMENT est $\dfrac{12!}{3! \times 2! \times 2!}$.

Remarque 48. Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est le nombre d'applications bijectives de cet ensemble dans lui-même.

Proposition 49. Quelques propriétés des factorielles, plus ou moins utiles :
- Par convention, $0! = 1$
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)! = n! \times (n+1)$
- $\forall a > 1$, $a^n = o(n!)$, mais $n! = o(n^n)$. (Pour les plus curieux, je signale le joli résultat suivant, connu sous le nom de formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$)

Définition 54. Une **combinaison** de p éléments dans un ensemble fini E à n éléments est un sous-ensemble à p éléments de E.

Définition 55. Soient n et p deux entiers tels que $p \leqslant n$, on appelle **coefficient binomial** d'indices n et p le nombre $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$. Ce nombre est également noté C_n^p, et on le lit « p parmi n » (comme un raccourci signifiant que le nombre de façon de choisir p objets parmi n objets au total).

Remarque 49. On pose souvent $\dbinom{n}{p} = 0$ si $p > n$.

Proposition 50. Le nombre de sous-ensembles à p éléments d'un ensemble à n éléments est $\dbinom{n}{p}$.

Démonstration. En effet, une combinaison n'est rien d'autre qu'un arrangement dans lequel on a enlevé l'importance de l'ordre. Autrement dit, chaque combinaison apparait $p!$ fois quand on dénombre les arrangements (puisqu'il y a $p!$ façons d'ordonner un ensemble à p éléments), donc le nombre de combinaisons à p éléments vaut $\dfrac{A_{n,p}}{p!} = \dbinom{n}{p}$. □

Exemple : Les combinaisons apparaitront dans les calculs dès qu'on travaillera avec des tirages simultanés, c'est–dire quand l'ordre n'est pas important. Ainsi, le nombre de trinomes de colle différents qu'on peut constituer dans une classe de 45 élèves vaut $\dbinom{45}{3} = \dfrac{45 \times 44 \times 43}{3 \times 2 \times 1} = 14190$.

Remarque 50. On peut encore une fois interpréter ceci à l'aide d'applications : le nombre de combinaisons à p éléments dans un ensemble à n éléments est le nombre d'applications strictement croissantes de $\{1;\dots;p\}$ dans E. En effet, se donner une application strictement croissante f est équivalent à se donner le sous-ensemble $\{f(1);f(2),\dots;f(p)\}$ (l'ordre étant imposé par la croissance de l'application).

Un petit tableau pour résumer les cas d'utilisations de ces trois outils de dénombrement :

	L'ordre n'est pas important	L'ordre est important
Répétitions possibles		Listes $\rightarrow$ puissances
Répétition interdites	Combinaisons $\rightarrow$ coefficients binômiaux	Arrangements $\rightarrow$ quotient de factorielles

6.3 Propriétés des coefficients binomiaux

Proposition 51. Quelques propriétés des coefficients binomiaux, utiles pour les calculs :
- $\forall n \geqslant 2$, $\binom{n}{0} = 1$; $\binom{n}{1} = n$; $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.
- $\forall k \leqslant n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (propriété de symétrie).
- $\forall 1 \leqslant k \leqslant n$, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.
- $\forall 1 \leqslant k \leqslant n$, $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$ (relation de Pascal).

Démonstration. Pour le premier point, il suffit de reprendre la définition des coefficients binomiaux : $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = 1$; $\binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)!} = n$ et $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$.

La propriété de symétrie est facile aussi : $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$. Il y a également une interprétation combinatoire de ce résultat : choisir un sous-ensemble de k éléments dans un ensemble à n éléments est équivalent à choisir son complémentaire, qui est constitué de $n-k$ éléments, donc il y a autant de sous-ensembles à k éléments et à $n-k$ éléments dans un ensemble à n éléments.

Pour la troisième, $k\binom{n}{k} = \frac{k \times n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$, et $n\binom{n-1}{k-1} = \frac{n \times (n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$, les deux quantités sont bien égales.

Enfin, la formule de Pascal : $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$ $= \frac{(n-k) \times (n-1)! + k \times (n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n \times (n-1)!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$. La encore, il y a une interprétation combinatoire. Soit E un ensemble à n éléments et x un élément fixé de E. Les sous-ensembles de E à k éléments, au nombre de $\binom{n}{k}$, se répartissent en deux catégories : ceux qui contiennent x, qui sont au nombre de $\binom{n-1}{k-1}$ puisqu'il reste $k-1$ éléments à choisir parmi les $n-1$ restants dans E une fois x choisi ; et ceux qui ne contiennent pas x, qui sont au nombre de $\binom{n-1}{k}$ puisqu'il reste cette fois-ci k éléments à choisir parmi les $n-1$ restants (on n'en a encore choisi aucun). D'où la formule. $\square$

Triangle de Pascal : La relation de Pascal permet de calculer les valeurs des coefficients binomiaux par récurrence, en les répartissant sous forme d'un tableau triangulaire :

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$
$n=0$	1								
$n=1$	1	1							
$n=2$	1	2	1						
$n=3$	1	3	3	1					
$n=4$	1	4	6	4	1				
$n=5$	1	5	10	10	5	1			
$n=6$	1	6	15	20	15	6	1		
$n=7$	1	7	21	35	35	21	7	1	
$n=8$	1	8	28	56	56	56	28	7	1

Pour obtenir un coefficient du tableau, on fait la somme de celui qui est au-dessus de lui, et de celui qui est à gauche de celui-ci.

Théorème 7. Formule du binôme de Newton.
Soient a et b deux réels, et $n \in \mathbb{N}$, alors $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Remarque 51. On peut obtenir à partir de cette formule le développement d'une différence : $(b-a)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k a^k b^{n-k}$. En pratique, il suffit d'alterner les signes.

Exemple : $(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$. L'ordre est inversé par rapport à celui de la formule, mais c'est la façon habituelle d'écrire le développement. Autre exemple : $(1-2x)^5 = 1 - 5\times 2x + 10\times(2x)^2 - 10\times(2x)^3 + 5\times(2x)^4 - (2x)^5 = 1 - 10x + 40x^2 - 80x^3 + 80x^5 - 32x^5$.

Démonstration. On va procéder par récurrence sur l'entier n. Pour $n = 0$, la formule du binome dit simplement que $(a+b)^0 = \binom{0}{0} a^0 b^0$, ce qui est vrai (on a 1 de chaque côté). Supposons la formule vraie au rang n, on a alors $(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b)\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ par hypothèse de récurrence, donc en développant le $a+b$ et en le faisant rentrer dans la somme, on obtient $(a+b)^{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$. Effectuons un changement d'indice en remplaçant k par $k+1$ dans la première somme (on ne touche à rien dans la deuxième) : $(a+b)^{n+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} = \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1}$ (on a isolé un terme dans chaque somme pour pouvoir regrouper les sommes). Maintenant, on reconnait la formule de Pascal dans la somme, donc $(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + b^{n+1}$. Il ne reste plus qu'à remettre les deux termes isolés dans la somme pour obtenir la formule au rang $n+1$, ce qu'on peut faire puisqu'ils sont justement égaux aux termes manquants pour $k = 0$ et $k = n+1$. □

Proposition 52. Soit E un ensemble fini de cardinal n. Alors $\mathcal{P}(E)$ est fini, de cardinal 2^n.

Démonstration. Le cardinal de $\mathcal{P}(E)$ est le nombre de sous-ensembles de E. Or, on sait que, pour tout entier k, il y a $\binom{n}{k}$ sous-ensembles de E à k éléments, ce qui fait au total $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ sous-ensembles.

Cette somme n'est rien d'autre qu'un cas particulier de formule du binôme, pour $a = b = 1$, donc elle vaut $(1+1)^n = 2^n$.

Une façon plus combinatoire de voir les choses : choisir un sous-ensemble A de l'ensemble E revient à choisir, pour chaque élément de E, si celui-ci appartient à A ou non. On a ainsi deux possibilités pour chaque élément de E, ce qui fait au total 2^n possibilités pour construire le sous-ensemble A. Autre façon de décrire les choses pour les plus formalistes d'entre vous : pour chaque sous-ensemble A de E, on définit une application $\chi_A : E \to \{0;1\}$, telle que $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$, et $\chi_A(x) = 0$ si $x \notin A$ (cette application χ_A est appelée application caractéristique de l'ensemble A, car elle décrit les éléments appartenant à l'ensemble A). On peut prouver que toutes applications de E vers $\{0;1\}$ sont des applications caractéristiques d'un sous-ensemble de E, et que deux sous-ensembles distincts de E ont des applications caractéristiques différentes. Autrement dit, il y a une bijection entre $\mathcal{P}(E)$ et l'ensemble des applications de E dans $\{0;1\}$. Or, comme on l'a vu plus haut (après la définition des p-listes), il y a 2^n applications de E dans $\{0;1\}$. $\square$

Proposition 53. Formule de Vandermonde.
Soient a, b et n trois entiers naturels tels que $n \leqslant a+b$, alors $\displaystyle\binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$.

Démonstration. On va passer par une interprétation combinatoire. Considérons un groupe constitué de a hommes et b femmes, parmi lesquels on veut choisir n personnes. On sait déjà qu'il y a $\displaystyle\binom{a+b}{n}$ possibilités de faire ce choix (ce qui correspond au membre de gauche de notre inégalité). Mais on peut également classer les groupes de n personnes en catégories selon le nombre d'hommes qu'ils contiennent : soit 0 homme et n femmes (il y a $\displaystyle\binom{a}{0}\binom{b}{n}$ tels groupes), soit 1 homme et $n-1$ femmes (il y a $\displaystyle\binom{a}{1}\binom{b}{n-1}$ tels groupes), etc, jusqu'à la possibilité d'avoir n hommes et 0 femme (il y a $\displaystyle\binom{a}{n}\binom{b}{0}$ tels groupes). Le nombre total de groupes possibles vaut donc aussi $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$. $\square$

Chapitre 7

Systèmes linéaires

7.1 Vocabulaire

Définition 56. Une **équation linéaire** à n inconnues x_1, x_2, ..., x_n est une équation du type $a_1x_1 + \dots a_nx_n = b$, avec $(a_1, \dots, a_n, b) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Définition 57. Un **système** de p équations linéaires à n inconnues est constitué de p équations du type précédent. On le note habituellement de la façon suivante :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{p1}x_1 & + & a_{p2}x_2 & + & \dots & a_{pn}x_n & = & b_p \end{array}\right.$$

Autrement dit, on note a_{ij} le coefficient de l'inconnue x_j dans la i-ème équation.

Définition 58. Une **solution** d'un système de p équations à n inconnues est un n-uplet de réels $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ (autrement dit un élément de $\mathbb{R}$) vérifiant simultanément les p équations du système.

Remarque 52. Quand on donne les solutions d'un système, il est très important de donner le n-uplet dans le « bon ordre ». Par exemple, pour le système $\left\{\begin{array}{ccccc} 2x & - & 3y & = & 1 \\ x & + & 2y & = 4 & \end{array}\right.$, le couple $(2; 1)$ est solution, mais pas le couple $(1; 2)$. On a en fait $\mathcal{S} = \{(2; 1)\}$ (les parenthèses sont indispensables, il y a une seule solution qui est un couple de réels).

Définition 59. Un système est **incompatible** s'il n'admet aucune solution. Un système est appelé **système de Cramer** s'il admet exactement une solution.

Exemples : Le système suivant est un système incompatible :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & 3z & = & 7 \\ 2x & - & 5y & + & z & = & -4 \\ 3x & - & 3y & - & 2z & = & 1 \end{array}\right.$$

En effet, si l'on effectue la somme des deux premières lignes et que l'on soustrait la troisième, on obtient $0 = 2$, ce qui est impossible.

Le système vu lors de la remarque précédente est un système de Cramer. Il existe également des systèmes admettant une infinité de solutions, par exemple :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 2x & - & y & = & 2 \\ -4x & + & 2y & = & -4 \end{array}\right.$$

En effet, les deux équations sont proportionnelles, donc équivalentes. On peut simplement exprimer y en fonction de x (ou le contraire) : $y = 2x - 1$, donc $\mathcal{S} = \{(x; 2x - 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Définition 60. Un système linéaire est **homogène** si tous les coefficients apparaissant dans son second membre (ceux que nous avons noté b_i un peu plus haut) sont nuls. Le système homogène associé à un système d'équation linéaires est le système obtenu en remplaçant chaque second membre par 0.

Théorème 8. Un système linéaire est de Cramer si et seulement si son système homogène associé est de Cramer.

Remarque 53. Autrement dit, le fait qu'un système ait une solution unique ou non ne dépend que des coefficients de chaque équation, mais pas de son second membre. Ainsi, si l'on reprend le dernier exemple étudié, un système de la forme

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 2x & - & y & = & a \\ -4x & + & 2y & = & b \end{array}\right.$$

aura une infinité de solutions si $b = -2a$, et aucune si $b \neq -2a$, mais ne sera jamais de Cramer.

Démonstration. On attendra de revoir les systèmes linéaires sous l'angle matriciel pour prouver ce résultat. □

Définition 61. Un système linéaire est **carré** s'il possède autant d'équations que d'inconnues, c'est-à-dire si $p = n$.

Définition 62. Un système linéaire est **triangulaire** si $\forall i < j$, $a_{ij} = 0$ (en reprenant toujours les mêmes notations).

Remarque 54. Autrement dit, le premier coefficient de la deuxième ligne, les deux premiers de la troisième ligne, et ainsi de suite, sont nuls. Le système ressemble donc à ceci :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & \ddots & & & & & & \vdots \\ & & & & a_{pp}x_p & \dots & + & a_{pn}x_n & = & b_p \end{array}\right.$$

Remarque 55. La forme du système triangulaire dépend en fait des valeurs de p et n, mais dans tous les cas, un système triangulaire est un système facile à résoudre. Examinons un exemple dans le cas où $p = n$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 3z & = & -5 \\ & & 5y & + & z & = & 8 \\ & & & & -2z & = & 4 \end{array}\right.$$

Il suffit de remonter le système pour obtenir les valeurs des inconnues l'une après l'autre : $z = -2$, donc $5y = 8 - z = 10$, d'où $y = 2$, puis $2x = -5 + y - 3z = -6$, donc $x = -3$. On obtient une solution unique $\mathcal{S} = \{(-3; 5; -2)\}$. Notons que dans le cas d'un système triangulaire carré, on aura la plupart du temps (mais pas toujours) un système de Cramer.

Si $p > n$, c'est encore plus simple puisque les dernières équations ont un membre de gauche nul. Soit le membre de droite y est également nul et on peut les oublier, soit ce n'est pas le cas et le système est incompatible, par exemple :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 3z & = & -5 \\ & & 5y & + & z & = & 8 \\ & & & & -2z & = & 4 \\ & & & & 0 & = & 1 \end{array}\right.$$

Enfin, dans le cas où $p < n$, le système triangulaire aura nécessairement une infinité de solutions, qu'on va pouvoir exprimer en fonction des dernières inconnues en remontant le système comme dans les autres cas :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & 2y & + & z & = & -2 \\ & & y & + & 2z & = & 4 \end{array}\right.$$

À l'aide de la deuxième équation, on obtient $y = 4 - 2z$, puis $x = -2 + 2y - z = 6 - 5z$, soit $\mathcal{S} = \{(6 - 5z; 4 - 2z; z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

7.2 Méthode de résolution

Définition 63. Deux systèmes linéaires sont **équivalents** s'ils ont les mêmes solutions.

Définition 64. Les **opérations élémentaires** sur les lignes d'un système linéaire sont les suivantes :

- échange des lignes i et j, noté $L_i \leftrightarrow L_j$
- multiplication d'une ligne par un réel non nul, noté $L_i \leftarrow aL_i$ $(a \neq 0)$
- somme de deux lignes $L_i \leftarrow L_i + L_j$
- combinaison des lignes i et j, noté $L_i \leftarrow L_i + bL_j$ $(b \in \mathbb{R})$, qui n'est rien d'autre qu'une combinaison (d'où le nom) des deux opérations précédentes.

Proposition 54. Les opérations élémentaires sur les lignes transforment un système linéaire en un système équivalent.

Théorème 9. Algorithme du pivot de Gauss
On peut transformer un système linéaire linéaire quelconque en système triangulaire en procédant de la façon suivante :

- Si besoin est, on échange la ligne L_1 avec une ligne L_i sur laquelle le coefficient a_{i1} est non nul.
- À l'aide de combinaisons du type $L_i \leftarrow a_{11}L_i + a_{i1}L_1$, on annule tous les coefficients a_{i1}, pour $i \geqslant 2$ (on peut le faire car a_{11} est désormais non nul).
- On reprend l'algorithme sur le sous-système formé des $p - 1$ dernières lignes (et ne contenant donc plus que $n - 1$ inconnues).

Exemple : nous allons résoudre un système à 4 équations et 4 inconnues en suivant scrupuleusement l'algorithme décrit :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} 3x & + & y & - & 3z & + & 2t & = & 7 \\ x & - & 2y & + & z & - & t & = & -9 \\ 2x & - & 3y & - & 2z & + & t & = & -4 \\ -x & & & + & 5z & - & 3t & = & -11 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{c} \\ L_2 \leftarrow L_1 - 3L_2 \\ L_3 \leftarrow 2L_1 - 3L_3 \\ L_4 \leftarrow L_1 + 3L_4 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} 3x & + & y & - & 3z & + & 2t & = & 7 \\ & & 7y & - & 6z & + & 5t & = & 34 \\ & & 11y & & & + & t & = & 26 \\ & & y & + & 12z & - & 7t & = & -26 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{c} \\ \\ L_3 \leftarrow 11L_2 - 7L_3 \\ L_4 \leftarrow L_2 - 7L_4 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} 3x & + & y & - & 3z & + & 2t & = & 7 \\ & & 7y & - & 6z & + & 5t & = & 34 \\ & & & & -66z & + & 48t & = & 192 \\ & & & & -90z & + & 54t & = & 216 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{c} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow 90L_3 - 66L_4 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} 3x & + & y & - & 3z & + & 2t & = & 7 \\ & & 7y & - & 6z & + & 5t & = & 34 \\ & & & & -66z & + & 48t & = & 192 \\ & & & & & & 756t & = & 3024 \end{array}\right.$$

En remontant le système, on obtient $t = 4$, puis $-66z = 192-48t = 0$, donc $z = 0$; $7y = 34+6z-5t = 14$, donc $y = 2$, et enfin $3x = 7 - y + 3z - 2t = -3$, donc $x = -1$. Le système a donc une unique solution : $\mathcal{S} = \{(-1; 2; 0; 4)\}$.
On ne peut qu'être un peu frustré d'avoir fait des calculs si compliqués pour une solution aussi simple. On peut en fait les réduire grandement en utilisant le pivot de façon plus subtile, c'est-à-dire en choisissant un bon pivot à chaque étape. Par exemple :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & + & y & - & 3z & + & 2t & = & 7 \\ x & - & 2y & + & z & - & t & = & -9 \\ 2x & - & 3y & - & 2z & + & t & = & -4 \\ -x & & & + & 5z & - & 3t & = & -11 \end{array}\right. \qquad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 2y & + & z & - & t & = & -9 \\ 3x & + & y & - & 3z & + & 2t & = & 7 \\ 2x & - & 3y & - & 2z & + & t & = & -4 \\ -x & & & + & 5z & - & 3t & = & -11 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow 3L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow 2L_1 - L_3 \\ L_4 \leftarrow L_1 + L_4 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 2y & + & z & - & t & = & -9 \\ & & -7y & + & 6z & - & 5t & = & -34 \\ & & -y & + & 4z & - & 3t & = & -14 \\ & & -2y & + & 6z & - & 4t & = & -20 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftrightarrow L_3 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 2y & + & z & - & t & = & -9 \\ & & -y & + & 4z & - & 3t & = & -14 \\ & & -7y & + & 6z & - & 5t & = & -34 \\ & & -2y & + & 6z & - & 4t & = & -20 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow 7L_2 - L_3 \\ L_4 \leftarrow 2L_2 - L_4 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 2y & + & z & - & t & = & -9 \\ & & -y & + & 4z & - & 3t & = & -14 \\ & & & & 22z & - & 16t & = & -64 \\ & & & & 2z & - & 2t & = & -8 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_3 - 11L_4 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 2y & + & z & - & t & = & -9 \\ & & -y & + & 4z & - & 3t & = & -14 \\ & & & & 22z & - & 16t & = & -64 \\ & & & & & & 6t & = & 24 \end{array}\right.$$

On retrouve bien évidemment la même solution que tout à l'heure.

Exemple : pour conclure ce court chapitre, un exemple de résolution de système faisant intervenir un paramètre $m \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} (4-m)x & + & 3y & = & 0 \\ 2x & + & (1+m)y & = & 0 \end{array}\right.$$

Pour le résoudre, on effectue la combinaison $L_1 \leftarrow -2L_1 + (4-m)L_2$ et on obtient :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} & & ((1+m)(4-m)-6)y = 0 & = & 0 \\ 2x & + & (1+m)y & = & 0 \end{array}\right.$$

Dans le cas général, c'est-à-dire si $(1+m)(4-m) - 6 \neq 0$, le système a une solution unique qui est le couple $(0;0)$. Les valeurs de m posant problème sont celle pour lesquelles $4 + 4m - m - m^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 = 0$, soit $(m-1)(m-2) = 0$. En effet, si $m = 1$, le système se réduit à :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 3x & + & 3y & = & 0 \\ 2x & + & 2y & = & 0 \end{array}\right.$$

et on a $\mathcal{S} = \{(x; -x) \mid x \in \mathbb{R}\}$; et si $m = 2$, on a :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 2x & + & 3y & = & 0 \\ 2x & + & 3y & = & 0 \end{array}\right.$$

donc $\mathcal{S} = \{(x; -\frac{2}{3}x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Chapitre 8

Séries

Introduction

Revenons pour introduire ce chapitre quelques siècles en arrière, au temps de Zénon d'Élée, philosophe grec du cinquième siècle avant J-C. Celui-ci est resté célèbre par sa position très sceptique vis-à-vis de certaines théories scientifiques développées à l'époque (notamment par Platon) concernant la divisibilité du temps et des mouvements, et les quelques paradoxes qu'il nous a laissés à méditer à ce sujet. Le plus connu d'entre eux est peut-être celui de la course entre Achille et la tortue. Pour fixer les idées, supposons qu'Achille courre à 10 mètres par seconde (à peu de choses près la vitesse d'un record du monde de 100 mètres), et la tortue (un peu génétiquement modifiée) à 1 mètre par seconde. Achille s'élance avec cent mètres de retard. Quand va-t-il rejoindre la tortue ? La réponse un peu surprenante de Zénon est : « jamais ». Voici son raisonnement : le temps qu'Achille parcoure ses cent mètres, la tortue en a franchi dix. Mais le temps qu'Achille parcourre ces dix nouveaux mètres, la tortue en a fait un de plus etc. On aura beau multiplier les étapes, Achille sera toujours derrière. Comment résoudre le paradoxe ? Regardons les choses d'un point de vue temporel : Achille met 10 secondes pour franchir les cent premiers mètres, puis une seconde supplémentaire pour les dix mètres suivants, $\dfrac{1}{10}$ seconde pour le mètre suivant etc. Au total, Achille met donc $10 + 1 + \dfrac{1}{10} = \dots$ secondes avant de rejoindre la tortue. L'astuce est toute simple : cette somme, bien que composée d'un nombre infini de réels, est finie. Ainsi, même s'il faut un nombre infini d'étapes à Achille pour rejoindre la tortue, celles-ci vont toutes se dérouler dans un laps de temps fini.

C'est là l'idée d'une série (convergente) en mathématiques : une somme d'un nombre infini de termes qui donne pourtant un résultat fini.

8.1 Définitions

Définition 65. Soit (u_n) une suite réelle. La **série de terme général** u_n est la suite S_n des sommes partielles de la suite (u_n). Autrement dit, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. On note cette série $\sum u_n$.

Remarque 56. On peut construire des séries à partir de suites qui ne sont pas définies à partir de $n = 0$. Dans ce cas, on changera naturellement la valeur de départ dans la somme : si (u_n) est définie pour $n \geqslant n_0$, on pose $\forall n \geqslant n_0$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} u_k$.

Exemple La série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ (pour $n \geqslant 1$) est définie par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$. Attention à ne pas confondre u_n et S_n : les premiers termes de la suite (u_n) sont $u_1 = 1$; $u_2 = \dfrac{1}{4}$; $u_3 = \dfrac{1}{9}$. Ceux de la série (S_n) sont $S_1 = 1$; $S_2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$; $S_3 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{49}{36}$.

Définition 66. La série $\sum u_n$ est **convergente** si la suite (S_n) a une limite finie. Dans ce cas, la limite de la suite (S_n) est appelée **somme de la série**, et notée $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$. Dans le cas contraire, la série est dite divergente. Déterminer la nature d'une série revient à déterminer si elle est convergente.

Remarque 57. ATTENTION, la convergence de la suite (u_n) et celle de la série $\sum u_n$ ne sont pas du tout la même chose ! La convergence d'une série revient à celle des sommes partielles de la suite (u_n). Il faut par ailleurs faire très attention à la manipulation des sommes infinies. On ne peut utiliser cette notation qu'à partir du moment où on sait que la série converge, et on ne peut pas manipuler ces sommes aussi aisément que des sommes finies. Dans tous les cas, il est indispensable de s'assurer de la convergence d'une série avant d'utiliser ces sommes, c'est pourquoi on commence toujours, lors de l'étude d'une série inconnue, par étudier les sommes partielles, puis passer à la limite.

Exemple : Reprenons l'exemple de l'introduction. Si on pose $u_n = \frac{1}{10^{n-1}}$, on se rend compte que le temps mis par Achille pour rejoindre la tortue peut s'exprimer comme la somme de la série $\sum u_n$. Vérifions sa convergence : on a $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{10^{n-1}}$. C'est une somme géométrique, que l'on sait calculer : $S_n = \frac{10 - \frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10}}$. Lorsque n tend vers $+\infty$, on a bien convergence de S_n vers $\frac{10}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{100}{9}$. On en déduit la convergence de la série, dont la somme vaut $\frac{100}{9}$ (ce qui représente le temps mis par Achille pour rejoindre la tortue).

Exemple : Il peut arriver qu'on puisse démontrer la convergence d'une série sans pour autant savoir calculer sa somme. Ainsi la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ (définie pour $n \geqslant 1$), qui a fait l'objet d'un exercice faisant intervenir des suites adjacentes il y a quelques semaines, est convergente, mais on ne dispose pas de moyen simple de déterminer sa somme, qui vaut en l'occurence $\frac{\pi^2}{6}$.

Exemple : Un petit dernier avec alternance de signes dans le terme général : $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ (pour $n \geqslant 1$). Plutôt que d'étudier directement S_n, on va séparer l'étude des termes d'indices pairs et impairs. La suite (S_{2n}) des termes d'indices pairs est croissante puisque $S_{2n+2} - S_{2n} = \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} = -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} > 0$. De même on montre facilement que la suite (S_{2n+1}) des termes impairs est décroissante. Comme de plus, leur différence $S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1}$ tend vers 0, les deux suites sont adjacentes, et convergent donc vers une limite commute, qui est également limite de la suite (S_n). On peut montrer par d'autres méthodes que $\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{\ln 2}{2}$.

Définition 67. Si la série $\sum u_n$ converge, le **reste d'indice** n de la série est le réel $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k - S_n$.

Proposition 55. Sous les hypothèses précédentes, la suite (R_n) converge vers 0.

Démonstration. En effet, comme les sommes partielles convergent vers la somme de la série, l'écart entre les deux tend vers 0. □

Définition 68. La série $\sum u_n$ est dite absolument convergente si la série $\sum |u_n|$ converge.

Proposition 56. Une série absolument convergente est convergente.

Démonstration. Pas pour l'instant ! Vous reverrez en deuxième année des critères de convergence permettant de démontrer cette propriété. □

Remarque 58. Attention, la réciproque n'est pas vraie. Par exemple la série de terme général $\frac{(-1)^{n+1}}{n}$, dont on a vu qu'elle était convergente, n'est pas absolument convergente (cf dernière partie du cours, divergence de la série harmonique). On dit que c'est une série semi-convergente.

8.2 Propriétés

Proposition 57. Si la série $\sum u_n$ est convergente, alors le terme général u_n converge vers 0.

Démonstration. En effet, si la série converge, S_n converge vers la somme S de la série. Mais alors, S_{n+1} tend aussi vers S. Or, on a $u_n = S_{n+1} - S_n$, qui converge donc vers 0. □

Remarque 59. Attention, cette condition est nécessaire mais PAS suffisante. Encore une fois, la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge, et pourtant, la limite de $\frac{1}{n}$ vaut bien 0.

Exemple : Ce critère s'utilise surtout via sa contraposée : si le terme général ne tend pas vers 0, alors la série est divergente. Par exemple, la série de terme général $(-1)^n$ ne converge pas.

Proposition 58. Si deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes, alors leur somme $\sum (u_n + v_n)$ est convergente, et $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \sum_{k=0}^{+\infty} v_k = \sum_{k=0}^{+\infty} (u_k + v_k)$. De même, si λ est un réel quelconque, $\sum \lambda u_n$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda u_k = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

Démonstration. C'est une application directe des propriétés de la limite. Montrons par exemple la première partie. Notons S_n, T_n et U_n les sommes partielles respectives des séries de terme général u_n, v_n et $u_n + v_n$. On a manifestement $U_n = S_n + T_n$. Si les deux suites S_n et T_n convergent, ce sera donc aussi le cas de U_n et sa limite est bien la somme des limites de S_n et de T_n. □

Remarque 60. Attention encore une fois à la rédaction : ce n'est pas parce qu'une série est convergente et qu'on peut découper la somme en deux morceaux que les deux morceaux en question forment également des séries convergentes. Il est donc préférable encore une fois de ne travailler dans un premier qu'avec des sommes partielles.

Proposition 59. Si le terme général u_n de la série est positif, la série converge si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée.

Démonstration. En effet, la suite (S_n) est alors croissante. Elle est donc soit majorée et convergente, soit non majorée, auquel cas elle tend vers $+\infty$. □

Corollaire 1. Soient deux séries de termes généraux u_n et v_n vérifiant $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang. Si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge également. Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge aussi.

Démonstration. En effet, dans le premier cas on aura, en notant n_0 le rang à partir duquel les inégalités sont vérifiées, $\forall n \geqslant n_0$, $S_n = \sum_{k=n_0}^{k=n} u_k \leqslant \sum_{k=n_0}^{k=n} v_k \leqslant \sum_{k=n_0}^{+\infty} v_k$, donc les sommes partielles de terme général u_n sont majorées et la série correspondante converge. La deuxième propriété est similaire, en utilisant cette fois-ci que la série de terme général v_n est supérieure à une suite divergant vers $+\infty$, donc diverge elle aussi vers $+\infty$. □

Théorème 10. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. Si $u_n \sim v_n$, alors les deux séries ont la même nature.

Démonstration. Ce théorème, ainsi que d'autres critères de convergence sur les séries, sera revu et démontré en deuxième année. Il n'est d'ailleurs pas au programme de première année, mais je vous le cite tout de même car il est extrêmement utile. □

8.3 Séries classiques

Définition 69. Soit $q \in \mathbb{R}$, la série $\sum q^n$ est appelée **série géométrique** de raison q. Les séries de terme général nq^{n-1} et $n(n-1)q^{n-2}$ sont appelées respectivement **séries géométriques dérivée et dérivée seconde** de raison q.

Remarque 61. On peut naturellement définir des séries géométriques dérivées k-ièmes pour des valeurs de k supérieures à 2.

Proposition 60. Les séries géométriques de raison q sont convergentes si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$; $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$ et $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$.

Démonstration. Pour les séries géométriques classiques, on sait calculer les sommes partielles depuis un certain temps : $S_n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$. En faisant tendre n vers $+\infty$ et en utilisant les résultats sur les limites de suites géométriques, on constate la convergence de la série lorsque $|q| < 1$, vers la somme indiquée dans l'énoncé.

Pour les séries dérivées, commençons par constater qu'elles ne peuvent pas converger si $|q| \geqslant 1$ puisque le terme général ne tend pas vers 0. Dans le cas contraire, posons $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$. La somme partielle de la série géométrique classique n'est autre que $f(q)$, mais les séries géométriques dérivées peuvent également s'exprimer simplement en fonction de f, ou plutôt de ses dérivées (d'où le nom !) : $f'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} kx^{k-1}$, donc $f'(q)$ représente la somme partielle de la série géométrique dérivée de raison q. De même, $f''(q)$ n'est autre que la somme partielle de la série géométrique dérivée seconde de raison q. Or on sait par ailleurs que $f(q) = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$, donc (via un sympathique calcul de dérivée de quotient) $f'(q) = \dfrac{-(n+1)q^n + (1-q^{n+1})}{(1-q)^2} = \dfrac{nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1}{(1-q)^2}$ et

$$f''(q) = \frac{n(n+1)q^n(1-q)^2 - n(n+1)q^{n-1}(1-q)^2 + 2(1-q)(nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1)}{(1-q)^4}$$
$$= \frac{-n(n-1)q^{n+1} + 2(n^2-1)q^n - n(n+1)q^{n-1} + 2}{(1-q)^3}.$$

Il ne reste plus qu'à faire tendre n vers $+\infty$, en utilisant le fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} nq^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2q^n = 0$ (par croissance comparée) pour obtenir la convergence des sommes partielles vers les valeurs indiquées. □

Remarque 62. On peut déduire du résultat précédent les valeurs d'autres sommes de séries. Par exemple, si $|q| < 1$, la série de terme général nq^n converge et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} kq^k = \frac{q}{(1-q)^2}$. En effet, on a $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} kq^k = q \times \sum_{k=1}^{n} kq^{k-1}$, et on est ramené au cas de la série géométrique dérivée.

Exemple : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{2^k} = 2$.

Proposition 61. La série de terme général $\dfrac{x^n}{n!}$ converge pour tout réel x, et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$. Pour cette raison, cette série est souvent appelée **série exponentielle**.

Démonstration. On manque d'une définition suffisamment claire de l'exponentielle pour prouver ceci. □

Exemple : Quand on choisit $x = 1$, on obtient $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$.

Définition 70. La série de terme général $\dfrac{1}{n}$ est appelée **série harmonique**.

Proposition 62. La série harmonique est divergente. Plus précisément, la somme partielle de cette série est équivalente à $\ln n$.

Démonstration. Nous allons effectuer une démonstration de ce résultat utilisant des intégrales (mais si, tout va bien se passer). Commençons par constater la chose suivante : si $k \in \mathbb{N}^*$, alors $\forall x \in [k; k+1]$, $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{k}$. En intégrant ces inégalités entre k et $k+1$, on obtient $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\, dx \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\, dx$, soit $\displaystyle\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx \leqslant \frac{1}{k}$. Gardons l'inégalité de droite et décalons l'indice dans celle de gauche pour obtenir l'encadrement $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\, dx \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx$. En additionnant ces encadrements pout tous les entiers de 2 à n (on ne peut pas le faire pour $k = 1$ à cause du $k-1$ apparaissant dans le membre de gauche), on obtient alors $\displaystyle\int_1^n \frac{1}{x}\, dx \leqslant \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k} \leqslant \int_2^{n+1} \frac{1}{x}\, dx$, soit $\displaystyle\ln n - \ln 1 \leqslant \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k} \leqslant \ln(n+1) - \ln 2$. En notant $\displaystyle S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$, on a donc $\ln n + 1 \leqslant S_n \leqslant \ln(n+1) - \ln 2 + 1$. En divisant tout par $\ln n$, on en déduit $1 + \dfrac{1}{\ln n} \leqslant \dfrac{S_n}{\ln n} \leqslant \dfrac{\ln(n+1)}{\ln n} + \dfrac{1 - \ln 2}{\ln n}$. Le membre de gauche a manifestement pour limite 1, quand n quand n tend vers $+\infty$, et celui de droite également, car $\ln(n+1) = \ln\left(n\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\right)$, donc $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1 + \dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}$, qui tend vers 1. Via le théorème des gendarmes, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\ln n} = 1$, ce qui signifie exactement que $S_n \sim \ln n$. □

Remarque 63. Plus généralement, les séries de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$ sont appelées séries de Riemann. Elles convergent pour toutes les valeurs de $\alpha > 1$.

Chapitre 9

Fonctions à deux variables

9.1 Aspect graphique

Définition 71. Une **fonction de deux variables** est une application $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, où $\mathcal{D}$ est une sous-ensemble du plan $\mathbb{R}^2$ appelé domaine de définition de la fonction f.

Exemples : La fonction $f : (x, y) \mapsto x^3 + 2x^2y + xy^3 - 4y^2$ est une fonction de deux variables définie sur $\mathbb{R}^2$ tout entier. La fonction $g : (x, y) \mapsto \ln(x + y - 1)$ est une fonction définie sur l'ensemble des couples (x, y) vérifiant $x + y - 1 > 0$, qui se trouve être le demi-plan supérieur ouvert délimité par la droite d'équation $y = 1 - x$.

Proposition 63. Tout sous-ensemble de la forme $\{(x, y) \mid ax + by + c = 0\}$, où a, b et c sont trois réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$ est une droite.

Démonstration. Si $b \neq 0$, on peut mettre l'équation sous la forme $y = \dfrac{-c - ax}{b}$, qui est bien une équation de droite. Et si $b = 0$, on a par hypothèse $a \neq 0$, donc on obtient $x = \dfrac{-c}{a}$, qui est également une droite, en l'occurence parallèle à l'axe des ordonnées. □

Exemple : La fonction $h : (x, y) \mapsto \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ est définie à l'intérieur du cercle de centre O et de rayon 2.

Proposition 64. Le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par l'équation $x^2 + y^2 = R$, avec $R \geqslant 0$, est le cercle de centre 0 et de rayon $\sqrt{R}$ (si $R < 0$, l'ensemble est vide).

Démonstration. Dans le plan $\mathbb{R}^2$ (muni d'un repère orthonormal, mais ce sera toujours le cas pour nous), le point M de coordonnées (x, y) est situé à une distance $\sqrt{x^2 + y^2}$ de l'origine O du repère (c'est une application du théorème de Pythagore), donc $x^2 + y^2 = R \Leftrightarrow OM^2 = r^2 \Leftrightarrow OM = r$. l'ensemble des points à distance r de O est bien le cercle de centre O et de rayon r. □

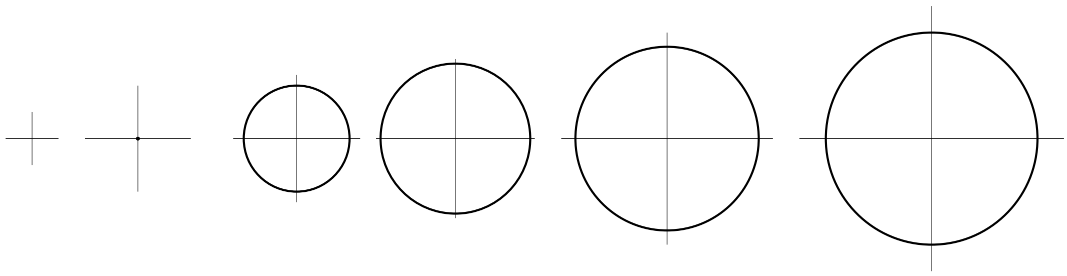
Définition 72. La **représentation graphique** d'une fonction de deux variables dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ vérifiant $z = f(x, y)$.

Remarque 64. Une fonction de deux variables est donc représentée non pas par une courbe, mais par une surface dans l'espace. Il est très difficile en général de visualiser ce genre de représentations graphiques, c'est pourquoi on en est souvent réduit à étudier les coupes par des plans que représentent les lignes de niveau et les applications partielles.

Définition 73. Soit k un réel et f une fonction de deux variables, la **ligne de niveau** k de la fonction f est l'ensemble des couples (x, y) vérifiant $f(x, y) = k$.

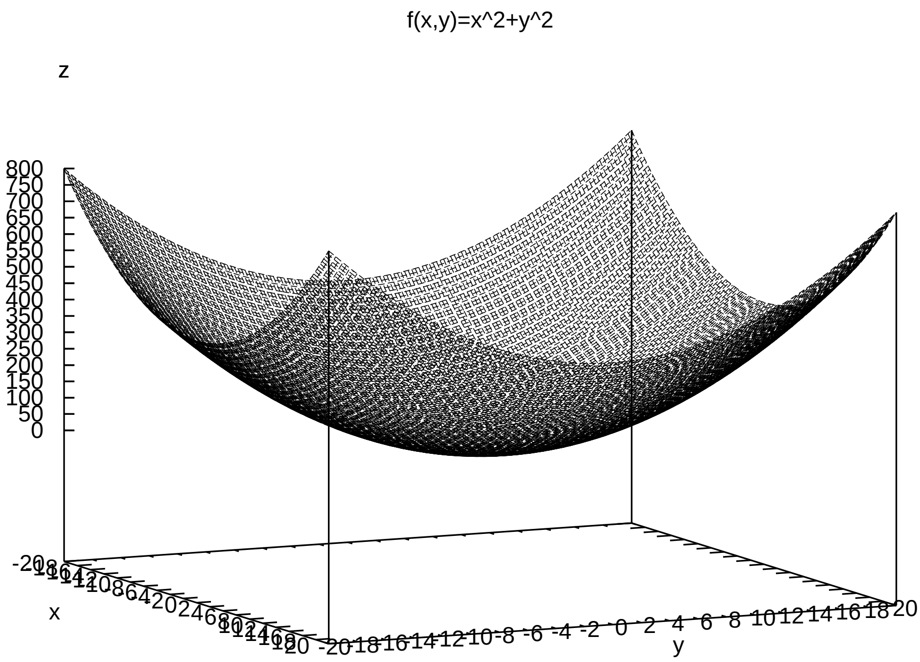
Remarque 65. Il s'agit donc de la coupe de la surface représentative de f par le plan « horizontal » d'équation $z = k$. La plupart du temps, une ligne de niveau n'est pas la courbe représentative d'une fonction à une variable.

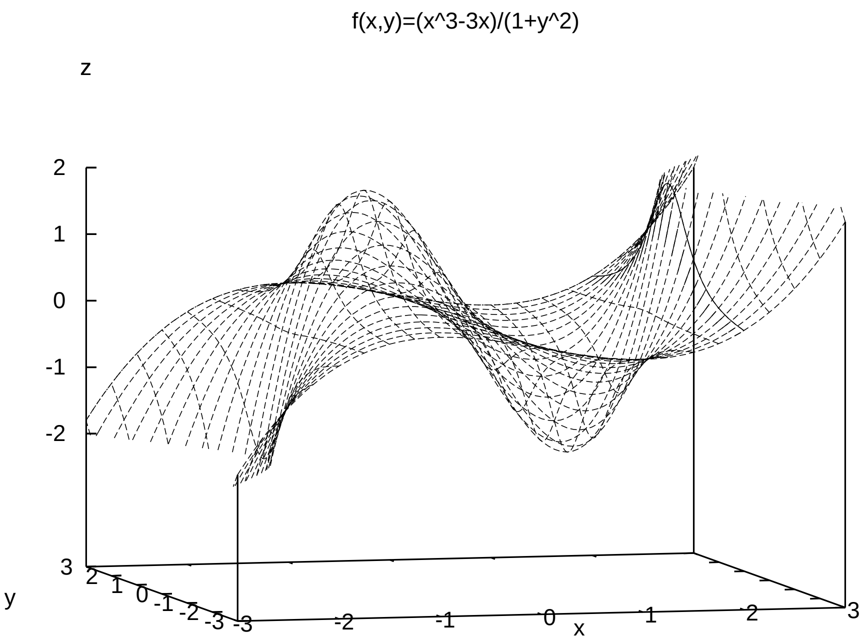
Exemple : Considérons la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$, sa ligne de niveau k est définie par l'équation $x^2 + y^2 = k$. il s'agit donc du cercle de centre O et de rayon $\sqrt{k}$ quand k est positif, la ligne de niveau est vide sinon. Voici une représentation des lignes de niveau pour k entier compris entre -1 et 4. il ne reste plus qu'à les relier mentalement pour imaginer l'allure de la surface représentative de f.

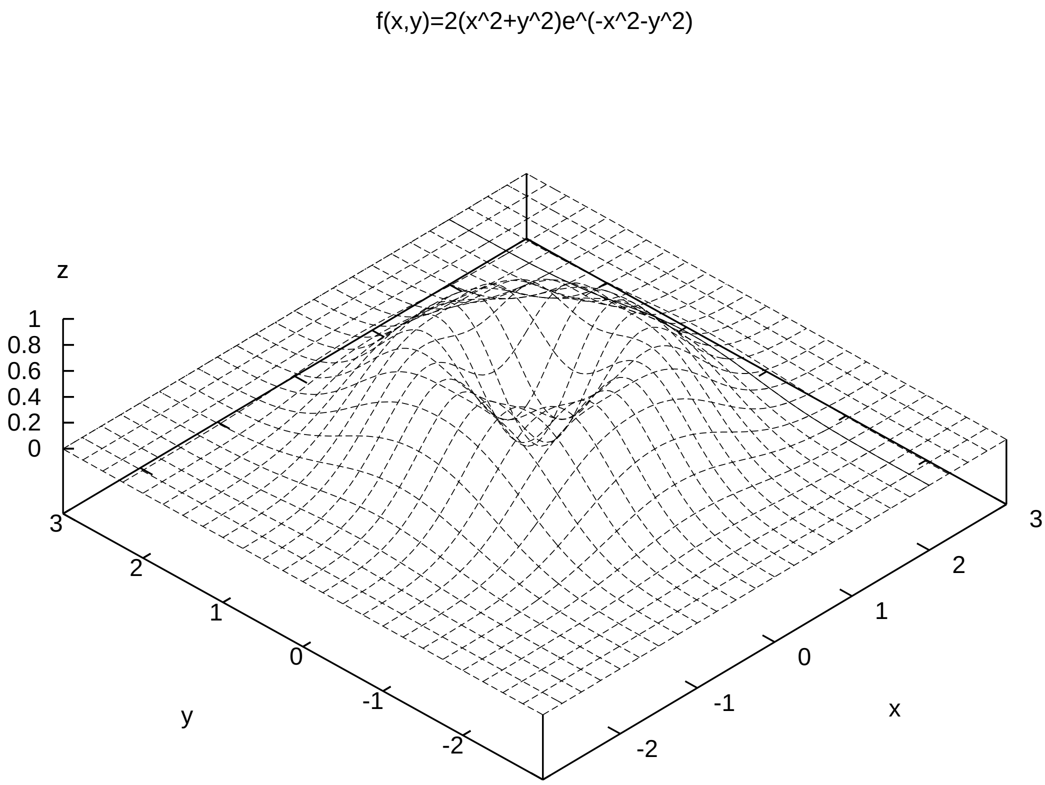


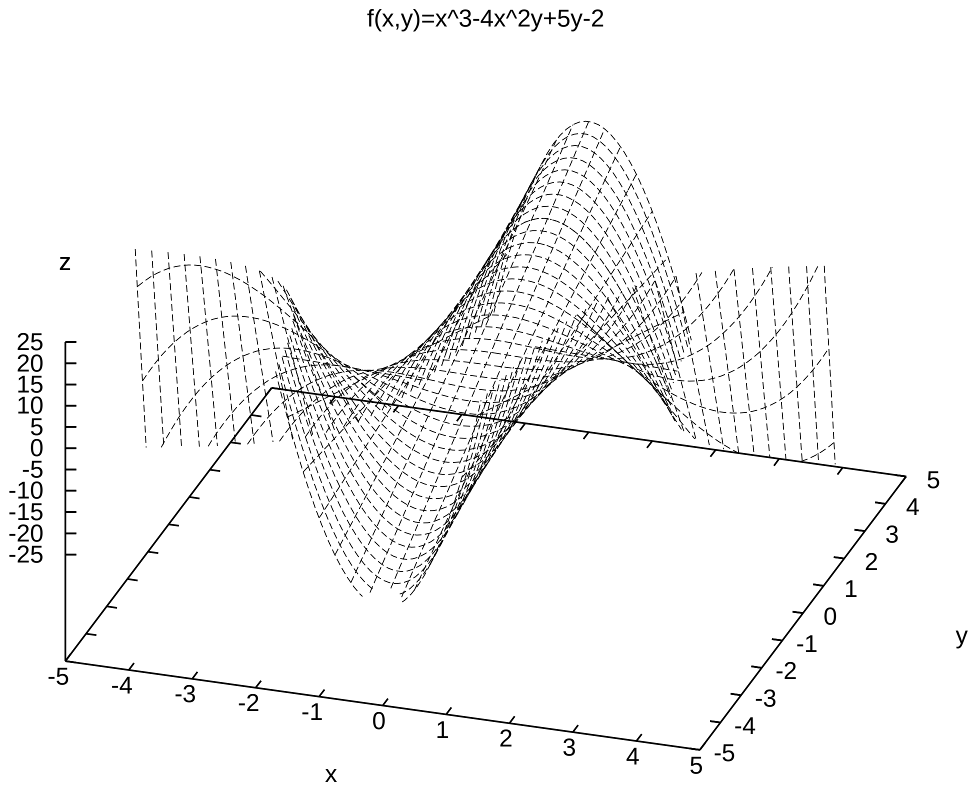
9.2 Exemple de surfaces

Juste quelques surfaces tracées à l'ordinateur pour avoir une idée de ce à quoi ça peut ressembler.






f(x,y)=2(x^2+y^2)e^(-x^2-y^2)
z
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
3
2
1
0
-1
-2
y
3
2
1
0
-1
-2
x


f(x,y)=x^3-4x^2y+5y-2
z
25
20
15
10
5
0
-5
-10
-15
-20
-25
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
x
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
y

9.3 Dérivées partielles

On ne peut pas étudier les variations d'une fonction de deux variables comme on le fait pour une fonction à une variable, puisque la simple notion de fonction croissante ou décroissante n'a pas d'équivalent quand on passe à deux variables. Il est cependant intéressant de calculer un analogue de la dérivée dans ce cadre, qui permet notamment de trouver les minima ou maxima de la fonction, comme c'est le cas pour une fonction à une variable.

Définition 74. Soit $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ à deux variables, les **applications partielles** associées sont les deux fonctions à une variable $f_x : x \mapsto f(x, y)$ et $f_y : y \mapsto f(x, y)$.

Remarque 66. Les applications partielles sont donc données par la même équation que la fonction f elle-même, seul le statut de x et de y change : au lieu d'avoir deux variables, l'une d'elles est désormais fixée, même si on ne connait pas sa valeur. Pour rendre les choses plus concrètes, on peut assigner une valeur à la varible fixée. Par exemple, si $f(x, y) = x^2 - 3xy + y^3$, on dira que l'application partielle obtenue en fixant $y = 1$ est la fonction d'une variable $x \mapsto x^2 - 3x + 1$ (on a posé $y = 1$ dans l'équation de f), ou que l'application partielle obtenue en fixant $x = 2$ est la fonction $y \mapsto 4 - 6y + y^3$. Tracer les représentations graphiques de ces applications partielles revient à tracer la coupe de la surface représentative de f par les plans d'équation respective $y = 1$ et $x = 2$ (plans « verticaux » si on oriente le repère de façon habituelle).

Définition 75. Les **dérivées partielles** d'une fonction à deux variables sont les dérivées de ses application partielles. On note $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ la dérivée de f_x et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ celle de f_y.

Remarque 67. Pour calculer ces dérivées partielles, on dérive en considérant l'une des deux variables comme une constante (on dit qu'on dérive la fonction f par rapport à x ou y respectivement), mais chacune des deux dérivées partielles reste une fonction à deux variables.

Remarque 68. On se contentera de calculer ces dérivées partielles sans se préocupper de justifier leur existence, ce qui est un problème plus complexe que dans le cas d'une fonction à une variable.

Définition 76. Les quatres dérivées partielles des fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ (deux pour chaque fonction) sont appelées **dérivées partielles secondes** de la fonction f. On note $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ les dérivées partielles par rapport à x et y de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ les dérivées partielles de $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Exemples : Reprenons l'exemple de la fonction $f : (x, y) \mapsto x^3 + 2x^2y + xy^3 - 4y^2$. On a donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + 4xy + y^3$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^2 + 3xy^2 - 8y$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x + 4y$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 4x + 3y^2$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 4x + 3y^2$ et enfin $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6xy - 8$.

De même, la fonction $g : (x, y) \mapsto \ln(x + y - 1)$ a pour dérivées partielles $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \dfrac{1}{x + y - 1}$; $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \dfrac{1}{x + y - 1}$; $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) = \dfrac{1}{(x + y - 1)^2}$, et les trois autres dérivées secondes sont les mêmes que la première.

Enfin, la fonction $h : (x, y) \mapsto \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ vérifie $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x, y) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2 - y^2}} = -\dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$; $\dfrac{\partial h}{\partial y}(x, y) = -\dfrac{y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$; $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, y) = \dfrac{-\sqrt{4 - x^2 - y^2} - x \times \frac{x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}}{4 - x^2 + y^2} = \dfrac{y^2 - 4}{(4 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}}$;

$\dfrac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{-y \times \frac{-2x}{-2}}{(4-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{-xy}{(4-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}$; $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{-xy}{(4-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}$ et enfin $\dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \dfrac{x^2-4}{(4-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Définition 77. Un **point critique** pour une fonction f à deux variables est un couple (x,y) vérifiant $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$.

Exemple : Les points critiques de la fonction f définie plus haut sont les solutions du système suivant (qu'on est bien incapable de résoudre) :

$$\begin{cases} 3x^2+4xy+y^3 &= 0 \\ 2x^2+3xy^2-8y &= 0 \end{cases}$$

Théorème 11. Si une fonction f admet un minimum ou un maximum local en un point (x,y), alors ce point est un point critique.

Remarque 69. Attention, comme dans le cas des fonctions à une variable, la réciproque n'est pas toujours vraie.

Définition 78. La **différentielle** au point (x,y) d'une application à deux variables f est l'expression $df_{x,y} = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy$.

Les dx, dy et df de l'expression ci-dessous représentent de « petits accroissements » de la fonction et de chacune des variables respectivement. En fait, une bonne définition mathématique de ces objets est de les voir comme des applications de $\mathbb{R}^2$ dans l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Mais comme vous ne savez pas encore ce qu'est une application linéaire, vous vous contenterez du blabla ci-dessous pour tenter de comprendre ce que ça recouvre.

Interprétation géométrique : Comme dans le cas d'une fonction à une variable, on peut tenter d'interpréter géométriquement les notions définies plus haut. Vous savez que, pour une fonction f à une variable, le nombre dérivé $f'(x)$ représente le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction f en son point d'abscisse x. Autrement dit, la tangente étant la droite la plus proche de la courbe, on peut écrire au voisinage de x l'approximation affine suivante : $f(t) \simeq f'(x)(t-x)+f(x)$ (équation de la tangente), ou encore en changeant les notations $f(x+h) \simeq hf'(x)+f(x)$, approximation valable pour des « petites » valeurs de h. En utilisant la notation différentielle, on écrirait ceci ainsi : $df_x(h) = hdx$, c'est-à-dire que l'accroissement de la fonction f (qui correspond à $f(x+h)-f(x)$) est proportionnel à l'accroissement de la variable (qui correspond à h), avec pour coefficient de proportionnalité $f'(x)$.

Dans le cas d'une fonction à deux variables, les dérivées partielles en un point (x,y) représentent également des coefficients directeurs de tangents, en l'occurence des deux tangentes à la surface représentative de f incluses dans les plans verticaus contenant les axes (Ox) et (Oy). La surface admet bien d'autres tangentes (une infinité), mais la connaissance de deux d'entre elle suffit à déterminer le plan tangent à la surface représentative de f, et donc à donner une approximation de $f(x+h;y+k)$ pour des petites valeurs de h et k. C'est ce que fait la différentielle à l'aide de la formule suivante : $f(x+h;y+k) \simeq \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)h + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)k$. Autrement dit (et pour parler en termes plus « économiques »), la différentielle exprime l'accroissement marginal de la fonction f au point (x,y) en fonction des accroissements marginaux de chacune des variables.

Exemple : Un type de fonction à deux variables souvent utilisé en économie est la fonction de Cobb-Douglas, qui modélise la production P en fonction du capital K et du travail L via la formule

$P(K, L) = cK^\alpha L^\beta$. Pour plus de simpliciter, on prend souvent $c = 1$, et $\beta = 1 - \alpha$ (avec $\alpha \in [0; 1]$), donc $P(K, L) = K^\alpha L^{1-\alpha}$. Ceci a également pour avantage de rendre la fonction homogène, c'est-à-dire que $P(aK, aL) = aP(K, L)$ (autrement dit, si vous multipliez le capital et le travail simultanément par un même facteur, la production subira la même augmentation).

Les dérivées partielles de cette fonction sont appelés en économie rendements marginaux. En utilisant la notation différentielle, ces rendements marginaux donnent les coefficients d'augmentation marginale de la production quand on augmente marginalement le travail ou le capital. Ainsi, si $\frac{\partial P}{\partial K}(K_0, L_0) = 3$, cela signifie qu'en augmentant de 1% le capital en partant d'une situation où le capital était de K_0 et le travail de L_0, la production augmentera d'environ 3%. Avec l'équation donnée plus haut, on constate que $\frac{\partial P}{\partial K}(K, L) = \alpha K^{\alpha-1}L^{1-\alpha} = \alpha \left(\frac{L}{K}\right)^{1-\alpha}$, et $\frac{\partial P}{\partial L}(K, L) = (1-\alpha)K^\alpha L^{-\alpha} = (1-\alpha)\left(\frac{K}{L}\right)^\alpha$. Si on calcule désormais les dérivées secondes, on obtient notamment $\frac{\partial^2 P}{\partial K^2}(K, L) = \alpha(\alpha-1)K^{\alpha-2}L^{1-\alpha}$; $\frac{\partial^2 P}{\partial L^2}(K, L) = -\alpha(1-\alpha)K^\alpha L^{-\alpha-1}$. Ces deux expressions sont négatives, c'est un résultat qu'on connait en économie sous le nom de principe des rendements décroissants : plus la production augmente, plus les rendements marginaux sont faibles.

Dernière notion utile en économie et abordée un peu plus haut d'un point de vue mathématique : les lignes de niveau de la fonction P sont appelés isoquants de la fonction de production. Ils représentent des lignes sur lesquelles la production ne varie pas, et on peut donc affirmer que, sur un isoquant, la différentielle dP s'annule. Autrement dit, on a alors $\frac{\partial P}{\partial K}(K, L) + \frac{\partial P}{\partial L}(K, L) = 0$. Les rapports entre les deux dérivées partielles en un point d'un isoquant sont appelés coefficients d'elasticité : ils représentent la facilité à échanger du capital contre du travail (ou vice-versa) pour garder une production constante. Ainsi, si on a $\frac{\partial P}{\partial L}(K_0, L_0) = -3\frac{\partial P}{\partial K}(K_0, L_0)$, cela signifie que, si on diminue le capital de 1% en partant de la situation (K_0, L_0), il faudra augmenter le travail de 3% pour garder le même niveau de production.

Chapitre 10

Probabilités

Introduction via quelques exemples

Le concept de probabilité est a priori relativement intuitif : rien de suprenant à ce qu'un dé à six faces normalement constitué tombe en moyenne une fois sur six sur chacune de ses faces (il s'agit toutefois d'un résultat statistique, qui ne garantit par exemple en aucun cas qu'au bout de six lancers on aura obtenu chacun des six résultats possibles). Les probabilités étudiées au lycée restent la plupart du temps dans ce cadre : nombre fini de possibilités, probabilité égale pour chacun des cas possibles, mais en fait, l'étude des probabilités en mathématiques peut se faire dans un cadre beaucoup plus large.

Premier exemple

Reprenons un exemple qui s'inscrit bien dans le cadre vu au lycée : on lance simultanément deux dés à six faces et on note la somme des deux résultats obtenus. Il est assez facile de se convaincre que tous les résultats possibles (en l'occurence les entiers compris entre 2 et 12) n'apparaitront pas avec la même fréquence, car il existe par exemple 4 façons d'obtenir une somme égale à 5 ($1+4$; $2+3$; $3+2$ et $4+1$), mais une seule d'obtenir 2 (les deux dés doivent tomber sur 1). Pour préciser cela, on peut considérer les choses de la façon suivante : il y a 6 résultats possibles pour le premier dé, autant pour le second, soit un total de 36 possibilités. On obtiendra donc une somme égale à 2 en moyenne une fois sur 36, mais une somme égale à 5 quatre fois sur 36, soit une fois sur 9. Cet exemple illustre bien la nécessité de bien définir quel est l'ensemble de résultats sur lequel on veut travailler, et surtout de vérifier si ces résultats sont équiprobables ou non.

Deuxième exemple

On lance cette fois-ci un seul dé plusieurs fois de suite, jusqu'à ce que le dé tombe sur la face numéro 6. La situation est beaucoup plus compliquée puisqu'il y a ici une infinité de résultats possibles : un résultat où on ne tire qu'un fois le dé et on tombe sur 6, cinq résultats à deux lancers (1 puis 6, 2 puis 6 etc), 36 résultats à trois lancers etc... Déterminer la probabilité d'avoir besoin d'attendre exactement 10 lancers pour obtenir notre premier 6 reste toutefois relativement élémentaire : il faut que chacun des neuf premiers lancers donne un autre résultat que 6, et que le dixième tombe sur 6, soit une probabilité de $\left(\frac{5}{6}\right)^9 \times \frac{1}{6}$. Mais on peut se poser des questions plus complexes à propos de cette expérience : est-il possible de ne jamais obtenir de 6, même après une infinité de lancers ? La réponse mathématique est un peu surprenante : oui, c'est possible, mais la probabilité que ça arrive est nulle ! Autre question intéressante : combien de lancers faudra-t-il en moyenne pour obtenir notre premier 6 ? Dans le cas d'un nombre fini de résultats possibles, une moyenne se calcule en faisant la moyenne des résultats possibles pondérés par leurs probabilités respectives. Ici, bien que l'ensemble des résultats soit infini, le même calcul reste possible, il va simplement s'agir désormais d'un calcul de somme de série. Pour les curieux, on constate que la probabilté d'obtenir notre premier 6 au tirage numéro k vaut $\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6}$, et la moyenne se calcule via $\sum_{k=1}^{+\infty} k \times \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{(1-\frac{5}{6})^2} = 6$ (simple calcul de somme de série géométrique dérivée). Il faut donc en moyenne six lancers avant d'obtenir un 6.

Troisième exemple

Une cible de jeu de fléchettes est constituée de trois disques concentriques de rayons respectifs 1, 2 et 3. Un joueur lance une fléchette dans la cible. On suppose (ce n'est pas très réaliste) que la fléchette atteint toujours la cible et que le point atteint dans la cible est aléatoire (avec une probabilité uniforme). On sort manifestement du cadre habituel : le nombre de résultats possibles n'est pas fini, loin s'en faut. On peut tout de même attribuer de manière assez intuitive des probabilités à certains événements : par exemple, il parait naturel de dire que la probabilité de tomber dans le disque central vaut un neuvième (rapport entre l'aire du disque central et celle de la cible). Mais que dire de l'événement « La fléchette tombe sur un point qui est à une distance rationnelle du centre »(oui, certes, personne ne se pose ce genre de question) ? Pas moyen de calculer facilement l'aire d'une telle chose. On admettra en fait que, dans ce genre de cas, on ne peut calculer les probabilités de tout et n'importe quoi, et qu'il faudra donc choisir quels sont les évènements autorisés (cela nous mènera au concept de tribu).

Quatrième exemple

On cherche à étudier une file d'attente (à la Poste, par exemple). À tout moment, il existe une certaine probabilité qu'unz personne vienne s'ajouter à la file existente, et chaque personne passe au guichet un temps aléatoire. Ce temps est en pratique borné, mais peut prendre à peu près n'importe quelle valeur positive dans les limites du raisonnable. On pourrait naturellement décider de découper le temps en une multitude de petits intervalles (d'une seconde chacun, par exemple) et se ramener à des probabilités sur un ensemble fini, mais les calculs seraient affreusement lourds. Il est en fait plus logique d'accepter de faire des probabilités sur l'ensemble $\mathbb{R}_+$ (même si, comme dans le cas précédent, on ne pourra calculer la probabilité de n'importe quoi), et de développer une théorie qui englobera également le cas des probabilités finies. Nous allons nous y atteler de ce pas. Dans ce dernier cas, on rentre dans un domaine des probabilités (les probabilités continues), que vous étudierez plus intensivement l'an prochain, et qui fait intervenir beaucoup de calcul intégral (eh oui...).

10.1 Vocabulaire

10.1.1 Expérience aléatoire

Définition 79. Une **expérience aléatoire** est un phénomène ayant des résultats numériques dépendant du hasard.

Exemple : Nous reprendrons tout au long de ce chapitre un exemple particulier pour illustrer les diverses définitions, celui consistant à tirer simultanément cinq cartes au hasard dans un jeu de 32 cartes.

Remarque 70. Insistons une fois de plus sur le fait qu'une expérience aléatoire est par définition non déterministe. L'étude des probabilités permet de faire des prévisions statistiques, mais en aucun cas de prévoir le résultat d'une expérience précise. Autrement dit, vous aurez beau être très fort en probas, ça ne vous aidera pas à décrocher la cagnotte au Loto.

Définition 80. On appelle **univers**, et on note Ω, l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire.

Exemple : Dans notre exemple, Ω est beaucoup trop gros pour qu'on puisse faire la liste de ses éléments, mais on sait par contre que $|\Omega| = \binom{32}{5}$. Attention toutefois à ne pas confonfre Ω, qui est un ensemble, et son cardinal, qui est un nombre.

10.1.2 Événements

Définition 81. Un **événement** (souvent noté A, B, ...) est un sous-ensemble de l'univers Ω. On dit qu'un événement A est réalisé si le résultat de l'expérience appartient à ce sous-ensemble.

Exemple : En pratique, un évènement est la plupart du temps décrit par une propriété plutôt que comme un sous-ensemble. Par abus de langage on dira ainsi qu'on considère l'évènement A : « on tire les quatre As et le Roi de pique ». Ce qui nous intéressera le plus en pratique sera le cardinal de l'ensemble correspond (ici 1).

Définition 82. Il existe un vocabulaire précis pour certains évènements particuliers :
- L'évènement Ω est appelé **évènement certain**. C'est de fait un évènement qui se produira toujours.
- L'évènement vide est appelé **évènement impossible** et n'est jamais réalisé.
- Un évènement est élémentaire s'il est constitué d'un seul élément de Ω.
- Deux événements sont **incompatibles** si leur intersection est vide (autrement dit, ils ne peuvent pas être réalisés simultanéments).
- Un **système complet d'événements** est un ensemble d'événements deux à deux incompatibles, et dont la réunion vaut Ω (autrement dit, une partition de Ω).

Exemples :
- L'évènement A cité ci-dessus est un évènement élémentaire.
- L'évènement B : « On tire deux piques, deux cœurs et deux trèfles » est un évènements impossible.
- Les évènements C : « On tire au moins un pique et au moins un carreau » et D : « On tire cinq cartes de la même couleur » sont incompatibles.
- Les évènements E_0 : « On ne tire pas d'As » ; E_1 : « On tire exactement un As » ; ... ; E_4 : « On tire quatre As » forment un système complet d'évènements.

10.1.3 Tribus

Définition 83. Soit Ω un univers et $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ un ensemble de sous-ensembles de Ω. On dit que $\mathcal{T}$ est une tribu sur Ω si
- $\Omega \in \mathcal{T}$
- $\mathcal{T}$ est stable par passage au complémentaire (si $A \in \mathcal{T}$ alors $\bar{A} \in \mathcal{T}$) et par union dénombrable (si $\forall i \in \mathbb{N}$, $A_i \in \mathcal{T}$, alors $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{T}$).

Remarque 71. Une tribu est également stable par intersection dénombrable en utilisant la stabilité par passage au complémentaire et les lois de De Morgan.

Remarque 72. La tribu représentera en fait l'ensemble des évènements pour lesquels on saura calculer une probabilité. Comme il est facile de calculer la probabilité d'un complémentaire et d'une union (voire plus loin dans ce cours les formules correspondantes), les conditions imposées sont en fait assez naturelles. Quand Ω est fini, on prendra toujours $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$ car on sait calculer des probabilités pour tous les sous-ensembles. C'est quand Ω est infini que le concept de tribu devient essentiel.

Exemple : Dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^+$), une tribu très fréquemment utilisée est celle des *boréliens*, qui est constituée de toutes les unions dénombrables d'intervalles. En particulier, elle contient tous les intervalles.

10.1.4 Lois de probabilité

Définition 84. On appelle **espace probabilisable** un couple $(\Omega, \mathcal{T})$, où Ω est un univers et $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω.

Définition 85. Une **probabilité** sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{T})$ est une application $P : \mathcal{T} \to [0; 1]$ vérifiant :

- $P(\Omega) = 1$
- si $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements deux à deux incompatibles de $\mathcal{T}$, $P(\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} P(A_i)$

Remarque 73. La deuxième propriété, appelée σ-additivité, est souvent utilisée pour une union finie plutôt que dénombrable.

Définition 86. Un **espace probabilisé** est un triplet $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, où P est une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{T})$.

Remarque 74. On peut très bien avoir envie de mettre plusieurs probabilités sur un même espace probabilisable. Prenons l'exemple simple d'un lancer de dé. La probabilité « naturelle » consiste à décréter que $P(1) = P(2) = \cdots = P(6) = \dfrac{1}{6}$ (il suffit de définir les probabilités des évènements élémentaires puisqu'on obtient les probabilités des autres évènements par σ-additivité). Mais ce n'est pas la seule ! Par exemple, $P(1) = \dfrac{1}{21}$; $P(2) = \dfrac{2}{21}$; ... ; $P(6) = \dfrac{6}{21}$ définit également une probabilité (la seule chose à vérifier est que $P(\Omega)$ vaut 1, ce qu'on obtient en faisant la somme des probabilités des évènements élémentaires).

10.2 Propriétés

10.2.1 Généralités

Proposition 65. Si P est une loi de probabilité, on a toujours $P(\emptyset) = 0$.

Démonstration. L'événement vide étant incompatible avec lui-même (c'est bien le seul à vérifier cette curieuse propriété !), il doit vérifier $P(\emptyset) + P(\emptyset) = P(\emptyset \cup \emptyset) = P(\emptyset)$, donc $P(\emptyset) = 0$. □

Proposition 66. Pour tout événement $A \in \mathcal{T}$, on a $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Démonstration. Les événements A et $\bar{A}$ sont incompatibles, donc on a $P(A) + P(\bar{A}) = P(A \cup \bar{A}) = P(\Omega) = 1$, ce qui donne bien le résultat voulu. □

Proposition 67. Si $A \subset B \in \mathcal{T}^2$, on a $P(A) \leqslant P(B)$.

Démonstration. On peut écrire, de façon similaire à la démonstration précédente, $P(A) + P(B\backslash A) = P(B)$. Or $P(B\backslash A) \geqslant 0$ (une probabilité est toujours comprise entre 0 et 1), donc on a bien $P(B) \geqslant P(A)$. □

Proposition 68. Soient $(A, B) \in \mathcal{T}^2$, alors $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$. Plus généralement, la formule de Poincaré est valable : $P(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i) = \sum\limits_{k=1}^{n}((-1)^{k-1} \sum\limits_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cdots \cap A_{i_k}))$.

Démonstration. On a par σ-additivité $P(A) = P(A \cap B) + P(A\backslash B)$; $P(B) = P(A \cap B) + P(B\backslash A)$ et $P(A \cup B) = P(A\backslash B) + P(B\backslash A) + P(A \cap B)$. L'égalité souhaitée en découle. Comme dans le cas des ensembles, on se gardera de faire une démonstration complète de la formule de Poincaré (qui se démontre d'ailleurs de la même façon que dans le cas des ensembles). □

Proposition 69. Soient $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un système complet d'évènements, alors $\sum_{i\in\mathbb{N}} P(A_i) = 1$ et $\forall B \in \mathcal{T}$, $P(B) = \sum_{i\in\mathbb{N}} P(B \cap A_i)$.

Démonstration. Cela découle en fait immédiatement de la définition. Comme les A_i sont par définition incompatibles, $P(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} P(A_i)$. Or, la réunion des A_i vaut Ω (par définition également), donc sa probabilité vaut 1. La formule pour $P(B)$ est similaire, il suffit de remarquer que les ensembles $B \cap A_i$ sont disjoints et que leur réunion est égale à B (en fait, ils forment un système complet d'événements pour B). □

Remarque 75. Une formule similaire est valable dans le cas d'un système complet d'évènements fini.

10.2.2 Probabilités sur un univers fini

Remarque 76. Répétons une remarque importante déjà faite dans un précédent paragraphe : dans le cas où Ω est fini, pour déterminer une probabilité, il suffit de connaitre la probabilité de chaque événement élémentaire, avec la seule condition que la somme de ces probabilités soit égale à 1. En effet, tout événement est une union finie disjointe de tels événements élémentaires.

Définition 87. Il y a **équiprobabilité** sur l'espace Ω si tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

Proposition 70. Dans le cas de l'équiprobabilité, on a simplement, $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P(A) = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$.

Démonstration. Posons $n = |\Omega|$. Les événements élémentaires formant un système complet d'événements, la somme de leur probabilités vaut 1. Or, cette somme est constituée de n nombres égaux (par définition de l'équiprobabilité), donc chacune de ces probabilités vaut $\dfrac{1}{n}$. Ensuite, un événement quelconque est union disjointe des évènements élémentaires qui le composent, sa probabilité vaut donc k fois $\dfrac{1}{n}$, où k est le nombre d'éléments dans cet événement. □

Exemple Si nous reprenons notre exemple favori, la probabilité d'avoir une quinte flush (cinq cartes qui se suivent dans la même couleur) est très faible : 4 quintes possibles dans chaque couleur, soit 16 cas favorables, à diviser par $\binom{32}{5}$. Cela donne une proba d'environ 0.000 08.

10.3 Probabilités conditionnelles

Le principe des probabilités conditionnelles est, si on y réfléchit bien, assez simple, et surtout utilisé sans forcément qu'on s'en rende compte dans nombre d'exercices. Comme son nom l'indique, la notion désigne une probabilité soumise à une condition. Prenons un exemple simple : on lance deux dés et on regarde leur somme (vous devez commencer à avoir l'habitude). On a vu dans le chapitre précédent que la probabilité d'obtenir 5 valait $\dfrac{1}{9}$. Supposons qu'on ait maintenant l'information supplémentaire : on sait que le premier dé est est tombé sur la face 2. Ca change tout ! Pour obtenir un total de 10, il faut maintenant (et il suffit) que le deuxième dé tombe sur 3, soit une chance sur 6. On dit que la probabilité d'obtenir 5 sachant que le premier dé a donné 2 vaut $\dfrac{1}{6}$ (naturellement, il sera plus commode de noter ceci à l'aide d'événements).

10.3.1 Notations

Définition 88. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et A, B deux événements tels que $P(A) \neq 0$. La **probabilité conditionnelle** de B sachant A est $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Remarque 77. Si on veut être savant, on peut dire que l'application de $\mathcal{T}$ dans $[0,1]$ définie par $B \mapsto \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ définit une nouvelle probabilité sur $\mathcal{T}$, appelée probabilité sachant A et notée P_A.

Remarque 78. On rencontre souvent la notation alternative $P(B \backslash A)$ pour la probabilité conditionnelle, mais nous ne l'utiliserons pas dans ce cours.

Exemple : Cela correspond bien à l'idée intuitive. Sachant que A est réalisé, on se place dans un nouvel univers constitué des événements vérifiant A, et dans ce nouvel univers, B est réalisé pour tous les événements de $A \cap B$, ce qui conduit à la formule de la définition. Si on reprend l'exemple introductif, en notant A : « Le premier dé donne 2 » et B : « Le total vaut 5 », on a $P(A) = \dfrac{1}{6}$ et $P(A \cap B) = \dfrac{1}{36}$ (il n'y a qu'un cas qui marche, celui où on obtient 2 et 5), donc la probabilité conditionnelle vaut bien $\dfrac{1}{6}$.

Remarque 79. La probabilité conditionnelle étant une loi de probabilité, elle a les mêmes propriétés que n'importe quelle probabilité, en particulier $P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B)$, ou $P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(C) - P_A(B \cup C)$.

10.3.2 Théorèmes

Théorème 12. Formule des probabilités composées. Soient $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ des événements tels que $P(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) \neq 0$, alors $P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \dots \times P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$.

Remarque 80. La condition demandée sert simplement à assurer que toutes les probabilités conditionnelles sont bien définies : en effet, si $P(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) \neq 0$, on a a fortiori $P(A_1) \neq 0$; $P(A_1 \cap A_2) \neq 0$, etc.

Remarque 81. Si on écrit la formule dans le cas où il n'y a que deux événements, on obtient simplement $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2)$, ce qui est simplement la définition d'une probabilité conditionnelle.

Démonstration. On va procéder par récurrence. D'après la première remarque, toutes les probabilités conditionnelles sont bien définies, et d'après la seconde la formule est vérifiée pour $n = 2$. Supposons-la vraie au rang n, on a alors $P(\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i) = P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \times P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n}(A_{n+1})$ (on a simplement utilisé la formule dans le cas d'une intersection de deux événements), et via l'hypothèse de récurrence, on obtient immédiatement le résultat. □

Cette formule est utilisée presque systématiquement dans les cas où on a des tirages chronologiques, et correspond simplement à la formalisation de la représentation intuitive sous forme d'arbre. Deux exemples parmi tant d'autres :

Exemple : l'exemple bateau, genre de calcul qu'on fait en permanence sans invoquer les probabilités composées. Dans une urne se trouvent 4 boules blanches et 3 noires. On tire successivement trois boules. La probabilité d'obtenir une noire, puis deux blanches vaut $\dfrac{3}{7} \times \dfrac{4}{6} \times \dfrac{3}{5} = \dfrac{6}{35}$.

Exemple : On dispose de trois enveloppes contenant respectivement 3 pièces d'un euro ; 5 pièces d'un euro et 3 de deux euros ; 4 d'un euro. On choisit une enveloppe au hasard, puis une pièce au hasard dans l'enveloppe. La probabilité d'obtenir une pièce de 2 euros vaut $\dfrac{1}{3} \times \dfrac{3}{8} = \dfrac{1}{8}$.

Théorème 13. Formule des probabilités totales. Si les événements A_i forment un système complet d'événements et si $\forall i$, $P(A_i) \neq 0$, alors pour tout évènement B, $P(B) = \sum P(A_i) \times P_{A_i}(B)$ (j'ai volontairement omis de préciser dans quel ensemble se baladait l'indice i pour éviter d'avoir plusieurs cas à traiter).

Remarque 82. Dans le cas d'un système complet de deux évènements, on obtient la forme plus simple suivante : $P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$.

Démonstration. Dans le cas particulier, on a vu plus haut que $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$. Or, on sait que $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$, et de même pour la deuxième moitié. Le cas général se fait exactement de la même manière. □

Cette formule est très utile dans les cas où l'expérience aléatoire se déroule en deux (ou plus) étapes avec à la fin de la première étape une partition des possibilités en plusieurs cas disjoints (c'est-à-dire encore une fois quand on fait une représentation sous forme d'arbre).
Exemple : Dans une urne se trouvent 4 boules noires et 6 blanches. On tire successivement trois boules dans l'urne, sachant qu'après chaque tirage on remet la boule tirée, mais qu'on en ajoute une autre de la même couleur. La probabilité d'obtenir une boule noire au premier tirage vaut $\frac{2}{5}$, et celle d'obtenir une boule noire au deuxième tirage vaut $\frac{4}{10} \times \frac{5}{11} + \frac{6}{10} \times \frac{4}{11} = \frac{2}{5}$. Au troisième tirage, elle vaut aussi $\frac{2}{5}$. Pas si évident que ça à justifier sans calcul.
Exemple : Un type de problème très classique en probabilités et faisant intervenir les probabilités totales est la chaine de Markov. Il s'agit d'une situation qui évolue au cours du temps, et pour laquelle la situation à un instant donné ne dépend que de la situation à l'instant précédent (mais de manière aléatoire, tout de même). Par exemple, Homer Simpson mange tous les matins au petit déjeuner soit un beignet, soit un croissant. Au jour numéroté 0, il a mangé un beignet. S'il mange un beignet au jour n, il mangera un croissant au jour $n+1$ avec probabilité $\dfrac{1}{2}$, et à nouveau un beignet avec probabilité $\dfrac{1}{2}$. Par contre, s'il mange un croissant, il passera au beignet le lendemain avec probabilité $\dfrac{2}{3}$ et reprend un croissant avec probabilité $\dfrac{1}{3}$. On cherche à déterminer en fonction de n la probabilité qu'Homer mange un beignet au jour n. Notons donc a_n la probabilité qu'il mange un beignet au jour n et b_n celle qu'il mange un croissant. On a par hypothèse $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$, et ensuite, en utilisant la formule des probabilités totales, les relations de récurrence $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + \dfrac{2}{3}b_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + \dfrac{1}{3}b_n$ (cette deuxième relation ne sert d'ailleurs à rien pour répondre à notre question). Comme on sait par ailleurs que $a_n + b_n = 1$ (Homer ne saute jamais son petit-déjeuner), on obtient $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + \dfrac{2}{3}(1 - a_n) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{6}a_n$. La suite (a_n) est donc une suite arithmético-géométrique, d'équation de point fixe $x = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{6}x$, ce qui donne $x = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{6}{7} = \dfrac{4}{7}$. Posons donc $v_n = a_n - \dfrac{4}{7}$, on a alors $v_{n+1} = a_{n+1} - \dfrac{4}{7} = -\dfrac{1}{6}a_n + \dfrac{2}{3} - \dfrac{4}{7} = -\dfrac{1}{6}a_n + \dfrac{2}{21} = -\dfrac{1}{6}\left(a_n - \dfrac{4}{7}\right) = -\dfrac{1}{6}v_n$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison $-\dfrac{1}{6}$ et de premier terme $v_0 = a_0 - \dfrac{4}{7} = \dfrac{3}{7}$. On en déduit que $a_n = v_n + \dfrac{4}{7} = \dfrac{4}{7} + \dfrac{3}{7}\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n$. Notons au passage que, quand n tend vers $+\infty$, la limite de la suite a_n vaut $\dfrac{4}{7}$. Autrement dit, à long terme, Homer mange des beignets en moyenne quatre jours par semaine.

Théorème 14. Formule de Bayes. Soient A et B deux événements de probabilités non nulles, alors $P_B(A) = \dfrac{P(A) \times P_A(B)}{P(B)}$.

Démonstration. Il n'y presque rien à faire, on sait que $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$, la formule en découle immédiatement. □

Remarque 83. On peut également donner une version de cette formule avec plus de deux événements, mais cela ne présente guère d'intérêt pratique.

Cette formule, qui n'apporte en apparence pas grand chose par rapport aux précédentes, est en fait très utile dans la mesure où elle permet de « remonter le temps » lorsqu'on a une expérience faisant apparaitre des choix chronologiques.

Exemple : On peut reprendre n'importe quel exemple classique, mais en essyant de faire les choses dans le sens inhabituel. On tire deux dés successivement, le total obtenu est 9. Quelle est la probabilité que le premier dé soit tombé sur 4 ? Notons A : « Le premier dé tombe sur 5 » et B : « Le total obtenu est 9 ». On a $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{1}{9}$ et $P_A(B) = \frac{1}{6}$, donc $P_B(A) = \frac{1}{4}$.

10.4 Indépendance d'événements

Encore une notion relativement intuitive a priori, mais qui nécessite une définition mathématique précise. On a envie de dire que deux événements sont indépendants si la réalisation de l'un n'influence pas celle de l'autre. Par exemple, en reprenant comme souvent notre lancer de deux dés, l'événement « Le premier dé tombe sur un chiffre pair » devrait logiquement être indépendant de l'événement « Le deuxième dé tombe sur 1 ou 2 ».

Définition 89. Deux événements A et B sont **indépendants** si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Proposition 71. Deux événements de probabilité non nulle sont indépendants si et seulement si $P(B) = P_A(B)$.

Démonstration. Rappelons que sous ces hypothèses $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$. En identifiant les deux formules, on obtient tout de suite le résultat. □

Remarque 84. Dans le cas où l'un des deux événements a une probabilité nulle, les événements sont de toute façon nécessairement indépendants (même si c'est absurde !).

Exemple On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. Les événements « obtenir un Roi » et « obtenir un pique » sont indépendants.
Remarquez que, dans le but de prouver l'indépendance de deux événements, cette formulation n'est pas vraiment plus simple à utiliser que l'autre. Passons au cas de plusieurs événements.

Définition 90. Des événements $(A_1, A_2, \dots A_n)$ sont dits **mutuellement indépendants** si $\forall I \subset \{1, 2, \dots, n\}$, on a $P(\bigcap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} P(A_i)$.

Remarque 85. Attention, des événements mutuellement indépendants sont indépendants deux à deux mais la réciproque n'est pas vraie ! La condition est beaucoup plus forte que ça. Par exemple, pour trois événements, on doit avoir $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \times P(A_2)$; $P(A_1 \cap A_3) = P(A_1) \times P(A_3)$; $P(A_2 \cap A_3) = P(A_2) \times P(A_3)$ mais aussi $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \times P(A_2) \times P(A_3)$. Les conditions à vérifier deviennent rapidement affreuses quand on augmente le nombre d'évènements.

Proposition 72. Si A et B sont indépendants, A et $\bar{B}$ le sont aussi.

Démonstration. C'est un petit calcul : $P(\bar{A} \cap B) = P(B \backslash A) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) \times P(B) = P(B) \times (1 - P(A)) = P(B) \times P(\bar{A})$. □

Remarque 86. Ce résultat se généralise à plus de deux évènements : si $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ sont mutuellement indépendants, on peut remplacer une partie des A_i par leur complémentaire et conserver l'indépendance mutuelle.

Exemple : On fait une série de n lancers de pièces. Les événements A_k : « On obtient Pile au $k$ème lancer » sont mutuellement indépendants.
Exemple : On lance deux dés (si, si, je vous jure, encore une fois), et on considère les événements A : « Le premier dé donne un résultat pair », B : « Le deuxième dé donne un résultat pair » et C : « Les deux dés donnent des résultats de même parité ». Je vous laisse vérifier que $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$ et $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{1}{4}$, donc les événements sont deux à deux indépendants. Pourtant, $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4}$, donc les trois événements ne sont pas mutuellement indépendants.

Chapitre 11

Calcul matriciel

Introduction

Pour introduire le concept de matrice, intéressons-nous au problème très concret suivant : dans le village de Trouperdu, le boulanger doit faire face à trois commandes presque simultanées : une pour un mariage, une de la part de l'école pour un goûter de fin d'année, et une du maire pour une réception. Chaque commande est composée d'un certain nombre d'éclairs, de choux et de tartes, ce qui est récapitulé dans le tableau suivant :

	Éclairs	Choux	Tartes
Mariage	30	50	20
École	40	30	15
Mairie	25	20	10

Au niveau de la cuisine, le boulanger et ses deux collègues se répartissent la tâche : une commande chacun. Ils connaissent bien sûr leurs recettes sur le bout des doigts et savent donc les ingrédients dont ils ont besoin pour chaque patisserie (deuxième tableau ci-dessous, chiffres pas forcément réalistes...) :

	Oeufs	Farine	Sucre
Éclair	1	30	20
Chou	1	20	15
Tarte	3	200	200

S'ils veulent faire chacun le bilan de ce dont ils ont besoin avant de se mettre au travail, on peut à nouveau le présenter sous forme de tableau :

	Oeufs	Farine	Sucre
Mariage	140	5900	5350
École	115	4800	4250
Mairie	75	3150	2800

Pour remplir la première case du dernier tableau, par exemple, on fait l'opération $30 \times 1 + 50 \times 1 + 20 \times 3$, c'est-à-dire qu'on multiplie les éléments de la première ligne du premier tableau par ceux de la première colonne du second, puis on additionne. Eh bien, nos patissiers viennent de réaliser sans le savoir une multiplication de matrices !

11.1 Définition

Définition 91. Une **matrice** réelle à n lignes et p colonnes (n et p appartenant à $\mathbb{N}^*$) est un tableau rectangulaire (à n lignes et p colonnes) de nombres réels. On note un tel objet $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ ou de façon plus complète

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Autrement dit, a_{ij} est le terme de la matrice A se trouvant à l'intersection de la $i$ème ligne et de la $j$ème colonne.

Définition 92. L'ensemble des matrices réelles à n lignes et p colonnes est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Dans le cas où $n = p$, on dit que la matrice est **carrée** et on note plus simplement l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Remarque 87. Dans le cas où $n = 1$, la matrice se réduit à une ligne, et on parle effectivement de matrice-ligne. De même, lorsque $p = 1$, on parlera de matrice-colonne.

Définition 93. La **matrice nulle** $0_{n,p}$ (ou plus simplement 0 si les dimensions de la matrice sont claires dans le contexte) est la matrice à n lignes et p colonnes dont tous les coefficients sont nuls.

La **matrice identité** dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarque 88. Deux matrices sont égales si elles ont la même taille (même nombre de lignes et de colonnes) et les mêmes coefficients.

11.2 Opérations sur les matrices

Ces matrices sont naturellement destinées à être manipulées donc, comme pour tout objet mathématique qui se respecte, on aimerait pouvoir faire un peu de calcul avec. Les propositions qui ne sont pas démontrées découlent de manière évidente des propriétés des opérations usuelles sur les réels.

11.2.1 Addition de matrices

Définition 94. Soient A et B deux matrices dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, la **somme** de A et de B est la matrice $A + B = M$, où $m_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$. Autrement dit, on fait la somme coefficient par coefficient.

Proposition 73. Propriétés élémentaires de la somme de matrices

- L'addition de matrices est associative : $(A + B) + C = A + (B + C)$.
- L'addition de matrices est commutative : $A + B = B + A$.
- La matrice nulle est un élément neutre pour l'addition des matrices : $0 + A = A + 0 = A$.
- Pour toute matrice A, il existe une matrice B telle que $A + B = B + A = 0$. on note cette matrice $-A$, elle est simplement obtenue en prenant les opposés des coefficients de A.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 3 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 7 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; $A + B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

11.2.2 Produit d'une matrice par un réel

Définition 95. Le **produit d'une matrice A par un réel** λ est la matrice, notée λA, obtenue à partir de A en multipliant chacun de ses coefficients par λ.

Proposition 74. Le produit par un réel est distributif par rapport à l'addition de matrices : $(\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B)$. On a également les propriétés suivantes : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\quad 1.A = A$ et $\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\quad \lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$; $-2A = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -4 & -16 \end{pmatrix}$.

11.2.3 Produit de deux matrices

Définition 96. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$, alors le **produit** des deux matrices A et B est la matrice $A \times B = M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ où $\forall i \in \{1,\dots,n\}$, $\forall j \in \{1,\dots,p\}$, $m_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}$. Pour s'en souvenir, penser à l'exemple introductif : on multiplie terme à terme la i-ème ligne de A par la j-ème colonne de B. Il faut faire très attention à ce que les tailles des matrices soient compatibles pour que le produit existe !

Proposition 75. Propriétés élémentaires du produit de matrices :
- Le produit de matrices est associatif : $(AB)C = A(BC)$.
- Le produit de matrices est distributif par rapport à l'addition : $A(B+C) = AB + AC$; $(A+B)C = AC + BC$.
- La matrice identité est un élément neutre pour le produit : $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $I_nA = AI_p = A$.
- Le produit d'une matrice par une matrice nulle (de taille compatible), à gauche comme à droite, est toujours nul.

Démonstration. L'associativité est une conséquence de l'associativité des sommes (il suffit d'écrire une jolie formule avec des sommes triples). Les diverses distributivités sont une fois de plus une conséquence des règles de calcul sur les réels, il suffit de les écrire pour s'en convaincre.
Penchons nous plutôt sur la propriété $I_nA = A$ (on notera juste I et pas I_n par souci de lisibilité). Soit m_{ij} le terme d'indice i,j de la matrice produit IA. On a par définition $m_{ij} = \sum_{k=1}^{n} I_{ik}A_{kj}$. Mais le seul terme non nul parmi les I_{ik} est I_{ii}, qui vaut 1. On a donc bien $m_{ij} = A_{ij}$. Pour le produit à droite par I_p, la démonstration est essentiellement la même. Quand au produit par une matrice nulle, vous pouvez y arriver tous seuls. $\square$

Remarque 89.
- Le produit de matrices n'est pas commutatif. En fait, l'existence du produit AB n'implique même pas celle de BA, mais même dans le cas des matrices carrées, par exemple, on a en général $AB \neq BA$. Dans le cas contraire, on dit que A et B commutent.
- Parler de division de matrice n'a en général pas de sens.
- On ne peut en général pas simplifier un produit de matrices : on peut avoir $AB = AC$ mais $B \neq C$ ou encore $AB = 0$ mais $A \neq 0$ et $B \neq 0$.
- On peut écrire les systèmes d'équations linéaires à l'aide de produits de matrices, mais on reviendra là-dessus un peu plus tard.

Exemple 1 : $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; $A \times B = \begin{pmatrix} -4 & 11 \\ 6 & 27 \end{pmatrix}$

Exemple 2 : $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$; $A \times B = 0$

11.2.4 Transposition

Définition 97. La **transposée** d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est la matrice $M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, où $m_{ij} = a_{ji}$. On la note ${}^tA$. Autrement dit, les lignes de A sont les colonnes de ${}^tA$ et vice-versa.

Proposition 76. La transposition vérifie les propriétés suivantes : $\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$,
- ${}^t({}^tA) = A$
- ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$
- ${}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA$
- $\forall C \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{R})$, ${}^t(AC) = {}^tC\ {}^tA$.

Démonstration. Les trois premières propriétés ne posent aucun problème, mais la dernière est nettement plus complexe. Écrivons ce que vaut le terme d'indice ij à gauche et à droite de l'égalité. Pour ${}^t(AC)$, il est égal au terme d'indice ji de AC, c'est-à-dire à $\sum_{k=1}^{p} A_{jk}C_{ki}$. À droite, on a $\sum_{k=1}^{p} ({}^tC)_{ik}({}^tA)_{kj} = \sum_{k=1}^{p} C_{ki}A_{jk}$. Les deux quantités sont bien égales. □

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$; ${}^tA = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

Définition 98. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **symétrique** si $A = {}^tA$, c'est-à-dire si $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$, $a_{ij} = a_{ji}$. Une matrice symétrique est nécessairement carrée.

11.3 Matrices carrées, puissances de matrices

11.3.1 Vocabulaire

Définition 99. Une matrice carrée est **diagonale** si seuls ses coefficients a_{ii} sont (éventuellement) non nuls (on les appelle d'ailleurs coefficients diagonaux de A), ou encore $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Définition 100. Une matrice carrée est **triangulaire supérieure** si seuls les termes « au-dessus » de sa diagonale sont non nuls, c'est-à-dire $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$, $\quad i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$, ou encore si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$. On définit de même des matrices triangulaires inférieures.

Proposition 77. Le produit de deux matrices carrées est une matrice carrée. Le produit de deux matrices diagonales est une matrice diagonale. Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.

Démonstration. Pour les matrices carrées, cela découle directement de la définition.
Pour les matrices diagonales, prenons deux matrices diagonales (de taille n) A et B. Le terme d'indice ij de AB vaut $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$. Parmi tous les termes intervenant dans cette somme, seul un des termes de gauche est non nul, quand $k = i$, et seul un des termes de droite est non nul, quand $k = j$. Si $i \neq j$, on n'a donc que des produits nuls, ce qui prouve bien que les seuls termes qui peuvent être non nuls pour AB sont les termes diagonaux.

C'est un peu le même principe pour les matrices triangulaires supérieures. Prenons deux telles matrices A et B et supposons $i > j$. Le terme d'indice ij de AB vaut $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} 0 \times b_{kj} + \sum_{k=i}^{n} a_{ik} \times 0 = 0$. La matrice AB est donc triangulaire supérieure. $\square$

Remarque 90. La transposée d'une matrice triangulaire supérieure est triangulaire inférieure.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A \times B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -6 \\ 0 & 18 & -15 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Remarquez au passage que les termes diagonaux de $A \times B$ sont obtenus comme le produit de ceux de A par ceux de B.

11.3.2 Puissances d'une matrice carrée

Définition 101. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit les **puissances** de A de la façon suivante : $A^0 = I_n$, et $\forall k \geqslant 1, \quad A^k = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k \text{ fois}}$.

Proposition 78. On a $A^{k+m} = A^k A^m$ et $(A^k)^m = A^{km}$ pour tous entiers n et m. Pour tout réel λ, on a également $(\lambda A)^k = \lambda^k A^k$.

Démonstration. Tout cela se montre sans difficulté par récurrence. $\square$

Remarque 91. En général, $(AB)^k \neq A^k B^k$, sauf dans le cas où les deux matrices A et B commutent. En conséquence, les identités remarquables sont fausses sur les matrices, donc attention quand on développe !

Définition 102. Une matrice carrée A est dite **nilpotente** s'il existe un entier n tel que $A^n = 0$.

Théorème 15. (formule du binôme de Newton) Si A et B sont deux matrices qui commutent dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(A+B)^k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} A^i B^{k-i}$.

Démonstration. Exactement la même preuve que dans le cas des réels, mais notons qu'il est absolument nécessaire que les matrices commutent pour que la preuve fonctionne. $\square$

Exemple 1 : (matrice diagonale) Si $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$, alors $A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}$.

Exemple 2 : (matrice nilpotente) $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\forall k \geqslant 3, \quad B^k = 0$.

Exemple 3 : $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On remarque que $C = 2I_3 + B$, et que I_3 et B sont deux matrices qui commutent (tout le monde commute avec l'identité). On peut donc appliquer la formule du binôme : $A^k = (2I_3 + B)^k = (2I_3)^k + k \times (2I_3)^{k-1}B + \dfrac{k(k-1)}{2} \times (2I_k)^{k-2}B^2 = 2^k I_3 + k2^{k-1}B + \dfrac{k(k-1)}{2} 2^{k-2}B^2$. Par exemple, $C^4 = 16I_3 + 32B + 24B^2 = \begin{pmatrix} 16 & 64 & 48 \\ 0 & 16 & -32 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$.

Exemple 4 : Il est également fréquent de calculer les puissances successives d'une matrice par récurrence. $D = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. On calcule $D^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -4 & 9 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$, et on constate que $D^2 = -2D + 3I$.
Prouvons alors par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists (u_k, v_k) \in \mathbb{R}^2$, $D^k = u_k D + v_k I$. C'est vrai pour $k = 2$ comme on vient de le voir, mais aussi pour $k = 1$ puisque $D = 1D+0I$ (on pose donc $u_1 = 1$ et $v_1 = 0$) et pour $k = 0$ puisque $D^0 = 0D+1I$ (donc $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$). Supposons le résultat vrai au rang k, on a alors $D^{k+1} = D \times D^k = D(u_k D+v_k I) = u_k D^2+v_k D = u_k(-2D+3I)+v_k D = (v_k-2u_k)D+3u_k I$. En posant $u_{k+1} = -2u_k+v_k$ et $v_{k+1} = 3u_k$, on a bien la forme demandée au rang $n+1$, d'où l'existence des coefficients u_k et v_k.
Nous avons de plus obtenu des relations de récurrence qui permettent de faire le calcul suivant : $u_{k+2} = -2u_{k+1} + v_{k+1} = -2u_{k+1} + 3u_k$. La suite (u_k) est donc récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique est $x^2 + 2x - 3 = 0$, elle a pour discriminant $\Delta = 4 + 12 = 16$, et admet donc deux racines $r = \dfrac{-2-4}{2} = -3$, et $x_2 = \dfrac{-2+4}{2} = 1$. On en déduit que $u_k = \alpha(-3)^k + \beta$, avec $\alpha + \beta = 0$ et $-3\alpha + \beta = 1$, dont on tire $\alpha = -\dfrac{1}{4}$ en faisant la différence des deux équations, puis $\beta = \dfrac{1}{4}$. On a donc $u_k = \dfrac{1}{4}(1 - (-3)^k)$ et $v_k = \dfrac{3}{4}(1 - (-3)^{k-1})$.
On peut alors écrire explicitement les coefficients de la matrice D^k (ce qui n'a pas grand intérêt en soi...).

Exemple 5 : Le retour des chaines de Markov, mais à l'aide de matrices.
Un jeune étudiant en classe préparatoire travaille ou non ses mathématiques chaque soir en procédant de la façon suivante : il peut soit travailler son cours, soit faire des exercices, soit ne rien faire du tout. S'il effectue une certaine activité (ou non-activité) un soir, il y a une chance sur cinq qu'il refasse la même chose le lendemain, et deux chances sur cinq qu'il passe à chacune des deux autres activités. On suppose qu'on démarre notre étude au jour numéro 0, où notre étudiant n'a rien fait. Notons donc R_n : « L'étudiant ne fait rien le jour n » ; C_n : « L'étudiant travaille son cours au jour n » et E_n : « L'étudiant fait des exercices au jour n ». Notons également r_n, c_n et e_n les proabilités respectives de ces évènements. L'énoncé nous donne $r_0 = 1$, et toutes les probabilités conditionnelles suivantes : $P_{R_n}(R_{n+1}) = \dfrac{1}{5}$; $P_{R_n}(C_{n+1}) = \dfrac{2}{5}$; $P_{R_n}(E_{n+1}) = \dfrac{2}{5}$, etc. Comme toujours dans ce genre de problème, les évènements R_n, C_n et E_n forment un système complet et la formule des probabilités totales nous donne des relations de récurrence du type $r_{n+1} = \dfrac{1}{5}r_n + \dfrac{2}{5}c_n + \dfrac{2}{5}e_n$ (et symétriquement pour les deux autres probabilités). Comme nous aurons du mal à expliciter les suites à partir de ces relations, nous allons avoir recours à un point de vue matriciel.

Notons donc M la matrice des probabilités conditionnelles : $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$, et posons $X_n = \begin{pmatrix} r_n \\ c_n \\ e_n \end{pmatrix}$, suite de matrice-colonnes représentant nos trois suites inconnues. Constatons alors qu'on peut interpréter nos trois relations de récurrence sous la forme d'une seule égalité matricielle : $MX_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}r_n + \frac{2}{5}c_n + \frac{2}{5}e_n \\ \frac{2}{5}r_n + \frac{1}{5}c_n + \frac{2}{5}e_n \\ \frac{2}{5}r_n + \frac{2}{5}c_n + \frac{1}{5}e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{n+1} \\ c_{n+1} \\ e_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$. La relation $X_{n+1} = MX_n$ doit vous faire penser à une suite géométrique, et de fait ça se comporte pareil puisqu'on peut prouver par récurrence (il faudra refaire la démonstration à chaque fois dans ce genre d'exercices) que $X_n = M^n X_0$. En effet, c'est vrai pour $n = 1$ puisque $X_1 = MX_0$ d'après le calcul précédent, et en supposant que $X_n = M^n X_0$, on obtient $X_{n+1} = MX_n$ (calcul précédent) $= M(M^n X_0) = M^{n+1} X_0$. Comme nous connaissons la matrice X_0, il ne reste plus qu'à déterminer les puissances de M pour résoudre le problème.

Il existe plusieurs façon d'effectuer ce calcul, par exemple en constatant que $M = \frac{2}{5}J - \frac{1}{5}I$, où on a posé $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Un petit calcul permet de constater que $J^2 = 3J$, relation à partir de laquelle on prouve facilement par récurrence que $J^n = 3^{n-1}J$. Comme les matrices I et J commutent, on peut appliquer la formule du binome de Newton : $\left(\frac{2}{5}J - \frac{1}{5}I\right)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} \left(\frac{2}{5}J\right)^k \left(-\frac{1}{5}I\right)^{n-k} =$

$$\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} \frac{2^k}{5^k} J^k \times \frac{(-1)^{n-k}}{5^{n-k}} = \frac{1}{5^n}\left((-1)^n I + \sum_{k=1}^{k=n} \binom{n}{k} 2^k \times 3^{k-1}(-1)^{n-k} J\right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{5^n} I + \frac{1}{3 \times 5^n} \sum_{k=1}^{k=n} \binom{n}{k} 6^k (-1)^{n-k} J = \frac{(-1)^n}{5^n} I + \frac{1}{3 \times 5^n}(5^n - (-1)^n)J = \frac{1}{3}J + \left(-\frac{1}{5}\right)^n \left(I - \frac{1}{3}J\right).$$

Ouf! Ce n'est pas très beau, mais on peut expliciter la matrice M^n puis la valeur de r_n, c_n et e_n. Comme $X_n = M^n \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, il suffit en fait de connaitre les éléments de la première colonne de M^n. On obtient $r_n = (M^n)_{11} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{5}\right)^n$, et $c_n = e_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{5}\right)^n$. Notons que ces trois probabilités tendent vers $\frac{1}{3}$ quand n tend vers $+\infty$.

Chapitre 12

Limites, continuité

12.1 Limites

12.1.1 Définitions

Définition 103. Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[a;+\infty[$. La fonction f admet pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si $\forall M \in \mathbb{R}$, $\exists A \in \mathbb{R}$, $x \geqslant A \Rightarrow f(x) \geqslant M$. On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Remarque 92. On définit de même une limite égale à $-\infty$, ou des limites infinies quand x tend vers $-\infty$. Par exemple, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R}$, $\exists A \in \mathbb{R}$, $x \leqslant A \Rightarrow f(x) \geqslant M$.

Définition 104. Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[a;+\infty[$, et $l \in \mathbb{R}$. La fonction f admet pour limite l quand x tend vers $+\infty$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists M \in \mathbb{R}$, $x \geqslant M \Rightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon$. On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.

Remarque 93. Cette définition est très similaire à celle de la limite d'une suite. De même, f admet pour limite l quand x tend vers $-\infty$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists M \in \mathbb{R}$, $x \leqslant M \Rightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon$.

Définition 105. Soit f une fonction définie sur un intervalle I, $a \in I$ et $l \in \mathbb{R}$, alors la fonction f admet pour limite l quand x tend vers a si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$, $|x - a| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$. On le note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

Remarque 94. Si on y regarde de plus près, cette définition ne fait que retranscrire formellement la notion intuitive de limite : on peut se rapprocher autant que possible de l quitte à se rapprocher suffisamment de a.

Exemple : Prouvons à l'aide de cette définition que $\lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1$. Soit $\varepsilon > 0$, on cherche une valeur de η telle que $|x - 1| \leqslant \eta \Rightarrow |x^2 - 1| < \varepsilon$. Or, $|x^2 - 1| = |x - 1| \times |x + 1|$ et, si $x \in [1 - \eta; 1 + \eta]$, on a $|x + 1| \leqslant 2 + \eta$, donc $|x^2 - 1| \leqslant \eta(2 + \eta) \leqslant 3\eta$ en prenant $\eta \leqslant 1$, ce qu'on peut toujours supposer puisqu'on ne cherche qu'une valeur qui fonctionne. Il suffit alors de poser $\eta = \dfrac{\varepsilon}{3}$ pour satisfaire à la définition d'une limite finie.

Définition 106. On dit que f admet l pour limite à gauche en a si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$, $x \in [a - \eta; a[\Rightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon$. On le note $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = l$. De même, on peut définir une limite à droite en a égale à l.

Exemple : La fonction partie entière admet en chaque entier une limite à gauche et une limite à droite différentes. Par exemple, $\lim\limits_{x \to 2^-} Ent(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to 2^+} Ent(x) = 2$.

Définition 107. Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \backslash \{a\}$. La fonction f admet pour limite $+\infty$ quand x tend vers a si $\forall M \in \mathbb{R}$, $\exists \eta > 0$, $0 < |x - a| < \eta \Rightarrow f(x) \geqslant M$.

Remarque 95. La présence de l'inégalité $0 < |x - a|$ est nécessaire puisque la fonction, dans le cas où elle serait définie en a, ne pourrait y admettre un limite infinie. On définit de même une limite égale à $-\infty$ en a en changeant le sens de la dernière inégalité. On peut prolonger la notion de limite à gauche et à droite au cas de limites infinies.

12.1.2 Opérations et limites

Les résultats étant exactement les mêmes que ceux déjà vus dans le cas des suites. Le fait que la limite soit prise en $+\infty$, en $-\infty$ ou en a ne change absolument rien aux contenus des tableaux, que nous ne reproduirons donc pas ici.

Exemple : On cherche la limite de $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-1}$ quand x tend vers 1. Comme $\lim\limits_{x\to 1} x^2 + 3 = 4$ et $\underset{x\to 1}{x} - 1 = 0^+$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$.

Remarque 96. Le signe étant particulièrement important lors du calcul de ce genre de limites, on aura souvent besoin de recourir à des tableaux de signe pour déterminer par exemple si un dénominateur a pour limite 0^+ ou 0^-.

12.1.3 Négligeabilité, équivalence

Les notions de négligeabilité et d'équivalence pour les fonctions sont très proches de ce qu'on a pu voir sur les suites. La différence est que, pour une fonction, il est indispensable de préciser à quel endroit l'équivalence ou la négligeabilité est valable. Un équivalent valable quand x tend vers $+\infty$ ne l'est en général pas quand x tend vers 0.

Définition 108. Soient f et g deux fonctions définies et ne s'annulant pas au voisinage de a (qui peut être égal à $+\infty$ ou à $-\infty$), alors f et g sont équivalentes en a si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, ce que l'on note $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$. La fonction f est négligeable devant la fonction g si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, ce qu'on note $f(x) \underset{a}{=} o(g(x))$.

Exemples : On peut réinterpréter les limites classiques en termes d'équivalents et de négligeabilité, notamment $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ et $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$.
Les propriétés et utilisations habituelles des équivalents sont les mêmes que pour les suites :

- Deux fonction équivalentes en a y ont le même comportement (et notamment y admettent la même limite quand elle en ont une) d'où l'intérêt des équivalents pour les calculs de limites et de branches infinies.
- On peut multiplier, diviser, inverser, élever à une puissance quelconque (mais constante) un équivalent.
- On ne peut toujours pas additionner ni composer des équivalents en général.

12.1.4 Asymptotes

Par définition, une asymptote est une droite dont la courbe représentative d'une fonction se rapproche « à l'infini » (éventuellement en la coupant, contrairement à une croyance très répandue). Il en existe de trois types, auxquelles nous allons ajouter la notion de branche infinie.

Définition 109. La courbe représentative d'une fonction f admet pour **asymptote verticale** la droite d'équation $x = a$ si $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$.

Remarque 97. Cela suppose que la fonction f n'est pas définie en a (cas le plus fréquent), ou y admet une discontinuité violente.

Exemple : La courbe de la fonction $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-4}$ admet les deux droites d'équation $x = 2$ et $x = -2$ comme asymptotes verticales.

Définition 110. La courbe représentative d'une fonction f admet pour **asymptote horizontale** la droite d'équation $y = a$ si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$ ou si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$.

Exemple : La courbe de la fonction $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-5}$ admet la droite d'équation $y = 1$ comme asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$.

Définition 111. La courbe représentative d'une fonction f admet comme **asymptote oblique** la droite d'équation $y = ax+b$ (avec $a \neq 0$) si $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-(ax+b)) = 0$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)-(ax+b)) = 0$. Une autre façon de voir les choses est de dire que $f(x) = ax + b + \varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \varepsilon(x) = 0$.

Exemple : La courbe de la fonction $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+2}$ a pour asymptote oblique la droite d'équation $y = x - 2$ en $+\infty$ et en $-\infty$ (voir plus loin pour le détail d'un calcul du même genre).

12.1.5 Branches paraboliques

Définition 112. La courbe représentative d'une fonction f admet en $+\infty$ une **branche parabolique de direction** (Ox) si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$, mais $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ (on a une définition similaire en $-\infty$).

Exemples : Les fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ ou $x \mapsto \ln x$ admettent une branche parabolique de direction (Ox).

Définition 113. La courbe représentative d'une fonction f admet en $+\infty$ une **branche parabolique de direction** (Oy) si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$ (on a une définition similaire en $-\infty$).

Exemple : La fonction $x \mapsto x^2$ admet une branche parabolique de direction (Oy) (d'où le nom de branche parabolique, d'ailleurs), ainsi que la fonction $x \mapsto e^x$ en $+\infty$.

Définition 114. La courbe représentative d'une fonction f admet en $+\infty$ une **branche parabolique de direction la droite d'équation** $y = ax$ ($a \neq 0$) si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$, mais $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty$ (on a une définition similaire en $-\infty$).

Remarque 98. Comme dans le cas des autres branches paraboliques, cela signifie que la courbe a une direction qui se rapproche de celle de la droite considérée, mais tout en s'éloignant de toute droite parallèle à celle-ci (sinon il y aurait une asymptote oblique).

Exemple : La fonction $f(x) = x + \ln x$ a une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = x$ en $+\infty$.

Plan d'étude des branches infinies :

Quand on cherche à étudier les branches infinies d'une fonction, on procède dans l'ordre suivant :

- On calcule la limite de f. Si elle est finie, on a une asymptote horizontale, si elle est infinie on continue.
- On calcule la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$. Si elle est nulle ou infinie, on a une branche parabolique de direction (Ox) ou (Oy). S'il y a une limite finie non nulle a, on continue.
- On calcule la limite de $f(x) - ax$. Soit elle est finie égale à b et on a une asymptote oblique d'équation $y = ax+b$, soit elle est infinie, et il y a une branche parabolique de direction $y = ax$.

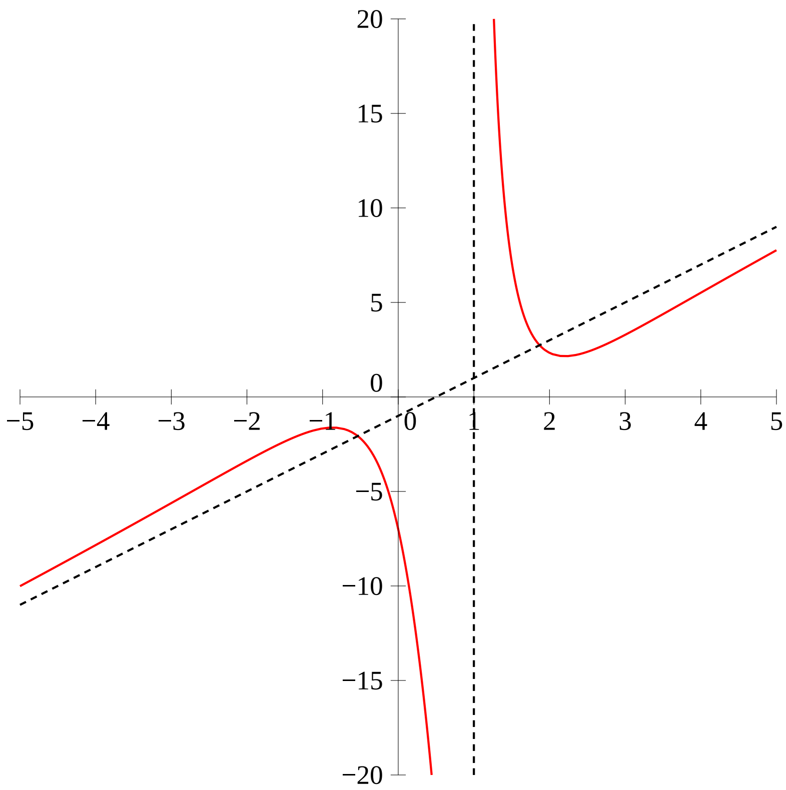
Étude des branches infinies de $f(x) = \dfrac{2x^4 - 5x^3 + 4x + 7}{x^3 - 2x^2 + 2x - 1}$ **:**

Commençons par déterminer le domaine de définition : $x^3 - 2x^2 + 2x - 1$ a pour racine évidente $x = 1$, et se factorise en $(x-1)(x^2 - x + 1)$ (je vous passe les détails de la factorisation). Le trinome $x^2 - x + 1$ a pour discriminant $\Delta = -3$, il ne s'annule donc jamais (il est toujours positif). On a donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

Pour déterminer l'existence d'une éventuelle asymptote verticale, inutile de se fatiguer et de préciser les signes : $\lim\limits_{x\to 1} x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$ et $\lim\limits_{x\to 1} 2x^4 - 5x^3 + 4x + 7 = 8$, donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \pm\infty$, ce qui nous suffit à connaitre l'existence d'une symptote verticale d'équation $x = 1$.

De plus, $f(x) \underset{\pm\infty}{\sim} \dfrac{2x^4}{x^3} = 2x$ (la définition des équivalents, utilisés ici pour ne pas surcharger les calculs, est donnée un peu plus loin dans le cours), donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$. De même, $\dfrac{f(x)}{x} \underset{\pm\infty}{\sim} 2$, donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$. Reste à calculer $f(x) - 2x = \dfrac{2x^4 - 5x^3 + 4x + 7 - 2x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 2x}{x^3 - 2x^2 + 2x - 1} = \dfrac{-x^3 - 4x^2 + 6x + 7}{x^3 - 2x^2 + 2x - 1}$, qui a pour limite -1 en $\pm\infty$ (même méthode qu'au-dessus). Conclusion : la droite d'équation $y = 2x - 1$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

Voici l'allure de la courbe :

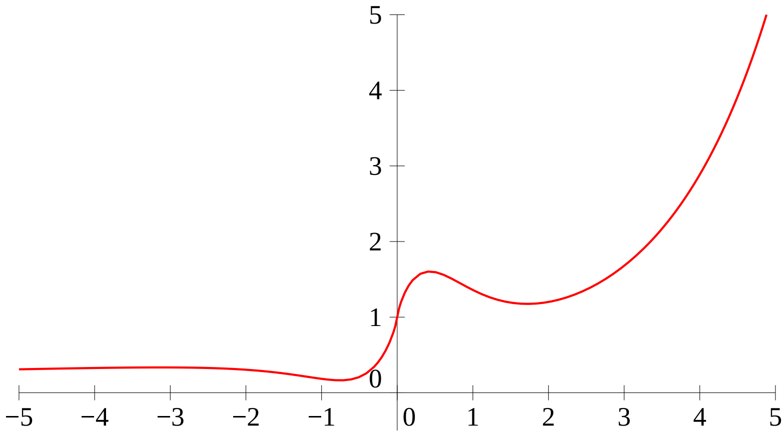


Étude des branches infinies de $g(x) = \dfrac{e^x - x\ln|x|}{x^2 + 1}$

Le dénominateur ne s'annulant jamais, g est définie sur $\mathbb{R}^*$ (il faut tout de même avoir $|x| > 0$). Quand x tend vers 0, numérateur et dénominateur convergent vers 1, puisque $\lim\limits_{x\to 0} x\ln|x| = 0$, donc il n'y a pas d'asymptote verticale.

Comme on a par ailleurs, en utilisant croissances comparées et équivalents, $f_{x\to+\infty}(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{x^2}$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^3} = +\infty$. Il y a donc en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Oy). En $-\infty$, c'est bien sûr différent, l'exponentielle tendant vers 0. On a cette fois $f(x) \underset{-\infty}{\sim} \dfrac{x\ln(-x)}{x^2} = \dfrac{\ln(-x)}{x}$, qui tend vers 0 par croissance comparée. Il y a donc une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$.

L'allure de la courbe :



12.1.6 Propriétés supplémentaires

Comme dans le cas des suites, on a des propriétés intéressantes à partir de comparaisons entre fonctions :

Proposition 79. Soit I un intervalle f, g et h trois fonctions définies sur I, f et g admettant pour limites l et l' en x_0 (x_0 étant un élément de I, une borne de I, ou un infi) , alors :

- si $\forall x \in I$, $f(x) \leqslant g(x)$, $l \leqslant l'$.
- si $\forall x \in I$, $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$ et $l = l'$, alors h admet pour limite l en x_0 (théorème des gendarmes).

Ces résultats restent valables avec des limites infinies.

Exemple : On cherche la limite en $+\infty$ de $f(x) = \dfrac{2\,Ent(x)+5}{Ent(x)-2}$. Partons du fait que $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \leqslant Ent(x) \leqslant x+1$. On a donc $2x+5 \leqslant 2\,Ent(x)+5 \leqslant 2x+7$, et $x-2 \leqslant Ent(x)-2 \leqslant x-1$, donc $\forall x > 2$ (dans ce cas, tout est positif), $\dfrac{1}{x-1} \leqslant \dfrac{1}{Ent(x)-2} \leqslant \dfrac{1}{x-2}$, et en faisant le produit des inagalités (tout est positif si $x > 2$), on a $\dfrac{2x+5}{x-1} \leqslant \dfrac{2\,Ent(x)+5}{Ent(x)-2} \leqslant \dfrac{2x+7}{x-2}$. Chacun des deux termes encadrant la fonction ayant pour limite 2, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$.

Proposition 80. Soient f et g deux fonctions telles que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x) = l$, alors $\lim\limits_{x\to a} g \circ f(x) = l$ (résultat également valable avec des limites infinies).

12.2 Continuité

12.2.1 Définitions

Définition 115. Une fonction f définie sur I est **continue en** $a \in I$ si $\lim\limits_{x\in a} f(x) = f(a)$.

Définition 116. La fonction f est **continue à gauche** en a si $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$, et **continue à droite** en a si $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$. Elle est continue en a si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en a.

Exemple : On a $\lim_{x \to 2^-} Ent(x) = 1$ et $\lim_{x \to 2^+} Ent(x) = 2$. La fonction partie entière n'est donc pas continue en 2, elle n'y est continue qu'à droite.

Définition 117. Une fonction f est **continue sur un intervalle** I si elle est continue en tout point de I.

Théorème 16. Les fonctions usuelles suivantes : polynomes, logarithmes, exponentielles, puissances, valeur absolue sont continues sur leur ensemble de définition.

Proposition 81. Soient f et g deux fonction continues en a, alors les fonctions $f + g$ et fg sont aussi continues en a. Si de plus $g(a) \neq 0$, $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues en a.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate des propriétés d'opérations sur les limites. De même pour la propriété qui suit, qui découle des compositions de limites. □

Proposition 82. Soit f une fonction continue en a et g une fonction continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a.

Remarque 99. Ces résultats restent bien entendu vrais sur un intervalle. On dira souvent sans plus de détail qu'une fonction obtenue par ces opérations à partir de fonctions usuelles est continue sur son ensemble de définition « par théorèmes généraux ».

Proposition 83. Soit f une fonction définie sur $I \backslash \{a\}$ admettant une limite finie l quand x tend vers a, alors on peut prolonger f de manière unique en une fonction continue sur I en posant $f(a) = l$ (on garde habituellement la même notation pour la fonction prolongée). On parle de prolongement par continuité de f en a.

Exemple : La fonction $f : x \mapsto x \ln x$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ mais prolongeable par continuité à $\mathbb{R}_+$ en posant $f(0) = 0$.

12.2.2 Théorème des valeurs intermédiaires et applications

Théorème 17. Soit f une fonction continue sur un segment $[a; b]$ et c compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe $x \in [a; b]$ tel quel $f(x) = c$.

Corollaire 2. Soit f une fonction continue sur un segment $[a; b]$, alors $f([a; b])$ est un segment. En notant $m = \min_{[a;b]} f(x)$ la plus petite valeur prise par f sur $[a; b]$ et $M = \max_{[a;b]} f(x)$ la plus grande valeur prise par f sur $[a; b]$, on a donc $f([a; b]) = [m; M]$.

Remarque 100. Attention, l'hypothèse de continuité est indispensable (par exemple, $Ent([0; 5]) = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$, seules les valeurs entières sont prises par la fonction), et le fait qu'on soit sur un segment également. La fonction inverse a beau être continue sur $\mathbb{R}_+^*$, elle n'y a ni maximum, ni minimum. De plus, il faut se méfier du fait qu'en général $f([a; b]) \neq [f(a), f(b)]$. Par exemple, si f est la fonction carré, $f([-2; 3]) = [0; 9]$.

Démonstration. On ne fera pas cette démonstration un peu technique, qui utilise d'ailleurs un peu plus que le simple théorème des valeurs intermédiaires. □

Corollaire 3. Soit f une fonction continue sur un intervalle I, alors $f(I)$ est un intervalle.

Remarque 101. La nature de l'intervalle image n'est pas toujours la même que celle de l'intervalle de départ. Ainsi, si f est la fonction carré, $f(]-2; 3[) = [0; 9[$.

Méthode de dichotomie

Proposition 84. Soit f une fonction continue sur un segment $[a;b]$, telle que $f(a)f(b) < 0$ (autrement dit, $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe opposé). On construit deux suites récurrentes (a_n) et (b_n) en posant $a_0 = a$ et $b_0 = b$ puis en procédant ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, si $f(a_n)f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < 0$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$; dans le cas contraire on pose $a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$. Les deux suites (a_n) et (b_n) sont alors adjacentes, et elles convergent vers une limite commune α vérifiant $f(\alpha) = 0$. De plus, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$, ce qui majore l'erreur commise en approchant α par a_n ou b_n.

Démonstration. Commençons par prouver par récurrence la propriété P_n : $a_n \leqslant b_n$ et $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$. Pour $n = 0$, on a $a_0 = a \leqslant b_0 = b$ et $b_0 - a_0 = b - a$, donc P_0 est vraie. Supposons P_n vraie, on a alors deux cas possibles pour la définition de a_{n+1} et b_{n+1}. Dans le premier, on a $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2} - a_n = \dfrac{b_n - a_n}{2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{b-a}{2^n}$ par hypothèse de récurrence donc $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b-a}{2^{n+1}}$. Comme $a \leqslant b$, on a prouvé par la même occasion que $a_{n+1} \leqslant b_{n+1}$. Dans le deuxième cas, $b_{n+1} - a_{n+1} = b_n - \dfrac{a_n+b_n}{2} = \dfrac{b_n - a_n}{2}$ et on conclut de la même façon. La propriété est donc vraie pour tout entier par principe de récurrence.

La suite $b_n - a_n$ étant géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$, elle converge vers 0. De plus, (a_n) est une suite croissante (en effet, soit $a_{n+1} = a_n$, soit $a_{n+1} - a_n = \dfrac{a_n+b_n}{2} - a_n = \dfrac{b_n - a_n}{2} \geqslant 0$), et (b_n) est décroissante (soit $b_{n+1} = b_n$, soit $b_{n+1} - b_n = \dfrac{a_n+b_n}{2} - b_n = \dfrac{a_n - b_n}{2} \geqslant 0$). Finalement, les deux suites sont adjacentes et convergent vers une même limite α.

Reste à prouver que $f(\alpha) = 0$, ce que nous ne ferons pas complètement : on prouve que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(a_n)$ est du signe de $f(a)$ (la construction est faite pour cela) et $f(b_n)$ du signe de $f(b)$ (une petite récurrence supplémentaire pour ces propriétés), donc $f(a_n)$ et $f(b_n)$ sont toujours de signe contraire. Or, ces deux suites convergent vers $f(\alpha)$ car f est continue. Le réel $f(\alpha)$ doit donc être à la fois positif et négatif, il est nécessairement nul. □

Exemple d'utilisation : On cherche à étudier les variations de la fonction $f(x) = x^4 + 4x^2 + 4x - 5$. Cette fonction est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = 4x^3 + 8x + 4x = 4g(x)$, avec $g(x) = x^3 + 2x + 1$. Cette fonction g est elle-même dérivable et $g'(x) = 3x^2 + 2 > 0$. La fonction g est strictement croissante, elle s'annule en un unique réel α, et f est donc décroissante sur $]-\infty;\alpha]$ et croissante sur $[\alpha;+\infty[$.

On aimerait déterminer une valeur approchée de α. Ayons pour cela recours à la dichotomie, mais il faut commencer par trouver un premier encadrement de α. On constate que $g(0) = 1$ et $g(-1) = -2$, donc la racine de g se trouve dans l'intervalle $[-1;0]$. On calcule ensuite $g(-0.5)$, qui se trouve être négatif, donc $\alpha \in [-0.5;0]$. Puis on calcule $g(0.25)$, qui est positif, donc $g(\alpha) \in [-0.5;-0.25]$. On sait donc déjà que $\alpha \simeq -0.375$, à 0.125 près. On aura naturellement recours à la calculatrice ou à l'ordinateur pour effectuer ce genre d'algorithmes de façon plus poussée. Remarquons que pour obtenir une valeur approchée à $\varepsilon > 0$ près, il suffit de choisir n tel que $\dfrac{b-a}{2^n} < \varepsilon$.

12.2.3 Compléments sur les bijections

Proposition 85. Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I. Alors f est bijective de I vers $J = f(I)$ et sa réciproque g est continue et strictement monotone (de même monotonie que f) sur J.

Démonstration. Supposons f croissante (l'autre cas est très similaire). On sait déjà que $f(I)$ est un intervalle, et de plus f est injective car strictement monotone, donc bijective sur son image. La fonction g est donc bien définie sur J. De plus, si y et y' sont deux élément de J tels que $y < y'$, on a $y = f(x)$ et $y' = f(x')$, avec $x < x'$, donc $g(y) = x < x' = g(y')$ et g est strictement croissante. Enfin, soit $y \in J$, $x = g(y)$ et $\varepsilon > 0$ (et tel que $[x - \varepsilon; x + \varepsilon] \subset I$, sinon il n'y a pas de problème). Notons $y_1 = g(x - \varepsilon)$, $y_2 = f(x + \varepsilon)$. Posons $\eta = \min(y - y_1; y_2 - y)$. On a alors $[y - \eta; y + \eta] \subset [y_1; y_2]$, donc par croissance de g, $g([y - \eta; y + \eta]) \subset [x - \varepsilon; x + \varepsilon]$. Ceci prouve la continuité de g en y. □

Exemple : Considérons la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \ln x + 3x + e^x$. Cette fonction est continue et strictement croissante (c'est une somme de fonctions croissantes), donc bijective vers $f(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$. Sa fonction réciproque g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et vérifie $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

Application : On définit la suite (u_n) de la façon suivante : $\forall n \geqslant 3$, u_n est la plus petite solution de l'équation $e^x = nx$. Cette définition est correcte car la fonction $f_n : x \mapsto e^x - nx$ est continue dérivable sur $\mathbb{R}_+$, de dérivée $f_n'(x) = e^x - n$, donc admet un minimum global en $\ln n$, de valeur $e^{\ln n} - n \ln n = n(1 - \ln n) < 0$ pour $n \geqslant 3$. L'équation admet donc une solution $x_n \leqslant \ln n$ (et accessoirement une deuxième solution supérieure à $\ln n$).

Pour prouver par exemple que $\forall n \geqslant 3$, $u_n > 0$, on constate que $f_n(0) = e^0 - n \times 0 = 1 > 0$. Or, par définition, $f_n(u_n) = 0 < f_n(0)$. En utilisant le théorème de la bijection (et en fait la partie de la conclusion qui stipule que f_n^{-1}, qui est définie sur $[n(1 - \ln n); +\infty[$, à valeurs dans $] - \infty; \ln n]$, est de même monotonie que f_n), on peut en déduire que $u_n > 0$.

On peut prouver de même que la suite (u_n) est décroissante : $f_{n+1}(u_n) = e^{u_n} - (n+1)u_n = e^{u_n} - nu_n - u_n = -nu_n < 0$ (on a utilisé le fait que $f_n(u_n) = 0$, et que $u_n > 0$). On a donc $f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$, d'où $u_n > u_{n+1}$ (c'est encore la décroissance de la réciproque qui est utilisée).

La suite étant décroissante minorée, elle converge vers un certain réel l. Pour déterminer la valeur de l, il faut revenir à l'équation permettant de définir la suite : puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$, on aura $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{u_n} = e^l$. Or, par définition, $e^{u_n} = nu_n$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} nu_n = e^l$. Ceci n'est possible que si $l = 0$ (sinon, nu_n tendrait vers $+\infty$), et on en déduit au passage que $\lim\limits_{n \to +\infty} nu_n = 1$, c'est-à-dire que $u_n \sim \dfrac{1}{n}$.

Chapitre 13

Variables aléatoires finies

Introduction

Pour introduire cette nouvelle notion, absolument fondamentale en probabilités (tellement d'ailleurs que vous n'entendrez plus parler que de ça jusqu'à la fin de l'année, à peu de choses près), prenons un exemple très classique : on lance simultanément (ou successivement, ça ne change pas grand chose) quatre pièces équilibrées. L'univers Ω des résultats de l'expérience est un ensemble à $2^4 = 16$ éléments constitué des suites de quatre Pile ou Face. On peut naturellement déjà se poser plein de questions concernant cet univers, mais il arrive qu'on ait envie de considérer des résultats qui ne sont pas directement ceux de l'expérience. Par exemple, on veut étudier plus particulièrement le nombre de Piles obtenus lors de ces quatre lancers de pièces. Ce nombre de Piles est un entier directement associé au résultat de l'expérience (si vous connaissez le résultat, vous connaissez le nombre de Piles). Eh bien, une variable aléatoire, c'est exactement ça : une application qui, à chaque élément de Ω, associe un nombre réel.

13.1 Variables aléatoires finies

13.1.1 Définition, notations

Définition 118. Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable. Une **variable aléatoire** (réelle) X sur Ω est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\{\omega \in \Omega | X(\omega) \leqslant x\} \in \mathcal{T}$.

Remarque 102. On note $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X (qui est bien l'image de l'ensemble Ω par l'application X).

Exemple : Dans l'exemple explicité en introduction (lancers de quatre pièces équilibrées), en notant X le nombre de Piles obtenus, X est une variable aléatoire, et $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3; 4\}$.
Exemple : L'application qui à chaque français associe sa taille est une variable aléatoire sur l'ensemble de la population française. On a ici $X(\Omega) \subset [0; 3]$ (j'ai pris large).

La définition que je viens de donner étant très générale, nous allons très rapidement nous restreindre à un cas particulier : **pour la suite du chapitre, on supposera que l'univers Ω est fini**. Dans ce cas, une variable aléatoire sera simplement une application de Ω dans $\mathbb{R}$ (et même le plus souvent dans $\mathbb{N}$), qui prendra donc nécessairement un nombre fini de valeurs (et on peut oublier la condition technique de la définition générale).

Définition 119. Soit X une variable aléatoire sur un univers Ω. On note habituellement $X = x$, l'événement $\{\omega \in \Omega | X(\omega) = x\}$. On utilisera de même la notation $X \leqslant x$ pour l'événement $\{\omega \in \Omega | X(\omega) \leqslant x\}$ (et $X \geqslant x$; $X < x$ et $X > x$ pour des évèvements similaires).

Exemple : Ainsi, si on reprend l'exemple du lancer de quatre pièces (et toujours avec X le nombre de Piles), on pourra écrire $P(X = 1) = \dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4}$ (il y a quatre cas sur les 16 possibles pour lesquels on obtient un seul Pile), ou encore $P(X \geqslant 3) = \dfrac{5}{16}$ (cinq cas valables sur 16).

Proposition 86. Soient X et Y deux variables aléatoires sur un même univers Ω, alors $X+Y$, XY, λX (où λ est un réel quelconque), $\max(X,Y)$ et $\min(X,Y)$ sont également des variables aléatoires.

Pas de démonstration, c'est évident, ce sont aussi des applications de Ω dans $\mathbb{R}$.

Proposition 87. Soit X une variable aléatoire sur Ω et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, alors $g(X) : \omega \mapsto g(X(\omega))$ est aussi une variable aléatoire (notée $g(X)$).

Exemple : Si X est une variable aléatoire, X^2 en est également une.

13.1.2 Loi d'une variable aléatoire

L'intérêt des variables aléatoires est bien entendu d'étudier la probabilité d'apparition de chacun des résultats possibles :

Définition 120. Soit X une variable aléatoire, la **loi de probabilité** de X est la donnée des probabilités $P(X = k)$, pour toutes les valeurs k prises par X (c'est-à-dire pour $k \in X(\Omega)$).

Remarque 103. Pour calculer la loi d'une variable aléatoire, il suffit donc de déterminer toutes les valeurs qu'elle peut prendre, puis calculer la probabilité de chaque résultat.

Exemple : Reprenons notre exemple du nombre de Piles sur quatre lancers de pièces. On peut présenter la loi de X sous la forme d'un tableau :

k	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

Proposition 88. Les événements $(X = k)_{k \in X(\Omega)}$ forment un système complet d'événements. On a donc $\sum\limits_{k \in X(\Omega)} P(X = k) = 1$.

Démonstration. Ces événements sont incompatibles (on ne peut pas avoir à la fois $X(\omega) = k$ et $X(\omega) = k'$ pour des valeurs différentes de k et k'). Leur réunion est bien Ω tout entier puisque chaque élément ω de Ω a une image par X. $\square$

Exemple : Dans une urne se trouvent cinq jetons numérotés de 1 à 5. On en tire 3 simultanément et on note X le plus petit des trois numéros tirés. On a ici $X(\Omega) = \{1; 2; 3\}$ (si on tire trois jetons, le plus petit ne peut pas être plus grand que 3). Pour déterminer la loi, le plus simple est de dénombrer tous les cas possibles (il n'y en a que 10), même si on peut exprimer les probabilités à l'aide de coefficients binomiaux (par exmple, pour avoir $X = 1$, il faut tirer le jeton 1 puis deux autres parmi les 4 restants, soit $\binom{4}{2}$ tirages favorables sur les $\binom{5}{3}$). on obtient en tout cas :

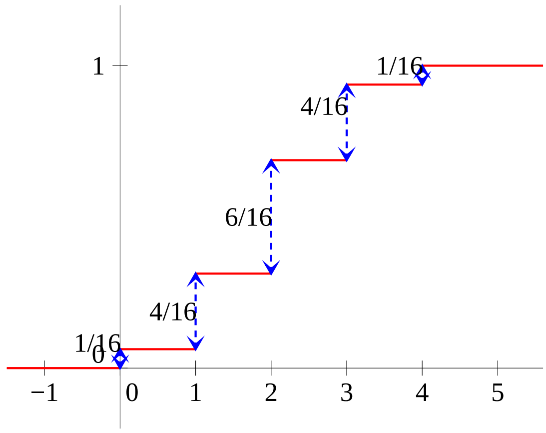
k	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

13.1.3 Fonction de répartition

La fonction de répartition est simplement une autre façon de représenter la loi d'une variable aléatoire. Dans le cas des lois finies, elle n'apporte absolument aucune information supplémentaire, et son utilité est donc limitée. Mais vous verrez (surtout l'an prochain) que c'est une notion essentielle dans le cadre des variables aléatoires continues, où la représentation de la loi sous forme de tableau n'a plus de sens.

Définition 121. La **fonction de répartition** d'une variable aléatoire X est la fonction $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F_X(x) = P(X \leqslant x)$.

Exemple : Reprenons notre exemple standard de lancer de quatre pièces, dont la loi a été donnée plus haut. La courbe de F_X ressemble à ceci (à chaque fois qu'on atteint une des valeurs appartenant à $X(\Omega)$, on fait un bond dont la hauteur est la probabilité correspondante) :



Proposition 89. Si X est une variable aléatoire finie, la fonction F_X est une fonction en escalier (c'est-à-dire qu'on peut découper $\mathbb{R}$ en un nombre fini d'intervalles sur lesquels la fonction est constante), dont les sauts se produisent pour les valeurs k appartenant à $X(\Omega)$ et ont pour hauteur $P(X = k)$. Dans le cas général, une fonction de répartition vérifie toujours les propriétés suivantes :

- La fonction F_x est croissante.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.
- La fonction F_x est continue à droite en tout réel.

Proposition 90. Lien entre loi et fonction de répartition.
Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F_X. Alors

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \sum\limits_{k \in X(\Omega) | k \leqslant x} P(X = k)$
- dans l'autre sens, $\forall k \in X(\Omega)$, $P(X = k) = F_X(k) - \lim\limits_{x \to k^-} F_X(x)$

On a plus généralement, pour tous réels x et y, $P(x < X \leqslant y) = F_X(y) - F_X(x)$.

Exemple : Pour mieux comprendre l'intérêt de cette notion, prenons un exemple continu (sans l'étudier en détail). On note X la variable aléatoire donnant le temps d'attente (en heures) d'un client aléatoire à un guichet de la Poste. On supposer pour fixer les idées que $X(\Omega) = [0; 4]$ (au bout de 4 heures, le client en aura vraiment assez d'attendre). Pour ce genre de variable aléatoire, la fonction F_X ne sera plus une fonction en escalier mais simplement une fonction croissante « ordinaire » (elle a par exemple toutes les chances de ne pas comporter de sauts comme dans le cas d'une variable finie, mais plutôt d'être continue). Déterminer la probabilité d'attendre entre 1 et 2 heures au guichet revient d'après la dernière formule donnée dans la propriété précédente à calculer $F_X(2) - F_X(1)$.

13.1.4 Moments d'une variable aléatoire

Lorsqu'on s'intéresse à une variable aléatoire pouvant prendre un grand nombre de valeurs (et même dans les autres cas !), il peut être intéressant de donner, en plus de la loi de la variable qui ne sera pas toujours une donnée très lisible, des caractéristiques d'ensemble de cette loi, comme la moyenne des valeurs prises (pondérées par leur probabilité d'apparition). Ces paramètres sont les mêmes que ceux qu'on étudie en statistiques, nous allons plus particulièrement nous intéresser à l'espérance (qui n'est autre que la moyenne évoquée plus haut, c'est un paramètre de position) et à l'écart-type (paramètre de dispersion, qui mesure la répartition des valeurs autour de l'espérance).

Espérance

Exemple : À un devoir, un élève de prépa ayant décidé de ne réviser qu'un sujet bien précis estime avoir :

- une chance sur 10 de tomber sur le bon sujet et d'avoir 18.
- trois chances sur 10 de ne pas tomber sur le bon sujet mais de sauver un 8 en pipotant.
- six chances sur 10 de sécher lamentablement et d'obtenir un 2 bien mérité.

La note moyenne que peut espérer avoir cet élève à son devoir est de $\frac{1}{10} \times 18 + \frac{3}{0} \times 8 + \frac{6}{10} \times 2 = 5,4$. Ce calcul est un calcul d'espérance mathématique, celle de la variable aléatoire donnant la note de l'élève à son devoir.

Définition 122. L'**espérance** d'une variable aléatoire X est définie par la formule

$$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} kP(X = k)$$

Remarque 104. Il s'agit bel et bien d'un calcul de moyenne avec coefficients égaux à $P(X = k)$, la somme des coefficients valant ici 1.

Exemple : Reprenons l'exemple de quatre lancers de pièce, où X était le nombre de Pile obtenu. On aura $E(X) = 0 \times \frac{1}{16} + 1 \times \frac{4}{16} + 2 \times \frac{6}{16} + 3 \times \frac{4}{16} + 4 \times \frac{1}{16} = 2$. Le résultat est bien conforme à l'intuition qu'on a de la moyenne de la variable aléatoire X.

Exemple : Lors d'une tombola, 1000 personnes ont misé 2 euros. Il y a 100 personnes qui gagnent un lot d'une valeur de 5 euro, 10 gagnent un lot d'une valeur de 10 euros, 3 personnes gagnent un lot d'une valeur de 100 euros et enfin une personne gagne le gros lot, d'une valeur de 600 euros. Naturellement, les 886 personnes restantes ne gagnent rien. On note X la variable aléatoire correspondant au gain. On a $E(X) = 0 \times \frac{886}{1000} + 5 \times \frac{100}{1000} + 10 \times \frac{10}{1000} + 100 \times \frac{3}{1000} + 600\frac{1}{1000} = 1.5$. Autrement dit, chaque participant gagnera en moyenne 1.5 euro, ou plutôt en perdra 0.5 sur les deux qu'il avait misés. On comprend mieux sur cet exemple l'origine du terme espérance, et accessoirement la façon dont la Française des Jeux se remplit les poches.

Définition 123. Soit A un évènement inclus dans notre univers Ω. On appelle **variable indicatrice de l'évènement** A, et on note $\mathbf{1}_A$, la variable aléatoire définie par $\mathbf{1}_A(\omega) = 1$ si $\omega \in A$, et $\mathbf{1}_A(\omega) = 0$ sinon.

Proposition 91. La variable aléatoire constante $X : \omega \mapsto a$, $a \in \mathbb{R}$, a une espérance $E(X) = a$. L'espérance d'une variable aléatoire indicatrice $\mathbf{1}_A$ vaut $P(A)$.

Démonstration. C'est bien parce que je suis consciencieux que je fais une preuve. Dans le premier cas, la loi de X est simple : a avec probabilité 1. On a donc $E(X) = 1 \times a = a$ en appliquant la définition de l'espérance. Dans le second, la loi de $\mathbf{1}_A$ est à peine plus compliquée, 1 si $\omega \in A$ c'est-à-dire avec probabilité $P(A)$ et 0 sinon, donc avec probabilité $1 - P(A)$. L'espérance vaut bien $P(A)$. □

Proposition 92. Linéarité de l'espérance.
Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même univers Ω, et a, b deux réls, on a $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$. En particulier, on aura toujours $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$; $E(aX) = aE(X)$, ou encore en utilisant l'espérance d'une variable constante calculée plus haut, $E(X + b) = E(X) + b$.

Démonstration. La preuve est un peu formelle et sera esquivée cette année. □

Exemple : Cette propriété très simple est mine de rien bien utile (c'est même la propriété fondamentale à maitriser sur l'espérance). On lance par exemple successivement 90 dés. On note X le nombre de 6 obtenus. Calculer l'espérance directement demande un certain courage (la loi de X est une horreur absolue), mais on peut ruser ! Notons A_i l'évènement « On tire un 6 au lancer numéro i » et $\mathbf{1}_{A_i}$ la variable indicatrice correspondante. On peut constater que $X = \mathbf{1}_{A_1} + \mathbf{1}_{A_2} + \cdots + \mathbf{1}_{A_{90}}$ (en effet, additionner les variables indicatrices revient à ajouter 1 à chaque fois qu'un 6 sort, et 0 sinon, ce qui revient exactement à compter le nombre de 6). O a donc $E(X) = E(\mathbf{1}_{A_1}) + E(\mathbf{1}_{A_2}) + \cdots + E(\mathbf{1}_{A_{90}}) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_{90}) = \dfrac{1}{6} + \cdots + \dfrac{1}{6} = \dfrac{90}{6} = 15$ (résultat intuitivement évident, soit dit en passant).

Définition 124. Une variable aléatoire X est dite **centrée** si $E(X) = 0$.

Proposition 93. Si X est une variable aléatoire d'espérance m, la variable aléatoire $X - m$ est centrée. On l'appelle **variable aléatoire centrée associée à** X.

Démonstration. Par linéarité, $E(X - m) = E(X) - E(m) = m - m = 0$. □

Proposition 94. Si X est une variable aléatoire positive (c'est-à-dire que $X(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$), on a $E(X) \geqslant 0$. Si X, Y sont deux variables aléatoires telles que $X \leqslant Y$ (c'est-à-dire que $\forall \omega \in \Omega$, $X(\omega) \leqslant Y(\omega)$), alors $E(X) \leqslant E(Y)$.

Démonstration. C'est une fois de plus évident. Tous les termes intervenant dans le calcul de l'espérance de X étant positifs, la somme sera nécessairement positive. Pour la deuxième propriété, on peut utiliser une ruse classique : si $X \leqslant Y$, la variable aléatoire $Y - X$ est positive, donc $E(Y - X) \geqslant 0$. Or, $E(Y - X) = E(Y) - E(X)$, ce qui nous donne l'inégalité voulue. □

Théorème 18. (théorème du transfert) Soit X une variable aléatoire et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, alors on a $E(g(X)) = \sum\limits_{k \in X(\Omega)} g(k)P(X = k)$.

Démonstration. On admettra ce résultat qui est un peu technique à prouver. C'est évident dans le cas où les images par g des valeurs k sont distinctes, mais un peu plus pénible à rédiger dans le cas général. □

Exemple : Si on cherche à calculer $E(X^2)$, il suffit de faire le calcul de somme suivant : $\displaystyle\sum_{k \in X(\Omega)} k^2 P(X = k)$ (autrement dit, on élève les valeurs au carré et on ne touche pas aux probabilités).

Moments d'ordre supérieur

Définition 125. Soit X une variable aléatoire et r un entier strictement positif, le **moment d'ordre** r de X, noté $m_r(X)$, est l'espérance de la variable aléatoire X^r. Autrement dit (en utilisant le théorème du transfert) $m_r(X) = \sum\limits_{k \in X(\Omega)} k^r P(X = k)$.

Remarque 105. Le moment d'ordre 1 de X n'est autre que l'espérance de X.

Définition 126. La **variance** $V(X)$ d'une variable aléatoire X est le moment d'ordre 2 de la variable aléatoire centrée associée à X. Autrement dit, $V(X) = E((X - E(X))^2)$. L'écart-type σ de la variable aléatoire X est défini par $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Que représente cette variance ? Il s'agit, techniquement, d'une moyenne de carrés d'écarts à la moyenne. Pourquoi prendre le carré ? Tout simplement car la moyenne des écarts à la moyenne est nulle. Pour réellement mesurer ces écarts, il faut « les rendre positifs », ce qui se fait bien en les élevant au carré. On pourrait également penser à prendre leur valeur absolue, mais cela aurait moins de propriétés intéressantes pour le calcul. Par contre, pour « effacer »la mise au carré, on reprend ensuite la racine carrée du résultat obtenu pour définir l'écart-type. L'écart-type représente donc (comme son nom l'indique) un écart moyen entre les valeurs prises par X et la moyenne de X (plus il est grand, plus les valeurs prises par X sont étalées).

Proposition 95. La variance d'une variable aléatoire est toujours positive.
On a la formule $V(aX+b) = a^2V(X)$.

Démonstration. La première propriété découle immédiatement de la définition du moment d'ordre 2, qui est une somme de termes positifs. Pour la deuxième, c'est du calcul un peu formel. Il faut calculer l'espérance de $(aX+b-E(aX+b))^2$. Or, par linéarité de l'espérance, $E(aX+b) = aE(X)+b$ dont l'expression précédente vaut $(aX+b-aE(X)-b)^2 = a^2(X-E(X))^2$, dont l'espérance vaut $a^2E((X-E(X))^2) = a^2V(X)$. □

Remarque 106. Une variable aléatoire a une variance (et un écart-type) nulle si et seulement si elle est constante.

Théorème 19. Théorème de König-Huygens : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

Démonstration. C'est à nouveau un calcul très formel : $(X-E(X))^2 = X^2 - 2E(X)X + (E(X))^2$, donc, par linéarité de l'espérance, $V(X) = E((X-E(X))^2) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(E(X))^2 = E(X^2) - 2E(X)^2 + (E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$. □

Remarque 107. En pratique, c'est à peu près systématiquement via la formule de König-Huygens que nous effectuerons nos calculs de variance.

Définition 127. Une variable aléatoire est dite **réduite** si son écart-type (et donc sa variance) vaut 1.

Proposition 96. Si X est une variable aléatoire, la **variable aléatoire centrée réduite associée à** X est $X^* = \dfrac{X-E(X)}{\sigma(X)}$ (qui est, vous vous en seriez doutés, centrée et réduite).

Démonstration. On a déjà vu plus haut que $X - E(X)$ était centrée, la diviser par l'écart-type ne va pas changer cela. De plus, $V\left(\dfrac{X-E(X)}{\sigma(X)}\right) = \left(\dfrac{1}{\sigma(X)}\right)^2 V(X) = 1$ □

Exemple : Pour vous montrer qu'un calcul d'écart-type à la main est en général très fastidieux, prenons l'exemple classique du lancer de deux dés, où l'on note X la somme des deux chiffres obtenus. La loi de X est donnée par le tableau suivante :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Grâce à des calculs élémentaires mais pénibles, on obtient $E(X) = 7$ (logique), puis $E(X^2) = \dfrac{2^2 \times 1 + 3^2 \times 2 + \cdots + 12^2 \times 1}{36} = \dfrac{1974}{36}$ donc $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \dfrac{35}{6}$. L'écart-type vaut donc $\sigma(X) \simeq \sqrt{\dfrac{35}{6}} \simeq 2.415$.

13.2 Lois usuelles finies

Certaines lois de probabilité interviennent suffisamment régulièrement lorsqu'on étudie des variables aléatoires dans des cas classiques (lancers de dés ou de pièces, tirages de boules dans des urnes, bref toutes les bêtises qu'on aime bien vous infliger dans les exercices de probas) pour qu'il soit intéressant de les étudier une bonne fois pour toutes (et accessoirement de leur donner un nom) et d'en retenir les caractéristiques (espérance et variance notamment). Nous en étudierons quatre dans ce chapitre, et deux autres quand nous aurons étudié de façon plus approfondie les variables aléatoires infinies.

13.2.1 Loi uniforme

Exemple fondamental : Dans une urne se trouvent n boules numérotées de 1 à n. On en tire une au hasard et on note X le numéro obtenu.

Définition 128. On dit que la variable aléatoire X suit une **loi uniforme sur** $\{1; \dots ; n\}$, et on note $X \sim \mathcal{U}(\{1; \dots ; n\})$, si $X(\Omega) = \{1; \dots ; n\}$ et $\forall k \in \{1; \dots ; n\}$, $P(X = k) = \dfrac{1}{n}$.

Proposition 97. Si $X \sim \mathcal{U}(\{1; \dots ; n\})$, on a $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$ et $V(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$.

Démonstration. Pour l'espérance, on a $E(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} k \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$.
Pour la variance, on va utiliser la formule de König-Huygens. On a $E(X^2) = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} k^2 \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$ donc $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6} - \dfrac{(n+1)^2}{4} = \dfrac{2(n+1)(2n+1) - 3(n+1)^2}{12} = \dfrac{4n^2+6n+2-3n^2-6n-3}{12} = \dfrac{n^2-1}{12}$. □

Remarque 108. À partir d'une loi uniforme prenant ses valeurs entre 1 et n, on construit facilement une loi dont la probabilité est uniforme entre deux entiers m et p (il suffit d'ajouter une constante). La loi ainsi construite a une espérance égale à $\dfrac{m+p}{2}$ et une variance égale à $\dfrac{(m-p+1)^2-1}{12}$.

13.2.2 Loi de Bernoulli

Exemple fondamental : On lance une pièce mal équilibrée pour laquelle la probabilité d'obtenir Pile vaut p et on note X la variable aléatoire valant 1 si on tombe sur Pile et 0 si on tombe sur face.

Définition 129. On dit que la variable aléatoire X suit une **loi de Bernoulli de paramètre** p (avec $p \in [0; 1]$) si $X(\Omega) = \{0; 1\}$; $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$. On le note $X \sim \mathcal{B}(1, p)$.

Remarque 109. Cette loi est aussi appelée loi indicatrice de paramètre p, puisqu'elle apparait essentiellement dans le cas où X est la variable aléatoire indicatrice d'un événement.

Proposition 98. Si $X \sim \mathcal{B}(1, p)$, alors $E(X) = p$ et $V(X) = p(1 - p)$.

Démonstration. Pour l'espérance, on a déjà fait le calcul un peu plus haut. On a par ailleurs de la même façon $E(X^2) = p$, donc $V(X) = p - p^2 = p(1 - p)$. □

Remarque 110. On utilise surtout en pratique des sommes de variables aléatoires suivant des lois de Bernoulli, comme on a déjà pu le faire dans le cas du lancer successif de 90 dés.

13.2.3 Loi binômiale

Exemple fondamental : Une urne contient des boules blanches et noires, avec une proportion p de boules blanches (et donc une proportion $1 - p$ de boules noires). On tire n boules **avec remise** dans l'urne et on note X le nombre de boules blanches obtenues.

Définition 130. On dit qu'une variable aléatoire X suit une **loi binomiale de paramètre** (n, p) (avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0; 1]$) si $X(\Omega) = \{0; \dots ; n\}$ et $\forall k \in \{0; \dots ; n\}$, $P(X = k) = \dbinom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$. On le note $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Remarque 111. Si $n = 1$, la loi binomiale de paramètre $(1, p)$ n'est autre que la loi de Bernoulli de paramètre p, ce qui justifie l'emploi de la même notation.

Remarque 112. Une autre façon de voir une loi binômiale est de considérer que la variable aléatoire correspondante compte le nombre de réussites quand on tente n fois de suite (de façon indépendante) un tirage ayant une probabilité p de réussir.

Proposition 99. Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, alors $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$ (on note parfois $q = 1-p$, auquel cas on a $V(X) = npq$).

Démonstration. On a $E(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} k\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$. On aimerait bien appliquer le binome de Newton, mais il faut pour cela faire disparaitre le k, ce qui est par exemple possible grace à la formule $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ On a donc $E(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} n\binom{n-1}{k-1} p^k(1-p)^{n-k} = n\sum_{j=0}^{j=n-1} p^{j+1}(1-p)^{n-1-j} = np(p+1-p)^{n-1} = np$.
Pour la variance, on ne va pas calculer $E(X^2)$ directement, mais passer par $E(X(X-1))$, ce qui va permettre d'utiliser la formule $k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$ (obtenue en appliquant deux fois de suite la formule utilisée dans le calcul précédent). Un calcul extrêmement similaire au précédent donne alors $E(X(X-1)) = n(n-1)p^2$, donc $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X(X-1)+X) - E(X)^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np - np^2 = np(1-p)$ □

13.2.4 Loi hypergéométrique

Exemple fondamental : Dans une urne se trouvent N boules blanches et noires, avec une proportion p de boules blanches. On tire n boules dans l'urne **sans remise** (ou simultanément) et on note X le nombre de boules blanches obtenues.

Définition 131. On dit qu'une variable aléatoire X suit une **loi hypergéométrique de paramètre** (N,n,p) (avec $N \in \mathbb{N}^*$, $1 \leqslant n \leqslant N$ et $p \in [0;1]$) si $X(\Omega) = \{max(0, n-Nq); \dots; min(n, Np)\}$ (où on a noté $q = 1-p$) et $\forall k \in \{max(0, n-Nq); \dots; min(n, Np)\}$, $P(X=k) = \dfrac{\binom{Np}{k}\binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}$. On le note $X \sim \mathcal{H}(N,n,p)$.

Proposition 100. Si $X \sim \mathcal{H}(N,n,p)$, alors $E(X) = np$ et $V(X) = npq\dfrac{N-n}{N-1}$.

Démonstration. Pour simplifier les notations, tous les coefficients binomiaux faisant intervenir des entiers négatifs seront considérés comme nuls. On utilise le même type d'astuce que pour la loi binomiale :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k\frac{\binom{Np}{k}\binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{Np}{\binom{N}{n}}\sum_{k=1}^{n}\binom{Np-1}{k-1}\binom{Nq}{n-k} = \frac{Np}{\binom{N}{n}}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{Np-1}{j}\binom{Nq}{n-1-j}$$

On peut maintenant appliquer la formule de Vandermonde à notre somme et on obtient

$$E(X) = Np\frac{\binom{Np+Nq-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} = Np\frac{\binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} = NP \times \frac{(N-1)!}{(n-1)!(N-n)!} \times \frac{(N-n)!}{N!n!} = Np\frac{n}{N} = np$$

Pour la variance, on utilise à nouveau les mêmes astuces. On commence par calculer

$$E(X(X-1)) = Np(Np-1)\frac{\binom{N-2}{n-2}}{\binom{N}{n}} = Np(Np-1)\times\frac{(N-2)!}{(n-2)!(N-n)!}\times\frac{n!(N-n)!}{N!} = \frac{p(Np-1)n(n-1)}{N-1}$$

comme ci-dessus, puis

$$V(X) = E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2 = \frac{p(Np-1)n(n-1)}{N-1} + np - n^2p^2$$

$$= np\frac{(Np-1)(n-1) + N - 1 - np(N-1)}{N-1} = np\frac{nNp - Np - n + 1 + N - 1 - nNp + np}{N-1}$$

$$= np\frac{N - n - Np + np}{N-1} = np\frac{(1-p)(N-n)}{N-1} = npq\frac{N-n}{N-1}$$

□

Chapitre 14

Dérivation

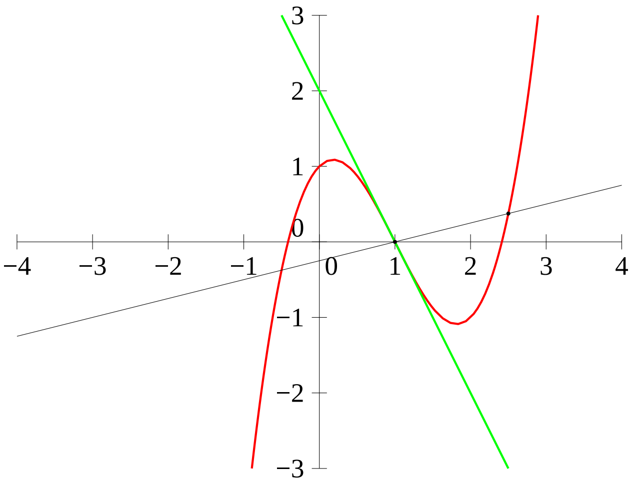
14.1 Définitions et formulaire

14.1.1 Aspect graphique

L'idée cachée derrière le calcul de dérivées, que vous utilisez déjà depuis plusieurs années pour étudier les variations de fonctions, est en gros le suivant : les seules fonctions dont le sens de variation est réellement facile à déterminer sont les fonctions affines, pour lesquelles il est simplement donné par le signe du coefficient directeur de la droite représentant la fonction affine. Pour des fonctions plus complexes, on va donc chercher à se ramener au cas d'une droite en cherchant, pour chaque point de la courbe, la droite « la plus proche » de la courbe autour de ce point. C'est ainsi qu'est née la notion de tangente, à laquelle celle de dérivée est intimement liée. Plus précisément :

Définition 132. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x \in I$, le **taux d'accroissement de f en x** est la fonction définie par $\tau_x(h) = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Remarque 113. Le taux d'accroissement n'est pas défini en 0. Pour $h \neq 0$, $\tau_x(h)$ représente le coefficient directeur de la droite passant par les points d'abscisse x et $x+h$ de la courbe représentative de f (droite noire dans le graphique ci-dessous, où $a = 1$ et $h = 1.5$).



Définition 133. Une fonction f est **dérivable** en x si son taux d'accroissement en x admet une limite quand h tend vers 0. On appelle alors nombre dérivé de f en x cette limite et on la note $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Remarque 114. En reprenant l'interprétation géométrique précédente, la droite tracée se rapproche quand h tend vers 0 de la tangente à la courbe représentative de f au point de la courbe d'abscisse a. Le nombre dérivé de f en x est donc le coefficient directeur de cette tangente, tracée en vert sur le graphique.

Remarque 115. Pour des raisons pratiques, on aura parfois besoin pour certains calculs d'une définition légèrement différente du nombre dérivé : $f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$, qui est équivalente à la précédénte (en posant $h = y - x$, on se ramène en effet à notre première définition).

Exemples :

- Considérons $f(x) = x^2$ et calculons à l'aide de cette définition la dérivée (ou plutôt pour l'instant le nombre dérivé au point d'abscisse x) de f. Le taux d'accroissement de la fonction carré en x vaut $\tau_x(h) = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2hx + h^2 - 1}{h} = 2x + h$. Ce taux d'accroissement a une limite égale à $2x$ quand h tend vers 0, donc f est dérivable en x et $f'(x) = 2x$ (ce qui correspond bien à la formule que vous connaissez).
- Considérons à présent $g(x) = \sqrt{x}$, le taux d'accroissement de g en x vaut $\tau_x(h) = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{x + h - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$. Si $x \neq 0$, ce taux d'accroissement a pour limite $\frac{1}{2\sqrt{x}}$, ce qui correspond une nouvelle fois à une formule bien connue. Par contre, $\lim_{h \to 0} \tau_0(h) = +\infty$, ce qui prouve que la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0. On a tout de même une interprétation graphique intéressante dans ce cas : la courbe représentative de la fonction racine carrée admet en son point d'abscisse 0 une tangente verticale.

Définition 134. La fonction f est **dérivable à gauche** en x si son taux d'accroissement admet une limite quand h tend vers 0^-. On note alors $f'_g(x) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. De même, f est **dérivable à droite** en x si $\tau_x(h)$ admet une limite en 0^+ et on note $f'_d(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Remarque 116. La fonction f est dérivable en x si et seulement si elle y est dérivable à gauche et à droite et que $f'_d(x) = f'_g(x)$.

Définition 135. Dans le cas où $f'_g(x) \neq f'_d(x)$ (ou si une seule des deux limites existe) on dit que la courbe de f admet une (ou deux) **demi-tangente à droite ou à gauche**. Si $\tau_x(h)$ admet une limite infinie en 0^+ ou en 0^-, on dit que la courbe de f admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse x.

Exemple : Considérons $f(x) = |x|$ et $x = 0$. On a donc $\tau_0(h) = \frac{|h|}{h}$. Si $h > 0$, $\tau_0(h) = \frac{h}{h} = 1$, donc $f'd(0) = 1$; mais si $h < 0$, $\tau_0(h) = \frac{-h}{h} = -1$, donc $f'g(h) = -1$. La fonction valeur absolue n'est donc pas dérivable en 0, mais y admet à gauche une demi-tangente d'équation $y = -x$, et à droite une demi-tangente d'équation $y = x$ (qui sont d'ailleurs confondues avec la courbe).

Définition 136. Une fonction f est **dérivable sur un intervalle** I si elle est dérivable en tout point de I. On appelle alors **fonction dérivée** de f la fonction $f : x \mapsto f'(x)$.

Proposition 101. Soit f une fonction dérivable en a, alors l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en a est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Démonstration. La tangente est une droite de coefficient directeur $f'(a)$ donc son équation peut se mettre sous la forme $y = f'(a)x + b$, avec $b \in \mathbb{R}$. Pour déterminer b, il suffit de constater que le point $(a; f(a))$ appartient à la tangente (qui coupe $\mathcal{C}_f$ en ce point), donc on doit avoir $f(a) = af'(a) + b$, soit $b = f(a) - af'(a)$. L'équation est donc $y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a = f'(a)(x - a) + f(a)$. $\square$

Proposition 102. Si une fonction f est dérivable en x, alors f est continue en x.

Remarque 117. La réciproque est fausse ! Par exemple la fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ mais pas dérivable en 0.

Proposition 103. Si f est dérivable en x, on sait que $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$. Autrement dit, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \underset{0}{=} f'(x)+o(1)$. En multipliant tout par h, on obtient $f(x+h)-f(x) = hf'(x)+o(h)$. Comme $\lim_{h\to 0} f(x) + hf'(x) + o(h) = f(x)$, on a donc $\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$, ce qui prouve que f est continue en x.

Définition 137. On appelle **développement limité à l'ordre** 1 de f en a l'égalité $f(x+h) \underset{0}{=} f(x) + hf'(x) + o(h)$.

Remarque 118. Cette égalité signifie simplement que, lorsque h est proche de 0, $f(x+h)$ peut être approché par $f(x) + hf'(x)$, qui n'est autre que la valeur prise par la tangente au point d'abscisse $x+h$. On parle d'ordre 1 car on approche f par une fonction qui est un polynome de degré 1. On peut généraliser cette notion en approchant la fonction f par un polynome de degré 2, 3 ou plus (mais il faut alors que f soit deux, trois fois dérivable, etc). On parle alors de développement limité à l'ordre 2, 3, etc., notion que vous étudierez plus intensivement l'an prochain.

14.1.2 Opérations

Proposition 104. Soient f et g deux fonctions dérivables en x. Alors $f+g$ est dérivable en x et $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Démonstration. En effet, le taux d'accroissement de $f+g$ en x vaut $\tau_x(h) = \frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$. Autrement dit, c'est la somme des taux d'accroissements de f et de g en x. Sa limite existe donc et est égale à la somme des limites de ces taux d'accroissement, c'est-à-dire que $\lim_{h\to 0} \tau_x(h) = f'(x) + g'(x)$, d'où la formule. □

Proposition 105. Soient f et g deux fonction dérivables en x, alors fg est dérivable en x et $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

Démonstration. Calculons le taux d'accroissement de la fonction fg en x : $\tau_x(h) = \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} = \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} = g(x+h)\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$. Le premier terme a pour limite $g(x)f'(x)$ quand h tend vers 0 (la fonction g étant dérivable donc continue, $g(x+h)$ tend vers $g(x)$ et le reste est le taux d'accroissement de f en x), et le second a pour limite $f(x)g'(x)$ puisqu'on reconnait le taux d'accroissement de g. On obtient donc bien la formule attendue. □

Exemple : La fonction $x \mapsto x\ln x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et a pour dérivée $\ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$. Ce résultat nous sera surtout utile dans l'autre sens : on en déduit qu'une primitive de la fonction ln est la fonction $x \mapsto x\ln x - x$.

Proposition 106. Soit g une fonction dérivable en x, et ne s'annulant pas en x, alors $\frac{1}{g}$ est dérivable en x et $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$. Si f est une autre fonction dérivable en x, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en x et $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$.

Démonstration. Le taux d'accroissement de $\frac{1}{g}$ en x vaut $\tau_a(x) = \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h}$. Il n'est défini que si $g(x+h) \neq 0$, mais on admettra que, si $g(x) \neq 0$ (c'est une des hypothèses de la proposition) et g est continue, alors g ne s'annule pas au voisinage de x. On peut alors réduire au même dénominateur : $\tau_x(h) = \frac{1}{g(x+h)g(x)} \frac{g(x) - g(x+h)}{h}$. On reconnait à droite l'opposé du taux d'accroissement de g, qui tend donc vers $-g'(a)$, et le dénominateur à gauche tend vers $g(x)^2$ car g est dérivable donc continue en a.
La deuxième formule s'obtient en appliquant simplement la formule de dérivation d'un produit à f et $\frac{1}{g}$: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = f'(x) \times \frac{1}{g(x)} - f(x) \times \frac{g'(x)}{g(x)^2} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$. □

Exemple : La formule de dérivation du quotient est notamment très utile pour dériver les fonctions rationnelles, par exemple $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+1}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$f'(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x(2x+3)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2 - 6x + 2}{(x^2+1)^2}.$$

Proposition 107. Soit f une fonction dérivable et bijective sur un intervalle I, à valeurs dans J. Alors f^{-1} est dérivable en tout point $y \in J$ tel que $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$, et dans ce cas $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

Remarque 119. Les images des valeurs où la dérivée de f s'annule, qui sont donc les points où la fonction réciproque n'est pas dérivable, correspondant en fait à des endroits où la courbe de f^{-1} admet des tangentes verticales (ce qui se comprend graphiquement puisqu'une tangente horizontale pour f devient après symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$ une tangente verticale pour f^{-1}).

Démonstration. Soit $y \in J$ et $x = f^{-1}(y)$. La taux d'accroissement de f^{-1} en y est $\tau_y(h) = \frac{f^{-1}(y+h) - f^{-1}(y)}{h} = \frac{f^{-1}(y+h) - x}{h}$. La fonction f étant bijective de I sur J, $y+h$ admet un unique antécédent b sur I. On a donc $f(b) = y+h$ et par ailleurs $f(x) = y$, donc $h = (y+h) - y = f(b) - f(x)$ et $\tau_y(h) = \frac{b-x}{f(b) - f(x)}$. En posant $h' = b - x$, on a $\tau_y(h) = \frac{h'}{f(x+h') - f(x)}$, avec h' qui tend vers 0 quand h tend vers 0 car la fonction f^{-1} est continue, donc $b = f^{-1}(y+h)$ tend vers $f^{-1}(y) = x$. On reconnait donc la limite quand h tend vers 0 de l'inverse du taux d'accroissement de f en x. Si $f'(x) \neq 0$, on a donc $\lim\limits_{h \to 0} \tau_y(h) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$. Si $f'(x) = 0$, la limite de $\tau_y(h)$ est infinie, on a donc une tangente verticale. □

Proposition 108. Soient f et g deux fonction dérivables respectivement en x et en $f(x)$, alors la composée $g \circ f$ est dérivable en x et $(g \circ f)'(x) = f'(x).(g'(f(x))$.

Démonstration. L'idée est de séparer le taux d'accroissement de $g \circ f$ pour faire apparaitre ceux de g et de f de la façon suivante : $\frac{g \circ f(y) - g \circ f(x)}{y - x} = \frac{g \circ f(y) - g \circ f(x)}{f(y) - f(x)} \times \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$. Le premier quotient est le taux d'accroissement de g en $f(x)$, il converge donc vers $g'(f(x))$. Le second est le taux d'accroissement de f en x, qui converge vers x. On en déduit la formule.
Il y a en fait un (gros) problème, c'est que le premier dénominateur à droite peut très bien s'annuler (quand $f(y) = f(x)$) et (contrairement à ce qui se passait pour l'inverse) cela peut se produire aussi près de x que voulu. Une autre façon (correcte, celle-ci) de prouver cette propriété est de passer par les développements limités à l'ordre 1. On sait que $f(x+h) \underset{0}{=} f(x) + hf'(x) + o(h)$, et que $g(y+k) \underset{0}{=} g(y) + kg'(y) + o(k)$. On en déduit que $g \circ f(x+h) = g(f(x) + hf'(x) + o(h))$. En prenant $y = f(x)$ et $k = hf'(x) + o(h)$ (ce qui tend bien vers 0 quand h tend vers 0), on a donc

$g \circ f(x+h) = g(f(x)) + (hf'(x) + o(h))g'(f(x)) + o(hf'(x) + o(h)) = g \circ f(x) + hf'(x)g' \circ f(x) + o(h)$ (tout les termes restants sont effectivement négligeables devant h). Comme on sait par ailleurs que $g \circ f(x+h) = g \circ f(x) + h(g \circ f)'(x) + o(h)$, une simple identification donne $(g \circ f)'(x) = f'(x)g' \circ f(x)$. □

Exemples : La fonction $x \mapsto (2x+3)^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée $2 \times 3(2x+3)^2 = 6 \times (2x+3)^2$.
La fonction $x \mapsto e^{x^2+2x-4}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée $2(x+1)e^{x^2+2x-4}$.

Remarque 120. Les dérivées de composées que nous utiliserons le plus souvent sont les suivantes (u étant une fonction dérivable quelconque) :

- $(e^u)' = u'e^u$.
- $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$
- $(u^n)' = nu'u^{n-1}$
- $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

14.1.3 Dérivées de fonctions usuelles

Les quelques dérivées classiques sur lesquelles il ne faut vraiment pas hésiter :

fonction	dérivée	$\mathcal{D}_f$	condition
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$ **ou** $\mathbb{R}^*$	$n \in \mathbb{Z}^*$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	
e^x	e^x	$\mathbb{R}$	
x^a	ax^{a-1}	$\mathbb{R}_+^*$	$a \in \mathbb{R}$

Pour la première ligne, le domaine de définition et de dérivabilité est $\mathbb{R}$ si $n < 0$, et $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$.

Démonstration. Commençons par traiter par récurrence le cas des puissances entières positives. Notons $f_n(x) = x^n$, et prouvons par récurrence la propriété P_n : f_n est dérivable et $f_n'(x) = nx^{n-1}$. Pour $n = 1$, $f_1(x) = x$, le taux d'accroissement de f en x est $\tau_x(h) = \dfrac{x+h-x}{h} = 1$, donc f est dérivable en tout point et $f'(x) = 1$, ce qui correspond bien à la formule et prouve P_1. Supposons désormais P_n vraie, on remarque alors que $f_{n+1} = f_1 \times f_n$, donc f_{n+1} est dérivable comme produit de fonctions dérivables, et en utilisant la formule de dérivation du produit et l'hypothèse de récurrence, $f_{n+1}'(x) = f_n(x) + f_1(x)f_n'(x) = x^n + x \times nx^{n-1} = x^n + nx^n = (n+1)x^n$, ce qui prouve P_{n+1} et achève la récurrence.

On en déduit ensuite les dérivées des puissances entières négatives en utilisant la formule de dérivation d'un inverse. Soit $p < 0$ et $f_p(x) = x^p = \dfrac{1}{x^{-p}}$, avec $-p > 0$. On a donc $f_p'(x) = \dfrac{-(-p)x^{-p-1}}{(x^{-p})^2} = px^{p-1}$, ce qui est bien la formule annoncée. Un petit exemple pour la route : la dérivée de $\dfrac{1}{x^4}$ est $\dfrac{-4}{x^5}$.

Pour les dérivées de l'exponentielle et du logarithme, nous manquons d'une définition réellement rigoureuse de ces deux fonctions. On pourrait calculer la dérivée de l'une en fonction de celle de l'autre en utilisant la formule de dérivation d'une réciproque, mais nous nous contenterons de les admettre.

Enfin, pour les puissances quelconques, constatons que $x^a = e^{a \ln x}$, dont la dérivée vaut $\dfrac{a}{x}e^{a \ln x} = \dfrac{a}{x}x^a = ax^{a-1}$. □

14.2 Dérivées successives ; convexité

14.2.1 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ et $\mathcal{D}^k$

Définition 138. Une fonction est **de classe** $\mathcal{D}^n$ sur un intervalle I si elle est n fois dérivable sur I. On note alors $f^{(n)}$ sa dérivée n-ème (et on continue bien sûr à noter f', f'' et f''' pour les premières dérivées). Elle est **de classe** $\mathcal{C}^n$ sur I si de plus $f^{(n)}$ est continue sur I. On dit plus simplement que f est $\mathcal{D}^n$ ou $\mathcal{C}^n$ sur I.

Remarque 121. Une fonction $\mathcal{D}^n$ sur I est forcément $\mathcal{C}^{n-1}$ sur I puisqu'une fonction dérivable est nécessairement continue. Une fonction $\mathcal{C}^n$ est bien entendu $\mathcal{D}^n$. On a donc les implications suivantes : $\mathcal{C}^n \Rightarrow \mathcal{D}^n \Rightarrow \mathcal{C}^{n-1} \Rightarrow \mathcal{D}^{n-1} \Rightarrow \dots \Rightarrow \mathcal{C}^1 \Rightarrow \mathcal{D}^1 \Rightarrow \mathcal{C}^0$.

Définition 139. Une fonction est **de classe** $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle I si elle y est dérivable n fois pour tout entier n.

Remarque 122. Toutes ses dérivées sont alors continues (puisqu'on peut toujours dériver une fois de plus), ce qui justifie qu'on ne distingue pas $\mathcal{D}^\infty$ et $\mathcal{C}^\infty$.

Proposition 109. La somme, le produit ou la composée de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, $\mathcal{D}^k$ ou $\mathcal{C}^\infty$ (sur les bons intervalles dans le cas de la composée) sont respectivement $\mathcal{C}^k$, $\mathcal{D}^k$ et $\mathcal{C}^\infty$.

Démonstration. Pour la somme, c'est une conséquence du fait que $\forall n \leqslant k$, $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$, ce qui se prouve par une récurrence facile (c'est vrai pour la première dérivée, et si c'est vrai au rang n il suffit de dériver une fois de plus pour obtenir le rang $n+1$). Pour le produit, cf le résultat suivant.
Pour la composée, on procède par récurrence : on sait que le résultat est vrai pour $k = 1$. Supposons le résultat vrai pour un entier n, et prenons deux fonctions g et f de classe $\mathcal{D}^{n+1}$. On a $(g \circ f)' = f'.g' \circ f$, or les fonctions f' et g' (et également f) sont de classe $\mathcal{D}^n$, donc en appliquant l'hypothèse de récurrence pour la composée et le résultat précédent pour le produit, $(g \circ f)'$ est de classe $\mathcal{D}^n$, donc $g \circ f$ de classe $\mathcal{D}^{n+1}$, ce qui achève la récurrence. □

Théorème 20. Formule de Leibniz.

Soient f et g deux fonctions $\mathcal{D}^n$ sur un intervalle I, alors $(fg)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$.

Démonstration. Vous aurez bien sûr reconnu dans cette formule une grande similitude avec la formule du binôme de Newton. La formule de Leibniz se démontre de la même façon, c'est-à-dire par récurrence en utilisant la formule de Pascal. Comme nous n'avons pas démontré Newton en cours, nous passerons également sur Leibniz. □

Exemple : Pour $n = 4$, nous obtenons par exemple $(fg)^{(4)} = f^{(4)} + 4f'''g' + 6f''g'' + 4fg''' + g^{(4)}$.

Théorème 21. Toutes les fonctions usuelles sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur ensemble de dérivabilité (c'est-à-dire sur leur ensemble de définition, sauf pour la racine carrée qui ne sera $\mathcal{C}^\infty$ que sur $\mathbb{R}_+^*$).

Théorème 22. Théorème du prolongement $\mathcal{C}^1$.
Soit f une fonction continue sur un segment $[a;b]$, dérivable et $\mathcal{C}^1$ sur $]a;b]$. Si f' admet une limite finie l quand x tend vers a, alors f est dérivable en a et $f'(a) = l$.

Remarque 123. Ce théorème reste applicable si la limite de f' en a est infinie, on aura alors une tangente verticale en a. On utilisera ce théorème systématiquement quand on cherchera à étudier la dérivabilité d'une fonction aux bornes de son intervalle de définition, mais il est indispensable de commencer par faire un prolongement par continuité si la fonction n'est pas définie en ces bornes.

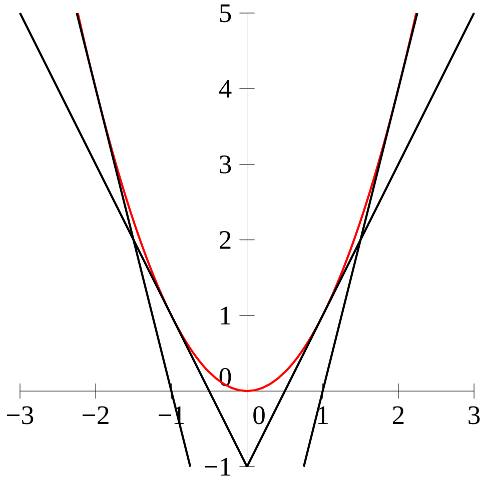
Exemple : $f(x) = x \ln x$. La fonction f est définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;+\infty[$, de dérivée $f'(x) = \ln x + 1$. On sait par ailleurs qu'on peut la prolonger par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$. Comme $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = -\infty$, le prolongement n'est pas dérivable en 0, et la courbe y admet une tangente verticale (information très utile pour tracer la courbe).

14.2.2 Convexité

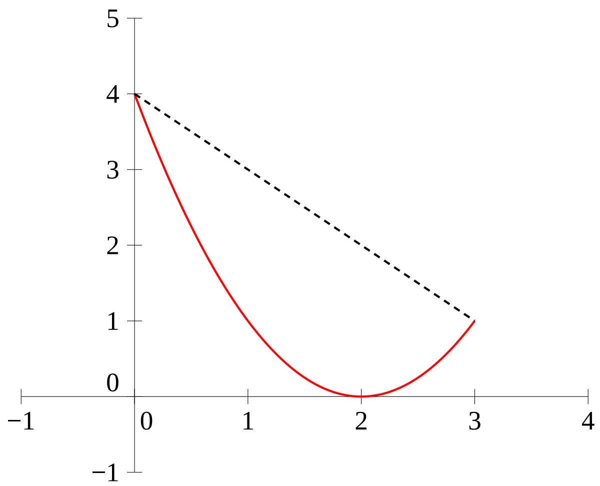
La convexité est une notion permettant d'affiner nos représentations géométriques de courbes en ayant une information supplémentaire sur leur forme générale. Elle s'étudie de façon similaire aux variations, mais nécessite en général un calcul de dérivée seconde.

Définition 140. Une fonction f définie sur un intervalle I est **convexe** sur I si sa courbe est située au-dessus de toutes ses tangentes sur cet intervalle. Elle est **concave** sur I si sa courbe est située en-dessous de toutes ses tangentes.

Exemple : La fonction carré est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$.



Remarque 124. Cette définition géométrique n'est en fait pas la « bonne » définition de la convexité, mais cette dernière est un peu technique. Je vous la donne en guise de complément : f est convexe sur I si $\forall (x,y) \in I^2$, $\forall t \in [0;1]$, $f(tx+(1-t)y) \leqslant tf(x)+(1-t)f(y)$. De même, f est concave sur I si $\forall (x,y) \in I^2$, $\forall t \in [0;1]$, $f(tx+(1-t)y) \geqslant tf(x)+(1-t)f(y)$. Que signifie tout ceci ? En fait, lorsque $t \in [0;1]$, $tx+(1-t)y$ prend toutes les valeurs comprises entre x et y. De même $tf(x)+(1-t)f(y)$ prend toutes les valeurs comprises entre $f(x)$ et $f(y)$. L'inégalité de la définition signifie que tout point de la courbe situé entre les abscisses x et y est en-dessous (ou au-dessus dans le cas de la concavité) du point situé à la même abscisse sur la droite rejoignant les points $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$. Autrement dit, la courbe d'une fonction convexe est située en-dessous de toutes ses cordes. Celle d'une fonction concave est située au-dessus de ses cordes. Voici une illustration dans le cas convexe (la courbe rouge est en-dessous de la corde noire en pointillés) :



Proposition 110. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, alors f est convexe sur I si et seulement si son taux d'accroissement en tout point de I est une fonction croissante de h.

Démonstration. Supposons la fonction convexe sur I, et $a \in I$. Soient $0 < h < h'$ (les autres cas sont similaires), on a alors $a + h = ta + (1 - t)(a + h')$ pour un certain $t \in [0; 1]$, donc $f(a + h) \leqslant tf(a) + (1 - t)f(a + h')$, d'où $f(a + h) - f(a) \leqslant tf(a) + (1 - t)f(a + h') - f(a)$, soit $f(a + h) - f(a) \leqslant (1-t)(f(a+h')-f(a))$. Or, par définition, $(1-t)a+h = (1-t)(a+h')$, donc $1-t = \dfrac{h}{a + h' - a} = \dfrac{h}{h'}$. On obtient alors l'inégalité $f(a+h) - f(a) \leqslant \dfrac{h(f(a + h') - f(a))}{h'}$, soit en divisant par h, $\tau_a(h) \leqslant \tau_a(h')$, donc le taux d'accroissement en a est bien une fonction croissante. La réciproque se montre en utilisant le même type de calcul. □

Corollaire 4. Une fonction dérivable sur un intervalle I est convexe si et seulement si sa dérivée sur I est une fonction croissante. Elle y est convexe si et seulement si sa dérivée est décroissante sur I.

Démonstration. En effet, soient x et y deux réels appartenant à I. Posons $h = y - x$, on a $\tau_x(h) = \dfrac{f(y) - f(x)}{h} \geqslant f'(x)$ d'après la proposition précédente ; par ailleurs, $\tau_y(-h) = \dfrac{f(x) - f(y)}{-h} \leqslant f'(y)$. En combinant les deux inégalités, on obtient $f'(x) \leqslant f'(y)$. □

Corollaire 5. Soit f une fonction $\mathcal{D}^2$ sur un intervalle I, alors f est convexe si et seulement si f'' est positive sur I. De même, f est concave sur f si et seulement si f'' est négative sur I.

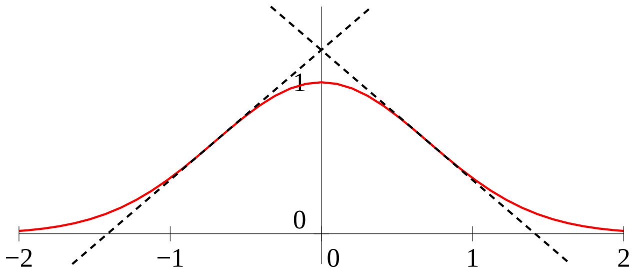
Démonstration. En effet, f' est croissante si f'' est positive (cf plus loin). □

Définition 141. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I, un **point d'inflexion** pour f est un réel pour lequel f'' change de signe.

Remarque 125. On a en particulier $f''(x) = 0$ en tout point d'inflexion, et c'est naturellement ainsi que l'on détermine les points d'inflexion. Il arrive toutefois qu'un réel vérifiant $f''(x) = 0$ ne soit pas point d'inflexion, tout comme un réel vérifiant $f'(x) = 0$ ne correspond pas toujours à un extremum.

Remarque 126. La fonction f change donc de concavité en chaque point d'inflexion. Une autre façon de voir les choses est que la tangente au point d'inflexion traverse la courbe représentative de f, particularité rare qui explique que le calcul des points d'inflexion améliore la précision du tracé de courbe. On tracera systématiquement les tangentes aux points d'inflexion à chaque fois que l'on étudiera la convexité d'une fonction.

Exemple : On cherche à tracer une courbe représentative la plus précise possible de la fonction $f : x \mapsto e^{-x^2}$. La fonction f est définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Elle a des limites nulles en $\pm\infty$. Sa dérivée est $f'(x) = -2xe^{-x^2}$, donc f est croissante sur $]-\infty; 0]$ et décroissante sur $[0; +\infty[$. De plus, sa dérivée seconde est $f''(x) = (-2 + 4x^2)e^{-x^2}$. La fonction f a donc deux points d'inflexion en $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et en $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. La fonction f est convexe entre ces deux points et concave le reste du temps, et les pentes des tangentes en ces deux points sont données par $f'\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} \simeq -0.86$ et $f'\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} \simeq 0.86$. La courbe représentative de f ressemble à ceci (les tangentes aux points d'inflexion sont aussi tracées) :



14.3 Inégalité des accroissements finis et applications

Le théorème des accroissements finis et l'inégalité du même nom (que je me permettrai d'abréger la plupart du temps par IAF) sont des outils fondamentaux en analyse, dont on verra deux des principales applications dans ce paragraphe.

14.3.1 Énoncés

Proposition 111. Soit f une fonction dérivable sur un segment $[a;b]$ et $x \in]a;b[$. Si x est un point en lequel f atteint un extremum local, alors $f'(x) = 0$.

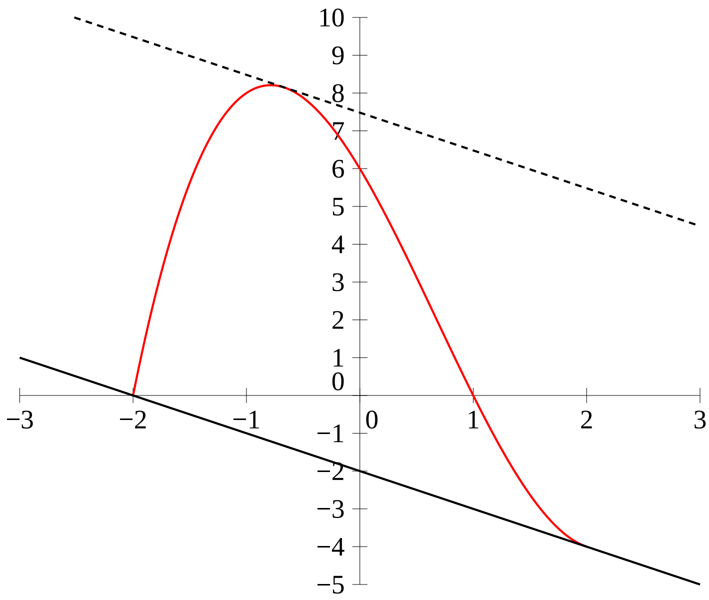
Démonstration. Supposons par exemple qu'il s'agisse d'un maximum (l'autre cas est très similaire). Le taux d'accroissement de f en x vaut $\tau_x(h) = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$. On a au voisinage de x, $f(x+h) \leqslant f(x)$ puisque $f(x)$ est un maximum local. On en déduit que $\forall h < 0$ (et tel que $x+h$ appartienne au voisinage en question), $\tau_x(h) \geqslant 0$, donc $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0^-} \tau_x(h) \geqslant 0$. Mais de même $\forall h > 0$, $\tau_x(h) \leqslant 0$, donc $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0^-} \tau_x(h) \leqslant 0$. Finalement, on a nécessairement $f'(x) = 0$. □

Théorème 23. Théorème de Rolle.
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a;b]$, et telle que $f(a) = f(b)$, alors $\exists c \in]a;b[$, $f'(c) = 0$.

Démonstration. Commençons par éliminer le cas où la fonction f est constante sur $[a;b]$ puisque dans ce cas la dérivée de f est nulle, donc le théorème est manifestement vérifié.
La fonction f étant dérivable, elle est continue sur $[a;b]$, donc y atteint un maximum M et un minimum m. Si on suppose f non constante, l'un des deux, par exemple M (dans l'autre cas, la démonstration est similaire), est distinct de $f(a) = f(b)$, donc atteint en un réel $c \in]a;b[$. D'après la propriété précédente, $f'(c) = 0$. □

Théorème 24. Théorème des accroissements finis.
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a;b]$, alors $\exists c \in]a;b[$, $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Remarque 127. Autrement dit, il existe un point où la tangente est parallèle à la droite passant par les points $(a;f(a))$ et $(b;f(b))$.



Démonstration. Le principe est de se ramener au théorème précédent. Définissons une deuxième fonction g par $g(x) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x - f(x)$. Cette fonction est dérivable sur $[a;b]$ puisque f l'est et vérifie $g(b)-g(a) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}b - f(b) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}a + f(a) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) - f(b) + f(a) = 0$, c'est-à-dire que $g(b) = g(a)$. on peut donc appliquer le théorème de Rolle à la fonction g : $\exists c \in]a;b[$, $g'(c) = 0$. Or, $g'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} - f'(c)$, donc on a $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, ce qu'on cherchait à prouver. □

Ce théorème peut paraitre assez curieux et peu utile au premier abord, et de fait sert peu en tant que tel. Mais il permet de démontrer les très importantes inégalités suivantes :

Corollaire 6. Inégalité des accroissements finis, première version.
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a;b]$, et telle que $\forall x \in [a;b]$, $m \leqslant f'(x) \leqslant M$ (où $(m, M) \in \mathbb{R}^2$), alors $\forall (y,z) \in [a;b]^2$ tels que $y < z$, $m(z-y) \leqslant f(z) - f(y) \leqslant M(z-y)$.

Démonstration. La fonction f étant dérivable sur $[y;z]$, on peut lui appliquer le théorème précédent : $\exists x \in]y;z[$, $f'(x) = \dfrac{f(z)-f(y)}{z-y}$. Or, $m \leqslant f'(x) \leqslant M$ par hypothèse, donc $m \leqslant \dfrac{f(z)-f(y)}{z-y} \leqslant M$. Il ne reste plus qu'à multiplier les inégalités par $z-y$. □

Corollaire 7. Inégalité des accroissements finis, deuxième version.
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a;b]$, et telle que $\forall x \in [a;b]$, $|f'(x)| \leqslant k$ (où $k \in \mathbb{R}$), alors $\forall (y,z) \in [a;b]^2$, $|f(z) - f(y)| \leqslant k|z-y|$.

Démonstration. La preuve est essentiellement la même que pour le corollaire précédent. □

14.3.2 Application à l'étude des variations

Théorème 25. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, alors f est croissante sur I si et seulement si f' est positive sur I, et f est décroissante sur I si et seulement si f' est négative sur I.

Démonstration. Supposons f croissante sur I, et soit $a \in I$, considérons le taux d'accroissement de f en a : $\tau_a(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Ce taux d'accroissement est toujours positif, puisque numérateur et dénominateur sont négatifs quand h est négatif, et positifs sinon ; donc par passage à la limite $f'(a) \geqslant 0$. Réciproquement, si $f'(x) \geqslant 0$ sur I, on a d'après l'IAF $y < z \Rightarrow 0 \times (z-y) \leqslant f(z) - f(y)$, ce qui prouve que f est croissante sur I. La preuve dans le cas de la décroissance est très similaire. □

Théorème 26. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, alors si f' est strictement positive sur I, sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, la fonction f est strictement croissante sur I. De même, si f' est strictement négative sur I, sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, f est strictement décroissante sur I.

Ce deuxième résultat, plus subtil que le précédent, ne sera pas prouvé. Remarquons qu'il n'y a ici qu'une seule implication, une fonction peut être strictement monotone mais avoir une dérivée qui s'annule une infinité de fois (la condition exacte pour l'équivalente est très technique).

Remarque 128. Ces théorèmes seront bien entendus utilisés sans être cités lors de l'étude des variations de fonctions, comme vous en avez déjà l'habitude. Mais vous avez désormais une preuve complète de ces résultats très classiques.

14.3.3 Application à l'étude de suites récurrentes

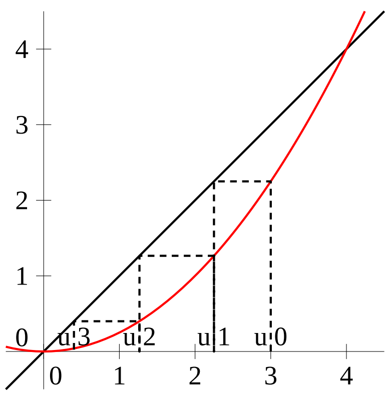
Une application extrêmement importante de l'IAF est l'étude de suites récurrentes. Très peu de résultats sont vraiment à connaitre par coeur, mais comme les méthodes utilisées sont toujours les mêmes, il est fortement souhaitable d'avoir une bonne connaissance des techniques les plus fréquentes. Nous allons donc énoncer les principaux résultats, puis étudier en détail un exemple.

Définition 142. Une **suite récurrente** est une suite vérifiant une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

Proposition 112. Les principaux résultats utilisés lors d'exercices sur les suites récurrentes sont les suivants. La plupart d'entre eux devront être redémontrés à chaque fois :

- Si (u_n) est une suite récurrente convergeant vers une limite finie l, alors $f(l) = l$.
- Si $u_0 \in I$ et I est un **intervalle stable** par f (c'est-à-dire que $f(I) \subset I$), alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$. Ce résultat est à redémontrer par récurrence dans les exercices. Cela marche aussi bien si c'est u_1 (ou n'importe quelle autre valeur de la suite) qui appartient à I.
- La monotonie de la suite (u_n) s'obtient en étudiant le signe de $f(x) - x$.
- Si les valeurs de la suite appartiennent à un intervalle I tel que $\forall x \in I$, $|f'(x)| \leqslant M$, et si l est un point fixe de f appartenant à I alors on aura $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - l| \leqslant M|u_n - l|$ (ce résultat est une conséquence de l'IAF), puis $|u_n - l| \leqslant M^n|u_0 - l|$ (résultat se prouvant par récurrence à partir du précédent), méthode très souvent utilisée pour prouver la convergence de la suite (u_n) vers l (ça marche très bien dès que $M < 1$).

On peut également représenter graphiquement une suite récurrente de la façon suivante, ce qui permet de conjecturer assez facilement le comportement de la suite : on trace dans un même repère la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f et la droite (D) d'équation $y = x$, on place u_0 sur l'axe des abscisses, puis on trace la verticale passant par u_0 jusqu'à couper $\mathcal{C}_f$, on continue horizontalement jusqu'à croiser la droite (D), et l'abscisse du point obtenu est alors u_1, auquel on peut appliquer le même procédé. Ainsi :



Exemple :
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \geqslant 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n - 2}$. Commençons par étudier la fonction f définie sur $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right[$ par $f(x) = \sqrt{3x-2}$. Cette fonction est continue sur son ensemble de définition, dérivable sur $\left]\frac{2}{3}; +\infty\right[$, de dérivée $f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x-2}}$. La fonction f est donc strictement croissante. Tant que nous y sommes, cherchons les points fixes et le signe de $f(x) - x$ (les deux vont ensemble, habituellement...). On a $f(x) - x = \sqrt{3x-2} - x = \dfrac{3x - 2 - x^2}{\sqrt{3x-2}+x}$. Le trinome au numérateur a pour discriminant $\Delta = 9 - 8 = 1$, et admet deux racines $x_1 = \dfrac{-3-1}{-2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{-3+1}{-2} = 1$. La courbe représentative de f est située au-dessus de la droite d'équation $y = x$ entre 1 et 2, et en-dessous le reste du temps (donc entre $\frac{2}{3}$ et 1, et entre 2 et $+\infty$). À ce stade, un joli dessin devrait suffire à se convaincre qu'en prenant $u_0 \geqslant 2$, la suite (u_n) prendra toutes ses valeurs dans l'intervalle $[2; +\infty[$, sera décroissante et convergera vers 2. Prouvons tout cela correctement :

Premier point : l'intervalle $[2; +\infty[$ étant stable par f, on va réussir à prouver par récurrence la propriété suivante : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2$. C'est vrai par hypothèse pour u_0, et si on suppose $u_n \geqslant 2$, on a alors $f(u_n) \geqslant f(2) = 2$, donc $u_{n+1} \geqslant 2$, ce qui prouve l'hérédité. Le principe de récurrence permet de conclure.

Deuxième point (facultatif) : la monotonie. Comme on a $\forall x \geqslant 2$, $f(x) - x \leqslant 0$, et que $u_n \geqslant 2$, on en déduit que $f(u_n) - u_n \leqslant 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$. La suite (u_n) est donc décroissante. À ce stade de l'exercice, on peut en fait déjà déterminer la nature de (u_n) : la suite est décroissante, minorée par 2, donc converge vers une limite $l \geqslant 2$. Comme les seuls points fixes de f sont 1 et 2, on en déduit qu'on a nécessairement $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$. On peut toutefois obtenir beaucoup mieux avec l'IAF.

Troisième point : majoration de l'erreur via l'IAF : on commence par majorer la dérivée (ou plutôt sa valeur absolue) sur l'intervalle où se trouvent les valeurs de la suite. Ici, on a $\forall x \geqslant 2$, $\sqrt{3x-2} \geqslant 2$, donc $|f'(x)| \leqslant \frac{3}{4}$ (valeur absolue ici superflue, f' étant toujours positive). On peut alors en déduire, par l'IAF, que $\forall (y,z) \in [2; +\infty[^2$, $|f(z) - f(y)| \leqslant \frac{3}{4}|z - y|$. Appliquons ce résultat à $y = 2$ et $z = u_n$ (qui appartient toujours à l'intervalle), on obtient $|f(u_n) - f(2)| \leqslant |u_n - 2|$. Or, $f(u_n) = u_{n+1}$, et $f(2) = 2$ (d'où l'intérêt d'avoir un point fixe !), donc $|u_{n+1} - 2| \leqslant |u_n - 2|$.

Il reste à effectuer la petite récurrence (toujours la même) pour prouver que $|u_n - 2| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n |u_0 - 2|$. Pour $n = 0$, c'est évident, et si on suppose le résultat vérifié pour u_n, on a alors $|u_{n+1} - 2| \leqslant \frac{3}{4}|u_n - 2|$ (d'après l'application de l'IAF) $\leqslant \frac{3}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n |u_0 - 2|$ (par hypothèse de récurrence) $\leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} |u_0 - 2|$, ce qui prouve l'hérédité. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ (il est ici essentiel que le réel majorant la dérivée de f soit strictement inférieur à 1 pour que cette suite géométrique converge effectivement vers 0), on en déduit par le théorème des gendarmes que $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - 2| = 0$, c'est-à-dire que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.

Ce genre de calcul permet de déterminer assez facilement, par exemple, un entier n à partir duquel $|u_n - 2| \leqslant \varepsilon$, ε étant un réel positif quelconque. Autrement dit, on obtient facilement une majoration de la distance entre u_n et la limite de la suite. C'est assez peu intéressant ici puisqu'on connait la valeur de la limite, mais ça le sera beaucoup plus dans certains cas où on peut prouver que la suite converge vers un point fixe de la fonction f sans être capable de résoudre l'équation de point fixe. Un petit programme Pascal (par exemple !) permettra alors d'obtenir des valeurs approchées de la limite en en maitrisant l'erreur.

Et pour conclure ce chapitre, un petit tableau récapitulatif des méthodes utilisées pour étudier les suites **implicites** (étudiées dans le chapitre consacré à la continuité) et les suites **récurrentes**, du type de celle que nous venons d'étudier. Il va de soi qu'il est préférable de ne pas confondre les deux types de suites.

	Suites implicites	Suites récurrentes
Définition	$f_n(u_n) = 0$ ou $f(u_n) = n$	$u_{n+1} = f(u_n)$
Majoration/ minoration	On calcule $f_n(m)$ ou $f_n(M)$ et on utilise la monotonie de f_n.	On cherche un intervalle stable par la fonction f.
Monotonie	Signe de $f_{n+1}(u_n)$	Signe de $f(x) - x$
Limite	On repart de $f_n(u_n) = 0$ et on essaye de passer à la limite.	On résout $f(l) = l$.

Chapitre 15

Inversion de matrices

Dans notre premier chapitre consacré aux matrices, nous avons notamment étudié assez longuement une opération à priori assez élémentaire : le produit. Nous avons ainsi constaté que celui-ci ne possédait pas vraiment toutes les propriétés auxquelles on serait en droit de s'attendre, en particulier il n'est pas commutatif. Un autre point qu'on soulève souvent quand on étudie une opération sur un ensemble (on reviendra sur ce sujet dans les derniers chapitres de l'année, consacrés aux espaces vectoriels), est de savoir si on peut effectuer l'opération inverse de l'opération en question. Pour la somme de matrices, par exemple, pas de problème, on peut faire des soustractions, car toute matrice admet une matrice opposée. pour le produit, ça marche encore une fois nettement moins bien : il n'existe pas de division sur les matrices, et cela est du en partie à l'absence de commutativité, mais aussi au fait que la notion d'inverse fonctionne moins bien sur les matrices que sur les réels. Pour ces derniers, seul le nombre 0 n'est pas inversible, et c'est la cause de l'impossibilité de la division par 0. Pour les matrices, la matrice nulle est loin d'être la seule à poser problème.

15.1 Inversion de matrices

Définition 143. Une matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **inversible** s'il existe une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $MN = NM = I_n$. La matrice N est alors notée M^{-1} et on l'appelle **matrice inverse** de la matrice M.

Remarque 129. La notion n'a pas de sens dans le cas des matrices qui ne sont pas carrées.

Remarque 130. L'inverse d'une matrice, quand il existe, est unique. En effet, supposons qu'il existe deux matrices N et N' vérifiant $MN = NM = I$ et $MN' = N'M = I$. On a alors $NMN' = (NM)N' = N'$ d'une part et $NMN' = N(MN') = N$ d'autre part, donc $N = N'$.

Exemple : L'inverse de la matrice I_n est bien sûr I_n elle-même. La matrice nulle n'est pas inversible.

Exemple : La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible et a pour inverse $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Exemple : La matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas nulle, mais elle n'est pas inversible pour autant : on peut la multiplier à droite par ce qu'on veut, la première ligne du résultat sera toujours constituée de 3 zéros, et la matrice produit ne peut donc pas être égale à I_3.

Proposition 113. Une matrice diagonale est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. On a alors, si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}^{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn}^{-1} \end{pmatrix}$.

Remarque 131. Nous verrons un peu plus loin que cette caractérisation s'étend en fait aux matrices triangulaires.

Proposition 114. Principales propriétés calculatoires de l'inversion de matrices.

- Si M est inversible, alors M^{-1} aussi et $(M^{-1})^{-1} = M$.
- Si $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ sont deux matrices inversibles, le produit MN est inversible et $(MN)^{-1} = N^{-1}M^{-1}$.
- Si M est une matrice inversible, M^k est inversible pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, et $(M^k)^{-1} = (M^{-1})^k$.
- Si $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifient $MN = I$, alors M et N sont inversibles et inverses l'une de l'autre.

Démonstration. La première proposition est évidente : par définition, $MM^{-1} = M^{-1}M = I$, donc M est l'inverse de M^{-1}. La deuxième ne pose pas vraiment de problème non plus : on a $(N^{-1}M^{-1})(MN) = N^{-1}(M^{-1}M)N = N^{-1}IN = N^{-1}N = I$, et de même $(MN)(N^{-1}M^{-1}) = I$, donc $N^{-1}M^{-1}$ est bien l'inverse de MN. La troisième propriété ne pose guère de problème non plus, il suffit de vérifer que $M^k(M^{-1})^k = (M^{-1})^k M^k = I$, ce qui est essentiellement immédiat (on peut utiliser que M et M^{-1} commutent pour éviter de recourir à une récurrence). La dernière proposition dit qu'on n'a en fait pas besoin de vérifier que le produit à gauche et à droite est égal à I pour trouver l'inverse d'une matrice, l'un des deux est suffisant. On ne démontrera pas ce résultat beaucoup moins facile qu'il n'en a l'air. □

Remarque 132. Un des principaux intérêts de travailler avec des matrices inversibles est qu'on peut simplifier un peu plus naturellement certains calculs, notammant : si M est une matrice inversible et $MA = MB$, alors $A = B$ (il suffit de multiplier l'égalité à gauche par M^{-1} pour obtenir le résultat). Autre remarque utile : si A et B sont deux matrices non nulles telles que $AB = 0$, alors aucune des deux matrices n'est inversible (sinon, par l'absurde, en multipliant à gauche par l'inverse de A ou à droite par l'inverse de B, on constaterait que l'autre matrice est nulle).

Exemple : Le calcul d'inverse de matrices peut faire intevrenir de petites astuces comme celle-ci : soit $M = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Un petit calcul permet d'obtenir $M^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et de constater que $M^2 = 2I - M$, ce qu'on peut écrire $M + M^2 = 2I$, ou encore $\dfrac{1}{2}M(M+I) = I$. Ceci suffit à montrer que M est inversible et que son inverse est $\dfrac{1}{2}(M+I)$. Autrement dit, $M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

15.2 Lien entre matrices et systèmes linéaires

Venons-en à un résultat annoncé depuis un certain temps, l'équivalence entre systèmes linéaires et équations matricielles. C'est en fait tout simple :

Théorème 27. Soit (S) le système linéaire

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & a_{2p}x_p & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & a_{np}x_p & = & b_n \end{array} \right.$$

En posant $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$; $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $B = (b_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, le système (S) est équivalent à l'équation matricielle $AX = B$.

Démonstration. Le produit des matrices A et X est une matrice-colonne à n termes, le i-ème terme valant $\sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j$. En identifiant coefficient par coefficient, on a donc $AX = B \Leftrightarrow \forall 1 \leqslant i \leqslant n$, $\sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j = b_j$, ce qui est exactement le système (S). □

Exemple : Soit (S) le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 3y & + & z & = & 5 \\ -5x & + & 4y & - & z & = & -1 \\ x & + & y & - & 3z & = & -6 \end{array}\right.$

Il est équivalent à l'équation matricielle $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -5 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Théorème 28. Le système (S) est un système de Cramer si et seulement si la matrice associée est une matrice inversible.

Démonstration. Il y a un sens très facile : si A est inversible, l'équation $AX = B$ est équivalente à $X = A^{-1}B$, ce qui montre que le système (S) a une unique solution. Dans l'autre sens, c'est malheureusement plus difficile, nous nous contenterons de donner un algorithme permettant de calculer l'inverse de A dans ce cas au paragraphe suivant. □

Ce théorème nous donne une grande motivation à l'introduction de la notion d'inverse de matrice, mais ne nous dit toujours pas comment le calculer. Remarquons tout de même le cas particulier suivant :

Proposition 115. Un système triangulaire a pour matrice associée une matrice triangulaire supérieure. Le système est de Cramer (et donc la matrice triangulaire inversible) si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.

15.3 Pivot de Gauss sur les matrices

Nous allons enfin donner une méthode systématique d'inversion des matrices, qui est en fait l'équivalent matriciel de la résolution des systèmes linéaires par le pivot de Gauss. Commençons par préciser qu'on ne parlera plus dans ce paragraphe que de matrices carrées, les autres n'étant de toute façon pas inversibles. Comme dans le cas des systèmes, le but est tout d'abord de se ramener à un système triangulaire, donc ici à une matrice triangulaire supérieure. Dans le cas où on a un système de Cramer (c'est-à-dire une matrice triangulaire n'ayant pas de 0 sur la diagonale), la matrice sera inversible, et il ne restera qu'à compléter la résolution du système en « remontant » le triangle. Dans le cas contraire, la matrice n'est pas inversible.

Toute l'idée est en fait de faire une correspondance entre les opérations élémentaires sur les lignes et colonnes que l'on effectue pour résoudre les systèmes linéaires et les produits par certaines matrices particulières. Lorsqu'on résout un système linéaire, si on note $(L_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ les lignes du système (on suppose dans tout ce paragraphe que le système, et donc la matrice associée, est carré), on effectue les opérations suivantes : échange de lignes $L_i \leftrightarrow L_j$; produit d'une ligne par un réel non nul $L_i \leftarrow \alpha L_i$; combinaison linéaire de deux lignes $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$. La correspondante est sur la page suivante car elle ne tenait pas sur le reste de celle-ci. Le principe est ensuite simple :

- On effectue sur la matrice A les opérations du pivot de Gauss (comme si on résolvait le système linéaire associé) jusqu'à obtenir une matrice triangulaire supérieure. Ces opérations correspondent à des produits $B_k \times \cdots \times B_1$ par des matrices inversibles (k étant le nombre d'étapes nécessaires pour atteindre une matrice triangulaire), produits que l'on effectue en parallèle en partant de la matrice I.

- Si la matrice triangulaire obtenue a un coefficient diagonal nul, elle n'est pas inversible, et la matrice A non plus.
- Si tous les coefficients diagonaux sont non nuls, le système associé est résoluble en « remontant » le striangle. On fait de même avec notre matrice : on la rend diagonale en commençant par annuler les termes non diagonaux sur la dernière colonne. Ces nouvelles opérations correspondent à de nouveaux produits, et on finit par transformer A en I via un produit de matrices inversibles $B_{k'} \times \cdots \times B_1$. Ce produit n'est autre que l'inverse de la matrice A, qu'on a donc sous les yeux si on a pris soin de l'effectuer en parallèle à partir de la matrice I.

Deux exemples sont donnés après le gros tableau.

Opération sur les lignes du système	Produit de la matrice A par :
Échange $L_i \leftrightarrow L_j$	$\begin{array}{c} \\ \\ \\ (L_i) \\ \\ \\ \\ (L_j) \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & 1 & & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & & 1 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Produit par un réel $L_i \leftarrow \alpha L_i$	$\begin{array}{c} \\ \\ \\ (L_i) \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \alpha & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Combinaison linéaire $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$	$\begin{array}{c} \\ \\ (L_i) \\ \\ (L_j) \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \dots & \alpha & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Nous allons calculer l'inverse de la matrice suivante en utilisant le pivot de Gauss : à gauche, les opérations sur la matrice A, à droite les mêmes opérations à partir de I pour obtenir l'inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow -L_2$$

Conclusion de ce long calcul : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

15.4 Diagonalisation de matrices

Une constatation pas si bête qu'elle n'en a l'air quand on travaille avec des matrices, c'est qu'on s'en sort toujours plus facilement avec des matrices diagonales (pour les calculs de puissances notamment). Le principe de la diagonalisation est très simple, il s'agit de « transformer » une matrice A en matrice diagonale.

Définition 144. Une matrice A est dite diagonalisable s'il existe une matrice inversible P telle que le produit $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale.

Cette propriété permet effectivement de calculer très facilement les puissances de la matrice A, car si on a $D = P^{-1}AP$, alors pour tout entier n, $D^n = P^{-1}A^nP$ (ce qui se prouve à l'aide d'une petite récurrence). Malheureusement, l'étude des conditions assurant la diagonalisabilité d'une matrice est loi d'être simple, et c'est un sujet que nous n'aborderons pas cette année. Nous nous conterons d'un exemple montrant l'utilité de la notion.

Exemple : Considérons les matrices $A = \begin{pmatrix} 10 & -6 & -3 \\ -4 & 12 & 2 \\ -4 & -4 & 6 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On montre en utilisant le pivot de Gauss que P est inversible et que $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$, puis par le calcul que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$, dont on déduit $A^n = P^{-1}\begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 8^n & 0 \\ 0 & 0 & 16^n \end{pmatrix} P$ (qu'on peut chercher à expliciter ou non selon son courage).

Exemple 2 : Le retour des chaines de Markov.
Doudou le hamster partage sa passionnante existence entre trois activités : manger, dormir, et faire de l'exercice sur sa roue. En l'observant toutes les minutes pendant un moment, on constate les choses suivantes :

- si Doudou fait de l'exercice à une certaine minute, il y aura une chance sur deux qu'il dorme et une chance sur deux qu'il mange à la minute suivante.
- si Doudou mange à une certaine minute, il y a une chance sur deux qu'il retourne dormir et une chance sur deux qu'il tente de faire de l'exercice à la minute suivante.
- enfin, s'il dort, une chance sur quatre (seulement) qu'il parte faire de l'exercice, une chance sur quatre qu'il mange, et une chance sur deux qu'il continue sa sieste.

Au moment du début de l'observation, Doudou est en train de manger et, vous l'aurez sûrement deviné, le but est d'étudier son comportement après n minutes et notamment rechercher des limites éventuelles aux probabilités de chaque activité. Notons donc A_n : « Doudou dort après n minutes », B_n : « Doudou mange après n minutes » et C_n : « Doudou fait de l'exercice après n minutes », ainsi que a_n, b_n et c_n les probabilités correspondantes. Une application (ou plutôt trois) de la formule des probabilités totales au système complet d'évènements formé par A_n, B_n et C_n permet d'obtenir le système de relations suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcccccc} a_{n+1} & = & \frac{1}{2}a_n & + & \frac{1}{2}b_n & + & \frac{1}{2}c_n \\ b_{n+1} & = & \frac{1}{4}d_n & & & + & \frac{1}{2}c_n \\ c_{n+1} & = & \frac{1}{4}a_n & + & \frac{1}{2}b_n & & \end{array}\right.$$

Nous allons plutôt exploiter la forme matricielle : en notant $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, le système précédent s'écrit $X_{n+1} = AX_n$. Par une petite récurrence désormais classique, on en déduit que $X_n = A^nX_0$, ne reste plus que le délicat problème du calcul de A^n. On peut en fait constater qu'en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale D (de coefficients diagonaux 1, $-\dfrac{1}{2}$ et 0). Naturellement, à notre niveau, nous n'avons pas vraiment de moyen de deviner à quoi va ressembler la matrice P sans connaitre D (ou vice-versa), l'une des deux sera donc toujours donnée dans l'énoncé. Une fois cette matrice diagonale obtenue, une petite récurrence permet de prouver que $A^n = PD^nP^{-1}$ (en effet, c'est vrai au rang 1 d'après les calculs précédents, et si on le suppose vrai pour A^n, alors $A^{n+1} = A \times A^n = (PDP^{-1})(PD^nP^{-1}) = PD^{n+1}P^{-1}$). On en déduit que $A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} & \frac{1}{4} + \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} + \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} & \frac{1}{4} + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \end{pmatrix}$, donc $X_n = A^nX_0 = A^n\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \\ \frac{1}{4} + \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} \end{pmatrix}$. En particulier, les suites (a_n), (b_n) et (c_n) ont pour limites respectives $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{4}$ et $\dfrac{1}{4}$.

Chapitre 16

Intégration

Introduction

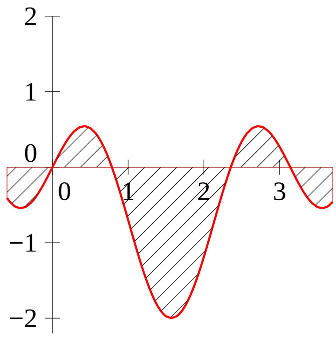
Nous aurons cet année un objectif assez simple en ce qui concerne l'intégration : apprendre à faire du calcul ! Ceci dit, l'intégration est loin de se résumer à un simple outil brutal (mais relativement efficace), il s'agit en fait d'une théorie complète dont le but est tout simplement de calculer des aires. Tout cela est donc très géométrique et visuel, même si en pratique on se contente souvent de passer par le biais des primitives que vous avez déjà du croiser l'an dernier. Nous allons essayer dans ce cours d'aborder les choses par le biais de ces calculs d'aire, et nous reviendrons sur cette notion en fin de chapitre pour expliquer la notation utilisée quand on fait du calcul intégral.

16.1 Construction

Dans tout le chapitre, nous nous placerons dans le cadre suivant : la fonction f que l'on cherche à intégrer est toujours **continue** (éventuellement continue par morceaux, mais le cas ne sera pas spécifiquement traité dans le cours, et simplement déduit du cas précédent en cas de besoin pour les exercices). De plus, on ne s'intéressera qu'à l'intégration sur un segment $[a;b]$ (l'an prochain, vous compliquerez un peu tout ça). Le principe de base est le suivant : les seules aires que l'on sait calculer facilement, ce sont des aires de rectangle (longueur fois largeur, ça va). Toute autre forme géométrique, même élémentaire, a une aire complexe (pensez à la forme pour un disque, qui fait sortir d'on ne sait trop où la fameuse constante π).

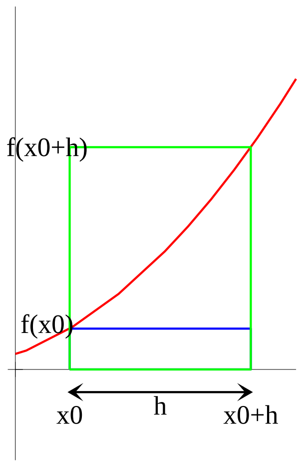
16.1.1 Aire sous une courbe

Soit donc f une fonction définie et continue sur un segment $[a;b]$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. On s'intéresse à la fonction $\mathcal{A}$ définie sur $[a;b]$ de la façon suivante : $\mathcal{A}(x_0)$ est l'aire de la portion de plan délimitée par les droites d'équation $x = a$; $x = x_0$; $y = 0$ et par la courbe $\mathcal{C}_f$. L'aire sera comptée positivement lorsque $\mathcal{C}_f$ se trouve au-dessus de l'axe des abscisses, négativement dans le cas contraire.



Proposition 116. La fonction $\mathcal{A}$ est dérivable sur $[a;b]$ et a pour dérivée la fonction f.

Démonstration. Calculons le taux d'accroissement de $\mathcal{A}$ entre x_0 et x_0+h (où h est un réel positif). Par définition, la quantité $\mathcal{A}(x_0+h)-\mathcal{A}(x)$ est l'aire comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=x_0$ et $x=x_0+h$. Supposons pour la clarté du raisonnement la fonction croissante aux alentours de x_0 (le cas général n'est pas vraiment plus compliqué), on a donc une figure qui ressemble à ceci :



On peut encadrer l'aire qui nous intéresse par celle des deux rectangles de largeur h dessinés sur la figure, l'un ayant pour hauteur $f(x_0)$ et l'autre $f(x_0+h)$. On a donc $hf(x_0)\leqslant\mathcal{A}(x_0+h)-\mathcal{A}(x_0)\leqslant hf(x_0+h)$, ou encore $f(x_0)\leqslant\dfrac{\mathcal{A}(x_0+h)-\mathcal{A}(x_0)}{h}\leqslant f(x_0+h)$. Mais on obtient alors, en faisant tendre h vers 0 et en utilisant le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{\mathcal{A}(x_0+h)-\mathcal{A}(x_0)}{h}=f(x_0)$ (notez qu'on a besoin pour cela de la continuité de la fonction f). En procédant de la même manière pour $h<0$, on montre la dérivabilité de la fonction $\mathcal{A}$, et on a bien $\mathcal{A}'(x_0)=f(x_0)$. □

16.1.2 Primitives

Le calcul du paragraphe précédent conduit naturellement à l'étude de la notion suivante :

Définition 145. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que F est une **primitive** de f sur I si la fonction F est dérivable sur I et vérifie $F'=f$.

Exemple : Sur n'importe quel intervalle, la fonction $x\mapsto1$ a pour primitive $x\mapsto x$, mais aussi $x\mapsto x+2$; $x\mapsto x-\sqrt{127}$ etc. Sur l'intervalle $\mathbb{R}^{+*}$, la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ a pour primitive $x\mapsto\ln(x)$.

Théorème 29. Toute fonction continue sur un segment y admet une primitive.

En effet, la fonction « aire sous la courbe » définie au paragraphe précédent est une primitive de f. Mais attention, cette primitive n'est pas la seule, loin de là !

Proposition 117. Si F est une primitive de f sur l'intervalle I, la fonction $x \mapsto F(x) + k$ ($k \in \mathbb{R}$) est également une primitive de f. Réciproquement, si G est une primitive de f, la fonction $G - F$ est constante (autrement dit, il existe une constante k pour laquelle $G = F + k$).

Démonstration. C'est essentiellement évident : si $F' = f$, alors $(F + k)' = f$ donc $F + k$ est une primitive de f. Et si F et G sont deux primitives de f, on a $(G - F)' = f - f = 0$, donc $G - F$ est une fonction constante. □

Proposition 118. Soit f continue sur I, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$ alors il existe une unique primitive F_0 de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

Démonstration. Puisque nous savons qu'il en existe une, notons F une primitive de f sur I et posons $k = y_0 - F(x_0)$. on a alors $(F + k)(x_0) = y_0$, donc $F_0 = F + k$ est une primitive qui convient. De plus, elle est unique, car une autre solution différerait de F_0 par une constante nécessairement nulle puisque les deux fonctions prendraient la même valeur en x_0. □

Exemple : La fonction ln a été historiquement définie comme étant **la** primitive de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$ s'annulant pour $x = 1$.
La primitive de $x \mapsto 2x$ valant -3 en $x = 2$ est la fonction $x \mapsto x^2 - 7$.

Remarque 133. Si l'on reprend l'interprétation géométrique du premier paragraphe, on peut obtenir d'autres primitives de f en décalant l'origine du calcul d'aire, mais on n'obtiendra pas nécessairement toutes les primitives ainsi.

Pour finir ce paragraphe, voici l'indispensable tableau récapitulatif des primitives usuelles à connaitre par coeur (et qui va fortement vous rappeler un autre tableau, celui des dérivées usuelles). Attention, toutes les primitives sont données **à une constante près**, en cohérence avec les remarques faites plus haut. Pas plus de commentaires ou de preuve pour ce tableau, il suffit de retourner le tableau des dérivées usuelles :

Fonction	*Primitive*	*Intervalle*	*Fonction*	*Primitive*
$a(constante)$	ax	$\mathbb{R}$	af	aF
$x^n (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$	$f + g$	$F + G$
$x^a (a \neq -1)$	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$	$\mathbb{R}^{+*}$	$u' f(u)$	$F(u)$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	$\mathbb{R}^{+*}$	$f' f$	$\frac{f^2}{2}$
$\ln(x)$	$x \ln(x) - x$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\frac{f'}{f}$	$\ln \lvert f \rvert$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$	$f' e^f$	e^f

Exemple : Une primitive de $x \mapsto \dfrac{x^2 + 1}{x}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ est $x \mapsto \dfrac{x^2}{2} + \ln(x)$. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{x}{x^2 + 1}$ sur $\mathbb{R}$ est $\dfrac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$.

16.1.3 Définition de l'intégrale

Définition 146. Soit f une fonction continue sur un segment $[a; b]$, alors le nombre $F(b) - F(a)$ ne dépend pas du choix de la primitive F de f. On le note $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$, et il s'appelle **intégrale de a à b de la fonction f**.

Démonstration. On a vu que deux primitives F et G de f différaient d'une constante k. Mais si $G = F + k$, on a $G(b) - G(a) = F(b) + k - F(a) - k = F(b) - F(a)$, donc la définition ne dépend effectivement pas de la primitive choisie. □

Remarque 134. On verra dans les compléments une façon géométrique d'obtenir la définition de l'intégrale qui justifie la notation.

Remarque 135. La variable t apparaissant à l'intérieur de l'intégrale est une variable muette (comme le k pour une somme par exemple). On peut très bien la remplacer par toute autre variable, à condition de remplacer également le dt, que nous voyons pour l'instant comme une façon d'indiquer la variable dans l'intégrale : $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(\mu)d\mu$.

Définition 147. On utilisera la notation suivante : pour toute fonction F définie sur un intervalle $[a;b]$, on note $[F]_a^b = F(b) - F(a)$.

Exemple : Ainsi, on notera par exemple $\int_{-2}^3 tdt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_{-2}^3 = \frac{9}{2} - \frac{4}{2} = \frac{5}{2}$.

Proposition 119. Soit f une fonction continue sur un segment $[a;b]$, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f s'annulant en a.

Démonstration. En effet, soit F une primitive quelconque de f, on a $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$. La fonction qu'on vient de définir diffère de F par une constante, c'est donc également une primitive de f. De plus sa valeur en a est $F(a) - F(a) = 0$. Notons au passage qu'on a donc $\int_a^a f(t)dt = 0$. □

16.2 Propriétés de l'intégrale

Proposition 120. (relation de Chasles) Soient $a < b < c$ trois réels et f une fonction continue sur $[a;c]$, alors $\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$.

Démonstration. Soit F une primitive quelconque de f, on a $\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a) = \int_a^c f(t)dt$. □

Exemple : Pour calculer certaines intégrales faisant intervenir une valeur absolue, un découpage peut être utile (selon le signe de ce qui se trouve dans la valeur absolue) : $\int_0^4 |x-2| \ dx = \int_0^2 2 - x \ dx + \int_2^4 x - 2 \ dx = \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_0^2 + \left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]_2^4 = 2 - 0 + 0 - (-2) = 4$.

Proposition 121. (linéarité de l'intégrale) Soient f et g deux fonctions continues sur un segment $[a;b]$, et α, β deux réels, alors $\int_a^b \alpha f(t) + \beta g(t) \ dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t) \ dt$.

Démonstration. C'est une conséquence évidente de la linéarité de la « primitivisation ». □

Proposition 122. Soit f une fonction continue et positive sur un segment $[a;b]$, alors $\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$.

Démonstration. La fonction f étant positive, $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$, qui en est une primitive, est une fonction croissante. Comme $F(a) = 0$, on a donc $F(b) \geqslant 0$, et $\int_a^b f(t) = F(b) - F(a) = F(b) \geqslant 0$. □

Remarque 136. On est toutefois parfaitement autorisé à écrire une intégrale dont les bornes sont dans le « mauvais sens ». Auquel cas le signe en est changé : $\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$. La proposition précédente ne s'applique donc que si $a \leqslant b$ (ce qui est le cas quand on parle du segment $[a;b]$, mais on a vite fait d'oublier cette condition).

Remarque 137. On peut affiner le résultat en remarquant, que si f est continue et positive sur $[a;b]$, on a $\int_a^b f(t)dt = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

Proposition 123. Si f et g sont deux fonctions continues sur un même segment $[a;b]$ et $f \leqslant g$ sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$.

Démonstration. Si $f \leqslant g$, la fonction $g - f$ est positive, donc $\int_a^b d(t) - f(t)\ dt \geqslant 0$, ce qui donne le résultat en utilisant la linéarité de l'intégrale. □

Exemple : un cas particulier extrêmement fréquent est l'utilisation d'une fonction constante pour majorer (ou minorer) une intégrale. Si on a $m \leqslant f \leqslant M$ sur un segment $[a;b]$, alors $\int_a^b mdt \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b Mdt$, soit $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant M(b-a)$.

Exemple : Un exemple classique d'utilisation d'encadrement est la détermination de limites de suites d'intégrales. Posons ainsi $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^4}dt$ et cherchons calculer la limite de la suite (I_n). On ne cherche surtout pas à calculer la valeur de I_n (on aurait bien du mal à y parvenir, de toute façon), mais on commence par remarquer que, pour toute valeur de n, la fonction qu'on intègre est positive, donc la suite (I_n) est positive. De plus, en remarquant que $\forall t \in [0;1]$, on a $\frac{1}{1+t^4} \leqslant 1$, on en déduit que $I_n \leqslant \int_0^1 t^n\ dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$, donc par le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Définition 148. Soit f une fonction continue sur un segment $[a;b]$. On appelle **valeur moyenne de** f la quantité $\frac{\int_a^b f(t)dt}{b-a}$.

Proposition 124. Soit f une fonction continue sur un segment $[a;b]$, alors on a $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt$.

Démonstration. On a $f \leqslant |f|$ donc en utilisant la proposition précédente $\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt$. Mais de même $-f \leqslant |f|$ donc $-\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt$, donc on a bien l'égalité voulue (si $x \leqslant y$ et $-x \leqslant y$, alors $|x| \leqslant y$). □

16.3 Méthodes de calcul

16.3.1 Intégration directe

La méthode la plus basique mais la plus efficace quand la fonction a le bon goût de ne pas être trop compliquée est d'en trouver une primitive, il ne reste plus ensuite qu'à calculer.

Exemple : Si f est un polynome, on s'en sort toujours sans difficulté : $\int_{-1}^{3} x^2 - 2x + 3\ dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right]_{-1}^{3} = 9 - 9 + 9 - (-\frac{1}{3} - 1 - 3) = \frac{14}{3}$.
Exemple : Notre tableau de primitives usuelles est évidemment d'une grande utilité. Par exemple $\int_0^1 \frac{1}{x+3} = [\ln(x+3)]_0^1 = \ln 4 - \ln 3 = \ln\frac{4}{3}$.

16.3.2 Intégration par parties

Le principe est très simple : utiliser la formule de dérivation d'un produit de façon légèrement détournée. On sait bien entendu que, si u et v sont deux fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $[a;b]$, la dérivée du produit uv est $u'v + uv'$. On a donc, en utilisant les résultats vus à la partie précédente, $\int_a^b u'(t)v(t) + u(t)v'(t)\ dt = [uv(t)]_a^b$. On utilise ce résultat sous une forme légèrement différente :

Proposition 125. Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a;b]$, alors $\int_a^b u(t)v'(t) = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)$.

Démonstration. La démonstration a été, une fois n'est pas coutume, faite avant d'énoncer le théorème. □

Remarque 138. Cette méthode de calcul est très utile pour calculer des intégrales faisant intervenir des produits de fonctions usuelles, dont on a souvent du mal à déterminer directement une primitive. Une difficulté peut provenir du choix, parmi les deux fonctions présentes, de celle qui jouera le rôle de u et de celle qui jouera le rôle de v'. Pensez que le but est de faire apparaitre dans le membre de droite une intégrale plus facile à calculer que celle d'origine (sinon on n'a pas vraiment avancé), et que dans ce membre de droite, on dérive u et on « primitive » v'. On choisira quand c'est possible une fonction v' facile à intégrer (le cas idéal étant l'exponentielle ou le logarithme) et pour u une fonction qui se simplifie quand on la dérive, souvent une puissance de t. Première exemple super classique : $\int_0^5 te^t\ dt$. Le t gêne et le e^t s'intègre bien, on va donc faire une intégration par parties en posant $u(t) = t$ et $v'(t) = e^t$. On a donc $\int_0^5 te^t\ dt = [te^t]_0^5 - \int_0^5 e^t\ dt = 5e^5 - [e^t]_0^5 = 5e^5 - e^5 + 1 = 4e^5 + 1$. Dans un premier temps, je vous conseille de bien poser tous vos calculs, en précisant ce que valent les fonctions u, v', u' et v, puis avec un peu d'habitude vous pourrez rédiger plus rapidement.

Remarque 139. Il peut être astucieux de recourir à une intégration par parties dans le cas où il n'y a pas de produit visible en prenant 1 comme deuxième facteur du produit. C'est ainsi que l'on trouve le plus naturellement la formule de la primitive de ln qui s'annule en 1. On sait que cette primitive peut s'exprimer comme $\int_1^x \ln(t)\ dt$. Pour calculer cette intégrale, on va faire une intégration par parties en posant $v'(t) = 1$ et $u(t) = \ln t$. On a donc $v(t) = t$ et $u'(t) = \frac{1}{t}$, donc $\int_1^x \ln(t)\ dt = [t\ln(t)]_1^x - \int_1^x 1\ dt = x\ln x - x + 1$.

Remarque 140. Il est souvent utile de procéder à plusieurs intégrations par parties successives, notamment quand on cherche à faire baisser le degré d'une puissance de t dans l'intégrale, et on est même parfois amené à raisonner par récurrence.

Exemple : On cherche à calculer $I_n = \int_1^e t^n \ln t\ dt$. On peut calculer directement $I_0 = \int_1^e \ln t\ dt = [t\ln t - t]_1^e = e - e - 0 + 1 = 1$. Pour le cas général, on s'en sort en fait par une simple intégration par parties : $I_n = \int_1^e t^n \ln t \, dt = [\frac{t^{n+1}}{n+1} \ln t]_1^e - \int_1^e \frac{t^n}{n+1} \, dt = \frac{e^{n+1}}{n+1} - [\frac{1}{(n+1)^2} t^{n+1}]_1^e = \frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{e^{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{ne^{n+1}+1}{(n+1)^2}$.

16.3.3 Changement de variable

L'idée est cette fois-ci d'utiliser la formule de dérivation d'une fonction composée : $(F \circ u)' = u' \times f \circ u$ (où F désigne une primitive de la fonction f). Le théorème suivant découle facilement de cette formule :

Théorème 30. (changement de variable) Soit u une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a; b]$ et f une fonction continue sur le segment $[u(a); u(b)]$, alors on a $\int_a^b u'(t) f(u(t)) \, dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(v) \, dv$.

Démonstration. En effet, une primitive de $u' f(u)$ est $F(u)$, où F est une primitive de f. Le membre de gauche vaut donc $F(u(b)) - F(u(a))$, ce qui est bien égal au membre de droite. □

Cette formule est naturellement utilisée quand on a sous l'intégrale une fonction qui peut s'écrire sous la forme de la dérivée d'une composée. Mais même dans d'autres cas, on peut tenter de l'utiliser pour simplifier l'intégrale, comme dans le cas d'une intégration par parties. En pratique, pas vraiment besoin de retenir la formule, il faut savoir l'appliquer, et surtout comprendre tout ce qu'il y a à modifier quand on fait un changement de variable. Il faut bien sûr changer la variable, mais aussi les bornes de l'intégrale, et surtout le fameux dt, en suivant la règle suivante : $d(u(t)) = u'(t) \, dt$. Nous n'avons pas les moyens de bien comprendre cette manipulation, mais cela correspond bien à la formule donnée ci-dessus ($f(u(t))$ est changé en $f(v)$ et $u'(t) \, dt$ en dv).
Prenons un exemple avec $I = \int_1^e \frac{1}{t(\ln t + 1)} \, dt$. On va faire le changement de variable $u = \ln t$. On a alors $du = \frac{1}{t} \, dt$, ce qui permet de se débarasser du t au dénominateur en le faisant passer dans le du. Il reste encore à changer les bornes, qui deviennent 0 et 1, et on obtient $I = \int_0^1 \frac{1}{u+1} \, du = [\ln(u+1)]_0^1 = \ln 2$.

Exemple : On cherche à calculer $\int_1^2 t\sqrt{2t-1} \, dt$. Le terme $\sqrt{2t-1}$ n'étant pas pratique à manipuler, on va faire le changement de variable $v = 2t - 1$, autrement dit $v = u(t)$, où u est la fonction $t \mapsto 2t - 1$. Il faut alors changer également le dt en calculant $dv = u'(t)dt = 2dt$, donc $dt = \frac{dv}{2}$. Il faudra aussi faire quelque chose du t qui traine à côté de la racine : comme $u = 2t - 1$, on a $t = \frac{u+1}{2}$. Enfin, il faut changer les bornes de l'intégrale par $u(1) = 1$ et $u(2) = 3$. On obtient donc $\int_1^2 t\sqrt{2t-1} \, dt = \int_1^3 \frac{u+1}{4} \sqrt{u} \, du = \frac{1}{4} \int_1^3 u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}} \, du = \frac{1}{4} \left[\frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right]_1^3 = \frac{1}{10}(3^{\frac{5}{2}} - 1) + \frac{1}{6}(3^{\frac{3}{2}} - 1)$.

16.4 Compléments

16.4.1 Fonctions définies par une intégrale

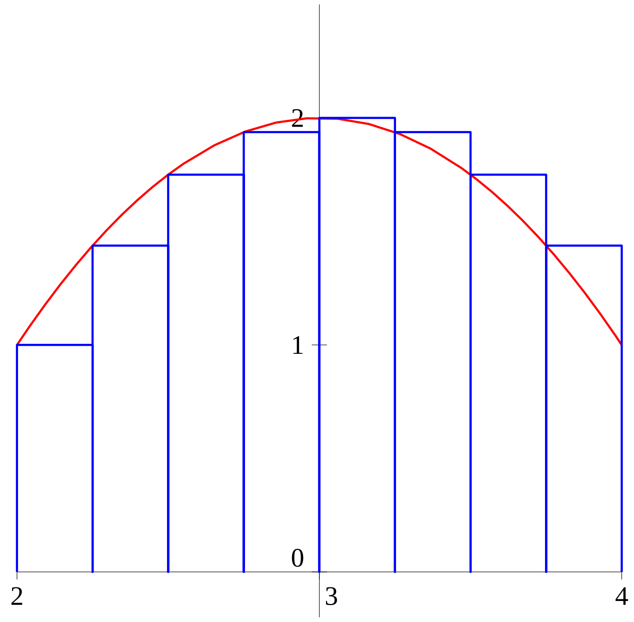
On en a déjà vu un exemple sans le dire quand on a calculé la primitive du logarithme un peu plus haut : la primitive de f s'annulant en a est bien une fonction définie par une intégrale $x \mapsto \int_a^x f(t) \, dt$. Dans le cas du logarithme, on peut en fait expliciter la fonction sous une forme traditionnelle, mais il peut très bien arriver en général qu'on n'ait pas de formule plus simple. Il faut alors étudier la fonction en utilisant les propriétés de l'intégrale. Mais un bon exemple vaudra mieux que de longs discours :

On veut étudier la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\ln t}{t}\, dt$ (dont on sait en fait calculer une expression explicite, mais nous ferons semblant de l'oublier pour l'intérêt de l'exercice). La fonction f est définie sur $]0;+\infty[$ (il faut que tous les réels compris entre x et $2x$ soient strictement positifs). On peut très bien calculer la dérivée de f. Introduisons pour celà la fonction $g : t \mapsto \dfrac{\ln t}{t}$, et notons G une primitive de g sur $]0;+\infty[$. On a alors par définition $f(x) = G(2x) - G(x)$, donc $f'(x) = 2g(2x) - g(x)$ (attention à la dérivée de la composée pour le premier morceau), c'est-à-dire que $f'(x) = 2\dfrac{\ln(2t)}{2t} - \dfrac{\ln t}{t} = \dfrac{\ln(2t) - \ln t}{t} = \dfrac{\ln 2}{t}$. Cette dérivée étant positive, la fonction f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

On peut aussi calculer les limites de f en utilisant des encadrements (technique qui ne marchera pas à tous les coups). Pour celà, étudions les variations de la fonction g : $g'(t) = \dfrac{1 - \ln t}{t^2}$. La fonction g est donc croissante sur $]0;e]$, puis décroissante ensuite. Si $x \geqslant e$, on a donc $\forall t \in [x;2x]$, $\dfrac{\ln(2x)}{2x} \leqslant \dfrac{\ln t}{t} \leqslant \dfrac{\ln x}{x}$, d'où par intégration des inégalités $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{\ln(2x)}{2x} dt \leqslant \int_x^{2x} \frac{\ln t}{t} dt \leqslant \int_x^{2x} \frac{\ln x}{x} dt$, soit $\dfrac{\ln(2x)}{2} \leqslant f(x) \leqslant \ln x$. Les deux bornes ayant pour limite $+\infty$ en $+\infty$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. De même, quand x se rapproche de 0, le théorème des gendarmes permet de conclure (l'encadrement est dans l'autre sens, mais encore une fois les deux termes ont la même limite) que $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

16.4.2 Sommes de Riemann

Le concept de somme de Riemann fait partie d'une construction de l'intégrale légèrement différente de celle que nous avons adoptée (mais qui permet accessoirement de définir l'intégrale de fonctions qui ne sont pas forcément continues). Nous avons défini le concept de primitive pour construire nos intégrales, la primitive pouvant être vue comme une façon de calculer l'aire sous la courbe représentative de f (cf introduction). On peut également pousser plus loin les calculs d'aire en essayant d'approcher le plus possible l'aire de la courbe à l'aide de rectangles. Pour cela, le plus simple est de découper le segment $[a;b]$ en n segments de même largeur, en posant $h = \dfrac{b-a}{n}$, obtenant ainsi n segments de largeur h. Sur chacun de ces segments, on va approcher l'aire sous la courbe $\mathcal{C}_f$ par celle d'un rectangle. Pour la hauteur du rectangle, on fait le choix arbitraire de prendre la valeur de f au point le plus à gauche du segment, autrement dit $f(a)$ pour le premier segment, $f(a+h)$ pour le deuxième, jusqu'à $f(a+(n-1)h)$ pour le dernier (sachant que $b = a + nh$) (on peut aussi choisir les points à droite des intervalles). Cela correspond à la figure suivante :



La somme de Riemann n'est autre que la somme des aires de ces rectangles (qui dépend bien sûr de n).

Définition 149. On appelle $n$ème somme de Riemann associée à une fonction f continue sur un segment $[a;b]$ le réel

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)$$

Le résultat fondamental sur les sommes de Riemann, que nous nous garderons bien de démontrer, est le suivant :

Théorème 31. Si f est continue sur $[a;b]$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(f) = \int_a^b f(t)\ dt$.

Autrement dit, les sommes de Riemann sont une bonne façon d'approcher l'aire sous la courbe. On peut même majorer l'écart entre la n-ème somme de Riemann et l'intégrale de f. C'est d'ailleurs la méthode utilisée pour faire du calcul numérique (et donc approché) d'intégrales, dans votre calculatrice par exemple. Il suffit de prendre n assez grand pour avoir une très bonne valeur approchée de l'intégrale (en l'occurence il existe des méthodes plus efficaces que celle-ci, cf TD de Pascal).

Remarque 141. Cette façon de voir l'intégrale explique plus ou moins la notation utilisée : l'intégrale est la limite des sommes de Riemann, autrement dit (avec un peu d'imagination), une somme infinie d'aires de rectangles de hauteur $f(t)$ (pour t parcourant $[a;b]$) et de largeur infiniment petite notée dt. Le symbole $\int$ n'étant autre qu'un S comme somme, on voit bien l'origine de la notation.

Exemple : Appliquons la définition et le théorème à la fonction carré sur l'intervalle $[0;1]$. L'expression de la somme de Riemann se simplifie notablement puisque dans ce cas $\dfrac{b-a}{n} = \dfrac{1}{n}$ et $a = 0$. On a donc $S_n(f) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{k^2}{n^2} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{k=n-1} k^2$. Le théorème nous permet d'affirmer que $S_n(f)$ converge vers $\displaystyle\int_0^1 t^2\ dt = \frac{1}{3}$. Autrement dit, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} k^2 \sim \frac{n^3}{3}$. Ce n'est pas une grande découverte puisqu'on sait calculer exactement cette somme. Par contre, si on fait exactement la même manipulation avec la fonction $x \mapsto x^7$ (par exemple), toujours sur le segment $[0;1]$, on obtient le résultat plus intéressant $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} k^7 \sim \frac{n^8}{8}$.

Remarque 142. On peut également utiliser les sommes de Riemann « dans l'autre sens », c'est-à-dire reconnaitre lors de l'étude d'une suite une somme de Riemann pour en déduire sa limite. dans ce cas, la somme de Riemann sera toujours sur l'intervalle $[0;1]$, c'est-à-dire qu'il faut reconnaitre quelque chose du type $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$, pour une certaine fonction continue f.

Chapitre 17

Variables aléatoires infinies

Introduction

Ce chapitre est destiné à généraliser les résultats obtenus sur les variables aléatoires au cas où celles-ci prennent une infinité de valeurs. Un exemple extrêmement classique : on lance une pièce jusqu'à obtenir Pile et on note X le nombre d'essais nécessaires. La variable X peut prendre comme valeur n'importe quel entier, et il se peut même que X ne prenne pas de valeur du tout (si on ne tombe jamais sur Pile, événement possible bien que de probabilité nulle) ! En fait, les définitions vues pour les variables finies ne vont être que très légèrement modifiées. La principale différence proviendra lors du calcul des paramètres comme l'espérance, qui feront intervenir non plus une somme finie, mais une série.

17.1 Compléments de probabilités

Définition 150. Soit (A_n) une suite d'événements dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, la suite est dite **croissante** si $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$, et **décroissante** si $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} \subset A_n$.

Proposition 126. Théorème de la limite monotone.

Pour toute suite croissante d'événements (A_n), on a $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$.

Pour toute suite décroissante d'événements (A_n), on a $P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$.

Exemple : Un singe immortel tape tous les jours 100 000 caractères de façon complètement aléatoire sur un clavier de 50 touches. On cherche la probabilité que ce singe tape un jour donné l'intégralité des *Misérables* sans une seule faute de frappe, sachant que ce livre fait exactement 100 000 caractères (ce n'est sûrement pas vrai mais peu importe). Notons A_n l'évènement « Le singe n'a pas réussi à taper entièrement le livre avant le jour n ». La suite d'évènements (A_n) est décroissante (si le singe n'a pas réussi avant le jour $n+1$, c'est qu'il n'avait pas réussi avant le jour n), et, en notant $p = \dfrac{1}{50^{1\ 000}}$ (probabilité que notre singe tape son livre un jour donné), $P(A_n) = (1-p)^n$. Par théorème de la limite monotone, $P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n) = 0$ puisque $p > 0$, donc $1 - p < 1$. Il y a donc une probabilité nulle que le singe n'arrive jamais à taper *Les Misérables*. Autrement dit, le singe arrivera à taper le livre avec probabilité 1 (il faudra juste attendre très très longtemps).

Définition 151. Un événement est **négligeable** si sa probabilité est nulle. Un évènement est **presque sûr** si sa probabilité vaut 1.

Remarque 143. Un événement peut très bien être presque sûr sans être l'événement certain. Prenons l'exemple d'une infinité de Pile ou Face ; l'événement A : « on tire au moins un Pile » n'est pas l'événement certain (il existe exactement un élément de Ω, celui composé d'une infinité de Face, qui n'appartient pas à A), mais est presque sûr. Pire, l'exemple de la section précédente nous donnait un événement presque sûr, alors qu'il existe une infinité de possibilités qui ne sont pas dans A !

17.2 Variables infinies

17.2.1 Définition, opérations

Définition 152. Une **variable aléatoire infinie** (discrète) X sur un espace probabilisé Ω est une application $X : \Omega \to \mathbb{Z}$ définie sur un ensemble presque sûr.

Remarque 144. On peut en fait définir sans difficulté supplémentaire des variables aléatoires prenant une infinité de valeurs qui ne sont pas nécessairement entières, tant que celles-ci peuvent être mises sous forme d'une suite de réels.

Exemple 1 : On effectue une suite de lancers de dé, et on note X le nombre de lancers nécessaires avant d'obtenir le premier 6.
Exemple 2 : Une urne contient une boule blanche, une noire et une verte. On tire dans l'urne avec remise jusqu'à tirer pour la deuxième fois la boule blanche. On note X le nombre de tirages nécessaires. On a ici $X(\Omega) = \{2; 3; \dots\}$.

Remarque 145. On continuera naturellement à utiliser les notations $X = i$ ou $X \geqslant i$ pour les mêmes événements que dans le cas fini.

Proposition 127. Soient X et Y deux variables infinies sur un même univers Ω, alors $X+Y$, XY, $\max(X, Y)$ et $\min(X, Y)$ sont également des variables aléatoires.

Proposition 128. Soit X une variable aléatoire infinie sur Ω et $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ une fonction, alors $g(X) : \omega \mapsto g(X(\omega))$ est aussi une variable aléatoire (notée $g(X)$).

17.2.2 Loi

Définition 153. Soit X une variable aléatoire infinie, la **loi de probabilité** de X est la donnée des probabilités $P(X = k)$, pour toutes les valeurs de k appartenant à $X(\Omega)$.

Remarque 146. Il n'est évidemment plus possible de présenter la loi d'une variable infinie sous la forme d'un tableau. On devra se contenter d'une formule.

Exemple 1 : On calcule sans difficulté $P(X = k) = \left(\dfrac{5}{6}\right)^{k-1} \times \dfrac{1}{6}$.
Exemple 2 : Pour les trois boules dans l'urne, on aura $X = k$ si on tire une boule blanche au tirage k (probabilité $\dfrac{1}{3}$) et exactement une boule blanche sur les $k-1$ premiers tirages, ce qui a pour probabilité (en tenant compte du choix de la position de la première boule blanche) $(k-1)\left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-2} \times \dfrac{1}{3}$, donc $P(X = k) = (k-1)\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 \left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-2}$.

Proposition 129. On a toujours $\sum\limits_{k \in X(\Omega)} P(X = k) = 1$.

Exemple 1 : Un peu de révision sur les séries : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \left(\dfrac{5}{6}\right)^{k-1} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{6} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \left(\dfrac{5}{6}\right)^k = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{1 - \frac{5}{6}} = 1$.
Exemple 2 : C'est une série géométrique dérivée qui va être utile cette fois-ci.
En effet, $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} (k-1)\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 \left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-2} = \dfrac{1}{9} \sum\limits_{k=1}^{+\infty} k \left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-1} = \dfrac{1}{9} \times \dfrac{1}{(1 - \frac{2}{3})^2} = 1$.

17.2.3 Fonction de répartition

Définition 154. La **fonction de répartition** d'une variable aléatoire X est toujours la fonction $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F_X(x) = P(X \leqslant x)$.

Proposition 130. Les propriétés vues dans le cas d'une variable aléatoire finie restent toutes valables. La seule différence est que la courbe représentative de F_X n'est plus en escalier (car il y a une infinité de « marches »).

17.2.4 Moments d'une variable aléatoire infinie

Définition 155. On dit que la variable infinie X **admet une espérance** si la série de terme général $kP(X = k)$ est absolument convergente. L'**espérance** de X est alors la somme de la série : $E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} kP(X = k)$.

Exemple 1 : On verra dans le paragraphe consacré aux lois géométriques que l'espérance du nombre de lancers effectués vaut 6.
Exemple 2 : Ici, pas de loi usuelle, il faut faire le calcul, qui fait intervenir une série géométrique dérivée seconde : $E(X) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} = \frac{1}{9} \times \frac{2}{(1-\frac{2}{3})^3} = \frac{1}{9} \times 54 = 6.$

Proposition 131. Si X et Y sont deux variables aléatoires infinies admettant une espérance et définies sur le même univers Ω, $X + Y$ admet aussi une espérance et $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

Proposition 132. Si X est une variable aléatoire positive et qu'elle admet une espérance, on a $E(X) \geqslant 0$. Si X, Y sont deux variables aléatoires admettant une espérance et telles que $X \leqslant Y$, alors $E(X) \leqslant E(Y)$.

Théorème 32. (théorème du transfert) Soit X une variable aléatoire et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, alors si $g(X)$ admet une espérance, $E(g(X)) = \sum_{k \in X(\Omega)} g(k)P(X = k)$.

Définition 156. Soit X une variable aléatoire et r un entier positif, X admet un **moment d'ordre** r si X^r admet une espérance. Dans ce cas, on note toujours $m_r(X) = E(X^r)$.

Définition 157. La variable aléatoire infinie X **admet une variance** si elle admet une espérance m et si la variable $(X - m)^2$ admet une espérance. On a alors $V(X) = E((X - m)^2)$.

Théorème 33. La variable X admet une variance si et seulement si X et X^2 admettent une espérance et la formule de König-Huygens reste valable.

17.3 Lois usuelles infinies

17.3.1 Loi géométrique

Définition 158. On dit que la variable aléatoire X suit une **loi géométrique de paramètre** $p \in [0; 1]$ si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$. On le note $X \sim \mathcal{G}(p)$.

Exemple : Vous aurez reconnu la loi apparaissant dans notre exemple des lancers de dé. Les cas de la position d'apparition du premier Pile dans une série de Pile ou Face serait également une variable géométrique. En général, le temps d'attente d'un évènement lors d'un processus sans mémoire (c'est-à-dire que l'apparition de l'évènement au n-ième tirage ne dépend pas des résultats des tirages précédents) suit toujours une loi géométrique.

Proposition 133. Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, X admet une espérance et une variance et $E(X) = \dfrac{1}{p}$ et $V(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$.

Démonstration. La série pour l'espérance est (à un facteur près) une série geométrique dérivée, elle est donc convergente, et $E(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} pk(1-p)^{k-1} = p \times \frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$. On a donc $E(X)^2 = \dfrac{1}{p^2}$. De plus, $X(X-1)$ admet une espérance (on a une série de type géométrique dérivée seconde) qui vaut $E(X(X-1)) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} pk(k-1)(1-p)^{k-1} = p(1-p)\frac{2}{(1-(1-p))^3} = \frac{2(1-p)}{p^2}$, donc $V(X) = E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2 = \dfrac{2(1-p)}{p^2} + \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p^2} = \dfrac{2(1-p)+p-1}{p^2} = \dfrac{1-p}{p^2}$. □

Proposition 134. La loi géométrique est une loi sans mémoire : si $X \sim \mathcal{G}(p)$, $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^{*2}$, $P_{X>n}(X > n+m) = P(X > m)$.

Démonstration. Commençons par calculer $P(X > m) = \displaystyle\sum_{k>m} P(X = k) = \sum_{k=m+1}^{+\infty} pq^{k-1} = p\sum_{j=0}^{+\infty} q^{j+m} = pq^m \sum_{j=0}^{+\infty} q^j = p\frac{q^m}{1-q} = q^m$. De même, on a donc $P(X > n) = q^n$ et $P(X > n+m) = q^{n+m}$, donc $P_{X>n}(X > n+m) = \dfrac{P(X > n+m)}{P(X > n)} = q^m$, ce qui prouve bien l'égalité demandée. □

17.3.2 Loi de Poisson

Définition 159. On dit que la variable aléatoire X suit une **loi de Poisson de paramètre** $\lambda \in \mathbb{R}_+$ si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$. On le note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Remarque 147. D'après les résultats vus au chapitre précédent sur la série exponentielle, la somme de ces probabilités vaut bien 1. Par ailleurs, la suite $P(X = k)$ converge très vite vers 0 quand k tend vers $+\infty$.

Exemple : La loi de Poisson sert en fait de modélisation à beaucoup de situation concrètes. Elle est par exemple utilisée pour le nombre d'appels reçus (en un temps donné) par un standard téléphonique. On l'appelle parfois également loi des événements rares.

Proposition 135. Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, X admet une espérance et une variance, et $E(X) = V(X) = \lambda$.

Démonstration. $E(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda$, et de même $E(X(X-1)) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda^2\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} = \lambda^2$. On a donc $V(X) = E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$. □

Remarque 148. Mais d'où vient donc cette envie de modéliser certains phénomènes par une loi faisant intervenir des exponentielles et des factorielles qui semblent tout droit sorties du chapeau d'un mathématicien fou ? En fait, il existe une façon presque simple de voir les choses : la loi de Poisson représente une sorte de limite de lois binômiales d'espérance constante, mais pour lesquelles on augmente la valeur du paramètre n (et on diminue donc proportionnellement la valeur de p), comme l'explique le résultat suivant :

Proposition 136. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et (X_n) une suite de variables aléatoires telles que $X_n \sim \mathcal{B}\left(n, \dfrac{\lambda}{n}\right)$. Alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.

Démonstration. C'est un calcul de limite un peu laborieux mais assez joli. Fixons donc un entier $k \in \mathbb{N}$; si $X_n \sim \mathcal{B}\left(n, \dfrac{\lambda}{n}\right)$, on aura donc (pour $n \geqslant k$, puisqu'avant les probabilités seront nulles) $P(X_n = k) = \dbinom{n}{k}\left(\dfrac{\lambda}{n}\right)^k\left(1 - \dfrac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$. Cherchons des équivalents de tout ce qui apparait dans ce produit. Pour le terme du milieu, $\dfrac{\lambda^k}{n^k}$, on ne touche à rien. Pour celui de gauche, on « développe » le coefficient binômial, ce qui donne $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$. Le numérateur de cette fraction est un polynôme (en la variable n, bien entendu, puisque k est fixé pour tout ce calcul) de degré n, et de coefficient dominant n^k. Il est donc équivalent à n^k, et $\dbinom{n}{k} \sim \dfrac{n^k}{k!}$. Enfin, pour le dernier terme, on passe par la forme exponentielle : $\left(1 - \dfrac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = e^{(n-k)\ln(1-\frac{\lambda}{n})}$. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\lambda}{n} = 0$, on a $\ln\left(1 - \dfrac{\lambda}{n}\right) \sim -\dfrac{\lambda}{n}$, donc $(n-k)\ln\left(1 - \dfrac{\lambda}{n}\right) \sim \dfrac{n-k}{n}(-\lambda) \underset{n \to +\infty}{\to} -\lambda$. On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(1 - \dfrac{\lambda}{n}\right) = e^{-\lambda}$, puis en recollant les morceaux $P(X_n = k) \sim \dfrac{n^k}{k!} \times \dfrac{\lambda^k}{n^k} \times e^{-\lambda} \sim e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$, ce qui achève la démonstration. $\square$

Chapitre 18

Polynômes

Le but de cet assez court chapitre est de mettre par écrit quelques notations et propriétés classiques des polynômes que nous avons en fait déjà pour la plupart utilisées plus tôt dans l'année (le principe d'identification notamment). On en profitera également pour insérer, de manière assez exceptionnelle, un peu d'algorithmique dans ce chapitre, qui sera surtout réutilisée lors de nos TD de Pascal.

18.1 Définitions, notations

Définition 160. Un **polynôme** P est un objet formel de la forme $P = \sum_{k=0}^{k=n} a_k X^k$, où $n \in \mathbb{N}$, et $a_k \in \mathbb{R}$, avec de plus $a_n \neq 0$.

Remarque 149. Le X utilisé dans cette définition est souvent appelé **indéterminée** du polynôme P. Il peut être remplacé par n'importe quel objet mathématique pour lequel calculer des puissances a un sens, par exemple une matrice, une fonction ou bien entendu un réel. On aura toutefois souvent tendance à identifier le polynôme P et la **fonction polynômiale** réelle $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{k=n} a_k x^k$.

Définition 161. L'entier n est le **degré** du polynôme P. Les réels a_k sont appelés **coefficients** du polynôme P, le réel a_n est le **coefficient dominant** de P.

Définition 162. On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels. Pour tout entier naturel n, on note $\mathbb{R}_n[X]$ les polynômes de degré inférieur ou égal à n. On notera également $d^\circ(P)$ le degré d'un polynôme P.

Remarque 150. On peut définir sur $\mathbb{R}[X]$ des opérations de somme et de produit qui vérifient toutes les propriétés usuelles (associativité, commutativité, distributivité). L'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par somme (la somme de deux polynômes de degré inférieur ou égal à n est toujours de degré inférieur ou égal à n), ce qui ne serait pas vrai avec l'ensemble des polynômes de degré n. Nous reviendrons plus en détail sur ce type de propriétés en fin d'année lorsque nous étudierons la notion d'espace vectoriel.

Proposition 137. Soient P et Q deux polynômes, alors $d^\circ(P+Q) \leqslant max(d^\circ(P); d^\circ(Q))$; $d^\circ(PQ) = d^\circ(P) + d^\circ(Q)$ et $d^\circ(PoQ) = d^\circ(P) \times d^\circ(Q)$.

Exemple : Dans le cas de la somme, il n'y aura pas égalité dans le cas où P et Q sont de même degré et ont des coefficients dominants opposés. Par exemple, si $P = X^2 - 3X + 2$ et $Q = -X^2 - 5$, on aura $P + Q = -3X - 3$, qui est de degré strictement inférieur au plus grand des degrés de P et Q.

Théorème 34. Un polynôme à coefficients réels correspond à une fonction polynômiale nulle si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

Corollaire 8. Principe d'identification des coefficients.
Deux polynômes P et Q sont égaux (en tant que fonctions polynômiales) si et seulement si tous leurs coefficients sont égaux.

Exemple : C'est un principe qu'on a déjà utilisé de nombreuses fois depuis le début de l'année. Un cas classique d'utilisation de ce résultat est la « décomposition en éléments simples » : on cherche trois réels a, b et c tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{2x^2+3x-3}{x^3+x^2-6x} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-2} + \dfrac{c}{x+3}$. Pour cela, on part du membre de droite et on réduit tout au même dénominateur : $\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-2} + \dfrac{c}{x+3} = \dfrac{a(x-2)(x+3)+bx(x+3)+cx(x-2)}{x(x-2)(x+3)} = \dfrac{ax^2+ax-6a+bx^2+3bx+cx^2-2cx}{x^3+x^2-6x} = \dfrac{(a+b+c)x^2+(a+3b-2c)x-6a}{x^3+x^2-6x}$. Par identification des coefficients sur les deux numérateurs, on obtient les conditions $a+b+c=2$; $a+3b-2c=3$ et $-6a=-3$, d'où $a=\dfrac{1}{2}$, puis $b+c=\dfrac{3}{2}$ et $3b-2c=\dfrac{5}{2}$. En multipliant par deux la première équation et en ajoutant à la deuxième, on a $5b=\dfrac{11}{2}$, donc $b=\dfrac{11}{10}$, puis $c=2-a-b=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$. Finalement, on conclut que $\dfrac{2x^2+3x-3}{x^3+x^2-6x} = \dfrac{1}{2x} + \dfrac{11}{10(x-2)} + \dfrac{2}{5(x+3)}$.

18.2 Évaluation d'un polynôme

Ce paragraphe, de contenu assez original pour un cours de mathématiques, est à mettre en relation avec le TD de Pascal consacré à la complexité. Il vise à présenter un algorithme permettant de calculer l'image d'un réel par une fonction polynômiale de façon plus efficace que la méthode naïve qui est la première à venir à l'esprit.

18.2.1 Algorithme naïf

Soient donc un polynôme $P = \sum_{k=0}^{k=n} a_k X^k$, et un réel x. On cherche à calculer le plus efficacement possible la valeur de $P(x)$. La méthode « bête » consiste à calculer toutes les puissances de x jusqu'à x^n, puis à multiplier chaque puissance par le coefficient de P correspondant, et enfin à faire la somme de tous les nombres ainsi obtenus. Cette méthode nécessite d'effectuer $2n$ multiplications ($n-1$ pour obtenir les puissances de x allant de x^2 à x^n, puis $n+1$ pour multiplier chacune des puissances par un coefficient), et n additions. Une implémentation possible en Pascal, à l'aide de tableaux, est donnée par le programme suivant :

```
PROGRAM naif;
USES wincrt;
VAR p : ARRAY[0..99] OF real; n,i : integer; a,x,z : real;
BEGIN
WriteLn('Quel est le degré de votre polynôme ?');
ReadLn(n);
FOR i := 0 TO n DO
BEGIN
WriteLn('Coefficient du terme de degré ',i,' ?');
ReadLn(p[i]);
```

```
END ;
a := p[0] ; z := 1 ;
WriteLn('Quelle est la valeur de x ?') ;
ReadLn(x) ;
FOR i := 1 TO n DO
BEGIN
z := z*x ;
a := a+p[i]*z ;
END ;
WriteLn('P(',x,')=',a) ;
END.
```

18.2.2 Algorithme de Hörner

La deuxième méthode que nous allons maintenant présenter consiste simplement à faire les calculs dans un ordre subtilement différent, qui permet d'économiser une partie des multiplications. Elle est fondée sur le résultat suivant :

Proposition 138. Soit $P = \sum_{k=0}^{k=n} a_k X^k$ un polynôme et x un réel, alors $P(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + x(\dots(a_{n-1} + xa_n)))$.

Exemple : Soit $P(x) = 3x^4 - x^3 + 5x^2 - 4x + 6$. On cherche à calculer $P(2)$. La méthode de Hörner consiste à partir de la valeur de a_n, ici 3 puis, à chaque étape, de multiplier la valeur précédente par x et d'ajouter le coefficient qui suit dans l'écriture de P par puissances descendantes. Ainsi, on calculera ici successivement $3 \times 2 - 1 = 5$; $5 \times 2 + 5 = 15$; $15 \times 2 - 4 = 26$; $26 \times 2 + 6 = 58$. On en conclut que $P(2) = 58$.

Cet algorithme est effectivement plus efficace que l'algorithme naïf puisqu'on effectue seulement n multiplications et n additions (une multiplication et une addition à chaque étape). Il est par ailleurs plus facile à programmer en Pascal, et c'est l'algorithme utilisé par toutes les machines qui ont besoin de calculer des images par des fonctions polynômiales.

```
PROGRAM Horner ;
USES wincrt ;
VAR p : ARRAY[0..99] OF real ; a,x : real ; i,n : integer ;
BEGIN
WriteLn('Quel est le degré de votre polynôme ?') ;
ReadLn(n) ;
FOR i := 0 TO n DO
BEGIN
WriteLn('Coefficient du terme de degré ',i,' ?') ;
ReadLn(p[i]) ;
END ;
WriteLn('Quelle est la valeur de x ?') ;
ReadLn(x) ;
a := p[n] ;
FOR i := n-1 DOWNTO 0 DO a := a*x+p[i] ;
WriteLn('P(',x,')=',a) ;
END.
```

18.3 Factorisation

Définition 163. Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]^2$. On dit que P est **divisible** par Q (ou que Q **divise** P) s'il existe un polynôme $R \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = QR$.

Théorème 35. Division euclidienne sur les polynômes.
Soient $A, B \in \mathbb{R}[X]^2$, alors il existe un unique couple de polynômes $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2$ tels que $A = BQ + R$, et $d^\circ(R) < d^\circ(B)$.

Définition 164. Le polynôme Q est appelé **quotient** de la division euclidienne de A par B. Le polynôme R est le **reste** de cette même division euclidienne.

Exemple : Une division euclidienne de polynômes peut se présenter sous le même forme que la division euclidienne d'entiers que vous avez apprise à l'école primaire. On cherche le terme dominant du quotient, on le multiplie par le diviseur puis on soustrait le résultat obtenu du dividende, et on recommence jusqu'à obtenir le terme de degré 0 du quotient. Ainsi, pour effectuer la division euclidienne de $X^4 - 3X^3 + 5X^2 + X - 3$ par $X^2 - 2X + 1$, on peut présenter le calcul sous la forme suivante :

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr|l}
 & X^4 & - & 3X^3 & + & 5X^2 & + & X & - & 3 & X^2 - 2X + 1 \\ \cline{11-11}
- & (X^4 & - & 2X^3 & + & X^2) & & & & & X^2 - X + 2 \\
 & & - & X^3 & + & 4X^2 & + & X & - & 3 & \\
 & & - & (-X^3 & + & 2X^2 & - & X) & & & \\
 & & & & & 2X^2 & + & 2X & - & 3 & \\
 & & & & - & (2X^2 & - & 4X & + & 2) & \\
 & & & & & & & 6X & - & 5 &
\end{array}$$

Conclusion : $X^4 - 3X^3 + 5X^2 + X - 3 = (X^2 - X + 2)(X^2 - 2X + 1) + 6X - 5$.

Définition 165. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $x \in \mathbb{R}$. On dit que x est une **racine** du polynôme P si $P(x) = 0$.

Proposition 139. Un réel a est racine du polynôme P si et seulement si $X - a$ divise P.

Démonstration. C'est une conséquence de la division euclidienne. Si on effectue la division de P par $X - a$, on sait que le reste sera de degré strictement inférieur à celui de $X - a$, donc sera une constante. Autrement dit, $\exists k \in \mathbb{R}$, $P = Q(X - a) + k$. On a donc $P(a) = 0 \Leftrightarrow Q(a)(a - a) + k = 0 \Leftrightarrow k = 0$. Autrement dit, a est une racine de P lorsque le reste de la division de P par $X - a$ est nul, donc quand P est divisible par $X - a$. $\square$

Exemple : on a déjà fréquemment utilisé cette propriété pour factoriser des polynômes de degré 3 possédant une récine « évidente ». Soit par exemple $P = 2X^3 - 3X^2 + 5X - 4$. On constate que 1 est racine évidente de P : $P(1) = 2 - 3 + 5 - 4 = 0$, donc P est factorisable par $X - 1$: $P = (X - 1)(aX^2 + bX + c) = aX^3 + (b - a)X^2 + (c - b)X - c$. Par identification, on obtient $a = 2$; $b - a = -3$; $c - b = 5$ et $-c = -4$, donc $a = 2$; $b = -1$ et $c = 4$, soit $P = (X - 1)(2X^2 - X + 4)$. Ce dernier facteur ayant un discriminant négatif, P n'admet pas d'autre racine que 1.

Définition 166. Soit P un polynôme et a une racine de P. On dit que a est une racine **d'ordre de multiplicité** $k \in \mathbb{N}^*$ si $(X - a)^k$ divise P.

Proposition 140. Une racine a est d'ordre de multiplicité k pour P si et seulement si $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(k-1)}(a) = 0$.

Remarque 151. La notation de dérivée pour un polynôme réel correspond à la dérivée de la fonction polynômiale associée. On peut en fait définir formellement le polynôme dérivé d'un polynôme sans passer par une interprétation en terme de fonctions. On notera également qu'on emploie souvent plus simplement le terme d'ordre ou celui de multiplicité à la place d'ordre de multiplicité.

Exemple : Considérons le polynôme $P = X^4 - 2X^3 - 19X^2 + 68X - 60$ et constatons ensemble que 2 est une racine double de P. En effet, on a $P(2) = 16 - 2\times 8 - 19\times 4 + 68\times 2 - 60 = 16 - 16 - 76 + 136 - 60 = 0$; de plus, $P' = 4X^3 - 6X^2 - 38X + 68$, donc $P'(2) = 4\times 8 - 6\times 4 - 38\times 2 + 68 = 32 - 24 - 76 + 68 = 0$. on peut en déduire, via la proposition précédente, que P est factorisable par $(X-2)^2$. Effectuons une petite division euclidienne pour obtenir cette factorisation :

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrr|l}
 & X^4 & - & 2X^3 & - & 19X^2 & + & 68X & - & 60 & X^2-4X+4 \\ \cline{11-11}
- & (X^4 & - & 4X^3 & + & 4X^2) & & & & & X^2+2X-15 \\
 & & & 2X^3 & - & 23X^2 & + & 68X & - & 60 & \\
 & & - & (2X^3 & - & 8X^2 & + & 8X) & & & \\
 & & & & - & 15X^2 & + & 60X & - & 60 & \\
 & & & & - & (-15X^2 & + & 60X & - & 60) & \\
 & & & & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

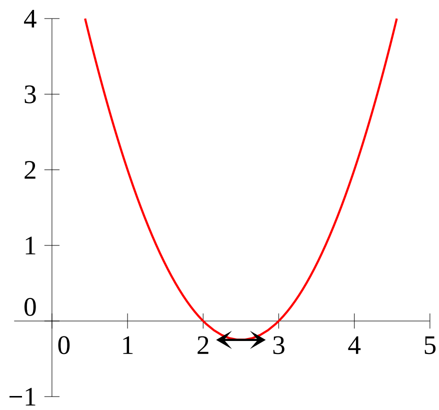
On a donc $P(X) = (X-2)^2(X^2+2X-15)$. Le deuxième facteur a pour discriminant $\Delta = 4+60 = 64$, et admet deux racines réelles $x_1 = \dfrac{-2-8}{2} = -5$ et $x_2 = \dfrac{-2+8}{2} = 3$. On peut donc factoriser P sous la forme $P(X) = (X-2)^2(X-3)(X+5)$. On ne risque pas de factoriser plus puisqu'il ne reste que des facteurs de degré 1. En général, on a le résultat suivant :

Théorème 36. Un polynôme de degré n admet au plus n racines réelles. Plus précisément, la somme des multiplictés de ses racines est au plus égale à n.

18.4 Représentation graphique de fonctions polynômiales

18.4.1 Rappels sur les polynômes du second degré

La courbe représentative d'une fonction polynômiale de degré 2, donnée par une équation du type $P(x) = ax^2 + bx + c$, est une parabole dont la concavité est donnée par le signe de a (convexe si $a > 0$, concave si $a < 0$), et de sommet atteint pour $x = -\dfrac{b}{2a}$. Si $b^2 - 4ac > 0$, la courbe coupe l'axe des abscisses en deux points symétriques par rapport au sommet de la parabole. Un exemple de courbe, pour la fonction $f(x) = x^2 - 5x + 6$ (sommet atteint pour $x = \dfrac{5}{2}$) :



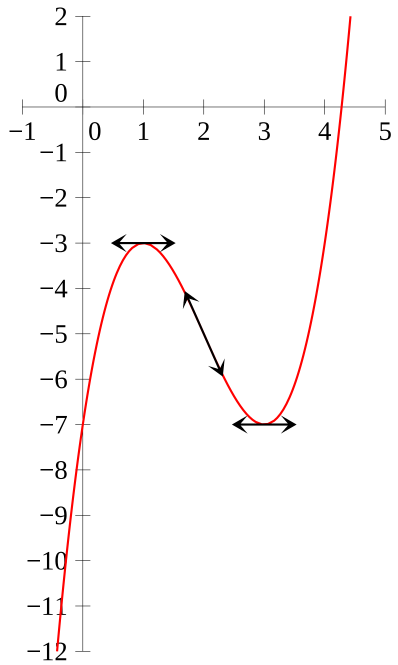
18.4.2 Exemple d'étude de fonction polynômiale de degré 3

Une fonction f polynômiale de degré 3 a pour dérivée f' une fonction polynômiale de degré 2. L'allure de la courbe représentative de f sera liée au signe du discriminant de f'. Si ce discriminant est positif ou nul, la fonction est strictement monotone (la seule différence dans le cas du discriminant nul est qu'on aura une tangente horizontale au point d'inflexion de la courbe), ressemblant à celle de la fonction cube. Si le discriminant est négatif, la fonction changera deux fois de sens de variation, et admettra accessoirement un unique point d'inflexion situé exactement entre ses deux extrema.

Prenons ainsi $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 7$. On a $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3)$. Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4$ et admet deux racines $x_1 = \dfrac{4-2}{2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{4+2}{2} = 3$. On peut s'amuser à vérifier que la dérivée seconde $f''(x) = 6x - 12$ s'annule pour $x = 2$, donc entre les deux racines de f' comme prévu (on peut également calculer $f'(2) = -3$ pour tracer la tangente correspondante sur la courbe). De plus, $f(1) = -3$ et $f(3) = 27 - 54 + 27 - 7 = -7$, d'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-7	$\nearrow$	$+\infty$

Et la petite courbe qui va avec :



18.4.3 Exemple d'étude de fonction polynômiale de degré 4

On peut assez aisément généraliser les résultats du paragraphe précédent en utilisant la borne sur le nombre de racines d'un polynôme en fonction de son degré :

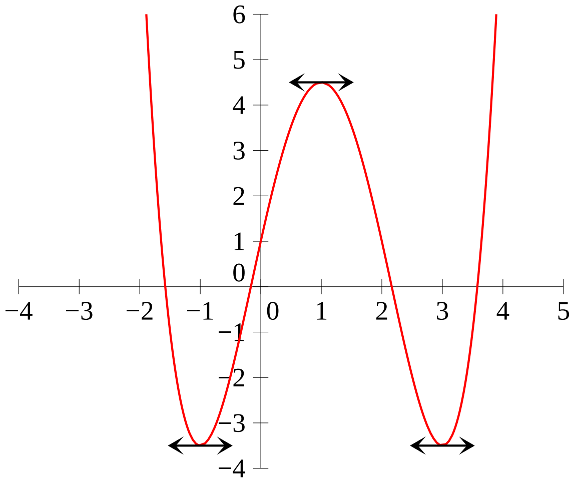
Proposition 141. Une fonction polynômiale de degré n change de variations au plus $n-1$ fois. Elle admet au plus $n-2$ points d'inflexion.

Il est par contre difficile en général d'étudier des fonctions polynômiales de degré supérieur ou égal à 4 puisque l'étude du signe de la dérivée ne sera pas faisable de façon exacte en général. Donnons tout de même un dernier exemple où la dérivée a le bon goût d'admettre une racine évidente : soit $f(x) = \dfrac{x^4}{2} - 2x^3 - x^2 + 6x + 1$. La dérivée de f est $f'(x) = 2x^3 - 6x^2 - 2x + 6 = 2(x^3 - 3x^2 - x + 3)$. Cette dérivée a pour racine évidente 1, on peut donc écrire $f'(x) = 2(x-1)(ax^2 + bx + c) = 2(ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c)$. Par identification, on obtient $a = 1$; $b - a = -3$; $c - b = -1$ et $-c = 3$, donc $a = 1$; $b = -2$ et $c = -3$. On a donc $f'(x) = 2(x-1)(x^2 - 2x - 3)$. Ce dernier facteur a pour discriminant $\Delta = 4 + 12 = 16$, et a pour racines $x_1 = \dfrac{2-4}{2} = -1$ et $x_2 = \dfrac{2+4}{2} = 3$.

Finalement, $f'(x) = 2(x-1)(x+1)(x-3)$. Comme $f(1) = \frac{9}{2}$; $f(-1) = -\frac{7}{2}$ et $f(3) = -\frac{7}{2}$, on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{7}{2}$	$\nearrow$	$\frac{9}{2}$	$\searrow$	$-\frac{7}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Avec un peu de courage, on peut rechercher les points d'inflexion : $f''(x) = 6x^2 - 12x - 2 = 2(3x^2 - 6x - 1)$. Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 36 + 12 = 48$ et admet donc deux racines pas suffisamment simples pour qu'on aie envie de pousser les calculs plus loin. Ici, les deux points d'inflexion seront symétriques par rapport au minimum de la courbe, mais en général ce ne sera pas le cas pour une fonction de degré 4. Pour terminer, voici la courbe :



Chapitre 19

Couples de variables aléatoires

Dans ce dernier chapitre de probabilités de l'année, nous allons introduire l'étude de couples de variables aléatoires, c'est-à-dire l'étude simultanée de deux variables aléatoires. Rien de très nouveau au niveau des techniques utilisées, le but est de présenter un peu de vocabulaire et faire quelques calculs sur trois exemples détaillés.

19.1 Loi d'un couple de variables aléatoires

Définition 167. Un couple de variables aléatoires (X, Y) est la donnée de deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. Une façon plus technique de voir les choses est de dire qu'un couple est une application $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$.

Exemple 1 : On lance simultanément deux dés (ça faisait longtemps), et on note X le plus grand des deux chiffres obtenus et Y le plus petit (au sens large).

Exemple 2 : Une urne contient 4 boules blanches, 3 boules vertes et 2 boules bleues. On tire 3 boules dans l'urne et on note X le nombre de boules blanches obtenues et Y le nombre de boules vertes.

Exemple 3 : On effectue une suite de lancers avec une pièce non équilibrée pour laquelle la probabilité d'obtenir Pile vaut $\dfrac{3}{4}$ (et celle d'obtenir face vaut donc $\dfrac{1}{4}$). On note X la longueur de la première chaîne obtenue, c'est-à-dire le nombre de tirages initiaux donnant le même résultat que le premier tirage. On note Y la longueur de la deuxième chaîne. Ainsi, si les premiers tirages donnent $PPPPFFP$ (peu importe la suite), on aura $X = 4$ et $Y = 2$.

Définition 168. La **loi conjointe** d'un couple de variables aléatoires (X, Y) est la donnée des probabilités $P((X = i) \cap (Y = j))$, pour $i \in X(\Omega)$ et $j \in Y(\Omega)$. On l'appelle aussi plus simplement loi du couple (X, Y).

Remarque 152. Certaines des probabilités $P((X = i) \cap (Y = j))$ peuvent être nulles, même si $P(X = i)$ et $P(Y = j)$ sont toutes les deux non nulles.

Remarque 153. Cette loi est souvent présentée sous forme d'un tableau à double entrée, les valeurs prises par X apparaissant par exemple en ligne et celles prises par Y en colonne.

Exemple 1 : On a $X(\Omega) = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$; $Y(\Omega) = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, et la loi conjointe se calcule sans difficulté : $P((X = i) \cap (Y = j)) = 0$ si $i < j$ (le plus grand nombre ne peut pas être inférieur au plus petit), $P((X = i) \cap (Y = y_j)) = \dfrac{1}{36}$ si $i = j$ (le seul tirage favorable sur les 36 possibles est le tirage (i, i), et $P((X = i) \cap (Y = y_j)) = \dfrac{1}{18}$ si $i > j$ (les deux tirages (i, j) et (j, i) sont possibles), ce qu'on peut résumer par le tableau suivant (X en ligne, Y en colonne) :

$Y\backslash X$	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
2	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
3	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
4	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
5	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$

Exemple 2 : On a ici $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$ et $Y(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$. On ne peut bien sûr avoir $X+Y > 3$ puisqu'on ne tire que trois boules. Lorsque cela a un sens, on a $P((X = i) \cap (Y = j)) = \dfrac{\binom{4}{i}\binom{3}{j}\binom{2}{3-i-j}}{\binom{9}{3}}$, ce qui donne le tableau suivant :

$Y\backslash X$	0	1	2	3
0	0	$\frac{4}{84}$	$\frac{12}{84}$	$\frac{4}{84}$
1	$\frac{3}{84}$	$\frac{24}{84}$	$\frac{18}{84}$	0
2	$\frac{6}{84}$	$\frac{12}{84}$	0	0
3	$\frac{1}{84}$	0	0	0

Remarque 154. On note parfois l'évenement $(X = i) \cap (Y = j)$ sous la forme $(X, Y) = (i, j)$.

Proposition 142. Les événements $(X = i) \cap (Y = j)$ pour i parcourant $X(\Omega)$ et j parcourant $Y(\Omega)$ forment un système complet d'événements. On a donc $\displaystyle\sum_{i \in X(\Omega); j \in Y(\Omega)} P((X = i) \cap (Y = j)) = 1$.

Démonstration. La preuve est la même que dans le cas où on n'a qu'une variable aléatoire. Les événements sont manifestement disjoints, et leur union vaut Ω. □

Définition 169. Si (X, Y) est un couple de variables aléatoires, les lois de X et de Y sont appelées **lois marginales** du couple.

Proposition 143. Si (X, Y) est un couple de variables aléatoires discrètes, on peut obtenir les lois marginales à partir de la loi conjointe : $\forall i \in X(\Omega)$, $P(X = i) = \displaystyle\sum_{j \in Y(\Omega)} P((X = i) \cap (Y = j))$ (et symétriquement pour la loi de Y).

Démonstration. Cela découle immédiatement du fait que les événements $Y = j$ forment un système complet d'événements (il suffit d'écrire la formule des probabilités totales). □

Exemple 1 : Pour connaitre les lois marginales à partir du tableau précédemment établi, c'est très simple, il suffit de faire les sommes des lignes du tableau (pour la loi de Y) ou des colonnes (pour celle de X) :

$Y\backslash X$	1	2	3	4	5	6	$P(Y = j)$
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{11}{36}$
2	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{9}{36}$
3	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{7}{36}$
4	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{5}{36}$
5	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{3}{36}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
$P(X = i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	

Exemple 2 : De façon tout à fait similaire, on va retrouver des lois hypergéométriques pour X et Y :

$Y\backslash X$	0	1	2	3	$P(Y=j)$
0	0	$\frac{4}{84}$	$\frac{12}{84}$	$\frac{4}{84}$	$\frac{20}{84}$
1	$\frac{3}{84}$	$\frac{24}{84}$	$\frac{18}{84}$	0	$\frac{45}{84}$
2	$\frac{6}{84}$	$\frac{12}{84}$	0	0	$\frac{18}{84}$
3	$\frac{1}{84}$	0	0	0	$\frac{1}{84}$
$P(X=i)$	$\frac{10}{84}$	$\frac{40}{84}$	$\frac{30}{84}$	$\frac{4}{84}$	

Remarque 155. On vient de voir qu'on pouvait déduire les lois marginales de la loi conjointe. Le contraire n'est pas possible en général.

Définition 170. La **loi conditionnelle de X sachant** $Y=j$ est la loi de la variable Z définie par $\forall i \in X(\Omega)$, $P(Z=i)=P_{Y=j}(X=i)$. On définit de même les lois conditionnelle de Y sachant $X=i$.

Exemple 3 : Dans le cas de variables infinies, on ne peut naturellement plus écrire la loi sous forme de tableau, et les calculs de lois marginales ou conditionnelles sont un peu plus formels. La loi de X se calcule assez aisément : $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$ et on aura $X=k$ si la suite de lancers commence par k Pile suivi d'une face ou par k face suivis d'un Pile, cas incompatibles qui donnent $P(X=k)=\left(\frac{3}{4}\right)^k \times \frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^k \times \frac{3}{4}=\frac{3^k+3}{4^{k+1}}$.

Pour déterminer la loi de Y, le plus simple est de passer par la loi de couple : on aura $(X,Y)=(i,j)$ si on débute par i Pile, puis j Face et à nouveau un Pile, ou bien i Face, j Pile et un Face, soit une probabilité de $P((X=i)\cap(Y=j))=\left(\frac{3}{4}\right)^i\left(\frac{1}{4}\right)^j \times \frac{3}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^i\left(\frac{3}{4}\right)^j \times \frac{1}{4}=\frac{3^{i+1}+3^j}{4^{i+j+1}}$. On utilise ensuite la formule des probabilités totales pour obtenir la loi de Y, avec le système complet d'évènements $(X=i)_{i\geqslant 1}$: $P(Y=j)=\sum_{i=1}^{+\infty} P(X=i)\times P_{X=i}(Y=j)=\sum_{i=1}^{+\infty} P((X=i)\cap(Y=j))=\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{3^{i+1}+3^j}{4^{i+j+1}}=\frac{1}{4^j}\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{i+1}+\left(\frac{3}{4}\right)^j\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{4^{i+1}}=\frac{1}{4^j}\left(\frac{3}{4}\right)^2\frac{1}{1-\frac{3}{4}}+\left(\frac{3}{4}\right)^j\frac{1}{4^2}\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{3^2+3^{j-1}}{4^{j+1}}$.
On constate que la loi de Y n'est pas la même que celle de X (ce qui n'était pas vraiment évident a priori).

Si on souhaite voir à quoi ressemblent les lois conditionnelles, on a par exemple comme loi conditionnelle à $Y=j$ fixé : $P_{Y=i}(X=i)=\frac{P((X=i)\cap(Y=j))}{P(Y=j)}=\frac{3^{i+1}+3^j}{4^{i+j+1}}\times\frac{4^{j+1}}{3^2+3^{j-1}}=\frac{3^{i+1}+3^j}{4^i(3^2+3^{j-1})}$.

19.2 Indépendance de variables aléatoires

Définition 171. Deux variables aléatoires sont dites **indépendantes** si tous les couples d'événements $X=i$, $Y=j$ sont indépendants. Autrement dit, $\forall i \in X(\Omega)$, $\forall j \in Y(\Omega)$, $P((X=i)\cap(Y=j))=P(X=i)P(Y=j)$.

Exemple : Un exemple idiot pour illustrer. Si on tire deux dés simultanément et qu'on note X le résultat du premier dé et Y celui du deuxième dé, X et Y sont des variables aléatoires indépendantes. On a $P((X=i)\cap(Y=j))=\frac{1}{36}$ pour tout $1\leqslant i\leqslant 6$ et $1\leqslant j\leqslant 6$.

Exemple : Par contre, toujours dans le cas de l'inépuisable lancer de deux dés, si on prend pour X la somme des deux dés et pour Y leur produit, les deux variables ne sont pas indépendantes. On a par exemple $P(X=8)=\frac{5}{36}$; $P(Y=15)=\frac{1}{18}$, et $P((X=8)\cap(Y=15))=\frac{1}{18}$.

Remarque 156. Deux variables aléatoires sont indépendantes si et seulement si toutes les lois conditionnelles de X sachant $Y=j$ sont identiques à la loi de X.

Remarque 157. Dans le cas où X et Y sont des variables aléatoires indépendantes, on peut obtenir la loi conjointe du couple (X, Y) à partir des deux lois marginales.

Exemples : Dans nos deux premiers exemples, on constate sans difficulté et sans surprise que les variables X et Y ne sont pas indépendantes (le fait qu'on ait des 0 dans la tableau de la loi conjointe suffit à imposer qu'il n'y ait pas indépendance).
Le troisième exemple est moins intuitif. Le calcul des lois conditionnelles, qui sont distinctes de la loi marginale de X, prouve qu'il n'y a pas non plus indépendance. Une autre façon de voir les choses est de trouver un contre-exemple à l'indépendance des évènements $X = i$ et $Y = j$. On peut ici calculer simplement $P(X = 1) = \dfrac{3+3}{4^2} = \dfrac{3}{8}$; $P(Y = 1) = \dfrac{3^2+1}{4^2} = \dfrac{5}{8}$; et $P((X = 1) \cap (Y = 1)) = \dfrac{3^2+3}{4^3} = \dfrac{3}{16} \neq \dfrac{3}{8} \times \dfrac{5}{8}$. Les courageux vérifieront qu'en effectuant la même expérience avec une pièce équilibrée, on obtiendrait deux variables aléatoires indépendantes.
Un autre calcul intéressant sur cette expérience (quoique ne faisant pas vraiment intervenir le fait qu'on travaille sur un couple) est celui des espérances de X et de Y : on a (sous réserve d'existence) $E(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k \times \frac{3^k+3}{4^{k+1}} = \frac{3}{4^2}\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} + \frac{3}{4^2}\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} = \frac{3}{4^2}\left(\frac{1}{(1-\frac{3}{4})^2} + \frac{1}{(1-\frac{1}{4})^2}\right) = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$.
Pour Y, on a $E(Y) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k \times \frac{3^2+3^{k-1}}{4^{k+1}} = \frac{3^2}{4^2}\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} + \frac{1}{4^2}\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} = \frac{3^2}{4^2} \times \frac{1}{(1-\frac{1}{4})^2} + \frac{1}{4^2} \times \frac{1}{(1-\frac{3}{4})^2} = 1 + 1 = 2$. Encore une fois, les courageux pourront faire le calcul avec une pièce équilibrée et constater que dans ce cas les deux variables ont pour espérance 2.

Proposition 144. Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, on a $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

Remarque 158. On peut calculer facilement la variance d'une loi binomiale à partir de la proposition précédente. En effet une loi binomiale de paramètre (n, p) est la somme de n variables aléatoires indépendantes de paramètre p, qui ont chacune pour variance $p(1-p)$. La variance de la binomiale vaut donc $np(1-p)$. Pour l'hypergéométrique, c'est plus compliqué, puisque la loi pour chaque tirage dépend des résultats des tirages précédents.

19.3 Opérations et variables aléatoires

Profitons de ce petit chapitre pour rappeler quelques cas particuliers de fonctions de deux variables aléatoires pour lesquelles on sait calculer facilement la loi. Commençons par le cas de la somme de deux variables :

Proposition 145. Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, la loi de leur somme $X+Y$ est donné par $P(X+Y = k) = \sum P(X = i)P(Y = k-i)$ (la somme portant sur les valeurs de i pour lesquelles $P(X = i)$ et $P(Y = k-i)$ sont toutes deux non nulles).

Démonstration. On a via la formule des probabilités totales
$P(X+Y = k) = \sum P(X = i)_{i\in X(\Omega)} P_{X=i}(X+Y = k)$. Or, $P_{X=i}(X+Y = k) = P_{X=i}(Y = k-i)$ donc $P(X+Y = k) = \sum P_{i\in X(\Omega)}((X = i) \cap (Y = k-i))$. $\square$

Exemple : Deux variables aléatoires X et Y suivant des lois uniformes respectivement sur $\{1; 2; \dots; 6\}$ et sur $\{1; 2; 3; 4\}$ (par exemple les résultats d'un lancer de dés à six faces et à quatre faces). La loi de $X+Y$ se calcule aisément :

i	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X+Y=i)$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$

Proposition 146. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois binomiales $\mathcal{B}_{m,p}$ et $\mathcal{B}_{n,p}$ alors $X+Y$ suit une loi binomiale de paramètre $\mathcal{B}_{m+n,p}$.

Démonstration. D'après la propriété précédente, on a $P(X+Y=k) = \sum_{i=0}^{i=k} P(X=i)P(Y=k-i) = \sum_{i=0}^{i=k} \binom{n}{i} p^i(1-p)^{n-i} \binom{m}{k-i} p^{k-i}(1-p)^{m-k+i} = p^k(1-p)^{n+m-k} \sum_{i=0}^{i=k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k} p^k(1-p)^{n+m-k}$ en utilisant la formule de Vandermonde. On reconnait bien une loi binomiale de paramètre $(n+m,p)$. □

Proposition 147. Soient X et Y deux variables indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ, alors $X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.

Démonstration. C'est encore un calcul de somme : $P(X+Y=k) = \sum_{i=0}^{i=k} P(X=i)P(Y=k-i) = \sum_{i=0}^{i=k} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} \times \frac{e^{-\mu}\mu^{k-i}}{(k-i)!} = e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{i=0}^{i=k} \frac{1}{i!(k-i)!}\lambda^i\mu^{k-i} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \sum_{i=0}^{i=k} \binom{k}{i} \lambda^i \mu^{k-i} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}(\lambda+\mu)^k}{k!}$ via la formule du binôme de Newton. On reconnait bien une loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$. □

Autre exemple où on sait calculer la loi, le cas du minimum (ou du maximum) de deux variables aléatoires, où il est plus facile de passer par la fonction de répartition :

Proposition 148. Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes de fonctions de répartitions respectives F_X et F_Y, alors la fonction de répartition de la variablé aléatoire $Z = \max(X,Y)$ est donnée par $F_Z = F_X F_Y$.

Démonstration. Par définition $F_Z(x) = P(Z \geqslant x)$. Mais dire que $\max(X,Y) \leqslant x$ est équivalent à dire que $X \leqslant x$ et que $Y \leqslant x$, donc $F_Z(x) = P((X \leqslant x) \cap (Y \leqslant x)) = P(X \leqslant x) \times P(Y \leqslant x) = F_X(x)F_Y(x)$. □

Exemple : Reprenons une nouvelle fois le lancer de deux dés. On note X le résultat du premier dé et Y celui du deuxième dé. Les deux fonctions de répartition sont F_X et F_Y sont les mêmes : sur $[-\infty;1[$, $F_X(x) = 0$; sur $[1;2[$, $F_X(x) = \frac{1}{6}$, sur $[2;3[$, $F_X(x) = \frac{2}{6}$ etc. Soit $Z = \max(X,Y)$. La fonction de répartition de Z est donc donnée par : $[1;2[$, $F_Z(x) = \frac{1}{36}$; $[2;3[$, $F_Z(x) = \frac{4}{36}$ etc. On peut ainsi retrouver la loi du minimum par une méthode différente de celle vue un peu plus haut dans ce même chapitre (rappelons au cas où que pour passer de la fonction de répartition à la loi, on utilise la formule $P(Z=i) = F_Z(i) - F_Z(i-1)$:

i	1	2	3	4	5	6
$P(Z=i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

Remarque 159. Une fois connu le maximum de deux variables aléatoires, on peut en déduire le minimum en utilisant le fait que $X+Y = \min(X+Y) + \max(X+Y)$. On peut aussi utiliser le fait que si on pose $G_X(x) = 1 - F_X(x) = P(X > x)$ (une sorte d'anti-fonction de répartition), alors, si $U = \min(X,Y)$, on a $G_U(x) = G_X(x)G_Y(x)$ (ce qui se démontre de façon très similaire à ce qu'on vient de faire).

Chapitre 20

Espaces vectoriels

Introduction

Pour ce dernier chapitre du cour, nous allons tenter d'introduire et commencer à étudier des notions que vous reverrez beaucoup plus en détail l'an prochain. En gros, l'idée pour nous est surtout de voir les matrices sous un autre angle, comme une façon de caractériser certaines applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. Pour cela, nous allons introduire l'outil extrêmement utile mais assez formel que représentent les espaces vectoriels. Pas grand chose à voir avec les vecteurs tels que vous pouvez en avoir vu dans votre jeunesse, il s'agit de généraliser le calcul sur les coordonnées (que vous avez déjà abordé dans le cadre des vecteurs du plan ou, pour ceux qui ont fait la spécialité maths, de l'espace) à des ensembles très généraux, les fameux espaces vectoriels.

20.1 Espaces et sous-espaces vectoriels

Définition 172. Un ensemble E est un **espace vectoriel réel** s'il est muni d'une addition $+$: $E \times E \to E$ et d'un produit par les réels $.$: $\mathbb{R} \times E \to E$ vérifiant les conditions suivantes :

- L'addition est associative ($\forall x, y, z \in E^3$, $(x+y)+z = x+(y+z)$) et commutative ($\forall x, y \in E^2$, $x + y = y + x$).
- Il existe un élément neutre pour l'addition, c'est-à-dire un élément de E noté 0 tel que $\forall x \in E$, $0 + x = x + 0 = 0$.
- Tout élément x de E possède un opposé dans E, c'est-à-dire un élément y tel que $x + y = y + x = 0$ (on note alors $y = -x$).
- Le produit est compatible avec le produit des réels : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}^2$, $\forall x \in E$, $\lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x$.
- Le réel 1 est un élément neutre pour le produit : $\forall x \in E$, $1.x = x$.
- Le produit est doublement distributif par rapport à l'addition : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}^2$, $\forall x \in E$, $(\lambda+\mu).x = \lambda.x + \mu.x$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x, y \in E^2$, $\lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$.

Les éléments de E sont alors appelés **vecteurs**, et les éléments de $\mathbb{R}$ par lesquels on peut les multiplier sont appelés **scalaires**.

Remarque 160. Ces conditions peuvent paraitre complexes, mais on ne les vérifie jamais en pratique, et on peut en fait les résumer simplement par le fait qu'il y a deux opérations sur notre ensemble E : une addition (qui prend deux éléments de E et sort un troisième élément de E), et un produit **par des réels** (et non pas cette fois un produit d'éléments de E) qui vérifient des conditions assez naturelles.

Exemples :

- L'ensemble des suites réelles est un espace vectoriel réel, la somme de deux suites (u_n) et (v_n) étant la suite $(u_n + v_n)$, et le produit d'une suite (u_n) par un réel λ étant la suite (λu_n). De même, l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel.
- L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ des matrices à n lignes et p colonnes est un espace vectoriel (on a prouvé toutes les propriétés de la définition précédente dans le cas des matrices lors de notre premier

chapitre consacré au calcul matriciel). Attention toutefois, l'ensemble de toutes les matrices (sans spécification de taille) n'est pas un espace vectoriel (on ne peut pas additionner deux matrices de taille différente).

- L'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n est un espace vectoriel. L'ensemble $\mathbb{R}[X]$ de tous les polynômes à coefficients réels est aussi un espace vectoriel (mais pas celui des polynômes de degré n, car la somme de deux tels polynômes n'est pas forcément un polynôme de même degré).
- L'ensemble des vecteurs dans le plan (ou dans l'espace) est un espace vectoriel. On sait faire la somme de deux vecteurs (via la relation de Chasles ou la règle du parallélogramme), et faire le produit d'un vecteur par un réel. Comme vous avez appris à le faire au lycée, on peut identifier ces vecteurs à des couples de réels (dans le cas du plan) ou des triplets de réels (dans l'espace) grâce à l'introduction de coordonnées une fois un repère choisi. Plus généralement, l'ensemble $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel, dont on notera les éléments sous forme de coordonnées (comme vous aviez l'habitude de le faire dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$), la plupart du temps en ligne et non en colonne.

Définition 173. Soit E un espace vectoriel réel. Un sous-ensemble F de E est un **sous-espace vectoriel** s'il est lui-même un espace vectoriel (muni de l'addition et de la multiplication définies sur E).

Proposition 149. F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si
- $0 \in F$
- $\forall x, y \in F$, $x + y \in F$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in F$, $\lambda.x \in F$.

Remarque 161. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E s'il est non vide et stable par addition et par multiplication par un réel. La proposition est évidente. On peut d'ailleur remplacer les deux dernières conditions par la suivante : $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (x, y) \in F^2$, $\lambda x + y \in F$ (ce qui permet de faire une seule vérification au lieu de deux).

Exemples : L'ensemble des matrices diagonales dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel. En effet, la somme de deux matrices diagonales est diagonale, et le produit d'une matrice diagonale par un réel est diagonale.
Dans $\mathbb{R}^3$, l'ensemble $F = \{(x\ y\ z) \mid x+y+z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel mais $G = \{(x\ y\ z) \mid x+y+z = 1\}$ n'en est pas un (il ne contient pas 0, et n'est stable ni par somme ni par produit par un réel !).
L'ensemble des polynomes de degré inférieur ou égal à n est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des polynomes.
Exercice Soit E l'espace vectoriel des suites réelles. Parmi tous les sous-ensembles suivants, déterminer lesquels sont des sous-espaces vectoriels de E.

1. Les suites constantes.
2. Les suites croissantes.
3. Les suites monotones.
4. Les suites ayant une limite finie en $+\infty$.
5. Les suites géométriques.
6. Les suite récurrentes linéaires d'ordre 2.
7. Les suites périodiques.

Corrigé de l'exercice

1. C'est un sous-ev (contient la suite nulle, stable par somme et produit par un réel).
2. Ce n'est pas un sous-ev, le produit d'une suite croissante (et non constante) par -1 étant rarement une suite croissante.

3. Ce n'est pas un sous-ev non plus, car la somme d'une suite croissante et d'une suite décroissante n'est pas toujours monotone.
4. C'est un sous-ev (règles de calcul usuelles sur les limites).
5. Ce n'est pas un sous-ev, quand on additionne deux suites géométriques de raison différentes, on n'obitent pas en général une suite géométrique.
6. Ce n'est pas non plus un sous-ev, une suite récurrente linéaire d'ordre 2 peut en général s'écrire comme somme de deux suites géométriques dont les raisons sont les racines de son équation caractéristique ; ce n'est pas stable par somme (les racines n'ayant pas de raison d'être toujours les mêmes).
7. C'est un sous-ev : la suite nulle est périodique de période 1, le produit d'une suite périodique par un réel est une suite périodique de même période, et la somme de deux suites périodiques de périodes p et q est par exemple périodique de période pq.

Exemple très important : L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène de k équations à n inconnues est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathbb{R}^n$. On peut d'ailleurs toujours décrire un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ à l'aide d'un tel système d'équations.

Exemple : L'ensemble des solutions su système $\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & - & 3y & + & 5z & = & 0 \end{array}\right.$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. On sait qu'on peut écrire les solutions d'un tel système (qui ne peut pas être de Cramer puisqu'il a plus d'inconnues que d'équations) en fonctions d'une ou plusieurs de ses inconnues. C'est la motivation de l'introduction de l'autre façon de décrire un sous-espace vectoriel, que nous allons étudier pour cette fin de paragraphe.

Définition 174. Une **famille de vecteurs** dans un espace vectoriel E est un k-uplet $(e_1, \dots, e_k)$ d'éléments de E.

Remarque 162. Attention bien sûr à ne pas confondre une famille de vecteurs de E, et un vecteur qui est souvent lui-même un n-uplet de réels.

Définition 175. Une combinaison linéaire d'une famille $(e_1, \dots, e_k)$ de vecteurs de E est un vecteur $x \in E$ qui peut s'écrire sous la forme $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=k} \lambda_i e_i$, pour une k-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ de réels.

Exemples : Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, le vecteur $(2\ 5\ -3)$ est combinaison linéaire des vecteurs $(1\ -2\ 6)$ et $(-1\ 11\ -21)$, puisque $3(1\ -2\ 6) + (-1\ 11\ -21) = (2\ 5\ -3)$. Par contre, le vecteur $(0\ 9\ 2)$ n'est pas combinaison linéaire de ces deux même vecteurs.

Dans l'espace vectoriel des matrices à 3 lignes et 3 colonnes $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 12 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \\ -6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire des matrices $B = \begin{pmatrix} 0 & 24 & -2 \\ -6 & 2 & 0 \\ -12 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ et I puisque $A = \dfrac{1}{2}B + I$.

Définition 176. Soit $(e_1, \dots, e_k)$ une famille de vecteurs. L'ensemble des combinaisons linéaires de cette famille est noté $Vect(e_1, \dots, e_k)$.

Proposition 150. Soit $(e_1, \dots, e_k)$ une famille de vecteurs de E, alors $Vect(e_1, \dots, e_k)$ est un sous-espace vectoriel de E. C'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant e_1, e_2, …, e_k. On l'appelle sous-espace vectoriel engendré par la famille.

Démonstration. Une somme de deux combinaisons linéaires est bien une combinaison linéaire : $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^{k} \mu_i e_i = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i + \mu_i) e_i$, et de même pour un produit par un réel : $\rho \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{k} (\rho\lambda_i) e_i$, donc $Vect(e_1, \dots, e_k)$ est un sous-espace vectoriel de E. De plus, un sous-espace contenant les éléments de la famille contient aussi ses combinaisons linéaires puisqu'un sous-espace est stable par combinaisons linéaires, donc il contient forcément $Vect(e_1, \dots, e_k)$. □

Exemple : L'ensemble des éléments de $\mathbb{R}^3$ de la forme $(2x+y \;\; 3x-2y \;\; -x)$, x et y étant deux réels, est un sous-espace vectoriel. Il s'agit en fait du sous-espace vectoriel engendré par les deux vecteurs $(2\ 3\ \ -1)$ et $(1\ \ -2\ 0)$, puisque $(2x+y \;\; 3x-2y \;\; -x) = x(2\ 3\ \ -1)+y(1\ \ -2\ 0)$ s'écrit bien comme combinaison linéaire de ces deux vecteurs.

Proposition 151. L'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.

Exemple : Dans $\mathbb{R}^3$, on définit F comme l'ensemble des solutions de l'équation $x-y+2z=0$, et $G = Vect((1\ 0\ \ -1),(-2\ 1\ 1))$. Ces deux ensembles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, leur intersection en est donc aussi un. Pour la décrire le plus simplement possible, le mieux est d'écrire les vecteurs de G comme combinaison linaires, et de leur faire vérifier l'équation définissant F : $x \in G \Leftrightarrow x = (\lambda - 2\mu \;\; \mu \;\; \mu - \lambda)$, pour un certain couple de réels (λ, μ). Le vecteur x appartient aussi à F si $\lambda - 2\mu - \mu + 2\mu - 2\lambda = 0$, soit $-\lambda - \mu = 0$, donc $\mu = -\lambda$. On a alors $x = (3\lambda \;\; -\lambda - 2\lambda)$, dont on déduit que $F \cap G = Vect((3\ \ -1\ \ -2))$.

Remarque 163. L'union de deux sous-espaces vectoriels n'est par contre pas un espace vectoriel en général.

20.2 Familles de vecteurs

20.2.1 Familles génératrices

Définition 177. Une famille $(e_1, \dots, e_k)$ est dite **génératrice** tout élément de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de la famille $(e_1, \dots, e_k)$: $\forall x \in E$, $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k$, $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i$. Autrement dit, $Vect(e_1, \dots, e_k) = E$.

Remarque 164. Pour prouver qu'une famille est génératrice, il faut prouver que l'équation $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i$, qui peut s'écrire comme un système linéaire dont les inconnues sont les coefficients λ_i, admet toujours une solution.

Exemple : Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $((0\ 2\ 0),(2\ \ -1\ 2),(1\ \ -3\ 0),(1\ \ -2\ 3))$ est génératrice car le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & = & & & 2b & + & c & + & d \\ y & = & 2a & - & b & - & 3c & - & 2d \\ z & = & & & 2b & & & + & 3d \end{array}\right.$ admet par exemple comme solution $\left(\frac{3x}{2}+\frac{y}{2}-\frac{5z}{4}, \frac{z}{2}, x-z, 0\right)$.
Pour la résolution, on a tout bêtement imposé $d=0$ pour se ramener à un système triangulaire aisé à résoudre. Cela signifie que la famille est toujours génératrice si on en supprime le dernier vecteur !

Proposition 152. Une famille génératrice le reste si on lui ajoute un vecteur. Elle reste également génératrice si on lui supprime un vecteur pouvant s'écrire comme combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.

20.2.2 Familles libres

Une famille génératrice était une famille permettant de reconstituer tout l'espace E, mais contenant éventuellement « trop » de vecteurs. Une famille libre est en quelque sorte le contraire : on ne peut pas supprimer de vecteurs, mais il se peut qu'on en ait pas assez.

Définition 178. Une famille de vecteurs $(e_1, \dots, e_k)$ est **libre** si aucun de ses éléments n'est combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille (on dit que ses vecteurs sont linéairement indépendants). Autrement dit, si $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i = 0$, alors $\forall i \in \{1, \dots, k\}$, $\lambda_i = 0$. Dans le cas contraire, on dit que la famille de vecteurs est liée.

Remarque 165. Pour prouver qu'une famille est libre, il faut vérifier que le système linéaire homogène obtenu en écrivant l'égalité $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i = 0$ est de Cramer.

Exemple : Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $((2\ 1\ 0), (1\ \ -1\ \ -1), (0\ 3\ \ -1))$ est libre car le système $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - y - z = 0 \\ 3y - z = 0 \end{cases}$ a pour unique solution $(0, 0, 0)$.

Proposition 153. Une famille libre reste libre si on supprime un de ses vecteurs. Elle reste également libre si on y ajoute un vecteur n'appartenant pas au sous-espace vectoriel engendré par la famille.

20.2.3 Bases et dimension

Après avoir défini des familles de vecteurs ayant trop ou pas assez de vecteurs, nous allons maintenant passer à la notion la plus intéressante, celle de famille ayant juste le bon nombre de vecteurs.

Définition 179. Une famille de vecteurs est une **base** d'un espace vectoriel E si elle est à la fois libre et génératrice. Autrement dit, tout élément de E peut s'écrire de façon unique comme combinaison linéaire d'élements de la famille.

Exemple : Considérons dans $\mathbb{R}^3$ l'ensemble F des vecteurs (x, y, z) vérifiant $3x - 2y = z$. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, il est constitué de tous les vecteurs de la forme $(x, y, 3x - 2y) = x(1, 0, 3) + y(0, 1, -2)$. La famille $((1, 0, 3); (0, 1, -2))$ est donc génératrice de F. Comme de plus elle est libre (les deux vecteurs n'étant pas proportionnels), c'est donc une base de F.

Définition 180. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in E$. Les réels λ_i sont appelés **coordonnées** de x dans la base $(e_1, \dots, e_n)$, et les vecteurs $\lambda_i e_i$ **composantes** de x dans cette même base.

Proposition 154. La famille $((1, 0, \dots, 0); (0, 1, 0, \dots, 0); \dots; (0, \dots, 0, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^n$ appelée base canonique.

Démonstration. Si on note $e_i = (0; \dots; 0; 1; 0; \dots; 0)$, tout vecteur $x = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ s'écrit sous la forme $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, donc la famille est génératrice. De plus, si on avait $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i$, on aurait donc $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (\mu_1, \dots, \mu_n)$, soit en décomposant suivant chaque coordonnée $\lambda_i = \mu_i$, donc chaque décomposition est unique. La famille est donc également libre. □

Définition 181. Un espace vectoriel E est **de dimension finie** s'il admet une base (une base étant toujours une famille finie). Dans ce cas, toutes les bases de E comportent le même nombre d'éléments, qui est appelé **dimension** de E.

Exemple : L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est sans surprise de dimension n.

Théorème 37. (théorème de la base incomplète) Soit $(e_1, \dots, e_k)$ une famille libre dans un espace E de dimension n. Alors $k \leqslant n$ et il existe des vecteurs $e_{k+1}, \dots, e_n$ tels que $(e_1, \dots, e_n)$ soit une base de E (on peut donc compléter une famille libre en une base).

Démonstration. Ce théorème, comme l'affirmation contenue dans la définition précédente, ne seront pas démontrés cette année. □

Proposition 155. Dans un espace vectoriel de dimension n, toute famille libre possède au plus n éléments, et toute famille libre de n éléments est une base. Toute famille génératrice possède au moins n éléments, et toute famille génératrice de n éléments est une base.

Proposition 156. Soit F un sous-epace vectoriel d'un espace vectoriel E de dimension finie n. Alors F est de dimension finie $p \leqslant n$.

Démonstration. Encore un résultat plus technique qu'il n'en a l'air, que nous admettrons. □

Exemple : Nous avons montré un peu plus haut que l'ensemble des triplets (x, y, z) de réels vérifiant $3x - 2y = z$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$.

20.2.4 Exemples détaillés : matrices, polynomes, suites

En dehors des espaces $\mathbb{R}^n$, qui sont très intéressants mais un peu élémentaires, nous étudierons de temps à autre d'autres espaces vectoriels, qui sont constitués d'objets mathématiques d'usage courant. Voici quelques résultats sur les matrices et les polynomes.

Proposition 157. L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension np. Une base (souvent appelée base canonique) est constituée des matrices $E_{i,j}$ (pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$) ayant pour seul coefficient non nul le coefficient d'indice ij, qui vaut 1 : $E_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \dots & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Démonstration. Le fait que les ensembles de matrices soient des espaces vectoriels découle des propriétés de l'addition de matrices et du produit de matrices par un réel vues il y a maintenant quelques chapitres. De plus, la famille $E_{i,j}$ est bien génératrice puisque, si $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on a $M = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} m_{i,j} E_{i,j}$. Enfin, prouvons que la famille est libre. Supposons qu'une combinaison linéaire des vecteurs de la famille soit nulle : $\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \lambda_{i,j} E_{i,j} = 0$. La somme de gauche étant simplement la matrice dont le coefficient d'indice i, j vaut $\lambda_{i,j}$, elle est nulle seulement si tous les $\lambda_{i,j}$ sont nuls, la famille est donc bien libre. Comme il y a np éléments dans cette base, cela prouve que $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est de dimension np. □

Proposition 158. L'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ des polynomes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n est un espace vectoriel de degré $n+1$. Une base (souvent appelée base canonique) de $\mathbb{R}_n[X]$ est constituée des polynomes $1, X, X^2, \dots, X^n$.

Démonstration. Le fait que ce soit un espace vectoriel est pénible mais facile à montrer. Ensuite, par définition, tout polynome de degré inférieur ou égal à n est une combinaison linéaire de 1, X, ..., X^n. Et si une combinaison linéaire de ces éléments est nulle, c'est qu'il s'agit du polynome dont tous les coefficients sont nuls (rappelons que cela découle du fait que le polynôme admet alors une grosse infinité de racines, ce qui n'est guère possible pour un polynôme dedegré n autre que le polynôme nul), donc la famille est libre. Comme elle est constituée de $n+1$ éléments, cela prouve que $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$. □

Proposition 159. Dans $\mathbb{R}_n[X]$, toute famille constituée de $n+1$ polynomes de degré respectifs $n+1$, n, ..., 1 est une base.

Démonstration. Considérons une telle famille P_n, P_{n-1}, ..., P_0 (avec P_i de degré i). La famille étant constituée de $n+1$ vecteurs, il suffit de vérifier qu'elle est libre. Supposons qu'une combinaison linéaire s'annule : $Q = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i = 0$. Un polynome est nul si tous ses coefficients sont nuls. Mais le coefficient de degré n de Q vaut λ_n fois celui de P_n puisque les autres éléments de la famille sont de degré inférieur. On doit donc avoir $\lambda_n = 0$. Mais du coup, le coefficient de degré $n-1$ de Q vaut λ_{n-1} fois celui de P_{n-1}, donc $\lambda_{n-1} = 0$, et ainsi de suite (une petite récurrence pour les courageux). Finalement, tous les λ_i sont nuls, donc la famille est libre, donc est une base. □

Proposition 160. L'ensemble S des suites vérifiant une récurrence linéaire d'ordre 2 est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de l'ensemble des suites réelles. Dans le cas où son équation caractéristique admet deux solutions distinctes r_1 et r_2, les deux suites géométriques définies par $u_n = r_1^n$ et $v_n = r_2^n$ forment une base de S. Si l'équation caractéristique a une solution double r, les suites $u_n = r^n$ et $v_n = nr^n$ forment une base de S.

Démonstration. Commençons par prouver que S est un espace vectoriel de dimension 2 : S est l'ensemble des suites vérifiant une certaine relation $x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n$ (pour $n \geqslant 2$). Si on prend deux suites y_n et z_n vérifiant cette relation, leur somme $y_n + z_n$ la vérifiera aussi, et de même pour λy_n. L'ensemble S est donc un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles.
Notons à présent x la suite vérifiant $x_0 = 1$, $x_1 = 0$ et qui appartient à S (donc qui vérifie la récurrence pour $n \geqslant 2$) et y la suite de S vérifiant $y_0 = 0$ et $y_1 = 1$. La famille (x, y) est libre (en effet, les deux suites ne sont pas proportionnelles), mais également génératrice de S. En effet, soit z un élément de S, $a = z_0$ et $b = z_1$, on a en fait $z = ax + by$: cela est vrai pour les deux premiers termes de la suite, et ensuite cela le reste par récurrence. On en déduit que S est de dimension 2 et que (x, y) en est une base.
Maintenant qu'on connait la dimension de S, il suffit de vérifier que (u_n) et (v_n) appartiennent à S et forment une famille libre pour constituer une base de S. Dans le cas où on a deux racines, vérifions que $(u_n) \in S$: $au_{n+1} + bu_n = ar_1^{n+1} + br_1^n = r_1^n(ar+b) = r_1^n \times r_1^2 = r_1^{n+2} = u_{n+2}$ (en effet, on a $r_1^2 = ar_1 + b$ par définition de r_1). De même, $(v_n) \in S$, et les deux suites ne sont pas proportionnelles (en effet $u_0 = v_0 = 1$, mais $u_1 \neq v_1$). La famille (u_n, v_n) est donc une base de S. De même, dans le cas où on a une racine double, la famille (r^n, nr^n) est libre car $r^1 = 1r^1$, mais $r^0 \neq 0$. De plus, r^n vérifie bien la récurrence pour la même raison que tout à l'heure et nr^n aussi : $a(n+1)r^{n+1} + bnr^n = nr^n(ar+b) + ar^{n+1} = nr^{n+2} + ar^{n+1} = r^{n+2}\left(n + \frac{a}{r}\right) = r^{n+2}(n+2) = v_{n+2}$, car, si l'équation $x^2 - ax - b = 0$ admet une racine double, celle-ci vaut $\frac{a}{2}$, donc $\frac{a}{r} = 2$. □

20.3 Applications linéaires

20.3.1 Définition et exemples

Définition 182. Soient E et F deux espaces vectoriels, une **application linéaire** de E dans F est une application $f : E \to F$ vérifiant les conditions suivantes :

- $\forall (x, y) \in E^2$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$

Remarque 166. Une application $f : E \to F$ est linéaire si et seulement si $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (x, y) \in E^2$, $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$. Autrement dit, une application est linéaire si elle est compatible avec les combinaisons linéaires. On a d'ailleurs plus généralement, pour une application linéaire, $f\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(e_i)$.

Exemples : Bien que les conditions définissant une application linéaire soient assez restrictives, on peut trouver des exemples extrêmement variés dans les différents espaces vectoriels que nous avons étudiés au chapitre précédent.

- L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y) = (2x-3y, 4x+y, -x+2y)$ est une application linéaire.
- L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y) = (2x-3, 4+y, -x+2y)$ n'est pas une application linéaire (on peut constater par exemple qu'en général $f(2x,2y) \neq 2f(x,y)$).
- L'application $f : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = AM$ est une application linéaire, quelle que soit la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- L'application $f : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = M^2$ n'est pas une application linéaire (en général, $(M+N)^2 \neq M^2 + N^2$).
- Soit E l'ensemble des suites réelles. L'application $f : E \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(u_n) = (u_0, u_8, u_{35})$ est une application linéaire.
- Soit E l'ensemble des fonctions C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. L'application $f : E \to E$ définie par $f(g) = g'$ est une application linéaire.
- Soit E l'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle $[0;1]$. L'application $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $f(g) = \displaystyle\int_0^1 g(t)dt$ est une application linéaire.

Définition 183. Une application linéaire $f : E \to F$ est aussi appelée **morphisme** de E dans F. On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble de toutes les applications linéaires de l'espace vectoriel E vers l'espace vectoriel F.
Une application linéaire $f : E \to E$ est appelée **endomorphisme** de l'espace vectoriel. On note plus simplement $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
Une application linéaire bijective est appelée **automorphisme**. L'ensemble des automorphismes d'un ev E dans lui-même est parfois noté $GL(E)$.

20.3.2 Noyau, image d'une application linéaire

Définition 184. L'**image** d'une application linéaire $f : E \to F$ est $Im(f) = \{y \in F \mid \exists x \in E, f(x) = y\}$.

Proposition 161. Soit $f : E \to F$ une application linéaire, alors f est surjective si et seulement si $Im(f) = F$.

Démonstration. Pas de démonstration, puisque c'est la définition d'une application surjective. □

Proposition 162. L'image d'une application linéaire est un sous-espace vectoriel de F.

Démonstration. Rien de bien difficile. L'image contient le vecteur nul, puisque $f(0) = 0$. Si $y \in Im(f)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $y = f(x)$, donc $f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda y$, donc $\lambda y \in Im(f)$. De même, si y et y' sont dans l'image de f, $y = f(x)$ et $y' = f(x')$, donc $f(x+x') = y + y'$, qui est donc dans l'image. □

Proposition 163. Soit $f : E \to F$ une application linéaire de E dans F et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E, alors $Im(f) = Vect(f(e_1), \dots, f(e_n))$.

Démonstration. Comme les vecteurs $f(e_1), \dots, f(e_n)$ appartiennent à $Im(f)$, on a nécessairement $Vect(f(e_1), \dots, f(e_n)) \subset Im(f)$. De plus, soit $y \in Im(f)$, on a $y = f(x)$, et comme $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, on peut écrire $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i e_i$. On a alors $y = f(x) = f\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i e_i\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i f(e_i)$, donc $y \in Vect(e_1, \dots, e_n)$, et les deux ensembles sont bien égaux. □

Remarque 167. Attention, en général, $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ n'est pas une base de $Im(f)$, mais seulement une famille génératrice.

Exemple 1 : La méthode élémentaire pour calculer une image est d'utilser la définition. Prenons par exemple l'applicaton linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (2x - y, x + 2y, -2x + y)$. Un triplet (a, b, c) appartient à $Im(f)$ si et seulement si le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 2x & - & y & = & a \\ x & + & 2y & = & b \\ -2x & + & y & = & c \end{array}\right.$$

admet une solution. Les membres de gauche des deux équations extrêmes étant opposés, il faut nécessairement avoir $a = -c$, et on vérifie facilement que cette condition est suffisante. On a donc $Im(f) = \{(a, b, -a) \mid a, b \in \mathbb{R}^2\} = Vect((1, 0, -1); (0, 1, 0))$.

Exemple 2 : En pratique, on utilisera plutôt notre dernière proposition, car c'est beaucoup plus rapide ! Reprenons le même exemple. La base canonique de $\mathbb{R}^2$ est constituée des deux vecteurs $(1, 0)$ et $(0, 1)$, donc l'image est engendrée par $f(1, 0) = (2, 1, -2)$ et $f(0, 1) = (-1, 2, 1)$. On a donc $Im(f) = Vect((2, 1, -2); (-1, 2, 1))$ (ce ne sont pas les mêmes vecteurs que tout à l'heure mais on peut vérifier qu'ils engendrent le même espace vectoriel).

Définition 185. Le **noyau** d'une application linéaire $f : E \to F$ est l'ensemble $Ker(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0\}$.

Remarque 168. Les lettres Ker sont les premières du mot allemand Kernel qui signifie, comme vous auriez pu le deviner, noyau.

Proposition 164. Si $f : E \to F$ est une application linéaire, alors $Ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. En effet, si $(x, y) \in Ker(f)^2$, on a $f(x) = f(y) = 0$, donc $f(x+y) = f(x)+f(y) = 0$, d'où $x + y \in Ker(f)$. De même, si $x \in Ker(f)$, $f(\lambda x) = \lambda f(x) = 0$ donc $\lambda x \in Ker(f)$. De plus, le vecteur nul appartient toujours au noyau de f. En effet, soit $x \in E$, on a $f(x) = f(x+0) = f(x)+f(0)$, donc $f(0) = f(x) - f(x) = 0$. □

Remarque 169. Pour déterminer le noyau d'une application linéaire, on est en fait amené à déterminer les solutions d'un système d'équations linéaires homogènes (on verra plus loin qu'une application linéaire s'écrit toujours sous forme de combinaisons linéaires des coordonnées).

Exemple : Déterminons le noyau de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par $(x, y, z) \mapsto (x - y + z, 3x - 2y + 5z, -x - 3z)$. Les éléments du noyau sont les triplets de réels (x, y, z) solutions du système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 0 \\ 3x & - & 2y & + & 5z & = & 0 \\ -x & & & - & 3z & = & 0 \end{array}\right.$. Le système n'est pas de Cramer $(2L_1 - L_2 = L_3)$, les solutions sont les triplets de la forme $(-3z, -2z, z)$, avec $z \in \mathbb{R}$. Autrement dit, le noyau de f est un sous-espace vectoriel de dimension 1 de $\mathbb{R}^3$, dont une base est constituée du vecteur $(-3, -2, 1)$.

Proposition 165. Une application linéaire est injective si et seulement si $Ker(f) = \{0\}$.

Démonstration. Supposons d'abord le noyau réduit au vecteur nul et montrons que f est injective : soient $(x, y) \in E^2$ tels que $f(x) = f(y)$, alors $f(x - y) = f(x) - f(y) = 0$, donc $x - y \in Ker(f)$, donc $x - y = 0$, c'est-à-dire $x = y$, ce qui prouve bien l'injectivité. Réciproquement, supposons f injective, alors 0 a un seul antécédent par f. Or, le vecteur nul, on l'a vu, est toujours un antécédent de 0 par une application linéaire. Ceci prouve bien qu'il est le seul élément de E à appartenir à $Ker(f)$. □

20.4 Applications linéaires et matrices

Dans la mesure où la donnée des images des vecteurs d'une base suffit à déterminer complètement une application linéaire, il peut être tentant et pratique de représenter celles-ci par une matrice, via le petit calcul suivant : soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base l'ev E (supposé de dimension n), et $(f_1, f_2, \dots, f_p)$ une base de F, supposé donc de dimension p. Si $u : E \to F$ est une application linéaire, on peut écrire, pour tout x de E, $u(x) = u\left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i e_i\right)$, où les réels x_i sont les coordonnées de x dans la base choisie, puis $u(x) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i u(e_i) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i \sum_{j=1}^{j=p} a_{i,j} e_j = \sum_{j=1}^{j=p} \left(\sum_{i=1}^{i=n} a_{i,j} x_i\right) e_j$, où le coefficient $a_{i,j}$ représente la i-ème coordonnée du vecteur e_j dans la base $(f_1, \dots, f_p)$. Cette dernière expression fait fortement penser à un produit de matrices (mais si, je vous assure), ce qui amène les définitions suivantes :

Définition 186. Soit $u : E \to F$ une application linéaire entre espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_p)$ une base de F. La **matrice représentant u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$** est la matrice $M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ dont la i ème colonne est composée des coordonnées de $u(e_i)$ dans la base $\mathcal{B}'$. Autrement dit, si $u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$, alors $M_{i,j} = \lambda_i$.

Exemple : Soit $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $u(x, y, z) = (4x - 3x + z, -2x + y - 5z)$, la matrice de u dans les bases canoniques est $M = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$.

Définition 187. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E et $\mathcal{B}$ une base de E. On note souvent $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ (c'est-à-dire que la base de départ est la base $\mathcal{B}$ et celle d'arrivée également).

Proposition 166. En gardant les notations précédentes, si on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ la matrice-colonne des coordonnées dans $\mathcal{B}$ d'un élément $x \in E$ et $u(X) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ celle des coordonnées de son image dans $\mathcal{B}'$, alors $u(X) = MX$, où M est la matrice représentant u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

Démonstration. En effet, on a $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i$, et par définition de la matrice M, on a $u(e_i) = \sum_{j=1}^{n} M_{ji} f_j$. On a donc $u(X) = \sum_{i=1}^{p} x_i \sum_{j=1}^{n} M_{ji} f_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{p} x_i M_{ji}\right) f_j$. Or, l'unique terme de la j ème ligne de la matrice colonne MX vaut précisément $\sum_{i=1}^{p} x_i M_{ji}$, donc l'égalité demandée est bien vérifiée. □

Proposition 167. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, et M la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, alors la matrice de λu dans ces mêmes bases est λM.
De même, si $(u, v) \in \mathcal{L}(E, F)^2$, et M, N leurs matrices respectives, la matrice de $u + v$ est $M + N$.
Plus intéressant, si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$, et M, N leurs matrices respectives, alors la matrice de $v \circ u$ est NM.

Démonstration. En effet, si $u(X) = MX$ et $v(X) = NX$, $\lambda u(X) = \lambda MX$; $u(X) + v(X) = MX + NX = (M + N)X$ et, lorsque cela a un sens, $v \circ u(X) = v(MX) = NMX$. □

Exemple : Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ définie par $(x, y, z) \mapsto (x - y, 2x + z)$, et $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ définie par $(x, y) \mapsto (x + y, 3x - y, -x + 2y)$. Les matrices respectives de ces deux applications linéaires dans les bases canoniques sont $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Comme $NM = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, on peut en déduire que $v \circ u(x, y, z) = (3x - y + z, x - 3y - z, 3x + y + 2z)$.

Proposition 168. Un endomorphisme est bijectif (on dit aussi inversible) si et seulement si sa matrice M dans les bases canoniques l'est. Dans ce cas, u^{-1} est également une application linéaire, et sa matrice est M^{-1}.

Démonstration. En effet, si u est bijective, u^{-1} est bien défini et $\forall X \in E$, $u^{-1}(u(X)) = X$. L'application u^{-1} est alors linéaire : si Y_1 et Y_2 sont deux éléments de E, ils ont des antécédents X_1 et X_2 par u, et $X_1 + X_2$ est alors un antécédent de $Y_1 + Y_2$ donc $u^{-1}(Y_1 + Y_2) = X_1 + Y_2$. Le cas du produit par un réel se montre de façon très similaire. Soit alors N la matrice de u^{-1} dans la base canonique, comme $u^{-1} \circ u = u \circ u^{-1} = id$ (on parle ici de l'application identité et pas de la matrice du même nom), on a en utilisant la proposition précédente $NM = MN = I$ (la matrice de l'identité dans les bases canoniques est I), donc $N = M^{-1}$. □

Pour conclure cet ultime chapitre de l'année, quelques mots sur des notions que vous reverrez nettement plus en détail l'an prochain, puisque l'algèbre linéaire sera une part importante de votre programme, et la diagonalisation la notion centrale de ce chapitre.

Définition 188. Soit $u : E \to F$ une application linéaire. Un réel λ est une **valeur propre** de u s'il existe un vecteur non nul $x \in E$ tel que $u(x) = \lambda x$. Tous les vecteurs vérifiant cette équation sont appelés **vecteurs propres** de u associés à la valeur propre λ.

Exemple : Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $u(x, y) = (2x + y, -3x - 2y)$. Dans la base canonique, u a pour matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$. On peut constater que 1 est valeur propre de u, avec comme vecteur propre asssocié (par exemple) $(1, -1)$; -1 est également valeur propre de u avec comme vecteur propre associé $(1, -3)$ puisque $u(1, -3) = (-1, 3) = -(1, -3)$. La famille constituée des deux vecteurs propres $((1, -1); (1, -3))$ est une base de $\mathbb{R}^2$ (les vecteurs ne sont pas proportionnels). L'intérêt de ce calcul de vecteurs propres vient du fait que la matrice de u dans cette nouvelle base devient nettement plus simple. En effet, elle s'écrit $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Vous verrez l'an prochain que des vecteurs propres correspondants à des valeurs propres distinctes forment toujours une famille libre, et que la matrice de u dans une base formée de vecteurs propres est toujours diagonale (comme dans cet exemple). Nous allons d'ailleurs achever le chapitre en indiquant le lien entre la diagonalisation des endormorphismes et celle des matrices vue dans un chapitre précédent.

Définition 189. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est **diagonalisable** s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est diagonale. Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si on peut trouver une base de E constituée de vecteurs propres pour u.

Définition 190. Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_n)$ deux bases d'un même espace vectoriel E. La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est la matrice $P = (p_{i,j})$, où le coefficient $p_{i,j}$ correspond à la i-ème coordonnée de f_j dans la base $\mathcal{B}$.

Proposition 169. Une matrice de passage est toujours inversible. De plus, si $u \in \mathcal{L}(E)$, en notant A et A' ses matrices respectivement dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, on a la relation $A' = P^{-1}AP$.

Exemple : Reprenons l'exemple précédent. La matrice de passage de la base canonique à la base $((1, -1); (1, -3))$ est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$. On calcule aisément $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, et $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, comme prévu. Vous savez donc maintenant d'où viennent ces drôles de calcul à base de PMP^{-1} qu'on effectue depuis des semaines sur les matrices. La suite ... en septembre, mais ce ne sera plus avec moi !

Deuxième partie

Exercices


Chui sûr que vous comprenez rien !!
Ahahah
Que dalle!
Nothing!
Nada!

Feuille d'exercices n°1 : Logique et calcul

ECE3 Lycée Carnot

7 septembre 2010

Logique

Exercice 1 (**)

Exprimer les propriétés suivantes à l'aide de quantificateurs (f étant une fonction réelle) :
- l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution.
- f est constante .
- tout réel a (au moins) un antécédent par f.
- f ne prend pas de valeur négative.
- tout réel a (au moins) deux antécédents par f.
- f ne prend jamais deux fois la même valeur.

Exercice 2 (** à ***)

Déterminer pour chacune des affirmations suivantes si elle est vraie ou fausse (donner un contre-exemple si la proposition est fausse, et justifier si elle est vraie) :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant x$
2. $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 = 2$
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists p \in \mathbb{N},\ n = 2p$
4. $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists p \in \mathbb{N},\ p = 3n$
5. $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists p \in \mathbb{N},\ n(n+1) = 2p$
6. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x \geqslant y^2$
7. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x < y^2$
8. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x > y^2$
9. $\forall x > 0,\ \exists y > 0,\ y < x$
10. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \exists z \in \mathbb{R},\ e^y = xz^2$

Exercice 3 (*)

Énoncer la négation de chacune des propositions de l'exercice 2 (avec des quantificateurs, bien entendu).

Exercice 4 (**)

Lors d'un cambriolage, on arrête trois suspects : Aristide, Barnabé et Clothaire. Lors de leurs interrogatoires, Aristide affirme être innocent, Barnabé prétend que Clothaire n'a pas commis le vol, alors que ce même Clothaire, au contraire, s'accuse. Il apparait ensuite que deux des trois suspects ont menti. Qui est le voleur ?

Calcul

Exercice 5 (*)

Simplifier les expressions suivantes :

1. $\dfrac{2^5 \times 25 \times 3^{-4} \times 36}{3^8 \times 15 \times 100}$
2. $\ln(96)$
3. $\dfrac{e^{x^2}}{e^{3x}}$
4. $\dfrac{3\sqrt{72}}{2\sqrt{162}}$
5. $e^{-\ln(10)}$

Exercice 6 (* à ***)

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $x^2 - 5x + 6 = 0$
2. $2x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 0$
3. $x = \sqrt{x} + 2$
4. $(\ln x)^2 - 5\ln(x) = 12$
5. $e^x + e^{-x} = 2$
6. $\ln(x+3) + \ln(x-1) = 2\ln 2$
7. $x^3 + 5x^2 \leqslant 6x$
8. $\dfrac{2x-3}{x^2-4} < 1$
9. $\ln(2x-3) \leqslant \ln 5$
10. $3 \times 2^{3x-4} \geqslant 2^4$

Exercice 7 (** à ***)

Soient x, y et z trois réels vérifiant $x \in [1;4]$; $2 \leqslant y \leqslant 5$ et $|z| < 3$. Déterminer un encadrement le plus précis possibles des expressions suivantes :

- $2x - 3y + 1$
- $x(y-3)$
- $\dfrac{z}{2}$
- $\dfrac{3x}{y+1}$
- $\dfrac{1}{z-2}$
- $x^2 - 4x + 4$
- $\dfrac{x(z-4)}{y-1}$
- $\sqrt{xy} - 3e^{2-z}$

Corrigé de la feuille d'exercices n°1

Exercice 1 (**)

- $f(x) = 0$ n'aura pas de solution si $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$.
- f est constante se traduit par exemple par $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x) = f(y)$; ou par $\exists a \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a$. Notez que $\exists x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(y)$ marche aussi (alors que ça semble moins fort que la première proposition).
- tout réel a (au moins) un antécédent par f si $\forall a \in \mathbb{R}$, $\exists x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a$.
- f ne prend pas de valeur négative si $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$ (ça, c'est assez facile !).
- tout réel a (au moins) deux antécédents par f si $\forall a \in \mathbb{R}$, $\exists x \in \mathbb{R}$, $\exists y \neq x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(y) = a$ (il est essentiel que x et y soient distincts).
- f ne prend jamais deux fois la même valeur : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \neq x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq f(y)$. On peut également proposer $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

Exercice 2 (** à ***)

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant x$: FAUX, ça ne marche pas si $x \in]0; 1[$, par exemple $x = 0.5$.
2. $\exists x \in \mathbb{R}$, x^2 : VRAI, il existe deux tels réels, $x = \sqrt{2}$ et $x = -\sqrt{2}$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists p \in \mathbb{N}$, $n = 2p$: FAUX, ce n'est vrai que si n est pair.
4. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists p \in \mathbb{N}$, $p = 3n$: VRAI, on ne voit pas bien ce qui pourrait nous empêcher de multiplier un entier naturel par 3, et le résultat sera toujours un entier naturel.
5. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists p \in \mathbb{N}$, $n(n+1) = 2p$: VRAI, cela revient à dire que $n(n+1)$ est toujours pair. En effet, parmi n et $n+1$, l'un des deux nombres est pair et l'autre impair, on obtient donc un nombre pair en faisant leur produit.
6. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathbb{R}$, $x \geqslant y^2$: FAUX, si x est strictement négatif, il n'est supérieur à aucun carré.
7. $\exists x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $x < y^2$: VRAI, pour le coup, tous les x strictement négatifs sont des exemples (cette proposition était en fait la négation de la précédente).
8. $\exists x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $x > y^2$: FAUX, on a par exemple toujours $x < (x+1)^2$
9. $\forall x > 0$, $\exists y > 0$, $y < x$: VRAI, il suffit de prendre par exemple $y = \dfrac{x}{2}$.
10. $\exists x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $\exists z \in \mathbb{R}$, $e^y = xz^2$: VRAI, ça parait un peu alambiqué, mais il suffit en fait de prendre $x = 1$, et, quelle que soit la valeur de y, de poser $z = \sqrt{e^y}$.

Exercice 3 (*)

C'est très facile si on a compris qu'une négation transformait un quantificateur universel en quantificateur existentiel et vice-versa.

1. $\exists x \in \mathbb{R}$, $x^2 \leqslant 0$
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $2x - 1 \neq 12$
3. $\exists n \in \mathbb{N}$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $n \neq 2p$
4. $\exists n \in \mathbb{N}$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $p \neq 3n$
5. $\exists n \in \mathbb{N}$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $n(n+1) \neq 2p$
6. $\exists x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $x < y^2$
7. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathbb{R}$, $x \geqslant y^2$
8. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathbb{R}$, $x \leqslant y^2$
9. $\exists x > 0$, $\forall y > 0$, $y \geqslant x$
10. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathbb{R}$, $\forall z \in \mathbb{R}$, $e^y \neq xz^2$

Exercice 4 (**)

Barnabé et Clothaire disant le contraire l'un de l'autre, l'un d'eux dit nécessairement la vérité. Comme deux des trois accusés mentent, un seul a dit la vérité, et d'après ce qui précède ce n'est pas Aristide. Autrement dit, Aristide ment, et c'est donc lui le voleur (vous pouvez vérifier la cohérence de l'ensemble).

Exercice 5 (*)

1. $\dfrac{2^5 \times 25 \times 3^{-4} \times 36}{3^8 \times 15 \times 100} = \dfrac{2^5 \times 5^2 \times 3^{-4} \times 2^2 \times 3^2}{3^8 \times 3 \times 5 \times 2^2 \times 5^2} = \dfrac{2^5}{3^{11} \times 5}$
2. $\ln(96) = \ln(2^5 \times 3) = 5\ln 2 + \ln 3$
3. $\dfrac{e^{x^2}}{e^{3x}} = e^{x^2-3x} = e^{x(x-3)}$
4. $\dfrac{3\sqrt{72}}{2\sqrt{162}} = \dfrac{3\sqrt{2^3 \times 3^2}}{2\sqrt{2 \times 3^4}} = \dfrac{2 \times 3^2 \times \sqrt{2}}{2 \times 3^2\sqrt{2}} = 1$
5. $e^{-\ln(10)} = \dfrac{1}{e^{\ln 10}} = \dfrac{1}{10}$

Exercice 6 (* à ***)

1. Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 25 - 4 \times 6 = 1$, donc admet deux racines réelles $x_1 = \dfrac{5+1}{2} = 3$, et $x_2 = \dfrac{5-1}{2} = 2$, donc $\mathcal{S} = \{2; 3\}$.
2. On constate que 1 est racine de ce polynome puisque $2-4+3-1=0$. On peut donc factoriser par $x-1$: $(2x^3 - 4x^2 + 3x - 1) = (x-1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$. Par identification, on obtient $a = 2$, $b = -2$ et $c = 1$, donc $2x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = (x-1)(2x^2 - 2x + 1)$. Cherchons les racines de ce dernier trinome, qui a pour discriminant $\Delta = 4 - 8 = -4$. Il n'y a donc pas de racines réelles, et concernant l'équation initiale, $\mathcal{S} = \{1\}$.
3. Posons $X = \sqrt{x}$ (en notant au passage que l'équation ne peut avoir de sens que si $x \geqslant 0$ et $X \geqslant 0$). L'équation devient alors $X^2 = X + 2$, soit $X^2 - X - 2 = 0$. Ce trinome a pour discriminant $\Delta = 1 - 4 \times (-2) = 9$, et admet donc deux racines réelles $X_1 = \dfrac{1+3}{2} = 2$ et $X_2 = \dfrac{1-3}{2} = -1$. Cette dernière solution est à exclure. Comme on a, par définition de X, $x = X^2$, on obtient donc $\mathcal{S} = \{4\}$.
4. Encore un petit changement de variable : on pose $X = \ln x$ (x doit donc être strictement positif) et on se ramène à l'équation $X^2 - 5X - 12 = 0$, de discriminant $\Delta = 25 + 4 \times 12 = 73$, ayant donc deux racines réelles $X_1 = \dfrac{5+\sqrt{73}}{2}$ et $X_2 = \dfrac{5-\sqrt{73}}{2}$. Ensuite, on utilise $x = e^X$, donc $\mathcal{S} = \{e^{\frac{5-\sqrt{73}}{2}}; e^{\frac{5+\sqrt{73}}{2}}\}$.
5. Réécrivons l'équation en multipliant les deux membres par e^x (qui est toujours strictement positif, donc ça ne pose pas de problème) : $(e^x)^2 + 1 = 2e^x$, soit en posant $X = e^x$ (X sera donc toujours positif) $X^2 - 2X + 1 = 0$. On reconnait une identité remarquable : $(X-1)^2 = 0$, qui a pour unique solution $X = 1$. Puisque $x = \ln X$, l'équation initiale a donc pour solution $\mathcal{S} = \{0\}$.
6. Un petit travail de réécriture s'impose à nouveau : $\ln((x+3)(x-1)) = \ln(4)$, donc (par exemple en prenant l'exponentielle de chaque membre) $(x+3)(x-1) = 4$, soit $x^2 + 2x - 7 = 0$. Ce trinome a pour discriminant $\Delta = 4 + 4 \times 7 = 32$, donc deux racines réelles $x_1 = \dfrac{-2-\sqrt{32}}{2} = -1 - 2\sqrt{2}$, et $x_2 = -1 + 2\sqrt{2}$. Deux solutions donc ? Pas si vite ! Pour que l'équation initiale ait un sens, il

faut absolument avoir $x+3>0$ et $x-1>0$, c'est-à-dire $x>1$. La première solution trouvée étant inférieure à 1, on a en fait $\mathcal{S}=\{-1+2\sqrt{2}\}$.

7. $x^3+5x^2 \leqslant 6x \Leftrightarrow x(x^2+5x-6) \leqslant 0$. Dans le but de faire un tableau de signe, cherchons les racines de la parenthèse, qui a pour discriminant $\Delta = 25+4\times 6 = 49$, donc admet deux racines réelles $x_1 + \dfrac{-5-7}{2} = -6$ et $x_2 = \dfrac{-5+7}{2} = 1$. On en déduit le tableau de signes suivant :

x		-6		0		1	
x	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$
x^2+5x-6	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$
x^3+5x^2-6	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

On en conclut que $\mathcal{S}=[-6;0]\cup[1;+\infty[$

8. $\dfrac{2x-3}{x^2-4} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{2x-3-(x^2-4)}{x^2-4} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-2x-1}{x^2-4} > 0$. Le dénominateur a pour racines -2 et 2. Quant au numérateur, il a pour discriminant $\Delta = 4+4=8$, et admet deux racines réelles $x_1 = \dfrac{2-\sqrt{8}}{2} = 1-\sqrt{2}$ et $x_2 = \dfrac{2+\sqrt{8}}{2} = 1+\sqrt{2}$. D'où le tableau de signes suivant :

x		-2		$1-\sqrt{2}$		2		$1+\sqrt{2}$	
x^2-2x-1	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$
x^2-4	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$
$\frac{x^2-2x-1}{x^2-4}$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$

Conclusion : $\mathcal{S}=]-\infty;-2[\cup]1-\sqrt{2};2[\cup]1+\sqrt{2};+\infty[$

9. Commençons pas signaler que l'inéquation n'a de sens que si $2x-3>0$, soit $x>\dfrac{3}{2}$. Ensuite c'est très simple : puisque la fonction ln est strictement croissante, $\ln(2x-3) \leqslant \ln 5 \Leftrightarrow 2x-3 \leqslant 5 \Leftrightarrow x \leqslant 4$, donc $\mathcal{S}=\left]\dfrac{3}{2};4\right[$.

10. Les puissances quelconques n'étant définies que sur $\mathbb{R}_+$, on ne travaille qu'avec des nombres positifs, et on peut passer au ln : $3\times 2^{3x-4} \geqslant 2^4 \Leftrightarrow \ln 3+(3x-4)\ln 2 \geqslant 4\ln 2$, soit $(3x-8)\ln 2 \geqslant -\ln 3$, donc $x \geqslant \dfrac{8\ln 2-\ln 3}{3\ln 2}$, donc $\mathcal{S}=\left[\dfrac{8\ln 2-\ln 3}{3\ln 2};+\infty\right[$.

Exercice 7 (** à ***)

- Comme $2 \leqslant 2x \leqslant 8$ et $-15 \leqslant -3y \leqslant -6$, on obtient $-12 \leqslant 2x-3y+1 \leqslant 3$.
- Comme $1 \leqslant x \leqslant 4$ et $-1 \leqslant y-3 \leqslant 2$, on obtient $-4 \leqslant x(y-3) \leqslant 8$ (séparez les cas suivant le signe de y si vous n'êtes pas sûrs de vous pour ce genre de cas). On aurait aussi pu dire que $x(y-3)=xy-3x$, or $2 \leqslant xy \leqslant 20$ et $-12 \leqslant -3x \leqslant -4$, mais on obtient alors $-10 \leqslant x(y-3) \leqslant 16$, ce qui est un encadrement nettement moins précis que le précédent.
- Comme $-3<z<3$; $-\dfrac{3}{2} < \dfrac{z}{2} < \dfrac{3}{2}$.
- Comme $3 \leqslant 3x \leqslant 12$ et $\dfrac{1}{6} \leqslant \dfrac{1}{y+1} \leqslant \dfrac{1}{3}$, on obtient $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{3x}{y+1} \leqslant 4$.
- Comme $-5<z-2<1$, on obtient $\dfrac{1}{z-2} < -\dfrac{1}{5}$ ou $\dfrac{1}{z-2} > 1$ (on est obligés de distinguer deux cas suivant le signe de z).
- On peut bien sûr encadrer x^2-4x+4 terme par terme (ce qui donne finalement $-11 \leqslant x^2-4x+4 \leqslant 16$), mais il est beaucoup plus efficace de constater que $x^2-4x+4=(x-2)^2$. Comme $-1 \leqslant x-2 \leqslant 2$, on a alors $0 \leqslant x^2-4x+4 \leqslant 4$.
- Comme $\dfrac{1}{4} \leqslant \dfrac{1}{y-1} \leqslant 1$ et $-7<z-4<-1 \Rightarrow -28 < x(z-1) < -1$, on obtient $-28 < \dfrac{x(z-4)}{y-1} < -\dfrac{1}{4}$.

- On a $2 \leqslant xy \leqslant 20$, donc $\sqrt{2} \leqslant \sqrt{xy} \leqslant 2\sqrt{5}$, et $-1 < 2 - z < 5$, donc $-3e^5 < -3e^{2-z} < -\dfrac{3}{e}$, d'où finalement $\sqrt{2} - 3e^5 < \sqrt{xy} - 3e^{2-z} < 2\sqrt{5} - \dfrac{3}{e}$.

Feuille d'exercices n°2 : Fonctions usuelles

ECE3 Lycée Carnot

10 septembre 2010

Exercice 1 (*)

Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$
2. $f(x) = e^x \ln(2x + 3)$
3. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x(x+1)}}{x^2 - 1}$
4. $f(x) = \ln(x^5 + 1)$

Exercice 2 (* à **)

Déterminer la parité des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x + 1$
2. $f(x) = \ln |x|$
3. $f(x) = \dfrac{1}{(x^3 - 2x)^2} \times \dfrac{x^4}{\sqrt{x^2 + 2}}$
4. $f(x) = |2x^2 - e^{x^4} + \ln(x^2 - 1)|$
5. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

Exercice 3 (* à **)

Calculez la dérivée de chacune des fonctions suivantes, ainsi que l'équation de la tangente en 1 à leurs courbes représentatives (si elle existe) :

1. $f(x) = 1 + \ln(1 + x)$
2. $f(x) = \dfrac{1+x}{1+e^x} - x$
3. $f(x) = \ln\left(2x - \dfrac{3}{x}\right)$
4. $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{x^2 - 1}$
5. $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$

Exercice 4 (** à ***)

Résoudre les équations, inéquations et systèmes suivants :

1. $2\ln(x+1)+\ln(3x+5)+\ln 2=\ln(6x+1)+2\ln(x-2)$
2. $5^x-5^{x+1}+2^{3x-1}=0$
3. $x^{\sqrt{x}}=(\sqrt{x})^x$
4. $x^{\frac{1}{4}}+2x^{\frac{5}{3}}-3=0$
5. $e^{-6x}+3e^{-4x}-e^{-2x}-3=0$
6. $8^{6x}-3\times 8^{3x}\leqslant 4$
7. $\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 520 \\ \log x & + & \log y & = & 4 \end{array}\right.$

Exercice 5 (**)

Déterminer **sans calculer leur dérivée** les variations des fonctions suivantes :

1. $f(x)=\dfrac{-5}{2e^{-2x+3}}$
2. $f(x)=(e^x+2)^2-3$
3. $f(x)=(e^x-3)^2+2$
4. $f(x)=\ln(e^{-x}-1)$
5. $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

Exercice 6 (* à ***)

Étudier les variations et tracer la représentation graphique des fonctions suivantes :

1. $f(x)=e^x-\dfrac{x^2}{2}$
2. $f(x)=x^x$
3. $f(x)=\ln(1+x+x^2)$
4. $f(x)=e^{x^2-x-1}$
5. $f(x)=\ln\left(\dfrac{x^2-4x}{x^2-4x+3}\right)$
6. $f(x)=x^{x^2}$

Exercice 7 (**)

Montrer que $\forall x>0$, $\ln x\leqslant x-1$.
Montrer que $\forall x\geqslant 0$, $(1+x)^{\frac{1}{4}}\geqslant 1+\dfrac{x}{4}-\dfrac{3x^2}{32}$.

Exercice 8 (* à **)

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $|x-3|\geqslant 5$
2. $|2x-4|=|3x+2|$
3. $|x^2-8x+11|=4$

4. $|x+3|+|3x-1|<-2$
5. $|x-2| \geqslant |4x+2|$
6. $|2x-3|+|3-x|-|x-7|=2$
7. $|e^x-3|<1$
8. $\sqrt{|x^2-1|}=x-5$

Exercice 9 (**)

Écrire sans valeur absolue (en distinguant selon la valeur de x) les expressions suivantes :

1. $|x-2|+|x+5|$
2. $|3x^2-5x+2|$
3. $\ln(|x^2-4|)$
4. $|2-3x|-\sqrt{2x^2-8x+8}$
5. $\dfrac{e^{|x+1|}}{|e^{x+1}|}$

Exercice 10 (un bon ***)

Quelques propriétés faisant intervenir les parties entières :

1. Montrer que, si $n \in \mathbb{N}$, $Ent(x+n) = Ent(x)+n$
2. Montrer que, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $Ent(x)+Ent(y) \leqslant Ent(x+y)$. L'inégalité peut-elle être stricte ?
3. Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $Ent\left(\dfrac{x}{2}\right)+Ent\left(\dfrac{x+1}{2}\right)=Ent(x)$.
4. Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $Ent\left(\dfrac{Ent(nx)}{n}\right)=E(x)$

Exercice 11 (** à ***)

Représenter graphiquement les fonctions suivantes :

1. $f(x)=|2x-1|-4$
2. $f(x)=Ent\left(\dfrac{x}{3}-2\right)$
3. $f(x)=|x^2-3x+2|$
4. $f(x)=(x-Ent(x))^2$
5. $f(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{3}\sqrt{|x^2-9|}$
6. $f(x)=x\,Ent\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Corrigé de la feuille d'exercices n°2

Exercice 1 (*)

1. Il faut résoudre l'inéquation $x^2 - x - 2 \geqslant 0$. Le trinome correspondant a pour discriminant $\Delta = 1 + 8 = 9$, donc admet deux racines réelles $x_1 = \frac{1+3}{2} = 2$ et $x_2 = \frac{1-3}{2} = -1$. Le trinome étant positif en-dehors des racines, $\mathcal{D}_f =]-\infty; -1] \cup [2; +\infty[$.
2. L'exponentielle est là pour faire joli, ce qui est important c'est d'avoir $2x+3 > 0$, soit $x > -\frac{3}{2}$, donc $\mathcal{D}_f = \left]-\frac{3}{2}; +\infty\right[$.
3. Le dénominateur interdit les valeurs -1 et 1. Reste à vérifier quand le numérateur est positif. C'est le cas en-dehors de ses racines 0 et -1, donc $\mathcal{D}_f =]-\infty; -1[\cup]0; 1[\cup]1; +\infty[$.
4. Il faut déterminer quand $x^5 + 1 > 0$, autrement dit quand $x^5 > -1$. Or, on sait que $x \mapsto x^5$ est une fonction strictement croissante, et que $(-1)^5 = -1$, donc $x^5 > -1 \Leftrightarrow x > -1$ et $\mathcal{D}_f =]-1; +\infty[$.

Exercice 2 (* à **)

1. La fonction f n'est ni paire ni impaire (à cause du $+1$). Pour le prouver de façon rigoureuse, le plus simple est de trouver une valeur de x pour laquelle on n'a ni $f(-x) = f(x)$, ni $f(-x) = -f(-x)$. Ici, par exemple, $f(2) = 61$ et $f(-2) = -59$, ce qui est incompatible avec le fait que f soit paire ou impaire.
2. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et paire puisque $\forall x \neq 0$, $f(-x) = \ln(|-x|) = \ln(|x|) = f(x)$.
3. Cette fonction très laide est paire : elle est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-\sqrt{2}; 0; \sqrt{2}\}$ (ce qui est sous la racine est toujours strictement positif ; par contre les trois valeurs enlevées annulent le premier dénominateur) et $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = \frac{1}{((-x)^3 - 2\times(-x))^2} \times \frac{(-x)^4}{\sqrt{(-x)^2+2}} = \frac{1}{(2x - x^3)^2} \times \frac{x^4}{\sqrt{x^2+2}} = f(x)$ car $(2x - x^3)^2 = (x^3 - 2x)^2$ (prendre la carré d'un nombre ou de son opposé donne toujours le même résultat).
4. Cette fonction est définie sur $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$, et elle est paire : $f(-x) = |2(-x)^2 - e^{(-x)^4} + \ln((-x)^2 - 1)| = |2x^2 - e^{x^4} + \ln(x^2 - 1)| = f(x)$.
5. Cette dernière fonction est définie sur $]-1; 1[$, et elle est impaire : $f(-x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = -\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -f(x)$ (on a simplement utilisé le fait que $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$).

Exercice 3 (* à **)

1. $f'(x) = \frac{1}{1+x}$; on a donc $f(1) = 1 + \ln 2$ et $f'(1) = \frac{1}{2}$, et l'équation de la tangente recherchée est $y = \frac{1}{2}(x-1) + 1 + \ln 2 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + \ln 2$.
2. $f'(x) = \frac{1 + e^x - e^x(1+x)}{(1+e^x)^2} - 1 = \frac{1 - xe^x}{(1+e^x)^2} - 1$ (inutile de s'embêter à mettre au même dénominateur si on n'a pas l'intention d'étudier ensuite les variations de la fonction). On a donc $f(1) = \frac{2}{1+e} - 1 = \frac{1-e}{1+e}$ et $f'(1) = \frac{1-e}{(1+e)^2} - 1 = -\frac{e(e+3)}{(1+e)^2}$, donc l'équation de

la tangente est $y = -\frac{e(e+3)}{(1+e)^2}(x-1) + \frac{1-e}{1+e} = -\frac{e(e+3)}{(1+e)^2}x + \frac{e(e+3)+(1-e)(1+e)}{(1+e)^2} = -\frac{e(e+3)}{(1+e)^2}x + \frac{3e+1}{(1+e)^2}$.

3. $f'(x) = \frac{2+\frac{3}{x^2}}{2x-\frac{3}{x}} = \frac{2x^2+3}{x(2x^2-3)}$. La fonction n'étant pas définie en 1, on ne peut pas calculer l'équation d'une tangente qui n'existe pas !
4. $f'(x) = \frac{2e^{2x}(x^2-1)-2xe^{2x}}{(x^2-1)^2} = \frac{2(1-x)e^{2x}}{(x^2-1)^2}$. Cette fonction n'étant même pas définie en 1, elle ne risque pas d'y admettre une tangente, donc on peut arrêter là pour les calculs.
5. On a $f(x) = e^{\frac{1}{x}\ln x}$, donc $f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\ln x + \frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}\ln x} = \frac{1-\ln x}{x^2}x^{\frac{1}{x}}$. On a donc $f(1) = 1$ et $f'(1) = 0$, la tangente est donc horizontale d'équation $y = 1$.

Exercice 4 (** à ***)

1. Le plus efficace est de tout regrouper sous un seul ln de chaque côté, même si les calculs sont assez moches (on se souciera exceptionnellement du domaine de définition après le calcul) :

$$\begin{array}{rcl} \ln((x+1)^2)+\ln(3x+5)+\ln 2 & = & \ln(6x+1)+\ln((x-2)^2) \\ \ln(2(x^2+2x+1)(3x+5)) & = & \ln((6x-1)(x^2-4x+4)) \\ 6x^3+22x^2+26x+10 & = & 6x^3-25x^2+28x-4 \\ 47x^2-2x+14 & = & 0 \end{array}$$

Le discriminant de l'équation du second degré que nous obtenons étant très négatif, il n'y a pas de solution réelle, donc $\mathcal{S} = \emptyset$.

2. En faisant passer quelques termes à droite, on obtient $2^{3x-1} = 5^{x+1} - 5^x = 5^x(5-1) = 4\times 5^x$, soit en prenant le ln des deux côtés $(3x-1)\ln 2 = \ln 4 + x\ln 5$, donc $x(3\ln 2 - \ln 5) = 3\ln 2$, et $x = \frac{3\ln 2}{3\ln 2 - \ln 5}$, donc $\mathcal{S} = \left\{\frac{3\ln 2}{3\ln 2-\ln 5}\right\}$.
3. Cette équation n'a de sens que si $x > 0$ (on peut éventuellement extrapoler que 0 va aussi être solution de l'équation, si on arrive à donner un sens à 0^0). En prenant les ln, on obtient alors $\sqrt{x}\ln x = x\ln(\sqrt{x}) = x\frac{\ln x}{2}$, donc $\ln x\left(\sqrt{x}-\frac{x}{2}\right) = 0$. On en déduit que soit $\ln x = 0$, c'est-à-dire $x = 1$, soit $\sqrt{x} = \frac{x}{2}$, auquel cas on obtient en élevant au carré (on peut, tout est positif) $x = \frac{x^2}{4}$, soit $x(x-4) = 0$, donc $x = 4$ (0 ayant été exclu dès le départ). Conclusion : $\mathcal{S} = \{1; 4\}$.
4. Celle-ci est un piège assez vicieux. On ne sait pas vraiment résoudre ce genre d'équation, mais on peut constater que $x \mapsto x^{\frac{1}{4}} + 2x^{\frac{5}{3}} - 3$ est une fonction strictement croissante sur son domaine de définition $]0; +\infty[$, et qu'elle prend pour valeur 0 en 1. Elle ne peut donc pas s'annuler plus d'une fois et $\mathcal{S} = \{0\}$.
5. Ca doit presque être un réflexe pour ce genre d'équations : on pose $X = e^{-2x}$ et on obtient $X^3+3X^2-X-3 = 0$. On constate (comme d'habitude) que 1 est racine évidente de l'équation, et on peut donc écrire $(X^3+3X^2-X-3) = (X-1)(aX^2+bX+c) = aX^3+(b-a)X^2+(c-b)X-c$, soit après identification $a = 1$; $b = 4$ et $c = 3$. Reste à résoudre $X^2+4X+3 = 0$, équation ayant pour discriminant $\Delta = 16-12 = 4$ et pour racines réelles $X_1 = \frac{-4+2}{2} = -1$ et $X_2 = \frac{-4-2}{2} = -3$. Ces deux dernières valeurs n'étant pas très compatibles avec le changement de variable effectué, la seule possibilité restante est $e^{-2x} = 1$, ce qui donne $x = 0$, donc $\mathcal{S} = \{0\}$.

6. Posons $X = 8^{3x}$, on cherche alors à résoudre $X^2 - 3X - 4 \leqslant 0$, inéquation ayant pour discriminant $\Delta = 9 + 16 = 25$, soit deux racines réelles $X_1 = \dfrac{3-5}{2} = -1$ et $X_2 = \dfrac{3+5}{2} = 4$. On doit donc avoir $-1 \leqslant 8^{3x} \leqslant 4$. La première inégalité est toujours vérifiée, puisque la puissance est nécessairement positive. Quant à la deuxième, elle devient, en passant au ln, $3x \ln 8 \leqslant \ln 4$, soit $x \leqslant \dfrac{\ln 8}{3 \ln 4}$. Comme $\dfrac{\ln 4}{3 \ln 8} = \dfrac{2 \ln 2}{9 \ln 2} = \dfrac{2}{9}$, on a donc $\mathcal{S} = \left]-\infty; \dfrac{2}{9}\right]$.
7. La deuxième équation du système peut se traduire par $\log(xy) = 4$, soit, en passant à l'exponentielle de base 10, $xy = 10^4 = 10\ 000$. Les réels x et y sont alors solutions de l'équation $x^2 - 520x + 10\ 000 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 520^2 - 40\ 000 = 230\ 400$, et admet deux racines réelles $x_1 = \dfrac{520 - 480}{2} = 20$ et $x_2 = \dfrac{520 + 480}{2} = 500$ (notez qu'on peut facilement vérifier que ces deux nombres sont solutions du problème posé). On a donc $\mathcal{S} = \{(20; 500); (500; 20)\}$.

Exercice 5 (**)

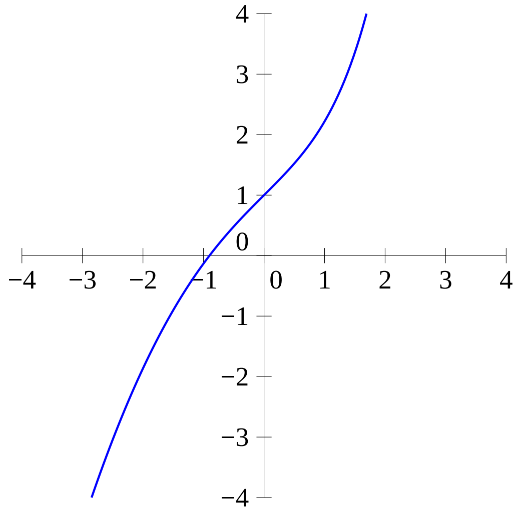
1. La fonction $x \mapsto -2x + 3$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, et l'exponentielle est strictement croissante, donc la composée $x \mapsto e^{-2x+3}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. De plus, elle est à valeurs dans $]0; +\infty[$ (une exponentielle est toujours positive), intervalle sur lequel la fonction inverse est décroissante. Conclusion : $x \mapsto \dfrac{1}{e^{-2x+3}}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme on multiplie ceci par $-\dfrac{5}{2}$, le sens de variation change encore une fois, et f est finalement décroissante sur $\mathbb{R}$.
2. Soustraire 3 à la fin ne changera pas le sens de variation, concentrons-nous donc sur le carré. La fonction $x \mapsto e^x + 2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, à valeurs strictement positives, et la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. Cette fois-ci c'est différent, car $e^x - 3$ ne prend pas toujours des valeurs positives. Plus précisément $e^x - 3 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant \ln 3$. Sur $]-\infty; \ln 3]$, $x \mapsto e^x - 3$ est donc croissante et à valeurs dans $]-\infty; 0]$, intervalle sur lequel la fonction carré est décroissante. La fonction f est donc strictement décroissante sur $]-\infty; \ln 3]$. Sur $[\ln 3; +\infty[$, $x \mapsto e^x - 3$ est croissante et à valeurs positives, et cette fois f sera strictement croissante.
4. Commençons par constater que f n'est pas définie partout : $e^{-x} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{-x} > 1 \Leftrightarrow x < e$. Ensuite, la fonction $x \mapsto -x$ étant strictement décroissante sur $]e; +\infty[$, et les fonctions exponentielle et ln strictement croissantes sur leurs ensembles de définition, on en déuit facilement que f est strictement décroissante sur $]e; +\infty[$
5. Notre dernière fonction est définie si $\dfrac{x+1}{x-1} > 0$, soit $\mathcal{D}_f =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ (un petit tableau de signe pour le vérifier). Pour obtenir son sens de variations, il peut être utile de faire la petite modification suivante : $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) = \ln\left(\dfrac{x-1+2}{x-1}\right) = \ln\left(1 + \dfrac{2}{x-1}\right)$. La fonction $x \mapsto \dfrac{2}{x-1}$ étant strictement décroissante sur $]-\infty; -1[$ et sur $]1; +\infty[$, et le logarithme népérien étant strictement croissant sur son ensemble de définition, la fonction f est donc strictement décroissante sur $]-\infty; -1[$, ainsi que sur $]1; +\infty[$.

Exercice 6 (* à ***)

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = e^x - x$ et de dérivée seconde $f''(x) = e^x - 1$. La fonction f'' s'annule en 0, donc on obtient pour f' le tableau de variations suivant :

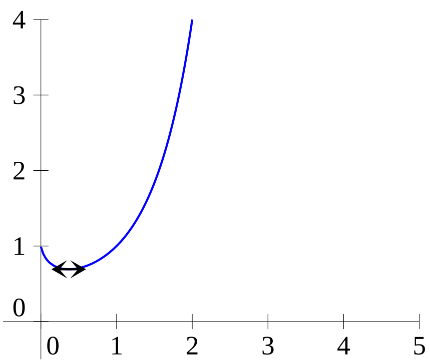
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

(les limites ne posent pas de difficulté de calcul). Comme $1 > 0$, f' est toujours strictement positive, et f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Les limites de f se calculent elles aussi assez facilement : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ (pas de forme indéterminée ici), et en $+\infty$, on peut écrire $f(x) = e^x\left(1 - \dfrac{x^2}{2e^x}\right)$, où la parenthèse a pour limite 1 par croissance comparée, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Pour tracer à la main une courbe représentative correcte, il faudrait calculer quelques points car on manque cruellement d'informations. On peut toujours constater que $f(0) = 1$. En tout cas, la courbe ressemble à ceci :



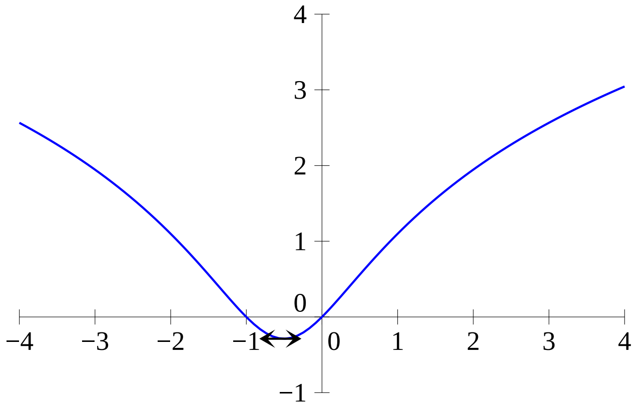
2. La fonction f est définie sur $]0; +\infty[$, et on peut l'écrire sous forme exponentielle $f(x) = e^{x\ln x}$. Elle a donc pour dérivée $f'(x) = (\ln x + 1)e^{x\ln x}$. Cette dérivée s'annule lorsque $\ln x = -1$, c'est-à-dire pour $x = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$, et f est donc décroissante sur $\left]0; \dfrac{1}{e}\right]$ et croissante sur $\left[\dfrac{1}{e}; +\infty\right[$. On peut calculer les limites de f : $\lim\limits_{x\to0} x\ln x = 0$ (croissance comparée), donc $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 1$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (pas de problème pour celle-là). Après avoir calculé $f\left(\dfrac{1}{e}\right) = e^{\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}} = e^{-\frac{1}{e}}$, on obtient le tableau de variations et la courbe suivants :

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
f	1	$\searrow$	$e^{-\frac{1}{e}}$	$\nearrow$	$+\infty$



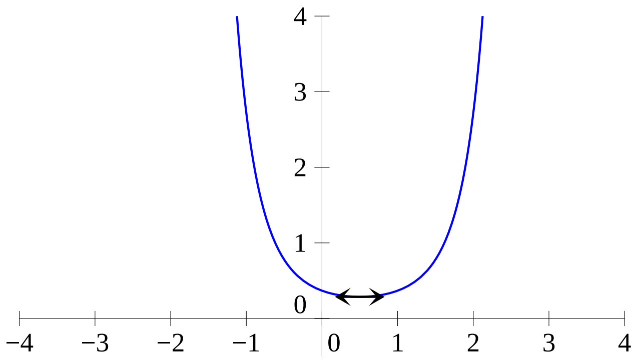
3. Intéressons-nous pour commencer au domaine de définition de f, et cherchons pour cela les racines du trinome $1+x+x^2$. Il a pour discriminant $\Delta = 1-4 = -3$, donc est toujours du signe de 1, à savoir positif. La fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}$. Elle a pour dérivée $f'(x) = \dfrac{1+2x}{(1+x+x^2)^2}$, qui s'annule pour $x = -\dfrac{1}{2}$. Comme $\lim\limits_{x\to\pm\infty} 1+x+x^2 = +\infty$, on a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, et de plus $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \ln\dfrac{3}{4} = \ln 3 - \ln 4$, d'où le tableau et la courbe suivants :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	$\ln 3 - \ln 4$	$\nearrow$	$+\infty$



4. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = (2x-1)e^{x^2-x-1}$, qui s'annule pour $x = \dfrac{1}{2}$. Comme $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2-x-1 = +\infty$, on a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$. De plus $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = e^{-\frac{5}{4}}$, d'où le tableau et la courbe suivants :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	$e^{-\frac{5}{4}}$	$\nearrow$	$+\infty$



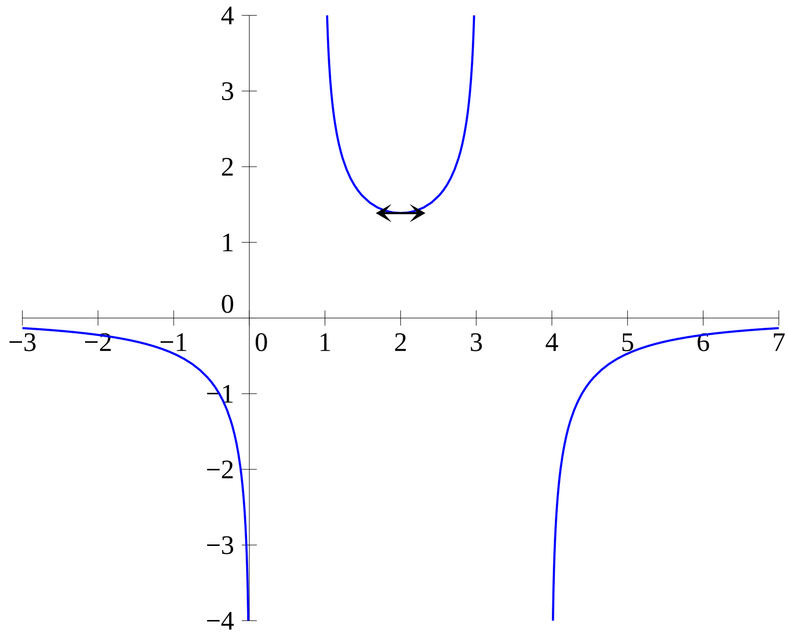
5. Il faut commencer par déterminer le domaine de définition de f, et pour cela faire un joli tableau de signes. Le dénominateur a pour discriminant $\Delta = 16-12 = 4$, et admet donc deux racines réelles $x_1 = \dfrac{4+2}{2} = 3$ et $x_2 = \dfrac{4-2}{2} = 1$. D'où le tableau :

x		0		1		3		4	
x^2-4x	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$
x^2-4x+3	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$
$\frac{x^2-4x}{x^2-4x+3}$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$

On a donc $\mathcal{D}_f =]-\infty;0[\cup]1;3[\cup]4;+\infty[$. Sur cet ensemble, f a pour dérivée $f'(x) = \dfrac{(2x-4)(x^2-4x+3)-(2x-4)(x^2-4x)}{(x^2-4x+3)^2} \times \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-4x} = \dfrac{3(2x-4)}{(x^2-4x+3)^2} \times \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-4x} = \dfrac{6(x-2)}{(x^2-4x)(x^2-4x+3)}$. Le dénominateur étant strictement positif sur $\mathcal{D}_f$ (c'est un produit au lieu d'un quotient, mais le tableau de signes est exactement celui qu'on a fait ci-dessus), f' est du signe de $x-2$. Par ailleurs, $f(2) = \ln \dfrac{-4}{-1} = 2\ln 2$

Restent quelques limites un peu pénibles à calculer. Les plus faciles sont les limites en 0 et en 4 : quand le numérateur s'annule, le quotient à l'intérieur du ln tend vers 0, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = -\infty$. En 1 et 3, c'est à peine plus compliqué : le dénominateur s'annule donc le quotient tend vers $+\infty$ (ça ne peut pas être $-\infty$ puisque f ne serait pas définie si le quotient prenait des valeurs négatives), et on en déduit que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = +\infty$. Enfin, vos souvenirs sur le calculs de limites de Terminale devraient vous permettre de vérifier que la limite du quotient en $\pm\infty$ vaut 1 (on factorise par x^2 en haut et en bas), d'où $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Ce qui nous donne un tableau et une courbe ressemblant à ceci :

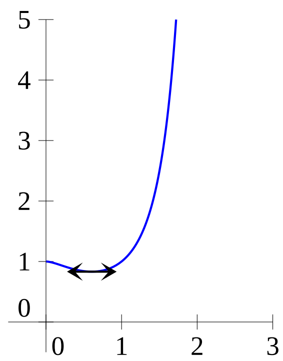
x	$-\infty$			0	1			2			3	4			$+\infty$
f	0	$\searrow$	$-\infty$	$\Vert$	$\Vert$	$+\infty$	$\searrow$	$2\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$	$\Vert$	$\Vert$	$-\infty$	$\nearrow$	0



6. Cette fonction est définie sur $]0;+\infty[$, et s'écrit sous forme exponentielle $f(x) = e^{x^2\ln x}$. Elle a pour dérivée $f'(x) = (2x\ln x + x)e^{x^2\ln x} = x(2\ln x+1)e^{x^2\ln x}$. Le facteur x est toujours strictement positif sur $\mathcal{D}_f$, seul compte donc le signe de $2\ln x + 1$. Ceci s'annule pour $x = e^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$. Le calcul des limites est extrêmement similaire à celui de la deuxième fonction de

l'exercice, au point d'ailleurs que les limites sont les mêmes, on a $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = e^{-\frac{1}{2e}}$ et on obtient tableau et courbe :

x	0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$		$+\infty$
f	1	$\searrow$	$e^{-\frac{1}{2e}}$	$\nearrow$	$+\infty$



Exercice 7 (**)

Le plus simple pour montrer ce genre d'inégalité, c'est en fait une étude de fonction. Posons donc $f(x) = \ln x - x + 1$, fonction définie sur $]0; +\infty[$, et essayons de montrer que f est toujours positive. Pour cela, petite étude de variations : $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$. La fonction f est donc strictement décroissante sur $]0; 1]$ et strictement croissante sur $[1; +\infty[$, elle admet un minimum global en 1 de valeur $f(1) = 0 - 1 + 1 = 0$, donc elle est effectivement à valeurs positives, ce qui prouve l'inégalité demandée.

Même principe dans le deuxième cas : on pose $g(x) = (1+x)^{\frac{1}{4}} - 1 - \frac{x}{4} + \frac{3x^2}{32}$, définie sur $[0; +\infty[$. On a $g'(x) = \frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{4}} - \frac{1}{4} + \frac{3x}{16}$, puis $g''(x) = -\frac{3}{16}(1+x)^{-\frac{7}{4}} + \frac{3}{16} = \frac{3}{16}\left(1 - (1+x)^{-\frac{7}{4}}\right)$. Comme x est supposé positif, $1 + x \geqslant 1$, donc $(1+x)^{-\frac{7}{4}} \leqslant 1$ sur $\mathcal{D}_g$ et g'' est toujours positive. Autrement dit, g' est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme par ailleurs $g'(0) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 0 = 0$, la fonction g' est elle-même positive sur $\mathbb{R}_+$, et g est donc croissante. Reste à vérifier que $g(0)$ est positif : $g(0) = 1 - 1 - 0 + 0 = 0$. La fonction g est donc à valeurs positives, ce qui prouve l'inégalité demandée.

Exercice 8 (* à **)

1. $|x - 3| \geqslant 5$ signifie que $x - 3 \geqslant 5$ ou $x - 3 \leqslant -5$, d'où $\mathcal{S} =]-\infty; -2] \cup [8; +\infty[$.
2. $|2x - 4| = |3x + 2| \leftrightarrow 2x - 4 = 3x + 2$ ou $2x - 4 = -3x - 2$ soit $-x = 6$ ou $5x = 2$, et $\mathcal{S} = \left\{-6; \frac{2}{5}\right\}$
3. $|x^2 - 8x + 11| = 4$ revient à dire que $x^2 - 8x + 11 = 4$ ou $x^2 - 8x + 11 = -4$. Il ne reste plus qu'à résoudre ces deux équations du second degré. La première a pour discriminant $\Delta = 64 - 4 \times 7 = 36$, et admet deux racines réelles $x_1 = \frac{8-6}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{8+6}{2} = 7$. La deuxième a pour discriminant $\Delta = 64 - 4 \times 15 = 4$, et admet deux racines réelles $x_3 = \frac{8-2}{2} = 3$ et $x_4 = \frac{8+2}{2} = 5$. Finalement, $\mathcal{S} = \{1; 3; 5; 7\}$.

4. Pas besoin de se fatiguer pour celle-là, le membre de gauche étant manifestement positif (c'et une somme de deux valeurs absolues), il ne sera jamais strictement inférieur à -2, donc $\mathcal{S} = \emptyset$.
5. Il n'y a pas de méthodes fiables pour s'en sortir par le calcul, le mieux est donc d'écrire l'inéquation sous la forme $|x-2| - |4x+2| \geqslant 0$, et de faire un « tableau de signes »pour simplifier le membre de gauche :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$\lvert x-2\rvert$		$-x+2$	|	$-x+2$	0	$x-2$	
$\lvert 4x+2\rvert$		$-4x-2$	0	$4x+2$	|	$4x+2$	
$\lvert x-2\rvert - \lvert 4x+2\rvert$		$3x+4$	|	$-5x$	|	$-3x-4$	

Comme $3x+4 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -\frac{4}{3}$, les réels de l'intervalle $\left[-\frac{4}{3}; -\frac{1}{2}\right]$ sont solutions de l'équation initiale (on ne garde bien sûr que les valeurs de x appartenant à l'intervalle sur lequel l'expression $3x+4$ est valide). De même, on a $-5x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 0$, donc l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}; 0\right]$ est aussi solution. Enfin, $-3x-4 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant -\frac{4}{3}$, ce qui n'ajoute pas de solutions. En regroupant le tout, on obtient donc $\mathcal{S} = \left[-\frac{4}{3}; 0\right]$.
6. Ici, difficile d'être tenté de faire quoi que ce soit d'autre qu'un tableau :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		3		7		$+\infty$
$\lvert 2x-3\rvert$		$-2x+3$	0	$2x-3$	|	$2x-3$	|	$2x-3$	
$\lvert 3-x\rvert$		$3-x$	|	$3-x$	0	$-3+x$	|	$-3+x$	
$\lvert x-7\rvert$		$-x+7$	|	$-x+7$	|	$-x+7$	0	$x-7$	
$\lvert 2x-3\rvert + \lvert 3-x\rvert - \lvert x-7\rvert$		$-2x-1$	|	$2x-7$	|	$4x-13$	|	$2x+1$	

Ne restent plus qu'à résoudre pas moins de quatre équations, et à vérifier si les solutions obtenus appartiennent au bon intervalle à chaque fois : $-2x-1 = 2 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$, solution acceptable ; $2x-7 = 2 \Leftrightarrow x = \frac{9}{2}$, solution rejetée ; $4x-13 = 2 \Leftrightarrow x = \frac{15}{4}$, solution acceptable ; $2x+1 = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$, solution rejetée. Bilan : $\mathcal{S} = \left\{-\frac{3}{2}; \frac{15}{4}\right\}$.
7. $|e^x - 3| < 1 \Leftrightarrow -1 < e^x - 3 < 1 \Leftrightarrow 2 < e^x < 4 \Leftrightarrow \ln 2 < x < \ln 4$, donc $\mathcal{S} =]\ln 2; \ln 4[$.
8. On peut commencer par constater que le second membre doit être positif pour que l'équation puisse avoir une solution, et donc résoudre uniquement sur $[5; +\infty[$. On a alors, en élevant au carré (tout est positif) $|x^2 - 1| = (x-5)^2$, soit $x^2 - 1 = x^2 - 10x + 25$ (la valeur absolue à gauche est superflue, ce qui est à l'intérieur est positif sur notre intervalle d'étude). Reste la très simple équation $10x = 26$, dont la solution n'appartient pas à notre intervalle d'étude, d'où $\mathcal{S} = \emptyset$.

Exercice 9 (**)

1. Un petit tableau permet de régler cette question très vite :

x	$-\infty$		-5		2		$+\infty$
$\lvert x-2\rvert$		$-x+2$	|	$-x+2$	0	$x-2$	
$\lvert x+5\rvert$		$-x-5$	0	$x+5$	|	$x+5$	
$\lvert x-2\rvert + \lvert x+5\rvert$		$-2x-3$	|	7	|	$2x+3$	

On a donc $|x-2|+|x+5| = \begin{cases} -2x-3 & \text{si} \quad x \leqslant -5 \\ 7 & \text{si} \quad -5 \leqslant x \leqslant 2 \\ 2x+3 & \text{si} \quad x \geqslant 2 \end{cases}$.

2. Cette fois-ci, il suffit d'étudier le signe du trinome à l'intérieur de la valeur absolue. Celui-ci a pour discriminant $\Delta = 25 - 24 = 1$ et admet deux racines réelles $x_1 = \frac{5+1}{6} = 1$ et $x_2 = \frac{5-1}{6} = \frac{2}{3}$, donc $|3x^2-5x+2| = 3x^2-5x+2$ si $x \in \left]-\infty; \frac{2}{3}\right] \cup [1; +\infty[$, et $|3x^2-5x+2| = -3x^2+5x-2$ si $x \in \left[\frac{2}{3}; 1\right]$.
3. Il n'y a même pas besoin de calculs ici : $\ln(|x^2-4|) = \ln(x^2-4)$ si $x \in]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$, et $\ln(|x^2-4|) = \ln(-x^2+4)$ si $x \in]-2; 2[$ (et si $x = 2$ ou $x = -2$, l'expression n'est pas définie).
4. Constatons que $\sqrt{2x^2-8x+8} = \sqrt{2(x-2)^2} = |\sqrt{2}(x-2)|$. reste à faire un petit tableau :

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		2		$+\infty$
$\|2-3x\|$		$2-3x$	0	$-2+3x$	$\|$	$-2+3x$	
$\|\sqrt{2}(x-2)\|$		$-\sqrt{2}(x-2)$	$\|$	$-\sqrt{2}(x-2)$	0	$\sqrt{2}(x-2)$	
$\|2-3x\|+\|\sqrt{2}(x-2)\|$		$(-3+\sqrt{2})x+2-2\sqrt{2}$	$\|$	$(3+\sqrt{2})x-2-2\sqrt{2}$	$\|$	$(3-\sqrt{2})x-2+2\sqrt{2}$	

   Je suis certain que vous serez capable de faire une jolie phrase de conclusion tous seuls si vous le souhaitez.
5. La valeur absolue du dénominateur est totalement superflue puisque celui-ci est toujours strictement positif. On a donc $\frac{e^{|x+1|}}{|e^{x+1}|} = \frac{e^{-x-1}}{e^{x+1}} = e^{-2x-2}$ si $x \leqslant -1$; et $\frac{e^{|x+1|}}{|e^{x+1}|} = 1$ si $x \geqslant -1$.

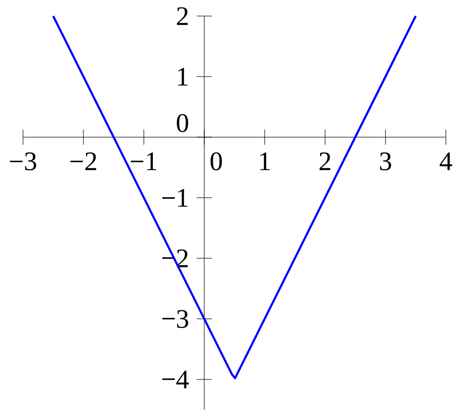
Exercice 10 (un bon ***)

1. Une façon de caractériser la partie entière est de dire qu'il s'agit de l'unique entier vérifiant $Ent(x) \leqslant x < Ent(x)+1$. Mais alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $Ent(x)+n \leqslant x+n < Ent(x)+n+1$. Le nombre $Ent(x)+n$ étant un entier (c'est la somme de deux entiers !) et vérifiant la caractérisation de $Ent(x+n)$, on a bien $Ent(x+n) = Ent(x)+n$.
2. Comme $Ent(x) \leqslant x$ et $Ent(y) \leqslant y$, on a $Ent(x)+Ent(y) \leqslant x+y$. Un entier inférieur à un réel est nécessairement inférieur à sa partie entière, donc $Ent(x)+Ent(y) \leqslant Ent(x+y)$. Par contre, il n'y a pas toujours égalité : prenons par exemple $x = 1,7$ et $y = 2,9$, alors $Ent(x)+Ent(y) = 1+2 = 3$, mais $Ent(x+y) = Ent(4,6) = 4$.
3. Notons pour simplifier $p = Ent(x)$. On a donc $p \leqslant x \leqslant p+1$, d'où $\frac{p}{2} \leqslant \frac{x}{2} \leqslant \frac{p+1}{2}$, et $\frac{p+1}{2} \leqslant \frac{x+1}{2} \leqslant \frac{p+2}{2}$. Si p est un entier pair, alors $\frac{p}{2}$ et $\frac{p+2}{2}$ sont deux entiers consécutifs, et $Ent\left(\frac{x}{2}\right) = Ent\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{p}{2}$ et leur somme vaut bien p. Si p est impair, par contre, $\frac{p+1}{2}$ est un entier, et l'entier qui lui est juste inférieur est $\frac{p-1}{2}$. On a alors $Ent\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{p-1}{2}$, et $Ent\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{p+1}{2}$, mais la somme de ces deux nombres vaut toujours p ! Dans les deux cas, l'égalité est donc vérifiée.
4. Notons encore une fois p la partie entière de x, et q celle de nx. Comme $p \leqslant x < p+1$, on a $np \leqslant nx < n(p+1)$, donc $np \leqslant q < n(p+1)$. Il en résulte que $p \leqslant \frac{q}{n} < p+1$, ce qui prouve exactement que $Ent\left(\frac{Ent(nx)}{n}\right) = p$.

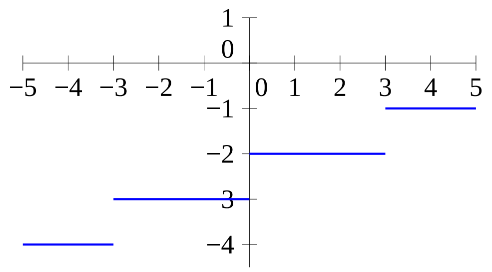
Exercice 11 (** à ***)

1. La fonction $x \mapsto 2x - 1$ est toujours croissante, et s'annule en $\frac{1}{2}$. De là, il est aisé d'obtenir le tableau de variations de f, ainsi que sa courbe :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f		$\searrow$	-4	$\nearrow$	

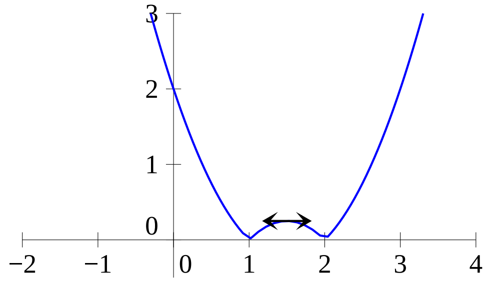


2. Soit $p \in \mathbb{N}$, les réels antécédents de p par f sont les solutions de l'encadrement $p \leqslant \frac{x}{3} - 2 < p + 1$, ce qui revient à $3p + 6 \leqslant x < 3p + 9$. La fonction f prend donc la valeur p sur les intervalles de la forme $[3p + 6; 3p + 9[$: elle est nulle sur $[6; 9[$, vaut 1 sur $[9; 12[$ etc. Voici sa courbe représentative :

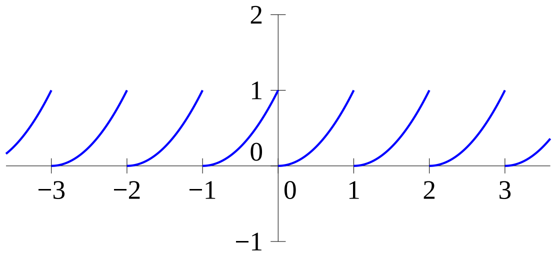


3. On commence par étudier variations et signe de ce qui se trouve à l'intérieur de la valeur absolue. Le trinome a pour discriminant $\Delta = 9 - 8 = 1$, et admet deux racines réelles $x_1 = \frac{3+1}{2} = 2$ et $x_2 = \frac{3-1}{2} = 1$. De plus, $x^2 - 3x + 2$ a pour dérivée $2x - 3$, et admet donc un minimum en $x = \frac{3}{2}$, de valeur $\frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 2 = -\frac{1}{4}$. On en déduit le tableau et la courbe :

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

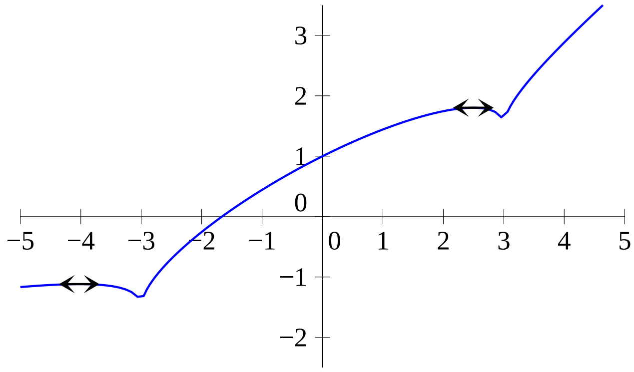


4. Si on connait bien son cours, on doit se rappeler y avoir vu que la fonction partie fractionnaire était périodique de période 1. Or la fonction f n'est autre que le carré de la partie fractionnaire, elle est donc également périodique de période 1, et on peut donc se contenter de l'étudier sur l'intervalle $[0;1[$. Sur cet intervalle, on a $Ent(x) = 0$, donc f n'est autre que la fonction carré. Finalement, la courbe de f est donc une répétition de morceaux de parabole :

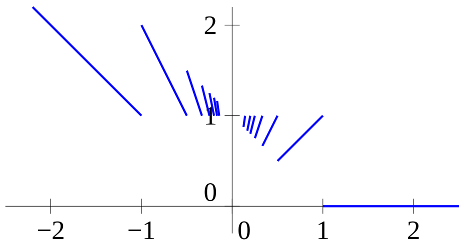


5. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, mais il vaut mieux essayer de l'exprimer de différentes façons selon la valeur de x. Si $x \geqslant 3$, on a $f(x) = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{3}\sqrt{x^2-9}$, et la fonction est croissante sur $[3;+\infty[$ en tant que somme de deux fonction croissantes. Sur les deux autres intervalles à étudier, les calculs vont être un tout petit peu plus pénibles... Començons par exemple par $[-3;3]$, intervalle sur lequel $f(x) = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{3}\sqrt{9-x^2}$. On a sur cet intervalle $f'(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}\dfrac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}} = \dfrac{3\sqrt{9-x^2}-2x}{6\sqrt{9-x^2}}$. Cette dérivée est positive sur $[-3;0]$, mais s'annule lorsque $x > 0$ et $3\sqrt{9-x^2} = 2x$, soit (en passant tout au carré) $9(9-x^2) = 4x^2$, ou encore $81 = 13x^2$. La fonction f est donc croissante sur $\left[-3;\sqrt{\dfrac{81}{13}}\right]$, et décroissante sur $\left[\sqrt{\dfrac{81}{13}};3\right]$ (pour information, la valeur un peu bizarre vaut environ $2,5$). Ne reste plus qu'à s'occuper de l'intervalle $]-\infty;-3]$, où la fonction est égale à $\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{3}\sqrt{x^2-9}$. Un calcul extrêmement similaire au précédent montre que la dérivée s'annule lorsque $3\sqrt{x^2-9} = -2x$, soit $9(x^2-9) = 4x^2$. On obtient donc un autre minimum local pour $x = -\sqrt{\dfrac{81}{5}}$ (un peu avant -4). On peut même, avec un peu de motivation, calculer les valeurs de nos maxima locaux : $f\left(-\dfrac{9}{\sqrt{5}}\right) = -\dfrac{9}{2\sqrt{5}} + \dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{81}{5}} = -\dfrac{9}{2\sqrt{5}} + \dfrac{6}{3\sqrt{5}} = -\dfrac{5}{2\sqrt{5}} = -\dfrac{\sqrt{5}}{2} \simeq -1,12$. De même, on obtient $f\left(\dfrac{9}{\sqrt{13}}\right) = \dfrac{\sqrt{13}}{2} \simeq 1,8$ Voici donc le magnifique tableau de variations et la non moins superbe courbe représentative de la fonction f :

x	$-\infty$		$-\frac{9}{\sqrt{5}}$		-3		$\frac{9}{\sqrt{13}}$		3		$+\infty$
f		$\nearrow$	$-\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{13}}{2}$	$\searrow$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	



6. Ici, le plus simple est de découper $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ (la fonction n'est pas définie en 0) selon les valeurs de $Ent\left(\frac{1}{x}\right)$. Si $x > 1$, $0 < \frac{1}{x} < 1$, donc $f(x) = 0$. Si $\frac{1}{2} < x \leqslant 1$, $1 \leqslant \frac{1}{x} < 1$, donc $f(x) = x$. De même, si $x \in \left]\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]$, $f(x) = 2x$ etc. Visuellement, on a quand on se rapproche de 0 des segments de droite de pente de plus en plus forte mais sur une longueur de plus en plus réduite. Du côté négatif, c'est un peu similaire, mais f n'est jamais nulle : $f(x) = -x$ sur $]-\infty; -1[$, puis $f(x) = -2x$ sur $\left[-1; -\frac{1}{2}\right[$ etc. Difficile de tracer entièrement la courbe, mais ça ressemble à ceci :



Feuille d'exercices n°3 : Sommes, produits, récurrences

ECE3 Lycée Carnot

21 septembre 2010

Exercice 1 (*)

Exprimer à l'aide du symbole Σ les expressions suivantes :

1. $S_1 = 3^2 + 3^3 + 3^4 + \cdots + 3^{15}$
2. $S_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{4} + \dfrac{3}{8} + \dfrac{4}{16} + \cdots + \dfrac{10}{1\ 024}$
3. $S_3 = a + \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{a^3}{3} + \cdots + \dfrac{a^n}{n}$
4. $S_4 = 2 - 4 + 6 - 8 + \cdots + 50$

Exercice 2 (** à ***)

Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} (2k+1)$
2. $\displaystyle\sum_{k=945}^{k=2009} 3$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} (6k^2+4k+1)$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k$
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} k(2k^2-1)$
6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=18} \frac{1}{3^k}$
7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} 3^{2k}$
8. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} 2^k + k^2 + 2$
9. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{2^k}{3^{k+1}}$

Exercice 3 (**)

Déterminer trois réels a, b et c tels que $\forall k \geqslant 2$, $\dfrac{k-5}{k(k^2-1)} = \dfrac{a}{k-1} + \dfrac{b}{k} + \dfrac{c}{k+1}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=2}^{k=n} \frac{k-5}{k(k^2-1)}$.

Exercice 4 (**)

Il s'agit d'une méthode alternative à celle du cours pour calculer la sommes des carrés d'entiers.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} (k+1)^3 - \sum_{k=1}^{k=n} k^3$.

2. En développant $(k+1)^3$, exprimer $\sum_{k=1}^{k=n}(k+1)^3$ à l'aide de sommes classiques.

3. En comparant les deux calculs précédents, retrouver la valeur de $\sum_{k=1}^{k=n} k^2$.

Exercice 5 (***)

Calculer les sommes doubles suivantes :
$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij$; $\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij$; $\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{j}$; $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |i-j|$ et $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} i2^j$

Exercice 6 (**)

Calculer les produits suivants :
1. $\prod_{k=2}^{k=n}\left(1-\frac{1}{k}\right)$ 2. $\prod_{k=2}^{k=n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$ 3. $\prod_{k=1}^{k=n}(6k-3)$

Exercice 7 (***)

Montrer par récurrence les propriétés suivantes :

1. $\forall n \geqslant 4,\ 2^n \leqslant n!$
2. $\forall n \geqslant 1,\ \sum_{k=1}^{k=n} k \times k! = (n+1)! - 1$
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=1}^{k=2^n} \frac{1}{k} \geqslant 1 + \frac{n}{2}$

Exercice 8 (**)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{R},\ u_{n+1} = 2u_n + 1$. Calculer les premiers termes de la suite, émettre une conjecture sur la valeur de u_n, puis la prouver par récurrence.

Exercice 9 (**)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 4n + 6)$. Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2n + \frac{1}{3^n}$.

Exercice 10 (***)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = u_1 = 0$, $u_2 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$. Calculer les premiers termes de la suite, émettre une conjecture sur la valeur de u_n, puis la prouver par récurrence.

Exercice 11 (***)

Le but de cet exercice est de calculer la somme $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} (2k+1)^3$ de trois façons différentes.

1. Écrire S_n sans utiliser de symbole somme. De combien de termes cette somme est-elle composée ?
2. Calculer S_n en développant $(2k+1)^3$.
3. On pose $T_n = \sum_{k=0}^{k=n} (2k)^3$ et $U_n = \sum_{k=0}^{k=2n+1} k^3$. Expliquer pourquoi $U_n = S_n + T_n$ (à l'aide d'une phrase si vous n'arrivez pas à le faire par le calcul).
4. Calculer T_n et U_n.
5. Retrouver la valeur de S_n à l'aide des deux questions précédentes.
6. Prouver par récurrence que $S_n = (n+1)^2(2n^2+4n+1)$.

Corrigé de la feuille d'exercices n°3

Exercice 1 (*)

1. $S_1 = \sum_{i=2}^{i=15} 3^i$
2. $S_2 = \sum_{i=1}^{i=10} \frac{i}{2^i}$
3. $S_3 = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{a^k}{k}$
4. $S_4 = \sum_{i=1}^{i=25} -2i(-1)^i$

Exercice 2 (** à ***)

1. $\sum_{k=1}^{k=n}(2k+1) = 2\sum_{k=1}^{k=n} k + \sum_{k=1}^{k=n} 1 = n(n+1) + n = n(n+2)$
2. $\sum_{k=945}^{k=2009} 3 = 3 \times 1\ 065 = 3\ 195$
3. $\sum_{k=1}^{k=n}(6k^2+4k+1) = 6\sum_{k=1}^{k=n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{k=n} k + \sum_{k=1}^{k=n} 1 = n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + n$
   $= n((n+1)(2n+1) + 2(n+1) + 1) = n(2n^2+5n+4)$
4. $\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^k = \sum_{k=0}^{k=n-1}(-1)^{k+1} = -\frac{1-(-1)^n}{1-(-1)} = \frac{(-1)^n - 1}{2}$
5. $\sum_{k=1}^{k=n} k(2k^2-1) = 2\sum_{k=1}^{k=n} k^3 - \sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n^2(n+1)^2}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n(n+1)-1)}{2}$
   $= \frac{n(n+1)(n^2+n-1)}{2}$
6. $\sum_{k=1}^{k=18} \frac{1}{3^k} = \sum_{k=1}^{k=18}\left(\frac{1}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{k=18}\left(\frac{1}{3}\right)^k - 1 = \frac{1-\frac{1}{3^{19}}}{1-\frac{1}{3}} - 1 = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{19}}\right) - 1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{18}}\right)$
7. $\sum_{k=1}^{k=n} 3^{2k} = \sum_{k=1}^{k=n} 9^k = \sum_{k=0}^{k=n} 9^k - 1 = \frac{1-9^{n+1}}{1-9} - 1 = \frac{9^{n+1}-1}{8} - 1 = \frac{9^{n+1}-9}{8}$
8. $\sum_{k=1}^{k=n} 2^k + k^2 + 2 = \sum_{k=1}^{k=n} 2^k + \sum_{k=1}^{k=n} k^2 + \sum_{k=1}^{k=n} 2 = \sum_{k=0}^{k=n} 2^k - 1 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2n$
   $= 2^{n+1} - 2 + 2n + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 2(2^n + n - 1) + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
9. $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{2^k}{3^{k+1}} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{2}{9}\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{2}{9}\sum_{k=0}^{k=n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{2}{9}\frac{1-(\frac{2}{3})^n}{1-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$

Exercice 3 (**)

Pour déterminer les réels, le mieux est de partir du résultat, tout mettre au même dénominateur puis identifier : $\frac{a}{k-1}+\frac{b}{k}+\frac{c}{k+1} = \frac{ak(k+1)+b(k-1)(k+1)+ck(k+1)}{(k-1)k(k+1)} = \frac{ak^2+ak+bk^2-b+ck^2+ck}{k(k^2-1)}$.
En identifiant, on obtient les conditions $a+b+c=0$; $a+c=1$ et $-b=-5$, soit $b=5$ puis $a=-2$ et $c=-3$ en résolvant le petit système.

On en déduit que $\sum_{k=2}^{k=n} \frac{k-5}{k(k^2-1)} = \sum_{k=2}^{k=n} \frac{-2}{k-1}+\frac{5}{k}+\frac{-3}{k+1} = -2\sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k-1}+5\sum_{k=2}^{k=n}\frac{1}{k}-3\sum_{k=2}^{k=n}\frac{1}{k+1} = -2\sum_{k=1}^{k=n-1}\frac{1}{k}+5\sum_{k=2}^{k=n}\frac{1}{k}-3\sum_{k=3}^{k=n+1}\frac{1}{k} = -2\sum_{k=3}^{k=n-1}\frac{1}{k}-2-1+5\sum_{k=3}^{k=n-1}\frac{1}{k}+\frac{5}{2}+\frac{5}{n}-3\sum_{k=3}^{k=n-1}\frac{1}{k}-\frac{3}{n}-\frac{3}{n+1} = -\frac{1}{2}+\frac{2}{n}-\frac{3}{n+1}$.

Exercice 4 (**)

1. C'est une somme télescopique : $\sum_{k=1}^{k=n}(k+1)^3-\sum_{k=1}^{k=n}k^3 = \sum_{k=2}^{k=n+1}k^3-\sum_{k=1}^{k=n}k^3 = (n+1)^3-1$.
2. Comme $(k+1)^3 = k^3+3k^2+3k+1$, on a $\sum_{k=1}^{k=n}(k+1)^3 = \sum_{k=1}^{k=n}k^3+3\sum_{k=1}^{k=n}k^2\sum_{k=1}^{k=n}k+\sum_{k=1}^{k=n}1$.
3. Reprenons le calcul de la question précédente : on a en écrivant les choses légèrement différemment $\sum_{k=1}^{k=n}(k+1)^3-\sum_{k=1}^{k=n}k^3 = 3\sum_{k=1}^{k=n}k^2+3\sum_{k=1}^{k=n}k+\sum_{k=1}^{k=n}1$, soit en utilisant le résultat de la première question $3\sum_{k=1}^{k=n}k^2+3\sum_{k=1}^{k=n}k+\sum_{k=1}^{k=n}1 = (n+1)^3-1$, ou encore $3\sum_{k=1}^{k=n}k^2+3\frac{n(n+1)}{2}+n = (n+1)^3-1 = n^3+3n^2+3n$. Faisons passer tout ce qu'on peut à droite : $3\sum_{k=1}^{k=n}k^2 = n^3+3n^2+3n-\frac{3}{2}n^2-\frac{3}{2}n-n = n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n = \frac{n(2n^2+3n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$.
   On retrouve donc la formule $\sum_{k=1}^{k=n}k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 5 (***)

- $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij = \sum_{i=1}^{i=n} i\sum_{j=1}^{j=n} j = \sum_{i=1}^{i=n} i\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
- $\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij = \sum_{j=1}^{j=n} j\sum_{i=1}^{i=j} i = \sum_{j=1}^{j=n} j\frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{j=n} j^3+j^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{8}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$ (on peut factoriser si on le souhaite le résultat obtenu...).
- $\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{j=n}\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{i=j} i = \sum_{j=1}^{j=n}\frac{1}{j}\times\frac{j(j+1)}{2} = \sum_{j=1}^{j=n}\frac{j+1}{2} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{j=n} j+1 = \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2}+n\right) = \frac{n(n+3)}{2}$.
- $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |i-j| = \sum_{j=1}^{j=n}(\sum_{i=1}^{i=j}(j-i)+\sum_{i=j+1}^{i=n}(i-j)) = \sum_{j=1}^{j=n}(j^2-\frac{j(j+1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}-\frac{j(j+1)}{2}-(n-$

$$j)j) = \sum_{j=1}^{j=n} \left(j^2 - (n+1)j + \frac{n(n+1)}{2} \right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)^2}{2} + \frac{n^2(n+1)}{2}$$
$$= \frac{n(n+1)}{2} \left(\frac{2n+1}{3} - (n+1) + n \right) = \frac{n(n+1)(2n-2)}{6} = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$$

- $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} i2^j = \sum_{i=1}^{i=n} i \sum_{j=1}^{j=n} 2^j = \frac{n(n+1)}{2} \times (\sum_{j=0}^{j=n} 2^j - 1) = \frac{n(n+1)}{2} \times (2^{n+1} - 1 - 1) = n(n+1)(2^n - 1)$

Exercice 6 (**)

1. $\displaystyle\prod_{k=2}^{k=n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^{k=n} \frac{k-1}{k} = \frac{\prod_{k=2}^{k=n} k-1}{\prod_{k=2}^{k=n} k} = \frac{\prod_{k=1}^{k=n-1} k}{\prod_{k=2}^{k=n} k} = \frac{1}{n}$

2. $\displaystyle\prod_{k=2}^{k=n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{k=n} \frac{k^2-1}{k^2} = \prod_{k=2}^{k=n} \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{\prod_{k=2}^{k=n}(k-1) \prod_{k=2}^{k=n}(k+1)}{\left(\prod_{k=2}^{k=n} k\right)^2}$

$$= \frac{\prod_{k=1}^{k=n-1} k}{\prod_{k=2}^{k=n} k} \times \frac{\prod_{k=3}^{k=n+1} k}{\prod_{k=2}^{k=n} k} = \frac{1}{n} \times \frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}$$

3. $\displaystyle\prod_{k=1}^{k=n}(6k-3) = \prod_{k=1}^{k=n} 3(2k-1) = 3^n \prod_{k=1}^{k=n}(2k-1) = 3^n \frac{\prod_{k=1}^{k=2n} k}{\prod_{k=1}^{k=n} 2k} = 3^n \frac{(2n)!}{2^n \times n!} = \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{(2n)!}{n!}$

Exercice 7 (***)

1. Prouvons par récurrence la propriété P_n : $2^n \leqslant n!$. Puisque l'énoncé nous indique que n doit être plus grand que 4, in itialisons pour $n = 4$: on a alors $2^4 = 16$ et $4! = 24$, donc l'inégalité est vraie. Supposons désormais P_n vérifiée, c'est-à-dire que $2^n \leqslant n!$. On peut alors en déduire que $2^{n+1} \leqslant 2n! \leqslant (n+1)n! = (n+1)!$ puisque 2 est certainement inférieur à $n+1$ quand n est plus grand que 4. La propriété P_{n+1} est donc vraie, et par principe de récurrence, P_n est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à 4.

2. Prouvons par récurrence la propriété P_n : $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} k \times k! = (n+1)! - 1$. Pour $n = 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=1} k \times k! = 1 \times 1! = 1$ et $2! - 1 = 2 - 1 = 1$, donc P_1 est vraie. Supposons désormais P_n vraie pour un certain entier n, on a alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n+1} k \times k! = \sum_{k=1}^{k=n} k \times k! + (n+1)(n+1)! = (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! = (n+1)!(1+n+1) - 1 = (n+2)! - 1$, donc P_{n+1} est vérifiée et par principe de récurrence, P_n est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

3. Prouvons par récurrence la propriété P_n : $\sum_{k=1}^{k=2^n} \frac{1}{k} \geqslant 1+\frac{n}{2}$. Pour $n=0$, le membre de gauche se réduit à 1, et celui de droite vaut également 1, donc l'inégalité est vraie. Supposons désormais P_n vraie, on a alors $\sum_{k=1}^{k=2^{n+1}} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{k=2^n} \frac{1}{k} + \sum_{k=2^n+1}^{k=2^{n+1}} \frac{1}{k} \geqslant 1+\frac{n}{2}+\sum_{k=2^n+1}^{k=2^{n+1}} \frac{1}{k}$ par hypothèse de récurrence. Reste à minorer la deuxième somme : elle est constituée de 2^n termes dont le plus petit vaut $\frac{1}{2^{n+1}}$, elle est donc supérieure ou égale à $2^n \times \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$, donc la somme totale est plus grande que $1+\frac{n}{2}+\frac{1}{2} = 1+\frac{n+1}{2}$, ce qui prouve P_n+1. Par principe de récurrence, P_n est donc vraie pour tout entier n.

Exercice 8 (**)

On calcule $u_1 = 1$, $u_2 = 3$, $u_3 = 7$, $u_4 = 15$, et ça devrait suffire à conjecturer que $u_n = 2^n - 1$. Prouvons donc par récurrence la propriété $P_n : u_n = 2^n - 1$. C'est vrai pour $n = 0$, et si on le suppose vérifié au rang n, alors $u_{n+1} = 2u_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$, ce qui prouve P_{n+1}. Par principe de récurrence, on a, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n - 1$.

Exercice 9 (**)

Prouvons donc par récurrence la propriété $P_n : u_n = 2n+\frac{1}{3^n}$. Pour $n=0$, $2\times 0+\frac{1}{3^0} = 1 = u_0$, donc P_0 est vraie. Supposons désormais P_n vérifiée, on a alors $u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n+4n+6) = \frac{1}{3}(2n+\frac{1}{3^n}+4n+6) = \frac{1}{3^{n+1}} + 2n + 2 = \frac{1}{3^{n+1}} + 2(n+1)$, ce qui prouve P_{n+1}, et par principe de récurrence, P_n est vraie pout tout entier n.

Exercice 10 (***)

On calcule $u_3 = 3\times 2 - 3\times 0 + 0 = 6$, $u_4 = 3\times 6 - 3\times 2 + 0 = 12$, $u_5 = 3\times 12 - 3\times 6 + 2 = 20$, $u_6 = 3\times 20 - 3\times 12 + 6 = 30$, et même avec un peu de motivation $u_7 = 3\times 30 - 3\times 20 + 12 = 42$. Si on est suffisamment réveillés, on arrive à conjecturer que $u_n = n(n-1)$ (chaque terme est le produit de l'indice par l'entier le précédent). Prouvons donc par récurrence **triple** la propriété P_n : $u_n = n(n-1)$. Il faut initialiser en vérifiant P_0, P_1 et P_2, ce qui ne pose aucun problème puisqu'on a de quoi vérifier jusqu'à P_7 grâce aux calculs précédents. Supposons désormais P_n, P_{n+1} et P_{n+2} vérifiées, on a alors $u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n = 3(n+2)(n+1) - 3(n+1)n + (n-1)n = 3(n^2+3n+2) - 3(n^2+n) + n^2 - n = 3n^2 + 9n + 6 - 3n^2 - 3n + n^2 - n = n^2 + 5n + 6 = (n+3)(n+2)$, ce qui prouve P_{n+3}, et par principe de récurrence triple, P_n est vraie pour tout entier n.

Exercice 11 (***)

1. $S_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + 2n + 1$. Cette somme est constituée de $n+1$ termes.
2. $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} 8k^3+12k^2+6k+1 = 8\sum_{k=0}^{k=n} k^3+12\sum_{k=0}^{k=n} k^2+6\sum_{k=0}^{k=n} k+\sum_{k=0}^{k=n} 1 = 2n^2(n+1)^2+2n(n+1)(2n+1)+3n(n+1)+n+1 = (n+1)(2n^2(n+1)+2n(2n+1)+3n+1) = (n+1)(2n^3+6n^2+5n+1)$.
3. $U_n = \sum_{k=0}^{k=2n+1} k^3 = \sum_{k \text{ pair}}^{k\leqslant 2n} k^3 + \sum_{k \text{ impair}}^{k\leqslant 2n+1} k^3 = \sum_{k=0}^{k=n}(2k)^3 + \sum_{k=0}^{k=n}(2k+1)^3 = T_n + S_n$.

4. On a $U_n = \sum_{k=0}^{k=n} k^3 = \frac{(2n+1)^2(2n+2)^2}{4} = (n+1)^2(2n+1)^2$ en utilisant la formule du cours pour la somme des cubes. De même, $T_n = \sum_{k=0}^{k=n}(2k)^3 = \sum_{k=0}^{k=n} 8k^3 = 8 \times \frac{n^2(n+1)^2}{4} = 2n^2(n+1)^2$.
5. Comme $S_n = U_n - T_n$, on a donc $S_n = (n+1)^2(2n+1)^2 - 2n^2(n+1)^2 = (n+1)^2((2n+1)^2 - 2n^2) = (n+1)^2(2n^2+4n+1)$. Notons que cette formule est bien la même que la précédente puisque $(n+1)(2n^2+4n+1) = 2n^3+2n^2+4n^2+4n+n+1 = 2n^3+6n^2+5n+1$.
6. Prouvons donc par récurrence la propriété $P_n : \sum_{k=0}^{k=n}(2k+1)^3 = (n+1)^2(2n^2+4n+1)$. Pour $n=0$, on obtient $P_0 : \sum_{k=0}^{k=0}(2k+1)^3 = 1^2 \times 1 = 1$, ce qui est vrai. Supposons désormais P_n vérifiée, on a alors $\sum_{k=0}^{k=n+1}(2k+1)^3 = \sum_{k=0}^{k=n}(2k+1)^3 + (2(n+1)+1)^3 = (n+1)^2(2n^2+4n+1) + (2n+3)^3 = (n^2+2n+1)(2n^2+4n+1)+8n^3+36n^2+54n+27 = 2n^4+4n^3+n^2+4n^3+8n^2+2n+2n^2+4n+1+8n^3+36n^2+54n+27 = 2n^4+16n^3+47n^2+60n+28$. Ne reste plus qu'à vérifier que ça correspond à la formule annoncée : on devrait obtenir $(n+2)^2(2(n+1)^2+4(n+1)+1) = (n^2+4n+4)(2n^2+8n+7) = 2n^4+8n^3+7n^2+8n^3+32n^2+28n+8n^2+32n+28 = 2n^4+16n^3+47n^2+60n+28$. Ca marche, donc P_{n+1} est vérifiée, et par principe de récurrence, toutes les propriétés P_n sont vraies.

Feuille d'exercices de révision n°1

ECE3 Lycée Carnot

28 septembre 2010

Quelques (in)équations

1. Résoudre l'inéquation $x^3 - 2x^2 + 1 > 0$.
2. Résoudre l'inéquation $|x^2 - 2| \leqslant 2$.
3. Résoudre, en distinguant des cas selon la valeur prise par le paramètre m, l'équation $(m - 11)x^2 + 2(m + 7)x + m + 5 = 0$.

Un exercice classique

Soient les fonctions f et g définies par $f(x) = \dfrac{\ln(1 + x^2)}{x}$ et $g(x) = \dfrac{2x^2}{1 + x^2} - \ln(1 + x^2)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de g et montrer que g est une fonction paire.
2. Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \dfrac{2x(1 - x)(1 + x)}{(1 + x^2)^2}$.
3. Dresser le tableau de variations de g sur $[0; +\infty[$.
4. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $[1; +\infty[$, que l'on appellera α (et qu'on ne cherchera pas à déterminer).
5. En déduire le signe de g sur $[0; +\infty[$.
6. En utilisant la parité de g, donner l'allure de la courbe de g.
7. Préciser l'ensemble de définition de f et déterminer sa parité.
8. Calculer f', et exprimer f' en fonction de g.
9. En déduire le tableau de variations de la fonction f.

Un problème un peu moins classique

On définit deux fonctions notées ch (pour **c**osinus **h**yperbolique) et sh (pour **s**inus **h**yperbolique) de la façon suivante : $ch(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $sh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. On note également $f(x) = \dfrac{x}{sh(x)}$.

1. Résoudre l'équations $sh(x) = 0$.
2. Déterminer le domaine de définition de chacune de ces trois fonctions.
3. Déterminer la parité de chacune de ces trois fonctions.
4. À l'aide d'un calcul de dérivée, déterminer les variations de la fonction sh, puis celles de la fonction ch.
5. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $ch(x) > sh(x)$.

6. Calculer l'équation de la tangente à chacune des deux courbes en leur point d'équation $x = -2$ (garder les valeurs exactes, puis donner des valeurs approchées des coefficients directeurs, sachant que $e^2 \simeq 7,4$ et $e^{-2} \simeq 0,1$.
7. Déterminer les limites de ch et sh en $+\infty$ et en $-\infty$.
8. Tracer dans un même repère les représentations graphiques des fonctions sh et ch.
9. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \dfrac{sh(x) - x\,ch(x)}{(sh(x))^2}$.
10. Étudier les variations de $g : x \mapsto sh(x) - x\,ch(x)$.
11. En déduire le tableau de variations de la fonction f.
12. La fonction f admet-elle une limite lorsque x tend vers 0 ?

Corrigé de la feuille d'exercices de révision n°1

Quelques (in)équations

1. Commençons par constater que $x = 1$ est une racine évidente du membre de gauche. On a donc $x^3 - 2x^2 + 1 = (x-1)(ax^2 + bx + c) = ax^2 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$, d'où par identification des coefficients $a = 1$; $b = -1$ et $c = -1$. On a donc $x^3 - 2x^2 + 1 = (x-1)(x^2 - x - 1)$. Ce dernier facteur a pour discriminant $\Delta = 1 + 4 = 5$, et admet deux racines $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = 1 - \sqrt{5}2$. Il ne reste plus qu'à faire un petit tableau :

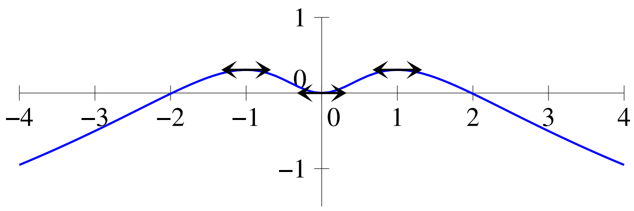
x		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		1		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	
$x^3 - 2x^2 + 1$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

On en conclut que $\mathcal{S} = \left[\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}; 1\right] \cup \left[\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right[$.

2. Cela revient à demander $-2 \leqslant x^2 - 2 \leqslant 2$, soit $0 \leqslant x^2 \leqslant 4$, donc $\mathcal{S} = [-2; 2]$.
3. Notons que, si $m = 11$, l'équation se simplifie en $36x + 16 = 0$, d'où $\mathcal{S} = -\dfrac{16}{36} = -\dfrac{4}{9}$. Dans tous les autres cas, on a une équation du second degré qui a pour discriminant $\Delta = 4(m+7)^2 - 20(m-11) = 4m^2 + 36m + 416 = 4(m^2 + 9m + 104)$, trinôme donc le discriminant est toujours positif, donc lui-même toujours positif. L'équation admet donc toujours deux solutions (qu'on peut expliciter, mais ça n'a vraiment aucun intérêt).

Un exercice classique

1. Comme $1 + x^2$ est toujours plus grand que 1, la fonction g est toujours définie. De plus, elle est assez manifestement paire (son expression ne dépend que de x^2).
2. Un petit calcul : $g'(x) = \dfrac{4x(1+x^2) - 2x \times 2x^2}{(1+x^2)^2} - \dfrac{2x}{1+x^2} = \dfrac{4x + 4x^3 - 4x^3 - 2x - 2x^3}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2x - 2x^3}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2x(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}$.
3. La dérivée s'annule en 1, la fonction est croissante sur $[0; 1]$ et décroissante sur $[1; +\infty[$.
4. Puisque $g(0) = 0$, on aura $g(1) > 0$, et comme $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ (le quotient tend vers 2 et le ln vers $-\infty$), la fonction g s'annulera nécessairement une fois entre 1 et $+\infty$ (si on veut être très rigoureux, c'est une application du théorème des valeurs intermédiaires).
5. La fonction g est donc positive sur $[0; \alpha]$ et négative sur $[\alpha; +\infty[$.
6. Ca ressemble à ça :

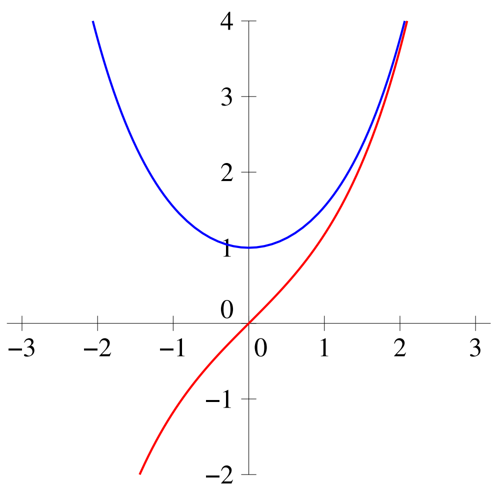


7. On a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$, et la fonction f est impaire (numérateur pair, dénominateur impair).
8. Calculons : $f'(x) = \dfrac{\frac{2x}{1+x^2} \times x - \ln(1+x^2)}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

9. Au vu des questions précédentes, f est croissante sur $[0;\alpha]$ et décroissante sur $[\alpha;+\infty[$. Par imparité, f est décroissante également sur $]-\infty;-\alpha]$ et croissante sur $[-\alpha;0]$.

Un problème un peu moins classique

1. On a $sh(x)=0 \Leftrightarrow e^x=e^{-x}$, ce qui donne en prenant les logarithmes, $x=-x$, soit $x=0$, donc $\mathcal{S}=\{0\}$.
2. $\mathcal{D}_{sh}=\mathcal{D}_{ch}=\mathbb{R}$ (puisque la fonction exponentielle est définie partout) ; et d'après la question précédente, $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}^*$.
3. Calculons $ch(-x)=\dfrac{e^{-x}+e^x}{2}=ch(x)$, donc ch est paire, et $sh(-x)=\dfrac{e^{-x}-e^x}{2}=-sh(x)$ donc sh est impaire. Quant à f, c'est le quotient de deux fonction impaires, elle est donc paire (on peut refaire le calcul si on veut).
4. Calculons donc : $sh'(x)=\dfrac{e^x-(-e^{-x})}{2}=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=ch(x)$. Cette dérivée est toujours positive (c'est une somme de deux exponentielles), donc sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme elle s'annule en 0, elle est donc négative sur $]-\infty;0]$ et positive sur $[0;+\infty[$. Passons à la deuxième fonction : $ch'(x)=\dfrac{e^x+(-e^{-x})}{2}=sh(x)$. D'après la remarque que nous venons de faire, ch est donc décroissante sur $]-\infty;0]$ et croissante sur $[0;+\infty[$.
5. Encore un petit calcul : $ch(x)-sh(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}-\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=\dfrac{e^x+e^{-x}-e^x+e^{-x}}{2}=e^{-x}>0$, donc on a bien $ch(x)>sh(x)$.
6. La tangente à ch en -2 a pour équation $y=sh(-2)(x+2)+ch(-2)=\dfrac{e^{-2}-e^2}{2}(x+2)+\dfrac{e^{-2}+e^2}{2}=\dfrac{e^{-2}-e^2}{2}x+\dfrac{3}{2}e^{-2}-\dfrac{1}{2}e^2\simeq-3,65x-3,55$. Pour sh, on a l'équation suivante : $y=\dfrac{e^{-2}+e^2}{2}(x+2)+\dfrac{e^{-2}-e^2}{2}=\dfrac{e^{-2}+e^2}{2}x+\dfrac{3}{2}e^{-2}+\dfrac{1}{2}e^2\simeq 3,75x+3,85$.
7. En utilisant les limites de l'exponentielle en $\pm\infty$, on obtient sans difficulté $\lim\limits_{x\to-\infty} ch(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} ch(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} sh(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} sh(x)=+\infty$.
8. Voici les deux courbes demandées :



9. C'est un calcul de dérivée de quotient tout simple, à tel point qu'il est difficile de le détailler.
10. On a $g'(x)=ch(x)-ch(x)-x\,sh(x)=-x\,sh(x)$. On a vu un peu plus haut que $sh(x)$ est toujours du même signe que x, donc $x\,sh(x)$ est toujours positif, et $g'(x)$ est toujours négatif. Autrement dit, g est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$.

11. Comme on a par ailleurs $g(0) = 0 - 0 = 0$, on peut en déduire que f', qui est du même signe que g, est positive sur $]-\infty; 0[$, et négative sur $]0; +\infty[$. Si on tient absolument à compléter le tableau de variations, on peut prouver que f a pour limite 0 en $+\infty$ et en $-\infty$ par croissance comparée. Pour ce qui se passe en 0, c'est l'objet de la dernière question ci-dessous.

12. Oui, mais ce n'est pas si facile à calculer ! Une astuce est d'écrire que $\dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2x} = \dfrac{e^x - 1}{2x} - \dfrac{e^{-x} - 1}{2x}$. La première moitié a pour limite $\dfrac{1}{2}$ (je rappelle que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$, c'est une des limites classiques vues en cours). La deuxième moitié tend aussi vers $\dfrac{1}{2}$ pour la même raison (il suffit de remplacer x par $-x$, qui tend tout autant vers 0), donc on a en fait $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

Feuille d'exercices n°4 : Suites classiques

ECE3 Lycée Carnot

5 octobre 2010

Exercice 1 (*)

Un classique du rire : la comparaison entre suite arithmétique et suite géométrique.

Un épargnant décide de placer 1 000 euros à la banque. On lui propose deux types de placement : le placement A est un placement à intérêts simples rémunéré à 5% par an ; le placement B est un placement à intérêts composés rémunéré à 3% par an. On note (u_n) et (v_n) les suites donnant la somme épargnée au bout de n années. Déterminer la nature de (u_n) et de (v_n), donner la valeur de u_n et v_n en fonction de n, puis déterminer au bout de combien d'années le placement B devient plus intéressant que le placement A (vous ne pouvez pas faire une résolution exacte, procédez à tâtons en calculant les valeurs des termes de chaque suite). Déterminer pour chacun des deux placements au bout de combien d'années la somme de départ sera doublée.

Exercice 2 (***)

Trois réels a, b et c (avec $a \neq 0$) vérifient les drôles de conditions suivantes :

- a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q.
- a, $2b$ et $3c$ sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison q (la même que ci-dessus, donc).

Déterminer les valeurs possibles de a, b, c et q.

Exercice 3 (***)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + n^2 - 1$. Déterminer trois réels a, b et c tels que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n + an^2 + bn + c$ soit une suite géométrique. En déduire la valeur de u_n.

Exercice 4 (**)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 3^n$. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{u_n}{3^n}$ est une suite arithmético-géométrique. En déduire les valeurs de v_n puis de u_n.

Exercice 5 (***)

On considère deux suites (u_n) et (v_n) vérifiant $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(2u_n + v_n)$ et $v_{n+1} = \dfrac{1}{3}(u_n + 2v_n)$. Construire à partir de (u_n) et de (v_n) deux nouvelles suites de type bien connu, calculer la valeur de ces deux suites et en déduire celle de u_n et de v_n.

Exercice 6 (**)

Un type de placement un peu plus rigolo que ceux de l'exercice 1 :

Un épargnant place une somme de 3 000 euros sur un compte rémunéré à 3% par an à intérêts composés. Qui plus est, ce même épargnant rajoute chaque année un placement ponctuel de 1 000 euros supplémentaires sur ce même compte. On note u_n la somme épargnée au bout de n années. Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite (u_n), en déduire de quel type de suite il s'agit, puis déterminer la valeur de u_n en fonction de n. Au bout de combien de temps notre épargnant disposera-t-il de 30 000 euros ? Combien aura-t-il alors déposé au total sur ce compte ?

Exercice 7 (**)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 16$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n}$. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = \ln u_n$ est bien définie et d'un type bien connu. Calculer v_n et en déduire la valeur de u_n (ne vous inquiétez pas si c'est assez moche !).

Exercice 8 (*)

Déterminer pour chacune des suites récurrentes linéaires suivantes la valeur de u_n en fonction de n :

1. $u_0 = 0$; $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_{n+1} - 2u_n$
2. $u_0 = 0$; $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 6u_{n+1} - 9u_n$
3. $u_0 = 1$; $u_1 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $2u_{n+1} = 3u_{n+1} - u_n$

Exercice 9 (**)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n - 2} + 2$.

1. Montrer que (u_n) est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2$.
2. On considère désormais la suite (v_n) définie par $v_n = \ln(u_n - 2)$. Expliquer pourquoi (v_n) est bien définie.
3. Déterminer la nature de la suite (v_n).
4. En déduire la valeur de u_n.

Exercice 10 (***)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1} + 2u_{n-2} + \cdots + 2u_0$. Déterminer la valeur de u_n (mais si, regardez mieux, c'est une suite d'un type qu'on maitrise, il y a juste une petite modification à faire).

Exercice 11 (***)

On cherche à déterminer toutes les suites (u_n) vérifiant la récurrence non linéaire $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 3$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que la suite (v_n) définie par $v_n = an + b$ vérifie la relation ci-dessus.
2. Montrer que la suite (z_n) définie par $z_n = u_n - v_n$ est alors d'un type bien connu, et en déduire la valeur de z_n puis celle de u_n (en fonction des premières valeurs de la suite).

Corrigé de la feuille d'exercices n°4

Exercice 1 (*)

La suite (u_n) vérifie d'après l'énoncé la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + \frac{5}{100} \times 1\ 000 = u_n + 50$, c'est donc une suite arithmétique de raison 50 et de premier terme $u_0 = 1\ 000$. On sait alors que $u_n = 1\ 000 + 50n$. De même, la suite (v_n) vérifie la relation de récurrence $v_{n+1} = v_n + \frac{3}{100}v_n = v_n \times 1,03$, donc (v_n) est une suite géométrique de raison $1,03$ et de premier terme $v_0 = 1\ 000$. Toujours d'après le cours, on a donc $v_n = 1\ 000 \times 1,03^n$. En utilisant la calculatrice, on constate qu'il faut attendre 33 ans pour que le deuxième placement commence à être plus intéressant que le premier.

Si l'épargnant choisit le placement A, il aura doublé son capital lorsque $1\ 000 + 50n = 2\ 000$, soit $50n = 1\ 000$, donc $n = 20$. S'il choisit le placement B, il aura doublé son capital lorsque $1\ 000 \times 1,03^n = 2\ 000$, soit $1,03^n = 2$, donc en passant au ln on obtient $n \ln 1,03 = \ln 2$, soit $n = \frac{\ln 2}{\ln 1,03} \simeq 23,4$. Il devra donc attendre 20 ans pour doubler son capital avec le placement A et 24 ans avec le placement B.

Exercice 2 (***)

Les deux conditions peuvent se traduire de la façon suivante : $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = q$, et $2b - a = 3c - 2b = q$. La première relation revient à dire que $b = aq$ et $c = bq = aq^2$, d'où en remplaçant dans la deuxième donne $2aq - a = 3aq^2 - 2aq (= q)$, d'où $3aq^2 - 4aq + a = 0$, soit en factorisant par a qui est supposé non nul $3q^2 - 4q + 1 = 0$. Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4$, et admet deux racines réelles $q_1 = \frac{4+2}{6} = 1$, et $q_2 = \frac{4-2}{6} = \frac{1}{3}$. Si $q = 1$, la condition $2aq - a = q$ donne $a = 1$, puis $b = aq = 1$ et $c = bq = 1$; et si $q = \frac{1}{2}$, on obtient $\frac{2}{3}a - a = \frac{1}{2}$, soit $a = -\frac{3}{2}$, puis $b = \frac{1}{3}a = -\frac{1}{2}$ et $c = \frac{1}{3}b = -\frac{1}{6}$. Les deux seules possibilités sont donc d'avoir $a = b = c = q = 1$ (auquel cas les trois termes consécutifs de la suite géométrique sont 1, 1 et 1, et les trois termes consécutifs de la suite arithmétique sont 1, 2 et 3) ; ou $q = \frac{1}{3}$, donc $a = -\frac{3}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$ et $c = -\frac{1}{6}$ (auquel cas les trois termes consécutifs de la suite géométrique sont $-\frac{3}{2}$, $-\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{6}$, et les trois termes consécutifs de la suite arithmétique sont $-\frac{3}{2}$, -1 et $-\frac{1}{2}$).

Exercice 3 (***)

Notons donc $v_n = u_n + an^2 + bn + c$, alors $v_{n+1} = u_{n+1} + a(n+1)^2 + b(n+1) + c = 2u_n + n^2 - 1 + an^2 + 2an + a + bn + b + c = 2u_n + (1+a)n^2 + (2a+b)n + a + b + c - 1$. Pour que (v_n) soit géométrique, on doit avoir $v_{n+1} = qv_n = qu_n + aqn^2 + bqn + cq$. Il est nécessaire d'avoir $q = 2$, et en identifiant ensuite les coefficients des deux formules obtenues, on a $1 + a = 2a$, $2a + b = 2b$ et $a + b + c - 1 = 2c$, ce qui donne successivement $a = 1$, puis $b = 2a = 2$, et enfin $c = a + b - 1 = 2$. Avec ces valeurs, la suite (v_n) est géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = u_0 + a \times 0^2 + b \times 0 + c = 2 + 2 = 4$. Conclusion de ces calculs : $v_n = 4 \times 2^n = 2^{n+2}$, puis $u_n = v_n - an^2 - bn - c = 2^{n+2} - n^2 - 2n - 2$.

Exercice 4 (**)

Vérifions donc que (v_n) est arithmético-géométrique : $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{2u_n + 3^n}{3^{n+1}} = \frac{2u_n}{3 \times 3^n} + \frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}$. La suite est donc arithmético-géométrique, il ne reste plus qu'à calculer son terme général. L'équation de point fixe associée est $x = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$, qui a pour solution $x = 1$. On introduit donc la suite auxiliaire $w_n = v_n - 1$. Verifions que cette troisième suite est géométrique : $w_{n+1} = v_{n+1} - 1 = \frac{2}{3}v_n + \frac{1}{3} - 1 = \frac{2}{3}v_n - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(v_n - 1) = \frac{2}{3}w_n$. La suite (w_n) est donc géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme $w_0 = v_0 - 1 = \frac{u_0}{3^0} - 1 = -1$. Conclusion de nos calculs : $w_n = -\left(\frac{2}{3}\right)^n$, puis $v_n = w_n + 1 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$, et enfin $u_n = 3^n v_n = 3^n\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = 3^n - 2^n$.

Exercice 5 (***)

Un peu d'observation (et peut-être d'habitude de manipuler ce genre de suites) conduit à s'intéresser aux deux suites suivantes : $u_{n+1} + v_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + v_n) + \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}v_n + \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}v_n = u_n + v_n$, donc la suite $(u_n + v_n)$ (on peut lui donner un nom si on le souhaite) est constante, égale à son premier terme $u_0 + v_0 = 3$. De même, on remarque que $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}v_n - \frac{1}{3}u_n - \frac{2}{3}v_n = \frac{1}{3}u_n - \frac{1}{3}v_n = \frac{1}{3}(u_n - v_n)$, donc la suite $(u_n - v_n)$ est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $u_0 - v_0 = 1 - 2 = -1$. Conclusion, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n - v_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n = -\frac{1}{3^n}$, soit $u_n = v_n + \frac{1}{3^n}$. Comme on sait par ailleurs que $u_n + v_n = 3$, on peut remplacer u_n pour obtenir $2v_n + \frac{1}{3^n} = 3$, soit $v_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$, puis $u_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3^n}\right)$.

Exercice 6 (**)

L'énoncé se traduit par la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + \frac{3}{100}u_n + 1\,000 = 1,03u_n + 1\,000$ donc la suite (u_n) est arithmético-géométrique. Son équation de point fixe est $x = 1,03x + 1\,000$, ce qui donne $x = -\frac{10\,000}{3}$, qu'on notera simplement α pour alléger les calculs. En posant $v_n = u_n - \alpha$, on a donc $v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha = 1,03u_n + 1\,000 - \alpha = 1,03(u_n - \alpha)$, puisque par définition $1\,000 - \alpha = -1,03\alpha$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison $1,03$ et de premier terme $v_0 = u_0 - \alpha = 3\,000 - \alpha$. On en déduit que $v_n = (3\,000 - \alpha) \times 1,03^n$, puis $u_n = (3\,000 - \alpha) \times 1,03^n + \alpha$.

Notre épargnant dispose de 30 000 euros quand $(3\,000 - \alpha) \times 1,03^n + \alpha = 30\,000$, soit $1,03^n = \frac{30\,000 - \alpha}{3\,000 - \alpha}$, ou encore après passage au ln (comme à la fin de l'exercice 1), $n = \frac{\ln\left(\frac{30\,000 - \alpha}{3\,000 - \alpha}\right)}{\ln 1,03} \simeq 18,9$. L'épargnant aura donc décuplé sa mise initiale au bout de 19 ans, en ayant déposé sur cette période $19 \times 1\,000 + 3\,000 = 22\,000$ euros.

Exercice 7 (**)

La suite (v_n) est bien définie si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, ce que nous allons prouver par récurrence. Posons donc $P_n : u_n > 0$. La propriété P_0 est manifestement vraie puisque $16 > 0$. Supposons désormais P_n vraie, c'est-à-dire que $u_n > 0$. On a alors également $\sqrt{u_n} > 0$, donc $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} > 0$, ce qui prouve P_{n+1}. La suite (v_n) est donc bien définie.

Cherchons désormais à calculer v_{n+1} : $v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln(2\sqrt{n}) = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln u_n = \ln 2 + \frac{1}{2}v_n$. La suite (v_n) est donc arithmético-géométrique. Son équation de point fixe est $x = \ln 2 + \frac{1}{2}x$, ce qui donne $x = 2\ln 2$. Posons donc une suite auxiliaire $w_n = v_n - 2\ln 2$, et vérifions que (w_n) est géométrique : $w_{n+1} = v_{n+1} - 2\ln 2 = \ln 2 + \frac{1}{2}v_n - 2\ln 2 = \frac{1}{2}v_n - \ln 2 = \frac{1}{2}(v_n - 2\ln 2) = \frac{1}{2}w_n$. La suite (w_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $w_0 = v_0 - 2\ln 2 = \ln(u_0) - 2\ln 2 = \ln(16) - 2\ln 2 = 2\ln 2$. On en déduit que $w_n = \frac{2\ln 2}{2^n} = \frac{\ln 2}{2^{n-1}}$, soit $v_n = w_n + 2\ln 2 = \frac{\ln 2}{2^{n-1}} + 2\ln 2$, et enfin $u_n = e^{v_n} = e^{2^{1-n}\ln 2}e^{2\ln 2} = 4 \times 2^{2^{1-n}} = 2^{2^{1-n}+2}$.

Exercice 8 (*)

1. L'équation caractéristique de la suite est $x^2 - 3x + 2 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 9 - 8 = 1$, et admet deux racines réelles $r = \frac{3+1}{2} = 2$ et $s = \frac{3-1}{2} = 1$. La suite (u_n) a donc un terme général de la forme $u_n = \alpha 2^n + \beta$, avec, en utilisant les valeurs initiales, $\alpha + \beta = 0$ et $2\alpha + \beta = 1$. En soustrayant les deux équations on obtient $\alpha = 1$, puis $\beta = -\alpha = -1$, donc $u_n = 2^n - 1$.

2. L'équation caractéristique de la suite est $x^2 - 6x + 9 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 36 - 36 = 0$, et admet une racine double $r = \frac{6}{2} = 3$. La suite (u_n) a donc un terme général de la forme $u_n = (\alpha + \beta n)3^n$, avec, en utilisant les valeurs initiales, $\alpha \times 3^0 = 0$ et $(\alpha + \beta) \times 3^1 = 1$. La première équation donne $\alpha = 0$, puis la deuxième donne $\beta = \frac{1}{3}$, d'où $u_n = \frac{1}{3}n3^n = n3^{n-1}$ (formule valable seulement si $n \geqslant 1$).

3. L'équation caractéristique de la suite est $2x^2 - 3x + 1 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 9 - 8 = 1$, et admet deux racines réelles $r = \frac{3+1}{4} = 1$ et $s = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$. La suite (u_n) a donc un terme général de la forme $u_n = \alpha + \frac{\beta}{2^n}$, avec, en utilisant les valeurs initiales, $\alpha + \beta = 1$ et $\alpha + \frac{\beta}{2} = -1$. En soustrayant les deux équations on obtient $\frac{\beta}{2} = 2$, soit $\beta = 4$, puis la première équation donne $\alpha = -3$, d'où $u_n = \frac{4}{2^n} - 3$.

Exercice 9 (**)

1. Prouvons par récurrence la propriété P_n : $u_n > 2$ (ce qui prouvera au passage que (u_n) est bien définie puisqu'on aura alors toujours $u_n \neq 2$). La propriété P_0 est manifestement vraie. Supposons maintenant P_n vraie, c'est-à-dire que $u_n > 2$. On a alors $u_n - 2 > 0$, donc $\frac{1}{u_n - 2} > 0$, puis $\frac{1}{u_n - 2} + 2 > 2$, ce qui prouve P_{n+1}. Par principe de récurrence, P_n est vérifiée pour tout entier n.

2. D'après la question précédente, on a toujours $u_n - 2 > 0$, ce qui prouve la bonne définition de v_n.

3. Calculons donc $v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 2) = \ln\left(\frac{1}{u_n - 2} + 2 - 2\right) = \ln\left(\frac{1}{u_n - 2}\right) = -\ln(u_n - 2) = -v_n$. La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison -1 et de premier terme $v_0 = \ln(u_0 - 2) = \ln 2$, d'où $v_n = (-1)^n \ln 2$, puis $u_n = e^{v_n} + 2 = e^{(-1)^n \ln 2} + 2$. En fait, on aura $u_n = 2 + 2 = 4$ pour toutes les valeurs paires de n, et $u_n = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$ pour toutes les valeurs impaires de n (on parle de suite périodique, comme pour les fonctions, pour une suite reprenant ainsi toujours les mêmes valeurs).

Exercice 10 (***)

Remarquons que, en décalant la relation de récurrence, $u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2} + \cdots + 2u_0$. En soustrayant cette relation à celle donnée dans l'énoncé, on obtient $u_{n+1} - u_n = u_n + u_{n-1}$, soit $u_{n+1} = 2u_n + u_{n-1}$. C'est une relation de récurrence linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - 2x - 1 = 0$. Son discriminant vaut $\Delta = 4 + 4 = 8$, elle admet donc deux racines réelles $r = \dfrac{2+\sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2}$, et $s = \dfrac{1-\sqrt{8}}{2} = 1 - \sqrt{2}$. Le terme général de la suite (u_n) est donc de la forme $u_n = \alpha(1+\sqrt{2})^n + \beta(1-\sqrt{2})^n$, avec en utilisant les deux premiers termes, $\alpha + \beta = u_0 = 1$, et $\alpha(1+\sqrt{2}) + \beta(1-\sqrt{2}) = u_1 = u_0 = 1$. En soustrayant les deux équations on obtient $\alpha\sqrt{2} - \beta\sqrt{2} = 0$, donc $\alpha = \beta$, ce qui en reprenant la première équation mène à $\alpha = \beta = \dfrac{1}{2}$. Conclusion : $u_n = \dfrac{1}{2}(1+\sqrt{2})^n + \dfrac{1}{2}(1-\sqrt{2})^n$ (ce n'est pas évident au premier abord, mais tous les termes de cette suite sont bel et bien entiers, malgré la présence de ces $\sqrt{2}$ dans la formule du terme général).

Exercice 11 (***)

1. Posons donc $v_n = an+b$, on a alors $v_{n+2} - 3v_{n+1} + 2v_n = a(n+2) + b - 3a(n+1) - 3b + 2an + 2b = an + 2a + b - 3an - 3a - 3b + 2an + 2b = -a$. Si on veut avoir $v_{n+2} - 3v_{n+1} + 2v_n = 3$, il suffit donc de prendre $a = -3$ (et, b pouvant être égal à n'importe quoi, autant prendre simplement $b = 0$). La suite définie par $v_n = -3n$ convient donc.
2. Si $z_n = u_n - v_n$, on a $z_{n+2} - 3z_{n+1} + 2z_n = u_{n+2} - v_{n+2} - 3u_{n+1} + 3v_{n+1} + 2u_n - 2v_n = u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n - (v_{n+2} - 3v_{n+1} + 2v_n) = 3 - 3 = 0$ puisque les deux suites (u_n) et (v_n) satisfont la récurrence initiale. La suite (z_n) est donc récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - 3x + 2 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 9 - 8 = 1$, et admet deux racines réelles $r = \dfrac{3-1}{2} = 1$ et $s = \dfrac{3+1}{2} = 2$. On en déduit que $z_n = \alpha + \beta 2^n$, avec $\alpha + \beta = z_0$, et $\alpha + 2\beta = z_1$. En soustrayant les deux équations, on obtient $\beta = z_1 - z_0$, puis $\alpha = z_0 - \beta = 2z_0 - z_1$. Notons que $z_0 = u_0 - v_0 = u_0$, et $z_1 = u_1 - v_1 = u_1 + 3$. On a donc $z_n = 2u_0 - u_1 - 3 + (u_1 + 3 - u_0)2^n$, puis $u_n = z_n + v_n = 2u_0 - u_1 - 3 + (u_1 + 3 - u_0)2^n - 3n$.

Feuille d'exercices de révision n°2

ECE3 Lycée Carnot

12 octobre 2010

Exercice 1

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n + 1}$.

1. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$.
2. Montrer que la suite (u_n) est monotone.
3. Déterminer les points fixes de la relation de récurrence définissant la suite (u_n), c'est-à-dire les réels x vérifiant $x = \frac{2x}{x+1}$ (nous verrons plus tard que ces valeurs sont les limites possibles de la suite (u_n)).

Exercice 2

On considère la suite $(S_n)_{n \geqslant 2}$ définie par $S_n = \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k^2}$.

1. Montrer que, si $k \geqslant 2$, alors $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.
2. Calculer $\sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, et en déduire un encadrement de S_n.
3. Montrer que, $\forall n \geqslant 2$, $S_n \leqslant 1$.
4. À l'aide des questions précédentes, déterminer un encadrement de S_{1000}.

Exercice 3

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, où $f(x) = \frac{1+x}{2\sqrt{x}}$.

1. Étudier les variations de f sur son ensemble de définition, et tracer une allure de sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$.
2. On note D la droite d'équation $y = x$. Déterminer la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de D.
3. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et que, $\forall n \geqslant 1$, $u_n \geqslant 1$.
4. Montrer que la suite est décroissante à partir de $n = 1$ (vous pouvez utiliser le résultat de la question 2).

Exercice 4

Le but de cet exercice est de calculer la somme $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} (2k+1)^3$ de trois façons différentes.

1. Écrire S_n sans utiliser de symbole somme. De combien de termes cette somme est-elle composée ?
2. Calculer S_n en développant $(2k+1)^3$.
3. On pose $T_n = \sum_{k=0}^{k=n} (2k)^3$ et $U_n = \sum_{k=0}^{k=2n+1} k^3$. Expliquer pourquoi $U_n = S_n + T_n$ (à l'aide d'une phrase si vous n'arrivez pas à le faire par le calcul).
4. Calculer T_n et U_n.
5. Retrouver la valeur de S_n à l'aide des deux questions précédentes.
6. Prouver par récurrence que $S_n = (n+1)^2(2n^2+4n+1)$.

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{x^2+x+1}$, et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Étudier les variations de f et calculer ses limites aux bornes de son ensemble de définition.
3. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 0.
4. Étudier la position relative et les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de T.
5. Construire dans un même repère la courbe $\mathcal{C}$ et la droite T.

   On considère désormais la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
6. Soit $p \in \mathbb{N}$, prouver que $f\left(\dfrac{1}{p}\right) \leqslant \dfrac{1}{p+1}$.
7. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
8. Déterminer la limite de la suite (u_n).
9. Vérifier que $\dfrac{1}{u_{n+1}} = u_n + 1 + \dfrac{1}{u_n}$.
10. En déduire, à l'aide du résultat de la question 7, que $\forall n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{u_n} \leqslant n + 1 + \sum_{k=1}^{k=n} \dfrac{1}{k}$.
11. En admettant que $\forall n \geqslant 2$, $\sum_{k=2}^{k=n} \dfrac{1}{k} \leqslant \ln n$, déterminer la limite de nu_n.

Corrigé de la feuille d'exercices de révision n°2

Exercice 1

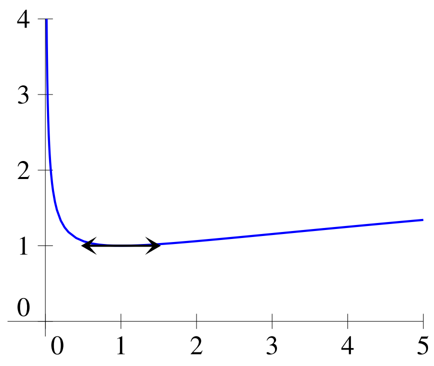
1. La suite étant définie dès que $u_n \neq -1$, prouver par récurrence que $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$ suffit. C'est vrai pour u_0, et si on le suppose vrai pour u_n, alors $\dfrac{3}{2} \leqslant u_n + 1 \leqslant 2$, donc $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{u_n+1} \leqslant \dfrac{2}{3}$. Or $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 2 - 2}{u_n + 1} = 2 - \dfrac{2}{u_n+1}$. On a donc $\dfrac{2}{3} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$, ce qui achève la démonstration.
2. Calculons $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2u_n}{u_n+1} - u_n = \dfrac{2u_n - u_n^2 - u_n}{u_n+1} = \dfrac{u_n(1-u_n)}{u_n+1}$, qui est positif en utilisant ce qui précède. La suite est donc croissante.
3. On obtient $x^2 + x = 2x$, soit $x(x-1) = 0$, donc $x = 0$ ou $x = 1$. La suite (u_n) a en fait pour limite 1.

Exercice 2

1. En effet $\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1} = \dfrac{1}{k^2+k} \leqslant \dfrac{1}{k^2}$, puisque $k^2 \leqslant k^2 + k$. L'autre inégalité est similaire.
2. C'est une somme télescopique, qui vaut $1 - \dfrac{1}{n}$. En faisant la somme des inéagalités obtenues à la question précédente, on obtient donc $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n+1} \leqslant S_n \leqslant 1 - \dfrac{1}{n}$
3. C'est une conséquence immédiate de la question précédente.
4. Toujours avec l'encadrement de la deuxième question, on a $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{1001} \leqslant S_{1000} \leqslant 1 - \dfrac{1}{1000}$. Ces encadrements ne sont en fait pas très intéressants (en gros, ils nous disent que la suite (S_n) va prendre ses valeurs entre $\dfrac{1}{2}$ et 1) mais permettent de prouver la convergence de la suite (S_n).

Exercice 3

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $f'(x) = \dfrac{2\sqrt{x} - \frac{1+x}{\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x})^2} = \dfrac{2x - (1+x)}{\sqrt{x}(2\sqrt{x})^2} = \dfrac{x-1}{4x\sqrt{x}}$. La fonction est donc décroissante sur $]0;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$. Son minimum vaut $f(1) = \dfrac{2}{2\sqrt{1}} = 1$ et sa courbe ressemble à ceci :



2. Calculons $f(x) - x = \dfrac{1 + x - 2x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$, qui est du signe de $1 + x - 2x\sqrt{x}$. Notons $X = \sqrt{x}$, on a alors $1 + x - 2x\sqrt{x} = 1 + X^2 - 2X^3 = (1-X)(1+X+2X^2)$. La deuxième parenthèse est toujours positive sur $\mathcal{D}_f$, la position relative dépend du signe de $1 - \sqrt{x}$, qui est positif quand $x \leqslant 1$. La courbe est donc au-dessus de la droite sur $]0;1]$ et en-dessous ensuite.

3. La suite est bien définie si toutes les valeurs de la suite sont strictement positives, donc il est largement suffisant de prouver que $u_n \geqslant 1$. Pour une fois, même pas besoin de récurrence, puisque $\forall n \geqslant 1$, $u_n = f(u_{n-1}) \geqslant 1$ puisque la fonction f ne prend pas de valeurs plus petites que 1.

4. En effet, $\forall n \geqslant 1$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$. Or, on a vu à la question 3 que $u_n \geqslant 1$, et à la question 2 que si $x \geqslant 1$, $f(x) - x \leqslant 0$. Conclusion, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ et la suite est bien décroissante.

Exercice 4

1. $S_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + 2n + 1$. Cette somme est constituée de $n + 1$ termes.

2. $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} 8k^3+12k^2+6k+1 = 8\sum_{k=0}^{k=n} k^3+12\sum_{k=0}^{k=n} k^2+6\sum_{k=0}^{k=n} k+\sum_{k=0}^{k=n} 1 = 2n^2(n+1)^2+2n(n+1)(2n+1)+3n(n+1)+n+1 = (n+1)(2n^2(n+1)+2n(2n+1)+3n+1) = (n+1)(2n^3+6n^2+5n+1)$.

3. $U_n = \sum_{k=0}^{k=2n+1} k^3 = \sum_{k \text{ pair}}^{k\leqslant 2n} k^3 + \sum_{k \text{ impair}}^{k\leqslant 2n+1} k^3 = \sum_{k=0}^{k=n} (2k)^3 + \sum_{k=0}^{k=n} (2k+1)^3 = T_n + S_n$.

4. On a $U_n = \sum_{k=0}^{k=n} k^3 = \dfrac{(2n+1)^2(2n+2)^2}{4} = (n+1)^2(2n+1)^2$ en utilisant la formule du cours pour la somme des cubes. De même, $T_n = \sum_{k=0}^{k=n} (2k)^3 = \sum_{k=0}^{k=n} 8k^3 = 8 \times \dfrac{n^2(n+1)^2}{4} = 2n^2(n+1)^2$.

5. Comme $S_n = U_n - T_n$, on a donc $S_n = (n+1)^2(2n+1)^2 - 2n^2(n+1)^2 = (n+1)^2((2n+1)^2 - 2n^2) = (n+1)^2(2n^2+4n+1)$. Notons que cette formule est bien la même que la précédente puisque $(n+1)(2n^2+4n+1) = 2n^3+2n^2+4n^2+4n+n+1 = 2n^3+6n^2+5n+1$.

6. Prouvons donc par récurrence la propriété $P_n : \sum_{k=0}^{k=n} (2k+1)^3 = (n+1)^2(2n^2+4n+1)$. Pour $n = 0$, on obtient $P_0 : \sum_{k=0}^{k=0} (2k+1)^3 = 1^2 \times 1 = 1$, ce qui est vrai. Supposons désormais P_n vérifiée, on a alors $\sum_{k=0}^{k=n+1} (2k+1)^3 = \sum_{k=0}^{k=n} (2k+1)^3 + (2(n+1)+1)^3 = (n+1)^2(2n^2+4n+1) + (2n+3)^3 = (n^2+2n+1)(2n^2+4n+1)+8n^3+36n^2+54n+27 = 2n^4+4n^3+n^2+4n^3+8n^2+2n+2n^2+4n+1+8n^3+36n^2+54n+27 = 2n^4+16n^3+47n^2+60n+28$. Ne reste plus qu'à vérifier que ça correspond à la formule annoncée : on devrait obtenir $(n+2)^2(2(n+1)^2+4(n+1)+1) = (n^2+4n+4)(2n^2+8n+7) = 2n^4+8n^3+7n^2+8n^3+32n^2+28n+8n^2+32n+28 = 2n^4+16n^3+47n^2+60n+28$. Ca marche, donc P_{n+1} est vérifiée, et par principe de récurrence, toutes les propriétés P_n sont vraies.

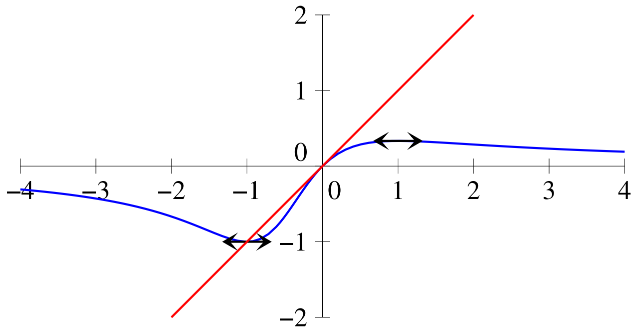
Exercice 5

1. La fonction f est définie si $x^2 + x + 1 > 0$, ce qui est en fait toujours le cas (ce trinome a undiscriminant négatif), donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

2. Dérivons donc : $f'(x) = \dfrac{x^2+x+1-x(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \dfrac{-x^2+1}{(x^2+x+1)^2} = \dfrac{(1+x)(1-x)}{(x^2+x+1)^2}$. La fonction f est donc croissante sur $[-1;1]$, et décroissante sur $]-\infty;-1]$ et sur $[1;+\infty[$. Les seules limites à calculer sont celles en $\pm\infty$. En utilisant la factorisation par les termes de plus haut degré,

on obtient facilement que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$. Tant qu'on y est, constatons que $f(-1) = -1$, et $f(1) = \frac{1}{3}$.

3. On a $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$, donc la tangente en 0 a pour équation $y = x$.
4. On a $f(x) - x = \frac{x - (x^3 + x^2 + x)}{x^2 + x + 1} = \frac{-x^3 - x^2}{x^2 + x + 1} = \frac{-x^2(x+1)}{x^2 + x + 1}$. Cette fraction est du signe de $x + 1$, donc $\mathcal{C}$ est en-dessous de T sur $]-\infty; -1]$, et au-dessus sur $[1; +\infty[$.
5. Voici un joli graphique :



6. On a $f\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{\frac{1}{p}}{\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p} + 1} = \frac{p}{1 + p + p^2} \leqslant \frac{p}{p + p^2} = \frac{1}{p+1}$.
7. Pour $n = 0$, on a bien $0 < 1 \leqslant \frac{1}{0+1}$. Supposons donc $0 < u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$. D'après la question précédente, on a alors $f(u_n) \leqslant \frac{1}{n+2}$, donc $u_{n+1} \leqslant \frac{1}{n+2}$. Par ailleurs, $\forall x > 0$, $f(x) > 0$ (regarder le tableau de variations et utiliser que $f(0) = 0$) donc $u_n > 0 \Rightarrow u_{n+1} > 0$, ce qui achève la récurrence.
8. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, le théorème des gendarmes permet de conclure que (u_n) tend vers 0.
9. Par définition $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n^2 + u_n + 1}$, donc $\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{u_n^2 + u_n + 1}{u_n} = u_n + 1 + \frac{1}{u_n}$.
10. Une petite récurrence semble s'imposer : pour $n = 1$, la proposition prétend que $\frac{1}{u_1} \leqslant 2+1 = 3$, ce qui est vrai puisque $u_1 = f(1) = \frac{1}{3}$. Supposons la propriété vraie au rang n, et utilisons la question précédente : $\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + 1 + u_n \leqslant n + 1 + \sum\limits_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} + 1 + u_n$. Il ne reste plus qu'à utiliser la majoration de la question 7 pour obtenir exactement la formule voulue pour achever la récurrence.
11. On a donc $\frac{1}{u_n} \leqslant n + 2 + \ln n$, ou encore $1 \leqslant nu_n - 2u_n + u_n \ln n$, soit $nu_n \geqslant 1 + 2u_n - u_n \ln n$. Comme $u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$, la limite de $u_n \ln n$ vaut 0, donc nu_n est plus grand qu'une suite tendant vers 1. Or on a aussi $nu_n \leqslant \frac{n}{n+1}$, avec le terme de droite qui tend vers 1. Conclusion via le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n \to +\infty} nu_n = 1$.

Feuille d'exercices n°5 : Ensembles et applications

ECE3 Lycée Carnot

16 octobre 2010

Exercice 1 (*)

Dans l'ensemble des entiers naturels, on considère les trois sous-ensembles $A = \{1.3; 5; 7; 9\}$; $B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ et $C = \{5; 6; 7; 8; 9; 10\}$. Déterminer les ensembles suivants : $\overline{A}$; $B \backslash A$; $A \cup B \cup C$; $\overline{C} \cap \overline{B}$; $A \cup (B \cap C)$.

Exercice 2 (* à **)

On se place dans $\mathbb{R}$ et on considère les ensembles $A = [4; 12]$; $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leqslant 5\}$, et $C = \mathbb{N}$. Donner l'expression la plus simple possible pour chacun des ensembles suivants : $A \cup B$; $A \cap C$; $\mathbb{R} \backslash B$; $A \cap \overline{C}$; $(A \cup B) \cap C$; $A \cup (B \cap C)$; $\overline{A} \cap (\overline{B} \cup C)$.

Exercice 3 (* si vous n'avez pas tout oublié sur les quadrilatères)

Cet exercice vous rappelera de (bons ?) souvenirs de géométrie du collège. On note Q l'ensemble du quadrilatère du plan, A l'ensemble des quadrilatères ayant un angle droit, P l'ensemble des parallélogrammes, T l'ensemble des trapèzes, C l'ensemble des carrées, R l'ensemble des rectangles, et L l'ensemble des losanges.

Parmi tous ces ensembles, déterminer qui est inclus dans qui, puis déterminer ce que valent les ensembles $A \cap L$, $A \cap P$ et $L \cap R$.

Exercice 4 (***)

Montrer que, si A, B et C sont trois sous-ensembles d'un même ensemble E, $(A \backslash B) \cup (B \backslash C) \cup (C \backslash A) = (A \cup B \cup C) \backslash (A \cap B \cap C)$.

Exercice 5 (***)

Soient A et B deux sous-ensembles d'un même ensemble E. On définit une nouvelle opération $\star$ de la façon suivante : $A \star B = \overline{A \cap B}$. Exprimer le plus simplement possible les ensembles suivants : $A \star A$; $(A \star A) \star (B \star B)$; $(A \star B) \star (A \star B)$.

Exercice 6 (**)

Déterminer pour chacune des applications suivantes si elle est injective, surjective ou bijective (ou rien du tout !) de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$:

- $f_1(n) = n + 5$

- $f_2(n) = n^2$
- $f_3(n) = n+1$ si n est pair, et $f_3(n) = n-1$ si n est impair
- $f_4(n) = Ent\left(\dfrac{n}{3}\right)$
- $f_5(n) = |n-10|$

Exercice 7 (* pour la première moitié, ** pour la deuxième)

Soit f la fonction inverse. Déterminer $f([2;4])$; $f(]0;2])$; $f([-1;5])$, ainsi que les images réciproques de ces trois intervalles par f.

Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^2-4}$. Déterminer son ensemble de définition et étudier rapidement g (vous avez le droit de dériver...). Déterminer $g([-1;1])$; $g([-6;-3[)$; $g^{-1}(]-\infty;1])$; $g^{-1}([0;1])$.

Exercice 8 (***)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

1. Soit $y \in \mathbb{R}$. Déterminer en fonction de y le nombre d'antécédents de y et leur valeur quand il y en a.
2. L'application f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?
3. Montrer que $\forall x \in [-1;1]$, $f(x) \in [-1;1]$. La restriction de $f : [-1;1] \to [-1;1]$ est-elle bijective ?

Exercice 9 (**)

On définit sur $\mathbb{R}$ une application f par $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. Déterminer si f est injective, surjective, bijective.

Exercice 10 (**)

Soit $f : E \to E$ une application telle que $f \circ f \circ f = id_E$. Montrer que f est bijective et déterminer sa réciproque.

Exercice 11 (** à *****)

Un ensemble est E est dit **dénombrable** s'il existe une application $f : E\mathbb{N}$ bijective. Pour certaines questions, on pourra se contenter de trouver une application injective de E dans $\mathbb{N}$ (on admet que ce sera suffisant).

1. Montrer que l'ensemble des entiers pairs est dénombrable.
2. Montrer que $\mathbb{Z}$ est dénombrable.
3. Montrer que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.
4. Montrer que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.
5. Montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable (c'est ça qui vaut une difficulté de *****).
6. Montrer qu'il existe une bijection de $]0;1[$ dans $\mathbb{R}$.
7. Montrer qu'il y a « autant de points » dans une droite que dans un cercle.

Exercice 12 (****)

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application injective telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) \leqslant n$. Montrer qu'on a en fait $f = id_{\mathbb{N}}$.

Corrigé de la feuille d'exercices n°5

Exercice 1 (*)

On a $\overline{A} = \mathbb{N}\backslash\{1;3;5;7\}$ (non, pas la peine d'insister, on ne peut pas l'écrire plus simplement) ; $B\backslash A = \{2;4;6\}$; $A \cup B \cup C = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$; $\overline{C} \cap \overline{B} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant 11\}$ et $A \cup (B \cap C) = \{1;3;5;6;7;9\}$.

Exercice 2 (* à **)

On a $A \cup B = [4;12] \cup [-5;5] = [-5;12]$; $A \cap C = \{4;5;6;7;8;9;10;11;12\}$;
$\mathbb{R}\backslash B = \mathbb{R}\backslash[-5;5] =]-\infty;-5[\cup]5;+\infty[$; $A \cap \overline{C} = [4;5[\cup]5;6[\cup]6;7[\cup]7;8[\cup]8;9[\cup]9;10[\cup]10;11[\cup]11;12]$;
$(A \cup B) \cap C = \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12\}$;
$A \cup (B \cap C) = [4;12] \cup \{0;1;2;3\}$ et $\overline{A} \cap (\overline{B} \cup C) =]-\infty;-5] \cup \{0;1;2;3\} \cup [12;+\infty[$.

Exercice 3 (*)

On a $C \subset R \subset A \subset Q$, mais aussi $C \subset L \subset P \subset T \subset Q$, et enfin $R \subset P$. Par contre, pas d'inclusion entre P ou T et A, ni entre L et R.

On a $A \cap L = C$, $A \cap P = R$ et $L \cap R = C$.

Exercice 4 (***)

Considérons un élément x appartenant à $(A \cup B \cup C)\backslash(A \cap B \cap C)$. Cela signifie que x appartient à au moins un des trois ensembles A, B et C (puisqu'il appartient à leur union), mais pas aux trois à la fois (puisqu'il n'appartient pas à l'intersection). Autrement dit, x appartient à exactement un ou deux ensembles parmi les trois. S'il appartient à un seul, par exemple A (les trois ensembles jouent un rôle symétrique), alors il appartient à $A\backslash B$, donc à l'ensemble de gauche. S'il appartient à deux des ensembles, par exemple A et B, alors il appartient à $B\backslash C$, et encore une fois à l'ensemble de gauche. Dans tous les cas, $x \in (A\backslash B) \cup (B\backslash C) \cup (C\backslash A)$.

Dans l'autre sens, si x appartient à l'union de gauche, il appartient à (au moins) l'un des trois ensembles $A\backslash B$, $B\backslash C$ et $C\backslash A$, donc à l'un des trois ensembles A, B et C. Ceci prouve que $x \in A \cup B \cup C$. mais le fait que x soit dans l'ensemble de gauche signifie aussi qu'il y a un des trois ensembles A, B et C auquel x n'appartient pas, donc $x \notin A \cap B \cap C$, ce qui prouve qu'il appartient à l'ensemble de droite. Les deux ensembles sont donc bien égaux.

Exercice 5 (***)

On constate d'abord que $(A \star A) = \overline{A \cap A} = \overline{A}$, puis en utilisant ce résultat $(A \star A) \star (B \star B) = \overline{A} \star \overline{B} = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}} = \overline{\overline{A}} \cup \overline{\overline{B}} = A \cup B$ (n utilisant les lois de Morgan pour l'avant-dernière inégalité. De même, $(A\star B)\star(A\star B) = (\overline{A \cap B})\cap(\overline{A \cap B}) = \overline{(\overline{A \cap B}) \cap (\overline{A \cap B})} = \overline{\overline{A \cap B}} = A \cap B$. La conclusion de l'exercice c'est qu'on peut exprimer à l'aide d'une seule opération certes un peu étrange (l'opération $\star$) toutes les opérations usuelles (complémentaire, union et intersection).

Exercice 6 (**)

- L'application f_1 est injective puisque $n + 5 = n' + 5 \Rightarrow n = n'$, mais pas surjective car 0 par exemple n'a pas d'antécédent par f_1.
- L'application f_2 est injective : en effet, $n^2 = n'^2 \Rightarrow n = n'$ quand n et n' sont positifs. Par contre, elle n'est pas surjective, 2 par exemple n'ayant pas d'antécédent par f_2.

- L'application f_3 est un peu plus pénible à étudier que les autres mais elle est en fait bijective. Les entiers pairs sont envoyés sur les entiers impairs et veci-versa donc un entier pair ne peut pas avoir la même image qu'un entier impair. Comme la restriction de f aux entiers pairs, et celle aux entiers impairs, sont manifestement injectives, f_3 est injective. Elle est également surjective car si p est pair, $p+1$ est un antécédent de p, et si p est impair, c'est $p-1$ qui marche.
- L'application f_4 n'est pas surjective car 1 et 2 ont par exemple la même image. Par contre, elle est surjective, $3p$ étant toujours un antécédent de p (il n'est pas très compliqué de constater que chaque entier a en fait trois antécédents par f_4).
- Cette dernière application n'est pas injective, 3 et 17 ayant par exemple la même image. Par contre, elle est surjective car $p+10$ est toujours un antécédent de p.

Exercice 7 (* à **)

Si f est la fonction inverse, $f([2;4]) = \left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$; $f(]0;2]) = \left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ et $f([-1;5]) =]-\infty;-1] \cup \left[\frac{1}{5};+\infty\right[$. Les images réciproques sont exactement les mêmes que les images directes (c'est du au fait que la fonction inverse est sa propre réciproque).

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2;2\}$, et a pour dérivée $f'(x) = \dfrac{4x(x^2-4)-2x(2x^2+1)}{(x^2-4)^2} = \dfrac{-18x}{(x^2-4)^2}$. On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$			-2			0			2			$+\infty$
f	2	$\nearrow$	$+\infty$	$\Vert$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{1}{4}$	$\searrow$	$-\infty$	$\Vert$	$+\infty$	$\searrow$	2

Je vous épargne le détail du calcul des limites, qui ne sont pas franchement insurmontables. À partir du tableau, et à l'aide de quelques calculs d'images, on peut en tout cas lire $g([-1;1]) = \left[-1;-\frac{1}{4}\right]$ (après avoir constaté que $g(-1) = g(1) = -1$) ; $g([-6;-3[) = \left[\frac{73}{32};\frac{19}{5}\right[$; $g^{-1}(]-\infty;1]) =]-2;2[$ et $g^{-1}([0;1]) = \emptyset$.

Exercice 8 (***)

1. Les antécédents de y sont les réels x vérifiant $\dfrac{2x}{1+x^2} = y$, soit $2x = y + yx^2$ ou encore $yx^2 - 2x - y = 0$. Si $y = 0$, on obtient comme seul antécédent $x = 0$. Sinon, on a une équation du second degré, dont le discriminant vaut $4 - 4y^2 = 4(1-y^2)$. Si $y < -1$ ou $y > 1$, le discriminant est négatif, et y n'a pas d'antécédent. Si $y = -1$, il y a une seule solution (donc un antécédent) qui est $x = -1$, et si $y = 1$, on a aussi un seul antécédent qui est $x = 1$. Enfin, si $-1 < y < 1$ (avec $y \neq 0$), on a deux antécédents qui valent $\dfrac{2 \pm \sqrt{4(1-y^2}}{2y} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-y^2}}{y}$.
2. L'application f n'est ni injective ni surjective (et donc pas bijective) puisque certains réels n'ont pas d'antécédent et que d'autres en ont plusieurs.
3. On a en fait $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \in [-1;1]$. En effet, $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x+1)^2 \geqslant 0$, donc $x^2+2x+1 \geqslant 0$, ou encore $-2x \leqslant x^2+1$. Il suffit de diviser par x^2+1, qui est toujours positif, pour obtenir $f(x) \geqslant -1$. De même, $(x-1)^2 = x^2-2x+1 \geqslant 0$, donc $2x \leqslant x^2+1$, ce qui donne $f(x) \leqslant 1$. De plus, sur $[-1;1]$, la fonction f est strictement croissante (sa dérivée vaut $\dfrac{2+2x^2-4x^2}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$, qui est toujours positive sur $[-1;1]$). Elle est donc injective, et prend toutes les valeurs entre

-1 et 1, puisque $f(-1) = -1$ et $f(1) = 1$. On en conclut que f réalise une bijection de $[-1; 1]$ sur lui-même.

Exercice 9 (**)

Pas vraiment d'autre moyen que d'étudier les variations de f : $f'(x) = \dfrac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \dfrac{e^{2x} + e^{-2x} + 2e^x - e^{2x} - e^{-2x} + 2e^x}{(e^x + e^{-x})^2} = \dfrac{4e^x}{(e^x + e^{-x})^2}$. Une exponentielle étant toujours positive, cette dérivée est toujours positive, et la fonction f strictement croissante. Elle est donc injective. Pour savoir si elle est surjective, il suffit de calculer ses limites à l'infini. Comme $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-2x})} = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$. Les deux termes tendent vers 1 en $+\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$. De même, en factorisant par e^{-x}, on obtient $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$. La fonction f n'est donc pas surjective sur $\mathbb{R}$. Par contre, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1; 1[$.

Exercice 10 (**)

Ca se fait en une ligne si on pense à appliquer le bon résultat du cours : $f \circ (f \circ f) = (f \circ f) \circ f = id_E$, donc les applications f et $f \circ f$ sont réciproques l'une de l'autre. Autrement dit, f est bijective, de réciproque $f^{-1} = f \circ f$.

Exercice 11 (** à *****)

1. Une application fort simple suffit à notre bonheur, celle qui à un entier naturel n associe son double $2n$. Il est assez évident que f est à valeurs dans l'ensemble des entiers pairs, qu'elle est injective et surjective vers cet ensemble, donc bijective.
2. Si vous avez bien compris le cas précédent, celui-ci parait relativement naturel, mais l'application est un peu plus difficile à construire. L'idée est, par exemple, d'envoyer les naturels pairs sur les entiers positifs, et les impairs sur les négatifs. Une façon de le faire est de poser $f(n) = \dfrac{n}{2}$ si n est pair, et $f(n) = -\dfrac{n+1}{2}$ si n est impair. Si n est pair, $f(n) \geqslant 0$, et si n est impair, $f(n) < 0$. Comme par ailleurs, $\dfrac{n}{2} = \dfrac{n'}{2} \Rightarrow n = n'$, et $-\dfrac{n+1}{2} = -\dfrac{n'+1}{2} \Rightarrow n = n'$, l'application f est injective. Ne reste plus qu'à prouver qu'elle est surjective : soit $p \in \mathbb{Z}$, si $p \geqslant 0$, $2p$ est un antécédent de p ; si $p < 0$, $-2p - 1$ est un antécédent de p. Finalement, f est bien bijective.
3. Ça se complique de plus en plus, alors plutôt que de vous donner une formule affreuse pour la bijection, je vais expliquer comment ça marche et j'espère que vous serez convaincus. L'ensemble $\mathbb{N}^2$ peut être représenté sous forme d'un tableau à deux dimensions, et donner une bijection de $\mathbb{N}$ vers ce tableau revient en fait à numéroter les éléments de ce tableau (à partir de 0) en essayant de ne pas en oublier au passage. L'idée est de faire cette numérotation diagonale par diagonale : on pose $f(0) = (0; 0)$, puis $f(1) = (0; 1)$ et $f(2) = (1; 0)$ (première diagonale), puis $f(3) = (0; 2)$, $f(4) = (1; 1)$ et $f(5) = (2; 0)$ etc. Le couple $(p; q)$ se trouve sur la diagonale numéro $p + q$, il est même le $(p + 1)$ème élément de la diagonale avec la numérotation choisie, et on a déjà numéroté $1 + 2 + \cdots + (p + q)$ éléments sur les diagonales précédentes, soit $\dfrac{(p+q)(p+q+1)}{2}$ éléments. Autrement dit, on a $f(n) = (p; q)$ pour $n = \dfrac{(p+q)(p+q+1)}{2} + p$ (on commence à numéroter à 0, ce qui explique qu'on ajoute p et pas $p+1$ à la fin). On a donc décrit la réciproque de la bijection f (je laisse les plus courageux vérifier que c'est bien une bijection).

4. En fait, l'idée est la même que pour $\mathbb{N}^2$ puisque $\mathbb{Q}$ est « plus petit » que $\mathbb{N}^2$: on peut toujours représenter un rationnel par un couple d'entiers (le numérateur et le dénominateur de la fraction) sauf qu'on impose en plus que la fraction en question ne soit pas simplifiable. Il suffit donc de reprendre le principe de la numérotation précédente, mais en sautant tous les couples correspondant à des fractions déjà numérotées (ainsi, on attribuera un numéro au couple $(1;1)$ mais pas au couple $(2;2)$, ni à $(3;3)$ etc.). Trouver une formule explicite pour cette bijection est impossible, et justifier correctement que ça fonctionne bien est délicat. On se contentera donc de constater que trouver une application injective de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z}^2$ est facile (on associe à tout élément de $\mathbb{Q}$, mis sous forme irréductible, le numérateur et le dénominateur de la fraction), et qu'en composant cette application avec les bijections déjà construites de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{N}^2$ et de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$, on aura une injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{N}$, ce qui est suffisant d'après un théorème compliqué.
5. Pour le fait que $\mathbb{N}$ n'est pas équipotent à $\mathbb{R}$, il faut passer par un raisonnement par l'absurde. Supposons donc qu'il existe une bijection f qui « numérote » tous les réels. Un réel peut s'écrire sous forme décimale, avec éventuellement une infinité de chiffres après la virgule (cette écriture pose en fait quelques problèmes théoriques que nous allons passer sous silence). Notons donc x_1 l'image de 0 par f, qui sera donc pour nous un nombre décimal, x_2 l'image de 1, x_3 l'image de 2 etc. Construisons désormais un nouveau nombre décimal x de la façon suivante : $x = 0, \dots$, en choisissant comme première décimale un chiffre différent de la première décimale de x_1 (on peut certainement, puisqu'il y a 10 chiffres possibles pour chaque décimale !), comme deuxième décimale un chiffre différent de la deuxième décimale de x_2, comme troisième décimale un chiffre différent de la troisième décimale de x_3 etc. Un tel nombre x est certainement différent de x_1 (ils ont au moins une décimale différente), de x_2, x_3, et de tous les x_i. Conclusion, ce nombre x n'a pas d'antécédent par f, qui ne peut donc pas être surjective, et encore moins bijective, ce qui est absurde ! Cet argument est connu sous le nom de « diagonale de Cantor ».
6. On a vu à l'exercice 9 une bijection f de $\mathbb{R}$ dans $]-1;1[$. Il suffit de poser $g(x) = \dfrac{1+f(x)}{2}$ pour obtenir une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0;1[$ (je vous laisse comprendre pourquoi).
7. Dessinez un demi-cercle sur une feuille, une droite un peu en-dessous, et placez le centre O du demi-cercle. On considère ensuite l'application suivante : à un point P du demi-cercle, on associe le point de la droite qui est sur la droite (OP). Il n'est pas très dur de se convaincre que cette application est bijective (en excluant les deux points extrêmes du demi-cercle). Ensuite, il reste à construire une bijection d'un demi-cercle vers un cercle entier, ce qui n'est pas très difficile en multipliant par exemple l'angle entre l'horizontale et chaque point du demi-cercle par deux.

Exercice 12 (****)

Bon, si le prof a mis quatre étoiles, c'est que l'exo doit être super dur, non ? En fait, la grosse difficulté, c'est qu'il faut passer par une récurrence forte pour s'en sortir. Notons donc P_n : $\forall k \leqslant n$, $f(k) = k$ (autrement dit, la restriction de f aux n premiers entiers est l'identité). Pour $n = 0$, la propriété nous dit simplement que $f(0) = 0$, ce qui est vrai puisque par hypothèse $f(0) \leqslant 0$, et $f(0) \in \mathbb{N}$. Supposons donc P_n vérifiée, et cherchons à prouver P_{n+1}. On sait déjà par hypothèse de récurrence que $f(k) = k$ pour tous les entiers k jusqu'à n inclus. Il ne reste donc en fait qu'à prouver que $f(n+1) = n+1$. L'énoncé nous indique que $f(n+1) \leqslant n+1$, et par ailleurs, f étant injective, $f(n+1)$ doit être différent de toutes les valeurs prises par f sur les entiers compris entre 0 et n. Or, ces valeurs sont par hypothèse de récurrence tous les entiers compris entre 0 et n. Il ne reste donc plus qu'une possibilité pour $f(n+1)$: être égal à $n+1$. Ceci prouve la propriété P_{n+1} et achève la récurrence. La propriété P_n est donc vérifiée quel que soit l'entier n, ce qui prouve entre autre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) = n$, c'est-à-dire que $f = id_{\mathbb{N}}$.

Feuille d'exercices n°6 : Convergence de suites

ECE3 Lycée Carnot

21 octobre 2010

Exercice 1 (**)

Vrai ou faux ?

1. Une suite croissante à partir d'un certain rang est minorée.
2. Une suite convergente est nécessairement monotone à partir d'un certain rang.
3. Une suite divergeant vers $+\infty$ est nécessairement croissante à partir d'un certain rang.
4. Si (u_n) est croissante, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant v_n$, alors (v_n) est croissante.
5. Si $(|u_n|)$ converge, alors (u_n) aussi.
6. Si $(|u_n|)$ converge vers 0, alors (u_n) aussi.

Exercice 2 (* à **)

Étudier la convergence et déterminer la limite éventuelle de chacune des suites suivantes :

- $u_n = 2^n - 3^n + 4^n$
- $u_n = (-n+2)e^{-n}$
- $u_n = 2^n - e^{2n} + 1$
- $u_n = \dfrac{n^2 - 3n + 2}{2n^2 + 5n - 34}$
- $u_n = \ln n + e^{-3n}$
- $u_n = \dfrac{2\sqrt{n} + 3\ln n - 5}{\ln(n^3) - 3n + 2}$
- $u_n = \sqrt{n^2 - 1} - n$
- $u_n = \dfrac{(n+2)!}{(n^2+1) \times n!}$
- $u_n = e^{-\frac{1}{2n}} + \ln\left(\dfrac{n}{n+2}\right)$

Exercice 3 (**)

On considère une suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$.

1. Montrer que tous les termes de la suite sont strictement positifs.
2. Déterminer la monotonie de la suite (u_n).
3. Montrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n^2 \geqslant 2n + u_0^2$. En déduire la limite de la suite.

Exercice 4 (***)

On considère une suite (u_n) définie par $u_n = \left(1 + \dfrac{a}{n}\right)^n$, avec $a \in \mathbb{R}_+$.

1. Montrer que la suite est croissante (pour cette question, on étudiera les variations de la fonction $f : x \mapsto x \ln\left(1 + \dfrac{a}{x}\right)$ en la dérivant deux fois).
2. Montrer que, $\forall x \geqslant 0$, $\dfrac{t}{1+t} \leqslant \ln(1+t) \leqslant t$.

3. En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{na}{n+a} \leqslant \ln u_n \leqslant a$.
4. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
5. Quel résultat obtient-on en prenant $a = 1$?

Exercice 5 (**)

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies de la façon suivante : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$, et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$. Montrer que ces deux suites sont adjacentes (les curieux seront contents d'apprendre que leur limite commune vaut $\dfrac{\pi^2}{6}$).

Exercice 6 (**)

On considère la suite (u_n) définie pour $n \geqslant 1$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{n}{n^2+k}$.

1. Montrer que $\dfrac{n^2}{n^2+n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n^2}{n^2+1}$.
2. Déduire de l'encadrement précédent que la suite est convergente, et préciser sa limite.

Exercice 7 (***)

Soient a et b deux réels vérifiant $0 < a < b$. On définit deux suites de la façon suivante : $u_0 = a$; $v_0 = b$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$.

1. Vérifier que ces deux suites sont bien définies.
2. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$ (pour une fois, pas besoin de récurrence).
3. Déterminer la monotonie de chacune des deux suites.
4. En déduire que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.

Exercice 8 (***)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a \neq 1$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+1}{u_n - 1}$.

1. Montrer que la suite est bien définie.
2. Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$.
3. Étudier également le signe de $f(x) - x$.
4. On suppose $a > 1$. À l'aide des questions précédentes, montrer que $\forall n \geqslant 1$, $u_n \geqslant 2(1+\sqrt{2})$, puis que la suite est croissante. En déduire sa limite éventuelle.
5. Étudier de même la convergence de la suite quand $a < 1$.

Exercice 9 (*)

Donner un équivalent, le plus simple possible, de chacune des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{5n - n^2 + 2n^7}{n^8 - 3n + 12}$
2. $u_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n}$
3. $u_n = \dfrac{n^2}{\sqrt{n^2 + n + 1}}$
4. $u_n = e^{-n} + e^{-2n}$
5. $u_n = \dfrac{2\sqrt{n} + e^{3n} - 5\ln n}{n^2 - 3\ln(2n^4)}$
6. $u_n = \dfrac{1}{n^2} + e^{-3n}$
7. $u_n = \ln\left(1 - \dfrac{2}{n^2} + \dfrac{1}{n}\right)$
8. $u_n = \ln(1 + n^3)$
9. $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^n$

Exercice 10 (**)

On considère la suite (S_n) définie pour $n \geqslant 1$ par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. Montrer que $\forall n \geqslant 1,\ \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
2. À l'aide de la question précédente, déterminer la limite de la suite (S_n).
3. On pose désormais $u_n = S_n - 2\sqrt{n}$. Démontrer à l'aide du théorème de convergence monotone que (u_n) converge.
4. En déduire un équivalent simple de S_n.

Exercice 11 (d'après EML) (**)

On considère la fonction $f : x \mapsto x^2 + 4x + 2$ et une suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ (u_0 étant un réel quelconque).

1. Étudier les variations de la fonction f, et déterminer le nombre d'antécédents par f d'un réel m en fonction des valeurs de m. Résoudre en particulier $f(x) = -1$.
2. Montrer qu'il existe trois valeurs de u_0 pour lesquelles la suite (u_n) est stationnaire (c'est-à-dire qu'elle est constante à partir d'un certain rang).
3. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} + 2 = (u_n + 2)^2$. En déduire la nature de la suite (u_n) selon la valeur de u_0.

Exercice 12 (d'après EDHEC) (***)

On considère, pour tout entier naturel n, la fonction f_n définie par $f_n(x) = x^5 + nx - 1$.

1. Étudier les variations de f_n.
2. Montrer que, $\forall n \geqslant 1$, il existe un unique réel u_n tel que $f_n(u_n) = 0$.

3. Montrer que $u_n \leqslant \frac{1}{n}$ et en déduire la convergence de la suite (u_n).
4. Montrer que $u_n \sim \frac{1}{n}$.
5. Déterminer un équivalent simple de $\frac{1}{n} - u_n$.

Exercice 13 (***)

Soit (u_n) une suite bornée. On introduit alors deux suites auxiliaires définies par $a_n = \max(u_0, u_1, \dots, u_n)$ et $b_n = \min(u_0, u_1, \dots, u_n)$.

1. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes.
2. Que peut-on dire de la suite (u_n) si elles ont la même limite ?
3. On pose désormais $c_n = \max(u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, \dots, u_{2n})$. Cette suite est-elle nécessairement convergente ?

Exercice 14 (****)

Soit (u_n) une suite convergeant vers une limite finie l. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} u_k$ (autrement dit, v_n est la moyenne des n premiers termes de la suite (u_n)) converge également vers l (commencez par le cas plus facile où $l = 0$, et revenez à la définition de la limite).

Et pour finir en beauté, deux (extraits de) sujets de concours, à peine retouchés (une ou deux questions que vous ne pouvez pas faire ont été supprimées).

Problème 1 (premier exercice Ecricome 99) (***)

Préliminaire

Soit (x_n) une suite numérique qui vérifie, pour tout entier naturel n, la relation :

$$x_{n+2} = \frac{1}{3}x_{n+1} + \frac{1}{3}x_n$$

1. Résoudre l'équation caractéristique de cette suite et, sans chercher à déterminer les coefficients α et β, donner l'allure du terme général de la suite.
2. En déduire la limite de la suite (x_n).

On étudie désormais la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = a \geqslant 1$; $u_1 = b \geqslant 1$, et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+2} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}}$$

Question 1

1.a : Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n est bien défini et vérifie : $u_n \geqslant 1$.

1.b : Ecrire un programme en Turbo Pascal qui calcule et affiche la valeur de u_n pour des valeurs de a et b réelles supérieures ou égales à 1 et de n entier supérieur ou égal à 2, entrées par l'utilisateur.

Question 2

On se propose d'établir la convergence de la suite (u_n) par l'étude d'une suite auxiliaire (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1$

2.a : Montrer que si $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 4$

2.b : Vérifier, pour tout entier n, que $v_{n+2} = \dfrac{v_{n+1} + v_n}{2(2 + v_{n+2})}$.

En déduire que : $|v_{n+2}| \leqslant \frac{1}{3}(|v_n| + |v_{n+1}|)$.

2.c : On note (x_n) la suite définie par : $x_0 = |v_0|$, $x_1 = |v_1|$ et pour tout entier naturel n :

$$x_{n+2} = \frac{1}{3}x_{n+1} + \frac{1}{3}x_n$$

Montrer que, pour tout entier naturel n, $|v_n| \leqslant x_n$ et conclure quant à la convergence de la suite (u_n).

Problème 2 (début de Maths III HEC/ESCP 2002) (****)

Pour toutes suites numériques $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on définit la suite $u \times v = w$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{n-k}$$

Partie A : Exemples

1. **Premiers exemples**
   Pour tout entier naturel n, calculer w_n en fonction de n dans chacun des cas suivants :
   (a) pour tout entier naturel n, $u_n = 2$ et $v_n = 3$.
   (b) pour tout entier naturel n, $u_n = 2^n$ et $v_n = 3^n$.
2. **Programmation**
   Dans cette question, les suites u et v sont définies par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \ln(n+1)$ et $v_n = \dfrac{1}{n+1}$.
   Écrire un programme en Turbo-Pascal qui demande à l'utilisateur une valeur de l'entier naturel n, qui calcule et affiche les valeurs $w_0,\ w_1,\ \ldots,\ w_n$.
3. **Un résultat de convergence**
   Dans cette question, la suite u est définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et v est une suite de réels positifs, décroissante à partir du rang 1 et de limite nulle.
   (a) Établir, pour tout couple d'entiers naturels (n, m) vérifiant $n < m$, l'inégalité :
   $$\sum_{k=n+1}^{m} u_k \leqslant u_n$$
   (b) Soit n un entier strictement supérieur à 1. Prouver les inégalités :
   $$w_{2n} \leqslant v_0\, u_{2n} + 2v_n + v_1\, u_n \quad \text{et} \quad w_{2n+1} \leqslant v_0\, u_{2n+1} + 2v_{n+1} + v_1\, u_n$$

(c) En déduire que les deux suites $(w_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0 ainsi que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(d) Soit u' la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u'_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$. À l'aide de la question précédente, montrer que la suite $u' \times v$ est convergente et de limite nulle.

Partie B : Application à l'étude d'un ensemble de suites

Dans cette partie, A désigne l'ensemble des suites $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad a_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1})$$

1. Montrer que toute suite décroissante de réels positifs est élément de A et qu'une suite strictement croissante ne peut appartenir à A.

2. Soit $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}^{\times},\ z_{n+1} = \dfrac{1}{2}(z_n + z_{n-1})$.

   (a) Montrer qu'il existe deux constantes réelles α et β telles que l'on a :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_n = \alpha + \beta\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

   (b) En déduire qu'il existe des suites appartenant à A et non monotones.

3. Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de A et b la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.

   On définit alors la suite c par : $c_0 = a_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^{\times},\ c_n = a_n + \dfrac{1}{2}a_{n-1}$.

   (a) Montrer que la suite c est décroissante à partir du rang 1 et qu'elle converge vers un nombre ℓ que l'on ne cherchera pas à calculer.

   (b) Pour tout entier naturel n, établir l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n-k} = a_n$.
   Que peut-on en déduire pour les suites $b \times c$ et a ?

   (c) Soit ε la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ \varepsilon_n = c_n - \ell$ et d la suite $b \times \varepsilon$.
   En utilisant le résultat de la question **3**. de la Partie **1**, montrer que la suite d converge vers 0.

   (d) Pour tout entier naturel n, établir l'égalité : $d_n = a_n - \dfrac{2}{3}\ell\left(1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$.

   En déduire que la suite a converge et préciser sa limite.

Corrigé de la feuille d'exercices n°6

Exercice 1 (**)

1. Vrai, elle est minorée par le plus petit des termes précédant le rang à partir duquel elle est croissante.
2. Faux, par exemple $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge vers 0 mais $u_{n+1} - u_n$ change de signe en permanence.
3. C'est également faux, on peut par exemple prendre $u_n = n^2$ si n est pair, et $u_n = (n-1)^2 - 1$ si n est impair. La suite n'est pas croissante à partir d'un certain rang puisque chaque terme d'indice impair est plus petit que le terme pair qui le précède, et pourtant elle diverge vers $+\infty$.
4. L'énoncé n'était pas vraiment celui que je voulais mettre, mais c'est faux de toute façon.
5. Faux, par exemple $(-1)^n$ ne converge pas alors que sa valeur absolue est constante égale à 1 (et donc convergente).
6. Vrai, dire que $|u_n - 0| < \varepsilon$ est la même chose que $|u_n| - 0 < \varepsilon$.

Exercice 2 (* à **)

La correction de cet exercice est rédigée à l'aide d'équivalents, qui n'avaient pas encore été vus au moment où nous avons fait cet exercice en classe, mais c'est de toute façon une bonne idée de le reprendre avec le formalisme des équivalents.

- $2^n - 3^n + 4^n \sim 4^n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n - 3^n + 4^n = +\infty$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (-n+2)e^{-n} = 0$ par croissance comparée.
- $2^n - e^{2n} + 1 \sim -e^{2n}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n - e^{2n} + 1 = -\infty$.
- $\dfrac{n^2-3n+2}{2n^2+5n-34} \sim \dfrac{n^2}{2n^2} = \dfrac{1}{2}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2-3n+2}{2n^2+5n-34} = \dfrac{1}{2}$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln n + e^{-3n} = +\infty$ (il n'y a même pas de forme indeterminée ici).
- $\dfrac{2\sqrt{n}+3\ln n - 5}{\ln(n^3) - 3n + 2} \sim \dfrac{2\sqrt{n}}{-3n} \sim -\dfrac{2}{3\sqrt{n}}$, donc la limite vaut 0.
- $\sqrt{n^2-1} - n = \dfrac{n^2-1-n^2}{\sqrt{n^2-1}+n} = -\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2-1} - n = 0$.
- $\dfrac{(n+2)!}{(n^2+1)\times n!} = \dfrac{(n+1)(n+2)n!}{(n^2+1)n!} = \dfrac{n^2+3n+2}{n^2+1} \sim \dfrac{n^2}{n^2} = 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n+2)!}{(n^2+1)\times n!} = 1$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-\frac{1}{2n}} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\dfrac{n}{n+2}\right) = 0$, donc la limite recherchée est nulle.

Exercice 3 (**)

1. C'est une récurrence facile : $u_0 > 0$ par hypothèse, et si $u_n > 0$, alors $\dfrac{1}{u_n} > 0$, et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$ est également strictement positif (et bien défini puisque u_n n'est pas nul).
2. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{u_n} > 0$ donc la suite est strictement croissante.
3. Notons P_n la propriété $u_n^2 \geqslant 2n + u_0^2$. pour $n = 0$, elle se réduit à $u_0^2 \geqslant u_0^2$, ce qui est manifestement vrai. Supposons donc, pour un certain entier n, que P_n est vrai. On a alors $u_{n+1}^2 = \left(u_n + \dfrac{1}{u_n}\right)^2 = u_n^2 + 2u_n \times \dfrac{1}{u_n} + \dfrac{1}{u_n^2} = u_n^2 + 2 + \dfrac{1}{u_n^2}$. En utilisant l'hypothèse de récurrence et le fait que $\dfrac{1}{u_n^2} > 0$, on obtient $u_{n+1}^2 > 2n + u_0^2 + 2 = 2(n+1) + u_0^2$, ce qui prouve

exactement la propriété P_{n+1}. D'après le principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout entier n.
La suite (u_n^2) étant minorée par une suite arithmétique de limite $+\infty$, elle diverge vers $+\infty$. Et u_n étant toujours positif, on peut en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 4 (***)

1. On veut montrer, en passant à l'exponentielle, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)\ln\left(1+\dfrac{a}{n+1}\right) \geqslant n\ln\left(1+\dfrac{a}{n}\right)$, ce qui découle du fait que la fonction $f : x \mapsto x\ln\left(1+\dfrac{a}{x}\right)$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. On a $f(x) = x\ln\dfrac{x+a}{x} = x\ln(x+a) - x\ln x$, donc $f'(x) = \ln(x+a) + \dfrac{x}{x+a} - \ln x - 1$, et $f''(x) = \dfrac{1}{x+a} + \dfrac{x+a-x}{(x+a)^2} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x(x+a)+ax-(x+a)^2}{x(x+a)^2} = \dfrac{-a^2}{x(x+a)^2} < 0$. La fonction f' est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Or, $f'(x) = \ln\left(1+\dfrac{a}{x}\right) + \dfrac{x}{x+a} - 1$ a pour limite 0 en $+\infty$. La fonction f' est donc toujours positive, ce dont on déduit que f est bien croissante (ouf...).
2. Le plus simple est de faire deux petites études de fonction : posons sur $g(t) = t - \ln(1+t)$. La fonction g est définie sur $\mathbb{R}_+$ (elle est même définie entre -1 et 0, mais pour ce qu'on noue demande, pas la peine de s'y intéresser), de dérivée $g'(t) = 1 - \dfrac{1}{1+t} = \dfrac{t}{1+t} \geqslant 0$. La fonction g est donc croissante, et comme $g(0) = 0$, elle est toujours positive, ce qui prouve que $\ln(1+t) \leqslant t$ sur $\mathbb{R}_+$.
   De même, on pose $h(t) = \ln(1+t) - \dfrac{t}{1+t}$, fonction dont la dérivée vaut $\dfrac{1}{1+t} - \dfrac{1+t-t}{(1+t)^2} = \dfrac{1+t-1}{(1+t)^2} = \dfrac{t}{(1+t)^2} \geqslant 0$. Cette fonction est donc également croissante, et vérifie aussi $h(0) = 0$, d'où sa positivité sur $\mathbb{R}_+$ et l'encadrement souhaité.
3. On a $\ln u_n = n\ln\left(1+\dfrac{a}{n}\right)$, donc en posant $t = \dfrac{a}{n}$ et en appliquant l'encadrement de la question précédente, $n\times\dfrac{\frac{a}{n}}{1+\frac{a}{n}} \leqslant \ln u_n \leqslant n\times\dfrac{a}{n}$, qu'il suffit de simplifier pour obtenir le résultat demandé.
4. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{na}{n+a} = a$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que la suite $\ln(u_n)$ converge vers a. La suite (u_n) a donc pour limite e^a.
5. Pour $a = 1$, on obtient le résultat classique suivant : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$.

Exercice 5 (**)

Il y a deux points sur les trois qui sont très faciles à prouver :

- $v_n - u_n = \dfrac{1}{n}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$.
- $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$, donc la suite (u_n) est croissante.

Ne reste plus qu'à prouver que (v_n) est décroissante : $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \dfrac{1}{n+1} - u_n - \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{n+n(n+1)-(n+1)^2}{n(n+1)^2} = \dfrac{2n+n^2-n^2-2n-1}{n(n+1)^2} = \dfrac{-1}{(n+1)^2} < 0$. La suite (v_n) est donc bien décroissante, et les deux suites étant adjacentes, elles convergent donc vers une limite commune.

Exercice 6 (**)

1. Le terme d'indice n de la suite est constitué d'une somme de n réels dont le plus petit est $\dfrac{n}{n^2+n}$ et le plus gros $\dfrac{n}{n^2+1}$. On en déduit que $n \times \dfrac{n}{n^2+n} \leqslant u_n \leqslant n \times \dfrac{n}{n^2+1}$, d'où l'encadrement demandé.
2. Les deux suites extrêmes ayant pour limite 1, une simple application du théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Exercice 7 (***)

1. Il suffit pour cela de prouver par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$. C'est vrai au rang 0 par hypothèse, et si u_n et v_n sont tous deux strictement positifs, ce sera aussi le cas de $u_n + v_n$ et de $u_n v_n$, donc de u_{n+1} et v_{n+1}. Ainsi, les deux suites sont bien définies.
2. Supposons $n \geqslant 1$ (pour $n = 0$ l'inégalité est vraie par hypothèse). On a $v_n - u_n = \dfrac{u_{n-1}+v_{n-1}}{2} - \sqrt{u_{n-1}v_{n-1}} = \dfrac{u_{n-1}+v_{n-1}-2\sqrt{u_{n-1}}\sqrt{v_{n-1}}}{2} = \dfrac{(\sqrt{u_{n-1}}-\sqrt{v_{n-1}})^2}{2} > 0$, donc $u_n \leqslant v_n$.
3. C'est désormais facile en utilisant le résultat de la question précédente : $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n v_n} - u_n = \sqrt{u_n}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}) > 0$ puisque $v_n > u_n$, donc (u_n) est strictement croissante. De même, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n + v_n}{2} - v_n = \dfrac{u_n - v_n}{2} < 0$, donc (v_n) est décroissante.
4. On ne peut pas affirmer que les suites sont adjacentes car on ne sait pas si $(u_n - v_n)$ tend vers 0. Par contre, (u_n) étant croissante et majorée par exemple par v_0 (car $u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$ puisque la suite (v_n) est decroissante), le théorème de convergence monotone permet d'affirmer qu'elle est convergente vers une certaine limite l. De même, (v_n) est décroissante et minorée (encore plus simplement, par 0), donc converge vers une limite l'. La suite (v_{n+1}) converge aussi vers l', mais comme $v_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2}$, on a donc $l' = \dfrac{l+l'}{2}$, d'où $\dfrac{l'}{2} = \dfrac{l}{2}$, soit $l = l'$. Finalement, les deux suites ont bien la même limite (appelée moyenne arithmético-géométrique des deux réels a et b).

Exercice 8 (***)

1. Pour que la suite soit bien définie, il faut que u_n ne soit jamais égal à 1. C'est le cas pour u_0, mais il n'est pas facile de s'en sortir par récurrence ensuite. Constatons que $u_{n+1} = 1 \Leftrightarrow u_n^2 + 1 = u_n - 1 \Leftrightarrow u_n^2 - u_n + 2 = 0$, équation qui a un discriminant négatif et n'admet donc pas de solution. Autrement dit, on ne peut jamais tomber sur la valeur 1 avec cette relation de récurrence, et la suite est donc bien définie.
2. La fonction f admet pour dérivée $f'(x) = \dfrac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$. Le numérateur a pour discriminant $\Delta = 8$ et admet deux racines $x_1 = \dfrac{2-2\sqrt{2}}{2} = 1-\sqrt{2}$, et $x_2 = 1+\sqrt{2}$. La fonction f est strictement croissante sur $]-\infty; 1-\sqrt{2}]$ et sur $[1+\sqrt{2}; +\infty[$, et décroissante sur $[1-\sqrt{2}; 1[$ et sur $]1; 1+\sqrt{2}]$. Elle admet un maximum local en $1-\sqrt{2}$ qui vaut $\dfrac{(1-\sqrt{2})^2+1}{1-\sqrt{2}-1} = \dfrac{4-2\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = 2-2\sqrt{2}$; et un minimum local en $1+\sqrt{2}$ qui vaut $\dfrac{(1+\sqrt{2})^2+1}{1+\sqrt{2}-1} = \dfrac{4+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}+2$.
3. On a $f(x) - x = \dfrac{x^2-x+2}{x-1}$, et on a vu plus haut que le numérateur ne s'annulait jamais, ce

dont on déduit qu'il est toujours positif. Si $x < 1$, $f(x)$ est donc inférieur à x, et $f(x) > x$ si $x > 1$.

4. Une récurrence facile permet de prouver que $u_n \geqslant 2\sqrt{2}+2$ dès que $n \geqslant 1$. C'est vrai pour u_1 car $u_1 = f(u_0)$ et que la plus petite valeur prise par f sur l'intervalle $]1;+\infty[$ est $2\sqrt{2}+2$ (question 2). Si on suppose désormais $u_n \geqslant 2\sqrt{2}+2$, on a a fortiori $u_n > 1$, donc $u_{n+1} = f(u_n) \geqslant 2\sqrt{2}+2$, ce qui achève la récurrence. Comme on a toujours $f(x) > x$ quand $x > 1$, on en déduit que $u_{n+1} > u_n$ pour tout entier n, et donc que la suite est strictement croissante. Si elle était convergente, sa limite l vérifierait $f(l) = l$, ce qui n'est pas possible puisque cette équation n'a pas de solution. La suite ne peut donc pas converger ; comme elle est croissante, cela signifie que (u_n) n'est pas majorée et diverge vers $+\infty$.
5. Le principe est exactement le même : on prouve par récurrence que $\forall n \geqslant 1$, $u_n \leqslant 2-2\sqrt{2}$ (qui est négatif, donc très inférieur à 1), on en déduit que la suite est décroissante puisque $f(x) < x$ sur l'intervalle où se situent les valeurs de la suite, et enfin que la suite ne peut pas converger, donc diverge vers $-\infty$.

Exercice 9 (*)

1. $\dfrac{5n-n^2+2n^7}{n^8-3n+12} \sim \dfrac{2n^7}{n^8} \sim \dfrac{2}{n}$
2. $\sqrt{n+3}-\sqrt{n} = \dfrac{n+3-n}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}} = \dfrac{3}{\sqrt{n}(\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1)} \sim \dfrac{3}{2\sqrt{n}}$
3. $\dfrac{n^2}{\sqrt{n^2+n+1}} \sim \dfrac{n^2}{n} \sim n$
4. $e^{-n}+e^{-2n} \sim e^{-n}$
5. $\dfrac{2\sqrt{n}+e^{3n}-5\ln n}{n^2-3\ln(2n^4)} \sim \dfrac{e^{3n}}{n^2}$
6. $\dfrac{1}{n^2}+e^{-3n} \sim \dfrac{1}{n^2}$
7. $\ln\left(1-\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{1}{n}\right) \sim -\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{1}{n} \sim \dfrac{1}{n}$
8. Attention à ne pas dire utiliser trop précipitamment l'équivalent vu en cours pour $\ln(1+u_n)$, pusique n^3 ne tend pas vraiment vers 0. Il faut plutôt factoriser : $\ln(1+n^3) = \ln(n^3) + \ln\left(1+\dfrac{1}{n^3}\right)$. Le deuxièmemorceau tendant vers 0 et le premier vers $+\infty$, $u_n \sim \ln(n^3) \sim 3\ln n$.
9. $\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n = e^{n\ln(1+\frac{1}{n^2})}$. Or $n\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right) \sim n\times\dfrac{1}{n^2} \sim \dfrac{1}{n}$. On ne peut pas passer cet équivalent à l'exponentielle, mais on peut en déduire que la suite (u_n) tend vers 1 (ce qui est dans l'exponentielle tend vers 0), donc $u_n \sim 1$.

Exercice 10 (**)

1. En effet, $2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \dfrac{2(n+1-n)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$. Or, comme $\sqrt{n}+\sqrt{n} \leqslant \sqrt{n}+\sqrt{n+1} \leqslant \sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}$, on a $\dfrac{1}{2\sqrt{n+1}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$, d'où l'encadrement souhaité en multipliant tout par 2.
2. En utilisant l'inégalité de droite de la question précédente, on obtient $2\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) \leqslant S_n$. Or, la somme de gauche est une somme télescopique égale à $2(\sqrt{n+1}-1) = 2\sqrt{n+1}-2$.

Cette expression a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, donc par théorème de comparaison, $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ (inutile d'utiliser l'inégalité de gauche de la question 1 ici, celle de droite suffit...).

3. Commençons par déterminer la monotonie de la suite (u_n) : $u_{n+1}-u_n = S_{n+1}-S_n-2\sqrt{n+1}+2\sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$, expression négative d'après la question 1. La suite (u_n) est donc décroissante. On a vu par ailleurs que $S_n \geqslant 2\sqrt{n+1}-2$, donc a fortiori $S_n \geqslant 2\sqrt{n}-2$, donc $u_n \geqslant -2$. La suite (u_n) étant décroissante et minorée, elle est convergente.

4. Puisque $\lim_{n\to+\infty} S_n - 2\sqrt{n} = l \in \mathbb{R}$, on en déduit $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{S_n-2\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} = 0$, soit $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{2\sqrt{n}} = 1$. Autrement dit, on a prouvé que $S_n \sim 2\sqrt{n}$.

Exercice 11 (d'après EML) (**)

1. Étudier une fonction de second degré ne devrait pas poser trop de problème : $f'(x) = 2x+4$ s'annule en -2, la fonction est donc strictement décroissante sur $]-\infty;-2]$ et strictement croissante sur $[-2;+\infty[$. Comme $f(-2) = -2$, on en déduit que tous les réels strictement supérieurs à -2 ont deux antécédents par f, tous ceux strictement inférieurs à -2 n'ont pas d'antécédent, et -2 a un unique antécédent, à savoir -2. En particulier, $f(x) = -1$ équivaut à $x^2+4x+3 = 0$, équation dont le discriminant vaut $\Delta = 16-12 = 4$, et qui admet donc deux solutions $x_1 = \dfrac{-4-2}{2} = -3$ et $x_2 = \dfrac{-4+2}{2} = -1$.
2. Si la suite est stationnaire, c'est qu'il existe une valeur de n à partir de laquelle les termes sont constants, et en particulier pour laquell $u_n = u_{n+1}$, donc $u_n = f(u_n)$. Or, $f(x) = x \Rightarrow x^2+3x+2 = 0$, équation qui a pour discriminant $\Delta = 9-8 = 1$, et pour solutions $x_1 = -2$ et $x_2 = -1$ (on savait déjà que ces deux valeurs étaient solutions de l'équation après les calculs de la première question). Conclusion, on a nécessairement $u_n = -2$ ou $u_n = -1$. Mais comme $u_n = f(u_{n-1})$, u_{n-1} doit être un antécédent de -2 ou de -1, c'est-à-dire être égal à -2, -3 ou -1 (toujours d'après la question précédente). Mais alors u_{n-2} doit lui-même être un antécédent de -1 ou de -2 (pour -3 il n'y a pas d'antécédent) donc égal à -1, -2 ou -3 etc ; jusqu'à être remonté à u_0. Pour rédiger ce raisonnement de façon rigoureuse, deux solutions : soit on fait une récurrence descendente (on part de u_n pour revenir à u_0, un peu inhabituel), soit on fait une récurrence classique visant à montrer que, si $u_0 \notin \{-3;-2;-1\}$, alors on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \notin \{-3;-2;-1\}$, ce qui prouve que, si u_0 n'est pas une des trois valeurs en question, la suite n'est pas stationnaire. Autrement dit, on prouve la contraposée de ce qui est demandé dans cette question. La récurrence ne pose pas de problème particulier, et les trois valeurs initiales pour lesquelles la suite stationne sont donc -1 (suite constante égale à -1), -2 (suite constante égale à -2) et -3 (suite stationnaire à -1 à partir du rang 1).
3. C'est un calcul tout bête : $u_{n+1}+2 = f(u_n)+2 = u_n^2+4u_n+2+2 = (u_n+2)^2$. Posons $v_n = u_n+2$ pour plus de clarté, on a donc $v_{n+1} = v_n^2$. La suite (v_n) prend donc des valeurs positives à partir de v_1, et une récurrence simple montre que, si $v_1 > 1$, alors (v_n) ne prend que des valeurs supérieurs à 1 et sera strictement croissante ; au contraire, si $v_1 < 1$, alors v_n sera toujours inférieur à 1 et la suite sera strictement décroissante. Dans ce deuxième cas, (v_n) est décroissante minorée, donc converge vers un réel l vérifiant $l = l^2$, donc égal à 0 ou 1. Comme $v_n \leqslant v_1 < 1$, on en déduit que (v_n) converge vers 0. Par contre, si $v_1 > 1$, la suite ne peut pas converger vers 0 ou 1 ; étant croissante elle diverge donc vers $+\infty$. On aura $v_1 < 1$ si $v_0^2 < 1$, c'est-à-dire si $v_0 \in]-1;1[$

   Ne reste plus qu'à revenir à $u_n = v_n - 2$. Si $u_0 \in]-3;-1[$, $v_0 \in]-1;1[$, donc la suite (v_n) converge vers 0, et (u_n) converge vers -2. Si $u_0 = -3$ ou $u_0 = -1$, on a déjà vu que la suite était stationnaire. Enfin, si $u_0 < -3$ ou $u_0 > -1$, on aura $v_1 > 1$, donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Exercice 12 (d'après EDHEC) (***)

1. Calculons donc la dérivée $f_n'(x) = 5x^4 + n$. Cette dérivée est toujours strictement positive (sauf en 0 pour $n = 0$), la fonction est donc strictement croissante, quel que soit l'entier n.
2. Comme de plus $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, chaque fonction f_n est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Chaque réel a donc un unique antécédent par f_n et en particulier l'équation $f_n(n) = 0$ admet une unique solution.
3. Constatons que $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n^5} + 1 - 1 = \dfrac{1}{n^5} > 0$. Comme la fonction f_n est strictement croissante, et $f_n(u_n) = 0$, on en déduit que $u_n < \dfrac{1}{n}$. Notons par ailleurs que $f_n(0) = -1$, donc par un raisonnement similaire on a toujours $0 < u_n$. Le théorème des gendarmes permet donc d'affirmer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
4. On sait que $u_n^5 + nu_n - 1 = 0$, donc $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{u_n^5}{n}$. Comme (u_n) tend vers 0, $\dfrac{u_n^5}{n} = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, donc $u_n \sim \dfrac{1}{n}$.
5. Comme on vient de le voir, $\dfrac{1}{n} - u_n = \dfrac{u_n^5}{n} \sim \dfrac{\frac{1}{n^5}}{n} \sim \dfrac{1}{n^6}$.

Exercice 13 (***)

1. La suite (a_n) est croissante (en effet, le plus grand des $n+1$ premiers termes de la suite est nécessairement plus grand que le plus grand des n premiers) et majorée par n'importe quel majorant de (u_n), donc elle converge. De même, (b_n) est décroissante et minorée par les minorants de (u_n) donc converge également.
2. On a assez clairement $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \geqslant b_n$. Si jamais il existe un entier n_0 pour lequel $a_{n_0} > b_{n_0}$, alors on aura $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n \geqslant a_{n_0}$ (puisque la suite est croissante), et $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n \leqslant b_{n_0}$, donc les deux suites auront des limites distinctes. Autrement dit, pour que les suites aient la même limite, on doit avoir $a_n = b_n$ pour tout entier n, c'est-à-dire que le maximum et le minimum des n premiers termes de la suite (u_n) sont toujours égaux. Ceci n'est possible que si tous ces termes sont égaux entre eux, c'est-à-dire quand (u_n) est une suite constante.
3. La suite (c_n) n'est pas toujours convergente, même lorsque (u_n) est bornée. Prenons par exemple la suite (u_n) qui vaut 1 lorsque n est une puissance de 10 et 0 sinon (autrement dit $u_{10} = u_{100} = u_{1\ 000} = \cdots = 1$ et tous les autres termes sont nuls). Si l'on regarde la suite (c_n), elle est constituée de termes valant tous 0 ou 1, mais n'est pas stationnaire (on a par exemple $c_{10^k} = 1$ mais $c_{10^k+1} = 0$ car il n'y a pas de puissance de 10 entre $10^k + 1$ et $2(10^k + 1)$), donc ne peut pas converger.

Exercice 14 (****)

Supposons donc que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$, et choisissons un $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite, il existe un entier n_0 à partir duquel on aura $|u_n| < \varepsilon$. Découpons alors v_n en deux parties : ce qui se passe avant n_0 et après n_0 : si $n > n_0$, $v_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{k=n} u_k = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{k=n_0} u_k + \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=n_0}^{k=n} u_k$. La première somme est une constante (on peut modifier n, mais n_0, lui, est fixé), donc, quand on la divise par n, ça va finir par se rapprocher de 0. Autrement dit, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n_1$, $\dfrac{1}{n}\left|\sum\limits_{k=1}^{k=n_0} u_k\right| < \varepsilon$. Quand à la deuxième somme, elle est constituée de $n - n_0$ termes qui sont tous inférieurs (en valeur absolue) à ε, donc sa valeur absolue est inférieure à $(n-n_0)\varepsilon$, d'où $\dfrac{1}{n}\left|\displaystyle\sum_{k=n_0+1}^{k=n} u_k\right| \leqslant \dfrac{n-n_0}{n}\varepsilon \leqslant \varepsilon$ (puisque $\dfrac{n-n_0}{n} \leqslant 1$). Conclusion, lorsque $n \geqslant \max(n_0; n_1)$, on a $|v_n| \leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$. Ceci suffit à prouver que la suite (v_n) tend vers 0, et a donc bien la même limite que (u_n).

Passons désormais au cas général (qui va être facile en fait), c'est à dire lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \neq 0$. Posons $w_n = u_n - l$, cette suite auxilaire a pour limite 0, donc on peut lui appliquer ce qu'on vient de démontrer : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} w_k = 0$. Or, $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} w_k = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}(u_k - l) = \dfrac{1}{n}\left((\sum_{k=1}^{k=n} u_k) - nl\right) = \left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} u_k\right) - l$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} u_k = l$, ce qu'on voulait prouver. Note finale : ce résultat est connu sous le nom de théorème de Cesaro, il stipule que la moyenne des n premiers termes d'une suite convergente a la même limite que la suite elle-même.

Problème 1 (Ecricome 99) (***)

Préliminaire

1. L'équation caractéristique $x^2 - \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{3}$ a pour discriminant $\Delta = \dfrac{1}{9} + \dfrac{4}{3} = \dfrac{13}{9}$, et l'équation admet donc deux solutions $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{13}}{6}$ et $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{13}}{6}$. Le terme général de la suite est donc de la forme $x_n = \alpha\left(\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}\right)^n + \beta\left(\dfrac{1-\sqrt{13}}{6}\right)^n$.
2. Les deux racines x_1 et x_2 étant comprises strictement entre -1 et 1, la suite (x_n) est une somme de deux suites convergeant vers 0, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

Question 1

1.a : Prouvons donc par récurrence double la propriété P_n : $u_n \geqslant 1$. C'est vrai pour $n=0$ et $n=1$ par hypothèse. Supposons désormais la propriété vérifiée par u_n et u_{n+1}. On a alors $\sqrt{u_n} \geqslant 1$ et $\sqrt{u_{n+1}} \geqslant 1$, donc $u_{n+2} \geqslant 1+1 = 2$ et a fortiori $u_{n+2} \geqslant 1$, ce qui achève la récurrence.

1.b :
```
PROGRAM valeurs;
USES wincrt;
VAR a,b,u,v,w : real; i,n : integer;
BEGIN
WriteLn('Choisissez des valeurs supérieures à 1 pour les réels a et b');
ReadLn(a,b);
WriteLn('Choisissez une valeur supérieure à 2 pour l'entier n');
ReadLn(n);
u := a; v := b;
FOR i := 2 TO n DO
BEGIN
w := sqrt(u)+sqrt(v);
u := v;
v := w;
END;
WriteLn('La valeur de u',n,' est ',v);
END.
```

Question 2

2.a : D'après la définition de v_n, on a $2(v_n+1)=\sqrt{u_n}$, ou encore $4(v_n+1)^2=u_n$, soit $u_n=4v_n^2+8v_n+4$. Si la suite (v_n) converge vers 0, on en déduit bien, par somme de limites, que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=4$.

2.b : Calculons donc $\dfrac{v_{n+1}+v_n}{2(2+v_{n+2})}=\dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{u_{n+1}}-1+\frac{1}{2}\sqrt{u_n}-1}{2(2+v_{n+2})}=\dfrac{u_{n+2}-4}{4(2+v_{n+2})}=\dfrac{4v_{n+2}^2+8v_{n+2}}{8+4v_{n+2}}=$ v_{n+2} (on a utilisé le calcul de la question précédente). On a donc $|v_{n+2}|=\dfrac{|v_{n+1}+v_n|}{2|2+v_{n+2}|}$. Or, on sait que $|v_{n+1}+v_n|\leqslant|v_{n+1}|+|v_n|$ (inégalité triangulaire) et d'autre part que $u_n\geqslant 1$, donc $v_n=\dfrac{1}{2}\sqrt{u_n}-1\geqslant -\dfrac{1}{2}$. On peut en déduire que $2+v_{n+2}\geqslant\dfrac{3}{2}$, d'où finalement $|v_{n+2}|\leqslant\dfrac{|v_{n+1}|+|v_n|}{2\times\frac{3}{2}}=\dfrac{1}{3}(|v_{n+1}|+|v_n|)$.

2.c : C'est une récurrence double, mais assez simple malgré tout : notons P_n la propriété $|v_n|\leqslant x_n$. Par hypothèse, P_0 et P_1 sont vraies (on a même égalité), et, si on suppose à la fois $|v_n|\leqslant x_n$ et $|v_{n+1}|\leqslant x_{n+1}$, on a alors, en utilisant le résultat de la question précédente, $|v_{n+2}|\leqslant\dfrac{1}{3}(|v_{n+1}|+|v_n|)\leqslant\dfrac{1}{3}(x_{n+1}+x_n)=x_{n+2}$, donc on a bien $|v_{n+2}|\leqslant x_{n+2}$, ce qui achève la récurrence.

Comme on sait (question préliminaire du problème) que (x_n) converge vers 0, et que par ailleurs $|v_n|\geqslant 0$ (comme toute valeur absolue qui se respecte), on peut conclure du théorème des gendarmes que $\lim\limits_{n\to+\infty}|v_n|=0$. Si la valeur absolue de (v_n) tend vers 0, (v_n) également, et la question 2.a nous permet donc d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=4$.

Problème 2 (Maths III HEC/ESCP 2002) (***)

Partie A : Exemples

1. (a) On a dans ce cas $w_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n}2\times 3=6(n+1)$.

   (b) Dans ce deuxième exemple $w_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n}2^k\times 3^{n-k}=3^n\sum_{k=0}^{k=n}2^k\times 3^{-k}=3^n\sum_{k=0}^{k=n}\left(\frac{2}{3}\right)^k=$ $3^n\dfrac{1-(\frac{2}{3})^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}=3^{n+1}\left(1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}\right)=3^{n+1}-2^{n+1}$.

2.
```
PROGRAM suites ;
USES wincrt ;
VAR i,j,n : integer ; w : real ;
BEGIN
WriteLn('Choisissez l'entier n') ;
readLn(n) ;
FOR i := 0 TO n DO
BEGIN
w := 0 ;
FOR j := 0 TO i DO w := w+ln(j+1)/(i-j+1) ;
END ;
END.
```
3. **Un résultat de convergence**

   Dans cette question, la suite u est définie par : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et v est une suite de réels positifs, décroissante à partir du rang 1 et de limite nulle.

(a) On calcule $\sum_{k=n+1}^{k=m} u_k = \sum_{k=n+1}^{k=m} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{k=m-n-1} \frac{1}{2^{n+1+k}} = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{k=m-n-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1-\frac{1}{2^{m-n}}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}\left(1 - \frac{1}{2^{m-n}}\right) = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^m} < \frac{1}{2^n} = u_n$, donc l'inégalité demandée est vraie.

(b) Il s'agit « simplement » de découper la somme constituant w_{2n} en morceaux et de faire les bonnes majorations : $w_n = \sum_{k=0}^{k=2n} u_k v_{2n-k} = \sum_{k=0}^{k=n} u_k v_{2n-k} + \sum_{k=n+1}^{k=2n-1} u_k v_{2n-k} + u_{2n} v_0$. La première somme est égale à $u_0 v_{2n} + u_1 v_{2n-1} + \cdots + u_n v_n$. Comme la suite (v_n) est supposée décroissante et que tous les termes de (u_n) sont positifs, elle est inférieure ou égale à $(u_0 + u_1 + \cdots + u_n)v_n = u_0 v_n + v_n \sum_{k=1}^{k=n} u_k \leqslant u_0 v_n + u_0 v_n = 2v_n$ (cette dernière inégalité découle de la question précédente). De même, en utlisant la décroissance de (v_n), la deuxième somme est inférieure ou égale à $v_1 \sum_{k=n+1}^{k=2n-1} u_k \leqslant v_1 u_n$ (toujours d'après la question précédent. En additionnant ces majorations, on obtient bien $w_{2n} \leqslant 2v_n + v_1 u_n + v_0 u_{2n}$.

La deuxième majoration est du même style : $w_{2n+1} = \sum_{k=0}^{k=n} u_k v_{2n+1-k} + \sum_{k=n+1}^{k=2n} u_k v_{2n+1-k} + u_{2n+1} v_0 \leqslant v_{n+1} u_0 + v_{n+1}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) + v_1 \sum_{k=n+1}^{k=2n} u_k + u_{2n+1} v_0 \leqslant 2v_{n+1} + v_1 u_n + v_0 u_{2n+1}$.

(c) Les deux suites (u_n) et (v_n) ont pour limite 0 (pour (v_n), ça fait partie des hypothèses, et pour (u_n) c'est une conséquence du fait qu'il s'agit d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$). On en déduit aisément que $\lim_{n\to+\infty} v_0 u_{2n} + 2v_n + v_1 u_n = 0$, et pareil pour $2v_{n+1} + v_1 u_n + v_0 u_{2n+1}$. Comme de plus tous les termes de la suite (w_n) sont positifs (ils sont constitués d'une somme de réels positifs), le théorème des gendarmes permet de dire que $\lim_{n\to+\infty} w_{2n} = \lim_{n\to+\infty} w_{2n+1} = 0$. Autrement dit, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 à partir duquel tous les termes pairs de la suite sont inférieurs à ε, et un entier n_1 à partir duquel tous les termes impairs aussi. Quand n est plus grand que le plus grand de ces deux entiers, tous les termes de la suite deviennent donc inférieurs à ε, ce qui prouve que $\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$.

(d) D'après l'inégalité triangulaire, on aura $0 \leqslant |(u' \times v)_n| = \left|\sum_{k=0}^{k=n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k v_{n-k}\right|$ $\leqslant \sum_{k=0}^{k=n} \left|\left(-\frac{1}{2}\right)^k v_{n-k}\right| = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{2^k} v_{n-k} = w_n$. Comme on vient de voir que la suite (w_n) convergeait vers 0, le théorème des gendarmes nous donne la convergence de $(|u' \times v|)$, et donc de $(u' \times v)$, vers 0.

Partie B : Application à l'étude d'un ensemble de suites

1. Si (u_n) est une suite décroissante, on a $\frac{1}{2}(u_n + u_{n-1}) \geqslant \frac{1}{2}(a_n + a_n) = a_n \geqslant a_{n+1}$, donc la suite appartient effectivement à A. Au contraire, si (u_n) est strictement croissante, on aura toujours $\frac{1}{2}(u_n + u_{n-1}) < u_n < u_{n+1}$, donc la suite n'appartient pas à A.

2. (a) La suite est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$. Son discriminant vaut $\Delta = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$, donc elle admet deux racines $r = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{2} = 1$ et $s = \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{2} = -\frac{1}{2}$. Le terme général de la suite est donc bien de la forme $z_n = \alpha + \beta\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

   (b) La suite définie par $u_n = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$, par exemple, appartient à A (elle vérifie la récurrence linéaire de la question précédente, et on vérifie facilement que ses termes sont tous positifs), mais n'est pas monotone puisque les termes d'indices pairs de la suites sont plus grands que 1 et les termes d'indices impairs plus petits que 1.

3. (a) Calculons donc, pour $n \geqslant 1$, $c_{n+1} - c_n = a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n - a_n - \frac{1}{2}a_{n-1} = a_{n+1} - \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1}) \leqslant 0$ puisque $(a_n) \in A$. La suite (c_n) est donc décroissante. Comme elle est par ailleurs constituée de termes positifs (puisque c'est le cas de (a_n)), elle est minorée, donc elle converge.

   (b) Il semble assez naturel de procéder à une récurrence. Pour $n = 0$, l'égalité stipule que $\left(-\frac{1}{2}\right)^0 c_0 = a_0$, ce qui est effectivement vrai. Supposons désormais l'égalité vérifiée au rang n, alors $\sum_{k=0}^{k=n+1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n+1-k} = c_{n+1} + \sum_{k=0}^{k=n} \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1} c_{n-k} = c_{n+1} - \frac{1}{2}a_n = a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{2}a_n = a_{n+1}$. La propriété est donc vérifiée au rang $n+1$, et la récurrence achevée. Ca calcul prouve que les suites $b \times c$ et a sont tout simplement identiques.

   (c) La suite (u_n) convergeant vers l, la suite ε a pour limite 0. De plus, elle est décroissante à partir du rang 1 tout comme (u_n), donc tous ses termes sont positifs (sinon elle ne pourrait pas converger vers 0). Elle vérifie donc les hypothèses faites sur la suite (v_n) dans la partie précédente, et on peut en conclure que $\lim_{n \to +\infty} d_n = 0$.

   (d) Ce n'est pas si dur que ça en a l'air : $d_n = \sum_{k=0}^{k=n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k (c_{n-k} - l) = \sum_{k=0}^{k=n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n-k} - l\sum_{k=0}^{k=n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = a_n - l\frac{1 - (-\frac{1}{2})^{n+1}}{1 + \frac{1}{2}} = a_n + \frac{3}{2}l\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$. On peut également écrire que $a_n = d_n + \frac{3}{2}l\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$.

   La toute dernière question est un simple calcul de limite : on sait que $\lim_{n \to +\infty} d_n = 0$, et $\lim_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ (suite géométrique), donc $\lim_{n \to +\infty} a_n = \frac{2}{3}l$.

Feuille d'exercices n°7 : Dénombrement

ECE3 Lycée Carnot

12 novembre 2010

Exercice 1 (**)

Une urne contient cinq boules blanches et huit boules noires. On tire successivement et avec remise quatre boules dans l'urne. Quel est le nombre de tirages vérifiant chacune des conditions suivantes :

- au moins une boule blanche a été tirée
- une boule noire au plus a été tirée
- trois boules noires et une boule blanche ont été tirées dans cet ordre
- deux boules noires et deux boules blanches ont été tirées

Exercice 2 (**)

Dans un jeu de tarot, il y a 21 atouts. On en tire (simultanément) cinq au hasard. Combien y a-t-il de tirages pour lesquels :

- au moins un atout est un multiple de cinq ?
- il y a exactement un multiple de cinq et un multiple de trois ?
- on a tiré le 1 ou le 21 ?

Exercice 3 (*)

Une assemblée est constituée de 200 membres. Elle doit élire une commission constituée de trois parlementaires (chaque membre vote donc pour trois personnes). On s'intéresse au nombre de membres ayant voté pour trois candidats qu'on désignera par A, B et C (et qui ne sont pas les seuls candidats). On sait que 112 membres ont voté pour A, 67 pour A et B, 32 pour A et C, 12 pour A, B et C, 5 pour B et C mais pas pour A, 56 pour C mais pas pour A ni B, et 22 pour B mais pas pour A.

1. Combien ont voté pour A mais pas pour B ?
2. Combien ont voté pour C ?
3. Combien n'ont voté pour aucun des trois candidats ?
4. Combien ont voté uniquement pour A ?

Exercice 4 (** à ***)

On tire 5 cartes dans un jeu de 32 cartes usuel. Combien y a-t-il de tirages possibles vérifiant les conditions suivantes :

- Aucune condition.

- Il y a deux Rois parmi les cinq cartes tirées.
- Il y a au moins un pique parmi les cartes tirées.
- Il y a un As et deux carreaux parmi les cartes tirées.
- Il n'y a pas de cartes en-dessous du 9 parmi les cartes tirées.
- Les cinq cartes tirées forment deux paires (mais pas de brelan).
- Les cinq cartes tirées sont de la même couleur.
- Les cinq cartes tirées forment une quinte flush (cinq cartes qui se suivent dans la même couleur).

Exercice 5 (***)

Soit E un ensemble fini comportant 6 éléments. On cherche à déterminer le nombre de couples de parties (A, B) de E vérifiant $A \cup B = E$ (par exemple, si $E = \{1;2;3;4;5;6\}$, $A = \{1;2;3;5\}$ et $B = \{2;4;5;6\}$ constituent un couple possible).

1. Rappeler quel est le nombre de parties de E ayant 2 élements. Si on fixe une telle partie A, combien peut-on trouver de parties B vérifiant $A \cup B = E$?
2. Faire le même raisonnement pour les parties à 0, 1, 3, 4, 5 et 6 éléments de E.
3. En déduire la solution du problème posé.
4. Généraliser au cas où l'ensemble fini E possède n éléments (donner le résultat sous forme d'une somme puis la calculer à l'aide du binôme de Newton).

Exercice 6 (*)

Calculer le nombre d'anagrammes des mots MISSISSIPI et ABRACADABRA.

Exercice 7 (**)

De combien de manières peut-on classer quatre personnes en admettant qu'il puisse y avoir des ex æquo ?

Exercice 8 (**)

On lance n fois de suite un dé à 4 faces et on note p_n la probabilité que chacun des quatre résultats possibles apparaisse au moins une fois lors de ces n lancers.

1. Quel est le nombre de tirages possibles ?
2. Dénombrer les tirages pour lesquels chacun des quatre chiffres apparait au moins une fois, et en déduire p_n (il suffit de diviser le nombre de cas favorables, que vous venez de calculer, par le nombre total de tirages possibles).
3. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} p_n$. Que peut-on en déduire ?
4. Déterminer à l'aide de la calculatrice la plus petite valeur de n pour laquelle $p_n \geqslant 0.9$.

Exercice 9 (*)

Développer les expressions suivantes : $(x-3)^5$; $(2x+3y)^3$; $(x-1)^7$.

Exercice 10 (***)

Donner une expression simple des sommes $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k$; $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ et $\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$ (pour les deux dernières, il est fortement conseillé de partir de la formule du binome appliquée à $(1+x)^n$, où x est un réel quelconque).

Exercice 11 (*)

Soient p, q et n trois entiers tels que $p+q+2 \leqslant n$. Montrer que $\binom{n}{2} - \binom{n-p}{2} - \binom{n-q}{2} + \binom{n-p-q}{2} = pq$

Corrigé de la feuille d'exercices n°7

Exercice 1 (**)

Commençons par remarquer qu'il y a au total $13^4 = 28\ 561$ tirages possibles (ce sont des listes).

- Au moins une boule blanche : on passe par le complémentaire, il y a 8^4 tirages ne comportant que des boules noires, donc $13^4 - 8^4 = 24\ 465$ tirages avec au moins une boule blanche.
- Au plus une boule noire : on sépare en deux cas. Il y a soit zéro boule noire (5^4 cas) soit une boule noire ($5^3 \times 8 \times \binom{4}{1}$, le coefficient binomial étant là pour le choix de la position de la boule noire), donc $5^4 + 5^3 \times 8 \times \binom{4}{1} = 4\ 625$ tirages au total.
- Trois boules noires puis une blanche : $8^3 \times 5 = 2\ 560$ tirages (pas de choix pour l'ordre ici).
- Deux noires et deux blanches : $8^2 \times 5^2 \times \binom{4}{2} = 9\ 600$ tirages possibles (encore une fois, le coefficient binomial correspond au nombre de choix pour les deux boules blanches sur les quatre tirages).

Exercice 2 (**)

Il y a au total $\begin{pmatrix} 21 \\ 5 \end{pmatrix}$ tirages possibles.

- Il y a 17 atouts qui ne sont pas multiples de 5, donc $\begin{pmatrix} 17 \\ 5 \end{pmatrix}$ tirages qui ne contiennent aucun multiple de 5. Par passage au complémentaire, il reste donc $\begin{pmatrix} 21 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 17 \\ 5 \end{pmatrix}$ tirages avec au moins un multiple de 5.
- Un multiple de cinq et un de trois : il faut distinguer le cas où on tire le 15 (qui est le seul multiple de cinq et de trois à la fois) et celui où les deux multiples sont différents. Sachant qu'il y a onze atouts qui ne sont multiples ni de cinq ni de trois, on a $\begin{pmatrix} 11 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix}$ tirages possibles.
- Ni le 1 ni le 21 : par passage au complémentaire, $\begin{pmatrix} 21 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 19 \\ 5 \end{pmatrix}$ tirages.

Exercice 3 (*)

1. On a assez simplement $|A \backslash B| = |A| - |A \cap B| = 112 - 67 = 45$.
2. Il suffit de faire une somme : $|C| = |A \cap C| + |(B \cap C) \backslash A| + |C \backslash (A \cup B)| = 32 + 5 + 56 = 93$.
3. Ceux qui ont voté pour au moins l'un des trois sont au nombre de $|A \cup B \cup C| = |A| + |B \backslash A| + |C \backslash (A \cup B)| = 112 + 22 + 56 = 190$. Il en reste donc 10 qui n'ont voté pour aucun des trois.
4. $A \backslash (B \cup C) = |A| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| = 112 - 67 - 32 + 12 = 25$.

Exercice 4 (** à ***)

- Aucune condition : $\begin{pmatrix} 32 \\ 5 \end{pmatrix} = 201\ 376$ tirages.
- Deux Rois : $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 28 \\ 3 \end{pmatrix} = 19\ 656$ (on choisit deux cartes parmi les quatre Rois et trois parmi les 28 cartes ne sont pas des Rois).
- Au moins un pique : par passage au complémentaire, $\begin{pmatrix} 32 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 24 \\ 5 \end{pmatrix} = 158\ 872$

- Un As et deux carreaux : il faut distinguer le cas de l'As de carreau, ce qui fait $\binom{7}{1} \times \binom{21}{3}$ (l'As de carreau ; un autre carreau parmi les sept restants ; et trois cartes parmi les 21 qui ne sont ni des carreaux ni des As) $+\binom{3}{1} \times \binom{7}{2} \times \binom{21}{2}$ (un As qui n'est pas un carreau, deux carreaux qui ne sont pas des As, et trois autres cartes qui ne sont ni des carreaux ni des As), soit 22 540 tirages.
- Pas de carte en-dessous du 9 : $\binom{24}{5} = 42\ 504$ tirages (il y a 24 cartes au-dessus du 9).
- Deux paires : il faut choisir les hauteurs des deux paires (parmi huit possibles), puis les couleurs des deux cartes pour chaque paire, et enfin la dernière carte, soit $\binom{8}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{24}{1} =$ 24 192 tirages.
- Cinq cartes de la même couleur : 4 choix pour la couleur, puis 5 cartes à choisir parmi les 8 de la couleur, soit $4 \times \binom{8}{5} = 224$ tirages possibles.
- Quinte flush : 16 tirages (là, on peut compter à la main).

Exercice 5 (***)

1. Il y a $\binom{6}{2}$ parties à 2 éléments dans E (c'est la définition d'un coefficient binomial !). Soit A l'une d'entre elles, par exemple $A = \{1; 2\}$. Une partie B vérifiant $A \cup B = E$ doit nécessairement contenir 3, 4, 5 et 6 (puisqu'ils ne sont pas dans A, et un sous-ensemble quelconque de $\{1; 2\}$. Il y a donc 2^2 telles parties B (pour chaque A possible).

2. De la même façon, si A est une partie à k éléments, B doit nécessairement contenir les éléments qui ne sont pas dans A, et un quelconque sous-ensemble des k éléments de E, ce qui laisse 2^k possibilités pour B (on a, pour chaque élément de A, 2 possibilités : soit on le prend, soit on ne le prend pas). Pour $k = 0$, c'est-à-dire si $A = \emptyset$, on a bien une seule possibilité pour B (E tout entier), pour $k = 1$, il y en a 2 (soit B contient l'unique élement de A, soit non), etc, jusqu'au cas où $k = 6$, c'est-à-dire $A = E$, où on peut prendre pour B n'importe quel sous-ensemble de E, ce qui laisse 2^6 possibilités.

3. Au total, il y a $\binom{6}{0} \times 2^0 + \binom{6}{1} \times 2^1 + \cdots + \binom{6}{6} \times 2^6$ possibilités, soit $\sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} 2^k = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} 2^k 1^{n-k}$. On reconnait une formule du binôme, qui vaut $(2 + 1)^6 = 3^6 = 729$.

4. Exactement de la même façon, on obtiendra $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$ possibilités, soit 3^n. Une autre façon de trouver ce résultat est de constater que, pour chacun des n éléments, on a trois possibilités : soit il appartient seulement à A, soit seulement à B, soit à $A \cap B$ (il n'a pas le droit de n'appartenir ni à A ni à B si on veut avoir $A \cup B = E$).

Exercice 6 (*)

Application directe de l'exemple vu en cours : il y a $\frac{10!}{4! \times 4!} = 6\ 300$ anagrammes pour MISSISSIPI et $\frac{11!}{5! \times 2! \times 2!} = 83\ 160$ pour ABRACADABRA.

Exercice 7 (**)

Pas vraiment de méthode générale, on va dénombrer au cas par cas :
- s'il n'y a pas d'ex æquo, $4! = 24$ classements.
- s'il y a quatre ex æquo, 1 classement.
- s'il y a trois ex æquo, $\binom{3}{4} \times 2 = 8$ classements (il faut choisir les trois ex æquo, et leur classement).
- s'il y a deux ex æquo, $\binom{2}{4} \times 3! = 36$ classements.
- enfin, s'il y a deux fois deux ex æquo, $\binom{4}{2} = 6$ classements (il suffit de choisir les deux ex æquo de tête).

Il y a donc au total 75 classements possibles.

Exercice 8 (**)

1. Il y a bien sûr 4^n tirages possibles.
2. C'est une application de la formule de Poincaré. Notons A l'ensemble des tirages qui ne font pas apparaitre le chiffre 1, B ceux où il n'y a pas de 2, C et D ceux sans 3 et sans 4. On a alors $|A \cup B \cup C \cup D| = |A|+|B|+|C|+|D|-|A \cap B|-\cdots-|C \cap D|+|A \cap B \cap C|+\cdots-|A \cap B \cap C \cap D|$. Les cardinaux de A, B, C et D sont 3^n, ceux de chaque intersection de deux d'entre eux valent 2^n, les intersections trois à trois ont pour cardinal 1, et l'intersection des quatre est vide, donc $|A \cup B \cup C \cup D| = 4 \times 3^n - 6 \times 2^n + 4$. L'ensemble dont on cherche le cardinal étant le complémentaire de $A \cup B \cup C \cup D$, il a pour cardinal $4^n - 4 \times 3^n + 6 \times 2^n - 4$. La probabilité correspondante est $p_n = 1 - \frac{4 \times 3^n}{4^n} + \frac{6 \times 2^n}{4^n} - \frac{4}{4^n}$.
3. Chacun des trois derniers termes est une suite géométrique de raison plus petite que 1, donc tend vers 0. On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 1$ (c'est-à-dire que, lorsque n grandit, la probabilité d'obtenir en faisant n lancers au moins une fois chaque face du dé tend à devenir certaine).
4. On vérifie laborieusement que p_n dépasse 0.9 pour $n = 13$.

Exercice 9 (*)

Du calcul brutal utilisant bien entendu la formule du binôme de Newton : $(x-3)^5 = x^5 - 15x^4 + 90x^3 - 270x^2 + 405x - 243$; $(2x+3y)^3 = 8x^3 + 36xy^2 + 54xy^2 + 27y^3$ et $(x-1)^7 = x^7 - 7x^6 + 21x^5 - 35x^4 + 35x^3 - 21x^2 + 7x - 1$.

Exercice 10 (***)

La première est une application directe du binôme : $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k = (1-1)^n = 0$. Pour la deuxième, il est en fait plus facile d'utiliser une des formules vues en cours, sachant qu'on peut oublier $k = 0$ dans la somme puisque le terme est nul : $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} = n \times 2^{n-1}$. Enfin, pour la dernière, on utilise la même astuce mais en commençant par calculer une autre somme : $\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n\sum_{k=2}^{n}(k-1)\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=1}^{n-1} k\binom{n-1}{k} = n\sum_{k=1}^{n-1}(n-1)\binom{n-2}{k-1} =$

$n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k} = n(n-1)2^{n-2}$. Maintenant, reste à remarquer que $\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}(k(k-1)+k)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}$.

Exercice 11 (*)

C'est un calcul ignoble (on multiplie par 2 pour ne pas avoir de fraction) :
$2\left(\binom{n}{2} - \binom{n-p}{2} - \binom{n-q}{2} + \binom{n-p-q}{2}\right) = n(n-1) - (n-p)(n-p-1) - (n-q)(n-q-1) + (n-p-q)(n-p-q-1) = n^2 - n - n^2 + np + n + np - p^2 - p - n^2 + nq + n + nq - q^2 - q + n^2 - np - nq - n - np + p^2 + pq + p - nq + pq + q^2 + q = 2pq$, d'où le résultat.

Feuille d'exercices de révision n°3

ECE3 Lycée Carnot

16 novembre 2010

Cette feuille d'exercices est en fait tout simplement le sujet du troisième DS de vos prédécesseurs au sein de la chaleureuse salle R1. Exceptionnellement, la calculatrice était autorisée pour ce DS pour permettre une réponse numérique à une ou deux questions à la fin des exercices de dénombrement.

Exercice 1

Une grille de mots croisés est un tableau rectangulaire à n lignes et p colonnes, (et donc constitué de $n \times p$ cases), parmi lesquelles un certain nombre sont noircies (et les autres blanches). Dans un premier temps, on s'intéresse à des grilles à 6×4 cases (6 lignes et 4 colonnes donc, et 24 cases au total), contenant exactement 4 cases noires.

1. Combien y a-t-il de telles grilles différentes ?
2. Combien ont exactement un coin noirci ?
3. Combien ont exactement une case noircie sur chaque colonne ?
4. Combien ont au moins une case noire sur la première ligne ?
5. Combien ont leurs quatre cases noires sur quatre lignes différentes ?
6. Combien ont leurs cases noires sur quatre lignes et quatre colonnes différentes (donner la valeur numérique) ?

On se place maintenant dans le cas général : n lignes, p colonnes et k cases noires, avec $k \leqslant np$.

1. Combien y a-t-il de grilles différentes possibles ?
2. Combien ont les quatre coins noirs ?
3. Combien ont exactement deux coins noirs ?
4. Combien ont au plus une case noire sur chaque ligne ?
5. On suppose pour cette question $n = p = k$. Combien y a-t-il alors de grilles ayant exactement une case noire sur chaque ligne et sur chaque colonne ?
6. Calculer le nombre de façons de placer les neuf chiffres 1 sur une grille de Sudoku vierge (pour ceux qui ne maitrisent pas les règles du Sudoko : il s'agit d'une grille à neuf lignes et neuf colonnes, et il doit y avoir un 1 sur chaque ligne et sur chaque colonne ; de plus, si on découpe la grille en neuf petites grilles de neuf cases en regroupant lignes et colonnes trois par trois, il doit y avoir un 1 exactement dans chacune de ces petites grilles).
7. Comparer ce nombre avec le nombre de façons de répartir 9 chiffres 1 dans la grille sans respecter les règles du Soduko (donner la valeur numérique pour chacun des deux).

Exercice 2

On considère dans tout cet exercice un ensemble fini E de cardinal n, et on va chercher à dénombrer l'ensemble de ses partitions vérifiant certaines propriétés. Rappelons qu'une partition de E est un découpage de E en sous-ensembles disjoints non vides, dont la réunion est égale à E tout entier. Les questions de l'exercice sont largement indépendantes.

1. Déterminer « à la main » le nombre de partitions de l'ensemble à un élément $E_1 = \{1\}$, puis de l'ensemble à deux éléments $E_2 = \{1; 2\}$, et enfin de l'ensemble à trois éléments $E_3 = \{1; 2; 3\}$ (l'ordre dans lequel apparaissent les sous-ensembles dans la partition n'est pas important).
2. Dans le cas général, déterminer le nombre de partitions de E constituées de n sous-ensembles, puis celles constituées de $n - 1$ sous-ensembles.
3. Dans le cas où $|E| = 10$ (on prendra par exemple $E = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$), déterminer le nombre de partitions de E en 8 sous-ensembles (on pourra considérer deux types de partitions).
4. Généraliser le résultat précédent en déterminant le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en $n - 2$ sous-ensembles (pour $n \geqslant 3$).
5. On cherche dans cette question à déterminer le nombre de partitions de E en deux sous-ensembles.
   (a) On suppose dans cette question que le premier sous-ensemble contient un seul élément (donc le deuxième en contient $n - 1$). Compter le nombre de telles partitions.
   (b) Déterminer le nombre de partitions pour lesquelles l'un des deux ensembles contient 2 éléments, et l'autre $n - 2$.
   (c) En déduire une formule générale pour le nombre de partitions de E en deux sous-ensembles dont l'un contient k éléments, puis pour le nombre total de partitions de E en deux sous-ensembles. Calculer ce nombre.
6. On considère désormais des partitions constituées d'ensembles de cardinal 2 (partitions en paires). On note a_p le nombre de telles partitions de l'ensemble $\{1; 2; \dots; 2p\}$ (pour qu'une telle partition existe, l'ensemble doit nécessairement contenir un nombre pair d'éléments).
   (a) Calculer « à la main » a_1, a_2 et a_3 (pour a_3, on pourra se contenter d'une bonne explication plutôt que de faire une liste complète).
   (b) Démontrer que, $\forall p \geqslant 2$, $a_p = (2p - 1)a_{p-1}$.
   (c) Écrire un programme Pascal calculant la valeur de a_p, pour un entier p choisi par l'utilisateur.
   (d) Déterminer une formule explicite pour a_p faisant intervenir un quotient de factorielles.
   (e) En déduire de combien de façons on peut former 10 couples dans un groupe de 20 personnes (couples homosexuels autorisés !). Comparer au nombre de façon de former dix couples hétérosexuels avec 10 garçons et 10 filles.

Problème : algorithme de Babylone et fractions continues

Le but de ce problème est d'étudier les propriétés de certaines suites convergeant vers $\sqrt{2}$. Dans les deux premières parties, on introduit deux suites différentes ayant cette limite, et dans la troisième partie, on cherche à comparer la rapidité de leur convergence vers $\sqrt{2}$.

Première partie :

On définit dans cette partie les deux suites (p_n) et (q_n) par $p_0 = q_0 = 1$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} = p_n + 2q_n$ et $q_{n+1} = p_n + q_n$. On pose enfin, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{p_n}{q_n}$.

1. Montrer que pour $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n \in \mathbb{N}^*$ et $q_n \in \mathbb{N}^*$.
2. Calculer les valeurs de p_1, q_1, p_2, q_2, p_3 et q_3, et en déduire les valeurs de u_1, u_2 et u_3.
3. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n \geqslant q_n$.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_{n+2} = 2p_{n+1} + p_n$.
5. Calculer la valeur du terme général de la suite (p_n).
6. Montrer que (q_n) vérifie la même relation de récurrence que (p_n), et calculer également son terme général.
7. En déduire une formule explicite pour u_n, puis la limite de la suite (u_n).

Deuxième partie :

On considère désormais la suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{R}$, $v_{n+1} = f(v_n)$, où f est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{2}{x}\right)$.

1. Calculer v_1, v_2 et v_3 (donner pour v_3, outre la valeur exacte, une valeur approchée à 10^{-3} près).
2. Montrer que la suite (v_n) est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \in [1; 2]$.
3. Étudier les variations de la fonction f (sur son intervalle de définition).
4. Résoudre sur $]0; +\infty[$ l'équation $f(x) = x$, en déduire les limites possibles pour la suite (v_n).
5. Étudier le signe de $f(x) - x$ en fonction de x.
6. Montrer que, si $v_n \in [1; \sqrt{2}]$, alors $v_{n+1} \in [\sqrt{2}; 2[$, et si $v_n \in [\sqrt{2}; 2[$, alors $v_{n+1} \in [1; \sqrt{2}[$. La suite (v_n) est-elle monotone ?
7. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{(v_n - \sqrt{2})^2}{2v_n}$. En déduire que $|v_{n+1} - \sqrt{2}| \leqslant \dfrac{1}{2}|v_n - \sqrt{2}|$.
8. En utilisant le résultat de la question précédente, prouver que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|v_n - \sqrt{2}| \leqslant \dfrac{1}{2^n}|v_0 - \sqrt{2}|$.
9. En déduire la limite de la suite (v_n).

Troisième partie :

On cherche désormais à comparer la vitesse de convergence des suites (u_n) et (v_n) introduites dans les parties précédentes vers $\sqrt{2}$, et on pose pour cela $t_n = \dfrac{v_n - \sqrt{2}}{u_n - \sqrt{2}}$.

1. Au vu des valeurs de u_3 et v_3 calculées précédemment, quelle semble être la suite qui converge le plus vite ?
2. Déterminer u_{n+1} en fonction de u_n, en déduire que $u_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{1 - \sqrt{2}}{u_n + 1}(u_n - \sqrt{2})$.
3. En utilisant les résultats de la question précédente et de la question 7. de la deuxième partie, exprimer t_{n+1} en fonction de t_n, u_n et v_n.
4. Déterminer la limite de $\dfrac{t_{n+1}}{t_n}$ quand n tend vers $+\infty$.
5. En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = 0$.
6. Que peut-on conclure de ce calcul concernant la rapidité de convergence des deux suites (u_n) et (v_n) ?

Corrigé de la feuille d'exercices de révision n°3

Exercice 1

1. Il faut choisir les quatre cases noires dans un ensemble de 24 cases, il y a donc $\binom{24}{4}$ grilles possibles.
2. Il y a quatre possibilités pour le coin, et il reste en suite à noircir trois cases parmi les 20 qui ne sont pas des coins, soit $4 \times \binom{20}{3}$ possibilités.
3. Il suffit de choisir, dans chaque colonne, quelle case (parmi six possibles) va être noircie, soit 6^4 choix possibles.
4. Comptons les grilles n'ayant pas de case noire sur la première ligne : il y en a $\binom{18}{6}$ (il ne reste que 18 cases sur les trois dernières lignes). Par passage au complémentaire, il y a donc $\binom{24}{4} - \binom{18}{4}$ grilles avec au moins une case noire sur la première ligne.
5. Il faut choisir les quatre lignes (parmi six possibles) et à l'interieur de chaque ligne, la case à noircir sur quatre disponibles, soit $\binom{6}{4} \times 4^4$ possibilités.
6. C'est le même principe que la question précédente, sauf qu'on a 4 choix possibles pour la case à noircir sur la première ligne, mais plus que 3 sur la deuxième ligne, 2 sur la troisième ligne et un seul sur la dernière. Le nombre de grilles cherché est donc $\binom{6}{4} \times 4! = 360$.

1. On a désormais k cases à noircir sur un total de np, donc $\binom{np}{k}$ grilles possibles.
2. Il reste $k-4$ cases à noircir parmi $np-4$, donc $\binom{np-4}{k-4}$ (naturellement, on doit avoir $k \geqslant 4$).
3. Il faut choisir les deux coins, puis noircir $k-2$ cases parmi les $np-4$ qui ne sont pas des coins, donc $\binom{4}{2} \times \binom{np-4}{k-2}$ possibilités.
4. Cela suppose que $k \leqslant n$. Il faut alors choisir les k lignes contenant une case parmi les n possibles, puis il reste pour chacune de ces lignes p choix pour la case à noircir, donc $\binom{n}{k} \times p^k$ grilles possibles.
5. La grille a donc n lignes et n colonnes, et on cherche à noircir une case par ligne, sans en mettre deux dans la même colonne. Il y a n choix possibles pour la case à noircir sur la première ligne, $n-1$ choix pour la case de la deuxième ligne (il ne faut pas la mettre dans la même colonne que la première), $n-2$ pour la troisième etc. Quand on arrive à la dernière ligne, on n'a plus le choix pour la dernière case à noircir (il ne reste qu'une seule colonne vierge). On a donc $n \times (n-1) \times \cdots \times 1 = n!$ grilles possibles.
6. On aurait 9! choix s'il n'y avait pas la condition supplémentaire sur les petits carrés. Le mieux est de recommencer une raisonnement similaire à celui de la question précédente :
   - il y a 9 possibilités pour le 1 de la première ligne.
   - il y a seulement 6 possibilités ensuite pour le 1 de la deuxième ligne (trois cases à éviter qui sont dans le même petit carré que le premier 1).
   - plus que 3 possibilités pour la troisième ligne (un seul petit carré vierge en haut de la grille).
   - à nouveau 6 possibilités pour la quatrième ligne (plus de problème de petit carré, mais tout de même trois colonnes à éviter).
   - 4 pour la cinquième ligne (deux colonnes libres dans deux petits carrés).

- 2 pour la sixième (deux colonnes dans le dernier petit carré médian).
- 3 sur la septième ligne (plus que trois colonnes libres).
- 2 et 1 pour les deux dernières.

Soit $9 \times 6 \times 3 \times 6 \times 4 \times 2 \times 3 \times 2 \times 1 = 46\ 656$ façons de placer les 1.

7. Au total, il y a $\binom{81}{9}$ façons de placer neuf 1 dans une grille de 81 cases, soit 260 887 834 350 possibilités. Le proportion de placements « Sudoku-compatibles » est donc extrêmement faible !

Exercice 2

1. Il n'y a qu'une seule partition de E_1. Pour E_2, on a deux possibilités : soit regrouper les deux éléments (un seul sous-ensemble dans la partition), soit les séparer (deux sous-ensembles). Enfin, pour E_3, on peut regrouper les trois éléments (un seul sous-ensemble), les séparer tous les trois, ou faire une partition en deux sous-ensembles dont l'un contient un élément et l'autre les deux qui restent (trois possibilités selon le choix de l'élément isolé). Il y a donc cinq partitions différentes de E_3.
2. S'il y a n sous-ensembles non vides et disjoints, chacun doit comporter exactement 1 élément, et il n'y a donc qu'une seule partition possible. S'il y a $n-1$ sous-ensembles, ils contiennent tous un élément, sauf un qui en contient deux. Il faut donc choisir quels sont les deux éléments qui sont regroupés, ce qui laisse $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ partitions.
3. Il y a deux types de partitions : celles qui ont 7 sous-ensembles réduits à un élément et le huitième qui en contient 3 (au nombre de $\binom{10}{3}$, de manière similaire à la question précédente) ; et celles qui ont 6 sous-ensembles réduits à deux éléments et les deux derniers qui en contiennent 2. Ces dernières sont au nombre de $\frac{1}{2}\binom{10}{2}\binom{8}{2}$ (il faut choisir les deux éléments du premier ensemble, les deux du deuxième parmi ceux qui restent, et diviser par deux car l'ordre n'est pas important). Au total donc, $\binom{10}{3} + \frac{1}{2}\binom{10}{2}\binom{8}{2}$ partitions.
4. Le même raisonnement conduit à $\binom{n}{3} + \frac{1}{2}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}$.
5. (a) Il faut tout simplement choisir l'élément isolé, et il y a n possibilités pour cela, ou si l'on préfère $\binom{n}{1}$ possibilités.

   (b) De la même façon, il faut choisir les deux éléments du premier ensemble, soit $\binom{n}{2}$ partitions possibles.

   (c) En général, on aura $\binom{n}{k}$ partitions en deux sous-ensembles dont l'un contient k éléments. Attention tout de même, k est compris entre 1 (le premier ensemble n'a pas le droit d'être vide) et $n-1$ (le deuxième ne doit pas être vide non plus !). Autre piège, si on fait la somme pour k variant entre 1 et $n-1$, on compte en fait deux fois chaque partition (en effet, on obtient la même partition en échangeant le rôle du premier et du deuxième ensemble : par exemple, les partitions obtenues pour $k=1$ sont les mêmes que celles obtenues pour $k = n-1$). Il y a donc au total $\frac{1}{2}\sum_{k=1} k = n - 1\binom{n}{k} = \frac{1}{2}(2^n - 2) = 2^{n-1} - 1$ partitions en deux sous-ensembles.
6. (a) Si E est constitué de $2 \times 1 = 2$ éléments, il n'y a qu'une façon de le partitionner en sous-ensembles à deux éléments, donc $a_1 = 1$. Si E a quatre éléments, on peut le partitionner de trois façons en deux paires (il faut choisir qui on case avec le premier élément, l'autre

paire est alors imposée), donc $a_2 = 3$. Enfin, si E contient 6 éléments, on a cinq choix pour l'élémént à caser avec 1, et enuite trois possibilités à chaque fois pour apparier les quatre éléments restants, donc $a_3 = 5 \times 3 = 15$.

(b) On fait comme ci-dessus : si E contient $n = 2p$ éléments, on commence par choisir l'élément qu'on va apparier avec 1, ce pour quoi on a $n - 1 = 2p - 1$ choix. Une fois ce choix fait, il reste à partitionner les $n - 2 = 2p - 2 = 2(p - 1)$ éléments restants en paires, ce pour quoi on a par définition a_{p-1} possibilités. Cela laisse bien $(2p - 1)a_{p-1}$ possibilités pour séparer E en paires, donc $a_p = (2p - 1)a_{p-1}$.

(c)
```
PROGRAM suite ;
USES wincrt ;
VAR p,i : integer ; a : longint ;
BEGIN
WriteLn('Choisissez la valeur de l'entier p') ;
ReadLn(p) ;
a := 1 ;
FOR i :=2 TO p DO
a := (2*i-1)*a ;
WriteLn('Le nombre de façons de partitionner un ensemble à ',p,' éléments en paires est ',a) ;
END.
```

(d) D'après la question précédente, on a $a_p = (2p - 1) \times a_{p-1} = (2p - 1) \times (2p - 3)a_{p-2} = (2p-1)\times(2p-3)\times\cdots\times5\times3$ (ce qui est cohérent avec les calculs de a_2 et a_3). Autrement dit $a_p = \dfrac{(2p) \times (2p - 1) \times \cdots \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{(2p) \times (2p - 2) \times \cdots \times 4 \times 2} = \dfrac{(2p)!}{2 \times p \times 2 \times (p - 1) \times \cdots \times 2 \times 2 \times 2 \times 1} = \dfrac{(2p)!}{2^p p!}$.

(e) Le nombre demandé est exactement $a_{10} = \dfrac{20!}{2^{10} \times 10!} = 19\times 17\times\cdots\times5\times3 = 654\ 729\ 075$. Si on ne considère que des couples hétéro avec 10 filles et 10 garçons, la première fille (soyons galants) a 10 choix pour son compagnon, la deuxième n'en a plus que 9 etc, et la dernière fille n'a plus le choix (ceci n'est pas censé modéliser ce qui se passe dans la vraie vie), soit $10! = 3\ 628\ 800$ possibilités. Autrement dit, si on apparie aléatoirement 10 filles et 10 garçons, on à peine plus d'une chance sur 200 d'obtenir dix couples hétérosexuels.

Problème : algorithme de Babylone et fractions continues

Première partie :

1. C'est une récurrence assez simple : c'est vrai pour p_0 et q_0 qui sont égaux à 1, et si on suppose que p_n et q_n sont deux entiers strictement positifs, $p_n + q_n$ et $p_n + 2q_n$ le seront certainement aussi, ce qui achève la récurrence.
2. On calcule $p_1 = 3$, $q_1 = 2$, $p_2 = 7$, $q_2 = 5$, $p_3 = 17$ et $q_3 = 12$, d'où $u_1 = \dfrac{3}{2}$, $u_2 = \dfrac{7}{5}$ et $u_3 = \dfrac{17}{12}$.
3. Même pas besoin de récurrence : comme $q_n > 0$, on a toujours $p_n + 2q_n > p_n + q_n$, soit $p_{n+1} > q_{n+1}$. Le seul cas d'égalité est obtenu pour p_0 et q_0.
4. On a $p_{n+2} = p_{n+1} + 2q_{n+1} = p_{n+1} + 2p_n + 2q_n$. Or, $p_{n+1} = p_n + 2q_n$ donc $2q_n = p_{n+1} - p_n$. On en déduit que $p_{n+2} = p_{n+1} + 2p_n + p_{n+1} - p_n = 2p_{n+1} + p_n$.
5. On reconnait une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - 2x - 1 = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 4 + 4 = 8$, et il y a deux racines $r = \dfrac{2 + \sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2}$, et

$s = \dfrac{2-\sqrt{8}}{2} = 1-\sqrt{2}$. La suite est donc de la forme $p_n = \alpha(1+\sqrt{2})^n + \beta(1-\sqrt{2})^n$, avec $p_0 = \alpha+\beta = 1$, et $p_1 = (1+\sqrt{2})\alpha + (1-\sqrt{2})\beta = 3$. On obtient donc $\beta = 1-\alpha$, puis $(1+\sqrt{2})\alpha + 1 - \sqrt{2} - (1-\sqrt{2})\alpha = 3$, soit $2\sqrt{2}\alpha = 2+\sqrt{2}$. Finalement, $\alpha = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$, et $\beta = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$, donc $p_n = \dfrac{1}{2}((1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1})$.

6. En effet, $q_{n+2} = q_{n+1} + p_{n+1} = q_{n+1} + 2q_n + p_n$, avec $p_n = q_{n+1} - q_n$, donc $q_{n+2} = 2q_{n+1} + q_n$. L'équation caractéristique n'ayant pas changé depuis tout à l'heure, il faut désormais déterminer α' et β' tels que $\alpha'+\beta' = 1$, et $\alpha'(1+\sqrt{2})+\beta'(1-\sqrt{2}) = 2$, soit $\alpha'(1+\sqrt{2}-1+\sqrt{2})+1-\sqrt{2} = 2$, et $\alpha' = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$, puis $\beta' = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}$. On obtient finalement $q_n = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}((1+\sqrt{2})^{n+1} - (1-\sqrt{2})^{n+1})$.
7. Tout cela nous donne $u_n = \dfrac{2\sqrt{2}}{2}\dfrac{(1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}}{(1+\sqrt{2})^{n+1} - (1-\sqrt{2})^{n+1}}$. Comme $|1+\sqrt{2}| < 1$ et $1+\sqrt{2} > 1$, numérateur et dénominateur du deuxième quotient sont équivalents à $(1+\sqrt{2})^{n+1}$, donc le quotient a pour limite 1. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

Deuxième partie :

1. On calcule $v_1 = \dfrac{1}{2}(1+2) = \dfrac{3}{2}$, puis $v_2 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{17}{12}$, et enfin $v_3 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{17}{12}+\dfrac{24}{17}\right) = \dfrac{577}{408} \simeq 1.414$
2. La suite est définie si $v_n \neq 0$, donc prouver par récurrence que $v_n \in [1;2]$ suffit. C'est vrai pour v_0, et si on le suppose vrai pour v_n, on a alors $\dfrac{2}{v_n} \in [1;2]$ également, donc $v_n + \dfrac{2}{v_n} \in [2;4]$, et $v_{n+1} \in [1;2]$, ce qui achève la récurrence.
3. On a $f'(x) = \dfrac{1}{2}(1 - \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{x^2-2}{2x^2}$. Cette dérivée s'annule pour $x = \sqrt{2}$, la fonction f est décroissante sur $]0;\sqrt{2}]$ et croissante sur $[\sqrt{2};+\infty[$.
4. Si $f(x) = x$, on a donc $x + \dfrac{2}{x} = 2x$, soit $\dfrac{2}{x} = x$. Comme $x \neq 0$, on obtient $x^2 = 2$, soit $x = \sqrt{2}$. La suite (v_n) ne peut avoir pour limite que $\sqrt{2}$.
5. Par un calcul similaire, $f(x) - x$ est positif sur $[0;\sqrt{2}]$, et négatif sur $[\sqrt{2};+\infty[$.
6. C'est une simple application du tableau de variations : si $x \leqslant \sqrt{2}$, $f(x) \geqslant \sqrt{2}$, et vice-versa. Comme $v_{n+1} = f(u_n)$, les propriétés demandées en découlent. On en déduit que, si $v_n \in [1;\sqrt{2}]$, $v_n \leqslant v_{n+1}$ mais $v_{n+1} \geqslant v_{n+2}$, et sinon les inégalités sont inversées. dans les deux cas, la suite ne peut pas être monotone.
7. Calculons $2v_n(v_{n+1} - \sqrt{2}) = v_n\left(v_n + \dfrac{2}{v_n} - 2\sqrt{2}\right) = v_n^2 - 2\sqrt{2}v_n + 2 = (v_n - \sqrt{2})^2$. Comme $v_n \in [1;2]$, $|2v_n| \geqslant 2$, et $|v_n - \sqrt{2}| \leqslant 1$. On en déduit que $|v_{n+1} - \sqrt{2}| = \dfrac{|v_n-\sqrt{2}||v_n-\sqrt{2}|}{|2v_n|} \leqslant \dfrac{|v_n-\sqrt{2}|}{2}$.
8. On le prouve par récurrence. Pour $n = 0$, c'est évident puisqu'on a la même chose à gauche et à droite. Supposons l'inégalité vérifiée au rang n, on a alors au rang $n+1$ en utilisant la question précédente $|v_{n+1} - \sqrt{2}| \leqslant \dfrac{1}{2}|v_n - \sqrt{2}| \leqslant \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2^n}|v_0 - \sqrt{2}| \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}|v_n - \sqrt{2}|$, ce qui achève la récurrence.
9. D'après le théorème des gendarmes et le résultat précédent, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}|v_n - \sqrt{2}| = 0$, ce qui signifie exactement que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \sqrt{2}$.

Troisième partie :

1. Manifestement, c'est v_3 qui fait la course en tête.
2. On a $u_{n+1} = \dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \dfrac{p_n + 2q_n}{p_n + q_n} = 1 + \dfrac{q_n}{p_n + q_n} = 1 + \dfrac{1}{\frac{p_n}{q_n} + 1} = 1 + \dfrac{1}{1 + u_n} = \dfrac{u_n + 2}{u_n + 1}$. On a donc $un + 1 - \sqrt{2} = \dfrac{u_n + 2 - \sqrt{2}u_n - \sqrt{2}}{u_n + 1} = \dfrac{(1 - \sqrt{2})(u_n - \sqrt{2})}{u_n + 1}$.
3. Nous avons $t_{n+1} = \dfrac{v_{n+1} - \sqrt{2}}{u_{n+1} - \sqrt{2}} = \dfrac{(v_n - \sqrt{2})^2}{2v_n} \dfrac{u_n + 1}{(1 - \sqrt{2})(u_n - \sqrt{2})} = \dfrac{(v_n - \sqrt{2})(u_n + 1)}{2v_n(1 - \sqrt{2})} t_n$.
4. Parmi les termes de l'affreux quotient de la question précédente, on a $v_n - \sqrt{2}$ qui a pour limite 0, et tous les autres ont une limite finie (non nulle), donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{t_{n+1}}{t_n} = 0$.
5. De la question précédente, on déduit qu'à partir d'un certain rang n_0, $\left|\dfrac{t_{n+1}}{t_n}\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$ (on pourrait prendre autre chose que $\dfrac{1}{2}$, peu importe), donc $\forall n > n_0$ $|t_n| \leqslant \dfrac{1}{2}|t_{n-1}| \leqslant \dfrac{1}{4}|t_{n-2}| \leqslant \cdots \leqslant \dfrac{1}{2^{n-n_0}}|t_{n_0}|$ (on fait une jolie récurrence si on veut être rigoureux). Par théorème de comparaison, on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} |t_n| = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = 0$.
6. Cela signifie que $v_n - \sqrt{2}$ est négligeable par rapport à $u_n - \sqrt{2}$, donc que la suite (v_n) converge vers $\sqrt{2}$ beaucoup plus rapidement que la suite (u_n).

Feuille d'exercices n°8 : Systèmes

ECE3 Lycée Carnot

25 novembre 2010

Exercice 1 (**)

Résoudre les systèmes suivantes :

1. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 5z & = & 13 \\ 2x & + & 4y & - & 5z & = & -12 \\ 3x & - & 2y & - & z & = & 3 \end{array}\right.$$

2. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} & & 2y & - & z & = & 1 \\ -2x & - & 4y & + & 3z & = & -1 \\ x & + & y & - & 3z & = & -6 \end{array}\right.$$

3. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & t & = & 2 \\ 2x & + & y & + & z & + & t & = & 1 \\ x & + & 2y & + & 2z & & & = & 2 \end{array}\right.$$

4. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & - & 2t & = & 6 \\ 2x & - & y & - & 2z & - & 3t & = & 8 \\ 3x & + & 2y & - & z & + & 2t & = & 4 \\ 2x & - & 3y & + & 2z & + & t & = & -8 \end{array}\right.$$

5. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & z & = & 1 \\ -x & - & \frac{1}{2}y & + & \frac{1}{2}z & = & -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

6. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & a \\ -2x & - & 3y & + & 3z & = & b \\ x & + & y & - & 2z & = & c \end{array}\right.$$

Pour ce dernier système, déterminer le nombre de solutions selon les valeurs de a, b et c, et exprimer en fonction de a, b et c la solution lorsqu'elle est unique.

Exercice 2 (***)

Soit P un polynome de degré 3 vérifiant $P(1) = P(-1) = P'(1) = 1$. Un tel polynome existe-t-il ? est-il unique ?

Même question avec un polynome de degré 4 tel que $P(i) = i$ pour $i = 0$, $i = 1$, $i = 2$, $i = 3$ et $i = 4$.

Exercice 3 (**)

Quelques élèves imaginaires ont obtenu les notes et le total de points suivants à un concours. Retrouver le coefficient de chaque matière :

	Maths	*Langues*	*Franais*	*AEHSC*	*Total*
Aristide	0	10	20	10	310
Bernadette	10	10	10	10	300
Célian	0	10	10	20	290
Daphné	0	20	10	10	280
Eusèbe	20	5	5	5	270

Exercice 4 (***)

Résoudre les systèmes suivants, en distinguant des cas selon la valeur du paramètre m :

$$1. \left\{\begin{array}{ccccccc} (1-m)x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ -2x & - & (3+m)y & + & 3z & = & 0 \\ x & + & y & - & (2+m)z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$2. \left\{\begin{array}{ccccccc} 2mx & + & (m-1)y & + & (5-m)z & = & 0 \\ (m-1)x & + & 2my & + & (m+7)z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$3. \left\{\begin{array}{ccccccc} mx & + & 2y & + & 3z & = & 3 \\ (m-1)x & + & my & + & z & = & 1 \\ (m+1)x & + & my & + & (m-1)z & = & m-1 \end{array}\right.$$

Exercice 5 (***)

Pour les courageux, résoudre le magnifique système suivant (les valeurs obtenues ne doivent pas être horribles) :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x & - & y & + & 2z & + & 3t & + & w & = & 3 \\ x & + & y & + & 2z & + & 7t & + & 3w & = & 19 \\ -x & + & 4y & - & 5z & + & 12t & - & 4w & = & 33 \\ 2x & - & 4y & + & 5z & + & t & & & = & -12 \\ 4x & - & 3y & + & 4z & + & 11t & + & 9w & = & 15 \end{array}\right.$$

Corrigé de la feuille d'exercices n°8

Exercice 1 (**)

1. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 5z & = & 13 \\ 2x & + & 4y & - & 5z & = & -12 \\ 3x & - & 2y & - & z & = & 3 \end{array}\right.$ $\quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow 2L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow 3L_1 - L_3 \end{array}$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 5z & = & 13 \\ & & -8y & + & 15z & = & 38 \\ & & -4y & + & 16z & = & 36 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_2 - 2L_3 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 5z & = & 13 \\ & & -8y & + & 15z & = & 38 \\ & & & - & 17z & = & -34 \end{array}\right.$$

On remonte le système : $z = 2$, puis $-8y = 38 - 15z = 8$, donc $y = -1$, et enfin $x = 13 + 2y - 5z = 1$, donc $\mathcal{S} = \{(1; -1; 2)\}$.

2. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} & & 2y & - & z & = & 1 \\ -2x & - & 4y & + & 3z & = & -1 \\ x & + & y & - & 3z & = & -6 \end{array}\right.$ $\quad \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_3 \\ \\ \\ \end{array}$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & 3z & = & -6 \\ -2x & - & 4y & + & 3z & = & -1 \\ & & 2y & - & z & = & 1 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow 2L_1 + L_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & 3z & = & -6 \\ & & -2y & - & 3z & = & -13 \\ & & 2y & - & z & = & 1 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & 3z & = & -6 \\ & & -2y & - & 3z & = & -13 \\ & & & & -4z & = & -12 \end{array}\right.$$

On remonte le système : $z = 3$, puis $-2y = -13 + 3z = -4$, donc $y = 2$, et enfin $x = -6 - y + 3z = 1$, donc $\mathcal{S} = \{(1; 2; 3)\}$.

Pour le troisième système, on peut tricher un peu et éviter de recourir au pivot : commençons par soustraire les deux premières lignes : on obtient $-x = 1$, donc $x = -1$. La dernière équation devient alors $2y+2z = 3$, soit $y+z = \frac{3}{2}$. En reportant dans la première équation, on a donc $-1+\frac{3}{2}+t = 2$, soit $t = \frac{3}{2}$. La deuxième équation nous donne la même chose, on a donc $\mathcal{S} = \left\{\left(-1; y; \frac{3}{2} - y; \frac{3}{2}\right) \mid y \in \mathbb{R}\right\}$.

4. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & - & 2t & = & 6 \\ 2x & - & y & - & 2z & - & 3t & = & 8 \\ 3x & + & 2y & - & z & + & 2t & = & 4 \\ 2x & - & 3y & + & 2z & + & t & = & -8 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow 2L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow 3L_1 - L_3 \\ L_4 \leftarrow 2L_1 - L_4 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & - & 2t & = & 6 \\ & & 5y & + & 8z & - & t & = & 4 \\ & & 4y & + & 10z & - & 8t & = & 14 \\ & & 7y & + & 4z & - & 5t & = & 20 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow 8L_2 - L_3 \\ L_4 \leftarrow 5L_2 - L_4 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & - & 2t & = & 6 \\ & & 5y & + & 8z & - & t & = & 4 \\ & & 36y & + & 54z & & & = & 18 \\ & & 18y & + & 36z & & & = & 0 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_3 - 2L_4 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & - & 2t & = & 6 \\ & & 5y & + & 8z & - & t & = & 4 \\ & & 36y & + & 54z & & & = & 18 \\ & & & - & 18z & & & = & 18 \end{array}\right.$$

Je me suis permis de ne pas triangulariser de façon standard pour avoir des calculs un peu plus simples. On obtient donc $z = -1$, puis $36y = 18 - 54z = 72$, donc $y = 2$; $-t = 4 - 5y - 8z = 2$, donc $t = -2$, et enfin $x = 6 - 2y - 3z + 2t = 1$, donc $\mathcal{S} = \{(1; 2; -1; -2)\}$.

Le cinquième système est constitué de deux équations proportionnelles (on a $L_1 = -2L_2$) donc équivalentes. Tout ce qu'on peut faire est exprimer une inconnue en fonction des deux autres, par exemple $\mathcal{S} = \{(x; y; 2x + y - 1) \mid (x; y) \in \mathbb{R}^2\}$.

6. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & a \\ -2x & - & 3y & + & 3z & = & b \\ x & + & y & - & 2z & = & c \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow 2L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & a \\ & & y & + & z & = & 2a + b \\ & & y & + & z & = & a - c \end{array}\right.$$

Le système ne peut avoir de solution que si $2a+b = a-c$, c'est-à-dire si $a+b+c = 0$. Dans ce cas, on a $y = 2a+b-z$, et $x = a-2y+z = -3a-2b+3z$, donc $\mathcal{S} = \{(-3a-2b+3z; 2a+b-z; z) \mid z \in \mathbb{R}\}$. Dans le cas contraire, $\mathcal{S} = \emptyset$.

Exercice 2 (***)

Soit $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polynome de degré 3. Chacune des conditions imposées se traduit sous forme d'équation linéaire sur les coefficients du polynome : $P(1) = 1 \Leftrightarrow a+b+c+d = 1$; $P(-1) = 1 \Leftrightarrow -a+b-c+d = 1$; et comme $P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, $P'(1) = 1 \Leftrightarrow 3a + 2b + c = 1$. La différence des deux premières équations donne $a + c = 0$, soit $c = -a$, et la dernière équation devient alors $2a + 2b = 1$, soit $b = \dfrac{1}{2} - a$. Enfin, la somme des deux premières équations se traduit par $b + d = 1$, soit $d = 1 - b = a + \dfrac{1}{2}$. On a finalement $\mathcal{S} = \left\{\left(a; \dfrac{1}{2} - a; -a; a + \dfrac{1}{2}\right)\right\}$. Un exemple de polynome solution est obtenu en prenant $a = 1$, on a alors $P(x) = x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 - x + \dfrac{3}{2}$. La solution n'est pas unique, il y a un polynome différent pour chaque valeur possible de a.

Même principe, mais avec un polynome de degré 4, donc de la forme $P(x) = ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$. La première équation donne simplement $e = 0$, et les quatre autres se traduisent sous forme d'un magnifique système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a & + & b & + & c & + & d & = & 1 \\ 16a & + & 8b & + & 4c & + & 2d & = & 2 \\ 81a & + & 27b & + & 9c & + & 3d & = & 3 \\ 256a & + & 64b & + & 16c & + & 4d & = & 4 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a & + & b & + & c & + & d & = & 1 \\ 14a & + & 6b & + & 2c & & & = & 0 \\ 78a & + & 24b & + & 6c & & & = & 0 \\ 252a & + & 60b & + & 12c & & & = & 0 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow \frac{L_2}{2} \\ L_3 \leftarrow \frac{L_3}{6} \\ L_4 \leftarrow \frac{L_4}{12} \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a & + & b & + & c & + & d & = & 1 \\ 7a & + & 3b & + & c & & & = & 0 \\ 13a & + & 4b & + & c & & & = & 0 \\ 21a & + & 5b & + & c & & & = & 0 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a & + & b & + & c & + & d & = & 1 \\ 7a & + & 3b & + & c & & & = & 0 \\ 6a & + & b & & & & & = & 0 \\ 14a & + & 2b & & & & & = & 0 \end{array}\right.$$

Les deux dernières équations étant respectivement équivalentes à $b = -6a$ et $b = -7a$, on en déduit que $a = 0$, puis $b = 0$, $c = 0$ et $d = 1$. Il n'y a donc qu'un polynome vérifiant les conditions imposées : $P(x) = x$ (tout ça pour ça...).

Exercice 3 (**)

Notons a, b, c et d les coefficients respectifs des mathématiques, des langues, du français et d'AEHSC. Le tableau de notes se traduit alors (en divisant tout par 10 pour avoir des coefficients plus sympathiques) :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} & & b & + & 2c & + & d & = & 31 \\ a & + & b & + & c & + & d & = & 30 \\ & & b & + & c & + & 2d & = & 29 \\ & & 2b & + & c & + & d & = & 28 \\ 2a & + & \frac{1}{2}b & + & \frac{1}{2}c & + & \frac{1}{2}d & = & 27 \end{array}\right.$$

Pas besoin d'utiliser le pivot pour résoudre un tel système : $L_1 - L_3$ donne $c - d = 2$, soit $d = c - 2$, et $L_1 - L_4$ donne $c - b = 3$, soit $b = c - 3$. En reportant dans la première équation, on a donc $c-3+2c+c-2 = 31$, soit $c = 9$, dont on déduit que $b = 6$ et $d = 7$. Comme $a+b+c+d = 30$, on a donc $a = 8$, et il ne reste plus qu'à vérifier que la dernière équation est bien satisfaite par ces valeurs (ce qui est heureusement le cas). Les coefficients sont donc 8 pour les maths, 6 pour les langues, 9 pour le français et 7 pour l'AEHSC.

Exercice 4 (***)

1. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} (1-m)x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ -2x & - & (3+m)y & + & 3z & = & 0 \\ x & + & y & - & (2+m)z & = & 0 \end{array}\right. \quad L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & (2+m)z & = & 0 \\ -2x & - & (3+m)y & + & 3z & = & 0 \\ (1-m)x & + & 2y & - & z & = & 0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{r} \\ L_2 \leftarrow 2L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow (1-m)L_1 - L_3 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} (1-m)x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ & & (-1-m)y & - & (1+2m)z & = & 0 \\ & & (-1-m)y & + & (1-(1-m)(2+m))z & = & 0 \end{array}\right.$$

En soustrayant les deux dernières équations, on obtient $(1-(1-m)(2+m)+1+2m)z = 0$, soit $(1-2-m+2m+m^2+1+2m)z = (m^2+3m)z = 0$. Si $m \neq 0$ et $m \neq -3$, on a donc $z = 0$. Ensuite, on a alors $y = 0$ si $m \neq -1$, puis $x = 0$. Il y a trois cas particuliers.

Pour $m = 0$, en gardant les deux premières équations du système triangulaire obtenu, on a

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ & & -y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$$

soit $y = -z$ puis $x = z - 2y = 3z$, donc $\mathcal{S} = \{(3z; -z; z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

Pour $m = -3$, en gardant ces mêmes équations, on a :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 4x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ & & 2y & + & 5z & = & 0 \end{array}\right.$$

soit $y = -\dfrac{5}{2}z$ puis $x = \dfrac{1}{4}(z-2y) = \dfrac{3}{2}z$, donc $\mathcal{S} = \{(\frac{3}{2}z; -\frac{5}{2}z; z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

Enfin, quand $m = -1$, on a $z = 0$, c'est cette fois-ci la deuxième équation qui est toujours vérifiée, et la première devient $2x + 2y - z = 0$, soit $x = -y$, donc $\mathcal{S} = \{(-y; y; 0) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

2. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2mx & + & (m-1)y & + & (5-m)z & = & 0 \\ (m-1)x & + & 2my & + & (m+7)z & = & 0 \end{array}\right.$$

Additionnons les deux équations, on obtient $(3m-1)x + (3m-1)y + 2z = 0$; soustrayons-les et on a $(m+1)x - (m+1)y - 2(m+1)z = 0$. Si $m \neq -1$, la deuxième équation se simplifie en $x - y - 2z = 0$, donc $2z = x - y$, et en reportant dans la première on a $3mx + (3m-2)y = 0$. Si $m \neq 0$, on en déduit que $x = \dfrac{2-3m}{3m}y$, et $z = \dfrac{x-y}{2} = \dfrac{1-3m}{3m}y$, et $\mathcal{S} = \{(\frac{2-3m}{3m}y; y; \frac{1-3m}{3m}y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.
Si $m = -1$, le système se réduit à l'équation $-2x - 2y + 6z = 0$, donc $\mathcal{S} = \{(x; y; \frac{1}{3}(x+y)) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.

Enfin, si $m = 0$, les deux équations sont $-y + 5z = 0$, soit $y = -5z$, et $-x + 7z = 0$, soit $x = 7z$, donc $\mathcal{S} = \{(7z; -5z; z) \mid z \in \mathbb{R}\}$

Pour le troisième, quelques petites astuces de calcul évitent de trop se fatiguer :

$$3. \left\{ \begin{array}{ccccccc} mx & + & 2y & + & 3z & = & 3 \\ (m-1)x & + & my & + & z & = & 1 \\ (m+1)x & + & my & + & (m-1)z & = & m-1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_3 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} mx & + & 2y & + & 3z & = & 3 \\ 2x & & & + & (m-2)z & = & m-2 \\ 2mx & + & 2my & + & mz & = & m \end{array} \right.$$

Si $m \neq 0$, on peut simplifier la dernière équation, puis faire $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} (m-2)x & & & + & 2z & = & 2 \\ 2x & & & + & (m-2)z & = & m-2 \\ 2x & + & 2y & + & z & = & 1 \end{array} \right.$$

Reste à faire $L_1 \leftarrow (m-2)L_2 - 2L_1$, ce qui donne $(m-2)^2 z - 4z = (m-2)^2 - 4$, soit $m(m-4)z = m(m-4)$. Si $m \neq 4$ (on a déjà retiré la valeur 0), on a $z = 1$, d'où on déduit $x = 0$, puis $y = 0$. La seule solution est alors le triplet $(0; 0; 1)$.

Dans le cas particulier $m = 0$, le système est :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} & & 2y & + & 3z & = & 3 \\ -x & & & + & z & = & 1 \\ x & & & - & z & = & -1 \end{array} \right.$$

Les deux équations extrêmes sont équivalentes et donnent $x = z - 1$, puis la première donne $y = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2}z$, donc $\mathcal{S} = \{(z-1; \frac{3}{2} - \frac{3}{2}z; z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

Dans le cas particulier $m = 4$, reprenons le système obtenu plus haut :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x & & & + & 2z & = & 2 \\ 2x & & & + & 2z & = & 2 \\ 2x & + & 2y & + & z & = & 1 \end{array} \right.$$

On a alors $x = 1 - z$, et $2y = 1 - 2x - z = -1 + z$, donc $\mathcal{S} = \{(1 - z; -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}z; z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 5 (***)

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccccc} x & - & y & + & 2z & + & 3t & + & w & = & 3 \\ x & + & y & + & 2z & + & 7t & + & 3w & = & 19 \\ -x & + & 4y & - & 5z & + & 12t & - & 4w & = & 33 \\ 2x & - & 4y & + & 5z & + & t & & & = & -12 \\ 4x & - & 3y & + & 4z & + & 11t & + & 9w & = & 15 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_4 \leftarrow 2L_1 - L_4 \\ L_5 \leftarrow 4L_1 - L_5 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccccc} x & - & y & + & 2z & + & 3t & + & w & = & 3 \\ & & 2y & & & + & 4t & + & 2w & = & 16 \\ & & 3y & - & 3z & + & 15t & - & 3w & = & 36 \\ & & 2y & - & z & + & 5t & + & 2w & = & 18 \\ & - & y & + & 4z & + & t & - & 5w & = & -3 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow 3L_4 - L_3 \\ \\ L_5 \leftarrow 4L_4 + L_5 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & - & y & + & 2z & + & 3t & + & w & = & 3 \\ & & 2y & & & + & 4t & + & 2w & = & 16 \\ & & 3y & & & & & + & 9w & = & 18 \\ & & 2y & - & z & + & 5t & + & 2w & = & 18 \\ & & 7y & & & + & 21t & + & 3w & = & 69 \end{array}\right. \qquad L_2 \leftarrow 21L_2 - 4L_5$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & - & y & + & 2z & + & 3t & + & w & = & 3 \\ & & 14y & & & & & + & 30w & = & 60 \\ & & 3y & & & & & + & 9w & = & 18 \\ & & 2y & - & z & + & 5t & + & 2w & = & 18 \\ & & 7y & & & + & 21t & + & 3w & = & 69 \end{array}\right.$$

Plutôt que de faire un dernier pivot, constatons que la troisième équation donne $3w = 6 - y$, ce qui, reporté dans la deuxième, permet d'obtenir $14y + 10(6 - y) = 60$, soit $4y = 0$. On a donc $y = 0$, puis $3w = 6$ donc $w = 2$; $21t = 69 - 3 \times 2 - 7 \times 0 = 63$ donc $t = 3$; $z = 2 \times 0 + 5 \times 3 + 2 \times 2 - 18 = 1$ et enfin $x = 3 + 0 - 2 \times 1 - 3 \times 3 - 2 = -10$. Le système admet donc une solution unique : $\mathcal{S} = \{(-10; 0; 1; 3; 2)\}$.

Feuille d'exercices n°9 : Dénombrement, le retour

ECE3 Lycée Carnot

25 novembre 2010

Exercice 1 (*)

Lors d'un championnat de bridge, huit équipes se disputent les trois places du podium. Parmi elles, trois sont constituées de profs de maths.

1. Combien y a-t-il de podiums possibles (il va de soi que l'ordre est important) ?
2. Combien de podiums sont entièrement constitués de profs de maths ?
3. Combien de podiums contiennent au moins une équipe de profs de maths ?
4. Combien de podiums contiennent exactement une équipe de profs de maths ?

Exercice 2 (**)

Un sac contient 26 jetons sur lesquels sont inscrites les lettres de l'alphabet (une par jeton). On pioche simultanément 3 jetons. Déterminer le nombre de tirages pour lesquels :

1. On pioche trois consonnes.
2. On pioche deux voyelles.
3. On pioche au moins une voyelle.

On pioche désormais les trois jetons successivement avec remise. Déterminer le nombre de tirages pour lesquels :

1. On pioche deux voyelles.
2. On pioche deux lettres identiques (au moins).

Exercice 3 (**)

Une urne contient 6 jetons bleus numérotés de 1 à 6, et quatre jetons rouges numérotés de 1 à 4. On tire simultanément quatre jetons dans l'urne.

1. Quel est le nombre de tirages possibles ?
2. Combien de tirages pour lesquels on tire deux jetons de chaque couleur ?
3. Combien de tirages sans tirer le chiffre 2 ?
4. Combien de tirages où tous les jetons tirés ont des numéros pairs ?
5. Combien de tirages où on obtient quatre numéros différents ?
6. Combien de tirages pour lesquels la somme des numéros tirés vaut 10 ?

Exercice 4 (***)

Refaire l'exercice 4 de la feuille numéro 7 en supposant les cinq cartes tirées successivement avec remise.

Exercice 5 (**)

Une puce monte un escalier de 13 marches. À chacun de ses bonds, elle peut franchir une ou deux marches, et doit s'arrêter exactement sur la treizième marche. De combien de façons peut-elle monter l'escalier ?

Corrigé de la feuille d'exercices n°9

Exercice 1 (*)

1. Il y a $\dfrac{8!}{5!} = 336$ podiums possibles.
2. Il n'y a le choix que sur l'ordre des trois équipes, soit $3! = 6$ podiums constitués de profs de maths.
3. On passe au complémentaire : $336 - \dfrac{5!}{2!} = 336 - 60 = 276$ podiums avec au moins une équipe de profs de maths.
4. Il faut choisir l'équipe de profs de maths qui va monter sur le podium, les deux équipes sans profs de maths qui vont l'accompagner (parmi 5 possibles) et l'ordre de ces trois équipes, soit $\dbinom{3}{1}\dbinom{5}{2} \times 3! = 3 \times 10 \times 6 = 180$ podiums possibles.

Exercice 2 (**)

Si on tire simultanément :

1. Trois consonnes : $\dbinom{20}{3} = 1\ 140$ tirages.
2. Deux voyelles : $\dbinom{6}{2} \times \dbinom{20}{1} = 300$ tirages.
3. Au moins une voyelle : $\dbinom{26}{3} - \dbinom{20}{3} = 1\ 460$ tirages.

Avec des tirages successifs avec remise :

1. Deux voyelles : $6^2 \times 20 \times \dbinom{3}{1} = 2\ 160$ tirages (il faut choisir la position de la voyelle).
2. Deux lettres identiques au moins : $26 + 26 \times 25 \times \dbinom{3}{1} = 1\ 976$ (soit trois fois la même lettre, soit une lettre répétée deux fois et une autre lettre, dont il faut choisir la position).

Exercice 3 (**)

1. Il y 10 jetons au total, on en tire 4, il y a donc $\dbinom{10}{4} = 210$ tirages possibles.
2. Il faut donc tirer deux jetons bleus et deux rouges, soit $\dbinom{6}{2} \times \dbinom{4}{2} = 15 \times 6 = 90$ tirages.
3. Il ne reste plus que huit jetons disponibles, donc $\dbinom{8}{4} = 70$ tirages.
4. On a cette fois-ci 5 jetons convenables, donc $\dbinom{5}{4} = 5$ tirages possibles.
5. Il faut distinguer des cas selon les quatre numéros tirés : si on veut tirer 1, 2, 3 et 4, il y a $2^4 = 16$ tirages possibles puisqu'il existe deux jetons pour chaque numéro ; si on veut tirer le 5 et trois des numéros en double, il y a $\dbinom{4}{3} \times 2^3 = 32$ possibilités ; de même pour le 6 accompagné d'un des trois numéros doubles ; enfin, pour obtenir le 5, le 6 et deux des autres numéros, il y a $\dbinom{4}{2} \times 2^2 = 24$ possibilités. Au total, 104 tirages conviennent.

6. Là encore, plein de cas à distinguer : on peut tirer $6+2+1+1$ (deux cas puisqu'il y a deux 2 possibles) ; $5+3+1+1$ (deux cas) ; $5+2+2+1$ (encore deux cas) ; $4+4+1+1$ (un seul tirage) ; $4+3+2+1$ (16 cas) ; $3+3+2+2$ (un seul cas). Au total, on a donc 24 cas, dont les deux tiers sont constituées de la seule combinaison $4+3+2+1$.

Exercice 4 (***)

Avec des tirages successifs sans remise, les réponses deviennent :

- nombre total de tirages : $32^5 = 33\ 554\ 432$.
- avec deux Rois : $4^2 \times 28^3 \times \binom{5}{2} = 3\ 512\ 320$.
- au moins un pique : $32^5 - 28^5 = 16\ 344\ 064$.
- un As et deux carreaux : il faut distingues les cas où on tire deux fois l'As de carreau, ceux ou tire une fois l'As de carreau et une fois un autre carreau, et ceux où on tire deux carreaux qui ne sont pas l'As, ce qui donne $21^3 \times \binom{5}{2} + 7 \times 21^3 \times 5 \times 4 + 3 \times 7^2 \times 21^2 \times 5 \times \binom{4}{2} = 3\ 333\ 960$.
- pas de carte en-dessous du 9 : $24^5 = 7\ 962\ 624$.
- deux paires : il faut toujours choisir les rangs des deux paires, les cartes à tirer dans chaque paire et la dernière carte, mais également l'emplacement des cartes de la première paire dans le tirage, et celui des cartes de la deuxième paire, soit $\binom{8}{2} \times 4^2 \times 4^2 \times 24 \times \binom{5}{2} \times \binom{3}{2} = 5\ 160\ 960$.
- cinq cartes de la même couleur : $4 \times 8^5 = 131\ 072$.
- quinte flush : $16 \times 5! = 1\ 920$.

Exercice 5 (**)

Notons k le nombre de sauts de deux marches effectués par la puce. Elle saute $2k$ marches à l'aide de ces sauts, donc effectue $13-2k$ sauts d'une marche, soit au total $13-k$ sauts. Ne reste plus qu'à choisir la position des sauts de 2 marches, et comme k peut varier entre 0 et 6, il y a au total $\sum_{k=0}^{6} \binom{13-k}{k} = 377$ possibilités.

Feuille d'exercices n°10 : Séries

ECE3 Lycée Carnot

3 décembre 2010

Exercice 1 (**)

Étudier la nature et calculer la somme éventuelle des séries suivantes (distinguer selon la valeur de x pour les séries faisant intervenir un x) :

- $\sum n^2 x^n$
- $\sum \frac{n-1}{3^n}$
- $\sum \frac{n(n-1)x^n}{n!}$
- $\sum \frac{n^2 8^n}{n!}$
- $\sum \frac{4n^2+5n}{5^n}$
- $\sum \frac{2n^2}{n^3-1}$
- $\sum \frac{(-1)^n n^2}{3^n}$
- $\sum \frac{4(-1)^n}{n!}$
- $\sum \frac{n}{3^{2n+1}}$
- $\sum \frac{n+7}{2^n n!}$
- $\sum \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$
- $\sum \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$

Exercice 2 (**)

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$, puis calculer sa somme après avoir mis u_n sous la forme $\dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{n+2}$.

Exercice 3 (**)

Calculer par une méthode similaire à celle de l'exercice précédent la somme de la série de terme général $\dfrac{1}{4n^2-1}$.

Exercice 4 (**)

Soit u_n une suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \geqslant 1$, $u_{n+1} = e^{-u_n} u_n$.

1. Montrer que la suite u_n est convergente et préciser sa limite.
2. En posant $v_n = \ln u_n$, calculer la somme partielle de la série de terme général u_n en fonction de v_0 et de v_{n+1}.
3. En déduire la nature de $\sum u_n$.

Exercice 5 (*)

On note S_n la somme partielle d'indice n de la série harmonique. Montrer que $S_{2n} - S_n \geqslant \dfrac{1}{2}$. En déduire une nouvelle preuve de la divergence de la série harmonique.

Exercice 6 (***)

On considère une suite (u_n) définie par $u_0 \in [0;1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
2. Déterminer la nature de la série de terme général u_n^2 et sa somme éventuelle.
3. Prouver que la série de terme général $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est divergente.
4. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 7 (*)

Étudier la nature de chacune des séries suivantes, sans chercher à calculer leur somme :

- $\sum \dfrac{1}{k^2 - k}$
- $\sum \dfrac{1}{e^k + e^{-k}}$
- $\sum \dfrac{1}{k^3 + 2^k}$
- $\sum \ln \dfrac{n^2 + n^4}{2n^4}$
- $\sum \sqrt{\dfrac{n+2}{n^3 - 5n + 1}}$
- $\sum \dfrac{\ln n}{3^n}$

Exercice 8 (**)

En admettant que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

Corrigé de la feuille d'exercices n°10

Exercice 1 (**)

- Une petite transformation est nécessaire pour ramener cette série à un calcul connu, en l'occurence celui de la somme d'une série géométrique dérivée seconde :
$$\sum_{n=0}^{N} n^2x^n = \sum_{n=0}^{N} n(n-1)x^n + \sum_{n=0}^{N} nx^n = x^2\sum_{n=0}^{N} n(n-1)x^{n-2} + x\sum_{n=0}^{N} nx^{n-1}$$
La série est donc convergente si (et seulement si) $|x| < 1$, et sa somme vaut en appliquant les formules du cours
$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2x^n = x^2 \times \frac{2}{(1-x)^3} + x \times \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{2x^2 + x(1-x)}{(1-x)^3} = \frac{x^2+x}{(1-x)^3} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{n-1}{3^n} = \sum_{n=0}^{N} \frac{n}{3^n} - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{N} n \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{3^n}$. La série est donc convergente, de somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-1}{3^n} = \frac{1}{3}\frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2} - \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \times \frac{9}{4} - \frac{3}{2} = \frac{3}{4} - \frac{3}{2} = -\frac{3}{4}$.

- $\displaystyle\sum_{n=2}^{N} \frac{n(n-1)x^n}{n!} = x^2\sum_{n=2}^{N} \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} = x^2\sum_{n=0}^{N-2} \frac{x^n}{n!}$, qui converge vers x^2e^x (note : on a commencé la somme de départ à $n = 2$ car les termes obtenus pour $n = 0$ et $n = 1$ seraient de toute façon nuls).

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{n^2 8^n}{n!} = \sum_{n=0}^{N} \frac{n(n-1)8^n}{n!} + \sum_{n=0}^{N} \frac{n8^n}{n!} = \sum_{n=2}^{N} \frac{8^n}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{N} \frac{8^n}{(n-1)!} = 8^2\sum_{n=2}^{N} \frac{8^{n-2}}{(n-2)!} + 8\sum_{n=1}^{N} \frac{8^{n-1}}{(n-1)!} = 8^2\sum_{n=0}^{N-2} \frac{8^n}{n!} + 8\sum_{n=0}^{N-1} \frac{8^n}{n!}$, qui converge vers $64e^8 + 8e^8 = 72e^8$.

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{4n^2+5n}{5^n} = 4\sum_{n=0}^{N} \frac{n^2}{5^n} + \sum_{n=0}^{N} \frac{n}{5^{n-1}}$ qui converge vers $4 \times \dfrac{\frac{1}{5} \times (\frac{1}{5}+1)}{(1-\frac{1}{5})^3} + \dfrac{1}{(1-\frac{1}{5})^2}$ (en utilisant le résultat du premier calcul de l'exercice pour la première somme) $= \dfrac{24}{25} \times \dfrac{5^3}{4^3} + \dfrac{5^2}{4^2} = \dfrac{30}{16} + \dfrac{25}{16} = \dfrac{55}{16}$.

- En constatant que $\forall n \geqslant 2$, $\dfrac{2n^2}{n^3-1} \geqslant \dfrac{2n^2}{n^3} = \dfrac{2}{n}$, on voit que notre série est une série à terme positifs dont le terme général est minoré par celui d'une série divergente, donc elle diverge.

- On utilise encore une fois le résultat du premier calcul de l'exercice :
$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n n^2}{3^n} = \frac{-\frac{1}{3} \times (-\frac{1}{3}+1)}{(1+\frac{1}{3})^3} = -\frac{2}{9} \times \frac{3^3}{4^3} = -\frac{6}{64} = -\frac{3}{32}$.

- Ici, on a une série exponentielle, c'est du cours ! $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{n!} = 4e^{-1} = \frac{4}{e}$.

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{n}{3^{2n+1}} = \frac{1}{3^3}\sum_{n=0}^{N} \frac{n}{3^{2n-2}} = \frac{1}{27}\sum_{n=0}^{N} \frac{n}{9^{n-1}}$ On reconnait une série géométrique dérivée, qui converge vers $\displaystyle\frac{1}{27}\frac{1}{(1-\frac{1}{9})^2} = \frac{1}{27} \times \frac{81}{64} = \frac{3}{64}$.

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{n+7}{2^n n!} = \sum_{n=1}^{N} \frac{n}{2^n n!} + \sum_{n=0}^{N} \frac{7}{2^n n!} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2^n n!} + \sum_{n=0}^{N} \frac{7}{2^n n!}$, qui converge vers $\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} + 7e^{\frac{1}{2}} = \frac{15}{2}e^{\frac{1}{2}}$.

- On reconnait une somme télescopique dans la somme partielle : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln k = \ln(n+1) - \ln 1$. Comme cette expression ne converge pas quand n tend vers $+\infty$, la série est divergente.

- Même principe avec un télescopage plus complexe : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}\right) = \sum_{k=1}^{n} 2\ln(k+1) - \ln k - \ln(k+2) = 2\sum_{k=2}^{n+1} \ln k - \sum_{k=1}^{n} \ln k - \sum_{k=3}^{n+2} \ln k = 2\ln 2 + 2\ln(n+1) - \ln 1 - \ln 2 - \ln(n+1) - \ln(n+2) = \ln 2 + \ln(n+1) - \ln(n+2) = \ln 2 + \ln \frac{n+1}{n+2}$. Cette expression converge quand n tend vers $+\infty$, donc la série est convergente, et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right) = \ln 2$.

Exercice 2 (**)

Le plus simple pour déterminer la nature de la série est de chercher à calculer sa somme. Suivant les conseils de l'énoncé, on calcule $\dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{n+1} = \dfrac{a(n+1)(n+2) + bn(n+2) + cn(n+1)}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{a(n^2+3n+2) + b(n^2+2n) + c(n^2+n)}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{(a+b+c)n^2 + (3a+2b+c)n + 2a}{n(n+1)(n+2)}$. par identification des coefficients, on doit avoir $a+b+c=0$, $3a+2b+c=0$ et $2a=1$, soit $a=\frac{1}{2}$. Les deux autres équations donnent $b+c=-\frac{1}{2}$, soit $c=-b-\frac{1}{2}$, puis $2b+c=-\frac{3}{2}$, soit $b-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$, dont on déduit $b=-1$, puis $c=\frac{1}{2}$. On a donc finalement $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{2(n+2)}$.

On peut faire un joli télescopage à partir de ceci : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}$. La somme partielle ayant une limite, la série converge, et on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$.

Exercice 3 (**)

Le principe est le même que dans l'exercice précédent : $\dfrac{1}{4n^2-1} = \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{a}{2n-1} + \dfrac{b}{2n+1}$, avec a et b vérifiant $a(2n+1) + b(2n-1) = 1$, soit $n(2a+2b) + a - b = 1$. On obtient facilement $a=-b$, puis $a=\frac{1}{2}$ et $b=-\frac{1}{2}$, d'où $\dfrac{1}{4n^2-1} = \dfrac{1}{2(2n-1)} - \dfrac{1}{2(2n+1)}$. On a donc, en notant $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)}$ (c'est une somme télescopique simple). La somme partielle converge, donc la série est convergente, et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$.

Exercice 4 (**)

1. On montre par une récurrence facile que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. En effet, c'est vrai pour u_0, et si on le suppose vrai pour u_n, comme $e^{-u_n} > 0$, on aura bien $u_{n+1} = e^{-u_n}u_n > 0$. De plus, comme $u_n > 0$, on a $e^{-u_n} < 1$, et donc $e^{-u_n}u_n < u_n$. Autrement dit, la suite (u_n) est décroissante. Comme elle est minorée par 0, elle converge vers une certaine limite l. On en déduit que $e^{-u_n}u_n$ tend vers le^{-l}, mais aussi vers l puisque cette expression est égale à u_{n+1}. On en déduit que $l = le^{-l}$, ce qui se produit si $l = 0$ ou si $e^{-l} = 1$, ce qui ne laisse que la possibilité $l = 0$. La suite (u_n) converge donc vers 0.
2. On remarque que $v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln(e^{-u_n}u_n) = -u_n + \ln u_n = v_n - u_n$, ce qu'on peut aussi écrire $u_n = v_n - v_{n+1}$. On en déduit que $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n}(v_k - v_{k+1}) = v_0 - v_{n+1}$ (il y a télescopage).
3. Comme u_n tend vers 0, la suite v_n diverge vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$, et la série (S_n) diverge donc vers $+\infty$.

Exercice 5 (*)

On a $S_{2n} - S_n = \sum_{k=1}^{k=2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{k=2n} \frac{1}{k}$. Chacun des n termes de cette dernière somme étant plus grand que $\frac{1}{2n}$, la somme est plus grande que $n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$. Or, si la série harmonique convergait vers une certaine somme S, on devrait avoir $\lim_{n \to +\infty} S_{2n} = \lim_{n \to +\infty} S_n = S$, donc $\lim_{n \to +\infty} S_{2n} - S_n = 0$. Ce n'est manifestement pas le cas, donc la série harmonique ne converge pas (un petit raisonnement par l'absurde).

Exercice 6 (***)

1. On peut commencer par constater assez aisément que la suite (u_n) est décroissante puisque $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leqslant 0$. Cela donne bien envie de tenter de la minorer, par exemple par 0. Prouvons via une petite récurrence que tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $[0; 1]$. C'est vrai pour u_0 par hypothèse. Supposons donc $0 \leqslant u_n \leqslant 1$, on a alors également $0 \leqslant 1 - u_n \leqslant 1$, donc $0 \leqslant u_n(1 - u_n) \leqslant 1$. Or, $u_n(1 - u_n) = u_n - u_n^2 = u_{n+1}$. Cette constatation achève la récurrence.

   La suite (u_n) étant décroissante minorée, elle converge. Comme $u_{n+1} = u_n - u_n^2$, on en déduit en prenant la limite de chaque côté que $l = l - l^2$, soit $-l^2 = 0$, ce qui n'est possible que si $l = 0$. On peut en déduire que la suite (u_n) converge vers 0.
2. En revenant à la relation de récurrence, on constate que $u_n^2 = u_n - u_{n+1}$, d'où $\sum_{k=0}^{k=n} u_k^2 = \sum_{k=0}^{k=n} u_k - u_{k+1} = u_0 - u_{n+1}$ (par télescopage). D'après la question précédente, $\lim_{n \to +\infty} u_0 - u_{n+1} = u_0$, donc la série de terme général u_n^2 converge vers u_0.
3. La somme partielle va également être télescopique : $\sum_{k=0}^{k=n} \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) = \sum_{k=0}^{k=n} \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_0)$. Or, toujours en utilisant notre connaissance de la limite de (u_n), on a $\lim_{n \to +\infty} \ln(u_{n+1}) = -\infty$, ce qui signifie que la série considérére diverge.
4. En reprenant la relation de récurrence définissant la suite, on constate que $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) =$

$\ln\left(\dfrac{u_n - u_n^2}{u_n}\right) = \ln(1-u_n) \sim -u_n$ puisque u_n est une suite qui converge vers 0. Deux séries de terme général équivalent ayant même nature (oui, je sais, dans le cours on a mis des séries à termes positifs, et celles-là sont à terme négatif, mais il suffit d'appliquer le théorème à leurs opposés pour que ça marche ; ce qui est important c'est que les séries soient de signe constant), $\sum u_n$ diverge.

Exercice 7 (*)

- $\dfrac{1}{k^2-k} \sim \dfrac{1}{k^2}$, terme général d'une série convergente, donc $\sum \dfrac{1}{k^2-k}$ converge.
- $\dfrac{1}{e^k+e^{-k}} \leqslant \dfrac{1}{e^k}$, terme général d'une série géométrique convergente, donc la série à termes positifs $\sum \dfrac{1}{e^k+e^{-k}}$ converge.
- $\dfrac{1}{k^3+2^k} \sim \dfrac{1}{k^3}$, terme général d'une série de Riemann convergente, donc la série à termes positifs $\sum \dfrac{1}{k^3+2^k}$ converge.
- $\ln\dfrac{n^2+n^4}{2n^4}$ tend vers $\ln\dfrac{1}{2}$ quand n tend vers $+\infty$, donc la série diverge.
- $\sqrt{\dfrac{n+2}{n^3-5n+1}} \sim \sqrt{\dfrac{1}{n^2}} \sim \dfrac{1}{n}$, terme général d'une série divergente, donc la série diverge.
- $\dfrac{\ln n}{3^n} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \times \dfrac{\ln n}{2^n}$. La deuxième fraction tendant rapidement vers 0 (par croissance comparée), on aura certainement (à partir d'un certain rang) $\dfrac{\ln n}{3^n} \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$, terme général d'une série géométrique convergeante, donc la série converge.

Exercice 8 (**)

La série de terme général $\dfrac{1}{(2k+1)^2}$ converge car son terme général est équivalent à $\dfrac{1}{4k^2}$. De même pour la série de terme général $\dfrac{1}{(2k+2)^2}$. On peut donc écrire que la série de terme général $\dfrac{1}{(2k+2)^2} + \dfrac{1}{(2k+1)^2}$ converge, et que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \frac{1}{(2k+2)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+2)^2}$. Or, la somme de gauche n'est autre que la somme des inverses des carrés de tous les entiers (on a juste séparé entiers pairs et impairs) qui vaut $\dfrac{\pi^2}{6}$. Quant à la deuxième somme à droite, elle vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{4(k+1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{4} \times \frac{\pi^2}{6}$. Conclusion : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} = \frac{3}{4}\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}$.

Feuille d'exercices n°11 : Fonctions à deux variables

ECE3 Lycée Carnot

19 décembre 2010

Exercice 1 (* à **)

Après avoir déterminé et représenté le domaine de définition des fonctions suivantes, tracer leur ligne de niveau 4, puis leurs applications partielles pour x fixé égal à 4, puis y fixé égal à 4 :

1. $f_1(x, y) = 2x + 3y$
2. $f_2(x, y) = xy$
3. $f_3(x, y) = \dfrac{x}{y}$
4. $f_4(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 1)$

Exercice 2 (**)

On considère la fonction de deux variables $f(x, y) = \dfrac{xy}{|x| + |y|}$. Déterminer son domaine de définition, et tracer sa ligne de niveau 1.

Exercice 3 (**)

Après avoir déterminé leur domaine de définition, calculer les dérivées partielles (y compris les quatre dérivées secondes) des fonctions suivantes :

1. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
2. $g(x, y) = x^y$
3. $h(x, y) = x^3 + 2xy + 3xy^2 + y^4$
4. $i(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-xy}$
5. $j(x, y) = \dfrac{x - y}{x^2 + y}$
6. $k(x, y) = x(\ln y)^2 + y^2$

Exercice 4 (* à **)

Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 des fonctions suivantes, et déterminer si elles admettent des points critiques :

1. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$
2. $g(x, y) = 3xy - x^3 - y^3$
3. $h(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

Exercice 5 (***)

Déterminer les points critiques des fonctions suivantes, et déterminer la nature de ces points critiques en calculant $f(x,y) - f(x_0, y_0)$ dans chacun des cas $(x_0, y_0$ étant le point critique) et en essayant d'en déterminer le signe.

1. $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 3x - 6y$
2. $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 5$

Pour les exercices 6 et 7, on utilisera le résultat suivant pour déterminer la nature des points critiques : si (x_0, y_0) est un point critique de f, on note $D = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)\right)^2$, alors (x_0, y_0) n'est pas un extremum si $D < 0$, mais c'en est un si $D > 0$, maximum si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$, minimum sinon. Si $D = 0$, on ne peut pas conclure.

Exercice 6 (***)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 + 2x + y^2 + 3y$.

1. Calculer les dérivées partielles et dérivées partielles secondes de la fonction f.
2. Montrer que f a un unique point critique, qu'on déterminera.
3. Déterminer la nature de ce point critique.
4. Écrire f sous forme de somme de carrés et déterminer les courbes de niveau de f. Peut-on retrouver la nature du point critique par ce biais ?

Exercice 7 (***)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = 2e^{-x} + 3x^2 - 2xy + y^2$.

1. Calculer les dérivées partielles et dérivées partielles secondes de la fonction f.
2. Montrer que l'équation $2x - e^{-x} = 0$ a une unique solution α (au'on ne cherchera surtout pas à calculer) sur $\mathbb{R}$, et en déduire que f a pour unique point critique (α, α).
3. Montrer que ce point critique correspond à un minimum local de valeur $\alpha(2+\alpha)$.

Exercice 8 (**)

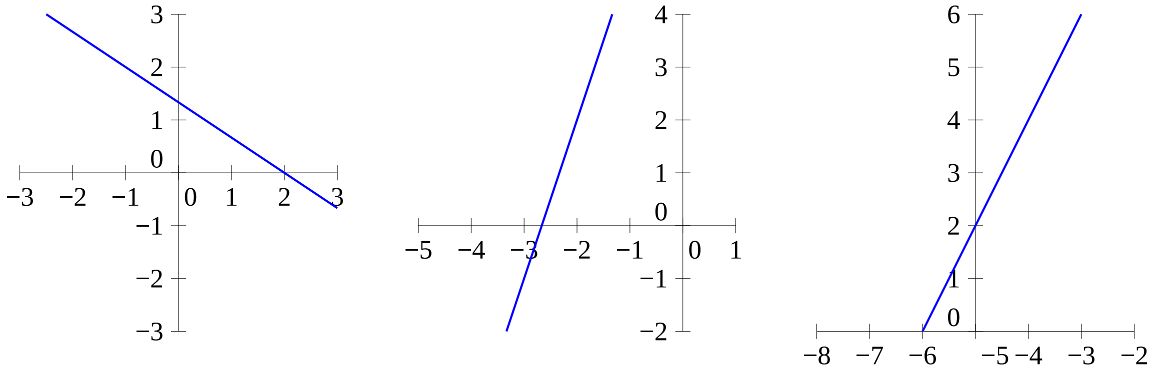
La fonction de production d'une entreprise est donnée par l'équation $P(K,L) = 2K^{\frac{1}{5}}L^{\frac{3}{5}}$, K désignant le capital et L le travail.

1. Calculer les productivités marginales du capital et du travail.
2. Montrer que ces productivités sont décroissantes.
3. Le rendement d'échelle de la fonction est obtenu en calculant $\frac{P(aK, aL)}{P(K,L)}$. Que vaut-il ici ? Quelle signification peut-on donner à cette valeur ?

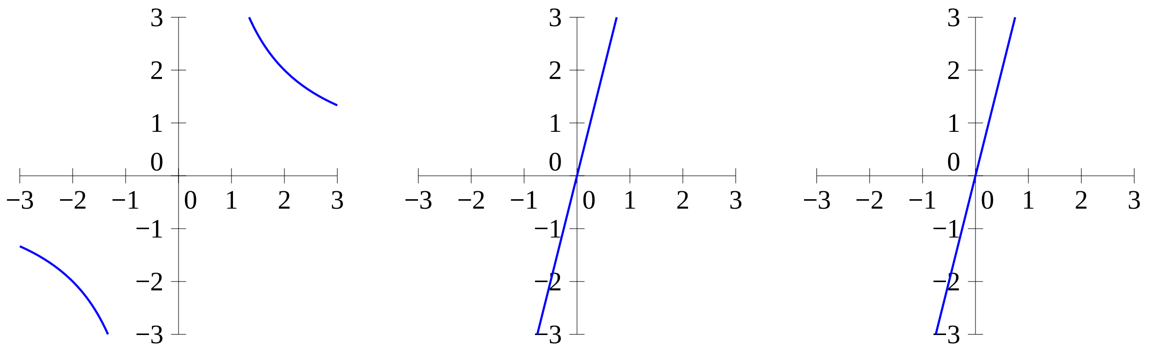
Corrigé de la feuille d'exercices n°11

Exercice 1 (* à **)

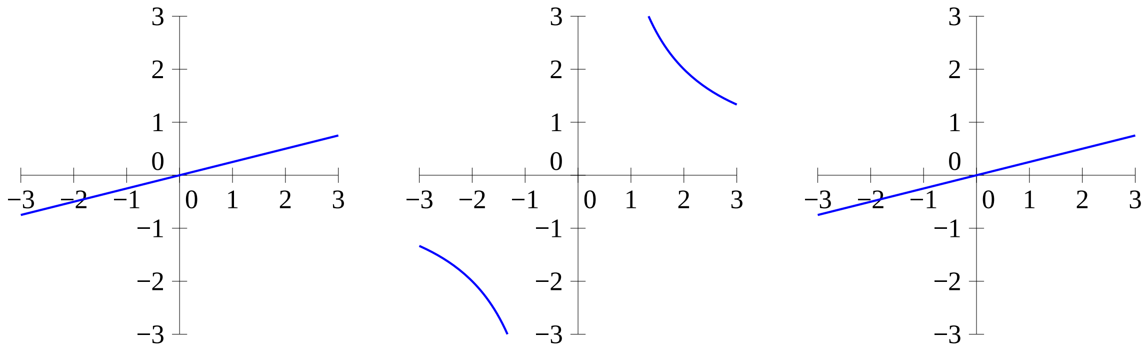
1. La fonction f_1 est évidemment définie sur $\mathbb{R}^2$ tout entier. La ligne de niveau 4 de f_1 est définie comme $\{(x,y) \mid 2x+3y=4\} = \left\{(x,y) \mid y = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}x\right\}$. Cette ligne de niveau est une droite, tout comme d'ailleurs les représentations graphiques des applications partielles obtenues pour $x=4$ et $y=4$, qui ont pour équations respectives $y \mapsto 3y+8$ et $x \mapsto 2x+12$. Il est tout à fait normal qu'on obtienne que des droites ici puisque la surface représentative de f_1 est un plan. Ci-dessous, dans l'ordre, la ligne de niveau 4, la représentation de l'application partielle obtenue pour $x=4$, puis celle obtenue pour $y=4$.



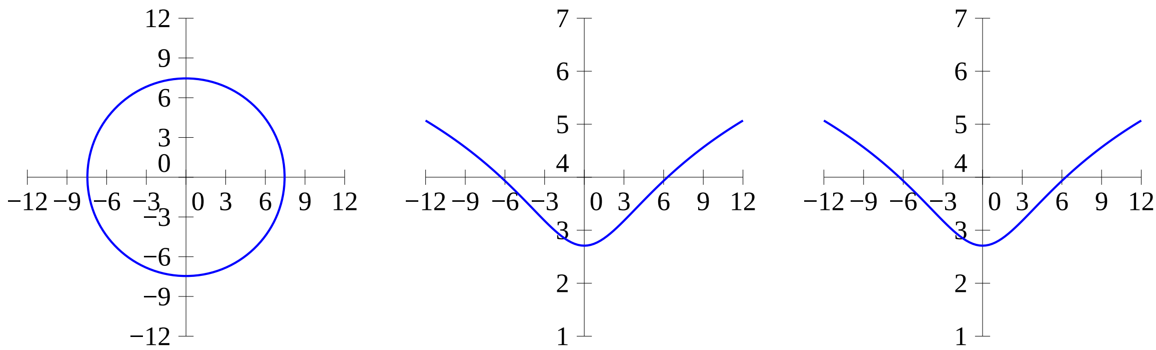
2. La fonction f_2 est également définie sur $\mathbb{R}^2$, sa ligne de niveau 4 a pour équation $xy=4$, c'est-à-dire $y = \frac{4}{x}$, qui est une équation d'hyperbole. Les représentations graphiques des deux applications partielles sont par contre des droites, d'équation $y \mapsto 4y$ et $x \mapsto 4x$.



3. La fonction f_3 est définie si $y \neq 0$, donc sur le plan $\mathbb{R}^2$ privé de l'axe des ordonnées (je me suis dispensé des représentations graphiques des domaines de définition, car ce n'est vraiment pas intéressant). La ligne de niveau 4 a pour équation $\frac{x}{y} = 4$, soit $y = \frac{x}{4}$, c'est-à-dire qu'il s'agit d'une droite, privée toutefois d'un point puisqu'on ne peut pas avoir $y=0$ (ça ne se voit pas sur le graphique). L'application partielle obtenue en fixant $x=4$ a pour équation $y \mapsto \frac{4}{y}$, c'est une hyperbole. Par contre, l'application partielle obtenue pour $x=4$ est une droite d'équation $x \mapsto \frac{x}{4}$ (même allure que la ligne de niveau 4).

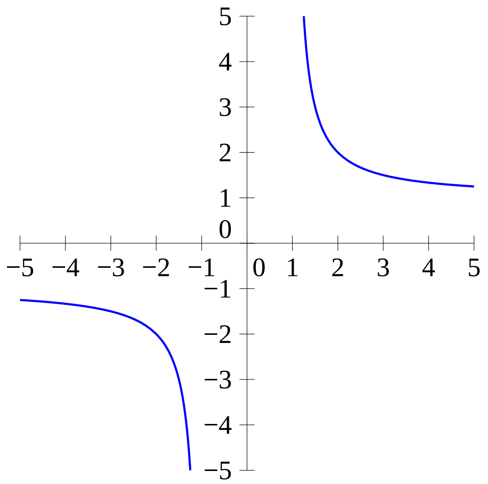


4. La fonction f_4 est définie si $x^2 + y^2 > 1$, c'est-à-dire en dehors du disque de centre 0 et de rayon 1. La ligne de niveau 4 a pour équation $\ln(x^2 + y^2 - 1) = 4$, soit $x^2 + y^2 = e^4 + 1$, il s'agit d'un cercle de centre 0 et de rayon $\sqrt{e^4 + 1}$. Les deux applications partielles ont une représentation graphique similaire, celle de la fonction $x \mapsto \ln(x^2 + y^2 - 1)$, dont on peut faire une étude sommaire si on le souhaite (elle est paire, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, de limite $+\infty$ en $+\infty$ et admettant une branche parabolique de direction (Ox)).



Exercice 2 (**)

La fonction f est définie dès que $|x| + |y| \neq 0$. Or, les deux valeurs absolues étant positives, leur somme ne peut être nulle que si elles sont toutes les deux nulles, c'est-à-dire si $x = y = 0$. On a donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2 \backslash \{0; 0\}$. Quant à la ligne de niveau cherchée, elle a pour équation $xy = |x| + |y|$. Ceci ne peut pas se produire quand x et y sont de signes opposés, car on aurait alors une valeur négative à gauche et une valeur positive à droite. Supposons donc x et y de même signe et même, pour commencer, positifs ou nuls tous les deux. On cherche alors les couples (x, y) tels que $xy = x + y$, soit $y(x - 1) = x$, ou encore $y = \dfrac{x}{x-1}$. Pour que x et y soient tous les deux positifs, il faut se restreindre aux cas où $x > 1$. De même, si x et y sont négatifs tous les deux, on chercher à avoir $xy = -x - y$, soit $y = -\dfrac{x}{x+1}$, ce qui fonctionnera bien si $x < -1$. Chacun de ces deux morceaux de ligne de niveau est une branche d'hyperbole (en effet, on a $\dfrac{x}{x-1} = \dfrac{x-1+1}{x-1} = 1 + \dfrac{1}{x-1}$; et $-\dfrac{x}{x+1} = -\dfrac{x+1-1}{x+1} = -1 + \dfrac{1}{x+1}$). On obtient une courbe de niveau ressemblant à ceci :



Exercice 3 (**)

Pour chaque fonction sauf j (où les calculs sont assez pénibles), seule une des deux dérivées partielles secondes croisées est calculée, l'autre lui étant égale. Cela ne vous dispense naturellement pas de calculer également la dernière dérivée pour vérifier ce fait.

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^2$, et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$;
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2} - x \times \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \dfrac{x^2+y^2-x^2}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2)} = \dfrac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$;
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = -\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$.
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ (même calcul que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$).
2. La fonction $g : (x,y) \mapsto e^{y \ln x}$ est définie si $x > 0$, donc sur le demi-plan situé strictement au-dessus de l'axe des abscisses. De plus, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y}{x}e^{y\ln x}$; $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \ln x \; e^{y \ln x}$;
$\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = -\dfrac{y}{x^2}e^{y\ln x} + \dfrac{y^2}{x^2}e^{y\ln x} = \left(\dfrac{y(y-1)}{x^2}\right)x^y$;
$\dfrac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{1}{x}e^{y\ln x} + \dfrac{y\ln x}{x}e^{y\ln x} = \dfrac{1+y\ln x}{x}x^y$;
$\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = (\ln x)^2 x^y$.
3. La fonction h est définie sur $\mathbb{R}^2$, et $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y) = 3x^2+2y+3y^2$; $\dfrac{\partial h}{\partial y}(x,y) = 2x+6xy+4y^3$;
$\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,y) = 6x$; $\dfrac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(x,y) = 2+6y$; $\dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x,y) = 6x+12y^2$.
4. La fonction i est définie sur $\mathbb{R}^2$ et $\dfrac{\partial i}{\partial x}(x,y) = 2xe^{-xy} - y(x^2+y^2)e^{-xy} = (2x - yx^2 - y^3)e^{-xy}$;
de même, $\dfrac{\partial i}{\partial y}(x,y) = (2y - xy^2 - x^3)e^{-xy}$;
$\dfrac{\partial^2 i}{\partial x^2}(x,y) = (2-2xy)e^{-xy} - y(2x - yx^2 - y^3)e^{-xy} = (2 - 4xy + y^2x^2 + y^4)e^{-xy}$;
$\dfrac{\partial^2 i}{\partial y \partial x}(x,y) = (-x^2-3y^2)e^{-xy} - x(2x - yx^2 - y^3)e^{-xy} = (-3x^2 - 3y^2 + yx^3 + xy^3)e^{-xy}$

$\dfrac{\partial^2 i}{\partial y^2}(x,y) = (2 - 4xy + x^2y^2 + x^4)e^{-xy}$

5. La fonction j est définie si $y \neq -x^2$, c'est-à-dire sur le plan privé d'une parabole, et $\dfrac{\partial j}{\partial x}(x,y) = \dfrac{x^2+y-2x(x-y)}{(x^2+y)^2} = \dfrac{-x^2+2xy+y}{(x^2+y)^2}$;
$\dfrac{\partial j}{\partial y}(x,y) = \dfrac{-(x^2+y)-(x-y)}{(x^2+y)^2} = \dfrac{-x^2-x}{(x^2+y)^2}$;
$\dfrac{\partial^2 j}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{(-2x+2y)(x^2+y)^2 - 2\times 2x(x^2+y)(-x^2+2xy+y)}{(x^2+y)^4}$
$= \dfrac{(-2x+2y)(x^2+y)-4x(-x^2+2xy+y}{(x^2+y)^3} = \dfrac{2x^3-6xy-6x^2y+2y^2}{(x^2+y)^3}$;
$\dfrac{\partial^2 j}{\partial y\partial x}(x,y) = \dfrac{(2x+1)(x^2+y)^2-2(x^2+y)(-x^2+2xy+y}{(x^2+y)^4}$
$= \dfrac{2x^3+2xy+x^2+y+2x^2-4xy-2y}{(x^2+y)^3} = \dfrac{2x^3+3x^2-2xy-y}{(x^2+y)^3}$;
$\dfrac{\partial^2 j}{\partial x\partial y}(x,y) = \dfrac{(-2x-1)(x^2+y)^2-2\times 2x(x^2+y)(-x^2-x)}{(x^2+y)^4} = \dfrac{(-2x-1)(x^2+y)-4x(-x^2-x)}{(x^2+y)^3}$
$= \dfrac{-2x^3-2xy-x^2-y+4x^3+4x^2}{(x^2+y)^3} = \dfrac{2x^3+3x^2-2xy-y}{(x^2+y)^3}$;
$\dfrac{\partial^2 j}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{-2(-x^2-x)}{(x^2+y)^3} = \dfrac{2x^2+2x}{(x^2+y)^3}$

6. La fonction k est définie si $y > 0$, donc sur un demi-plan, et $\dfrac{\partial k}{\partial x}(x,y) = (\ln y)^2$;
$\dfrac{\partial k}{\partial y}(x,y) = x \times \dfrac{2}{y}(\ln y) + 2y = \dfrac{2x\ln y}{y} + 2y$; $\dfrac{\partial^2 k}{\partial x^2}(x,y) = 0$; $\dfrac{\partial^2 k}{\partial y\partial x}(x,y) = \dfrac{2\ln y}{y}$;
$\dfrac{\partial^2 k}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{2x-2x\ln y}{y^2} + 2 = 2x\dfrac{1-\ln y}{y} + 2$

Exercice 4 (* à **)

1. On a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x+y$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x+2y$, donc la recherche de points critiques revient à résoudre le système constitué des deux équations $2x+y=0$ et $x+2y=0$, qui a pour solution unique $(0;0)$.

2. On a $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 3y-3x^2 = 3(y-x^2)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 3x-3y^2 = 3(x-y^2)$.Le spoints sont obtenus en recherchant les couples vérifiant $x=y^2$ et $y=x^2$. Par une simple substitution, on obtient $y^4=y$, soit $y(y^3-1)=0$, équation ayant pour solutions $y=0$ et $y=1$. On obtient alors respectivement $x=0$ et $x=1$, d'où les deux points critiques $(0;0)$ et $(1;1)$.

3. On a cette fois $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y) = 3x^2+3y^2-15$ et $\dfrac{\partial h}{\partial y}(x,y) = 6xy-12$. On se retrouve donc avec les deux équations $x^2+y^2=5$ et $2xy=4$ (oui, j'ai volontairement laissé un facteur 2 en trop). En additionnant et en soustrayant ces deux équations, on obtient $x^2+2xy+y^2=9$ et $x^2-2xy+y^2=1$, soit $(x+y)^2=3$ et $(x-y)^2=1$. Il y a pas moins de quatre cas à étudier : si $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 3 \\ x & - & y & = & 1 \end{array}\right.$, alors $x=2$ et $y=1$; si $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & -3 \\ x & - & y & = & 1 \end{array}\right.$, alors $x=-1$ et $y=-2$; si $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 3 \\ x & - & y & = & -1 \end{array}\right.$, alors $x=1$ et $y=2$; enfin si $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & -3 \\ x & - & y & = & -1 \end{array}\right.$, alors $x=-2$ et $y=1$. Il y a donc quatre points critiques pour la fonction h : $(-2;1)$; $(-1;-2)$; $(1;2)$ et $(2;1)$.

Exercice 5 (***)

1. Pour la première fonction, on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y - 3$, et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y + x - 6$, le système à résoudre a pour unique solution $x = 0$ et $y = 3$, qui est donc le seul point critique de la fonction f. Comme $f(0;3) = -9$, on cherche le signe de $f(x,y) - 9 = x^2 + y^2 + xy - 3x - 6y + 9 = \left(y - 3 + \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{3x^2}{4} \geqslant 0$. On en déduit que le point critique est un minimum global pour f. Pour ceux qui peinent dans le scalculs, rappelons que $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.

2. La deuxième fonction a pour dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - 2y$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y - 2x - 2$, ce qui donne un système qui se résout aisément : $x = y$, puis $y = 1$ et $x = 1$. Le point $(1;1)$ est donc le seul point critique pour la fonction f. Comme $f(1;1) = 4$, on cherche le signe de $f(x,y) - 4 = x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 1 = x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2y + 1 = (x-y)^2 + (y-1)^2 \geqslant 0$. Comme précédemment, le point critique est donc un minimum global pour la fonction.

Exercice 6 (***)

1. Calculons donc : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 2$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y + 3$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2$.

2. C'est tout juste s'il y a un système à résoudre ici : $2x + 2 = 0$ donne $x = -1$, et $2y + 3 = 0$ donne $y = -\frac{3}{2}$. Le seul point critique est donc le point $\left(-1; -\frac{3}{2}\right)$.

3. Utilisons donc le critère donné juste avant l'exercice : la valeur de D est ici $2 \times 2 - 0^2 = 4 > 0$, donc le point critique est un extremum, et comme $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-1, -\frac{3}{2}\right) > 0$, le point critique est un minimum (local) de la fonction f.

4. Constatons que $f(x) = x^2 + 2x + 1 + y^2 + 3y + \frac{9}{4} - \frac{13}{4} = (x+1)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}$. On peut en déduire facilement que la fonction admet pour minimum global $-\frac{13}{4}$, valeur atteinte pour son point critique. On peut même faire mieux et donner l'allure des courbes de niveau k : si $k < -\frac{13}{4}$, la courbe de niveau est vide ; sinon, on obtient l'équation $(x+1)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = k + \frac{13}{4}$, qui est l'équation du cercle de centre $\left(-1; -\frac{3}{2}\right)$ (le point critique de f) et de rayon $\sqrt{k + \frac{13}{4}}$.

Exercice 7 (***)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = 2e^{-x} + 3x^2 - 2xy + y^2$.

1. Calculons à nouveau : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2e^{-x} + 6x - 2y$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2x + 2y$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2e^{-x} + 6$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -2$ et enfin $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2$.

2. Appelons g la fonction (à une variable) définie par $g(x) = 2x - e^{-x}$. Cette fonction est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ puisque somme de deux fonctions croissantes (e^{-x} est décroissante, donc $-e^{-x}$ est croissante). De plus, elle a pour limites respectives $-\infty$ et $+\infty$ en $-\infty$ et

en $+\infty$ (pas de problème de calcul, il n'y pas de forme indéterminée). Cette fonction est donc bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et 0 admet donc un unique antécédent par g. Autrement dit, l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution α.

Or, la recherche des points critiques de f se ramène au système $\left\{ \begin{array}{rcl} 2e^{-x} + 6x - 2y & = & 0 \\ -2x & = & 2y \end{array} \right. \Leftrightarrow$ $\left\{ \begin{array}{rcl} 2e^{-x} + 4x & = & 0 \\ x & = & y \end{array} \right.$. La première équation revient à dire que $2g(x) = 0$, et on en déduit que l'unique point critique de f est le point $(\alpha; \alpha)$.

3. Utilisons le critère de détermination de la nature des points critiques : ici, $D = (2e^{-\alpha} + 6) \times 2 - (-2)^2 = 4e^{-\alpha} + 8 = 8\alpha + 8$ puisque $g(\alpha) = 0$. Comme on a $g(0) = -1$, on peut affirmer que $\alpha > 0$, donc $D > 0$. Le point critique correspond donc à un extrêmum pour f. De plus, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\alpha, \alpha) > 0$, donc il s'agit d'un minimum. Pour déterminer sa valeur, il ne reste plus qu'à calculer $f(\alpha, \alpha) = 2e^{-\alpha} + 3\alpha^2 - 2\alpha^2 + \alpha^2 = 4\alpha + 2\alpha^2 = 2\alpha(2 + \alpha)$.

Exercice 8 (**)

1. C'est un simple calcul de dérivées partielles : $\dfrac{\partial P}{\partial K}(K, L) = \dfrac{2}{5} K^{\frac{1}{5}-1} L^{\frac{3}{5}} = \dfrac{2}{5} \dfrac{L^{\frac{3}{5}}}{K^{\frac{4}{5}}}$; et $\dfrac{\partial P}{\partial L}(K, L) = \dfrac{6}{5} K^{\frac{1}{5}} L^{\frac{3}{5}-1} = \dfrac{6}{5} \dfrac{K^{\frac{1}{5}}}{L^{\frac{2}{5}}}$

2. Il suffit pour cela de calculer les dérivées partielles secondes (et encore, pas toutes) : $\dfrac{\partial^2 P}{\partial K^2}(K, L) = -\dfrac{8}{25} \dfrac{L^{\frac{3}{5}}}{K^{\frac{9}{5}}}$; et $\dfrac{\partial^2 P}{\partial L^2}(K, L) = -\dfrac{12}{25} \dfrac{K^{\frac{1}{5}}}{L^{\frac{7}{5}}}$. Ces deux dérivées étant négatives, les rendements sont bien décroissants.

3. Caculons plutôt $\dfrac{P(aK, aL)}{aP(K, L)} = \dfrac{2(aK)^{\frac{1}{5}}(aL)^{\frac{3}{5}}}{2aK^{\frac{1}{5}} L^{\frac{3}{5}}} = \dfrac{2a^{\frac{4}{5}} K^{\frac{1}{5}} L^{\frac{3}{5}}}{2aK^{\frac{1}{5}} L^{\frac{3}{5}}} = \dfrac{1}{a^{\frac{1}{5}}}$. Ce facteur étant supérieur à 1 si a est lui-même supérieur à 1, cela veut dire qu'en augmentant simultanément le travail et le capital d'un même facteur a, la prodution augmente d'un facteur plus élevé. Autrement dit, on fait des économies d'échelle en augmentant les valeurs de tous les facteurs.

Concours Blanc 2010

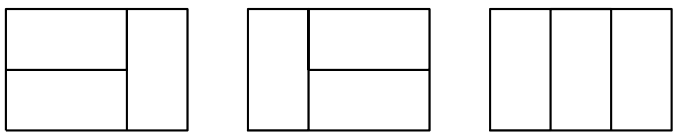
ECE3 Lycée Carnot

6 janvier 2010

Problème 1 : Variations autour de la suite de Fibonacci

Première partie

On dipose de briques rectangulaire 1×2 et on se propose de construire à l'aide de ces briques un mur de hauteur 2 et de longueur $k \in \mathbb{N}^*$. On note a_n le nombre de murs distincts construits avec n briques. Ainsi, par exemple, $a_3 = 3$:



Déterminer une relation de récurrence lisant a_{n+2}, a_{n+1} et a_n (on pourra remarquer qu'un mur commence soit par une brique verticale soit par deux briques horizontales superposées).

Deuxième partie

On étudie la suite de Fibonacci (F_n) définie par $F_0 = F_1 = 1$ et la relation de récurrence $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

1. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer qu'il existe un couple de réels (α, β) que l'on déterminera tel que, pour tout entier naturel n, $F_n = \alpha \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.
3. Montrer que, $\forall n > 0$, $F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^n$.
4. Déterminer la limite de (F_n) quand n tend vers $+\infty$, puis un équivalent simple de F_n.

Troisième partie

Dans toute cette partie, a_n désigne le nombre de murs distincts construits avec n briques (avec $a_0 = 1$).

1. Montrer que, $\forall n \geqslant 0$, $a_0 + a_1 + \cdots + a_n = a_{n+2} - 1$.
2. Montrer que, $\forall n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{a_1 a_3} + \dfrac{1}{a_2 a_4} + \cdots + \dfrac{1}{a_n a_{n+2}} = 1 - \dfrac{1}{a_{n+1} a_{n+2}}$.
3. Montrer l'inégalité : $\forall n \geqslant 0$, $a_{n+2} > \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$.

4. On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{a_n a_{n+2}}$. Cette série converge-t-elle ? Si oui, quelle est sa somme ?
5. Montrer que $\dbinom{2n}{0} + \dbinom{2n-1}{1} + \cdots + \dbinom{n}{n} = a_{2n}$, où a_k désigne le $(k+1)$-ème nombre de Fibonacci.

Problème 2 : Nombre de surjections entre ensembles finis

Dans tout ce problème, on note, pour tous entiers naturels n et p, $S_{n,p}$ le nombre de surjections de l'ensemble $\{1;2;\ldots;n\}$, vers l'ensemble $\{1;2;\ldots;p\}$. Un exemple de telle application pour $n=3$ et $p=2$ est $f : \{1;2;3\} \to \{1;2\}$ définie par $\begin{cases} f(1) = 2 \\ f(2) = 2 \\ f(3) = 1 \end{cases}$. On convient que $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_{n,0} = 0$, et $\forall p \in \mathbb{N}$, $S_{0,p} = 0$.

Première partie : exemples et généralités

1. Déterminer les valeurs de $S_{3,2}$ et $S_{4,2}$ en faisant la liste de toutes les applications convenables.
2. Que peut-on dire de $S_{n,p}$ quand $n < p$?
3. Déterminer, pour tout entier n, la valeur de $S_{n,1}$.
4. Déterminer, pour tout entier n, la valeur de $S_{n,n}$.

Deuxième partie : détermination de $S_{n,2}$

Pour alléger les notations, on pose dans cette partie, $\forall n \geqslant 2$, $u_n = S_{n,2}$.

1. Vérifier que $u_2 = 2$.
2. Prouver que, $\forall n \geqslant 2$, $u_{n+1} = 2(u_n + 1)$ (on pourra fixer l'image de $n+1$ par une application surjective de $\{1;2;\ldots;n+1\}$ dans $\{1;2\}$, et considérer les possibilités pour les images des autres éléments).
3. À l'aide de cette relation de récurrence, déterminer la valeur de u_n.
4. Retrouver cette valeur à l'aide d'un raisonnement combinatoire direct, en comptant le nombre d'applications de $\{1;2;\ldots;n\}$ dans $\{1;2\}$ qui ne sont pas surjectives.

Troisième partie : détermination de $S_{n,3}$

On pose désormais, $\forall n \geqslant 3$, $v_n = S_{n,3}$.

1. Vérifier que $v_3 = 6$.
2. Prouver que, $\forall n \geqslant 3$, $v_{n+1} = 3(v_n + u_n) = 3v_n + 3 \times 2^n - 6$.
3. Écrire un programme Pascal calculant la valeur de v_n pour un entier n choisi par l'utilisateur, à l'aide de la relation de récurrence précédente.
4. On pose $\forall n \geqslant 3$, $w_n = v_n - 3$. Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite (w_n).
5. On pose désormais, $\forall n \geqslant 3$, $t_n = w_n + 3 \times 2^n$. Montrer que (t_n) est une suite géométrique de raison 3.
6. En déduire la valeur de t_n, puis celle de u_n et de w_n.
7. Par un raisonnement direct inspiré de celui de la question 2.4 (dénombrer le nombre d'applications non surjectives), retrouver la valeur de v_n.

Quatrième partie : détermination de $S_{n+1,n}$

1. Soit f une application surjective de $\{1;2;\ldots;n+1\}$ dans $\{1;2;\ldots;n\}$. Montrer qu'il existe un unique élément dans $\{1;2;\ldots;n\}$ ayant deux antécédents par f.
2. De combien de façons peut-on choisir ces deux antécédents ?
3. En déduire que $S_{n+1,n} = \dfrac{n(n+1)!}{2}$.

Cinquième partie : cas général

1. Montrer que, $\forall n \geqslant 2$, $\forall p \geqslant n$, $S_{n,p} = nS_{n,p-1} + S_{n-1,p-1}$.
2. À l'aide de cette relation, dresser un tableau similaire au triangle de Pascal donnant les valeurs de $S_{n,p}$ pour des entiers n et p inférieurs ou égaux à 5.
3. Soit j un entier inférieur ou égal à $p-1$, et k tel que $j \leqslant k \leqslant p$, prouver que
$$\binom{p}{k}\binom{k}{j} = \binom{p}{j}\binom{p-j}{k-j}$$
4. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=q}^{k=p}(-1)^k\binom{p}{k}\binom{k}{q} = 0$ (on pourra faire apparaître une formule du binôme de Newton).
5. Déterminer en fonction de $S_{n,k}$, le nombre d'applications de $\{1;2;\ldots;n\}$ dans $\{1;2;\ldots;p\}$ prenant exactement j valeurs différentes (j étant ici un entier inférieur ou égal à p).
6. En déduire que $p^n = \displaystyle\sum_{j=1}^{j=p}\binom{p}{j}S_{n,j}$.
7. Prouver à l'aide des deux résultats précédents que $S_{n,p} = (-1)^p\displaystyle\sum_{k=0}^{k=p}(-1)^k\binom{p}{k}k^n$ (calculer la somme de droite en remplaçant k^n par la formule obtenue à la question 6).

Corrigé du Concours Blanc 2010

Problème 1 : Variations autour de la suite de Fibonacci

Première partie

Les murs de longueur $n+2$ peuvent être séparés en deux catégories disjointes : ceux qui débutent avec une brique verticale, et qui sont donc au nombre de a_{n+1} puisqu'il reste un mur de longueur $n+1$ à accoller à cette première brique ; et ceux débutant avec deux briques horizontales superposés, au nombre de a_n car il reste alors un mur de longueur n à construire. Conclusion : $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

Deuxième partie

1. C'est un récurrence double évidente : F_0 et F_1 sont entiers par hypothèse, et en supposant F_n et F_{n+1} entiers, leur somme F_{n+2} l'est également.
2. La suite est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - x - 1 = 0$, dont le discriminant vaut $\Delta = 1 + 4 = 5$ et admettant donc deux racines $r = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $s = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. La forme de F_n en découle, avec au vu des valeurs de F_0 et de F_1 les équations $\alpha + \beta = 1$ et $\alpha \times \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + \beta \times \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$, soit $\alpha \times \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + (1-\alpha) \times \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$, donc $\alpha\sqrt{5} = 1 - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, soit $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$, et $\beta = 1 - \alpha = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$. On a donc $F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$.
3. C'est encore une récurrence : $F_1^2 - F_0F_2 = 1 - 2 = (-1)^1$. Supposons l'égalité vérifié au rang n, alors $F_{n+1}^2 - F_nF_{n+2} = F_{n+1}^2 - F_n(F_n + F_{n+1}) = F_{n+1}(F_{n+1} - F_n) - F_n^2 = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = -(-1)^n = (-1)^{n+1}$, ce qui prouve l'hérédité et achève la démonstration.
4. La suite est somme de deux suites géométriques, l'une de raison $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \in]-1;1[$ (en effet, $\sqrt{5} \in]2;3[$), et l'autre de raison strictement plus grande que 1. Comme $\alpha > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n = +\infty$. La suite géométrique tendant vers 0 étant négligeable devant l'autre, $F_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$.

Troisième partie

1. Une première récurrence : $a_0 = 1 = a_2 - 1$, et en supposant l'égalité vraie au rang n, $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n+1} a_k = \sum_{k=0}^{k=n} a_k + a_{n+1} = a_{n+2} + a_{n+1} - 1 = a_{n+3} - 1$ au vu de la récurrence vérifiée par la suite (a_n). Ce calcul prouve l'hérédité et achève la récurrence.
2. Une deuxième récurrence : $\dfrac{1}{a_1a_3} = \dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{a_2a_3} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3}$, donc l'égalité est vraie au rang 1. Si on la suppose vraie au rang n alors $\dfrac{1}{a_1a_3} + \cdots + \dfrac{1}{a_na_{n+2}} + \dfrac{1}{a_{n+1}a_{n+3}} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{a_{n+1}a_{n+2}} + \dfrac{1}{a_{n+1}a_{n+3}} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{a_{n+1}}\left(\dfrac{1}{a_{n+3}} - \dfrac{1}{a_{n+2}}\right) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{a_{n+3} - a_{n+2}}{a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{a_{n+2}a_{n+3}}$, puisque $a_{n+3} - a_{n+2} = a_{n+1}$. Ceci achève la récurrence.

3. Pour changer, une récurrence double : $a_2 = 2 > 1 = \left(\frac{3}{2}\right)^0$ et $a_3 = 3 > \frac{3}{2}$. Supposons l'inégalité vraie au rang n, alors $a_{n+4} = a_{n+3} + a_{n+2} > \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \left(\frac{3}{2}\right)^n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+2}\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{9}\right)$. Comme $\frac{2}{3} + \frac{4}{9} = \frac{10}{9} > 1$, $a_{n+4} > \left(\frac{3}{2}\right)^{n+2}$ et la récurrence fonctionne.
4. On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}} = 0$ puisque la suite (a_n) tend vers $+\infty$, donc le résultat de la question 2 permet d'affirmer que la série de terme général $\frac{1}{a_n a_{n+2}}$ converge vers $\frac{1}{2}$.
5. C'est un pur résultat combinatoire : on peut séparer les murs en catégorie suivant le nombre de briques verticales et le nombre de duos de briques horizontales superposées qu'ils contiennent. Si un mur de longueur $2n$ contient k duos de briques horizontales, il contient $2n - 2k$ briques verticales , et on peut placer les k duos à $2n - k$ emplacements différents (puisque le mur contient au total $2n - k$ briques/duos), ce qui fait $\binom{2n-k}{k}$ possibilités. En sommant cette expression entre 0 et n, on obtient le nombre total de murs de longueur $2n$, soit a_{2n}.

Problème 2 : Nombre de surjections entre ensembles finis

Exemples et généralités

1. Soit f une application surjective de $\{(1; 2; 3)\}$ dans $\{(1; 2)\}$. Les triplets possibles pour $(f(1); f(2); f(3))$ sont $(1; 1; 2)$; $(1; 2; 1)$; $(1; 2; 2)$; $(2; 1; 1)$; $(2; 1; 2)$ et $(2; 2; 1)$, ce qui nous donne $S_{3,2} = 6$.

   De même, si g est une application surjective de $\{(1; 2; 3; 4)\}$ dans $\{(1; 2)\}$, les quadruplets possibles pour $(g(1); g(2); g(3); g(4))$ sont $(1; 1; 1; 2)$; $(1; 1; 2; 1)$; $(1; 1; 2; 2)$; $(1; 2; 1; 1)$; $(1; 2; 1; 2)$; $(1; 2; 2; 1)$; $(1; 2; 2; 2)$; $(2; 1; 1; 1)$; $(2; 1; 1; 2)$; $(2; 1; 2; 1)$; $(2; 1; 2; 2)$; $(2; 2; 1; 1)$; $(2; 2; 1; 2)$ et $(2; 2; 2; 1)$, d'où $S_{4,2} = 14$.
2. Une application ayant pour ensemble de départ $\{1; 2; \dots ; n\}$ ne peut prendre qu'au plus n valeurs différentes, donc ne pourra pas être surjective dans $\{1; 2; \dots ; p\}$ si $n < p$. Autrement dit, $S_{n,p} = 0$ dans ce cas.
3. La seule application ayant pour ensemble d'arrivée l'ensemble réduit à un seul élément $\{1\}$ est l'application constante égale à 1 (quel que soit l'ensemble de départ). Elle est par ailleurs surjective dès que $n \geqslant 1$, donc $S_{n,1} = 1$ pour $n \geqslant 1$.
4. Une application surjective de $\{1; 2; \dots ; n\}$ dans lui-même n'est autre qu'une permutation de l'ensemble $\{1; 2; \dots ; n\}$, qui sont au nombre de $n!$, donc $S_{n,n} = n!$.

Détermination de $S_{n,2}$

1. On a vu plus haut que $S_{2,2} = 2! = 2$.
2. Considérons une application surjective f de $\{1; 2; \dots ; n+1\}$ dans $\{1; 2\}$, et supposons que $f(n+1) = 1$. Pour que f soit surjective, il suffit alors que la restriction de f à $\{1; 2; \dots ; n\}$ soit déjà surjective (u_n possibilités) ou que $f(1) = f(2) = \cdots = f(n) = 2$. Il y a de même $u_n + 1$ applications surjectives pour lesquelles $f(n+1) = 2$, ce qui nous donne bien au total $u_{n+1} = 2(u_n + 1)$.
3. La suite (u_n) est une suite arithmético-géométrique. Son équation de point fixe, $x = 2x + 2$, a pour solution $x = -2$. Posons donc $v_n = u_n + 2$, on a alors $v_{n+1} = u_{n+1} + 2 = 2u_n + 2 + 2 = 2(u_n + 2) = 2v_n$. La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison 2 et vérifiant $v_2 = u_2 + 2 = 4$. On en déduit que $\forall n \geqslant 2$, $v_n = 4 \times 2^{n-2} = 2^n$, puis $u_n = v_n - 2 = 2^n - 2$.

4. Il y a au total 2^n applications de $\{1;2;\ldots;n\}$ dans $\{1;2\}$. Parmi celles-ci, les seules qui ne sont pas surjectives sont les deux applications constantes respectivement égales à 1 et à 2. Le nombre d'applications surjectives est donc $2^n - 2$.

Détermination de $S_{n,3}$

1. Toujours en revenant à la dernière question de la première partie, $v_3 = S_{3,3} = 3! = 6$.
2. Soit g une application surjective de $\{1;2;\ldots;n+1\}$ dans $\{1;2;3\}$ telle que $g(n+1) = 3$. Il y a alors deux possibilités pour la restriction de g à $\{1;2;\ldots;n\}$: soit elle est surjective dans $\{1;2;3\}$, soit elle est surjective dans $\{1;2\}$ (sans prendre la valeur 3). Ces deux possibilités ne pouvant se produire simultanément, il y a $v_n + u_n$ applications g convenables. Un raisonnement identique dans le cas où $g(n+1) = 1$ et $g(n+1) = 2$ nous permet d'obtenir au total $v_{n+1} = 3(v_n + u_n)$. Comme $u_n = 2^n - 2$, on a donc $v_{n+1} = 3v_n + 3 \times 2^n - 6$.
3.
```
PROGRAM recurrence ;
USES wincrt ;
VAR i,n,v,w : integer ;
BEGIN
WriteLn('Choisissez la valeur de l'entier n >=3') ;
ReadLn(n) ;
v := 6 ; w := 3*8 ;
FOR i := 4 TO n DO
BEGIN
v := 3*v+w-6 ; w := 2*w ;
END ;
WriteLn('La valeur de v_',n,' est de ',v) ;
END.
```
4. D'après le résultat de la question 2, $w_{n+1} = v_{n+1} - 3 = 3v_n + 3 \times 2^n - 6 - 3 = 3(v_n - 3 + 2^n) = 3(w_n + 2^n)$.
5. Calculons $t_{n+1} = w_{n+1} + 3 \times 2^{n+1} = 3(w_n + 2^n + 2^{n+1}) = 3(w_n + 2^n + 2 \times 2^n) = 3(w_n + 3 \times 2^n) = 3t_n$. La suite (t_n) est donc bien géométrique de raison 3.
6. Il ne reste plus qu'à remonter : $t_3 = w_3 + 3 \times 2^3 = w_3 + 24 = v_3 - 3 + 24 = v_3 + 21 = 6 + 21 = 27$. On en déduit que $t_n = 27 \times 3^{n-3} = 3^n$, puis $w_n = 3^n - 3 \times 2^n$ et enfin $v_n = 3^n - 3 \times 2^n + 3$.
7. Les applications de $\{1;2;\ldots n+1\}$ dans $\{1;2;3\}$ peuvent être classées selon le nombre de valeurs différentes qu'elles prennent : soit elle prennent les trois valeurs possibles, et il y a par définition v_n telles applications ; soit elles en prennent exactement deux, qu'on peut choisir de $\binom{3}{2} = 3$ façons différentes, et il y a à chaque fois u_n telles applications, donc $3u_n$ au total ; soit elles sont constantes, ce pour quoi on a 3 possibilités. Comme il y a un total de 3^n applications de $\{1;2;\ldots;n\}$ dans $\{1;2;3\}$, on obtient la relation $3^n = v_n + 3u_n + 3$, donc $v_n = 3^n - 3u_n - 3 = 3^n - 3(2^n - 2) - 3 = 3^n - 3 \times 2^n + 3$.

Détermination de $S_{n+1,n}$

1. L'application f étant surjective, tout élément de $\{1;2;\ldots;n\}$ admet (au moins) un antécédent par f. Choisissons donc un antécédent pour chaque élément de l'ensemble d'arrivée, cela nous donne n éléments de $\{1;2.\ldots;n+1\}$ ayant des images distinctes par f. Le dernier élément de $\{1;2;\ldots;n+1\}$ a une image identique à l'un des autres éléments de $\{1;2;\ldots;n+1\}$ (puisqu'on a déjà épuisé tous les éléments de l'ensemble d'arrivée), et cette image est bien l'unique élément de notre ensemble d'arrivée ayant exactement deux antécédents.

2. Il faut choisir deux éléments dans un ensemble en contenant $n+1$, il y a donc $\binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ possibilités.
3. Une fois choisis l'élément de l'ensemble d'arrivée ayant deux antécédents (n possibilités) et les deux antécédents en question, les $n-1$ éléments restants dans chaque ensemble sont reliés de façon bijective par f, ce qui laisse $(n-1)!$ possibilités. On a donc $S_{n+1,n} = n \times \frac{n(n+1)}{2} \times (n-1)! = \frac{n(n+1)!}{2}$.

Cas général

1. Considérons une application surjective f de $\{1; 2; \ldots; n\}$ dans $\{1; 2; \ldots; p\}$. On a p choix possibles pour l'image de n par cette application, et la restriction de f à $\{1; 2; \ldots; n-1\}$ est soit surjective vers $\{1; 2; \ldots; p\}$ (il y a pour cela $S_{n-1,p}$ possibilités), soit elle prend toutes les valeurs sauf $f(n)$ (il y a pour cela $S_{n-1,p-1}$ possibilités). Cela nous donne bien la relation de récurrence $S_{n,p} = p(S_{n-1,p} + S_{n-1,p-1})$.
2.

$S_{n,p}$	$p=0$	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$
$n=0$	0	0	0	0	0	0
$n=1$	0	1	0	0	0	0
$n=2$	0	1	2	0	0	0
$n=3$	0	1	6	6	0	0
$n=4$	0	1	14	36	24	0
$n=5$	0	1	30	150	240	120

3. Calculons séparément les membres de gauche et de droite : $\binom{p}{k}\binom{k}{j} = \frac{p!}{k!(p-k)!}\frac{k!}{j!(k-j)!} = \frac{p!}{(p-k)!(k-j)!j!}$. De l'autre côté, $\binom{p}{j}\binom{p-j}{k-j} = \frac{p!}{j!(p-j)!}\frac{(p-j)!}{(k-j)!(p-k)!} = \frac{p!}{j!(k-j)!(p-k)!}$. Les deux membres sont bien égaux.
4. On a, en utilisant l'égalité précédente, $\sum_{k=q}^{k=p}(-1)^k\binom{p}{k}\binom{k}{q} = \sum_{k=q}^{k=p}(-1)^k\binom{p}{q}\binom{p-q}{k-q}$. Le premier coefficient binomial ne dépendant pas de k, on peut le sortir de la somme. On va par ailleurs effectuer le changement d'indice $j = k-q$ pour se ramener à $\binom{p}{q}\sum_{j=0}^{j=p-q}(-1)^{j+q}\binom{p-q}{j} = \binom{p}{q}\sum_{j=0}^{j=p-q}\binom{p-q}{j}1^j(-1)^{j+q}$. Comme $(-1)^{j+q} = (-1)^{j+q-2j} = (-1)^{q-j}$, on peut reconnaitre dans la somme une formule du binome de Newton égale à $(1-1)^{p-q} = 0$, d'où la nullité de la somme initiale.
5. Il faut choisir les j valeurs qui seront prises par notre application (il y a pour cela $\binom{p}{j}$ choix), et il reste ensuite à choisir une application surjective d'un ensemble à n éléments vers un ensemble à j éléments, ce pour quoi on a par définition $S_{n,j}$ possibilités. Les applications prenant exactement j valeurs sont donc au nombre de $\binom{p}{j}S_{n,j}$.
6. Il y a au total p^n applications de $\{1; 2; \ldots; n\}$ vers $\{1; 2; \ldots; p\}$, et chacune d'elle prend un nombre de valeurs compris entre 1 et p. En sommant les expressions obtenues à la question précédente pour j variant de 1 à p, on obtiendra donc p^n (on ne compte manifestement pas deux fois une même application).

7. Tentons donc de calculer la somme de droite, en inversant la somme double qui apparait dès que possible :
$(-1)^p \sum_{k=0}^{k=p} (-1)^k \binom{p}{k} k^n = (-1)^p \sum_{k=0}^{k=p} (-1)^k \binom{p}{k} \sum_{j=1}^{j=k} \binom{k}{j} S_{n,j} = (-1)^p \sum_{j=1}^{j=p} S_{n,j} \sum_{k=j}^{k=p} (-1)^k \binom{p}{k} \binom{k}{j}$
La somme de droite est justement celle dont on a montré qu'elle était nulle pour toutes les valeurs de j inférieures ou égales à $p-1$. Le seul terme restant est donc
$(-1)^p S_{n,p} \sum_{k=p}^{k=p} (-1)^k \binom{p}{k} \binom{k}{p} = (-1)^{2p} S_{n,p} = S_{n,p}$. L'égalité demandée est donc prouvée.

Feuille d'exercices n°12 : Probabilités

ECE3 Lycée Carnot

11 janvier 2011

Exercice 1 (*)

On lance une pièce équilibrée quatre fois de suite. Décrire de façon ensembliste les événements A : « On obtient deux fois Pile et deux fois Face » et B : « Les deux premiers lancers ont donné des résultats différents ». Calculer $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$.

Exercice 2 (**)

On lance un dé quatre fois de suite. Calculer les probabilités suivantes :

1. On obtient quatre fois le même chiffre.
2. On obtient quatre chiffres différents.
3. On obtient quatre chiffres qui se suivent (en ordre croissant ou décroissant).

Exercice 3 (**)

Un coffre contient 6 diamants, 8 emeraudes et 10 rubis. On tire quatre pierres précieuses au hasard dans le coffre. Calculer les probabilités suivantes (valeurs exactes, puis une valeur approchée à 10^{-2} près à l'aide de la calculatrice) :

1. Les quatre pierres sont du même type.
2. On tire deux diamants et deux rubis.
3. On tire autant de diamants que de rubis.

Exercice 4 (*)

Dans une urne se trouvent 4 boules noires et deux boules blanches. Cinq personnes tirent successivement (sans remise) une boule dans l'urne. Le premier qui tire une boule blanche a gagné, quelle est la probabilité de gain pour chaque personne ?

Exercice 5 (**)

Dans un petit pays, les numéros de téléphone sont contitués de seulement 6 chiffres. On compose un tel numéro au hasard. Calculer les probabilités suivantes :

1. Le numéro composé commence par 01.
2. Le numéro composé est constitué de 6 chiffres distincts.

3. Le numéro composé contient deux fois le chiffre 5.
4. Le numéro composé ne contient que des chiffres pairs.
5. Le numéro composé a ses six chiffres en ordre strictement croissant.

Exercice 6 (***)

Dans une urne sont placées 15 boules vertes et 10 boules blanches. On tire successivement (sans remise) 5 boules dans l'urne. Calculer les probabilités suivantes :

1. On obtient 5 boules vertes.
2. On obtient une première boule verte, les deux suivantes blanches, les deux dernières vertes.
3. On obtient au plus une boule blanche.
4. On obtient trois boules vertes et deux blanches.

Reprendre l'exercice avec des tirages avec remise.

Exercice 7 (**)

Dans une classe de 38 élèves, 31 étudient l'anglais, 24 l'espagnol, 17 l'allemand ; 12 étudient à la fois anglais et allemand, 9 étudient espagnol et allemand, et 4 etudient les trois langues simultanément. On tire un élève au hasard. Calculer les probabilités suivantes :

1. Il étudie l'anglais et l'espagnol.
2. Il étudie l'anglais ou l'espagnol.
3. Il étudie uniquement l'allemand.

Exercice 8 (***)

Deux personnes A et B jouent au jeu suivant : A lance un pièce, s'il obtient Pile, il a gagné. Sinon, B lance une pièce, s'il obtient Face il a gagné. Sinon, c'est à nouveau à A de jouer ...On note A_k (respectivement B_k) l'événement : « Le joueur A (respectivement B) gagne à son k-ème lancer ». Calculer la probabilité de A_k et de B_k. On suppose désormais que le jeu s'arrêt après 10 lancers (cinq pour chaque joueur). Calculer la probabilité des événements suivants :

1. Le joueur A gagne en lançant moins de trois fois la pièce.
2. Le jouer B gagne.
3. Personne ne gagne.
4. On suppose que quelqu'un a gagné. Quelle est la probabilité que ce soit A ?

Exercice 9 (***)

On range aléatoirement cinq boules distingables dans quatre boites également distingables.

1. Quel est le nombre de rangements différents possibles ?
2. Quelle est la probabilité que toutes les boules soient rangées dans la même boite ?
3. Quelle est la probabilité que deux boites exactement soient vides ?
4. Même question avec une boite vide.
5. En déduire la probabilité qu'aucune boite ne soit vide.
6. Retrouver ce résultat directement à l'aide de la formule de Poincaré.

Exercice 10 (***)

Un tournoi de tennis accueille 64 joueurs, dont 8 sont têtes de séries. Un bug au moment d'effectuer le tirage au sort fait remplir le tableau de façon totalement aléatoire, y compris les têtes de séries.

1. Quelle est la probabilité qu'au moins deux têtes de série se rencontrent dès le premier tour ?
2. Quelle est la probabilité que les têtes de séries ne puissent pas se rencontrer avant les quarts de finale ?

Exercice 11 (*)

Un classique : une maladie touche un individu sur 100. On dispose d'un test de dépistage qui est positif pour 95% des personnes malades et pour 0.1% des individus sains. Un individu est testé positif. Quelle est la probabilité qu'il soit effectivement malade ? Reprendre le même exercice en supposant maintenant que la maladie ne touche qu'une personne sur 1 000, et que le test sera positif pour 0.5% des individus sains. Que penser du résultat obtenu ?

Exercice 12 (**)

On tire cinq cartes dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir les quatre As ? Un joueur dévoile deux cartes de son jeu, qui sont des As. Quelle est maintenant la probabilité qu'il détienne quatre As ? Comparer avec la probabilité d'avoir deux As quand on tire 3 cartes simultanément dans un jeu de 32 cartes. Interpréter.

Exercice 13 (*)

Une guerre sévit depuis des années entre deux pays voisins. Les habitants du pays A sont à 60% favorables à la paix et à 16% favorables à la guerre (le reste étant sans opinion) ; par contre dans le pays B, 68% des habitants sont pour la guerre et 12% sont pour la paix. On rencontre un individu sans savoir quel pays il habite (une chance sur deux pour chaque).

1. Calculer la probabilité qu'il soit sans opinion.
2. Il est favorable à la guerre, quelle est la probabilité qu'il habite le pays A ?
3. Même question s'il est favorable à la paix.

Exercice 14 (***)

On dispose de n urnes numérotées de 1 à n. Dans l'urne numéro k se trouvent k boules blanches et $n-k$ rouges. On choisit au hasard une urne puis on tire deux boules dans cette urne. Quelle est la probabilité d'avoir deux boules rouges ? Même question si on tire successivement les deux boules avec remise. Quelles sont les limites de ces probabilités quand n tend vers l'infini ?

Exercice 15 (**)

Dans un lot de 10 dés à 6 faces, 2 sont truqués de la façon suivante : la face 6 est tirée la moitié du temps, et les autres faces apparaissent avec la même probabilité. On choisit un dé au hasard et on le lance.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir un 6 ?
2. On obtient un 6. Quelle est la probabilité que le dé soit truqué ?
3. On obtient un 2. Quelle est la probabilité que le dé ne soit pas truqué ?

Exercice 16 (**)

On dipose de deux urnes, la première contenant 6 boules rouges et trois noires, et la deuxième 6 noires et trois rouges. On choisit une urne au hasard, puis on y tire deux boules, on obtient deux rouges. Quelle est la probabilité qu'on ait choisi la première urne ? Même question si on effectue les deux tirages successivement avec remise.

Exercice 17 (**)

Une compagnie aérienne étudie l'évolution des réservations sur l'un de ses vols. Elle constate que l'état d'une place donnée évolue ainsi : elle est libre au jour 0 (jour d'ouverture des réservations), puis, si elle est libre au jour n, il y a une probabilité $\frac{4}{10}$ que quelqu'un la réserve au jour $n+1$. Par contre, si elle est réservée au jour n, elle reste réservée au jour $n+1$ avec probabilité $\frac{9}{10}$. On note p_n la probabilité que la place soit réservée au jour n. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n et en déduire p_n, puis sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 18 (***)

Une guêpe entre par inadvertance dans un appartement composé de deux pièces A et B. Elle est dans la pièce A à $t=0$, et évolue ainsi : si elle est en A à l'instant n, elle reste en A avec probabilité $\frac{1}{3}$ ou passe en B avec probabilité $\frac{2}{3}$ à l'instant $n+1$; si elle est en B, elle retourne en A avec probabilité $\frac{1}{4}$, reste en B avec probabilité $\frac{1}{2}$ et sort de l'appartement avec probabilité $\frac{1}{4}$. Si elle est dehors, elle y reste. On note A_n : « La guêpe est en A à l'instant n ». Je vous laisse deviner ce que représentent B_n et C_n. Les probabilités respectives de ces événements sont notées a_n, b_n et c_n.

1. Calculer a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 et c_2.
2. Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et de b_n.
3. Montrer que $u_n = \frac{6}{10}a_n - \frac{3}{10}b_n$ est une suite constante.
4. Montrer que $u_n = \frac{4}{10}a_n + \frac{3}{10}b_n$ est une suite géométrique.
5. En déduire les valeurs de a_n et de b_n.
6. Que vaut c_n ?

Exercice 19 (***)

Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On pioche une poignée de jetons qui contient un nombre aléatoire de jetons, et on sait qu'il y a équiprobabilité sur le nombre de jetons tirés (qui peut être égal à 0 ; autrement dit, on eut pioche une poignée vide). Quelle est la probabilité de piocher le jeton numéro 1 dans notre poignée ? Les évènements A : « On a pioché le jeton 1 » et B : « On a pioché le jeton 2 » sont-ils indépendants ? Mêmes questions dans le cas où ce n'est plus le nombre de jeton qui est réparti uniformément, mais où on a équiprobabilité sur toutes les poignées possibles (toujours en comptant la poignée vide) ?

Corrigé de la feuille d'exercices n°12

Exercice 1 (*)

L'univers Ω des résultats possibles est ici constitué de $2^4 = 16$ éléments, qu'on peut noter sous la forme suivante pour plus de simplicité : $PFPF$ désignera par exemple la série de lancers ayant donné successivement les résultats Pile, Face, Pile et Face. Avec ces notations, $A = \{PPFF; PFPF; PFFP; FPPF, FPFP; FFPP\}$ et
$B = \{PFPP; PFPF; PFFP; PFFF; FPPP; FPPF; FPFP; FPFF\}$. Puisqu'on est en situation d'équiprobabilité, $P(A) = \dfrac{6}{16} = \dfrac{3}{8}$ et $P(B) = \dfrac{8}{16} = \dfrac{1}{2}$. Les deux évènements ayant quatre résultats en commun, $P(A \cap B) = \dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4}$, puis $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \dfrac{6+8-4}{16} = \dfrac{10}{16} = \dfrac{5}{8}$.

Exercice 2 (**)

Cette fois-ci, l'univers ressemble à ceci : $\Omega = \{(1,1,1,1); (1,1,1,2); \dots; (6,6,6,6)\}$. On a $|\Omega| = 6^4 = 1296$.

1. Il y a six cas favorables, soit une probabilité de $\dfrac{6}{6^4} = \dfrac{1}{216} \simeq 0.0046$.
2. Il faut bien entendu faire attention qu fait qu'il ne s'agit pas du complémentaire de la question précédente. Pour avoir quatre chiffres différents, il y a $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$ cas favorables, soit une probabilité de $\dfrac{360}{1296} = \dfrac{5}{18} \simeq 0.28$.
3. Le plus simple est de faire la liste des combinaisons possibles :
$(1,2,3,4); (2,3,4,5); (3,4,5,6); (4,3,2,1); (5,4,3,2); (6,5,4,3)$, ce qui laisse la même probabilité qu'à la première question.

Exercice 3 (**)

Si on numérotes les pierres précieuses $(D_1; \dots; D_6; E_1; \dots; E_8; R_1; \dots; R_{10})$, l'univers est constitué de tous les quadruplets de l'ensemble à 45 éléments précédent. On a donc $|\Omega| = \dbinom{24}{4} = 10\ 626$.

1. Il faut séparer l'événement (que j'appelle A) en trois possibilités. Notons A_1 l'évènement « on obtient trois diamants » ; A_2 « on obtient trois émeraudes » et A_3 « on obtient trois rubis ». On a $P(A_1) = \dfrac{\binom{6}{4}}{\binom{24}{4}}$, et de même $P(A_2) = \dfrac{\binom{8}{4}}{\binom{24}{4}}$ et $P(A_3) = \dfrac{\binom{10}{4}}{\binom{24}{4}}$. Comme on a $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, et que les événements A_1, A_2 et A_3 sont manifestement incompatibles, $P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \dfrac{\binom{6}{4} + \binom{8}{4} + \binom{10}{4}}{\binom{24}{4}} \simeq 0.028$.
2. L'ordre n'ayant pas d'importance, il faut choisir deux diamants parmi les 6 et deux rubis parmi les 10. Le nombre de cas favorables est donc de $\dbinom{6}{2} \times \dbinom{10}{2}$. On a donc une probabilité de $\dfrac{\binom{6}{2} \times \binom{10}{2}}{\binom{24}{4}} \simeq 0.064$.
3. Il faut combiner les deux techniques précédentes : on peut avoir soit deux diamants et deux rubis ; soit un diamant, un rubis et donc deux émeraudes ; soit quatre émeraudes, ce qui donne une probabilité de $\dfrac{\binom{6}{2} \times \binom{10}{2} + \binom{6}{1} \times \binom{10}{1} \times \binom{8}{2} + \binom{8}{4}}{\binom{24}{4}} \simeq 0.228$.

Exercice 4 (*)

Une représentation sous forme d'arbre ou, pour faire plus savant, la formule des probabilités composées, permet d'obtenir rapidement les valeurs souhaitées. La robabilité que le premier joueur gagne vaut $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Pour le deuxième, il faut que le joueur 1 tire une boule noire, puis que lui-même tire une boule blanche sur les cinq boules restant dans l'urne, soit une probabilité de $\frac{4}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$. De même, le troisième joueur gagne avec probabilité $\frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{5}$, le quatrième avec une probabilité $\frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{15}$. Enfin, le dernier joueur gagne avec une probabilité $\frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{2} = \frac{1}{15}$. Notons que la somme de ces cinq probabilités vaut $\frac{1}{3} + \frac{4}{15} + \frac{1}{5} + \frac{2}{15} + \frac{1}{15} = \frac{5+4+3+2+1}{15} = 1$, ce qui est tout à fait normal puisqu'il y a quatre boules noires dans l'urne, ce qui implique qu'avec des tirages sans remise, l'un des cinq joueurs va nécessairement tirer une boule blanche.

Exercice 5 (**)

Commençons par constater qu'il y a $10^6 = 1\ 000\ 000$ de téléphones au total.

1. Les numéros commençant par 01 sont au nombre de 10^4, ce qui laisse une probabilité de $\frac{10^4}{10^6} = \frac{1}{100}$.
2. On a cette fois-ci $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5$ numéros possibles, soit une probabilité de $\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{10^6} = \frac{189}{1\ 250}$.
3. Il ne faut pas oublier de tenir compte de la position des deux 5 : il y a $10^4 \times \binom{6}{2}$ numéros possibles, soit une probabilité de $\frac{10^4 \times 15}{10^6} = \frac{3}{20}$.
4. Ca c'est facile : 5^6 numéros, et une probabilité de $\frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$.
5. Il suffit de choisir les six chiffres apparaissant dans le numéro pour connaitre le numéro (puisque l'ordre sera alors imposé), ce qui donne $\binom{10}{6} = 210$ numéros possibles, et une probabilité de $\frac{210}{10^6} = \frac{21}{100\ 000}$.

Exercice 6 (***)

Il y ici deux univers raisonnables pour les résultats. On peut ne pas tenir compte de l'ordre et prendre pour Ω l'ensemble des sous-ensembles à 5 éléments de l'ensemble des 25 boules de l'urne, soit $|\Omega| = \binom{25}{5}$, mais également choisir de travailler avec des arrangements, auquel cas $|\Omega| = 25 \times 24 \times 23 \times 22 \times 21$. Nous choisissons ici le premier univers, constitué de combinaisons.

1. Il y a $\binom{15}{5}$ tirages favorables, soit une probabilité de $\frac{\binom{15}{5}}{\binom{25}{5}} \simeq 0.057$.
2. On a introduit un ordre, il faut changer d'univers ou plus simplement calculer la proba boule par boule (autrement dit à l'aide de la formule des probabilités composées), elle vaut $\frac{15}{25} \times \frac{10}{24} \times \frac{9}{23} \times \frac{14}{22} \times \frac{13}{21} = \frac{39}{1012} \simeq 0.039$.

3. On peut revenir à notre premier univers, les tirages favorables sont ceux constituées de cinq boules vertes et ceux constitués de quatre boules vertes et d'une boule blanche (union disjointe), donc la proba vaut $\dfrac{\binom{15}{4} \times \binom{10}{1} + \binom{15}{5}}{\binom{25}{5}} \simeq 0.313$ (on a séparé l'événement en deux cas disjoints).
4. De la même façon que précédemment, la proba vaut $\dfrac{\binom{15}{3} \times \binom{10}{2}}{\binom{25}{5}} \simeq 0.385$. Dans les deux dernières questions, si on a décidé de travailler avec des arrangements, on fera bien attention au fait que l'ordre des tirages n'est pas imposé dans l'énoncé (contrairement à la deuxième question), ce qui laisse plus de cas favorables.

Dans le cas des tirages avec remise, on est de toute façon obligés de travailler avec des listes, donc $|\Omega| = 25^5$.

1. Il y a 15^5 tirages favorables, donc une probabilité de $\dfrac{15^5}{25^5} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^5 \simeq 0.078$.
2. Il y a $15 \times 10 \times 10 \times 15 \times 15$ tirages favorables, soit une probabilité de $\dfrac{15^3 \times 10^2}{25^5} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^3 \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^2 \simeq 0.035$.
3. Soit on obtient cinq vertes (15^5 cas), soit quatre vertes et une blanche, ce qui correspond à $15^4 \times 10 \times 5$ cas (il ne faut pas oublier de multiplier par 5 pour tenir compte du choix de la position de la boule blanche), donc une probabilité de $\dfrac{15^5 + 15^4 \times 10 \times 5}{25^5} \simeq 0.337$.
4. Là encore, la seule difficulté est de ne pas oublier le choix de la position des deux blanches, la probabilité vaut $\dfrac{\binom{5}{2} \times 15^3 \times 10^2}{25^5} \simeq 0.346$.

Exercice 7 (**)

C'est une situation qui se représente bien à coups de patates. À défaut on note A, E et G les ensembles désignant respectivement les anglicistes, les hispanisants et les germanistes. On commence par remplir la case correspondant aux quatre trilingues, c'est-à-dire $|A \cap E \cap G| = 4$. Puis on en déduit que $|(G \cap E) \backslash A| = 9 - 4 = 5$ (correspond à la case Allemand-Espagnol pour les patates). De même, on a 8 anglicistes germanistes non hispanisants. Cela laisse $17 - 5 - 8 - 4 = 0$ élève pratiquant uniquement l'allemand. Pour les trois dernières cases (anglais-espagnol ; anglais tout seul ; espagnol tout seul), il faut supposer que tous les élèves de la classe pratiquent au moins une langue. Notons alors x le nombre d'anglicistes purs et y ceux qui font anglais et espagnol (mais pas allemand). Le nombre d'hispanisants purs sera alors $38 - x - y - 17 = 21 - x - y$. De plus, on doit avoir $31 = 12 + x + y$, et $24 = 9 + y + 21 - x - y$, soit $x = 6$, puis $y = 13$. Enfin, les hispanisants purs sont au nombre de $21 - 6 - 13 = 2$. On peut désormais répondre aisément aux questions posées : la probabilité d'étudier anglais et espagnol vaut $\dfrac{13+4}{38} = \dfrac{17}{38}$. Celle d'étudier anglais ou espagnol vaut 1, et celle d'étudier uniquement l'allemand vaut 0 (ces deux évènements étant complémentaires).

Exercice 8 (***)

1. Soit A gagne au premier lancer (une chance sur deux), soit il gagne à son deuxième lancer, ce qui implique que lui-même et B aient perdu au premier lancer, c'est-à-dire que les trois premiers lancers soient FPP, ce qui se produit avec probabilité $\dfrac{1}{8}$; soit il gagne à son troisième lancer, probabilité $\dfrac{1}{32}$ (même raisonnement qu'avant), soit au total une proba de $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{32} = \dfrac{21}{32} \simeq 0.656$ (les trois cas étant bien sûr incompatibles).

2. Par un raisonnement très similaire à la première question, la probabilité de victoire du joueur B vaut $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{2^{10}} \simeq 0.333$ (les tirages faisant gagner le joueur B sont FF ; $FPFF$; $FPFPFF$; $FPFPFPFF$ et $FPFPFPFPFF$).
3. Il reste une proba de $\frac{1}{2^{10}} \simeq 0.000098$ que personne n'ait gagné après dix lancers (5 chacun), le seul cas favorable étant $FPFPFPFPFP$.
4. C'est un calcul de probabilité conditionnelle : la probabilité que A gagne vaut $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\frac{1}{128}+\frac{1}{512}=\frac{341}{512}$; la probabilité que quelqu'un ait gagné est le complémentaire de la probabilité calculée à la question précédente, elle vaut $1-\frac{1}{2^{10}}=\frac{1\ 023}{1\ 024}$. La probabilité conditionnelle cherchée est donc de $\frac{341}{512}\times\frac{1\ 024}{1\ 023}=\frac{2}{3}$. Je vous laisse voir pourquoi ce résultat est intuitivement normal.

Exercice 9 (***)

1. Puisque tout est distingable, il y a 4 possibilités de rangement pour chaque boule, soit $4^5 = 1\ 024$ rangements possibles au total. Autrement dit, $|\Omega| = 1\ 024$.
2. Il y a quatre rangements pour lesquels toutes les boules sont dans la même boite (un pour chaque boite), soit une probabilité de $\frac{4}{1\ 024}=\frac{1}{256}\simeq 0.004$.
3. Commençons par choisir les deux boites non vides, ce qui laisse $\binom{4}{2}=6$ possibilités. Une fois ce choix effectué, il y a 2^5 façons de caser les cinq boules dans nos deux boites, mais il faut en enlever deux si on veut que nos deux boites ne soient pas vides (les deux pour lesquelles une des deux boites recueille toutes les boules). Cela fait donc finalement $6\times(2^5-2)$ cas favorables, soit une probabilité de $\frac{6\times 30}{1\ 024}=\frac{45}{256}\simeq 0.178$.
4. On peut répartir les cinq boules comme suit si on veut exactement une boite vide : $3-1-1-0$ ou $2-2-1-0$. Dans le premier cas, il faut choisir la boite contenant trois boules (4 choix), les trois boules en question ($\binom{5}{3}=10$ choix), la boite contenant la quatrième boule (3 choix) et la boite contenant la dernière boule (2 choix ; si on veut on peut remplacer ces derniers choix par le choix des deux boites non vides puis de la boule allant dans la première boite non vide, ce qui revient au même). Il y a donc $4\times 10\times 3\times 2 = 240$ répartitions $3-1-1-0$. Pour les $2-2-1-0$, il y a 4 choix pour la boite contenant une seule boule, 5 choix pour la boule allant dans cette boite, 3 choix pour la boite vide, et enfin $\binom{4}{2}=6$ choix pour les deux boules allant dans la première des deux boites restantes, soit $4\times 5\times 3\times 6 = 360$ possibilités. Finalement la probabilité d'avoir exactement une boite vide est de $\frac{360}{1\ 024}=\frac{45}{128}\simeq 0.352$.
5. On a calculé successivement les probabilités d'avoir trois, deux et une boite vide. Comme on ne peut pas avoir quatre boites vides, la probabilité de ne pas avoir de boite vide est complémentaire de la somme des précédentes, elle vaut $\frac{1\ 024-4-180-600}{1\ 024}=\frac{240}{1\ 024}=\frac{15}{64}\simeq 0.234$.
6. Notons A_1 « La première boite est vide » et ainsi de suite jusqu'à A_4. Le nombre de cas favorables à A_1 est $3^5 = 243$ (il faut caser les cinq boules dans trois boites), donc $P(A_1)=\frac{243}{1\ 024}$. De même pour A_2, A_3 et A_4. Par un raisonnement similaire, le nombre de cas favorables à $A_1\cap A_2$ est $2^5 = 32$, donc $P(A_1\cap A_2)=\frac{32}{1\ 024}$, et de même pour les autres intersection de deux

évènements. Enfin, $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \dfrac{1}{1\,024}$, et de même pour les autres intersections de trois évènements. Enfin, $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$ est impossible. On peut appliquer la formule de Poincaré : $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_4) - P(A_2 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_4) - P(A_3 \cap A_4) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + P(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + P(A_2 \cap A_3 \cap A_4) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \dfrac{4 \times 243 - 6 \times 32 + 4 \times 1 - 0}{1\,024} = \dfrac{784}{1\,024} = \dfrac{49}{64}$.
La probabilité cherchée est le complémentaire de celle que nous venons de calculer, on retrouve $\dfrac{15}{64}$ comme à la question précédente.

Exercice 10 (***)

1. Pour cette question, seul le premier tour nous intéresse. Celui-ci est constituée de 32 matchs faisant s'affronter deux joueurs. Peu importe dans quel ordre ces deux joueurs ont été tirés. Il y a $\dbinom{64}{2}$ possibilités pour le tirage du premier match, $\dbinom{32}{2}$ pour le deuxième etc, jusqu'à $\dbinom{2}{2}$ pour le dernier match. Comme on se fiche de l'ordre des matchs, on peut diviser par 32! (le nombre d'ordres possibles) pour obtenir un total de possibilités de $\dfrac{64 \times 63}{2} \times \dfrac{62 \times 61}{2} \times \cdots \times \dfrac{2 \times 1}{2} \times \dfrac{1}{32!} = \dfrac{64!}{2^{32} \times 32!}$ tirages possibles.
   Si on ne veut pas que deux têtes de séries se rencontrent, il y 56 choix possibles pour l'adversaire de la première tête de série (8 joueurs sur 64 sont têtes de série, donc 56 ne le sont pas), 55 pour l'adversaire de la deuxième tête de série, etc jusqu'à 49 pour l'adversaire de la huitième tête de série. Il reste ensuite à répartir les 48 concurrents restants en 24 paires, ce qui se fait de $\dfrac{48!}{2^{24} \times 24!}$ façons (cf le calcul ci-dessus). La probabilité qu'il n'y ait pas de matchs opposant deux têtes de séries vaut donc $\dfrac{56!}{48!}\dfrac{48!}{2^{24} \times 24!} \times \dfrac{2^{32} \times 32!}{64!} = \dfrac{2^8 \times 25 \times 26 \times \cdots \times 32}{57 \times 58 \times \cdots \times 64} \simeq 0.608$. La probabilité cherchée est le complémentaire de celle-ci, elle vaut environ 0.392.
2. Cette fois-ci, tout ce qui nous intéresse est que nos huit têtes de série soient dans des huitièmes de tableau différents. Il y a huit huitièmes de tableau constitués chacun de huit joueurs. Si on se fiche de l'ordre à l'intérieur de chaque huitième de tableau et de l'ordre des huitièmes de tableau, il y a $\dbinom{64}{8} \times \dbinom{56}{8} \times \cdots \times \dbinom{8}{8} \times \dfrac{1}{8!} = \dfrac{64!}{8! \times 56!} \times \dfrac{56!}{48! \times 8!} \times \cdots \times \dfrac{8!}{8! \times 0!} \times \dfrac{1}{8!} = \dfrac{64!}{(8!)^9}$ possibilités. Si on impose une tête de série dans chaque huitième de tableau, il reste à répartir les 56 concurrents restants en 8 paquets de 7, ce qui se fait de $\dfrac{56!}{(7!)^8 \times 8!}$ (calcul très similaire au précédent), et à multiplier par 8! pour distribuer aléatoirement les huit têtes de série dans chacun de ces paquets. La probabilité cherchée vaut $\dfrac{56!}{(7!)^8} \times \dfrac{(8!)^9}{64!} = \dfrac{8^8 \times 8!}{57 \times 58 \times \cdots \times 64} \simeq 0.00379$. Autant dire que c'est très improbable.

Exercice 11 (*)

Pour bien comprendre comment ça se passe le mieux est de commencer par retraduire clairement l'énoncé en utilisant les notations ensemblistes vues en cours. Notons ici A l'événement « être malade » et B l'événement « être testé positif ». L'énoncé nous donne les probabilités suivantes : $P(A) = 0.01$; $P_A(B) = 0.95$ et $P_{\bar{A}}(B) = 0.001$. On peut calculer la probabilité de B en utilisant la formule des probabilités totales : $P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B) = 0.01 \times 0.95 + (1 - 0.01) \times 0.001 = 0.01049$. La probabilité qui nous est demandée est $P_B(A)$, qui va être obtenue par la formule de Bayes : $P_B(A) = \dfrac{P(A) \times P_A(B)}{P(B)} = \dfrac{0.95 \times 0.01}{0.1049} \simeq 0.91$. On a donc une grosse majorité des gens testés positifs qui sont malades, mais les faux positifs ne sont pas vraiment négligeables.

En modifiant les données c'est encore nettement pire : désormais $P(A) = 0.001$ et $P_{\bar{A}}(B) = 0.005$. On obtient alors $P(B) = 0.001 \times 0.95 + 0.999 \times 0.005 = 0.005945$, puis $P_A(B) = \dfrac{0.001 \times 0.95}{0.005945} \simeq 0.16$. Cette fois-ci, seul une personne sur six ayant testée positive est effectivement malade ! C'est en fait normal : il y a une personne sur 1 000 qui est malade (et sera donc quasi certainement testée positive) mais parmi les non malades, cinq personnes sur 1 000 sont testées positives, ce qui fait à peu près cinq fois plus de gens que la quantité de malades.

Exercice 12 (**)

L'univers est contitué des $\dbinom{32}{5}$ tirages possibles de 5 cartes parmi 32. Notons A l'événement « tirer quatre As ». On a $|A| = 28$ (on tire 4 As parmi les quatre disponibles et une cinquième carte parmi les 28 qui restent) donc $P(A) = \dfrac{28}{\binom{32}{5}} \simeq 0.00014$. Notons maintenant B : « on tire au moins deux As ». La deuxième question nous demande de calculer $P_B(A)$. Il faut donc calculer $P(B)$. On a $|B| = \binom{4}{2} \times \binom{28}{3} + \binom{4}{3} \times \binom{28}{2} + 28$ (on a séparé selon que le joueur tirait exactement deux As, trois As ou les quatre As), donc $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A)}{P(B)} = \dfrac{28}{\binom{4}{2} \times \binom{28}{3} + \binom{4}{3} \times \binom{28}{2} + 28} \simeq 0.0013$. En comparaison, la probabilité d'obtenir deux As en tirant trois cartes dans un jeu de 32 vaut $\dfrac{\binom{4}{2} \times \binom{28}{1}}{\binom{32}{3}} \simeq 0.033$, elle est beaucoup plus élevée ! C'est tout à fait normal, car le joueur qui montre deux As a pu les choisir parmi les cinq cartes de son jeu, ce qui fait que tous les tirages de cinq cartes contenant deux As au moins permettent d'en étaler deux sur la table.

Exercice 13 (*)

Notons S l'évènement « L'individu est sans opinion » ; P : « Il est favorable à la paix » et G : « Il est favorable à la guerre ». On notera également A et B les évènements correspondant à l'appartenance à l'un des deux pays.

1. C'est une simple application de la formule des probabilités totales : $P_A(S) = 1 - P_A(G) - P_A(P) = 1 - 0.16 - 0.6 = 0.24$, et de même $P_B(S) = 0.2$, donc $P(S) = P(A) \times P_A(S) + P(B) \times P_B(S) = 0.5 \times 0.24 + 0.5 \times 0.2 = 0.22$.
2. C'est cette fois-ci la formule de Bayes qui va être utile : $P(G) = P(A) \times P_A(G) + P(B) \times P_B(G) = 0.5 \times 0.16 + 0.5 \times 0.68 = 0.42$, donc $P_G(A) = \dfrac{P(A) \times P_A(G)}{P(G)} = \dfrac{0.5 \times 0.16}{0.42} \simeq 0.19$ (la probabilité de G ayant été calculée comme au-dessus à l'aide des probabilités totales)
3. Même chose qu'au-dessus : $P(P) = 0.5 \times 0.6 + 0.5 \times 0.12 = 0.36$, donc $P_P(A) = \dfrac{P(A) \times P_A(P)}{P(P)} = \dfrac{0.5 \times 0.6}{0.36} \simeq 0.83$.

Exercice 14 (***)

Il faut utiliser la formule des probabilités totales : pour chaque entier k, on a une chance sur n de tirer l'urne numéro k, et une fois cette urne choisie, la probabilité de tirer deux boules rouges à l'intérieur vaut $\dfrac{\binom{n-k}{2}}{\binom{n}{2}}$ (n boules au total, donc $\dbinom{n}{2}$ tirages possibles, dont $\dbinom{n-k}{2}$ où l'on tire deux boules rouges). On a donc une probabilité totale de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \frac{\binom{n-k}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{2}{n^2(n-1)} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-k}{2}$. Or, en faisant le changement de variable $k \to n-k$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n-k}{2} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{k}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}k(k-1) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(k^2 - k) = \frac{(n-1)n(2n-1)}{12} - \frac{(n-1)n}{4}$. La probabilité recherchée vaut donc $\dfrac{2n-1}{6n} - \dfrac{1}{2n} = \dfrac{2n-4}{6n}$. Plus intéressant, la limite quand n tend vers $+\infty$ de cette probabilité vaut $\dfrac{1}{3}$. Autrement dit, quand n devient grand, on se rapproche d'une situation où obtenir deux boules rouges, deux blanches ou une de chaque couleur est équiprobable.

Si le tirage s'effectue avec remise, la probabilité d'obtenir deux boules rouges lorsqu'on tire dans l'urne numéro k vaut désormais $\left(\dfrac{n-k}{n}\right)^2$, soit une probabilité totale de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{n-k}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(n^2+k^2-2nk) = \frac{1}{n^3}\left(n^3 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n^2(n+1)\right) = 1 + \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} - \frac{n+1}{n} = \frac{(n+1)(2n+1)-6n}{6n^2} = \frac{2n^2-3n+1}{6n^2}$. Cette probabilité a également pour limite $\dfrac{1}{3}$.

Exercice 15 (**)

Notons T l'évènement « On lance un dé truqué » et N : « On lance un dé normal ». D'après l'énoncé, on a $P(T) = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$ et $P(N) = \dfrac{4}{5}$. De plus, $P_T(6) = \dfrac{1}{2}$ et $P_T(1) = P_T(2) = P_T(3) = P_T(4) = P_T(5) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{10}$.

1. Probabilités totales : $P(6) = P(N) \times P_N(6) + P(T) \times P_T(6) = \dfrac{4}{5} \times \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{5} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{30} \simeq 0.23$.
2. Formule de Bayes : $P_6(T) = \dfrac{P(T) \times P_T(6)}{P(6)} = \dfrac{\frac{1}{5} \times \frac{1}{2}}{\frac{7}{30}} = \dfrac{3}{7} \simeq 0.42$.
3. Probabilités totales puis Bayes : $P(2) = P(N) \times P_N(2) + P(T) \times P_T(2) = \dfrac{4}{5} \times \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{5} \times \dfrac{1}{10} = \dfrac{23}{150}$
   $P_2(N) = \dfrac{P(N) \times P_N(2)}{P(2)} \dfrac{\frac{4}{5} \times \frac{1}{6}}{\frac{23}{150}} = \dfrac{20}{23} \simeq 0.87$ (pour calculer la probabilité d'obtenir un 2, on a utilisé les probabilités totales).

Exercice 16 (**)

Il s'agit une fois de plus d'une combinaison de probabilités totales et de formule de Bayes. Notons A : « On tire dans la première urne » et B : « On tire deux boules rouges ». On a $P(A) = \dfrac{1}{2}$; $P_A(B) = \dfrac{6}{9} \times \dfrac{5}{8} = \dfrac{5}{12}$ et $P_{\bar{A}}(B) = \dfrac{3}{9} \times \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{12}$. On en déduit dans un premier temps $P(B) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{5}{12} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{4}$, puis $P_B(A) = \dfrac{\frac{1}{2} \times \frac{5}{12}}{\frac{1}{4}} = \dfrac{5}{6}$.

Dans le cas où on effectue une remise, le raisonnement est le même mais, en gardant les mêmes notations, $P_B(A) = \dfrac{6}{9} \times \dfrac{6}{9} = \dfrac{4}{9}$ et $P_{\bar{A}}(B) = \dfrac{3}{9} \times \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{9}$. On en déduit dans un premier temps $P(B) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{4}{9} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{9} = \dfrac{5}{18}$, puis $P_B(A) = \dfrac{\frac{1}{2} \times \frac{4}{9}}{\frac{5}{18}} = \dfrac{4}{5}$. La probabilité est légèrement plus faible que dans le cas du tirage avec remise.

Exercice 17 (**)

Commençons par traduire les hypothèses de l'énoncé : au jour 0, la place n'est pas réservée, donc $p_0 = 1$. Ensuite, en notant A_n l'évènement « La place est réservée au jour n », l'énoncé stipule que $P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{9}{10}$ et $P_{\bar{A_n}}(A_{n+1}) = \frac{4}{10}$. La formule des probabilités totales donne alors la formule de récurrence : $p_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\bar{A_n}) \times P_{\bar{A_n}}(A_{n+1}) = \frac{9}{10} \times p_n + \frac{4}{10} \times (1 - p_n) = 0.5p_n + 0.4$. La suite (p_n) est donc arithmético-géométrique, d'équation caractéristique $x = 0.5x + 0.4$, ce qui donne $x = 0.8$. On introduit la suite auxiliaire $b_n = p_n - 0.8$, qui vérifie $b_{n+1} = p_{n+1} - 0.8 = 0.5p_n + 0.4 - 0.8 = 0.5(p_n - 0.8) = 0.5b_n$. La suite (b_n) est donc géométrique de raison 0.8 et de premier terme $b_0 = -0.8$, donc $b_n = -0.8 \times (0.5)^n$ et $p_n = b_n + 0.8 = 0.8 \times (1 - 0.5^n)$. On constate que la limite de la suite p_n vaut 0.8 et que la suite est croissante, c'est-à-dire que la proportion de places réservées dans l'avion va augmenter, mais en ne dépassant pas un plafond de 80%.

Exercice 18 (***)

1. Un petit schéma peut aider, mais n'est pas obligatoire. On a bien sûr $a_0 = 1$ et $b_0 = c_0 = 0$ puisque la guêpe se trouve dans la pièce A au départ. Ensuite, on utilise l'énoncé, on a donc $a_1 = \frac{1}{3}$, $b_1 = \frac{2}{3}$ et $c_1 = 0$. Pour l'étape suivante, il faut utiliser la formule des probabilités totales : $a_2 = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) + P(B_1) \times P_{B_1}(A_2) + P(C_1) \times P_{C_1}(A_2) = \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{4}b_1 = \frac{1}{9} + \frac{1}{6} = \frac{5}{18}$; de même, $b_2 = \frac{2}{3}a_2 + \frac{1}{2}b_2 = \frac{2}{9} + \frac{1}{3} = \frac{5}{9}$; enfin $c_2 = \frac{1}{4}b_1 = \frac{1}{6}$ (on note que $a_2 + b_2 + c_2 = \frac{5}{18} + \frac{5}{9} + \frac{1}{6} = 1$, ce qui est plutôt rassurant).
2. Il s'agit d'une simple généralisation du cas précédent utilisant toujours les probabilités totales : $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n$; $b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n$ et $c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n + c_n$.
3. Pour montrer que u_n est constante, le pus simple est de calculer u_{n+1}. On a $u_{n+1} = \frac{6}{10}a_{n+1} - \frac{3}{10}b_{n+1} = \frac{6}{10}\left(\frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n\right) - \frac{3}{10}\left(\frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n\right) = \frac{2}{10}a_n + \frac{3}{20}b_n - \frac{2}{10}a_n - \frac{3}{20}b_n = 0$. La suite u_n est donc nulle (au moins à partir de $n = 1$).
4. Tentons d'exprimer v_{n+1} en fonction de v_n. On a $v_{n+1} = \frac{4}{10}a_{n+1} + \frac{3}{10}b_{n+1} = \frac{4}{10}\left(\frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n\right) + \frac{3}{10}\left(\frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n\right) = \frac{4}{30}a_n + \frac{1}{10}b_n + \frac{2}{10}a_n + \frac{3}{20}b_n = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n = \frac{5}{6}\left(\frac{4}{10}a_n + \frac{3}{10}b_n\right)$. La suite v_n est donc géométrique de raison $\frac{5}{6}$ et de premier terme $v_0 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$, donc $v_n = \frac{2}{5} \times \left(\frac{5}{6}\right)^n$.
5. On constate que $u_n + v_n = a_n$, donc $a_n = \frac{2}{5} \times \left(\frac{5}{6}\right)^n$ et, comme $u_n = 0$, $b_n = 2a_n = \frac{4}{5} \times \left(\frac{5}{6}\right)^n$.
6. On a bien entendu $c_n = 1 - a_n - b_n = 1 - 3a_n = 1 - \frac{6}{5} \times \left(\frac{5}{6}\right)^n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$. Cette probabilité tend vers 1 quand n tend vers l'infini.

Exercice 19 (***)

Le nombre de jetons dans la poignée tirée peut varier entre 0 et n. Notons donc, $\forall i \in \{0; 1; \dots; n\}$, A_i l'évènement « On a tiré une poignée contenant i jetons ». L'énoncé stipule que ces évènements sont équiprobables, autrement dit que $P(A_i) = \frac{1}{n+1}$. On notera par ailleurs simplement 1 l'évènement

« On tire le jeton numéro 1 ». On a $P_{A_i}(1) = \dfrac{i}{n}$ (si on tire une poignée de i jetons et qu'il y en a n au total, on a i chances sur n qu'un jeton précis soit tiré ; si vous n'êtes pas convaincus, on peut aussi dire que $|A_i| = \dbinom{n}{i}$ et $|A_i \cap B| = \dbinom{n-1}{i-1}$ puisqu'une fois choisi le jeton 1, il reste $i-1$ jetons à tirer parmi les $n-1$ restants dans l'urne, donc $P_{A_i}(1) = \dfrac{\binom{n-1}{i-1}}{\binom{n}{i}} = \dfrac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} \times \dfrac{i!(n-i)!}{n!} = \dfrac{i}{n}$). Les évènements A_i formant un système complet d'évènements, on peut appliquer la formule des probabilités totales : $P(1) = \displaystyle\sum_{i=0}^{i=n} P(A_i) \times P_{A_i}(1) = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{1}{n+1} \times \frac{i}{n} = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{i=0}^{i=n} i = \frac{1}{n(n+1)} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}$. Ce résultat est en fait assez prévisible : si tous les nombres de jetons possibles sont équiprobables, on tirera en moyenne la moitié des jetons, et on donc autant de chances de tirer le numéro 1 que de ne pas le tirer.

On a bien sûr de même $P(2) = \dfrac{1}{2}$. Pour déterminer si le tirage des jetons 1 et 2 est indépendant, le plus simple est de calculer $P(1 \cap 2)$ et de regarder si on obtient la même valeur qu'en faisant $P(1) \times P(2)$. Le calcul de $P(1 \cap 2)$ est très similaire à celui effectué ci-dessus : $|A_i \cap 1 \cap 2| = \dbinom{n-2}{i-2}$, donc $P_{A_i}(1 \cap 2) = \dfrac{\binom{n-2}{i-2}}{\binom{n}{i}} = \dfrac{(n-2)!}{(i-2)!(n-i)!} \times \dfrac{i!(n-i)!}{n!} = \dfrac{i(i-1)}{n(n-1)}$. On applique ensuite la formule des probabilités totales pour obtenir $P(1 \cap 2) = \displaystyle\sum_{i=0}^{i=n} \frac{1}{n+1} \times \frac{i(i-1)}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)(n+1)} \sum_{i=0}^{i=n} i^2 - i = \frac{1}{n(n-1)(n+1)} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right) = \frac{2n+1-3}{6(n-1)} = \frac{1}{3}$. Cette probabilité étant différente de $P(1) \times P(2) = \dfrac{1}{4}$, les deux évènements ne sont pas indépendents. Autre façon de voir les choses : $P_1(2) = \dfrac{P(1 \cap 2)}{P(1)} = \dfrac{2}{3}$. On peut interpréter ce résultat ainsi : si le jeton 1 a été tiré, il est plus probable qu'on ait tiré une grosse poignée qu'une petite poignée, ce qui augmente nettement la probabilité que le jeton 2 ait également été tiré (mais pour être tout à fait honnête, ce résultats n'était pas évident à prévoir).

Dans le cas où ce sont les poignées qui sont équiréparties, comme il existe 2^n poignées (autant que de sous-ensemble de l'ensemble des n jetons placés dans l'urne, chaque poignée a une probabilité 2^n d'être tirée. Comme il existe $\dbinom{n}{i}$ poignées contenant i jetons, on a donc $P(A_i) = \dfrac{\binom{n}{k}}{2^n}$. On peut alors effectuer le même type de calcul que précédemment à l'aide des probabilités totales (la probabilité conditionnelle $P_{A_i}(1)$ n'a pas de raison d'avoir changé) : $P(1) = \displaystyle\sum_{i=0}^{i=n} \frac{1}{2^n} \binom{n}{i} \times \frac{i}{n} = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{i=n} \frac{n!}{i!(n-i)!} \times \frac{i}{n} = \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} = \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{i=n} \binom{n-1}{i-1} = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0} i = n-1 \binom{n-1}{i} = \frac{1}{2^n} \times 2^{n-1} = \frac{1}{2}$. On a utilisé vers la fin de calcul le fait que $\displaystyle\sum_{i=0} i = p \binom{p}{i} = 2^p$, qui est un résultat classique. On retrouve donc la même probabilité que tout à l'heure, ce qui est en fait normal si on se souvient que les coefficients binomiaux ont une propriété de symétrie : on a autant de chances de tirer une poignée à 0 éléments qu'une poignée à n éléments, une poignée à 1 élément qu'une à $n-1$ éléments etc, ce qui donnera toujours en moyenne une chance sur deux de tirer un jeton donné.

Comme tout à l'heure, on aura donc $P(1) \times P(2) = \dfrac{1}{4}$, et on cherche à calculer $P(1 \cap 2)$, toujours avec les probabilités totales en utilisant le système complet d'évènements A_i : $P(1 \cap 2) =$

$\sum_{i=0}^{i=n} \frac{1}{2^n} \binom{n}{i} \frac{i(i-1)}{n(n-1)} = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{i=n} \frac{n!}{i!(n-i)!} \times \frac{i(i-1)}{n(n-1)} = \frac{1}{2^n} \sum_{i=2}^{i=n} \frac{(n-2)!}{(i-2)!(n-i)} = \frac{1}{2^n} \sum_{i=2}^{i=n} \binom{n-2}{i-2} = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{i=n} \binom{n-2}{i} = \frac{2^{n-2}}{2^n} = \frac{1}{4}$. Cette fois-ci, les deux évènements sont indépendants. Comme j'en entends déjà qui se demandent « Mais pourquoi l'argument donné tout l'heure pour justifier que les évènements n'étaient pas indépendants ne serait-il plus valable dans ce cas ? », j'essaie de leur répondre : ici, la probabilité de tirer un certain nombre de jetons est fortement pondéré par le nombre de poignées contenant ce nombre de jetons. Ainsi, si on sait qu'on a tiré le jeton 1, on sait simplement que la poignée choisie fait partie de la moitié des poingées qui contiennent le jeton 1. Mais parmi celles-ci, il y en a exactement la moitié qui contiennent le jeton 2 et la moitié qui ne le contiennent pas ! En effet, parmi les sous-ensembles contenant le jeton 1, il y en a autant qui contiennent le jeton 2 et qui ne le contiennent pas, et contrairement à tout à l'heure on affecte la même probabilité à chacune.

Feuille d'exercices n°13 : Matrices

ECE3 Lycée Carnot

14 janvier 2011

Exercice 1 (*)

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.
Calculer tous les produits de deux matrices possibles à l'aide de ces matrices.

Exercice 2 (*)

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^k pour toute valeur de $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 (**)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer toutes les matrices dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A.

Exercice 4 (**)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Déterminer toutes les matrices B dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AB = 0$.
2. Déterminer toutes les matrices C dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AC = CA = 0$.

Exercice 5 (**)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ecrire A sous la forme $I_4 + B$, où B est une matrice nilpotente, et en déduire l'expression de A^p.Écrire explicitement la matrice A^{10}.

Exercice 6 (***)

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $(a \in \mathbb{R})$. Montrer que $(A+I)^3 = 0$. En déduire l'expression de A^p.

Exercice 7 (***)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe une suite de réels (a_p) telle que
$A^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_p & 1-2a_p & 2a_p \\ a_p & -a_p & a_p+1 \end{pmatrix}$. Calculez a_p et en déduire A^p.

Exercice 8 (***)

Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & -4 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^3 = 6A - A^2$.
2. Montrer qu'il existe deux suites a_k et b_k telles que $A^k = a_k A^2 + b_k A$ (pour $k \geqslant 2$).
3. Trouver des relations de récurrence pour a_k et b_k et en déduire leurs valeurs.
4. En déduire l'expression de A^k. Reste-t-elle valable pour $k = 0$ et pour $k = 1$?

Exercice 9 (***)

Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3 et en déduire les puissances de A.
2. On pose $B = 2I + A$. Déterminer les puissances de la matrice B.
3. Soient (a_n), (b_n) et (c_n) les suites définies pour $n \geqslant 1$ par $\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{n+1} & = & 2a_n & & & & \\ b_n & = & 2a_n & + & 2b_n & & \\ c_n & = & & & b_n & + & 2c_n \end{array}\right.$.
   Déterminer les valeurs prises par ces suites en fonction de n, a_1, b_1 et c_1 (utilisez les questions précédentes).

Exercice 10 (***)

La trace d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, notée $Tr(A)$ est la somme de ses coefficients diagonaux.

1. Montrer que, $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A)$.
2. Montrer que, si A et B sont des matrices carrées de même taille, $Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$.
3. Sous les mêmes hypothèses, montrer que $Tr(AB) = Tr(BA)$.
4. Montrer qu'il n'existe pas de matrices A et B vérifiant $AB - BA = I$.

Exercice 11 (***)

Soit a un nombre réel et $M_a = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le réel non nul a_0 pour lequel $M_{a_0}^2 = M_{a_0}$.
2. On pose $P = M_{a_0}$ et $Q = I - P$. Montrer qu'il existe un réel α tel que $M_a = P + \alpha Q$.
3. Calculer P^2, Q^2, PQ et QP.
4. Calculer M_a^k.

Corrigé de la feuille d'exercices n°13

Exercice 1 (*)

C'est du simple calcul, on obtient $AB = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 \\ -7 & 3 & 1 \\ -10 & 1 & -3 \end{pmatrix}$; $AD = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -9 & 2 \\ -8 & -1 \end{pmatrix}$; $BA = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$; $BC = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 12 \\ -4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$; $CA = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ -3 & 14 \\ -1 & -7 \end{pmatrix}$; et $DB = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 7 \\ -10 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 (*)

On a $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = I$, puis les puissances de A sont périodiques, égales successivement à A, A^2 et I, ce qu'on peut écrire : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^{3k} = I$; $A^{3k+1} = A$ et $A^{3k+2} = A^2$.

Exercice 3 (**)

Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ une matrice dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on calcule $AM = \begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ 3x+4z & 3y+4t \end{pmatrix}$ et $MA = \begin{pmatrix} x+3y & 2x+4y \\ z+3t & 2z+4t \end{pmatrix}$. Pour que les deux matrices soient égales, il faut que leurs coefficients soient égaux deux à deux, ce qui nous amène à résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2z & = & x & + & 3y \\ y & + & 2t & = & 2x & + & 4y \\ 3x & + & 4z & = & z & + & 3t \\ 3y & + & 4t & = & 2z & + & 4t \end{array} \right.$$

Les deux équations extrêmes sont équivalentes à $z = \frac{3}{2}y$, et les deux du milieu se ramènent alors à la même équation $x+z = t$. Les solutions sont donc tous les quadruplets de la forme $\left\{x, y, \frac{3}{2}y, x + \frac{3}{2}y\right\}$, où x et y sont deux réels quelconques.

Exercice 4 (**)

1. Soit donc une matrice $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. On a alors $AB = \begin{pmatrix} a+2d & b+2e & c+2f \\ 2a+d & 2b+e & 2c+f \\ d & e & f \end{pmatrix}$. Pour que la matrice AB soit nulle, il faut donc avoir $d = e = f = 0$, puis $a = b = c = 0$. Autrement dit, les deux premières lignes de B doivent être nulles, et la troisième est quelconque.
2. D'après la question précédente, C doit être de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Si on effectue le produit CA pour une telle matrice, on obtient $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ g+2h & 2g+h+i & 0 \end{pmatrix}$. Pour que ce produit soit

nul, il faut donc avoir $g = -2h$ et $i = -2g - h = 3h$, soit $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2h & h & 3h \end{pmatrix}$, le réel h étant quelconque.

Exercice 5 (**)

On a $A = I+B$ avec $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Un calcul peu passionnant donne $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis les puissances supérieures de B sont nulles. On a donc, via le binôme de Newton (les matrices B et I commutant bien entendu), $A^k = (B+I)^k = \binom{k}{0} I^k + \binom{k}{1} BI^{k_1} + \binom{k}{2} B^2 I^{k-2} + \binom{k}{3} B^3 I^{k-3} = I + kB + \frac{k(k-1)}{2} B^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{6} B^3$ (les termes suivants étant nuls), soit (attention les yeux) :

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 2k & 3k + 2k(k-1) & 4k + 6k(k-1) + \frac{4}{3}k(k-1)(k-2) \\ 0 & 1 & 2k & 3k + 2k(k-1) \\ 0 & 0 & 1 & 2k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Notamment, $A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 20 & 210 & 1\,540 \\ 0 & 1 & 20 & 210 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 6 (***)

On calcule (pour changer) $A + I = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $(A+I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & a \\ 0 & -a & -a \end{pmatrix}$, et la puissance suivante est bien nulle. Autrement dit, $A = B - I$, où B est une matrice nilpotente. On peut donc utiliser Newton : $A^k = (B-I)^k = (-I)^k + kB(-I)^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2} B^2 (-I)^{k-2} = (-1)^k \left(I - kB + \frac{k(k-1)}{2} B^2 \right)$, soit encore

$$A^k = (-1)^k \begin{pmatrix} 1 & -ka & -ka \\ -k & 1 + \frac{k(k-1)}{2} a & \frac{k(k-1)}{2} a \\ k & -\frac{k(k-1)}{2} a & 1 - \frac{k(k-1)}{2} a \end{pmatrix}$$

Exercice 7 (***)

On procède naturellement par récurrence. Cherchons donc à prouver la propriété P_k : il existe un réel que l'on notera a_k, tel que la matrice A^k soit de la forme $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_k & 1 - 2a_k & 2a_k \\ a_k & -a_k & a_k + 1 \end{pmatrix}$. Pour

$k=1$, en posant $a_1=3$, on a bien $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2\times 3 & 1-2\times 3 & 2\times 3 \\ 3 & -3 & 3+1 \end{pmatrix}$, donc la propriété P_1 est vérifiée. Supposons désormais que P_k est vérifiée, alors $A^{k+1}=A\times A^k=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6-4a_k & -5+4a_k & 6-4a_k \\ 3-2a_k & -3+2a_k & 4-2a_k \end{pmatrix}$.
Si on appelle a_{k+1} le réel défini par $a_{k+1}=3-2a_k$, A^{k+1} vérifie bien la propriété demandée puisque $A^{k+1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2\times(3-2a_k) & 1-2(3-2a_k) & 2(3-2a_k) \\ 3-2a_k & -(3-2a_k) & 3-2a_k+1 \end{pmatrix}$. La propriété P_{k+1} est donc vérifiée, donc par le principe de récurrence, P_k est vrai pour tout entier $k\geqslant 1$.

Ne reste plus qu'à calculer la valeur de a_k. La suite (a_k) est arithmético-géométrique d'équation caractéristique $x=3-2x$, dont la solution est $x=1$. On introduit donc la suite auxiliaire $b_k=a_k-1$, qui vérifie $b_{k+1}=a_{k+1}-1=(3-2a_k)-1=2-2a_k=-2(a_k-1)=-2b_k$. La suite (b_k) est donc une suite géométrique de raison -2. Par ailleurs, son deuxième terme est $b_1=2$ puisque $a_1=3$, donc $b_k=-(-2)^k$ et $a_k=1-(-2)^k$. La matrice A^k peu donc s'écrire sous la forme $A^k=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2\times(1-(-2)^k) & 1-2\times(1-(-2)^k) & 2\times(1-(-2)^k) \\ 1-(-2)^k & (-2)^k-1 & 2-(-2)^k \end{pmatrix}$.

Exercice 8 (***)

1. On commence par un peu de calcul : $A^2=\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -8 & 6 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^3=\begin{pmatrix} -18 & 9 & 9 \\ 44 & -18 & -26 \\ -26 & 9 & 7 \end{pmatrix}$.
   Il est désormais facile de vérifier l'égalité demandée.

2. On va bien sûr procéder par récurrence. Notons P_k la propriété « Il existe deux réels a_k et b_k tels que $A^k=a_kA^2+b_kA$ ». Pour une fois on initialise la récurrence pour $k=2$: P_2 est bien vérifiée en posant $a_2=1$ et $b_2=0$ (on a bien $A^2=1\times A^2+0\times A$). Supposons P^k vérifiée, on a alors $A^{k+1}=A\times A^k=A\times(a_kA^2+b_kA)=a_kA^3+b_kA^2=a_k(6A-A^2)+b_kA^2=(b_k-a_k)A^2+6a_kA$, qui est bien de la forme demandée, ce qui achève la récurrence.

3. D'après la question précédente, on a les relations suivantes : $a_{k+1}=b_k-a_k$ et $b_{k+1}=6a_k$. On a donc $b_k=6a_{k-1}$ ce qui donne en remplaçant dans la première relation $a_{k+1}=-a_k+6a_{k-1}$, récurrence linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $x^2+x-6=0$, dont le discriminant vaut $\Delta=1+24=25$, et admet donc deux racines $r=\dfrac{-1+5}{2}=2$ et $s=\dfrac{-1-5}{2}=-3$. On a donc $a_k=\alpha 2^k+\beta(-3)^k$, avec $a_2=4\alpha+9\beta=1$ et $a_3=8\alpha-27\beta=-1$. En multipliant la première équation par 2 et en lui retranchant la deuxième, on obtient $45\beta=3$, soit $\beta=\dfrac{1}{15}$, puis $\alpha=\dfrac{1-9\beta}{4}=\dfrac{1-\frac{3}{5}}{4}=\dfrac{1}{10}$. On a donc $a_k=\dfrac{2^{k-1}-(-3)^{k-1}}{5}$, et $b_k=6\times\dfrac{2^{k-2}-(-3)^{k-2}}{5}$.

4. On se contentera d'écrire $A^k=\begin{pmatrix} 6a_k-2b_k & -3a_k+b_k & -3a_k+b_k \\ -8a_k+6b_k & 6a_k-2b_k & 2a_k-4b_k \\ 2a_k-4b_k & -3a_k+b_k & a_k+3b_k \end{pmatrix}$ sans préciser les valeurs. Pour $k=1$, on obtient avec les formules de la question précédente $a_1=0$ et $b_1=1$, ce qui donne $A=0\times A^2+1\times A$, ce qui est indiscutablement vrai. Et pour $k=0$, on obtient $a_0=\dfrac{1}{6}$ et $b_0=\dfrac{1}{6}$, et là ça ne marche plus...

Exercice 9 (***)

1. On obtient aisément $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis $A^3 = 0$.
2. On peut appliquer la formule du binome de Newton, les matrices I et A commutant : $B^n = (A+2I)^n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} A^k (2I)^{n-k} = I(2I)^n + nA(2I)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} A^2 I^{n-2} = 2^n I + n2^{n-1}A + n(n-1)2^{n-3}A^2$. Autrement dit, $B^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ n2^n & 2^n & 0 \\ n(n-1)2^{n-2} & n2^{n-1} & 2^n \end{pmatrix}$.
3. On peut en fait, en notant $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, écrire la relation de récurrence sous la forme $X_{n+1} = BX_n$, dont on déduit facilement (une petite récurrence) que $X_n = B^n X_0$, autrement dit $a_n = 2^n a_0$; $b_n = n2^n a_0 + 2^n b_0$ et $c_n = n(n-1)2^{n-2}a_0 + n2^{n-1}b_0 + 2^n c_0$.

Exercice 10 (***)

1. C'est très simple, mais faisons-le de manière formelle pour nous échauffer avant la suite. En fait, on a $Tr(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Ici, il suffit de constater que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda a_{ii} = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.
2. Pas de difficulté non plus, $Tr(A+B) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = Tr(A) + Tr(B)$.
3. Un peu plus rigolo : $Tr(AB) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} AB_{ii}$, avec $AB_{ii} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}$, donc $Tr(AB) = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i,k \leqslant n} a_{ik}b_{ki}$. De la même façon, on a $Tr(BA) = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i,k \leqslant n} b_{ik}a_{ki}$. Je vous laisse vous convaincre que les deux sommes sont égales.
4. Si une telle égalité était vérifiée, on aurait $Tr(AB - BA) = Tr(I) = n$. Mais d'après les questions précédentes, $Tr(AB - BA) = Tr(AB) - Tr(BA) = 0$, ce n'est donc pas possible.

Exercice 11 (***)

1. Calculons $M_a^2 = \begin{pmatrix} 1-4a+6a^2 & 2a-3a^2 & 2a-3a^2 \\ 2a-3a^2 & 1-4a+6a^2 & 2a-3a^2 \\ 2a-3a^2 & 2a-3a^2 & 1-4a+6a^2 \end{pmatrix}$. Le réel a_0 doit donc à la fois vérifier $1 - 4a_0 + 6a_0^2 = 1 - 2a_0$ et $2a_0 - 3a_0^2 = a_0$. La première équation se ramène à $6a_0^2 - 2a_0 = 0$, soit $2a_0(3a_0 - 1) = 0$, et a donc pour solutions 0 et $\frac{1}{3}$. La deuxième équation ayant les mêmes solutions, il y a bien une solution non nulle égale à $\frac{1}{3}$. Dans ce cas, tous les coefficients de M_{a_0} sont égaux à $\frac{1}{3}$.
2. On a donc $Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$. Pour avoir $M_a = P + \alpha Q$, on doit avoir, pour les

coefficients de la diagonale, $1 - 2a = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\alpha$, et pour les autres coefficients $a = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\alpha$. Les deux équations donnent $\alpha = 1 - 3a$. On en déduit que $M_a = P + (1 - 3a)Q$.

3. On a déjà vu que $P^2 = P$; on calcule que $Q^2 = Q$, $PQ = 0$ et $QP = 0$.
4. On a $M_a^2 = (P + \alpha Q)^2 = P^2 + \alpha PQ + \alpha QP + \alpha^2 Q^2 = P + \alpha^2 Q$. Par une récurrence facile (ou l'application directe de la formule du binome de Newton), on obtient $M_a^k = P + \alpha^k Q$: c'est donc vrai pour $k = 2$, et en le supposant vrai pour un certain entier k, on aura $M_a^{k+1} = M_A \times M_a^k = (P + \alpha Q)(P + \alpha^k Q) = P^2 + \alpha^k PQ + \alpha QP + \alpha^{k+1} Q^2 = P + \alpha^{k+1} Q$, ce qui achève la récurrence.

Feuille d'exercices n°14 : Limites et continuité

ECE3 Lycée Carnot

27 janvier 2011

Exercice 1 (* à **)

Calculer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{3x+1}}{(\ln x)^4}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}}{3x^2}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x^2+1) - 2\ln x$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x\ln x}{\sqrt{x}+1}$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+x^2)^{\frac{1}{x}}$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2\sqrt{x}}{\ln(1+x)}$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1+4x)}{x}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4 e^{-\sqrt{x}}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(1+\frac{1}{x})$
- $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{2x^2-3x+2}{x^2-9}$
- $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x^2-4}$
- $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{3x^2-4x+1}{x^2-1}$

Exercice 2 (** à ***)

Déterminer l'ensemble de définition, puis toutes les asymptotes ou branches infinies des fonctions suivantes :

- $f_1(x) = \dfrac{x^2+x\ln x}{x+1}$
- $f_2(x) = \dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$
- $f_3(x) = \ln(e^x+e^{-x})$
- $f_4(x) = \dfrac{x^3-2x^2+x}{x^2-1}$
- $f_5(x) = -3x+\ln x$
- $f_6(x) = \sqrt{x}+\ln x$
- $f_7(x) = \sqrt{\dfrac{2x+1}{x-1}}$
- $f_8(x) = \ln(x^2-3x+2)$

Exercice 3 (**)

Montrer que, $\forall x\in\mathbb{R}$, $1+x \leqslant e^x \leqslant 1+xe^x$. En déduire la valeur de $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$.

Montrer que, $\forall x \in]-1;+\infty[$, $\dfrac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$. En déduire la valeur de $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

Exercice 4 (*)

Déterminer des équivalents simples des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{x^2 + \ln x}{xe^{-x} + 2}$ en 0 et en $+\infty$
2. $g(x) = x(\ln(1+x))^4$ en 0 et en $+\infty$
3. $h(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$
4. $k(x) = x\ln(1+x) - (x+1)\ln x$

Exercice 5 (**)

Étudier la continuité des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4x^2+5x-4}{2x+1} & \text{si} \quad x \neq -\dfrac{1}{2} \\ 0 & \text{si} \quad x = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x - e^{\frac{1}{x}}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$
3. $f(x) = \begin{cases} x\ln\dfrac{x^2+1}{x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$
4. $f(x) = \begin{cases} \ln(\sqrt{x}-1) - \ln(x-1) & \text{si} \quad x > 1 \\ 0 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$
5. $f(x) = x + \sqrt{x - Ent(x)}$

Exercice 6 (**)

Peut-on prolonger les fonctions suivantes par continuité aux bornes de leur ensemble de définition ?

- $f(x) = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{3}{(x-1)^2}$
- $g(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{x+1}$
- $h(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{\sqrt{x+1}}$
- $k(x) = \dfrac{x\ln x}{x+1}$

Exercice 7 (**)

On considère la fonction f définie par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x > 0$, et $f(x) = 0$ si $x \leqslant 0$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$. Calculer sa dérivée et montrer qu'elle est aussi continue. Faire de même avec la dérivée seconde. Pour les motivés : prouver que, quel que soit l'entier $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ème de la fonction f est continue (mais là c'est du ****).

Exercice 8 (*)

Montrer que chacune des équations suivantes admet une solution sur l'intervalle I considéré.

1. $x^{2008} - x^{2007} = 1$ sur $I = [-1; 1]$.
2. $\ln x = \dfrac{x^2-5}{x+2}$ sur $I = [1; 10]$.

3. $3x = 1 + \ln(2 + x^2)$ sur $I = [0; 1]$.
4. $e^x = 2 + x$ sur $[\ln 2; 2\ln 2]$.
5. $x^3 - 3x^2 = -1$ sur $I = [-1; 1]$.

Déterminer par dichotomie (et en utilisant la calculatrice!) une valeur approchée à 0.01 d'une solution de chaque équation.

Exercice 9 (***)

On définit, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n par $f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ a une seule solution strictement positive, qu'on notera désormais u_n.
2. Calculer u_1 et u_2 et vérifier que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in \left]0; \frac{2}{3}\right[$.
3. Montrer que, $\forall x \in]0; 1[$, $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.
4. Que peut-on en déduire concernant la suite u_n ?
5. Montrer que u_n est convergente vers une limite qu'on notera l.
6. Déterminer la limite de u_n^n et en déduire la valeur de l.

Exercice 10 (***)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x - 2 + \ln x$.

1. Calculez $f(1)$ et $f(3)$. Que peut-on en déduire ?
2. Montrez que l'équation $f(x) = 0$ possède en fait une unique solution α sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. À l'aide de la calculatrice et en procédant par dichotomie (décrivez les étapes), déterminez une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
4. Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$. On note g la réciproque de f, déterminer la continuité, le tableau de variation et les limites de g.
5. Déterminez $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et en déduire $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{f(g(t))}{g(t)}$. En déduire un équivalent de g en $+\infty$.

Exercice 11 (**)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x + x$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à expliciter.
2. Justifier que pour tout entier positif n, l'équation $f(x) = n$ possède une unique solution que l'on notera par la suite x_n.
3. Déterminer la monotonie de la suite x_n.
4. Démontrer que $\forall n \geqslant 1$, $\ln(n - \ln n) \leqslant x_n \leqslant \ln n$.
5. En déduire la limite de la suite (x_n) puis un équivalent simple de x_n.

Corrigé de la feuille d'exercices n°14

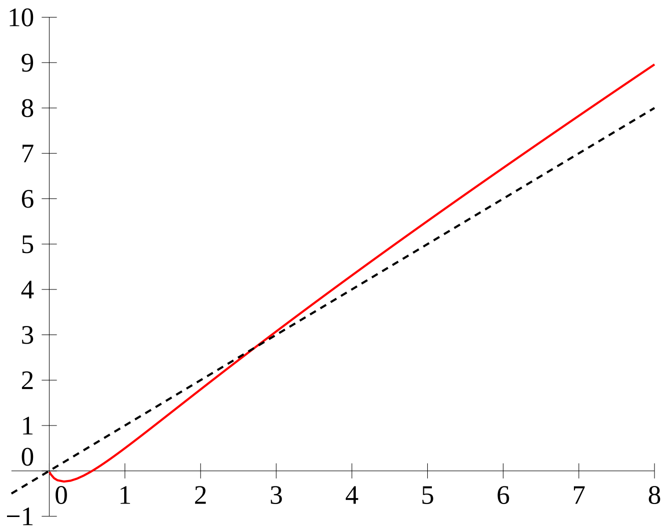
Exercice 1 (* à **)

- $\dfrac{e^{3x+1}}{(\ln x)^4} = e \times \dfrac{e^{3x}}{(\ln x)^4}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{3x}}{(\ln x)^4} = +\infty$ par croissance comparée, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{3x+1}}{(\ln x)^4} = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}}{3x^2} = +\infty$ par croissance comparée.
- $\ln(x^2+1)-2\ln x = \ln(x^2+1)-\ln(x^2) = \ln \dfrac{x^2+1}{x^2} = \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x^2+1)-2\ln x = 0$.
- $\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3} = \dfrac{8}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}}$ en multipliant par la quantité conjuguée, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+5}-\sqrt{x-3} = 0$.
- $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x\ln x}{\sqrt{x}+1} = 0$ (il n'y avait ici pas vraiment de difficulté, le numérateur tend vers 0 et le dénominateur vers 1).
- $x^x = e^{x\ln x}$. Or, $\lim\limits_{x\to0} x\ln x = 0$, donc $\lim\limits_{x\to0^+} x^x = 1$.
- $(1+x^2)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x^2)}$. Comme $\ln(1+x^2) \underset{0}{\sim} x^2$, on a $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x} = 0$, et $\lim\limits_{x\to0^+} (1+x^2)^{\frac{1}{x}} = 1$.
- Utilisons également les équivalents : $\ln(1+x) \underset{0^+}{\sim} x$, donc $\dfrac{2\sqrt{x}}{\ln(1+x)} \underset{0^+}{\sim} \dfrac{2\sqrt{x}}{x} \underset{0^+}{\sim} 2\sqrt{x}$, donc $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{2\sqrt{x}}{\ln(1+x)} = 0$.
- Comme $4x$ tend vers 0 quand x tend vers 0, on a $\dfrac{\ln(1+4x)}{x} \underset{0}{\sim} \dfrac{4x}{x}$, donc $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln(1+4x)}{x} = 4$.
- En posant $X = \sqrt{x}$, on a $x^4e^{-\sqrt{x}} = \dfrac{X^8}{e^X}$, avec X tendant vers $+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4e^{-\sqrt{x}} = 0$.
- En posant $X = \dfrac{1}{x}$, on se ramène exactement à calculer la limite en 0 de $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(1+\frac{1}{x}) = 1$.
- Le numérateur prend pour valeur 11 pour $x = 3$, et $\lim\limits_{x\to3^+} x^2-9 = 0^+$, donc $\lim\limits_{x\to3^+} \dfrac{2x^2-3x+2}{x^2-9} = +\infty$.
- Il vaut mieux commencer par mettre au même dénominateur pour éviter de se retrouver face à une forme indéterminée : $\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x^2-4} = \dfrac{x+2-1}{x^2-4} = \dfrac{x+1}{x^2-4}$. Le numérateur ayant pour limite 3 et le dénominateur 0^+, $\lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x^2-4} = +\infty$.
- Le numérateur et le dénominateur s'annulant en $x = 1$, on peut commencer par factoriser : si $x \neq 1$, $\dfrac{3x^2-4x+1}{x^2-1} = \dfrac{(x-1)(3x-1)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{3x-1}{x+1}$. Ce nouveau quotient vaut 1 quand $x = 1$, donc $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{3x^2-4x+1}{x^2-1} = 1$

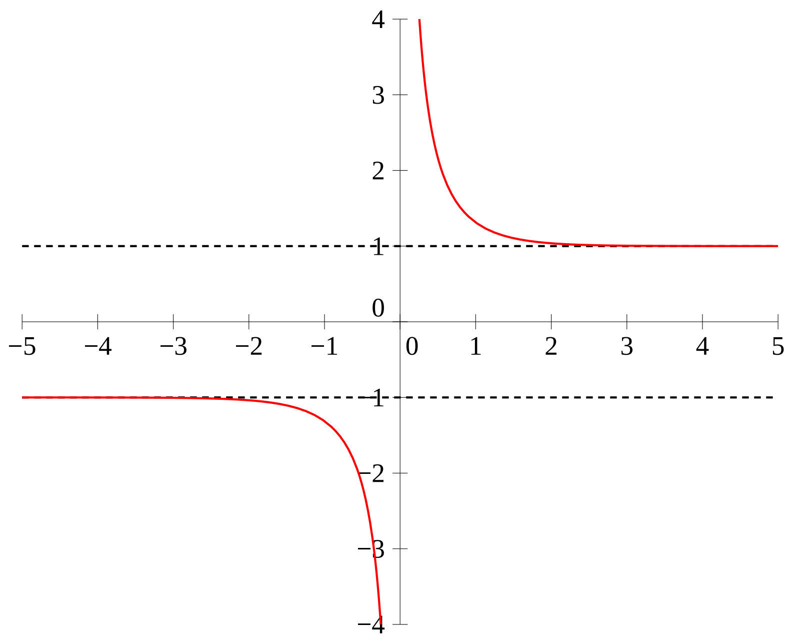
Exercice 2 (** à ***)

- La fonction f_1 et définie sur $\mathbb{R}_+^*$. En 0^+, la limite de f_1 est égale à 0 puisque le numérateur tend vers 0 et le dénominateur vers 1, donc il n'y a pas d'asymptote verticale. Par contre, on peut prolonger f_1 par continuité en 0. Ensuite, $f_1(x) = \dfrac{x+\ln x}{1+\frac{1}{x}}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = +\infty$, et

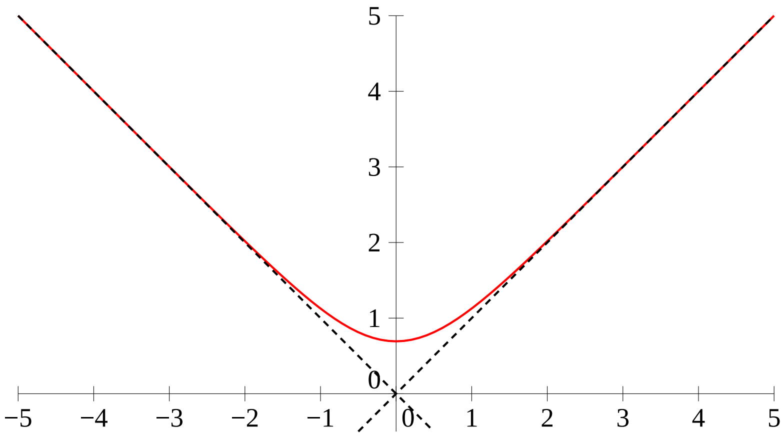
$\dfrac{f_1(x)}{x} = \dfrac{1+\frac{\ln x}{x}}{1+\frac{1}{x}}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$. Il faut donc calculer $f(x) - x = \dfrac{x + \ln x - x - 1}{1+\frac{1}{x}} = \dfrac{\ln x - 1}{1+\frac{1}{x}}$. On a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = +\infty$, la courbe de f admet donc en $+\infty$ une branche parabolique de direction $y = x$. Pour compléter, je rajoute pour chaque fonction l'allure de la courbe :



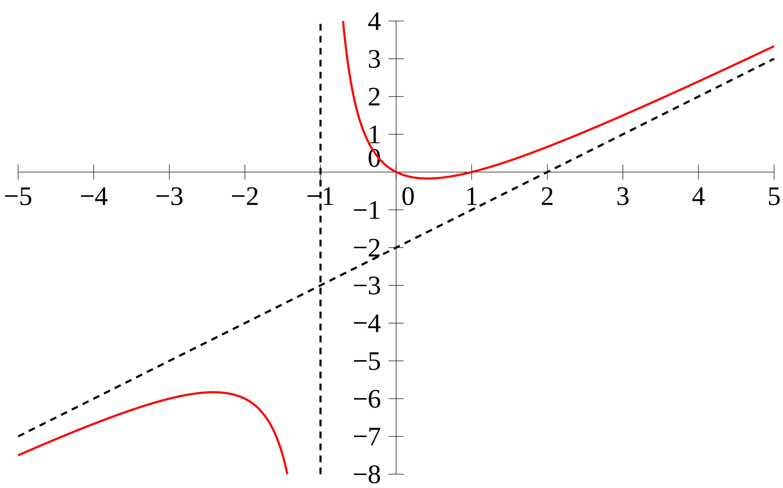
- La fonction n'est pas définie lorsque $e^x - e^{-x} = 0$, soit $e^x = e^{-x}$, ce qui implique $x = -x$, donc $x = 0$, d'où $\mathcal{D}_{f_2} = \mathbb{R}^*$. Les limites de f_2 en 0 sont infinies (le numérateur y tend vers 2 et le dénominateur vers 0), donc la courbe admet pour asymptote verticale l'axe des ordonnées. De plus $f_2(x) = \dfrac{e^x(1+e^{-2x})}{e^x(1-e^{-2x})}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = 1$, et la courbe admet pour asymptote horizontale en $+\infty$ la droite d'équation $y = 1$. De plus, f_2 est une fonction impaire car $f_2(-x) = \dfrac{e^{-x}+e^x}{e^{-x}-e^x} = -f_2(x)$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f_2(x) = -1$, et on a une asymptote horizontale d'équation $y = -1$.



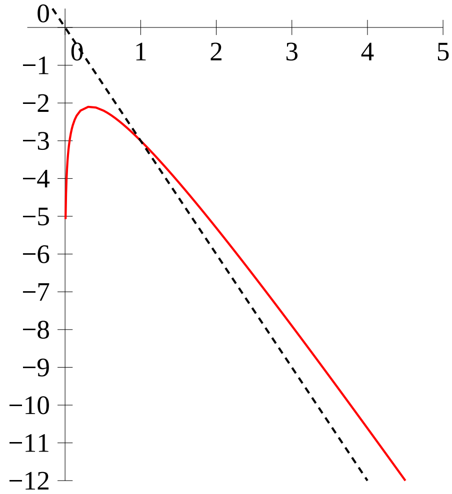
- La fonction f_3 est définie sur $\mathbb{R}$ puisqu'une exponentielle est strictement positive. Il suffit donc de regarder ce qui se passe aux infinis, et on peut commencer par constater que f_3 est paire. La limite en $+\infty$ de f_3 est $+\infty$ et de plus $f_3(x) = \ln(e^x(1+e^{-2x})) = x+\ln(1+e^{-2x})$, donc $\dfrac{f_3(x)}{x} = 1 + \dfrac{\ln(1+e^{-2x})}{x}$, qui a pour limite 1 quand x tend vers $+\infty$. Enfin, $f(x) - x = \ln(1+e^{-2x})$, qui tend vers 0, donc la droite d'équation $y = x$ est aymptote oblique à la courbe en $+\infty$. Par symétrie par rapport à l'axe des abscisses, la droite d'équation $y = -x$ est asymptote oblique en $-\infty$.



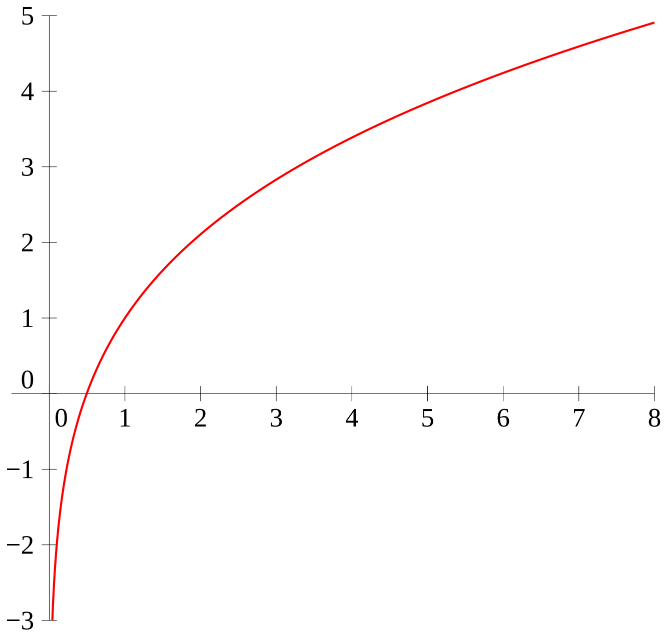
- Un classique : $\mathcal{D}_{f_4} = \mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$. En -1, le numérateur tend vers -4 et le dénominateur vers 0, il y a donc des limites infinies et une asymptote verticale d'équation $x = -1$. Par contre, en 1, numérateur et dénominateur tendent vers 0, on est obligés de factoriser de chaque côté. Pour le numérateur, remarquons que $x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x-1)^2$, donc pour $x \neq 1$, $f_4(x) = \dfrac{x(x-1)}{x+1}$, qui a pour limite 0 en 1. Pas de deuxième asymptote verticale donc.
  Pour les infinis, utilisons les équivalents pour aller plus vite : $f_4(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x^3}{x^2} = x$, donc les limites sont infinies, et $\dfrac{f_4(x)}{x} \underset{+\infty}{\sim} 1$. Reste à calculer $f(x) - x = \dfrac{x^3 - 2x^2 + x - x^3 + x}{x^2 - 1} = \dfrac{-2x^2 + 2x}{x^2 - 1} \underset{+\infty}{\sim} -2$. Conclusion de tous ces calculs : la droite d'équation $y = x-2$ est asymptote oblique à la courbe en $+\infty$ et en $-\infty$ (où les équivalents sont les mêmes).



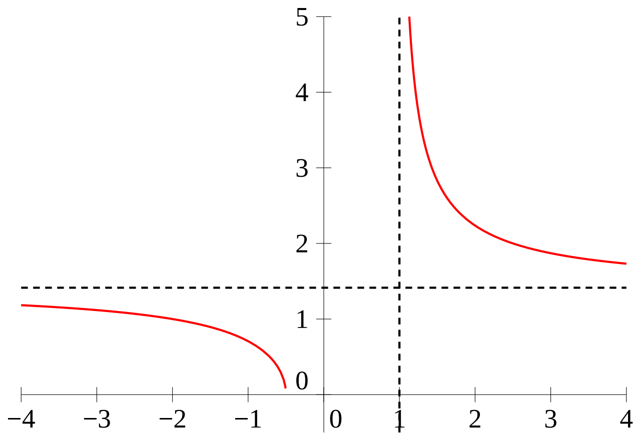
- La fonction f_5 est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, a pour limite $-\infty$ en 0, donc une asymptote verticale, et $+\infty$ en $+\infty$. De plus, $\dfrac{f(x)}{x} = -3 + \dfrac{\ln x}{x}$ a pour limite -3, et $f(x) + 3x = \ln x$ tend vers $+\infty$, donc on a une branche parabolique de direction $y = -3x$.



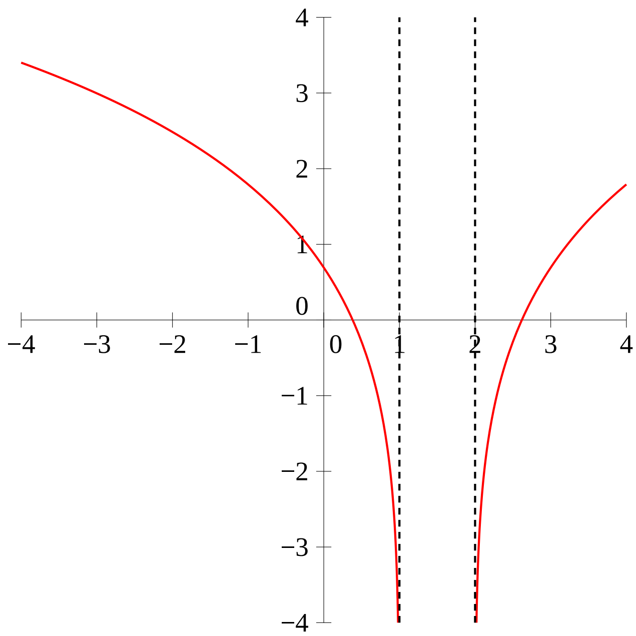
- Comme ci-dessus, le domaine de définition est $\mathbb{R}_+^*$ et il y a une asymptote verticale en 0. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_6(x) = +\infty$ et $\dfrac{f_6(x)}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{\ln x}{x}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_6(x)}{x} = 0$. Il y a donc en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Ox).



- La fonction f_7 est définie quand $\dfrac{2x+1}{x-1} \geqslant 0$, donc (petit tableau de signe) sur $\left]-\infty; -\dfrac{1}{2}\right] \cup]1; +\infty[$. En $-\dfrac{1}{2}$, il n'y a rien à faire, la fonction est définie, il ne peut pas y avoir d'asymptote verticale. Par contre, en 1, il y a bien une limite infinie, donc une asymptote verticale. Enfin, quand $x \to \pm\infty$, $\dfrac{2x+1}{x-1} \to 2$, donc $\underset{x\to\pm\infty 7}{f}(x) = \sqrt{2}$, il y a donc une asymptote horizontale d'équation $y = \sqrt{2}$.



- Enfin, f_8 est définie quand $x^2 - 3x + 2 > 0$, c'est-à-dire en dehors de ses racines évidentes qui sont 1 et 2, donc $\mathcal{D}_{f_8} =]-\infty; 1[\cup]2; +\infty[$. En 1 et 2, la parenthèse tend vers 0 donc la fonction vers $-\infty$, il y a donc deux asymptotes verticales. En $\pm\infty$, la fonction tend vers $+\infty$, et $\dfrac{f_8(x)}{x} = \dfrac{\ln(x^2(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}))}{x} = \dfrac{2\ln x}{x} + \dfrac{1}{x}\ln\left(1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^2}\right)$. Tout ceci tendant vers 0, il y a une branche parabolique de direction (Ox).



Exercice 3 (**)

Pour montrer que $1 + x \geqslant e^x$, il n'y a pas vraiment d'autre choix que d'étudier la fonction $f : x \mapsto e^x - 1 - x$, qui est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = e^x - 1$, donc décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$. Elle atteint donc son maximum pour $x = 0$. Or, $f(0) = 0$, donc on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$, d'où $1 + x \leqslant e^x$.

De même, posons $g(x) = 1 + xe^x - e^x$, la fonction g est définie dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $g'(x) = e^x + xe^x - e^x = xe^x$. La fonction g est donc décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$, et atteint donc un minimum en 0 qui vaut aussi 0, d'où la deuxième inégalité. On a donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \leqslant e^x - 1 \leqslant xe^x$, et $\forall x \neq 0$, $1 \leqslant \dfrac{e^x - 1}{x} \leqslant e^x$. Les deux termes extrêmes tendant vers 1 quand x tend vers 0, on a d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$.

Similairement, posons $h(x)=x-\ln(1+x)$, h est définie et dérivable sur $]-1;+\infty[$, et $h'(x)=1-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x}{1+x}$, donc la fonction h est décroissante sur $]-1;0]$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme d'habitude, elle a un minimum nul en 0, ce dont on déduit que $\ln(1+x)\leqslant x$.

Enfin, posons $k(x)=\ln(1+x)-\dfrac{x}{1+x}$, de dérivée $k'(x)=\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1+x-x}{(1+x)^2}=\dfrac{1+x-1}{(1+x)^2}$. Grande surprise, la fonction admet un minimum en 0, qui vaut 0, d'où la deuxième inégalité. On a alors $\forall x\in]-1;+\infty[$, $\dfrac{1}{1+x}\leqslant\dfrac{\ln(1+x)}{x}\leqslant 1$, donc par théorème des gendarmes $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$.

Exercice 4 (*)

1. $f(x)=\dfrac{x^2+\ln x}{xe^{-x}+2}\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{x^2}{2}$ et $f(x)\underset{0}{\sim}\dfrac{\ln x}{2}$.
2. $g(x)=x(\ln(1+x))^4\underset{+\infty}{\sim}x(\ln x)^4$ (on a le droit d'élever un équivalent à une puissance quelconque) et $g(x)\underset{0}{\sim}x\times x^4\sim x^5$ en utilisant que $\ln(1+x)\sim x$.
3. $h(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}$. L'exposant a pour limite 1 en $+\infty$ et 0 en 0, donc h a des limites finies égales à e et 1 en $+\infty$ et en 0.
4. $k(x)=x\ln(1+x)-(x+1)\ln x=x\ln(x(1+\frac{1}{x}))-x\ln x-\ln x=x\ln(1+\frac{1}{x})-\ln x$. La limite du premier terme en $+\infty$ est 1 (cf Exercice 1), donc $k(x)\underset{+\infty}{\sim}-\ln x$. En 0, $k(x)\underset{0}{\sim}-\ln x$ (tout le reste tendant vers 0).

Exercice 5 (**)

Le seul problème qui se pose pour la continuité est l'endroit où on change la définition de la fonction.

1. On a $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}4x^2+5x-4=-\dfrac{11}{2}$, donc f ne tend sûrement pas vers 0 quand x tend vers $-\dfrac{1}{2}$.

   La fonction f est continue seulement sur $\mathbb{R}\backslash\{-\dfrac{1}{2}\}$.
2. Il est indispensable de distinguer ce qui se passe en 0^+ et en 0^- : en 0^+, $e^{\frac{1}{x}}$ tend vers $+\infty$ et f a donc pour limite 0 en 0^+. Par contre, en 0^-, $e^{\frac{1}{x}}$ tend vers 0, et même beaucoup plus rapidement que x, donc $f(x)\underset{0^-}{\sim}\dfrac{x^2}{x}$, donc $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=0$. Finalement, la fonction f est tout de même continue en 0 puisque continue à gauche et à droite, elle est donc continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.
3. On a $f(x)=x\ln(x^2+1)-x\ln x$ si $x>0$. Chacun des deux termes tend vers 0 en 0^+, donc la fonction est continue sur $\mathbb{R}_+$.
4. Celle-ci est un peu plus difficile : $f(x)=\ln\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\ln\dfrac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=-\ln(\sqrt{x}+1)$, donc $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=-\ln\sqrt{2}$. La fonction n'est donc pas continue en 1.
5. La fonction est définie sur $\mathbb{R}$ ($x-Ent(x)$ est toujours positif, compris entre 0 et 1) et continue sur tous les intervalles de la forme $]n;n+1[$, avec $n\in\mathbb{Z}$ puisque les seuls points de discontinuité de la partie entière sont les entiers. Reste à déterminer ce qui se passe pour n : on a $f(n)=n+\sqrt{n-n}=n$, mais $\lim\limits_{x\to n^-}x-Ent(x)=1$, donc $\lim\limits_{x\to n^-}f(x)=n+\sqrt{1}=n+1$. La fonction est donc discontinue en tous les entiers.

Exercice 6 (**)

- La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, et $f(x) = \dfrac{x-1-3}{(x-1)^2} = \dfrac{x-4}{(x-1)^2}$. La fonction f a donc des limites infinies quand x tend vers 1, elle n'y est pas prolongeable par continuité.
- La fonction g est définie et continue sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$. De plus, numérateur et dénominateur ont pour limite 0 en -1, on peut donc factoriser par $x+1$: $g(x) = \dfrac{(x+1)(x-3)}{x+1} = x-3$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to-1} g(x) = -4$, et on peut donc prolonger g par continuité en posant $g(-1) = -4$.
- Ca ressemble au précédent ? C'est pourtant différent puisque cette fois h n'est définie que sur $]-1;+\infty[$, et $h(x) = \dfrac{(x+1)(x-3)}{\sqrt{x+1}} = (x-3)\sqrt{x+1}$. Cette fois-ci, la limite en -1 vaut 0, donc on peut prolonger h par continuité en posant $h(-1) = 0$.
- La fonction k est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, et a pour limite 0 en 0, donc est prolongeable par continuité à $\mathbb{R}_+$ en posant $k(0) = 0$.

Exercice 7 (**)

Seul 0 peut poser un problème de continuité à droite. Or, $\lim\limits_{x\to0^+} -\dfrac{1}{x^2} = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 0$, et f est bien continue en 0. De plus, $\forall x > 0$, $f'(x) = \dfrac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$. Posons $X = \dfrac{1}{x}$, on a lors $f'(x) = 2X^3e^{-X^2}$, qui par croissance comparée a pour limite 0 en $+\infty$, donc f' est également continue en 0. On fait le même type de calcul pour f'' : $\forall x > 0$, $f''(x) = \left(\dfrac{6}{x^4} + \dfrac{4}{x^6}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$, qui a également pour limite 0 en 0.

Pour les dérivées ultérieures, le principe est le même, mais pour tout traiter d'un seul coup, il est nécessaire d'éeffectuer une récurrence et d'avoir quelques connaissances sur les polynomes. On prouve en fait par récurrence que la n-ième dérivée de la fonction f (sur $]0;+\infty[$) peut s'écrire sous la forme $\dfrac{P_n(x)}{x^{a_n}}e^{-\frac{1}{x^2}}$, où a_n est un entier naturel et P_n est un polynome. C'est vrai pour $n = 1$ et même $n = 2$ d'après les calculs précédents. Supposons désormais que $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{a_n}}e^{-\frac{1}{x^2}}$. On peut dériver cette fonction sur $]0;+\infty[$ et obtenir $\dfrac{x^{a_n}P_n'(x) - a_nnx^{a_nn-1}P_n(x)}{x^{2a_n}}e^{-\frac{1}{x^2}} - \dfrac{2P_n(x)}{x^{a_n+3}}e^{-\frac{1}{x^2}}$. Ceci est bien de la forme voulue, ce qui achève la récurrenc. Or, un quotient de polynomes multiplié par $e^{-\frac{1}{x^2}}$ a toujours pour limite 0 en 0, donc la dérivée n-ième de f est continue en 0.

Exercice 8 (*)

Le principe est le même à chaque fois : la fonction étudiée est continue, et les signes des valeurs prises aux extrémités de l'intervalle sont opposés. Par le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction s'annule sur l'intervalle.

1. Posons $f(x) = x^{2008} - x^{2007} - 1$, $f(-1) = 1-(-1)-1 = 1$, et $f(1) = 1-1-1 = -1$, donc f s'annule sur I. Par dichotomie, on obtient successivement, en notant a la solution cherchée, $f(0) = -1$ donc $a \in [-1;0]$, puis $f(0.5) \simeq -1$ donc $a \in [-1;-0.5]$ etc. Il n'est pas très difficile de se convaincre que la valeur de a est extrêment proche de -1 : $x^{2008} - x^{2007} = x^{2007}(x-1)$, avec $x - 1 \in [-2;-1]$, donc x^{2007} doit être compris entre -0.5 et 1 pour que l'équation puisse être vérifiée, ce qui implique $0.5 \leqslant (-x)^{2007} \leqslant 1$, soit $\ln 0.5 \leqslant 2007\ln(-x) \leqslant 0$, donc $e^{\frac{0.5}{2007}} \leqslant -x \leqslant 1$, soit $-x = 1$ à 0.001 près. On a donc $x \simeq -1$ à 0.01 près.
2. Posons $f(x) = \ln x - \dfrac{x^2-5}{x+2}$, $f(1) = 0 - \dfrac{-4}{3} = \dfrac{4}{3}$, et $f(10) = \ln 10 - \dfrac{95}{12} < 0$ (car par exemple $e^4 > 2^4 > 16$, donc $4 > \ln 10$, et $\dfrac{95}{12} > 4 > \ln 10$), donc f s'annule sur I. Plutôt

que de couper exactement en 2, faisons une dichotomie avec des valeurs pas trop affreuses : $f(5) \simeq -1.24$, donc $a \in [1;5]$, puis $f(3) \simeq 0.30$, donc $a \in [3;5]$; $f(4) \simeq -0.44$ donc $a \in [3;4]$; $f(3.5) \simeq -0.6$ donc $a \in [3;3.5]$; $f(3.25) \simeq 0.12$ donc $a \in [3.25;3.5]$; $f(3.375) \simeq 0.03$ donc $a \in [3.375;3.5]$; $f(3.44) \simeq -0.02$ donc $a \in [3.375;3.44]$; $f(3.41) \simeq 0.001$, donc $a \in [3.41;3.44]$; et enfin $f(3.425) \simeq -0.001$ donc $a \in [3.41;3.425]$. On a donc $a \simeq 3.42$ à 0.01 près.

3. Posons $f(x) = 3x - 1 - \ln(2 + x^2)$, $f(0) = 0 - 1 - \ln 2 < 0$ et $f(1) = 3 - 1 - \ln 3 = 2 - \ln 3 > 0$, car $e^2 > 3$, donc $\ln 3 < 2$. La fonction s'annule donc sur I. Toujours le même principe, je vais aller un peu plus vite : on calcule $f(0.5) \simeq -0.31$, puis $f(0.75) \simeq 0.31$; $f(0.625) \simeq 0.003$; $f(0.56) \simeq -0.16$; $f(0.59) \simeq -0.08$ et $f(0.61) \simeq -0.03$, dont on déduit que $a \simeq 0.62$ à 0.01 près. Constatons que quand on tombe au milieu des calculs sur une valeur très proche de 0, on a de bonnes chances d'être très près de la solution cherchée...

4. Posons $f(x) = e^x - 2 - x$, $f(\ln 2) = 2 - 2 - \ln 2 < 0$, et $f(2\ln 2) = 4 - 2 - 2\ln 2 = 2(1 - \ln 2) > 0$, donc f s'annule sur I. Ici, les bornes de l'intervalles sont moyennement pratiques, mais elles valent environ 0.7 et 1.4, ce qui permet de couper en 1 puis de prendre des valeurs plus rondes ensuite : $f(1) \simeq -0.28$; $f(1.2) \simeq 0.12$; $f(1.1) \simeq -0.10$; $f(1.15) \simeq 0.008$; $f(1.125) \simeq -0.04$; $f(1.14) \simeq -0.01$, donc $a \simeq 1.14$ à 0.01 près.

5. Posons $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, $f(-1) = -1 - 3 + 1 = -3$ et $f(1) = 1 - 3 + 1 = -1$. Ca ne marche pas ? Si, car $f(0) = 1$, donc f s'annule en fait au moins deux fois sur I : une fois sur $[-1;0]$ et une autre sur $[0;1]$. Pour la dichotomie, contentons-nous de déterminer une valeur approchée de la solutions se trouvant dans $[0;1]$ (on peut naturellement trouver également une approximation de la deuxième racine dont on connait l'existence) : $f(0.5) = .375$; $f(0.75) \simeq -0.27$; $f(0.625) \simeq 0.07$; $f(0.69) \simeq -0.10$; $f(0.66) \simeq -0.02$; $f(0.64) \simeq 0.03$, donc $a \simeq 0.65$ à 0.01 près (pour les curieux, la racine appartenant à $[-1;0]$ vaut environ -0.53).

Exercice 9 (***)

1. La fonction f_n étant somme de deux fonctions strictement croissantes sur $[0;+\infty[$, elle l'est également. Comme de plus elle est continue, $f(0) = -4$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$, le théorème de la bijection nous permet d'affirmer l'existence d'un unique réel positif u_n tel que $f_n(u_n) = 0$.

2. u_0 est solution positive de l'équation $1 + 9x^2 - 4 = 0$, soit $x^2 = \dfrac{1}{3}$, donc $u_0 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Pour $n = 1$, l'équation devient $9x^2 + x - 4 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 1 + 144 = 145$, et admet deux racines dont une strictement positive (d'après la question précédente) qui ne peut être que $u_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{145}}{18} \simeq 0.61$. De même, u_2 est solution positive de l'équation $10x^2 = 4$, d'où $u_2 = \sqrt{\dfrac{2}{5}} \simeq 0.63$. Pour vérifier que $u_n < \dfrac{2}{3}$, il suffit de constater que $f_n\left(\dfrac{2}{3}\right) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n + 9 \times \dfrac{4}{9} - 4 = \dfrac{2^n}{3^n} > 0$, et d'appliquer la croissance stricte de la fonction f_n à l'inégalité $0 = f_n(u_n) < f_n\left(\dfrac{2}{3}\right)$

3. On a $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1} + 9x^2 - 4 - x^n - 9x^2 + 4 = x^n(1 - x)$. Cette expression étant positive si $x < 1$, on en déduit que $\forall x \in]0;1[$, $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.

4. On a notamment, puisque $0 < u_n < \dfrac{2}{3}$, $f_{n+1}(u_n) < f_n(u_n) = 0$. Comme par ailleurs $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$, on a donc $f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$, ce dont on déduit via stricte croissance de f_{n+1} que $u_n < u_{n+1}$. Autrement dit, la suite (u_n) est strictement croissante.

5. La suite étant croissante et majorée par $\dfrac{2}{3}$, elle converge.

6. Comme $0 < u_n < \frac{2}{3}$, $0 < u_n^n < \left(\frac{2}{3}\right)^n$, donc via le théorème des gendarmes (et le fait que le membre de droite est une suite géométrique de raison inférieure à 1, $\lim_{n\to+\infty} u_n^n = 0$. Or, on a par définition $u_n^n + 9u_n^2 - 4 = 0$ (puisque $f_n(u_n) = 0$). On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} 9u_n^2 - 4 = 0$, soit $\lim_{n\to+\infty} u_n^2 = \frac{4}{9}$. Comme $u_n > 0$, on a donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{3}$.

Exercice 10 (***)

1. On a $f(1) = -1$ et $f(3) = 1 + \ln 3 > 0$, donc par le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction f s'annule sur l'intervalle $[1; 3]$.
2. La fonction étant somme de deux fonctions strictement croissantes sur $\mathbb{R}_+^*$, elle l'est également, donc est injective, et l'équation $f(x) = 0$ ne peut pas avoir plus d'une solution.
3. On calcule $f(2) \simeq 0.69$, puis $f(1.5) \simeq -0.09$; $f(1.75) \simeq 0.31$; $f(1.625) \simeq 0.11$; $f(1.56) \simeq .004$; $f(1.53) \simeq -0.04$ et $f(1.55) \simeq -0.01$, donc la solution de l'équation $f(x) = 0$ vaut 1.56 à 10^{-2} près.
4. On a déjà vu que f était strictement croissante. De plus, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, et $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$ (aucune forme indéterminée), donc f est bien bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Le théorème de la bijection nous permet d'affirmer que g est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$, strictement croissante, et de limites respectives 0 et $+\infty$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
5. Un petit coup de croissance comparée et on constate que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$. Comme $\lim_{t\to+\infty} g(t) = +\infty$, on peut donc affirmer que $\lim_{t\to+\infty} \frac{f(g(t))}{g(t)} = 1$ (composée de limites), c'est-à-dire que $\lim_{t\to+\infty} \frac{t}{g(t)} = 1$ (puisque par définition de la réciproque $f(g(t)) = t$. Autrement dit, $g(t) \underset{+\infty}{\sim} t$.

Exercice 11 (**)

1. La fonction est somme de deux fonctions strictement croissantes, donc est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, donc par théorème de la bijection, f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. C'est une conséquence immédiate de la bijectivité de f.
3. Par définition, $f(x_n) < f(x_{n+1})$, donc par stricte croissance de f, $x_n < x_{n+1}$, et la suite (x_n) est strictement croissante.
4. C'est un calcul d'images : $f(\ln n) = e^{\ln n} + \ln n = n + \ln n \geqslant n$ si $n \geqslant 1$, donc on a $f(x_n) \leqslant f(\ln n)$, d'où $x_n \leqslant \ln n$. De même, $f(\ln(n - \ln n)) = e^{\ln(n-\ln n)} + \ln(n - \ln n) = n - \ln n + \ln(n - \ln n) = n - \ln \frac{n}{n - \ln n} < n$ puisque $\frac{n}{n - \ln n} < 1$. On en déduit de même que $\ln(n - \ln n) \leqslant x_n$.
5. Comme $\lim_{n\to+\infty} n - \ln n = +\infty$ (croissance comparée), on a $\lim_{n\to+\infty} \ln(n - \ln n) = +\infty$, d'où par comparaison $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$. De plus, $\frac{\ln(n - \ln n)}{\ln n} \leqslant \frac{x_n}{\ln n} \leqslant 1$, avec $\frac{\ln(n - \ln n)}{\ln n} = \frac{\ln n + \ln(1 - \frac{\ln n}{n})}{\ln n} = 1 + \frac{\ln(1 - \frac{\ln n}{n}}{\ln n}$. La quotient a pour limite 0, donc la suite $(\frac{x_n}{\ln n})$ est encadrée par deux suites de limite 1. Via le théorème des gendarmes, on en déduit que $x_n \sim \ln n$.

Feuille d'exercices de révision n°4

ECE3 Lycée Carnot

28 janvier 2011

Problème 1

On considère une suite infinie de lancers de pièce équilibrée à Pile ou Face. On note P_n et F_n les événements : « On obtient Pile (respectivement Face) au n-ème lancer ».

Deux joueurs A et B jouent au jeu suivant : A gagne si la séquence PPF apparait avant la séquence FPP lors de cette suite de tirages ; B gagne si la séquence FPP apparait avant la séquence PPF (si aucune des deux séquences n'apparait dans la suite de tirages, il y a match nul).

Première partie

On note A_n l'événement « Le joueur A gagne à l'issue du n-ème lancer (et personne ne gagne avant) » et a_n sa probabilité. De même, on note B_n et b_n pour le cas où c'est le joueur B qui gagne après le $n$ème lancer.

1. Calculez a_3 et a_4.
2. Dans le cas général ($n \geqslant 3$), explicitez tous les tirages pour lesquels A gagne au $n$ème lancer (il n'y en a pas beaucoup ...). En déduire que $P(A_n) = \dfrac{1}{2^n}$.
3. En déduire la probabilité de l'événement A : « Le joueur A gagne la partie ».
4. On admet que la probabilité que personne ne gagne est nulle (cf troisième partie). Quelle est la probabilité que B gagne ? Conclusion ?

Deuxième partie

On note dans cette partie D_n l'événement « On n'obtient jamais deux Piles consécutifs lors des n premiers lancers » et d_n sa probabilité.

1. Calculez d_1, d_2 et d_3 (pour d_3, un bête dénombrement suffira).
2. Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $D_{n+2} = (D_{n+2} \cap F_1) \cup (D_{n+2} \cap P_1 \cap F_2)$, et en déduire que $d_{n+2} = \dfrac{1}{2}d_{n+1} + \dfrac{1}{4}d_n$.
3. Montrer par récurrence que $\forall n \geqslant 1$, $d_n \leqslant \left(\dfrac{6}{7}\right)^n$ (on pourra faire une récurrence double et utiliser la relation précédente).
4. En déduire que la série de terme général d_n converge et une majoration de sa somme.
5. Montrez que, si on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} d_k$, on a $S_{n+2} = \dfrac{1}{2}S_{n+1} + \dfrac{1}{4}S_n + \dfrac{5}{4}$. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} d_k = 5$.

Troisième partie

On note C_n l'événement « Aucun des deux deux joueurs n'a gagné à l'issue du n-ème lancer » et T_n l'événement « Un des deux joueurs gagne à l'issue du $n$ème lancer (mais personne n'avait gagné avant) ».

1. Calculez les probabilités des événements T_1, T_2 et T_3.
2. Soit $n \geqslant 3$. Montrer que $P(C_n) = \dfrac{1}{2^n} + d_n$.
3. En déduire l'égalité $P(T_n) = \dfrac{1}{2^n} + d_{n-1} - d_n$.
4. Montrez que la série de terme général $P(T_n)$ converge, calculer sa somme et en déduire que l'événement « Aucun des deux joueurs ne gagne » est de probabilité nulle.

Problème 2

Première partie

Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et I la matrice identité de taille 3. On pose $J = M - I$.

1. Calculer J^2 en fonction de J.
2. Montrer par récurrence qu'il existe une suite (u_n) de réels telle que pour tout entier naturel n on ait $M^n = I + u_n J$. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
3. Déterminer la valeur de u_n puis l'expression de la matrice M^n.

Deuxième partie

Les poules pondent des oeufs que l'on classe suivant trois calibres A, B et C.

- Si une poule pond un oeuf de calibre A, l'oeuf qu'elle pondra ensuite sera de calibre A, B ou C avec des probablilités respectives de 1/2, 1/4 et 1/4.
- Si une poule pond un oeuf de calibre B, l'oeuf qu'elle pondra ensuite sera de calibre A, B ou C avec des probablilités respectives de 1/4, 1/2 et 1/4.
- Si une poule pond un oeuf de calibre C, l'oeuf qu'elle pondra ensuite sera de calibre A, B ou C avec des probablilités respectives de 1/4, 1/4 et 1/2.
- Pour tout entier naturel n, on désigne par a_n, b_n et $c_n$les probablitités respectives pour que le nième oeuf pondu par une poule soit de calibre A, B ou C.

On pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n. En déduire une matrice carrée U telle que $X_{n+1} = UX_n$ pour tout entier n.
   (b) Exprimer U en fonction de M. En déduire U^n en fonction de n.
2. On suppose que le premier oeuf pondu par une poule est de calibre C. Déduire des question précédentes a_n, b_n et c_n en fonction de n, ainsi que leurs limites quand n tend vers $+\infty$.

Corrigé de la feuille d'exercices de révision n°4

Problème 1

Première partie

1. On a $a_3 = \frac{1}{8}$ (un seul tirage gagnant sur les 8 possibles : PPF). Pour que A_4 se réalise, il faut que les trois derniers tirages soient PPF, mais le premier tirage ne peut être Face, sinon le joueur B aurait gagné au troisième tour. Il ne reste donc que la possibilité $PPPF$, soit $a_4 = \frac{1}{16}$.
2. Dans le cas général, il faut toujours finir par PPF, et on ne peut pas avoir de Face précédant ces deux Pile sinon le joueur B aurait gagné à un des tirages précédents. Il n'y a donc que le tirage $P \dots PPF$ qui fasse gagner le joueur A, soit une probabilité de $\frac{1}{2^n}$.
3. Il suffit d'additionner les probabilités de tous les événements A_n : $P(A) = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 2 - \frac{7}{4} = \frac{1}{4}$.
4. La probabilité d'un match nul étant nulle, il reste une probabilité $\frac{3}{4}$ que ce soit B qui gagne. Conclusion, il vaut largement mieux être dans la peau du joueur B (bien qu'on puisse penser au premier abord que PPF et FPP sont plus ou moins équivalents).

Deuxième partie

1. On a clairement $d_1 = 1$ puisqu'on ne risque pas d'obtenir deux Pile de suite après un seul tirage. Après deux tirages, une seule possibilité sur les quatre amène une succesion de deux Pile, donc $d_2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Enfin, après trois tirages, trois possibilités sur 8 vont donner deux Pile (ce sont les tirages PPP, PPF et FPP), donc $d_3 = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$.
2. Les événements F_1, $P_1 \cap F_2$ et $P_1 \cap P_2$ forment un système complet d'événements (ils sont disjoints et on est bien obligé de commencer par F, par PF ou par PP), donc $D_{n+2} = D_{n+2} \cap F_1 \cup D_{n+2} \cap P_1 \cap F_2 \cup D_{n+2} \cap P_1 \cap P_2$. Or, ce dernier ensemble est vide puisque $P_1 \cap P_2$ est incompatible avec D_{n+2} par définition. Il ne reste donc que l'union de deux ensembles annoncée. Or, $P(D_{n+2} \cap F_1) = \frac{1}{2} d_{n+1}$ (probabilité $\frac{1}{2}$ d'avoir Face au départ et ensuite il ne faut pas avoir Pile sur les $n+1$ lancers restants) et de même $P(D_{n+2} \cap P_1 \cap F_2) = \frac{1}{4} d_n$, d'où la formule de récurrence.
3. On a bien $d_1 = 1 \leqslant \left(\frac{6}{7}\right)^0$ et $d_2 = \frac{3}{4} \leqslant \left(\frac{6}{7}\right)^1$. Supposons que $d_{n+1} \leqslant \left(\frac{6}{7}\right)^n$ et $d_n \leqslant \left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}$, on a alors d'après la question précédente $d_{n+2} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{6}{7}\right)^n + \frac{1}{4}\left(\frac{6}{7}\right)^{n-1} \leqslant \left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2} \times \frac{6}{7} + \frac{1}{4}\right)$. Or, $\frac{1}{2} \times \frac{6}{7} + \frac{1}{4} = \frac{6}{14} + \frac{1}{4} = \frac{19}{28} = \frac{133}{196}$ et $\left(\frac{6}{7}\right)^2 = \frac{36}{49} = \frac{144}{196}$. On a donc $d_{n+2} \leqslant \left(\frac{6}{7}\right)^2 \left(\frac{6}{7}\right)^{n-1} = \left(\frac{6}{7}\right)^{n+1}$, ce qui achève la récurrence.
4. La série a un terme général positif, et ses sommes partielles sont majorées par $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{6}{7}\right)^n$, qui converge (c'est une série géométrique) vers $\frac{1}{1-\frac{6}{7}} = 7$. On en déduit la convergence de la série

de terme général d_k, et de plus $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} d_k \leqslant 7$.

5. En sommant la relation de récurrence entre $k=1$ et $k=n$, on obtient $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} d_{k+2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} d_{k+1} + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} d_k$, soit après changement d'indices $\displaystyle\sum_{k=3}^{n+2} d_k = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n+1} d_k + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} d_k$. Attention, il manque des termes aux deux premières sommes pour faire apparaitre S_{n+2} et S_{n+1}. On a plus précisément $S_{n+2} - d_1 - d_2 = \dfrac{1}{2}(S_{n+1} - d_1) + \dfrac{1}{4}S_n$, soit $S_{n+2} - 1 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{2}S_{n+1} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}S_n$, donc $S_{n+2} = \dfrac{1}{2}S_{n+1} + \dfrac{1}{4}S_n + \dfrac{5}{4}$. Comme la série converge, les trois suites S_n, S_{n+1} et S_{n+2} convergent vers la même limite S (somme de la série), donc en passant à la limite $S = \dfrac{1}{2}S + \dfrac{1}{4}S + \dfrac{5}{4}$, donc $\dfrac{1}{4}S = \dfrac{5}{4}$. On obtient bien $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} d_k = 5$.

Supplément pour les plus masochistes

Voici la correction des deux questions supplémentaires traitées en TD : le calcul d'une formule explicite pour d_n à l'aide de la relation de récurrence linéaire d'ordre 2, puis celui de la somme de la série à partir de cette formule explicite.

- L'équation caractéristique de notre récurrence linéaire est $x^2 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4} = 0$, ce qui donne $\Delta = \dfrac{1}{4} + 4 \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{4}$, puis $r = \dfrac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$, et de même $s = \dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$. On a donc $d_n = \alpha\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n + \beta\left(\dfrac{16\sqrt{5}}{4}\right)^n$, avec α et β vérifiant le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} d_1 & = & 1 & = & \alpha\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right) + \beta\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}\right) \\ d_2 & = & \dfrac{3}{4} & = & \alpha\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 + \beta\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} 4 & = & \alpha(1+\sqrt{5}) + \beta(1-\sqrt{5}) \\ 12 & = & \alpha(1+\sqrt{5})^2 + \beta(1-\sqrt{5})^2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} 4 & = & \alpha + \alpha\sqrt{5} + \beta - \beta\sqrt{5} \\ 12 & = & \alpha + 2\sqrt{5}\alpha + 5\alpha + \beta - 2\sqrt{5}\beta + 5\beta \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} 4 & = & (\alpha+\beta) + \sqrt{5}(\alpha-\beta) \\ 12 & = & 6(\alpha+\beta) + 2\sqrt{5}(\alpha-\beta) \end{array}\right.$$

En faisant les combinaisons $6L_1 - L_2$ et $L_2 - 2L_1$, on obtient les nouvelles équations :

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} 12 & = & 4\sqrt{5}(\alpha-\beta) \\ 4 & = & 4(\alpha+\beta \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} \dfrac{3}{\sqrt{5}} & = & \alpha-\beta \\ 1 & = & \alpha+\beta \end{array}\right.$$

L'addition des deux lignes donne alors $2\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{5}} + 1$, soit $\alpha = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$, et leur soustraction amène $\beta = \dfrac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}}$. Finalement, $d_n = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n + \dfrac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n$.
- La série de terme général d_n est donc une somme de deux séries géométriques convergentes, il

faut juste faire attention au fait qu'on va faire commencer la sommation à $n=1$, il ne faut donc pas oublier de soustraire le terme 0 :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} d_n = \frac{3+\sqrt{5}}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n + \frac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n$$
$$= \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{4}}-1\right) + \frac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{4}}-1\right)$$
$$= \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{4}{3-\sqrt{5}}-1\right) + \frac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}}\left(\frac{4}{3+\sqrt{5}}-1\right)$$
$$= \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \times \frac{1+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}} \times \frac{1-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$$
$$= \frac{3+3\sqrt{5}+\sqrt{5}+5}{6\sqrt{5}-10} + \frac{\sqrt{5}-5-3+3\sqrt{5}}{6\sqrt{5}+10}$$
$$= \frac{4+2\sqrt{5}}{3\sqrt{5}-5} + \frac{2\sqrt{5}-4}{3\sqrt{5}+5}$$
$$= \frac{(4+2\sqrt{5})(3\sqrt{5}+5)}{(3\sqrt{5})^2-5^2} + \frac{(2\sqrt{5}-4)(3\sqrt{5}-5)}{(3\sqrt{5})^2-5^2}$$
$$= \frac{12\sqrt{5}+20+30+10\sqrt{5}+30-10\sqrt{5}-12\sqrt{5}+20}{45-25}$$
$$= \frac{100}{20} = 5.$$

Ouf, on retrouve le résultat précédent.

Troisième partie

1. On a bien sûr $P(T_1) = P(T_2) = 0$, puisqu'il faut attendre au moins trois tirages pour que PPF ou FPP apparaisse. Quand à T_3, il est réalisé si un de ces tirages apparait, soit $P(T_3) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

2. Remarquons que si une série d'au moins deux Pile apparait, elle verra la victoire d'un des joueurs dès qu'elle est interrompue par un Face, que ce soit à sa gauche ou à sa droite. Pour qu'aucun joueur ne gagne, il faut donc, soit qu'il n'y ait pas de série de deux Piles (probabilité d_n), soit qu'il n'y ait que des Pile (probabilité $\frac{1}{2^n}$), d'où la formule.

3. On a $C_{n-1} = C_n \cup T_n$ (si personne n'a gagné après $n-1$ tirages, soit quelqu'un gagne juste après, soit non), et ces deux événements sont incompatibles, donc $P(C_{n-1}) = P(C_n) + P(T_n)$ et $P(T_n) = P(C_{n-1}) - P(C_n) = \frac{1}{2^{n-1}} + d_{n-1} - \frac{1}{2^n} - d_n = \frac{1}{2^n} + d_{n-1} - d_n$.

4. On a donc $\sum_{k=3}^{n} P(T_k) = d_2 - d_n + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{2^k}$ (il y a un télescopage sur les d_k). Comme $\lim_{n\to+\infty} d_n = 0$ (puisque la série de terme général d_n converge) et comme la série de terme général $\frac{1}{2^k}$ converge (série géométrique), cette sommé partielle a une limite, qui vaut $d_2 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} + 2 - \frac{7}{4} = 1$ (il manque les premiers termes de la somme de droite). Cette somme représente la probabilité qu'un des deux joueurs gagne. Il reste donc une probabilité nulle qu'il y ait match nul.

Problème 2

Première partie

1. C'est un calcul qu'on a déjà fait dans un ou deux exercices (J étant la matrice ne contenant que des 1), et on obtient encore une fois $J^2 = 3J$.
2. C'est vrai pour $n = 0$ (en posant $u_0 = 0$, on a bien $M^0 = I + 0 \times J$) ou si on préfère pour $n = 1$ en posant $u_1 = 1$ puisque par définition $M = I + J$. Supposons donc le résultat vérifié au rang n, on a donc $M^n = I + u_n J$, d'où $M^{n+1} = M \times M^n = M(I + u_n J) = (I + J)(I + u_n J) = I + u_n J + J + u_n J^2 = I + (u_n + 1 + 3u_n)J = I + (1 + 4u_n)J$ (on a utilisé le résultar de la première question), ce qui achève la récurrence et prouve en passant que $u_{n+1} = 4u_n + 1$.
3. On reconnait comme souvent une suite arithmético-géométrique, dont l'équation de point fixe $x = 4x + 1$ donne $x = -\frac{1}{3}$. On pose donc $v_n = u_n + \frac{1}{3}$ et on constate que $v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{3} = 4u_n + 1 + \frac{1}{3} = 4\left(u_n + \frac{1}{3}\right) = 4v_n$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison 4 et de premier terme $v_0 = u_0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$. On a donc $v_n = \frac{4^n}{3}$, et $u_n = \frac{4^n - 1}{3}$. On a alors $M^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4^n + 2 & 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n + 2 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n - 1 & 4^n + 2 \end{pmatrix}$.

Deuxième partie

1. (a) Les évènements A_n, B_n et C_n forment un système complet, on peut appliquer la formule des probabilités totales : $a_{n+1} = P_{A_n}(A_{n+1}) \times P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1}) \times P(B_n) + P_{C_n}(A_{n+1}) \times P(C_n)$. Les probabilités conditionnelles nous ayant été données par l'énoncé, on obtient sans problème $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n$. De même, $b_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n$ et $c_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n$. On a donc bien la relation annoncée en posant $U = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

   (b) On a $U = \frac{1}{4}M$, donc $U^n = \frac{1}{4^n}M^n$ (non, je ne recopierai pas la matrice, ça n'a aucun intérêt).
2. Prouvons donc par récurrence que $X_n = U^n X_0$ (je vous rappelle qu'il faut rédiger cette récurrence). C'est évidemment vrai pour $n = 0$, et en le supposant vérifié au rang n, on aura $X_{n+1} = UX_n = U(U^n X_0) = U^{n+1}X_0$, donc ça marche. Comme $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, X_n sera en fait identique à la dernière colonne de la matrice U^n, c'est-à-dire que $a_n = b_n = \frac{1}{3 \times 4^n}(4^n - 1) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \times 4^n}$, et $c_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3 \times 4^n}$. Tout cela converge tranquillement vers $\frac{1}{3}$.

Feuille d'exercices n°15 : Variables aléatoires finies

ECE3 Lycée Carnot

9 février 2011

Exercice 1 (*)

On joue au jeu suivant : on parie sur un nombre compris entre 1 et 6, puis on lance trois dés et on gagne 3 euros si le nombre sort 3 fois, 2 euros s'il sort deux fois, 1 euro s'il sort une fois. On perd 1 euro s'il ne sort pas. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de la variable X représentant le gain du joueur.

Exercice 2 (**)

On lance simultanément quatre dés à 6 faces et on note X le plus grand chiffre obtenu. Déterminer la loi de X, ainsi que son espérance et sa variance. Tracer la courbe de la fonction de répartition de X.

Exercice 3 (**)

Une urne contient initialement 4 boules vertes, 2 jaunes et une rouge. On y effectue des tirages successifs sans remise et on note X le nombre de tirages nécessaire pour qu'il ne reste plus que deux couleurs dans l'urne et Y le nombre de tirages nécessaire pour qu'il n'y ait plus qu'une couleur. Déterminer les lois, espérances et variances de X et Y.

Exercice 4 (***)

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue des tirages sans remise dans cette urne jusqu'à ce que le numéro tiré ait un numéro supérieur ou égal au numéro tiré juste avant (ce qui suppose qu'on effectue au moins deux tirages ; par exemple une suite de tirage possible est 7, 4, 2, 5 et on s'arrête après ce quatrième tirage). On note X le nombre de tirages effectués.

1. Quels sont les valeurs prises par la variable X ?
2. Déterminer la loi de X puis son espérance (on pourra commencer par traiter les cas $n = 3$ et $n = 5$).
3. Quelle est la limite de $E(X)$ quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 5 (*)

Au bridge, on joue avec un jeu de 52 cartes et on attribue habituellement 4 points pour un As, 3 pour un Roi, 2 pour une Dame et 1 pour un Valet (et 0 pour tout autre carte). Un joueur pioche 13 cartes dans le jeu de 52, on note X le nombre de points contenu dans son jeu. Quelle est le nombre de points moyen d'une carte tirée au hasard dans le jeu ? En déduire $E(X)$ (sans calculer sa loi).

Exercice 6 (d'après ISCID 91) (***)

On considère une urne de taille $N > 1$ contenant r boules blanches et $N - r$ boules noires ($0 \leqslant r < N$). Dans cette urne, on prélève les boules une à une et sans remise, jusqu'à l'obtention de toutes les boules blanches, et on note X le nombre de tirages qu'il est nécessaire d'effectuer pour cela. Le but de l'exercice est de déterminer la loi de X, ainsi que son espérance et sa variance.

1. (a) Traiter le cas $N = 4$ et $r = 1$.
   (b) Traiter le cas $N = 4$ et $r = 2$.
2. Etude du cas général : $(1 < r < N)$
   (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.
   (b) Soit k l'une de ces valeurs. Déterminer la probabilité pour qu'au cours des $k-1$ premiers tirages soient apparues $r - 1$ boules blanches (et donc, $k - r$ boules noires). En déduire la valeur de $P(X = k)$, c'est-à-dire la probabilité pour que la r^{i-eme} (et dernière) boule blanche apparaisse au k^{i-eme} tirage.
   (c) Vérifier, après simplifications, que $P(X = k) = \dfrac{\binom{k-1}{r-1}}{\binom{N}{r}}$. En déduire les valeurs des sommes : $\displaystyle\sum_{k=r}^{N} \binom{k-1}{r-1}$, puis $\displaystyle\sum_{k=r}^{N} \binom{k}{r}$ et $\displaystyle\sum_{k=r}^{N} \binom{k+1}{r+1}$.
   (d) Montrer que $E(X) = \dfrac{r(N+1)}{r+1}$.
   (e) De même, calculer $E(X(X+1))$ et en déduire $V(X)$.

Exercice 7 (d'après Ecricome 2008) (***)

Un joueur lance successivement n boules au hasard dans N cases numérotées de 1 à N (avec $N \geqslant 2$), chaque boule ayant probabilité $\dfrac{1}{N}$ de tomber dans chacune des N cases (et les tirages de boules étant indépendants les uns des autres). On cherche à étudier la variable aléatoire T_n égale au nombre de cases **non** vides après n lancers.

1. Déterminer en fonction de n et de N les valeurs prises par T_n.
2. Donner les lois de T_1 et de T_2.
3. Déterminer, lorsque $n \geqslant 2$, les probabilités $P(T_n = 1)$, $P(T_n = 2)$ et $P(T_n = n)$ (en distingant suivant que $n \leqslant N$ ou $n > N$).
4. À l'aide de la formule des probabilités totales, prouver que si $1 \leqslant k \leqslant n$, alors $P(T_{n+1} = k) = \dfrac{k}{N} P(T_n = k) + \dfrac{N-k+1}{N} P(T_n = k-1)$.
5. On considère dans cette question le polynôme $G_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} P(T_n = k)x^k$.
   (a) Quelle est la valeur de $G_n(1)$?
   (b) Exprimer $E(T_n)$ en fonction de $G'_n(1)$.
   (c) En utilisant la relation démontrée à la question 4, montrer que
   $G_{n+1}(x) = \dfrac{1}{N}(x - x^2)G'_n(x) + xG_n(x)$.
   (d) Dériver l'expression précédente et en déduire que $E(T_{n+1}) = \left(1 - \dfrac{1}{N}\right) E(T_n) + 1$.
   (e) En déduire la valeur de $E(T_n)$ et déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Corrigé de la feuille d'exercices n°15

Exercice 1 (*)

Le gain du joueur peut être de 1, 2, 3 ou -1 euro. On a donc $X(\Omega) = \{-1; 1; 2; 3\}$. Notons par ailleurs que $|\Omega| = 6^3 = 216$ (on lance trois dés à 6 faces). Il ne reste plus qu'à calculer la probabilité de sortir un nombre de 6 donné pour obtenir la loi de X. Pour obtenir trois 6, il n'y a qu'un tirage possible, soit une probabilité de $\dfrac{1}{216}$. Pour deux 6, on a le choix du dé qui ne donnera pas un 6 (trois possibilités), ainsi que du chiffre obtenu sur ce dé (cinq possibilités), soit une probabilité de $\dfrac{3 \times 5}{216} = \dfrac{15}{216}$. De même, pour un 6, trois choix pour le dé qui donne 6, et cinq choix pour le résultat de chacun des deux dés restants, soit une probabilité de $\dfrac{3 \times 5^2}{216} = \dfrac{75}{216}$. Enfin, si on n'obtient pas de 6, on a cinq choix pour chaque dé, soit une probabilité de $\dfrac{5^3}{216} = \dfrac{125}{216}$. On vérifie que la somme de ces probabilités est bien égale à 1, et on a donc la loi suivante :

k	-1	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

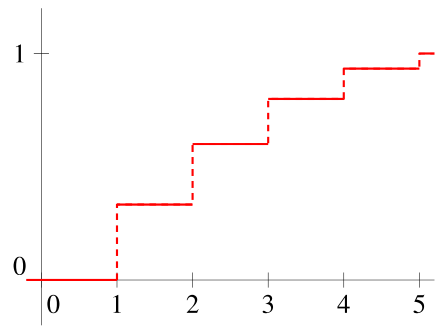
Le reste est du pur calcul : $E(X) = \dfrac{-1 \times 125 + 1 \times 75 + 2 \times 15 + 3 \times 1}{216} = -\dfrac{17}{216} \simeq 0.08$. On perdra donc en moyenne huit centimes d'euros par partie. Ensuite, $E(X^2) = \dfrac{1 \times 125 + 1 \times 75 + 4 \times 15 + 9 \times 1}{216}$ $= \dfrac{269}{216}$, donc $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \dfrac{269}{216} - \left(\dfrac{17}{216}\right)^2 = \dfrac{69\ 920}{46\ 656} = \dfrac{2\ 185}{1\ 458} \simeq 1.5$ (soit $\sigma \simeq 1.22$).

Exercice 2 (* à **)

- La première boule bleue sera tirée, au pire, au cinquième tirage (puisqu'il y a deux boules bleues) donc $X_1(\Omega) = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Les probabilités respectives se calculent aisément en faisant un petit arbre et en utilisant la formule des probabilités composées : $P(X_1 = 1) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$; $P(X_1 = 2) = \dfrac{4}{6} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{4}{15}$; $P(X_1 = 3) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{5}$; $P(X_1 = 4) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{4} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{15}$; puis $P(X_1 = 5) = \dfrac{1}{15}$. Si on préfère un joli tableau :

k	1	2	3	4	5
$P(X = k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$

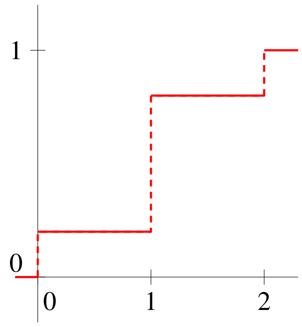
On en déduit $E(X) = \dfrac{5 + 2 \times 4 + 3 \times 3 + 4 \times 2 + 5}{15} = \dfrac{35}{15} = \dfrac{7}{3}$. La fonction de répartition ressemble à ceci :



- On a assez clairement $X_2(\Omega) = \{0; 1; 2\}$. Pour avoir $X_2 = 0$, il faut tirer les deux boules bleues lors des trois premiers tirages. Il y a $6 \times 5 \times 4 = 120$ tirages possibles pour ces trois tirages, dont $2 \times 4 \times 3 = 24$ avec les deux boules bleues tirées (2 ordres possibles pour les boules bleues, 4 possibilités pour la troisième boule, et 3 pour la position de son tirage), soit $P(X_2 = 0) = \dfrac{1}{5}$. On peut calculer de même $P(X_2 = 1) = \dfrac{2 \times 4 \times 3 \times 3}{120} = \dfrac{3}{5}$ (le facteur 2 correspond ici au choix de la boule bleue tirée). Notons qu'on peut retrouver $P(X_2 = 2)$ à partir des calculs effectués pour la variable X_1 : avoir $X_2 = 2$ correspond à tirer la première boule bleue au quatrième ou au cinquième tirage, donc $P(X_2 = 2) = P(X_1 = 4) + P(X_1 = 5) = \dfrac{3}{15} = \dfrac{1}{5}$. Un petit tableau pour faire joli :

k	0	1	2
$P(X = k)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

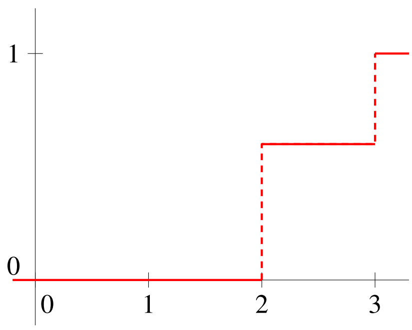
et une espérance de 1 (calcul quasiment inutile puisque le tableau est symétrique), et une fonction de répartition ressemblant à cela :



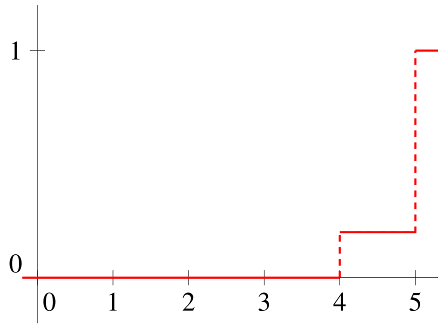
- Cette fois, on a $X_3(\Omega) = \{2; 3\}$ (on peut avoir épuisé une couleur après trois tirages, mais pas plus). L'évènement $X_3 = 3$ correspond à tirer une boule de chaque couleur lors des trois premiers tirages, ce qui peut se faire de $2^3 \times 3!$ façons (un facteur 2 pour le choix de la boule pour chaque couleur, puis 3! pour l'ordre des couleurs), donc $P(X_3 = 3) = \dfrac{2^3 \times 6}{120} = \dfrac{2}{5}$. Remarquons que cette fois encore on peut utiliser les calculs précédents pour obtenir $P(X_3 = 2)$, qui correspond à tirer deux boules de la même couleur, soit $3 \times P(X_2 = 0)$ (trois choix de couleur), ce qui donne bien $\dfrac{3}{5}$. Tableau :

k	2	3
$P(X = k)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$

soit $E(X_3) = \dfrac{2 \times 3 + 3 \times 2}{5} = \dfrac{12}{5}$, et la fonction de répartition suivante :



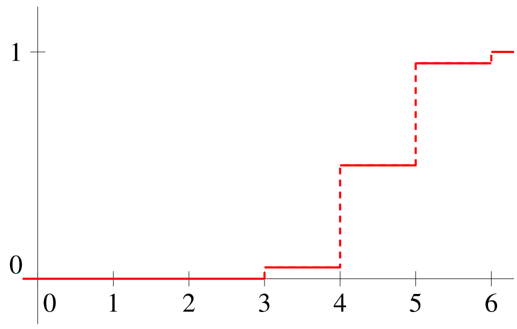
- Comme expliqué ci-dessus, il faut au moins 4 tirages pour se ramener à une seule couleur, et au bout de cinq tirages on ne peut plus avoir deux couleurs présentes, donc $X_4(\Omega) = \{4; 5\}$. L'évènement $X_4 = 4$ correspond à garder deux boules de la même couleur dans l'urne après quatre tirages, soit une probabilité de $3 \times P(X_1 = 5) = \frac{1}{5}$ (on peut bien sûr faire un calcul direct). On a donc $P(X_4 = 5) = \frac{4}{5}$, puis $E(X_4) = \frac{4 + 5 \times 4}{5} = \frac{24}{5}$, et la fonction correspondante :



- On a trois boules 1 et trois boules 2 dans l'urne, donc $X_5(\Omega) = \{3; 4; 5; 6\}$ (au pire, on tire les trois 1, au mieux les trois 2). Ensuite, $P(X_5 = 3) = P(X_5 = 6) = \frac{3!}{120} = \frac{1}{20}$ (il n'y a qu'à choisir l'ordre des couleurs) ; et $P(X_5 = 4) = P(X_5 = 5) = \frac{3 \times 2 \times 3 \times 3}{120} = \frac{9}{20}$ (pour explication du numérateur, 3 puis 2 sont les choix des couleurs de même numéro, 3 le choix de la couleur de l'autre numéro, et le dernier 3 la position du tirage de l'autre numéro), soit :

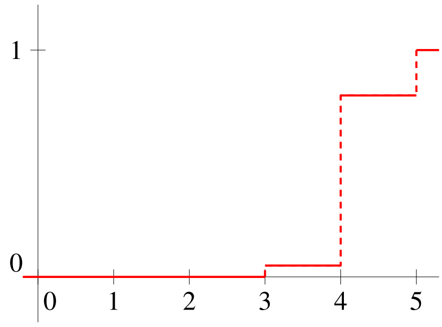
k	3	4	5	6
$P(X = k)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$

On en déduit $E(X_5) = \frac{3 + 4 \times 9 + 5 \times 9 + 6}{20} = \frac{90}{20} = \frac{9}{2}$ (logique au vu de la symétrie) et la fonction de répartition :



- Au mieux, on atteint 6 en trois tirages si on tire les trois numéros 2 tout de suite. Au pire, il faudra attendre le cinquième tirage (si on tire les trois 1 et un 2 lors des quatre premiers tirages), soit $X_6(\Omega) = \{3; 4; 5\}$. Comme vu ci-dessus, $P(X_6 = 3) = \frac{1}{20}$. Pour avoir $X_6 = 4$, il faut soit tirer un 1 et deux 2 lors des trois premiers tirages (peu importe alors le quatrième tirage), soit un 2 et deux 1, suivis d'un 2 au quatrième tirage, soit $P(X_6 = 4) = \frac{3 \times 3 \times 2 \times 3 \times 3 + 3 \times 3 \times 2 \times 3 \times 2}{360} = \frac{3}{4}$. Il reste donc $P(X_6 = 5 = \frac{1}{5})$ (ce qu'on obtient facilement directement), soit :

k	3	4	5
$P(X = k)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{5}$



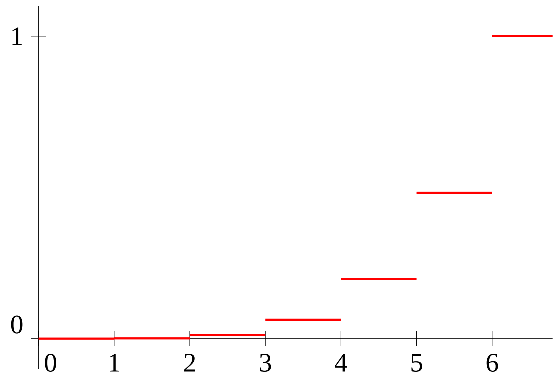
Exercice 3 (**)

On a bien évidemment $X(\Omega) = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ (quand on lance simultanément quatre dés, il est tout à fait possible que le plus grand chiffre obtenu soit 1 puisque les répétitions sont possibles). Notons également que $|\Omega| = 6^4 = 1\ 296$. Plutôt que de calculer directement la loi de X, il est beaucoup plus simple ici de calculer la probabilité des évènement A_i : « Le plus grand chiffre obtenu est inférieur ou égal à i ». En effet, cela revient à dire que chacun des quatre dés a donné un résultat inférieur ou égal à i, ou encore qu'on a i possibilités pour chaque dé. Ainsi, $P(A_6) = \frac{6^4}{6^4} = 1$; $P(A_5) = \frac{5^4}{6^4} = \frac{625}{1\ 296}$; $P(A_4) = \frac{4^4}{6^4} = \frac{256}{1\ 296}$; $P(A_3) = \frac{81}{1\ 296}$; $P(A_2) = \frac{16}{1\ 296}$ et enfin $P(A_1) = \frac{1}{1\ 296}$. Ensuite, remarquons que l'évènement $X = i$ correspond à avoir A_i réalisé (si le maximum vaut i, il est certainement inférieur ou égal à i), mais pas A_{i-1} (sinon, le maximum sera strictement inférieur à i). Chaque évènement A_{i-1} étant inclus dans A_i, on en déduit que $P(X = 6) = P(A_6) - P(A_5) = \frac{1\ 296 - 625}{1\ 296} = \frac{671}{1\ 296}$, $P(X = 5) = P(A_5) - P(A_4) = \frac{369}{1\ 296}$ etc. Soit la loi suivante :

k	1	2	3	4	5	6
$P(X = k)$	$\frac{1}{1\ 296}$	$\frac{15}{1\ 296}$	$\frac{65}{1\ 296}$	$\frac{175}{1\ 296}$	$\frac{369}{1\ 296}$	$\frac{671}{1\ 296}$

On a donc $E(X) = \frac{1 + 30 + 195 + 700 + 1\ 845 + 4\ 026}{1\ 296} = \frac{6\ 797}{1\ 296} \simeq 5.24$; puis $E(X^2) = \frac{1 + 60 + 585 + 2\ 800 + 9\ 225 + 24\ 156}{1\ 296} = \frac{36\ 827}{1\ 296}$, et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 \simeq 0.91$ (soit $\sigma \simeq 0.95$).

Évidemment, tracer la courbe de la fonction de répartition n'est pas extrêmement aisé quand on n'a pas de quoi découper son échelle en 1 296 de façon précise. Ce qui est intéressant ici, c'est que les sauts apparaissant sur cette courbe sont exactement les valeurs des probabilités des évènements A_i calculées un peu plus haut. On verra dans un chapitre ultérieur que, pour calculer la loi d'un maximum, comme ici, il est souvent efficace de passer par la fonction de répartition. Voici tout de même la courbe :



Exercice 4 (***)

1. Comme l'énoncé nous l'a signalé, on aura nécessairement $X \geqslant 2$. On peut par ailleurs prendre toutes les valeurs jusqu'à n inclus (un tirage possible où $X = n$ est n ; $n-1$; ... ; 4 ; 3 ; 1 ; 2), donc $X(\Omega) = \{2; \dots; n\}$.
2. Dans le cas où $n = 3$, il n'y a que $3! = 6$ ordres possibles pour les tirages (on considèrera qu'on mène les tirages jusqu'au bout même une fois qu'on a tiré un numéro supérieur au précédent, c'est plus simple). Parmi ces six, il y en a 3 pour lesquels le deuxième numéro est plus grand que le premier : 123 ; 132 et 231, donc $P(X = 2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; et donc trois pour lesquels $X = 3$ (on n'aura pas nécessairement un troisième numéro plus grand que le deuxième, mais comme on n'a plus de boule à tirer il faut bien s'arrêter), donc $P(X = 3) = \frac{1}{2}$. L'espérance correspondante vaut $\frac{5}{2}$.

   Dans le cas où $n = 5$, il y a $5! = 120$ tirages possibles. On aura $X = 2$ si on débute notre série de tirages par 12, 13, 14, 15, 23, 24, 25, 34, 35 ou 45 (puis on peut tirer les trois derniers nombres dans n'importe quel ordre), soit $P(X = 2) = \frac{10 \times 3!}{120} = \frac{1}{2}$. On aura $X = 3$ si on commence par 21, 31, 41, 51 (puis n'importe quoi), ou 324, 325, 423, 425, 435, 523, 524, 534, soit $P(X = 3) = \frac{4 \times 3! + 8 \times 2!}{120} = \frac{1}{3}$. On aura $X = 4$, si on débute par 321, 431, 421, 541, 531, 521, et pour les tirages 43251, 54231, 53241, soit $P(X = 4) = \frac{6 \times 2! + 3}{120} = \frac{1}{8}$. Enfin, on aura $X = 5$ pour les tirages 43215, 53214, 54213, 54312, et 54321, soit $P(X = 5) = \frac{5}{120} = \frac{1}{24}$. On obtient cette fois-ci une espérance valant $E(X) = 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{8} + 5 \times \frac{1}{24} = \frac{65}{24} \simeq 2.71$.

   Dans le cas général, il va bien falloir trouver une façon intelligente de faire le calcul. Supposons $X = k$, cela signifie qu'on a tiré k numéros dont les $k-1$ premiers sont apparus en ordre décroissant. Une fois qu'on sait quel est le k-ème numéro tiré, l'ordre du tirage est donc totalement imposé. Or, ce k-ème numéro tiré peut être n'importe lequel des k numéros tirés, sauf le plus petit. Ainsi, si on $X = 4$ et qu'on a tiré les numéros 1, 3, 6 et 8, on a pu tirer dans les trois ordres suivants : 8613, 8316 ou 6318. On a donc $\binom{n}{k}$ choix pour les numéros tirés, $k-1$ choix pour le numéro qui apparait au tirage k, et $(n-k)!$ choix pour l'ordre des tirages suivant le tirage numéro k. Conclusion $P(X = k) = \frac{\binom{n}{k}(k-1)(n-k)!}{n!} =$

$\frac{k-1}{k!}$. Seule petite exception si $k = n$: il faut ajouter le cas très particulier où on a tiré tous les numéros dans le sens décroissant, ce qui représente un seul cas sur les $n!$ possibles, donc $P(X = n) = \dfrac{\binom{n}{n}(n-1)0! + 1}{n!} = \dfrac{n}{n!}$. On peut désormais calculer l'espérance de X : $E(X) = \sum_{k=2}^{k=n} \frac{k(k-1)}{k!} + n \times \frac{1}{n!}$ (on a séparé le cas particulier signalé auparavant pour rendre le calcul plus simple), soit $E(X) = \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{(k-2)!} + \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^{k=n-2} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!}$.

3. On sait que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n!} = 0$, et $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} = e$ (c'est la somme de la série exponentielle), donc $\lim_{n\to+\infty} E(X) = e$ (eh oui, c'est étonnant mais c'est comme ça).

Exercice 5 (*)

Si on tire une seule carte, et qu'on note Y sa valeur en points, $Y(\Omega) = \{0; 1; 2; 3; 4\}$, et on a $P(Y = i) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$, si $i \in \{1; 2; 3; 4\}$, et $P(Y = 0) = \frac{36}{52} = \frac{9}{13}$ (puisqu'il y a quatre As, quatre Rois, quatre Dames, quatre Valets, et 36 cartes sans points dans un jeu de 52). On a donc $E(Y) = \frac{4+3+2+1+0\times 9}{13} = \frac{10}{13}$. Considérons désormais le nombre de points X obtenus quand on pioche 13 cartes. On a $X = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{13}$, où Y_1 désigne le nombre de points de la première carte piochée, Y_2 celui de la deuxième etc. Par linéarité de l'espérance, $E(X) = E(Y_1) + \dots + E(Y_{13}) = 13 \times E(Y) = 10$.

Exercice 6 (***)

1. Pour chacune des deux pièces, il y a 2^n tirages équiprobables possibles. Parmi ceux-ci, il y en a $\binom{n}{k}$ comportant k Piles (il faut choisir la place des k Piles parmi les n tirages. La probabilité qu'une pièce donne k fois Pile est donc $\dfrac{\binom{n}{k}}{2^n}$, et les lancers des deux pièces étant indépendants, la probabilité demandée vaut $\left(\dfrac{\binom{n}{k}}{2^n}\right)^2$.
2. On a donc $P(E_n) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{2^{2n}} \binom{n}{k}^2 = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} \times \binom{n}{n-k}$. On a utilisé la symétrie des coefficients binomiaux pour modifier ce qui se trouve dans la somme, et ainsi reconnaitre un cas particulier de formule de Vandermonde (en reprenant les notations du cours, a et b sont ici égaux à n, et le n du cours à $2n$). On a donc $P(E_n) = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$.
3. Les variables B_k sont les variables indicatrices des évènements E_k. La variable X_n représente le nombre de fois, au cours des n tirages, où les deux pièces se sont retrouvées avec le même nombre de Piles tirés.
4. Par linéarité de l'espérance, et propriété du cours sur l'espérance des variables indicatrices, $E(X_n) = \sum_{k=1}^{k=n} E(B_k) = \sum_{k=1}^{k=n} P(E_k)$.

5. On a donc $E(X_n) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{4^k}\binom{2k}{k}$. Essayons de prouver par récurrence la propriété P_n : $E(X_n) = \frac{2n+1}{4^n}\binom{2n}{n} - 1$. Pour $n = 1$, on a $E(X_1) = \frac{1}{4}\binom{2}{1} = \frac{1}{2}$, et $\frac{2n+1}{4^n}\binom{2n}{n} - 1 = \frac{3}{4} \times 2 - 1 = \frac{1}{2}$, ça marche. Supposons donc la formule vérifiée au rang n, on a alors $E(X_{n+1}) = E(X_n) + \frac{1}{4^{n+1}}\binom{2n+2}{n+1}$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, $E(X_{n+1}) = \frac{2n+1}{4^n}\binom{2n}{n} - 1 + \frac{1}{4^{n+1}}\binom{2n+2}{n+1} = \frac{1}{4^{n+1}}\left(4(2n+1)\binom{2n}{n} + \binom{2n+2}{n+1}\right) - 1$. Or, $4(2n+1)\binom{2n}{n} + \binom{2n+2}{n+1} = 4(2n+1)\frac{(2n)!}{n!^2} + \binom{2n+2}{n+1} = \frac{4(n+1)^2(2n+1)!}{(n+1)!^2} + \binom{2n+2}{n+1} = \frac{2(n+1)(2n+2)!}{(n+1)!^2} + \binom{2n+2}{n+1} = (2n+3)\binom{2n+2}{n+1}$, ce qui donne exactement la formule souhaitée et achève donc la récurrence.

Exercice 7 (d'après Ecricome 2008) (***)

1. Si $n = 0$, on a bien sûr toujours $T_n = 0$. Dans le cas contraire, il y aura toujours au moins une case non vide, et au plus n après n lancers, sachant toutefois qu'on ne peut dépasser N cases non vides dans le cas où $N < n$ donc $T_n(\Omega) = \{1; 2; \dots; min(n, N)\}$.
2. Après 1 lancer, il y aura toujours exactement une case non vide (celle dans lequel on a lancé la boule), donc $T_1 = 1$ (variable aléatoire constante). Au deuxième lancer, soit on relance dans la même case qu'au premier, et on a alors $T_2 = 1$, soit on lance dans une autre et $T_2 = 2$. La probabilité de lancer dans la même case étant $\frac{1}{N}$, on a $P(T_2 = 1) = \frac{1}{N}$, et $P(T_2 = 2) = \frac{N-1}{N}$.
3. Pour avoir $T_n = 1$, il faut avoir obtenu à chaque lancer à partir du deuxième la même case qu'au premier lancer, ce qui se produit avec probabilité $\frac{1}{N}$ à chaque lancer, soit $P(T_n = 1) = \left(\frac{1}{N}\right)^{n-1}$.

   Le nombre de tirages donnant $T_n = 2$ est obtenu en choisissant deux cases parmi les N, puis en se laissant deux possibilités à chaque tirage, et en supprimant à la fin les 2 tirages où on a tiré toujours dans la même case, soit $\binom{N}{2} \times 2^n - 2 = 2^{n-1}N(N-1) - 2$. Ceci est à diviser par le nombre total de tirages, qui vaut N^n, donc $P(T_n = 2) = \frac{N(N-1)2^n - 2}{N^n}$.

   Si $n \leqslant N$, $T_n = n$ si on tombe dans une nouvelle case à chaque tirage, ce qui correspond à $N(N-1)\dots(N-n+1)$ tirages, soit $P(T_n = n) = \frac{N(N-1)\dots(N-n+1)}{N^n} = \frac{N!}{(N-n)!N^n}$. Si $n > N$, on ne peut pas avoir n cases non vides, donc $P(T_n = n) = 0$.
4. Les évènement $T_n = k$ forment un système complet d'évènements, donc on peut écrire en utilisant la formule des probabilités totales que $P(T_{n+1} = k) = \sum_{i=1}^{i=n} P(T_n = i)P_{T_n=i}(T_{n+1})$. Mais parmi les probabilités conditionnelles apparaissant dans cette formule, seules deux sont non nulles : soit on avait déjà k cases non vides après n tirages et on a à nouveau tiré dans une de ces k cases (probabilité $P_{T_n=k}(T_{n+1} = k) = \frac{k}{N}$) ; soit on en avait $k-1$ non vides et on a tiré dans une des $N-(k-1)$ cases restantes : $P_{T_n=k-1}(T_{n+1} = k) = \frac{N-k+1}{N}$. La formule demandée est donc exacte.

5. (a) On a $G_n(1) = \sum_{k=1}^{k=n} P(T_n = k) = 1$.

   (b) Calculons : $E(T_n) = \sum_{k=1}^{k=n} kP(T_n = k)$. Or, en dérivant G_n, on obtient $G_n'(x) = \sum_{k=1}^{k=n} kP(T_n = k)x^{k-1}$. En remplaçant par 1, on tombe exactement sur $E(T_n)$, qui est donc égale à $G_n'(1)$.

   (c) Notons pour commencer que la formule de la question 4 reste en fait valable pour $k = n+1$, puis sommons ces égalités :
$G_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{k=n+1} P(T_{n+1} = k)x^k = \sum_{k=1}^{k=n+1} \left(\frac{k}{N}P(T_n = k) + \frac{N-k+1}{N}P(T_n = k-1)\right) x^k$
$= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{k=n+1} kP(T_n = k)x^k + (N-k+1)P(T_n = k-1)x^k$
$= \frac{x}{N} \sum_{k=1}^{n} kP(T_n = k)x^{k-1} + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{k=n} (N-k)P(T_n = k)x^{k+1}$
$= \frac{x}{N} G_n'(x) + \frac{x}{N} \sum_{k=1}^{k=n} NP(T_n = k)x^k + \frac{x^2}{N} \sum_{k=1}^{k=n} kP(T_n = k)x^{k-1}$
$= \frac{x}{N} G_n'(x) + xG_n(x) - \frac{x^2}{N} G'n(x)$, ce qui correspond bien à la formule annoncé (les indices disparaissant dans certaines sommes du calcul correspondent à des termes nuls).

   (d) Dérivons donc : $G_{n+1}'(x) = \frac{1}{N}(1-2x)G_n'(x) + \frac{1}{N}(x-x^2)G_n''(x) + G_n(x) + xG_n'(x)$. En prenant $x = 1$ (ce qui a le bon goût d'annuler le terme faisant intervenir la dérivée seconde) et en réutilisant les résultats précédents, on a $E(T_{n+1}) = -\frac{1}{N}E(T_n) + 1 + E(T_n) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) E(T_n) + 1$.

   (e) Notons $u_n = E(T_n)$. La suite (u_n) est arithémtico-géométrique, d'équation de point fixe $x = \left(1 - \frac{1}{N}\right) x + 1$, donnant $x = N$. Posons donc $v_n = u_n - N$, alors $v_{n+1} = u_{n+1} - N = \left(1 - \frac{1}{N}\right) u_n + 1 - N = \frac{N-1}{N} u_n - (N-1) = \frac{N-1}{N}(u_n - N) = \frac{N-1}{N} v_n$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{N-1}{N}$ et de premier terme $v_1 = u_1 - N = 1 - N$, donc $v_n = (1-N)\left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-1} = -\frac{(N-1)^n}{N^{n-1}}$. On en déduit que $u_n = N - \frac{(N-1)^n}{N^{n-1}} = \frac{N^n - (N-1)^n}{N^{n-1}} = N\left(1 - \frac{(N-1)^n}{N^n}\right) = N\left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right)$. Lorsque n tend vers $+\infty$, $\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n$ va tendre vers 0, la parenthèse vers 1, et l'espérance de T_n vers N, ce qui est intuitivement normal.

Feuille d'exercices n°16 : Lois usuelles finies

ECE3 Lycée Carnot

4 mars 2011

Exercice 1 (*)

On lance des fusées vers Saturne. À chaque lancer, la probabilité de réussite est de 0.7. On effectue dix lancers successifs, quelle est la probabilité d'obtenir k lancers réussis ? Quel est le nombre moyens de lancers réussis ? Combien faudrait-il de lancers pour avoir 98% de chances qu'au moins un lancer ait réussi ?

Exercice 2 (*)

Dans une urne se trouvent 10 boules rouges et 5 vertes.

1. On pioche sans remise six boules dans l'urne et on note R le nombre de boules rouges obtenues et V le nombre de vertes. Donner la loi, l'espérance et la variance de R et de V (pas de calcul !).
2. Même question lorsque les tirages sont effectués avec remise.

Exercice 3 (**)

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n, p)$. On définit $Y = \dfrac{1}{1+X}$, donner l'espérance de Y. On suppose ensuite que $p = \dfrac{1}{2}$ et on pose $Z = \dfrac{a^X}{2n}$, calculer $E(Z)$.

Exercice 4 (*)

Les bouteilles de vin du supermarché du coin ont une chance sur 15 d'être bouchonnées et inbuvables (indépendamment les unes des autres). Si on achète un lot de n bouteilles, à partir de quelle valeur de n aura-t-on en moyenne au moins une bouteille bouchonnée ?

Exercice 5 (***)

On désire analyser le sang d'une population de N individus pour détecter la présence d'un virus qui affecte les individus de la population avec une probabilité p. On a pour cela deux possibilités : soit on analyse le sang de chaque personne ; soir on regroupe les personnes en groupes de n, dont on analyse le sang en groupe. Si le test du groupe est positif, on analyse individuellement chaque individu du groupe.

1. On note X le nombre de groupes positifs. Donner la loi de X.
2. On note Y le nombre total d'analyses effectuées avec la seconde méthode. Calculer en fonction de N, n et p l'espérance de Y.
3. Comparez les deux méthodes dans le cas où $N = 1000$, $n = 10$ et $p = 0.01$.

Exercice 6 (**)

Un jeu de 32 cartes est truqué : on remplace une carte autre que l'as de pique par un deuxième As de pique. On tire au hasard dans ce jeu (simultanément) n cartes.

1. Quelle est (en fonction de n), la probabilité de déceler la supercherie ?
2. On suppose $n = 4$ et on tire plusieurs fois de suite 4 cartes au hasard dans le jeu (en remettant à chaque fois les cartes après le tirage). Quel est le nombre minimum de tirages à effectuer avant que la probabilité de découvrir la supercherie n'atteigne 95% ?

Exercice 7 (**)

Une piste rectiligne est divisée en cases numérotées $0; 1; \dots; k$, de gauche à droite. Une puce se déplace vers la droite de une ou deux cases au hasard à chaque saut. Au départ, elle est sur la case 0. Soit X_n le numéro de la case occupée par la puce après n sauts et Y_n le nombre de fois où la puce a sauté d'une case au cours des n premiers sauts.

1. Donner la loi, l'espérance et la variance de Y_n.
2. En déduire celles de X_n.

Exercice 8 (***)

Une secrétaire effectue n appels pour tenter de joindre n correspondants distincts. Pour chaque appel, elle a une probabilité p d'obtenir son correspondant, et $q = 1 - p$ de ne pas le joindre.

1. On note X le nombre de correspondants obtenus. Quelle est la loi de X ? Donner son espérance et sa variance.
2. La secrétaire tente une deuxième fois de joindre les $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre la première fois. On note Y le nombre de correspondants joints à la deuxième tentative, et $Z = X + Y$. Quelles sont les valeurs que peut prendre Z ?
3. Calculer $P(Z = 0)$ et $P(Z = 1)$ (pour cette dernière probabilité, on doit obtenir $npq^{2n-2}(1+q)$).
4. Démontrer que $P(Z = l) = \displaystyle\sum_{k=0}^{l} P((X = k) \cap (Y = l - k)$.
5. Calculer $P_{X=k}(Y = h)$ pour les valeurs de k et h pour lesquelles cela a un sens, en déduire $P(Z = l)$.
6. Montrer que $\dbinom{n}{k}\dbinom{n-k}{l-k} = \dbinom{n}{l}\dbinom{l}{k}$. En déduire que $P(Z = l) = \dbinom{n}{l} p^l (1+q)^l (q^2)^{n-l}$.
7. En constatant que $p(1 + q) = 1 - q^2$, reconnaitre la loi suivie par Z.
8. Retrouver ce résultat en calculant la probabilité qu'un correspondant donné soit joint à l'issue des deux appels.

Corrigé de la feuille d'exercices n°16

Exercice 1 (*)

Le nombre X de lancers réussis suit une loi binomiale de paramètre $(10;0.7)$. On a donc $P(X = k) = \binom{10}{k}(0.7)^k(0.3)^{10-k}$ et $E(X) = np = 7$. La probabilité de n'avoir aucun lancer réussi sur q tentatives vaut 0.3^q. Elle passe en-dessous de 2% lorsque $0.3^q \leqslant 0.02$, soit $q \ln 0.3 \leqslant \ln 0.02$, donc $q \geqslant \dfrac{\ln 0.02}{\ln 0.3} \simeq 3.25$. Il suffit donc de quatre lancers pour avoir plus de 98% de chance qu'un lancer au moins réussisse.

Exercice 2 (*)

1. Il s'agit de l'exemple standard de loi hypergéométrique. Ici le paramètre de R est $\left(15;6;\dfrac{2}{3}\right)$ (nombre total de boules ; nombre de tirages ; proportion de boules rouges). On a donc (si $1 \leqslant k \leqslant 6$, sinon la probabilité est nulle) $P(R = k) = \dfrac{\binom{10}{k}\binom{5}{6-k}}{\binom{5}{15}}$; $E(R) = 6 \times \dfrac{2}{3} = 4$ et $V(R) = 6 \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{15-6}{15-1} = \dfrac{6}{7}$. Pour V, on utilise par exemple que $V = 6 - R$, donc $P(V = k) = P(R = 6 - k)$; $E(V) = 6 - 4 = 2$ et $V(V) = V(R) = \dfrac{6}{7}$.
2. Cette fois-ci, on a une loi binomiale de paramètre $\left(6;\dfrac{2}{3}\right)$.

   On a donc $P(R = k) = \dbinom{6}{k}\left(\dfrac{2}{3}\right)^k \dfrac{1}{3^{n-k}} = \dbinom{6}{k}\dfrac{2^k}{3^n}$; $E(R) = 4$ et $V(R) = 6 \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{3}$.

Exercice 3 (**)

On a $X(\Omega) = \{0;1;2;\dots;n\}$, et $P(X = k) = \dbinom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$. D'après le théorème du transfert, on a donc $E(Y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k}\frac{p^k(1-p)^{n-k}}{1+k}$. On aimerait bien se débarasser du $k+1$ au dénominateur, ça tombe bien puisque $\dfrac{1}{k+1}\dbinom{n}{k} = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{n+1}{k+1}$. On a donc $E(Y) = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n}\binom{n+1}{k+1}p^k(1-p)^{n-k} = \frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{j=n+1}\binom{n+1}{j}p^{j-1}(1-p)^{n-j+1}$. En multipliant le tout par p, on fait apparaitre un binome de Newton à l'exception du premier terme qui a disparu dans le décalage d'indice ! On a donc $E(Y) = \dfrac{1}{p(n+1)}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\binom{n+1}{j}p^j(1-p)^{n+1-j} = \frac{1}{p(n+1)}(1-(1-p)^{n+1})$. Notez que ça ne donne pas du tout $\dfrac{1}{1+E(X)}$.

Si on suppose que $p = \dfrac{1}{2}$, on a simplement $P(X = k) = \dfrac{1}{2^n}\dbinom{n}{k}$. On en déduit, toujours avec le transfert, que $E(Z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k}\frac{a^k}{2n \times 2^n} = \frac{(1+a)^n}{2n \times 2^n} = \frac{1}{2n} \times \left(\frac{1+a}{2}\right)^n$ (on a simplement utilisé la formule du binome de Newton).

Exercice 4 (*)

Notons X la variable aléatoire donnant le nombre de bouteilles bouchonnées dans un lot de n bouteilles. On a $X \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{15}\right)$ (on répète n fois une situation qui se produit avec probabilité $\frac{1}{15}$ et on compte le nombre d'occurences). Le nombre moyen de bouteilles bouchonnées dans le lot est $E(X) = \frac{n}{15}$. Il atteindra donc 1 pour $n = 15$.

Exercice 5 (***)

1. Commençons par calculer la probabilité qu'un groupe soit positif. Pour cela, il est plus simple de passer par le complémentaire : le groupe est testé négatif si tous les individus du groupe sont négatifs, ce qui se produit avec une probabilité $(1-p)^n$. Un groupe est donc positif avec une probabilité $1-(1-p)^n$. Ensuite, la loi du nombre de groupes positifs est une loi binomiale de paramètre $\left(\frac{N}{n}; 1-(1-p)^n\right)$ (puisqu'il y a $\frac{N}{n}$ groupes).
2. Dans un premier temps, on effectue $\frac{N}{n}$ analyses (une par groupe). Parmi celles-ci, il y en a en moyenne $(1-(1-p))^n \times \frac{N}{n}$ de positives (espérance de la variable aléatoire étudiée à la question précédente). Pour chaque groupe positif, on doit effectuer n analyses supplémentaires. On a donc au total en $E(Y) = \frac{N}{n} + (1-(1-p)^n)N$ analyses à faire.
3. Si $N = 1\ 000$, la première méthode conduit à faire 1 000 analyses. Avec la deuxième méthode, on en a en moyenne $100 + 1\ 000(1 - 0.99^{10}) \simeq 196$. Il est donc nettement plus avantageux de regrouper les tests !

Exercice 6 (**)

1. Le nombre de tirages possibles de n cartes dans un jeu de 32 vaut $\binom{32}{n}$. Ce jeu est par ailleurs sonstitué de deux As de pique et de 30 cartes « normales ». Si on veut découvrir la supercherie, il faut tirer parmi nos n cartes les deux As de pique (pas de choix) et $n-2$ cartes quelconques parmi les 30 restantes, ce qui fait $\binom{30}{n-2}$ possibilités. La probabilité de découvrir la supercherie est donc de $\dfrac{\binom{30}{n-2}}{\binom{32}{n}}$.
2. Dans le cas où $n = 4$, la probabilité de découvrir la supercherie sur un tirage est de $\dfrac{\binom{30}{2}}{\binom{32}{4}} = \dfrac{30 \times 29}{2} \times \dfrac{4 \times 3 \times 2}{32 \times 31 \times 30 \times 29} = \dfrac{3}{248}$. La probabilité de **ne pas** découvrir la supercherie après p tirages est donc de $\left(\frac{245}{248}\right)^p$, et on souhaite savoir pour quelle valeur de p cette dernière probabilité devient inférieure à 5%. On résout donc $\left(\frac{245}{248}\right)^p \leqslant 0.05 \Leftrightarrow p \geqslant \dfrac{\ln 0.05}{\ln 245 - \ln 248} \simeq 246.1$. Il faut donc attendre 247 tirages avant d'être sûr à 95% que la supercherie soit découverte ! C'est beaucoup. Il faut déjà attendre 57 tirages pour avoir plus d'une chance sur deux de découvrir le truc...

Exercice 7 (**)

1. Puisqu'on a une probabilité $\frac{1}{2}$ à chaque saut d'effectuer un saut d'une cases, et qu'on répète l'expérience n fois, on aura $Y_n \sim \mathcal{B}\left(n; \frac{1}{2}\right)$. En particulier, $E(Y_n) = \frac{n}{2}$ et $V(Y_n) = n \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{n}{4}$.
2. Il suffit de constater que, si on a effectué Y_n saut d'une case, on en a effctué $n - Y_n$ de deux cases, et qu'on a donc parcouru $Y_n + 2(n - Y_n) = 2n - Y_n$ cases lors des n sauts. Autrement dit, on a tout simplement $X_n = 2n - Y_n$. On en déduit que $X_n(\Omega) = \{n; n+1; \dots; 2n\}$, que $P(X_n = k) = P(Y_n = 2n - k) = \frac{n}{2n-k} \times \frac{1}{2^n}$; puis $E(X_n) = E(2n - Y_n) = 2n - \frac{n}{2} = \frac{3n}{2}$; enfin $V(X_n) = V(2n - Y_n) = V(Y_n) = \frac{n}{4}$.

Exercice 8 (***)

1. C'est une loi binomiale de paramètre (n, p). On a en particulier $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.
2. La variable Z représente le nombre total de correspondants obtenus, on a donc $Z(\Omega) = \{0; 1; \dots; n\}$.
3. On a $Z = 0$ si $X = 0$ et $Y = 0$, donc si on fait deux tours complets sans qu'un seul appel réussisse. On a donc $P(Z = 0) = (1-p)^{2n}$. Pour $Z = 1$, on a soit $X = 0$ et $Y = 1$, soit $X = 1$ et $Y = 0$, et attention, les deux possibilités n'ont pas la même probabilité ! Si $X = 0$ et $Y = 1$, un appel a réussi parmi les n derniers, et on a fait $2n$ appels au total, soit une proba de $(1-p)^n \times \binom{n}{1} p(1-p)^{n-1} = npq^{2n-1}$. Pour le cas où $X = 1$ et $Y = 0$, un appel parmi les n premiers a réussi, et on en a retenté $n-1$ qui ont raté, soit une probabilité de $\binom{n}{1} p(1-p)^{n-1} \times (1-p)^{n-1} = npq^{2n-2}$. Au total, $P(Z = 1) = npq^{2n-2}(1+q)$.
4. Comme précédemment, si on a l appels réussis au total, c'est qu'on en a eu k (avec $0 \leqslant k \leqslant l$) au premier tour, et $l - k$ au second tour, autrement dit que $X = k$ et $Y = l - k$. On a donc bien $P(Z = l) = \sum_{k=0}^{k=l} P((X = k) \cap (Y = l - k))$.
5. On sait que $X = k$, il y a donc $n - k$ appels à retenter au deuxième tour. La probabilité conditionnelle $P_{X=k}(Y = h)$ est donc la probabilité de réussir h appels parmi $n - k$. Cette probabilité est non nulle si $h \in \{0; 1; \dots; n-k\}$ et elle vaut alors $\binom{n-k}{h} p^h (1-p)^{n-k-h}$. On a donc $P(Z = l) = \sum_{k=0}^{k=l} P(X = k) P_{X=k}(Y = l - k) = \sum_{k=0}^{k=l} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \binom{n-k}{l-k} p^{l-k} q^{n-l} = \sum_{k=0}^{k=l} \binom{n}{k} \binom{n-k}{l-k} p^l q^{2n-k-l}$.
6. Il suffit de calculer $\binom{n}{k}\binom{n-k}{l-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{(n-k)!}{(l-k)!(n-l)!} = \frac{n!}{k!(l-k)!(n-l)!}$ et $\binom{n}{l}\binom{l}{k} = \frac{n!}{l!(n-l)!} \times \frac{l!}{k!(l-k)!} = \frac{n!}{(n-l)!k!(l-k)!}$. On peut utiliser cette égalité pour simplifier l'expression obtenue à la question précédente :
$$P(Z = l) = \sum_{k=0}^{k=l} \binom{n}{l}\binom{l}{k} p^l q^{2n-k-l} = \binom{n}{l} p^l q^{2n-2l} \sum_{k=0}^{k=l} \binom{l}{k} q^{l-k} = \binom{n}{l} p^l (1+q)^l (q^2)^{n-l}.$$

7. Comme $p(1+q) = (1-q)(1+q) = 1-q^2$, on a $P(Z=l) = \binom{n}{l}(1-q^2)^l(q^2)^{n-l}$. La variable aléatoire Z suit dont une loi binomiale de paramètre $(n; 1-q^2)$.

Sujet d'annales : Ecricome 2002

ECE3 Lycée Carnot

8 mars 2011

Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernables au toucher. On y prélève une boule, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne avec c boules de la couleur de la boule tirée (c étant évidemment un entier naturel). On répète cette épreuve, on réalise ainsi une succession de n tirages ($n \geqslant 2$).

I. Étude du cas $c = 0$.

On effectue donc ici n tirages avec remise de la boule dans l'urne.
On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n tirages et Y la variable aléatoire égale au numéro du premier tirage pour lequel on obtient une boule blanche (si on ne tire que des boules noires, on posera $Y = 0$).

1. Déterminer la loi de X. Donner la valeur de $E(X)$ et de $V(X)$.
2. Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, déterminer la probabilité $P(Y = k)$ de l'événement $(Y = k)$, puis déterminer $P(Y = 0)$.
3. Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} P(Y = k) = 1$.
4. Pour $x \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} kx^k = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}$.
5. En déduire $E(Y)$.

II. Étude du cas $c \neq 0$.

On considère les variables aléatoires $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ indicatrices des évènements « On tire une boule blanche au i-ème tirage ». On définit alors, pour tout p in $\{2, \dots, n\}$, la variable aléatoire Z_p, par $Z_p = \displaystyle\sum_{i=1}^{k=p} X_i$.

1. Que représente la variable Z_p ?
2. Donner la loi de X_1 et l'espérance $E(X_1)$ de X_1.
3. Déterminer les probabilités conditionnelles $P_{X_1=0}(X_2 = 0)$; $P_{X_1=0}(X_2 = 1)$; $P_{X_1=1}(X_2 = 0)$ et $P_{X_1=1}(X_2 = 1)$. En déduire la loi de X_2 puis l'espérance $E(X_2)$.
4. Déterminer la loi de probabilité de Z_2.
5. Déterminer l'univers image $Z_p(\Omega)$ de Z_p.
6. Soit $p \leqslant n - 1$.

   (a) Déterminer $P_{Z_p=k}(X_{p+1} = 1)$ pour $k \in Z_p(\Omega)$.

(b) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que $P(X_{p+1} = 1) = \dfrac{1 + cE(Z_p)}{2 + pc}$.

(c) En déduire, par un raisonnement par récurrence, que X_p est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

Corrigé du sujet Ecricome 2002

I. Étude du cas $c = 0$.

1. On cherche à compter le nombre de boules blanches tirées lors de n tirages avec remise. La variable X suit une loi binômiale de paramètre $\left(n, \frac{1}{2}\right)$.

2. On a $Y = 0$ si on tire n boules noires, donc $P(Y = 0) = \frac{1}{2^n}$. Et on a $Y = k$ si la séquence de tirages commence par $NN \dots NB$, avec $k - 1$ noires au départ, ce qui a une probabilité $\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^k}$.

3. En effet, $\sum_{k=0}^{n} P(Y = k) = \frac{1}{2^n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2}\frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} + 1 - \frac{1}{2^n} = 1$.

4. Une façon de faire est de prouver par récurrence la propriété $P_n : \sum_{k=1}^{k=n} kx^k = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}$.

   Pour $n = 1$, la somme de gauche se réduit à x, et le quotient de droite vaut $\frac{x^3 - 2x^2 + x}{(1-x)^2} = \frac{x(x-1)^2}{(1-x)^2} = x$, donc P_1 est vraie.

   Supposons donc P_n vérifiée, on a alors $\sum_{k=1}^{k=n+1} kx^k = \sum_{k=1}^{k=n} kx^k + (n+1)x^{n+1} = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2} + (n+1)x^{n+1}$ (on a ici utilisé l'hypothèse de récurrence). Mettons tout cela au même dénominateur pour obtenir $\frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x + (n+1)x^{n+1}(1 - 2x + x^2)}{(1-x)^2}$
   $= \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x + (n+1)x^{n+1} - 2(n+1)x^{n+2} + (n+1)x^{n+3}}{(1-x)^2}$
   $= \frac{x - (n+2)x^{n+2} + (n+1)x^{n+3}}{(1-x)^2}$. Ceci correspond exactement à la formule qu'on doit obtenir pour que P_{n+1} soit vérifiée, et achève donc la récurrence.

5. On applique le résultat précédent. On a $E(Y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = \frac{\frac{n}{2^{n+2}} - \frac{n+1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2}}{(1 - \frac{1}{2})^2}$
   $= \frac{1}{2^n}\left(n - 2(n+1) + 2^{n+1}\right) = 2 - \frac{n+2}{2^n}$

II. Étude du cas $c \neq 0$.

1. Z_p est simplement le nombre de boules blanches tirées après p tirages.

2. Pour X_1, il n'y a que deux boules dans l'urne, on a $P(X_1 = 1) = P(X_1 = 0) = \frac{1}{2}$ et donc $E(X_1) = \frac{1}{2}$.

3. Si on suppose $X_1 = 0$, c'est-à-dire si une boule noire a été tirée au premier tirage, on se retrouve avec 1 boule blanche et $c+1$ boules noires au deuxième tirage, donc $P_{X_1=0}(X_2 = 0) = \frac{c+1}{c+2}$ et $P_{X_1=0}(X_2 = 1) = \frac{1}{c+2}$. De même, on a $P_{X_1=1}(X_2 = 0) = \frac{1}{c+2}$ et $P_{X_1=1}(X_2 = 1) = \frac{c+1}{c+2}$.
   On en déduit via la formule des probabilités totales (les évènements $X_1 = 0$ et $X_1 = 1$ formant un système complet d'évènements) que $P(X_2 = 1) = P(X_1 = 0) \times P_{X_1=0}(X_2 = 1) + P(X_1 =$

$1) \times P_{X_1=1}(X_2=1) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{c+2} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{c+1}{c+2} = \dfrac{1}{2}$. De même, $P(X_2=0) = \dfrac{1}{2}$. La loi de X_2 est donc la même que celle de X_1, et $E(X_2) = \dfrac{1}{2}$.

4. On a $Z_2(\Omega) = \{0;1;2\}$ et $P(Z_2=0) = P((X_1=0)\cap(X_2=0)) = P(X_1=0) \times P_{X_1=0}(X_2=0) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{c+1}{c+2} = \dfrac{c+1}{2(c+2)}$; $P(Z_2=1) = P(X_1=1) \times P_{X_1=1}(X_2=0) + P(X_1=0) \times P_{X_1=0}(X_2=1) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{c+2} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{c+2} = \dfrac{1}{c+2}$; $P(Z_2=2) = \dfrac{c+1}{2c+4}$.
5. On a bien sûr $Z_p(\Omega) = \{1;2;\dots;p\}$.
6. (a) Si on fait l'hypothèse que $Z_p = k$, on a donc tiré k boules blanches lors des p premiers tirages, et par conséquent $p-k$ boules noires lors de ces même tirages. On a donc ajouté à k reprises c boules blanches dans l'urne, ce qui nous fait un total de $kc+1$ boules blanches dans l'urne avant le tirage numéro $p+1$ (il y en avait une au départ). De même, on a ajouté $p-k$ fois c boules noires et on se trouve avec $(p-k)c+1$ boules noires. Soit un total de $kc+1+(p-k)c+1 = pc+2$ boules dans l'urne, ce qui est tout à fait normal puisqu'on avait deux boules au départ et qu'on en ajoute p à chaque tirage. La probabilité de tirer une boule blanche au tirage $p+1$ vaut alors $P_{Z_p=k}(X_{p+1}=1) = \dfrac{kc+1}{pc+2}$.

   (b) Les évènements $Z_p = 0$; $Z_p = 1$; ... ; $Z_p = p$ forment un système complet d'évènements. On peut alors appliquer la formule des probabilités totales puis exploiter le calcul de la question précédente pour écrire : $P(X_{p+1}=1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=p} P(Z_p=k) \times P_{Z_p=k}(X_{p+1}=1) = \sum_{k=0}^{k=p} \frac{kc+1}{pc+2} P(Z_p=k) = \frac{c}{pc+2} \sum_{k=0}^{k=p} kP(Z_p=k) + \frac{1}{pc+2} \sum_{k=0}^{k=p} P(Z_p=k) = \frac{cE(Z_p)}{pc+2} + \frac{1}{pc+2}$ (la dernière somme étant nulle car elle représente la somme des probabilités d'une loi de probabilité).

   (c) Prouvons donc par récurrence la propriété P_n : $P(X_1=1) = P(X_2=2) = \dots = P(X_n=1) = \dfrac{1}{2}$. La propriété est vraie au rang 1 (on l'a constaté en début de problème), supposons la vérifiée au rang n. On en déduit que $E(Z_p) = E(\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} X_k) = \sum_{k=1}^{k=n} E(X_k) = \frac{n}{2}$, puis en utilisant le résultat de la question précédente que $P(X_{n+1}=1) = \dfrac{c\frac{n}{2}+1}{nc+2} = \dfrac{1}{2}$, ce qui achève la récurrence.

Feuille d'exercices n°17 : Dérivation

ECE3 Lycée Carnot

11 mars 2011

Exercice 1 (* ou ** si on étudie les prolongements)

Déterminer le domaine de définition et de dérivabilité des fonction suivantes et calculer leurs dérivées :

- $f_1(x) = x\ln x - x$
- $f_2(x) = x\sqrt{1-x}$
- $f_3(x) = x^x$
- $f_4(x) = e^{3x^2+\sqrt{2x}}$
- $f_5(x) = \dfrac{x^4 - 3x^2 + 5x - 1}{2x^3 + x^2 - 4x + 7}$
- $f_6(x) = \dfrac{x\sqrt{x}}{e^x - 1}$
- $f_7(x) = \dfrac{x^2 + x\ln x}{x+1}$
- $f_8(x) = 3^{4x^2-1}$
- $f_9(x) = e^{x+\frac{1}{x}}$
- $f_{10}(x) = x^2 \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$
- $f_{11}(x) = x^2 - |x|$
- $f_{12}(x) = x^2 \ln x$ prolongée par $f_{12}(0) = 0$

Exercice 2 (** à ***)

Faire une étude complète des fonctions suivantes (domaine de définition, limites et éventuels prolongements par continuité, asymptotes et branches infinies, dérivée et étude des variations, et enfin une allure de la courbe) :

1. $f(x) = \sqrt{(x+1)}\ln(x+1)$
2. $g(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$
3. $h(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$
4. $i(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{2x^2 - 5x - 3}$
5. $k(x) = x^{\frac{1}{x}}$
6. $l(x) = \dfrac{e^{2x}}{x^2 - 1}$

Exercice 3 (*)

Calculer (quand elles existent) les équations des tangentes en 0, 1, -2 et $\sqrt{3}$ de chacune des fonctions suivantes :

- $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$
- $g(x) = \ln(2x - 1)$
- $h(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{x - 5}$
- $k(x) = e^{3x^2-2x+1}$

Exercice 4 (**)

Soit $f(x) = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3 + 1$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
2. On note g la réciproque de f. Quel est le sens de variations de g ?
3. Quel est le domaine de dérivabilité de g ?
4. Représenter dans un même repère les courbes représentatives de f et de g, en indiquant les tangentes horizontales et verticales.

Exercice 5 (**)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x \ln x$.

1. Étudier les variations de f.
2. En déduire que f est bijective de $\left[\frac{1}{e}; +\infty\right[$ sur un intervalle à préciser.
3. En quels points f^{-1} est-elle dérivable ?
4. Calculer $(f^{-1})'(0)$. Calculer $f(e)$ et $f(e^2)$ et en déduire $(f^{-1})'(e)$ et $(f^{-1})'(2e^2)$.
5. Tracer dans un même repère les courbes représentatives de f et de f^{-1}.

Exercice 6 (***)

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on définit sur $[0; +\infty[$ les fonctions $g_n : x \mapsto (n-x)e^x - n$ et $f_n : x \mapsto \dfrac{x^n}{e^x - 1}$ si $x > 0$, prolongée par $f_n(x) = 0$.

1. Étudier les variations de g_n.
2. Prouver l'existence d'un unique réel strictement positif a_n tel que $g_n(a_n) = 0$ et montrer que $a_n \in]n-1; n[$.
3. Étudier la continuité de f_n.
4. Étudier la dérivabilité de f_n et préciser, si elle existe, l'équation de sa tangente en 0.
5. Étudier les variations de f_n (cela devrait faire intervenir les résultats de la question 2).
6. Montrer que $f_n(a_n) = (n - a_n)a_n^{n-1}$.
7. Étudier la position relative des courbes représentatives de f_n et f_p lorsque $p > n$.
8. Tracer dans un même repère les courbes représentatives de f_2 et f_3 (en choisissant une échelle adaptée).

Corrigé de la feuille d'exercices n°17

Exercice 1 (*)

- La fonction f_1 est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$, de dérivée $f_1'(x) = \ln x + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln x$. De plus, on peut prolonger f_1 par continuité en 0 en posant $f_1(0) = 0$, puisque $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x) = 0$. Comme f_1 est continue sur $\mathbb{R}_+$, C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, et que $\lim\limits_{x\to 0} f_1'(x) = -\infty$, le théorème du prolongement C^1 permet d'affirmer que la courbe admet une tangente verticale en 0.
- La fonction f_2 est définie sur $]-\infty;-1]$ et a priori dérivable sur $]-\infty;-1[$, et $f_2'(x) = \sqrt{1-x} - \dfrac{x}{2\sqrt{1-x}} = \dfrac{2(1-x)-x}{2\sqrt{1-x}} = \dfrac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}$. Comme f_2 est C^1 sur $]-\infty;-1[$ et $\lim\limits_{x\to 1} f_2'(x) = -\infty$, d'après le théorème de prolongement C^1, il y aura une tangente verticale en 1.
- Comme $f_3(x) = e^{x\ln x}$, la fonction f_3 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et $f_3'(x) = (\ln x + 1)e^{x\ln x}$. La fonction est par ailleurs prolongeable par continuité en posant $f_3(0) = 1$ (puisque $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$). Elle est C^1 sur $]0;+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to 0} f_3'(x) = -\infty$, donc il y aura une tangente verticale en 0 (théorème de prolongement C^1).
- La fonction f_4 est définie sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable a priori sur $\mathbb{R}_+^*$, et $f_4'(x) = \left(6x + \dfrac{1}{\sqrt{2x}}\right)e^{3x^2+\sqrt{2x}}$. Cette dérivée étant continue sur $]0;+\infty[$ et ayant pour limite $+\infty$ en 0, il y aura (encore une fois, et toujours d'après le théorème de prolongement C^1) une tangente verticale en 0.
- La fonction f_5 est dérivable partout où elle est définie (ici, le domaine de définition est difficile à déterminer) et $f_5'(x) = \dfrac{(4x^3-6x+5)(2x^3+x^2-4x+7)-(6x^2+2x-4)(x^4-3x^2+5x-1)}{(2x^3+x^2-4x+7)^2} = \dfrac{2x^6+2x^5-6x^4+8x^3+7x^2-40x+31}{(2x^3+x^2-4x+7)^2}$ (intéressant, non ?).
- La fonction f_6 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et $f_6'(x) = \dfrac{\frac{3}{2}\sqrt{x}(e^x-1) - x\sqrt{x}e^x}{(e^x-1)^2}$. Comme $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$ (limite classique), on peut affirmer que $f(x) \underset{0}{\sim} \sqrt{x}$, donc f_6 est prolongeable par continuité en posant $f(0) = 0$. De même, on a $f'(x) = \dfrac{3\sqrt{x}}{2(e^x-1)} - \dfrac{x\sqrt{x}e^x}{(e^x-1)^2} = \dfrac{3}{2\sqrt{x}} - \dfrac{e^x}{\sqrt{x}} + o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) \sim \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ (quand on se rapproche de 0, e^x est équivalent à 1). Tout cela tend vers $+\infty$ en 0, il y aura donc une tangente verticale (encore et toujours le théorème du prolongement C^1). Les plus curieux d'entre vous noteront que le fait que $f(x)$ soit équivalent à $\sqrt{x}$ devrait suffire à deviner qu'il y aura une tangente verticale en 0 (puisque c'est le cas pour la racine carrée).
- La fonction f_7 est définie et a priori dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et $f_7'(x) = \dfrac{(2x+\ln x+1)(x+1)-x^2-x\ln x}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2+3x+\ln x+1}{(x+1)^2}$. La fonction f_7 est une fois de plus prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$ (puisque le numérateur tend vers 0 et le dénominateur vers 1). Quant à la dérivée, elle a pour limite $-\infty$ en 0 (même pas de forme indéterminée), on va donc pouvoir conclure à la tangente verticale en 0 grâce au théorème de prolongement C^1.
- On a $f_8(x) = e^{(4x^2-1)\ln 3}$. La fonction f_8 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f_8'(x) = (8x\ln 3)3^{4x^2-1}$. Enfin une fonction où il n'y a rien à prolonger !
- La fonction f_9 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_*$ et $f_9'(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}$. On a ici une petite curiosité : $\lim\limits_{x\to 0^-} f_9(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f_9(x) = +\infty$, donc f_9 est prolongeable par « continuité à

gauche » en 0. Comme f_9' est continue sur $]-\infty;0[$ et que $\lim_{x\to 0^-} f_9'(x) = 0$ (par croissance comparée, $e^{x+\frac{1}{x}}$ étant équivalent à $e^{\frac{1}{x}}$), le théorème de prolongement C^1 permet d'affirmer que la courbe admet une demi-tangente horizontale à gauche en 0.

- La fonction f_{10} est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et $f_{10}'(x) = 2x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) + x^2 \times \frac{-2}{x^3}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 2x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2x}{(x^2+1)}$. De plus, $f(x) \underset{0}{\sim} x^2\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$, qui a pour limite 0 en 0 par croissance comparée. De même, le premier morceau dans la dérivée tend vers 0 (et le deuxième aussi, naturellement) et f_{10}' est continue sur $\mathbb{R}^*$, donc le théorème de prolongement C^1 nous permet d'affirmer que f_{10} est prolongeable en une fonction C^1 sur $\mathbb{R}$, de dérivée nulle en 0 (où on aura donc une tangente horizontale).

- La fonction f_{11} est définie sur $\mathbb{R}$ et a priori dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Si $x > 0$, $f_{11}(x) = x^2 - x$, donx $f_{11}'(x) = 2x - 1$; si $x < 0$, $f_{11}(x) = x^2 + x$ et $f_{11}'(x) = x^2 + 1$. La fonction f_{11} est dérivable à gauche et à droite en 0, mais $f_g'(0) = 1$ et $f_d'(0) = -1$, donc elle admet seulement deux demi-tangentes de pentes distinctes en 0.

- Une fois prolongée, f_{12} est définie sur $[0;+\infty[$ et a priori dérivable sur $]0;+\infty[$, de dérivée $f_{12}'(x) = 2x\ln x + x$. Comme $\lim_{x\to 0} f_{12}'(x) = 0$ et que f_{12}' est bien entendu continue sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction f_{12} est en fait dérivable sur $\mathbb{R}$, avec une tangente horizontale en 0.

Exercice 2 (** à ***)

Étude de la fonction f

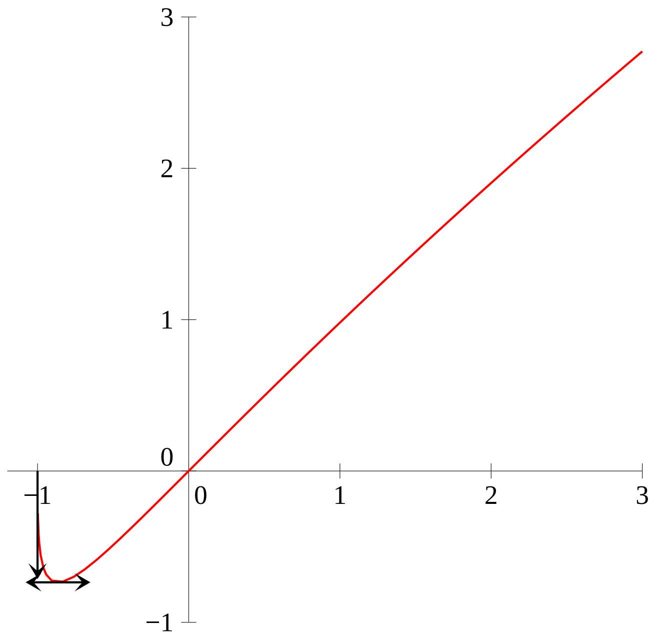
La fonction f est définie si $x+1 > 0$ donc $\mathcal{D}_f =]-1;+\infty[$. Comme $\lim_{x\to 0} \sqrt{x}\ln x = 0$ (par croissance comparée), $\lim_{x\to -1} f(x) = 0$. La fonction f est donc prolongeable par continuité en -1 en posant $f(-1) = 0$.

On a bien sûr $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, et $\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x+1}\ln(x+1)}{x} = \frac{\sqrt{X}\ln X}{X-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln X}{\sqrt{X}}$ en posant $X = x+1$, donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, et la courbe représentative de f admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Ox).

La fonction f est dérivable sur $]-1;+\infty[$, de dérivée $f'(x) = \frac{\ln(x+1)}{2\sqrt{x+1}} + \frac{\sqrt{x+1}}{x+1} = \frac{\ln(x+1)+2}{2\sqrt{x+1}}$. Cette dérivée s'annule quand $\ln(x+1) = -2$, donc quand $x+1 = \frac{1}{e^2}$, soit $x = \frac{1}{e^2} - 1$. De plus, comme f' est continue sur $]-1;+\infty[$ et que que $\lim_{x\to -1} f'(x) = -\infty$ (pas de forme indéterminée ici, le numérateur tend vers $-\infty$ et le dénominateur vers 0), en appliquant le théorème du prolongement C^1, on obtient une tangente verticale à la courbe en -1. Enfin, $f\left(\frac{1}{e^2}-1\right) = \sqrt{e^{-2}}\ln e^{-2} = \frac{-2}{e}$, d'où le tableau de variations suivant pour f :

x	-1		$\frac{1}{e^2}-1$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$\frac{-2}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

La courbe représentative de f a l'allure suivante :



Étude de la fonction g

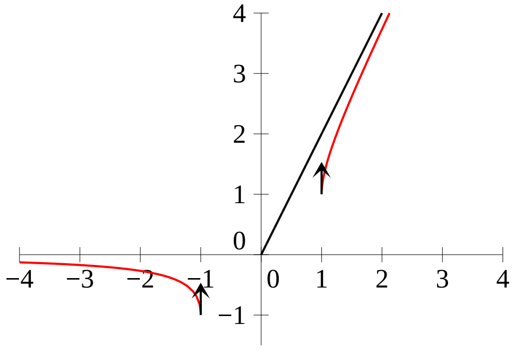
La fonction g est définie si $x^2 - 1 \geqslant 0$, donc $\mathcal{D}_g =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$.

On obtient sans difficulté $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$. Ensuite, $\dfrac{g(x)}{x} = 1 + \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x} = 1 + \dfrac{\sqrt{x^2(1-\frac{1}{x^2})}}{x}$. Si $x \geqslant 1$, on a donc $\dfrac{g(x)}{x} = 1 + \sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}}$, dont la limite vaut 2 en $+\infty$. Il reste donc à calculer $g(x) - 2x = x\left(\sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}} - 1\right) = \dfrac{x\left(1 - \frac{1}{x^2} - 1\right)}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + 1} = -\dfrac{1}{x\left(\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + 1\right)}$. Ce dernier quotient tend vers 0 en $+\infty$, il y a donc une asymptote oblique d'équation $y = 2x$. C'est plus rapide en $-\infty$: $g(x) = \dfrac{x^2 - (x^2-1)}{x + \sqrt{x^2-1}} = \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2-1}}$, quotient qui tend vers 0 en $-\infty$. L'axe des abscisses est donc asymptote à la courbe en $-\infty$.

La fonction g est a priori dérivable sur $]-\infty; -1[$ et sur $]1; +\infty[$, de dérivée $g'(x) = 1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$. Cette dérivée est manifestement positive sur $]1; +\infty[$. De plus, on a $\forall x < -1$, $x^2 \geqslant x^2 - 1 \geqslant 0$, donc $-x \geqslant \sqrt{x^2-1} \geqslant 0$, d'où $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} \leqslant -1$. On en déduit que $g'(x) < 0$ sur $]-\infty; -1[$. Enfin, on constate que les limites de g' en -1 et en 1 sont respectivement égales à $-\infty$ et à $+\infty$, d'où l'existence de deux tangentes verticales en ces points via le théorème de prolongement C^1. Finalement, on a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1	1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-\infty$	$+\infty$	$+$	
f	0	$\searrow$	-1	1	$\nearrow$	$+\infty$

La courbe qui va avec, avec tangente et asymptote (ou plutôt demi-asymptote pour ne pas surcharger le graphique) en noir :



Étude de la fonction h

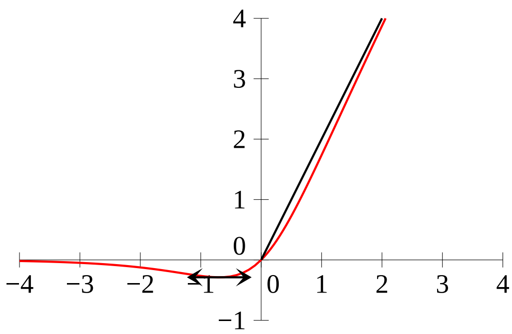
La fonction h est définie si $e^{2x} - e^x + 1 > 0$. Posons donc $P(X) = X^2 - X + 1$. Ce polynôme a pour discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3$, il est donc toujours positif. Conclusion : $\mathcal{D}_h = \mathbb{R}$.

Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} - e^x + 1 = 1$, on a $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 0$, d'où l'existence d'une asymptote horizontale en $-\infty$. De l'autre côté, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} - e^x + 1 = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$. De plus, $\dfrac{h(x)}{x} = \dfrac{\ln(e^{2x}(1 - e^{-x} + e^{-2x}))}{x} = \dfrac{2x + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})}{x} = 2 + \dfrac{\ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})}{x}$. Le quotient tendant vers 0 (son numérateur tend déjà vers 0), on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{h(x)}{x} = 2$. Enfin, en réutilisant le calcul précédent $h(x) - 2x = \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$ tend vers 0, donc il y a en $+\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = 2x$.

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $h'(x) = \dfrac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x + 1} = \dfrac{e^x(2e^x - 1)}{e^{2x} - e^x + 1}$. Tout est positif (cf calcul du domaine de définition pour le dénominateur) sauf $2e^x - 1$ qui change de signe quand $e^x = \dfrac{1}{2}$, donc quand $x = -\ln 2$. Comme $h(-\ln 2) = \ln(e^{-2\ln 2} - e^{-\ln 2} + 1) = \ln\left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} + 1\right) = \ln \dfrac{3}{4}$, on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-\ln(2)$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$\ln \frac{3}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Et la courbe, bien entendu :



Étude de la fonction i

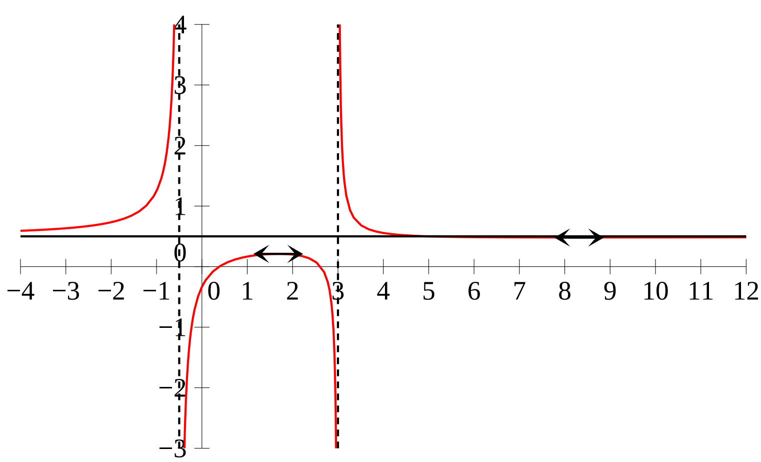
La fonction i est définie quand $2x^2 - 5x - 3 \neq 0$. Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 25 + 24 = 49$, et admet pour racines $x_1 = \dfrac{5-7}{4} = -\dfrac{1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{5+7}{4} = 3$, donc $\mathcal{D}_f = \left]-\infty; -\dfrac{1}{2}\right[\cup \left]-\dfrac{1}{2}; 3\right[\cup]3; +\infty[$.

Un léger accès de paresse nous pousse à ne pas déterminer le signe de toutes les limites en $-\dfrac{1}{2}$ et en 3 : bornons-nous à constater que le dénominateur tend vers 0 et le numérateur respectivement vers $\dfrac{11}{4}$ et 1, donc il y a des limites infinies en $-\dfrac{1}{2}^-$, $-\dfrac{1}{2}^+$, 3^- et 3^+. Nous obtiendrons leur signe à l'aide des variations de i. Pour les branches infinies, pour une fois c'est rapide : $i(x) \underset{\pm\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2}$. Il y a donc une asymptote horizontale en $-\infty$ et en $+\infty$.

Ne reste plus qu'à avoir le courage de calculer la dérivée (définie sur le même ensemble que i) : $i'(x) = \dfrac{(2x-3)(2x^2-5x-3) - (4x-5)(x^2-3x+1)}{2x^2-5x-3)^2}$ $= \dfrac{4x^3 - 10x^2 - 6x - 6x^2 + 15x + 9 - 4x^3 + 12x^2 - 4x + 5x^2 - 15x + 5}{(2x^2-5x-3)^2} = \dfrac{x^2 - 10x + 14}{(2x^2-5x-3)^2}$. Le numérateur a pour discriminant $\Delta = 100 - 56 = 44$, et admet deux racines $x_3 = \dfrac{10 - \sqrt{44}}{2} = 5 - \sqrt{11}$ et $x_4 = 5 + \sqrt{11}$. Il faut bien sûr pour achever le tableau de variations calculer les valeurs de i en x_3 et x_4 : $i(x_3) = \dfrac{(5-\sqrt{11})^2 - 3(5-\sqrt{11}) + 1}{2(5-\sqrt{11})^2 - 5(5-\sqrt{11}) - 3} = \dfrac{36 - 10\sqrt{11} - 15 + 3\sqrt{11} + 1}{72 - 20\sqrt{11} - 25 + 5\sqrt{11} - 3} = \dfrac{22 - 7\sqrt{11}}{44 - 15\sqrt{11}} \simeq 0.21$; et de même $i(x_4) = \dfrac{(5+\sqrt{11})^2 - 3(5+\sqrt{11}) + 1}{2(5+\sqrt{11})^2 - 5(5+\sqrt{11}) - 3} = \dfrac{36 + 10\sqrt{11} - 15 - 3\sqrt{11} + 1}{72 + 20\sqrt{11} - 25 - 5\sqrt{11} - 3} = \dfrac{22 + 7\sqrt{11}}{44 + 15\sqrt{11}} \simeq 0.48$. Cela donc un tableau du genre :

x	$-\infty$			$-\frac{1}{2}$			x_3			3			x_4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$\|\|$		$-$	0	$+$		$\|\|$		$+$	0	$-$	
f	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty$	$\|\|$	$+\infty$	$\searrow$	$i(x_3)$	$\nearrow$	$+\infty$	$\|\|$	$-\infty$	$\nearrow$	$i(x_4)$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$

Et la courbe, bien entendu (le minimum local en x_4 est peu visible car très très proche de l'asymptote, ce dont on pouvait se douter d'ailleurs au vu de sa valeur) :



Étude de la fonction k

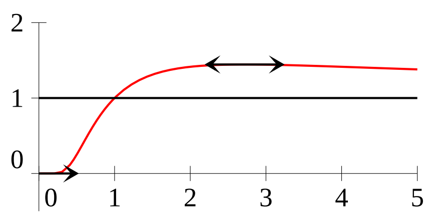
Écrivons plutôt $k(x) = e^{\frac{\ln x}{x}}$. La fonction k est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme de plus $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$ (non, il n'y a pas de forme indéterminée), on a $\lim\limits_{x\to 0^+} k(x) = 0$ et on peut prolonger k par continuité en posant $k(0) = 0$.

Comme $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ (croissance comparée), $\lim\limits_{x\to +\infty} k(x) = 1$, d'où la présence d'une asymptote horizontale en $+\infty$.

La fonction k est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $k'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2} e^{\frac{\ln x}{x}}$. Cette dérivée s'annule lorsque $\ln x = 1$, c'est-à-dire pour $x = e$, valeur où k admet pour maximum $e^{\frac{1}{e}} \sim 1.44$. Ne reste qu'à essayer de calculer la limite de k' en 0, ce qui n'est pas évident : $k'(x) \sim \dfrac{-\ln x}{x^2} e^{\frac{\ln x}{x}} - \dfrac{1}{\ln x}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^2 e^{\frac{\ln x}{x}}$. Comme $\dfrac{\ln x}{x}$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers 0, on a par croissance comparée $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^2 e^{\frac{\ln x}{x}} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} k'(x) = 0$. En appliquant le théorème de prolongement C^1, k est dérivable en 0, et la courbe y admet une tangente horizontale. Le tableau de variations :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$e^{\frac{1}{e}}$	$\searrow$	1

Et une fois de plus, la courbe :



Étude de la fonction l

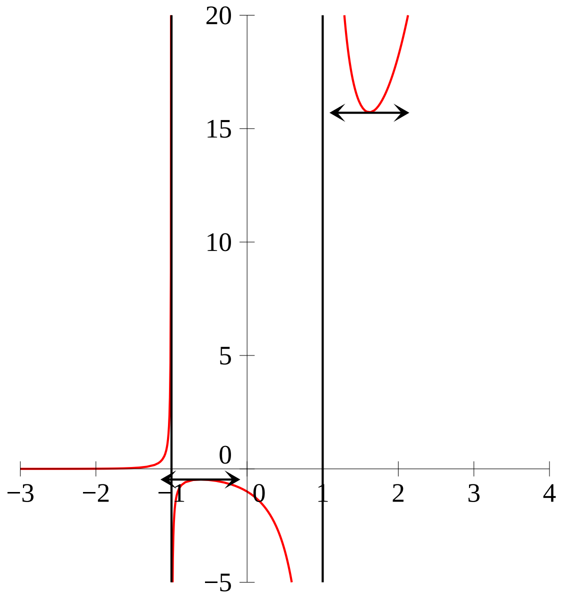
La fonction l est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$.

En $+\infty$, la limite de l comme celle de $\dfrac{l(x)}{x}$ sont égales à $+\infty$ par croissance comparée, il y a donc de ce côté une branche parabolique de direction (Oy). En $-\infty$, toujours par croissance comparée, l tend vers 0, l'axe des abscisses est asymptote horizontale. Enfin, le numérateur de l étant toujours strictement positif, on obtient $\lim\limits_{x\to -1^-} l(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} l(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to -1^+} l(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} l(x) = -\infty$.

La fonction l est dérivable sur son ensemble de définition, et $l'(x) = \dfrac{2e^{2x}(x^2-1) - 2xe^{2x}}{(x^2-1)^2} = \dfrac{2e^{2x}(x^2 - x - 1)}{(x^2-1)^2}$. Le trinôme au numérateur a pour discriminant $\Delta = 1 + 4 = 5$, et admet pour racines $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. On calcule péniblement $l(x_1) = \dfrac{4e^{1-\sqrt{5}}}{2-2\sqrt{5}} \simeq -0.47$ et $l(x_2) = \dfrac{4e^{1+\sqrt{5}}}{2+2\sqrt{5}} \simeq 15.7$. Voila le dernier tableau da variations de l'exercice :

x	$-\infty$			-1			x_1			1			x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$\|$		$+$	0	$-$		$\|$		$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$	$\|$	$-\infty$	$\nearrow$	$l(x_1)$	$\searrow$	$-\infty$	$\|$	$+\infty$	$\searrow$	$l(x_2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Et la dernière courbe (ouf!) :



Exercice 3 (*)

On notera pour chaque fonction $T_{f,a}(x)$ l'équation de la tangente à la courbe de la fonction f au point d'ascisse a.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = 6x^2 - 10x + 4$. On a donc $T_{f,0}(x) = 4x - 1$; $T_{f,1}(x) = 0(x-1) + 0 = 0$; $T_{f,-2}(x) = 48(x+2) - 45 = 48x + 51$; et $T_{f,\sqrt{3}}(x) = (22 - 10\sqrt{3})(x - \sqrt{3}) + 10\sqrt{3} - 16 = (22 - 10\sqrt{3})x - 12\sqrt{3} - 6$.

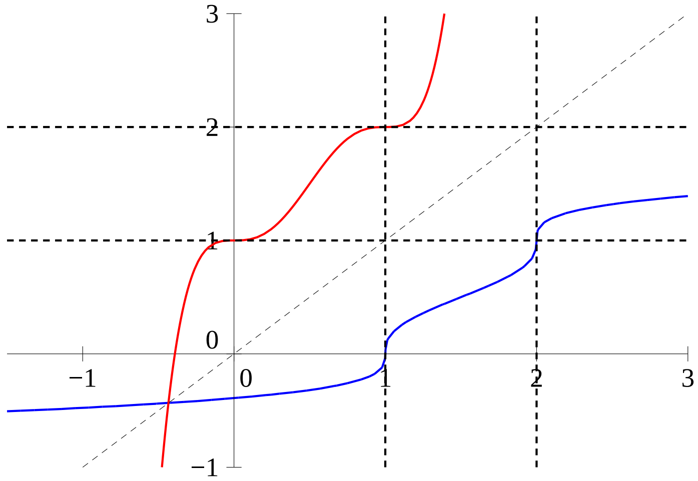
La fonction g est dérivable sur $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$, de dérivée $g'(x) = \dfrac{2}{2x-1}$. Les dérivées en 0 et en -2 n'existent donc pas. Par contre $T_{g,1}(x) = 2(x-1) + 0 = 2x - 2$; et $T_{g,\sqrt{3}}(x) = \dfrac{2}{2\sqrt{3}-1}(x - \sqrt{3}) + \ln(2\sqrt{3} - 1) = \dfrac{4\sqrt{3}-2}{11}(x - \sqrt{3}) + \ln(2\sqrt{3}-1) = \dfrac{4\sqrt{3}-2}{11}x + \dfrac{2\sqrt{3}-12}{11} + \ln(2\sqrt{3}-1)$.

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{5\}$, de dérivée $h'(x) = \dfrac{4x(x-5) - (2x^2+1)}{(x-5)^2} = \dfrac{2x^2 - 20x - 1}{(x-5)^2}$. On a donc $T_{h,0}(x) = \dfrac{1}{25}x - \dfrac{1}{5}$; $T_{h,1}(x) = -\dfrac{19}{16}(x-1) - \dfrac{3}{4} = -\dfrac{19}{16}x + \dfrac{5}{8}$; $T_{h,-2}(x) = \dfrac{47}{49}(x+2) - \dfrac{9}{7} = \dfrac{47}{49}x - \dfrac{16}{49}$; et $T_{h,\sqrt{3}}(x) = \dfrac{5 - 20\sqrt{3}}{28 - 10\sqrt{3}}(x - \sqrt{3}) + \dfrac{7}{\sqrt{3}-5} = \dfrac{-460 - 510\sqrt{3}}{484}(x - \sqrt{3}) - \dfrac{7\sqrt{3}+35}{22} = \left(-\dfrac{115}{121} - \dfrac{255\sqrt{3}}{242}\right)x + \dfrac{190}{121} + \dfrac{153}{242}\sqrt{3}$.

La fonction k est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $k'(x) = (6x-2)e^{3x^2-2x+1}$, donc $T_{k,0}(x) = -2ex + e$; $T_{k,1}(x) = 4e^2(x-1) + e^2 = 4e^2x - 3e^2$; $T_{k,-2}(x) = -14e^{17}(x+2) + e^{17} = -14e^{17}x - 27e^{17}$; enfin, $T_{k,\sqrt{3}}(x) = (6\sqrt{3}-2)e^{10-2\sqrt{3}}(x - \sqrt{3}) + e^{10-2\sqrt{3}} = (6\sqrt{3}-2)e^{10-2\sqrt{3}}x + (-17 + 4\sqrt{3})e^{10-2\sqrt{3}}$.

Exercice 4 (**)

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = 30x^4 - 60x^3 + 30x^2 = 30x^2(x^2 - 2x + 1) = 30x^2(x-1)^2$. La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc bijective. Comme de plus $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, la fonction est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. D'après le théorème de la bijection, la fonction g a même sens de variation que f, elle est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. La fonction g n'est pas dérivable en y si $f'(f^{-1}(y)) = 0$. Comme f' s'annule en 0 et en 1, et que $f(0) = 1$ et $f(1) = 2$, g est dérivable partout sauf en 1 et en 2.
4. Les tangentes sont en noir épais, et l'axe de symétrie $y = x$ en moins épais, la courbe de f en rouge et celle de g en bleu :



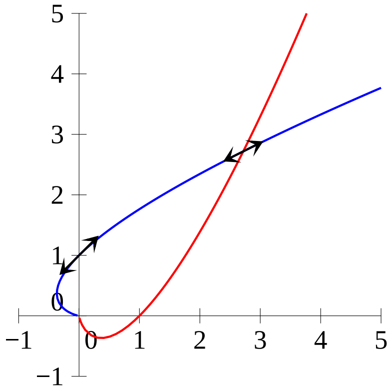
Exercice 5 (**)

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(x) = \ln x + 1$. La dérivée est donc positive si $\ln x \geqslant -1$, c'est-à-dire si $x \geqslant \dfrac{1}{e}$. On a donc le tableau de variations suivant, avec $f\left(\dfrac{1}{e}\right) = \dfrac{1}{e} \times (-1) = -\dfrac{1}{e}$.

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
f	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

2. Comme de plus $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, la fonction f est bijective de $[\frac{1}{e}; +\infty[$ sur $[-\frac{1}{e}; +\infty[$.
3. La fonction f^{-1} est définie et continue sur $[-\frac{1}{e}; +\infty[$, mais dérivable seulement sur $]-\frac{1}{e}; +\infty[$, puisque f' s'annule en $\dfrac{1}{e}$.
4. Commençons par constater que $f(1) = 0$, donc $f^{-1}(0) = 1$ et $(f^{-1})'(0) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \dfrac{1}{f'(1)} = 1$. De même, comme $f(e) = e \ln e = e$ et $f(e^2) = e^2 \ln(e^2) = 2e^2$, on a $(f^{-1})'(e) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(e))} = \dfrac{1}{f'(e)} = \dfrac{1}{2}$ et $(f^{-1})'(2e^2) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(2e^2))} = \dfrac{1}{f'(e^2)} = \dfrac{1}{3}$.
5. Voila à quoi ça ressemble, avec la courbe de f en rouge et celle de f^{-1} en bleu (il y a hélas un bout de courbe en trop du côté de l'origine du repère qui fait que la courbe bleue n'est pas la courbe d'une fonction, mais je ne sais pas comment faire mieux avec le logiciel tout pourri que

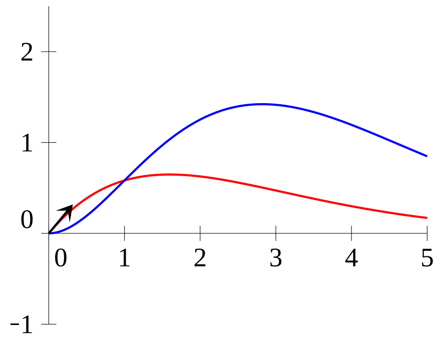
j'utilise pour tracer ces courbes), et les deux premières tangentes calculées pour f^{-1} en noir ($2e^2$ étant trop gros, la dernière n'apparait pas sur ce graphique) :



Exercice 6 (***)

1. La fonction g_n est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $g_n'(x) = ne^x - e^x - xe^x = (n-1-x)e^x$. Cette dérivée s'annule pour $x = n-1$, et la fonction g_n est donc strictement croissante croissante sur $0; n-1]$ et strictement décroissante sur $[n-1; +\infty[$. Elle admet un maximum de valeur $g_n(n-1) = (n-(n-1))e^{n-1} - n = e^{n-1} - n$. De plus, $g_n(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g_n(x) = -\infty$.
2. Bien entendu, l'énoncé a oublié de préciser que a_n doit être strictement positif, 0 étant aussi solution de l'équation. Une simple lecture du tableau de variations permet ensuite de constater que g_n s'annule une fois entre $n-1$ et $+\infty$. Comme $g_n(n-1) > 0$ (g_n est strictement croissante entre 0 et $n-1$) et $g_n(n) = -n < 0$, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que $a_n \in]n-1; n[$.
3. La fonction f_n est continue sans difficulté sur $]0; +\infty[$, et comme de plus $\dfrac{x^n}{e^x - 1} \underset{0}{\sim} \dfrac{x^n}{x} \sim x^{n-1}$, on a $\lim\limits_{x \to 0} f_n(x) = 0$, ce qui assure la continuité de f_n en 0. La fonction est donc continue sur $[0; +\infty[$.
4. Encore une fois, le seul problème se pose en 0. On a $\forall x > 0$, $f_n'(x) = \dfrac{nx^{n-1}(e^x - 1) - x^n e^x}{(e^x - 1)^2} = \dfrac{x^{n-1} g_n(x)}{(e^x - 1)^2}$. Comme $f'(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x^{n-1} g_n(x)}{x^2} \sim x^{n-3} g_n(x)$, on en déduit facilement que, si $n \geqslant 3$, $\lim\limits_{x \to 0} f_n'(x) = 0$. Pour $n = 2$, c'est plus compliqué : on a $e^x \underset{0}{=} x + 1 + o(x)$ (en utilisant l'équivalent classique pour $e^x - 1$), donc $g_2(x) = (2-x)(1+x+o(x)) - 2 = x - x^2 + o(x)$, et $f_2'(x) \sim x^{-1} x = 1$. Finalement, en utilisant le théorème de prolongement C^1, la fonction f_n est toujours dérivable, et $f_2'(0) = 1$, ce qui donne une tangente d'équation $y = x$; $f_n'(0) = 0$ dès que $n \geqslant 3$ (on a alors une tangente horizontale).
5. La dérivée f_n' s'annulant quand g_n s'annule, il y a donc toujours pour f_n un maximum atteint en $x = a_n$. La limite de f_n quand x tend vers $+\infty$ vaut 0 par croissance comparée.
6. Calculons : $f_n(a_n) = \dfrac{a_n^n}{e^{a_n} - 1}$. Or, comme $g_n(a_n) = 0$, $e^{a_n} = \dfrac{n}{n - a_n}$ et $e^{a_n} - 1 = \dfrac{n}{n - a_n} - 1 = \dfrac{a_n}{n - a_n}$. On en déduit que $f_n(a_n) = \dfrac{(n - a_n) a_n^n}{a_n} = (n - a_n) a_n^{n-1}$.
7. On a $f_p(x) - f_n(x) = \dfrac{x^p - x^n}{e^x - 1}$. Si $x > 1$, $x^p > x^n$ et la courbe représentative de f_p est située au-dessus de celle de f_n. Si $x < 1$, c'est le contraire. Les courbes passent toutes par le point de coordonnées $\left(1, \dfrac{1}{e-1}\right)$.

8. Les deux courbes ressemblent à ceci, avec la courbe de f_2 en rouge (et sa tangente initiale en noir) et celle de f_3 en bleu (difficile de placer précisément les maxima à la main puisqu'on ne connait que très approximativement la valeur de a_n) :



Feuille d'exercices n°18 : Convexité

ECE3 Lycée Carnot

16 mars 2011

Exercice 1 (** à ***)

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le domaine de dérivabilité et la présence d'éventuelles tangentes verticales aux points posant problème.

- $f(x) = \sqrt{x}e^{-x}$
- $g(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$
- $h(x) = x\sqrt{x+x^2}$
- $i(x) = \dfrac{x\sqrt{x}}{e^x-1}$ prolongée par $j(0) = 0$

Exercice 2 (**)

Calculer pour tout entier n la dérivée n-ème de chacune des fonctions suivantes :

- $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$
- $g(x) = \dfrac{1}{1+x}$
- $h(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

Exercice 3 (*)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)e^{-x}$.

1. Montrer que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. Calculer les premières dérivées de f et essayer de conjecturer la forme de $f^{(n)}$.
3. Prouver cette conjecture par récurrence.

Exercice 4 (**)

Soit f la fonction définie sur $[0;1[$ par $f(0) = 0$, et pour $x > 0$, $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$.

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $[0;1[$ (0 compris).
2. Déterminer si f est convexe ou concave sur $[0;1[$.
3. Montrer que f possède un unique point d'inflexion sur cet intervalle et déterminer la tangente de f en ce point.
4. Tracer une allure de la courbe représentative de f.

Exercice 5 (** à ***)

Étudier le plus complètement possible chacune des fonctions suivantes, en précisant notamment la convexite et la présence éventuelle de points d'inflexion.

- $f : x \mapsto \ln(1 + x^2)$
- $g : x \mapsto e^{\frac{1}{1-x}} + 2x - 3$
- $h : x \mapsto x\sqrt{1 - x^2}$
- $i : x \mapsto \dfrac{2\ln x + 3}{x}$

Corrigé de la feuille d'exercices n°18

Exercice 1 (** à ***)

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions dérivables, et sa dérivée est $f'(x) = \dfrac{e^{-x}}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}e^{-x} = \dfrac{(1-2x)e^{-x}}{2\sqrt{x}}$. Cette fonction étant continue, la fonction f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Reste à se préocupper de ce qui se passe en 0. La dérivée de f ayant pour limite $+\infty$ en 0, on ne peut pas prolonger f' en 0, et le théorème de prolongement C^1 nous permet alors d'affirmer que f n'est pas dérivable en 0, mais la courbe de f y admettra une tangente verticale.
2. La fonction g est dérivable et $\mathcal{C}^1$ sur $]-1;1[$, de dérivée $h'(x) = -\sqrt{1-x^2} - (1-x)\dfrac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\dfrac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{x-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{1-x}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} = \dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to 1} g'(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to -1} g'(x) = +\infty$. La fonction g est donc dérivable en 1 (et y admet une tangente horizontale) mais pas en -1 (où il y aura une tangente verticale).
3. La fonction h est définie sur $]-\infty;-1] \cup [0;+\infty[$, dérivable et $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$, et sa dérivée vaut $h'(x) = \sqrt{x+x^2} + x\dfrac{1+2x}{2\sqrt{x+x^2}} = \dfrac{2x+2x^2+x+2x^2}{2\sqrt{x+x^2}} = \dfrac{x(3+4x)}{\sqrt{x(1+x)}} = \dfrac{(3+4x)\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}$. On constate que $\lim\limits_{x\to -1} h'(x) = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to 0} h'(x) = 0$, donc i est dérivable en 0 (avec une tangente horizontale) mais pas en -1 (où il y a une tangente verticale).
4. Commençons par vérifier que i est continue en 0 : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$, donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{e^x-1} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} i(x) = 0$, donc i est bien continue en 0. Comme d'habitude, le seul problème pour la dérivée sera aux bornes de l'intervalle de définition, ici en 0. Ailleurs, i est dérivable et même C^1, de dérivée $i'(x) = \dfrac{(\sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}})(e^x-1) - x\sqrt{x}e^x}{(e^x-1)^2} = \dfrac{3\sqrt{x}(e^x-1) - 2x\sqrt{x}e^x}{2(e^x-1)^2} = \dfrac{x\sqrt{x}}{(e^x-1)^2}\left(\dfrac{3}{2}\dfrac{e^x-1}{x} - e^x\right)$. Quand x tend vers 0, la parenthèse a pour limite $\dfrac{1}{2}$, et le facteur devant la parenthèse est équivalent à $\dfrac{x\sqrt{x}}{x^2} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ (car $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$). On en conclut que $\lim\limits_{x\to 0} i'(x) = +\infty$, donc la fonction i n'est pas dérivable en 0 (où il y aura une fois de plus une tangente verticale.

Exercice 2 (*)

1. La fonction f est un produit de fonctions $\mathcal{C}^\infty$, donc est $\mathcal{C}^\infty$.
2. On calcule $f'(x) = e^{-x} - (x+1)e^{-x} = -xe^{-x}$, puis $f''(x) = -e^{-x} + xe^{-x} = (x-1)e^{-x}$, $f^{(3)}(x) = (1-(x-1))e^{-x} = (2-x)e^{-x}$, $f^{(4)}(x) = (x-3)e^{-x}$ etc. On conjecture que $f^{(n)} = (-1)^n(x-n+1)e^{-x}$.
3. L'initialisation a déjà été faite, reste à prouver l'hérédité. Supposons donc la formule vérifiée au rang n, on a alors $f^{(n+1)}(x) = (-1)^n e^{-x} - ((-1)^n(x-n+1))e^{-x} = (-1)^{n+1}(-1+x-n+1)e^{-x} = (-1)^{n+1}(x-n)e^{-x}$, ce qui est bien la formule attendue pour le rang $n+1$.

Exercice 3 (**)

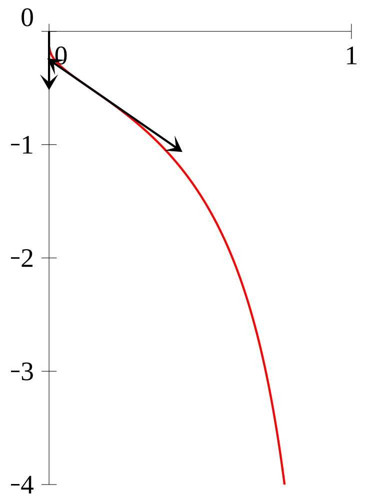
1. La fonction f est bien sûr continue et dérivable sur $]0;1[$. De plus, $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. La fonction f est donc continue en 0. Sa dérivée sur $]0;1[$ vaut $f'(x) = \dfrac{-1}{x(\ln x)^2}$.

Cette dérivée est continue sur $]0;1[$, et a pour limite $-\infty$ en 0 car $\lim\limits_{x\to 0} x(\ln x)^2 = 0$ par croissance comparée. D'après le théorème du prolongement C^1, il y aura donc une tangente verticale en 0. Notons au passage que f' est négative sur $]0;1[$, et que f est donc strictement décroissante sur cet intervalle.

2. Dérivons donc une deuxième fois f sur $]0;1[$: la dérivée de $x(\ln x)^2$ est $(\ln x)^2 + x \times 2\frac{\ln x}{x} = (\ln x)^2 + 2\ln x$, donc $f''(x) = \frac{(\ln x)^2 + 2\ln x}{x^2(\ln x)^4} = \frac{\ln x + 2}{x^2(\ln x)^3}$. Sur $]0;1[$, $\ln x$ est négatif, donc $\frac{1}{x^2(\ln x)^3} < 0$ et f'' est de signe opposé à celui de $\ln x + 2$, qui s'annule quand $\ln x = -2$, c'est-à-dire $x = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$. La fonction f est donc convexe sur $]0, e^{-2}]$ et concave sur $[e^{-2}, 1[$.

3. On vient de voir que f'' s'annulait pour $x = e^{-2}$. Comme $f(e^{-2}) = \frac{1}{\ln(e^{-2})} = -\frac{1}{2}$ et $f'(e^{-2}) = \frac{-1}{e^{-2}(-2)^2} = -\frac{e^2}{4}$, le point d'inflexion a pour coordonnées $\left(e^{-2}; -\frac{1}{2}\right)$, et la tangente à la courbe en ce point a pour équation $y = -\frac{e^2}{4}(x - e^{-2}) - \frac{1}{2} = -\frac{e^2}{4}x - \frac{1}{4}$.

4. Voici une allure de la courbe, avec la tangente calculée ci-dessus tracée en noir :



Exercice 4 (***)

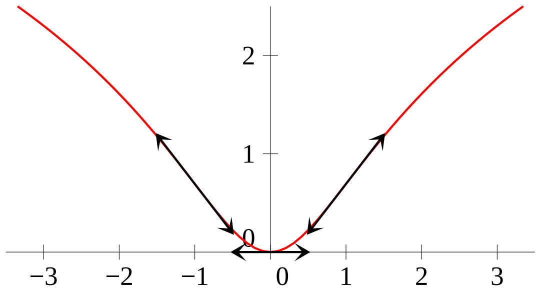
Étude de la fonction f

Comme $1 + x^2$ est toujours strictement positif, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et y est $\mathcal{C}^\infty$ par théorèmes généraux. On peut également constater que la fonction est paire.

On a sans difficulté $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, et comme $\frac{f(x)}{x} \leqslant \frac{\ln(2x^2)}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ par croissance comparée. La courbe représentative de f admet donc une branche parabolique de direction (Ox) en $+\infty$. Même conclusion en $-\infty$ en utilisant la parité ou en effectuant des calculs très similaires.

Étudions désormais les variations : $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$, donc f est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$, atteignant en 0 un minimum de valeur $f(0) = \ln(1) = 0$. De plus, $f'(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$. La fonction f a donc deux points d'inflection pour $x = 1$ et $x = -1$, de hauteur $f(1) =$

$f(-1) = \ln(2)$ et dont les tangentes ont pour pentes respectives $f'(1) = \dfrac{2}{2} = 1$ et $f'(-1) = \dfrac{-2}{2} = -1$. La fonction f est convexe sur $[-1;1]$ (sa dérivée seconde est alors positive), et concave sur $]-\infty;-1]$ et sur $[1;+\infty[$. Voici une allure de la courbe (courbe en rouge, tangentes intéressantes en noir) :



Étude de la fonction g

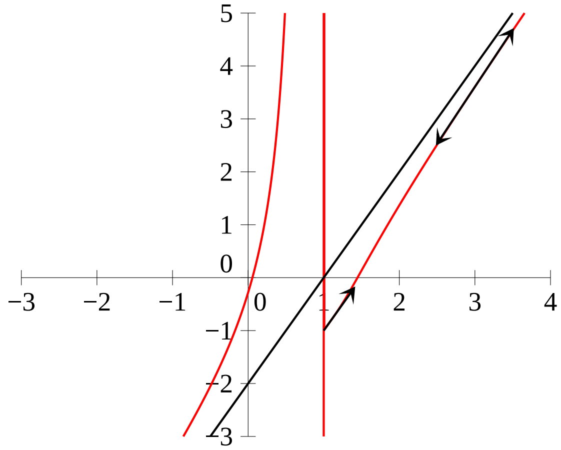
La fonction g est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ et y est $\mathcal{C}^\infty$ par théorèmes généraux.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{1-x}} = 1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = 2$ et enfin $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) - 2x = -2$. Il y a donc en $+\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = 2x - 2$. Cette asymptote est d'ailleurs tout aussi valable en $-\infty$ par des calculs similaires. Pour les plus pressés, signalons d'ailleurs qu'on peut en $+\infty$ comme en $-\infty$ $e^{\frac{1}{1-x}} = 1 + o(1)$, donc $g(x) = 2x - 2 + o(1)$, ce qui règle tout de suite la question de l'asymptote.

Du côté de 1 c'est plus compliqué : $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{1}{1-x} = +\infty$, ce dont on déduit $\lim\limits_{x\to1^-} g(x) = +\infty$. Il y a donc une asymptote verticale d'équation $x = 1$. Mais par ailleurs $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{1}{1-x} = -\infty$, ce dont on déduit cette fois que $\lim\limits_{x\to1^+} g(x) = 2 - 3 = -1$. La fonction g est donc prolongeable « par continuité » en posant $g(1) = -1$.

Dérivons désormais : $g'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2} e^{\frac{1}{1-x}} + 2$, qui a le bon gout de toujours être positif. La fonction est donc croissante sur chacun de ses deux intervalles de définition. De plus, g' a pour limite 2 en -1^+ (on a toujours $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{1}{1-x} = -\infty$ et, par croissance comparée, $\lim\limits_{X\to-\infty} X^2 e^X = 0$, donc la composition des limites nous donne une limite nulle pour le premier morceau). Il y aura donc une demi-tangente à droite de pente 2 en notre point prolongé par continuité à droite.

Enfin, $g''(x) = \left(\dfrac{2}{(1-x)^3} + \dfrac{1}{(1-x)^2}\right) e^{\frac{1}{1-x}} = \dfrac{3-x}{(1-x)^3} e^{\frac{1}{1-x}}$. Il y a donc un point d'inflexion pour $x = 3$, et $g(3) = e^{-\frac{1}{2}} + 3 = \dfrac{1}{\sqrt{e}} + 3$; $g'(3) = \dfrac{e^{-\frac{1}{2}}}{4} + 2 = \dfrac{1}{4\sqrt{e}} + 2$. La fonction f est convexe sur $]-\infty;-1[$ et sur $[3;+\infty[$ et concave sur $[1;3]$ (le dénominateur changeant de signe pour $x = 1$). Avec tout ça, on doit pouvoir tracer une courbe ressemblant à la suivante :



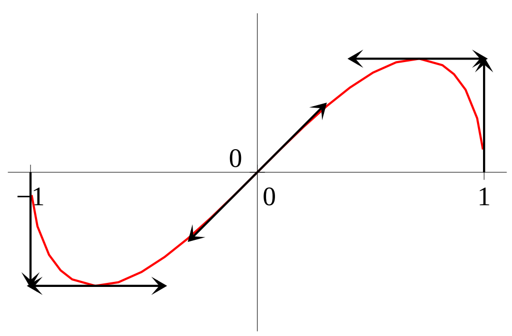
Étude de la fonction h

La fonction h est définie sur $[-1;1]$ et $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1;1[$ par théorèmes généraux. De plus, la fonction est paire.

Pas de limites à calculer, bornons-nous à remarquer que $h(-1)=h(1)=0$.

On a $h'(x)=\sqrt{1-x^2}+x\times\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{2(1-x^2)-2x^2}{2\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$. Il y a donc deux extrema pour $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. On calcule $h\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$ et $h\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$. Constatons au passage que les limites de h' en -1 et en 1 sont infinies puisque le numérateur de h' tend vers -2 et le dénominateur vers 0. De plus, $h''(x)=\dfrac{-4x\sqrt{1-x^2}-(1-2x^2)\times\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=\dfrac{-4x(1-x^2)+x(1-2x^2)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{2x^3-3x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{x(2x^2-3)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$. Cette dérivée seconde ne s'annule que pour $x=0$ (car h n'est définie que sur $[-1;1]$, intervalle où $2x^2-3$ est toujours négatif), point d'inflexion pour lequel on a $h(0)=0$ et $h'(0)=1$, et on obtient le tableau de variations complet suivant :

x	-1		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
$h''(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$h'(x)$	$-\infty$	$-$	0	$+$	1	$+$	0	$-$	$-\infty$
h	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0
h			convexe		|		concave		

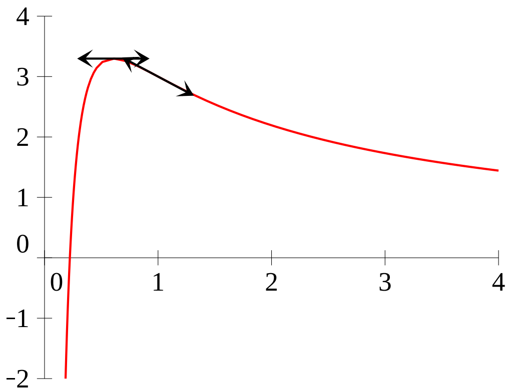


Étude de la fonction i

La fonction i est bien sûr définie sur $]0;+\infty[$, et y est $\mathcal{C}^\infty$ par théorèmes généraux.

La limite de i quand x tend vers 0 est $-\infty$ (non, il n'y a pas de forme indéterminée), il y a donc une asymptote verticale d'équation $x=0$. Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} i(x)=0$, donc il y a également une asymptote horizontale (l'axe des abscisses) en $+\infty$.

Comme $i'(x)=\dfrac{2-(2\ln x+3)}{x^2}=\dfrac{-1-2\ln x}{x^2}$, la fonction i admet un maximum en $x=e^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$, de valeur $i\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)=(2\times(-\frac{1}{2})+3)\sqrt{e}=2\sqrt{e}$. De plus, $i''(x)=\dfrac{-2x-2x(-1-2\ln x)}{x^4}=\dfrac{4\ln x}{x^3}$. La fonction admet donc un point d'inflexion pour $x=1$, et $i(1)=3$; $i'(1)=-1$. La fonction i est concave sur $]0;1]$ et convexe sur $[1;+\infty[$, avec une courbe ressemblant à ceci :



Feuille d'exercices n°19 : Suites récurrentes

ECE3 Lycée Carnot

19 mars 2011

Exercice 1 (**)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{4}(2 - u_n^2)$.

1. On note f la fonction définie par $f(x) = x + \dfrac{1}{4}(2 - x^2)$. Étudier les variations de f et déterminer ses points fixes.
2. Montrer que $\forall x \in [1; 2]$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$, et que $f([1; 2]) \subset [1; 2]$.
3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1; 2]$, et que $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|$.
4. Prouver par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \sqrt{2}| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$, et en déduire la limite de la suite (u_n).
5. À partir de quel rang a-t-on $|u_n - \sqrt{2}| \leqslant 10^{-9}$?

Exercice 2 (**)

On considère la fonction f définie sur $]0; \frac{1}{e}[\cup]\frac{1}{e}; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{\ln x + 1}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. La fonction prolongée est-elle dérivable en 0 ?
2. Étudiez les variations de f et tracer l'allure de sa courbe représentative.
3. Déterminer les points fixes de f.
4. On définit une suite (x_n) par $x_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$.
   (a) Étudiez sur $\mathbb{R}_+$ la fonction $g : x \mapsto \dfrac{x}{(x+1)^2}$, en déduire que $\forall x \in]1; +\infty[$, $0 \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{1}{4}$.
   (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_{n+1} - 1| \leqslant \dfrac{1}{4}|x_n - 1|$, puis que $|x_n - 1| \leqslant \dfrac{1}{4^n}$.
   (c) En déduire la limite de la suite (x_n).

Exercice 3 (**)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_-$ par $f(x) = \dfrac{e^x - 3}{2}$. Le but de l'exercice est de calculer une valeur approchée de la solution de l'équation $e^x = 3 + 2x$.

1. Montrer que cette équation admet une unique solution négative, que l'on notera α, et que $f(\alpha) = \alpha$.

2. Montrer que $]-\infty;0]$ est un intervalle stable par la fonction f.
3. Prouver que, $\forall x \in]-\infty;0]$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.
4. On définit désormais une suite (u_n) par $u_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 0$.
5. Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$.
6. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.
7. Montrer que la suite (u_n) converge vers α.
8. Écrire un programme Pascal déterminant une valeur approchée de α à ε près, où ε est un réel positif choisi par l'utilisateur.

Exercice 4 (d'après ESCL 2001) (***)

On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$ si $x > 0$, et $f(0) = 0$.

1. (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$, et calculer sa dérivée sur cet intervalle.
   (c) En admettant que $e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x)$, étudier la limite de f' quand x tend vers 0.
   (d) En déduire que f est en fait $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
   (e) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$.
2. (a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0;+\infty[$ et que
$$f''(x) = \frac{e^x}{(e^x-1)^3}(xe^x - 2e^x + x + 2)$$
   (b) Étudier les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = xe^x - 2e^x + x + 2$. En déduire le signe de f''.
   (c) En déduire le sens de variation de f, préciser sa limite en $+\infty$, et dresser son tableau de variations.
   (d) Tracer une allure de la courbe représentative de f.
3. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$ et $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.
   (b) Résoudre l'équation $f(x) = x$.
   (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \ln 2| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \ln 2|$.
   (d) En déduire que (u_n) converge et préciser sa limite.

Exercice 5 (***)

On considère une suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f : x \mapsto \dfrac{x^3 + 3x}{3x^2 + 1}$. Déterminer la nature de la suite (u_n) en distinguant éventuellement plusieurs cas selon la valeur de u_0.

Corrigé de la feuille d'exercices n°19

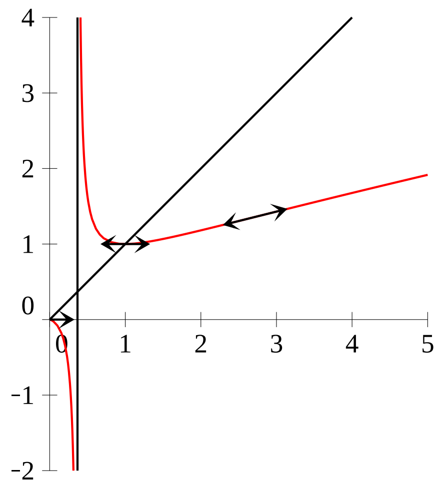
Exercice 1 (**)

1. La fonction f est C^∞ sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = 1 - \frac{1}{2}x$. Elle admet donc un maximum en $x = 2$, de valeur $f(2) = 1 + \frac{1}{4}(2-4) = \frac{3}{2}$, et est croissante sur $]-\infty;2]$ et décroissante sur $[2;+\infty[$. Les points fixes sont déterminés en résolvant l'équation $f(x) = x$, c'est-à-dire $\frac{1}{4}(2-x^2) = 0$, d'où deux points fixes pour $x = \sqrt{2}$ et $x = -\sqrt{2}$.
2. En effet, si $1 \leqslant x \leqslant 2$, $-1 \leqslant -\frac{1}{2}x \leqslant -\frac{1}{2}$ et $0 \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{2}$, donc $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$. Quant à l'image de $[1;2]$ par f, comme la fonction est croissante sur cette intervalle, elle vaut $[f(1);f(2)] = \left[\frac{5}{4};\frac{3}{2}\right] \subset [1;2]$.
3. C'est une récurrence toute simple : $u_0 = 1 \in [1;2]$, et si $u_n \in [1;2]$, on a d'après la question précédente $f(u_n) \in [1;2]$, soit $u_{n+1} \in [1;2]$. Comme $u_n \in [1;2]$ et $\sqrt{2} \in [1;2]$, et que $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$ sur cet intervalle, on peut appliquer l'IAF entre u_n et $\sqrt{2}$ et obtenir $|f(u_n) - f(\sqrt{2})| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|$. Comme $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ (c'est un point fixe de f) et $f(u_n) = u_{n+1}$ (par définition), on a bien $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|$.
4. Prouvons par récurrence P_n : $|u_n - \sqrt{2}| \leqslant \frac{1}{2^n}$. Pour $n = 0$, la propriété P_0 stipule que $|1 - \sqrt{2}| \leqslant 1$, ce qui est vrai. Supposons désormais P_n vraie, on a alors d'après la question précédente $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|$, et par ailleurs, par hypothèse de récurrence $|u_n - \sqrt{2}| \leqslant \frac{1}{2^n}$. On peut combiner les deux inégalités pour obtenir $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leqslant \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}$. Cela prouve P_{n+1} et achève la récurrence.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, et $0 \leqslant |u_n - \sqrt{2}| \leqslant \frac{1}{2^n}$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \sqrt{2}| = 0$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}$.
5. On sait que l'inégalité sera vérifiée dès que $\frac{1}{2^n} \leqslant 10^{-9}$, soit en passant au logarithme $-n\ln 2 \leqslant -9\ln 10$, ou encore $n \geqslant \frac{9\ln 10}{\ln 2} \simeq 30$. Il faut donc calculer le trentième terme de la suite pour être certain d'avoir une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-9} près. Remarque : en pratique, on constate que le u_{19} est déjà une valeur approchée à 10^{-9} près.

Exercice 2 (**)

1. En effet, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$ (pas de forme indéterminée). De plus, f est dérivable et C^1 sur $\left]0;\frac{1}{e}\right[$, de dérivée $f'(x) = \frac{\ln x + 1 - 1}{(\ln x + 1)^2} = \frac{\ln x}{(\ln x + 1)^2}$, qui a également pour limite 0 en 0 (c'est pas exemple équivalent en 0 à $\frac{1}{\ln x}$). D'après le théorème de prolongement C^1, la fonction f est donc dérivable en 0, et $f'(0) = 0$.
2. On a déjà calculé f', il est donc facile de constater que f est décroissante sur $\left[0;\frac{1}{e}\right[$ et sur $\left]\frac{1}{e};1\right]$, et croissante sur $[1;+\infty[$. On a par ailleurs $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (croissance comparée),

et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, donc il y a une branche parabolique de direction (Ox) en $+\infty$. Par ailleurs, $\lim_{x\to\frac{1}{e}^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to\frac{1}{e}^+} f(x) = +\infty$ (pas de difficulté non plus, il suffit de constater que $\ln x + 1$ est négatif à gauche de $\frac{1}{e}$ et positif à droite). Les plus courageux calculeront $f''(x) = \frac{1}{x(\ln x+1)^2} - \frac{2\ln(x)}{x(\ln x+1)^3} = \frac{1-\ln x}{x(\ln x+1)^3}$ (j'ai dérivé le quotient comme le produit de $\ln x$ et de $\frac{1}{(\ln x+1)^2}$ car c'est un peu plus facile à écrire), et en déduiront que la courbe admet un point d'inflexion pour $x = e$, de hauteur $f(e) = \frac{e}{2}$, et dont la tangente a pour pente $f'(e) = \frac{1}{4}$. On peut ainsi tracer la courbe suivante :



3. Résolvons $f(x) = x$. Si l'on élimine la valeur 0 (qui est effectivement un point fixe de f), on peut simplifier par x et obtenir $\frac{1}{\ln x+1} = 1$, soit $\ln x + 1 = 1$, donc $x = 1$. Il y a donc deux points fixes : 0 et 1.

4. (a) La fonction g est C^∞ sur $\mathbb{R}_+$, de dérivée $g'(x) = \frac{(x+1)^2 - 2x(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{1-x}{(x+1)^3}$. Elle admet donc un maximum en 1, de valeur $g(1) = \frac{1}{4}$. Comme $g(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$, on en déduit que $\forall x \geqslant 0$, $0 \leqslant g(x) \leqslant \frac{1}{4}$. Or, on a $f'(x) = g(\ln x)$. Si $x \geqslant 1$, $\ln x \geqslant 0$, et on peut lui appliquer l'inégalité précédente : $0 \leqslant g(\ln x) \leqslant \frac{1}{4}$, c'est-à-dire $0 \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{4}$.

   (b) Pour appliquer l'IAF, il faut d'abord vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [1;+\infty[$. En constatant que l'intervalle $[1;+\infty[$ est stable par f, on peut le prouver par une simple récurrence : $x_0 = 2 \geqslant 1$, et en supposant $x_n \geqslant 1$, on obtient, en utilisant la croissance de f sur $[1;+\infty[$, $f(x_n) \geqslant f(1) = 1$, donc $x_{n+1} \geqslant 1$, ce qui achève la récurrence.

   On a donc $1 \in [1;+\infty[$ et $x_n \in [1;+\infty[$. De plus, $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{4}$ sur $[1;+\infty[$. En appliquant l'IAF, on obtient donc $|f(x_n) - f(1)| \leqslant |x_n - 1|$, soit $|x_{n+1} - 1| \leqslant \frac{1}{4}|x_n - 1|$.

   Prouvons ensuite par récurrence la propriété P_n : $|x_n - 1| \leqslant \frac{1}{4^n}$. Pour $n = 0$, P_0 stipule que $|2-1| \leqslant 1$, ce qui est vrai. Supposons ensuite P_n vraie, on obtient alors $|x_{n+1} - 1| \leqslant \frac{1}{4}|x_n - 1|$ (cf plus haut) $\leqslant \frac{1}{4} \times \frac{1}{4^n}$ (hypothèse de récurrence), ce qui prouve P_{n+1} et achève la récurrence.

(c) Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4^n} = 0$, et $0 \leqslant |x_n - 1| \leqslant \frac{1}{4^n}$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim_{n\to+\infty} |x_n - 1| = 0$, soit $\lim_{n\to+\infty} x_n = 1$.

Exercice 3 (**)

1. Posons $g(x) = e^x - 3 - 2x$. Cette fonction est C^∞ sur $\mathbb{R}$, de dérivée $g'(x) = e^x - 2$. La fonction g est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ (et même un peu au-delà). Comme $g(0) = -2$ et $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$, elle est donc bijective de $\mathbb{R}_-$ vers $[-2; +\infty[$. L'équation $g(x) = 0$ admet donc une unique solution négative α. Comme $e^\alpha - 3 = 2\alpha$, on a bien $f(\alpha) = \alpha$.
2. La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $f(0) = -\frac{1}{2}$, donc $\forall x \leqslant 0$, $f(x) \leqslant -\frac{1}{2}$, ce qui prouve la stabilité de l'intervalle $]-\infty; 0]$ par f.
3. On a $f'(x) = \frac{e^x}{2}$, donc $0 \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{2}$ quand $x \leqslant 0$, ce qui prouve l'inégalité demandée.
4. C'est vrai pour u_0, et si on le suppose vrai pour u_n, alors $u_{n+1} = f(u_n) \leqslant 0$ d'après la question 2. Par principe de récurrence, tous les termes de la suite sont donc négatifs.
5. Vous devez commencer à avoir l'habitude : $\alpha \leqslant 0$, $u_n \leqslant 0$ et $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$ quand $x \leqslant 0$, donc l'IAF nous donne $|f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$, soit $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.
6. C'est la récurrence classique, on pose $P_n : |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}$. La propriété P_0 prétend que $|-1-\alpha| \leqslant 1$, (pour une fois, ce n'est pas totalement évidemment), soit $\alpha \in [-2; 0]$. On sait déjà que $\alpha \leqslant 0$. Pour prouver l'autre inégalité, revenons à la question 1 et calculons $g(-2) = e^{-2} - 3 + 4 = 1 + e^{-2} > 0$. Comme $g(-2) > g(\alpha)$ (qui vaut 0 par hypothèse), la décroissante de la fonction g nous donne bien $\alpha \geqslant -2$. Supposons désormais P_n vérifiée, on a alors $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n}$, ce qui prouve P_{n+1} (plus de détails sur ce genre de récurrence dans le corrigé de l'exercice 1).
7. Cf exercice 1 : par théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} |u_n - \alpha| = 0$, donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.
8. ```
PROGRAM alpha;
USES wincrt;
VAR u,a,e : real;
BEGIN
WriteLn('Choisissez la précision de la valeur approchée');
ReadLn(e);
u := -1; a := 1;
REPEAT
u := (exp(u)-3)/2;
a := a/2;
UNTIL a<e;
WriteLn('Une valeur approchée de alpha à ',e,' près est ',u);
END.
```
Pour les curieux, on obtient $\alpha \simeq -1.373$.

## Exercice 4 (d'après ESCL 2001) (***)

1. (a) La fonction $f$ est $C^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions usuelles, et de plus on sait que $\lim_{x\to0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, donc $\lim_{x\to0} \frac{x}{e^x - 1} = 1$. La fonction est donc également continue en 0, donc sur $\mathbb{R}_+$ tout entier.
```

(b) Pour le caractère C^1, cf la question précédente. De plus, $f'(x) = \dfrac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x-1)^2}$.

(c) En utilisant le résultat donné par l'énoncé, $e^x - 1 - xe^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} - 1 - x - x^2 - o(x^2)$ (pour xe^x, on a multiplié le développement limité précédent par x, en supprimant le terme $\dfrac{x^3}{2}$ qui est un $o(x^2)$), soit $e^x - 1 - x^2 = -\dfrac{x^2}{2} + o(x^2) \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$. on a donc $f'(x) \underset{0}{\sim} -\dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire que $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = -\dfrac{1}{2}$.

(d) En appliquant le théorème de prolongement C^1, on peut en déduire que f est dérivable en 0, et que $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$. La fonction f est donc $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ tout entier.

(e) Ca, on peut le faire sans problème ; $f'(x) = \dfrac{e^x - 1 - xe^x}{e^{2x} - 2e^x + 1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{-xe^x}{e^{2x}} \sim -\dfrac{x}{e^x}$, donc par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0^-$.

2. (a) On a déjà prouvé le caractère C^2, et de plus $f' = u \times \dfrac{1}{v^2}$, avec $u(x) = e^x - 1 - xe^x$ et $v(x) = e^x - 1$. En dérivant f' comme un produit, on a donc $f'' = \dfrac{u'}{v^2} - \dfrac{2uv'}{v^3}$, soit $f''(x) = \dfrac{e^x - e^x - xe^x}{(e^x-1)^2} - \dfrac{2(e^x - 1 - xe^x)e^x}{(e^x-1)^3} = \dfrac{-xe^x(e^x-1) - 2e^x(e^x - 1 - xe^x)}{(e^x-1)^3} = \dfrac{e^x(-xe^x + x - 2e^x + 2 + 2xe^x)}{(e^x-1)^3} = \dfrac{e^x(xe^x - 2e^x + x + 2)}{(e^x-1)^3}$.

(b) La fonction g est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$, et $g'(x) = e^x + xe^x - 2e^x + 1 = xe^x - e^x + 1$; $g''(x) = e^x + xe^x - e^x = xe^x$, donc $g'' \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}_+$, d'où le tableau de variations suivant :

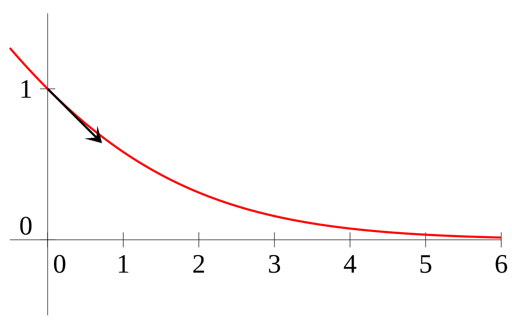
x	0		$+\infty$
$g''(x)$		$+$	
g'	0	$\nearrow$	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
g	0	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction g est donc positive sur $\mathbb{R}_+$. Comme les autres facteurs intervenant dans f'' sont aussi positifs (sur $\mathbb{R}_+$, $e^x \geqslant 1$, donc $(e^x-1)^3 \geqslant 0$), la fonction f'' est positive sur $\mathbb{R}_+$.

(c) D'après la question précédente, la fontion f' est croissante, comme elle tend vers 0^- en $+\infty$, elle est donc négative sur $\mathbb{R}_+$, et f est donc décroissante. De plus, $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x}{e^x}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

x	0		$+\infty$
f	1	$\searrow$	0

(d) L'allure de la courbe est la suivante :



3. (a) Il suffit de reprendre le tableau de variations de f' pour constater que $\forall x \geqslant 0$, $0 \geqslant f'(x) \geqslant f'(0) = -\dfrac{1}{2}$, donc $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$, et que $0 \leqslant f(x) \leqslant f(0) = 1$.
   (b) L'équation donne $x = x(e^x - 1)$, soit $x(e^x - 2) = 0$, donc $e^x = 2$ (puisque $x = 0$ n'est pas un point fixe), et le seul point fixe de f est donc $x = \ln 2$.
   (c) En utilisant les résultats des deux questions précédentes, on peut appliquer l'IAF à f sur $\mathbb{R}_+$ et obtenir que, $\forall (x, y) \geqslant 0$, $|f(x) - f(y)| \leqslant \dfrac{1}{2}|x - y|$. On peut prendre $y = \ln 2$ et $x = u_n$ car u_n est toujours positif (c'est vrai pour u_0, et $u_{n+1} = f(u_n)$ est positif car f ne prend que des valeurs positives), donc, comme $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(\ln 2) = \ln 2$, on a $|u_{n+1} - \ln 2| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \ln 2|$.
   (d) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ln 2| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$. C'est vrai pour u_0 car $\ln 2 \leqslant 1$, et en supposant le résultat vrai pour u_n, on a $|u_{n+1} - \ln 2| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \ln 2| \leqslant \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2^n} \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}$, ce qui prouve l'hérédité. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$, on en déduit par le théorème des gendarmes que $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \ln 2| = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ln 2$.

Exercice 5 (***)

Commençons par étudier la fonction f : elle est C^∞, impaire, et
$f'(x) = \dfrac{(3x^2+3)(3x^2+1) - 6x(x^3+3x)}{(3x^2+1)^2} = \dfrac{3x^4 - 6x^2 + 3}{(3x^2+1)^2} = \dfrac{3(x^2-1)^2}{(3x^2+1)^2}$. La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Cherchons ses points fixes : $f(x) = x$ se ramène, en simplifiant par x (et en notant au passage que 0 est un point fixe), à $\dfrac{x^2+3}{3x^2+1} = 1$, soit $x^2 + 3 = 3x^2 + 1$, donc $2x^2 = 2$, ce qui se produit pour $x = 1$ et $x = -1$. Il y a donc trois points fixes : $x = -1$, $x = 0$ et $x = 1$. Chacun des quatre intervalles $]-\infty; -1]$; $[-1; 0]$; $[0; 1]$ et $[1; +\infty[$ est donc stable par f. De plus, la courbe représentative de la fonction f est située au-dessus de la droite d'équation $y = x$ sur $]-\infty; -1]$ et sur $[0; 1]$, et en-dessous sur les deux autres intervalles.

On peut alors deviner le comportement de (u_n) selon les valeurs de u_0 :

- si $u_0 < -1$, la suite sera croissante, majorée par -1, donc convergera. Le seul point fixe de l'intervalle étant -1, on aura $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -1$.
- si $u_0 = -1$, la suite est constante égale à -1.
- si $-1 < u_0 < 0$, la suite sera décroissante, minorée par -1, et convergera nécessairement vers -1.
- si $u_0 = 0$, la suite est nulle.
- si $0 < u_0 < 1$, la suite sera croissante, majorée par 1, et convergera vers 1.
- si $u_0 = 1$, la suite est constante égale à 1.
- si $u_0 > 1$, la suite est décroissante, minorée par 1, elle converge vers 1.

Prouvons par exemple la convergence dans le cas où $u_0 \in]0; 1[$ (les autres sont très similaires). La fonction f étant strictement croissante sur $]0; 1[$, on a $\forall x \in]0; 1[$, $f(x) \in]f(0); f(1)[=]0; 1[$. Une récurrence élémentaire permet alors de prouver que tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $]0; 1[$: c'est vrai pour u_0 par hypothèse, et si $u_n \in]0; 1[$, $f(u_n) \in]0; 1[$, soit $u_{n+1} \in]0; 1[$, ce qui achève la récurrence.

Par ailleurs, on a $f(x) = x\dfrac{x^2+3}{3x^2+1}$. Quand $0 < x < 1$, $0 < x^2 < 1$, donc $0 < 2x^2 < 2$ puis en ajoutant $x^2 + 1$ de chaque côté, $3x^2 + 1 < x^2 + 3$. Tous ces nombres étant par ailleurs positifs, on a alors $\dfrac{x^2+3}{3x^2+1} > 1$, d'où $f(x) > x$. On en déduit que $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n > 0$, donc la suite (u_n) est strictement croissante. Étant majorée par 1, elle converge vers un point fixe de la fonction.

Sa limite appartient par ailleurs à l'intervalle $[0;1]$, donc ne peut être égale qu'à 0 ou 1. On peut exclure 0 car, la suite étant croissante, $u_n \geqslant u_0$, donc la limite de la suite est supérieure ou égale à u_0 et ne peut donc être nulle. Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Remarque : ici, appliquer l'IAF est assez peu intéressant...

Feuille d'exercices n°20 : Inversion de matrices

ECE3 Lycée Carnot

1er avril 2011

Exercice 1 (**)

Inverser (lorsque c'est possible) les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 (***)

Déterminer les valeurs de λ et de x pour lesquels les matrices suivantes sont inversibles et, lorsque c'est possible, leur inverse.
$A = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 1+x & -x \\ 0 & x & 1-2x \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$

Exercice 3 (**)

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et déterminer son inverse. Calculer $P^{-1}AP$ et en déduire les puissances de la matrice A.

Exercice 4 (*)

Résoudre le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & z & = & a \\ x & + & 2y & + & z & = & b \\ x & + & y & + & 2z & = & c \end{array} \right.$$

En déduire l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 5 (**)

On s'intéresse à la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Trouver une relation entre A^2, A et I. En déduire que A est inversible et la valeur de A^{-1}. Résoudre en utilisant ce qui précède le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & 2y & + & 4z & = & 1 \\ -x & + & 3y & + & 2z & = & 4 \\ -x & + & y & + & 4z & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 6 (***)

On considère la matrice carrée $K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer K^2.
2. En déduire que K est inversible et calculer K^{-1}.
3. Soient a et b deux réels, on définit $M = aI + bK$. Montrer que $M^2 = -(a^2+b^2)I + 2aM$.
4. En déduire que si a et b ne sont pas nuls tous les deux, M est inversible et écrire M^{-1} sous la forme $cI + dK$.
5. En déduire l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1+\sqrt{2} & 1 & -2 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2+\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Exercice 7 (*)

Montrer que si une matrice A est symétrique et inversible, alors A^{-1} est également symétrique.

Exercice 8 (**)

Soit A une matrice nilpotente. Montrer que $I - A$ est inversible et que son inverse s'écrit sous la forme $I + A + A^2 + \cdots + A^k$. En déduire l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et celui de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 9 (***)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 1$, $u_2 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$. On définit également les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

2. Calculer $P^{-1}AP$. En déduire la valeur de A^n.
3. Quel lien y a-t-il entre la suite (u_n) et la matrice A ? À l'aide des calculs des questions précédentes, déterminer la valeur de u_n.

Corrigé de la feuille d'exercices n°20

Exercice 1 (**)

Un peu de motivation, six pivots de Gauss, ça va prendre quelques pages de calcul, mais ça ne peut pas faire de mal.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow 2L_2 + 3L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 21 & 7 \\ 0 & 7 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow 3L_3 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 21 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow 2L_1 - L_3 \\ L_2 \leftrightarrow 2L_2 - 7L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 6 & 0 \\ 0 & 42 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 6 & 18 & -42 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow 7L_1 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} -28 & 0 & 0 \\ 0 & 42 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 \\ 6 & 18 & -42 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow -L_1/28 \\ L_2 \leftarrow L_2/42 \\ L_3 \leftarrow L_3/2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

La matrice A est donc inversible, et $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

$$
\begin{array}{llll}
B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} & I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1 \end{array} \\[2ex]
\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \\[2ex]
\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} L_1 \leftarrow 9L_1 + L_3 \\ L_2 \leftrightarrow 3L_2 - L_3 \end{array} \\[2ex]
\begin{pmatrix} 18 & 18 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\[2ex]
\begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1/18 \\ L_2 \leftrightarrow L_2/9 \\ L_3 \leftarrow L_3/9 \end{array} \\[2ex]
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix} &
\end{array}
$$

La matrice B est donc inversible, et $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$.

$$
\begin{array}{llll}
C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\[2ex]
\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow L_2 - L_3 \\[2ex]
\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} &
\end{array}
$$

La matrice C n'est pas inversible.

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow 4L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow 4L_2 + L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -10 & 6 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 + L_2$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -10 & 6 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1/8 \\ L_2 \leftarrow -L_2/4 \\ L_3 \leftarrow L_3/4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La matrice D est donc inversible, et $D^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_2 \leftrightarrow L_1 \\ L_3 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_4 \leftarrow L_3 - L_4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_2 - L_3$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_4 - L_1 \\ \\ L_3 \leftrightarrow L_4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice E est donc inversible, et $E^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On peut tricher un peu pour la matrice F en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne, qui ne bougeront de toute façon pas pendant les calculs (sauf pour la toute dernière étape où on divisera la dernière ligne par 3, ce qui fera apparaitre un $\dfrac{1}{3}$ dans le coin inférieur droit de la matrice inverse).

$$F' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow 2L_1 + L_3 \\ L_2 \leftrightarrow L_2 + L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow 3L_1 - 2L_2$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1/6 \\ L_2 \leftrightarrow L_2/3 \\ L_3 \leftarrow -L_3/2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La matrice F est donc inversible, et $F^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Exercice 2 (***)

Il est en fait nettement préférable d'éviter de faire des opérations interdites pour certaines valeurs de λ, ce qui est tout à fait possible en commençant avec un petit échange de lignes :

$$A = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1-\lambda \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 1-\lambda & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - (1-\lambda)L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1-\lambda \\ 0 & -(1+\lambda) & 1+\lambda \\ 0 & 2(1+\lambda) & 4-(1-\lambda)^2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow 2L_2 + L_3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1-\lambda \\ 0 & -(1+\lambda) & 1+\lambda \\ 0 & 0 & Z \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & \lambda-3 \end{pmatrix}$$

avec $Z = 2(1+\lambda) + 4 - (1-\lambda)^2 = 2 + 2\lambda + 4 - 1 + 2\lambda - \lambda^2 = 5 + 4\lambda - \lambda^2$. Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 16 + 20 = 36$ et admet deux racines $\lambda_1 = \dfrac{-4+6}{-2} = -1$ et $\lambda_2 = \dfrac{-4-6}{-2} = 5$. Les deux valeurs annulant un des coefficients de la diagonale sont $\lambda = -1$ (qui en annule même deux) et $\lambda = 5$. Pour toute autre valeur de λ, la matrice est donc inversible.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1-\lambda \\ 0 & -(1+\lambda) & 1+\lambda \\ 0 & 0 & (\lambda+1)(5-\lambda) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & \lambda-3 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow XL_1 - (1-\lambda)L_3 \\ L_2 \leftarrow L_3 - (5-\lambda)L_2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2X & 2X & 0 \\ 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & X \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2(\lambda-1) & 2(\lambda-1) & X-(1-\lambda)(\lambda-3) \\ 2 & \lambda-3 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda-3 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow 7L_1 - L_2$$

en posant $X = (\lambda+1)(5-\lambda)$. Reste à effectuer l'opération $L_1 \leftarrow \dfrac{1}{2}L_1 - L_2$, qui transforme notre matrice de gauche en $X \times I$, et modifie les coefficients de la première ligne à droite : le premier devient $\lambda - 1 - 2 = \lambda - 3$, le deuxième $\lambda - 1 - (\lambda - 3) = 2$, et le dernier $\dfrac{X}{2} - \dfrac{(1-\lambda)(\lambda-3)}{2} - 2 = \dfrac{5 + 4\lambda - \lambda^2 - \lambda + 3 + \lambda^2 - 3\lambda - 4}{2} = 2$. Finalement, en divisant tout par X, on obtient la matrice inverse, beaucoup moins compliquée que ce qu'on aurait pu craindre : si $\lambda \notin \{-1; 5\}$,

$$A^{-1} = \frac{1}{(\lambda+1)(\lambda-5)} \begin{pmatrix} \lambda-3 & 2 & 2 \\ 2 & \lambda-3 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda-3 \end{pmatrix}$$

Pour B, c'est un peu plus facile :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1+x & -x \\ 0 & x & 1-2x \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_1 - L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+x & -x \\ 0 & x & 1-2x \\ 0 & x & -2x \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_2 - L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+x & -x \\ 0 & x & 1-2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + xL_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - (1-2x)L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+x & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1-x & x & x \\ 1-2x & 2x & 2x-1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow xL_1 - (1+x)L_2$$

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1+2x+x^2 & -2x-x^2 & 1-x-x^2 \\ 1-2x & 2x & 2x-1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalement, la matrice B est inversible si $x \neq 0$ et dans ce cas, $B^{-1} = \begin{pmatrix} x+2-\frac{1}{x} & -2-x & \frac{1}{x}-1-x \\ \frac{1}{x}-2 & 2 & 2-\frac{1}{x} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 (**)

Appliquons donc le pivot de Gauss à la matrice P :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2 - L_3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1/2 \\ L_2 \leftarrow L_2/2 \\ L_3 \leftarrow L_3/2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La matrice P est bien inversible, d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

On calcule sans enthousiasme $P^{-1}A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, puis $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, matrice diagonale que nous noterons D. On prouve ensuite par récurrence que $A^n = PD^nP^{-1}$: c'est vrai pour $n = 1$, puisque $A = P(P^{-1}AP)P^{-1} = PDP^{-1}$, et supposant la formule vérifiée pour A^n, on aura $A^{n+1} = A^n \times A = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$, ce qui achève la récurrence. Donc $A^n = P\begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 6^n & 0 \\ 0 & 0 & 8^n \end{pmatrix} P^{-1}$, soit $A^n = \begin{pmatrix} \frac{4^n+6^n}{2} & \frac{8^n-6^n}{2} & \frac{8^n-4^n}{2} \\ \frac{4^n-6^n}{2} & \frac{6^n+8^n}{2} & \frac{8^n-4^n}{2} \\ \frac{6^n-4^n}{2} & \frac{8^n-6^n}{2} & \frac{4^n+8^n}{2} \end{pmatrix}$.

Exercice 4 (*)

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & z & = & a \\ x & + & 2y & + & z & = & b \\ x & + & y & + & 2z & = & c \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & z & = & a \\ & - & 3y & & & = & a-b \\ & - & 2y & - & z & = & a-c \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & z & = & a \\ & & y & & & = & \frac{b}{3} - \frac{a}{3} \\ & & & & z & = & c-a-2y \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x & = & a+y-z \\ y & = & -\frac{a}{3} + \frac{b}{3} \\ z & = & -\frac{a}{3} - \frac{2}{3}b + c \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x & = & a+b-c \\ y & = & -\frac{a}{3} + \frac{b}{3} \\ z & = & -\frac{a}{3} - \frac{2}{3}b + c \end{array}\right.$$

On vient de résoudre le système $AX = B$, dont la solution est $X = A^{-1}B$. On en déduit que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 (**)

Commençons par calculer $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 20 \\ -5 & 9 & 10 \\ -5 & 5 & 14 \end{pmatrix}$. On remarque que $A^2 = 5A - 6I$, donc $5A - A^2 = A(5I - A) = 6I$, dont on déduit que $A^{-1} = \frac{1}{6}(5I - A)$, soit $A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Le système qui suit est de la forme $AX = B$, avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc l'unique solution du système est $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Exercice 6 (***)

1. On obtient $K^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $K^2 = -I$.
2. On a donc $K \times (-K) = I$, d'où $K^{-1} = -K$.
3. Calculons $M^2 = (aI + bK)^2 = a^2I^2 + abIK + baKI + b^2K^2 = (a^2 - b^2)I + 2abK = (a^2 - b^2)I + 2a(M - aI) = 2aM - (a^2 + b^2)I$.
4. Il faut avoir $a^2 + b^2 \neq 0$ pour pouvoir écrire $M^2 - 2aM = M(M - 2aI) = -(a^2 + b^2)I$, donc $M^{-1} = \dfrac{1}{a^2 + b^2}(2aI - M) = \dfrac{1}{a^2 + b^2}(aI - bK)$.
5. La matrice A est égale à $\sqrt{2}I + K$, son inverse vaut donc $\frac{1}{3}(\sqrt{2}I - K)$, c'est-à-dire $A^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & \sqrt{2}-1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & -1 \\ -1 & -1 & 0 & \sqrt{2}+2 \end{pmatrix}$.

Exercice 7 (*)

C'est en fait très simple : si A est symétrique, on a $A = {}^tA$. Par ailleurs, $A^{-1}A = I$. Si on transpose cette égalité, on obtient ${}^t(A^{-1}A) = {}^tI$, donc ${}^tA\,{}^t(A^{-1}) = I$ ou encore $A\,{}^t(A^{-1}) = I$. On en déduit que ${}^t(A^{-1})$ est l'inverse de A, donc que $A^{-1} = {}^t(A^{-1})$ par unicité de l'inverse, donc A^{-1} est bien une matrice symétrique.

Exercice 8(**)

Si A est nilpotente, il existe un entier k tel que $A^{k+1} = 0$. Or, on constate que $(I - A)(I + A + A^2 + \cdots + A^k = I - A + A - A^2 + A^2 - A^3 + \cdots + A^k - A^{k+1} = I - A^{k+1} = I$, donc $I - A$ est inversible, d'inverse $I + A + A^2 + \cdots + A^k$. On a $A = I - M$, avec $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Un rapide calcul donne $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M^3 = 0$. D'après ce qui précède, on a donc $A^{-1} = I + M + M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. De même on a $B = I - N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On calcule $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 12 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis $N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -8 & -36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et enfin $N^5 = 0$, donc $B^{-1} = I + N + N^2 + N^3 + N^4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 9 (***)

1. Appliquons donc le pivot de Gauss à la matrice P :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow 3L_1 - 4L_3 \\ L_2 \leftarrow 3L_2 - 2L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1/6 \\ L_2 \leftarrow L_2/6 \\ L_3 \leftarrow L_3/3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

La matrice P est bien inversible, d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

2. On calcule sans enthousiasme $P^{-1}A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$, puis $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, matrice diagonale que nous noterons D. On prouve ensuite par récurrence que $A^n = PD^nP^{-1}$: c'est vrai pour $n = 1$, puisque $A = P(P^{-1}AP)P^{-1} = PDP^{-1}$, et supposant la formule vérifiée pour A^n, on aura $A^{n+1} = A^n \times A = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$, ce qui achève la récurrence. Donc $A^n = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}P^{-1}$, soit
$$A^n = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{6} + \frac{2^{n+2}}{3} & \frac{1+(-1)^{n+1}}{2} & 1 + \frac{(-1)^n - 2^{n+2}}{3} \\ -\frac{1}{2} + \frac{(-1)^{n+1}}{6} + \frac{2^{n+1}}{3} & \frac{1+(-1)^n}{2} & 1 + \frac{(-1)^{n+1} - 2^{n+1}}{3} \\ -\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{6} + \frac{2^n}{3} & \frac{1+(-1)^{n+1}}{2} & 1 + \frac{(-1)^n - 2^n}{3} \end{pmatrix}.$$

3. On constate que les coefficients de la première ligne de A correspondent à ceux de la récurrence triple définissant (u_n). On peut ainsi écrire $A \times \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$, soit, en posant $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$, $X_{n+1} = AX_n$. On prouve par une récurrence classique que $X_n = A^nX_0$ (en effet, c'est vrai pour $n = 0$, et si on le suppose vrai au rang n, alors $X_{n+1} = AX_n = A(A^nX_0) = A^{n+1}X_0$. Pour déterminer la valeur de u_n, il suffit de connaitre le dernier coefficient de la matrice colonne X_n, donc un produit à gauche de X_0 par la dernière ligne de A^n suffit : $u_n = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{6} + \frac{2^n}{3} & \frac{1+(-1)^{n+1}}{2} & 1 + \frac{(-1)^n - 2^n}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{(-1)^{n+1}}{6} - \dfrac{2^n}{3} + \dfrac{1}{2} +$

$\dfrac{(-1)^{n+1}}{2} + 2 + \dfrac{2 \times (-1)^n}{3} - \dfrac{2^{n+1}}{3}$, soit $u_n = 3 - 2^n$.

Sujet d'annales : ESSEC II 2002

ECE3 Lycée Carnot

29 mars 2011

Le but de ce problème est d'étudier numériquement les solutions d'équations du type $x^n + x^{n-1} + \cdots + x = a$.

1. **Résolution numérique de l'équation** $x^2 + x - 1 = 0$.
   On considère dans cette question la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.
   (a) Montrer que l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ a une seule racine dans l'intervalle $]0;1[$ et préciser la valeur de cette racine, qu'on notera désormais r_2.
   (b) Montrer que, $\forall x \in \left[\frac{1}{2};1\right]$, $f(x) \in \left[\frac{1}{2};1\right]$.
   (c) Calculer la dérivée f' de f et prouver que, $\forall x \in \left[\frac{1}{2};1\right]$, $|f'(x)| \leqslant \frac{4}{9}$.
   (d) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - r_2| \leqslant \left(\frac{4}{9}\right)^n$, et en déduire la convergence de (u_n).
2. **Résolution numérique de l'équation** $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$.
   On considère désormais la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$.
   (a) Montrer que l'équation $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ a une unique solution r_3 appartenant à $]0;1[$.
   (b) Montrer que l'intervalle $\left[\frac{1}{3};1\right]$ est stable par g.
   (c) Calculer les dérivées g' et g'' et déterminer le maximum de $|g'(x)|$ sur l'intervalle $\left[\frac{1}{3};1\right]$.
   (d) On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = g(v_n)$. Majorer $|v_n - r_3|$ en fonction de n, et prouver la convergence de (v_n) vers r_3.
3. **Racine positive de l'équation** $x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x - a = 0$.
   On désigne désormais par a un réel strictement positif, et on note, pour tout entier $n \geqslant 2$, h_n la fonction définie par $h_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x - a$.
   (a) Montrer que sur l'intervalle $]0;+\infty[$, l'équation $h_n(x) = 0$ possède une unique racine qu'on notera t_n, puis que $t_n \in]0;1[$ si $n > a$.
   (b) Montrer que $(x-1)h_n(x) = x^{n+1} - (a+1)x + a$.
   (c) Montrer que $h_{n+1}(t_n) > h_n(t_n)$, et en déduire que la suite (t_n) est strictement décroissante, puis qu'elle converge vers une limite qu'on notera désormais α.
   (d) Montrer que, si $A \in \mathbb{N}$, on aura $0 < t_n^n \leqslant t_A^n$ si $n \geqslant A$. En déduire, en choisissant $A > a$, que $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n^n = 0$.

(e) Exprimer la limite α en fonction de a.

4. **Racine positive de l'équation** $nx^n + (n-1)x^{n-1} + \cdots + 2x^2 + x - a = 0$.
   On note dans cette partie $i_n(x) = nx^n + (n-1)x^{n-1} + \cdots + 2x^2 + x - a$.

   (a) Montrer que l'équation $i_n(x) = 0$ possède une unique solution sur $]0; +\infty[$, et que cette solution appartient à l'intervalle $]0; 1[$ si $n(n+1) > 2a$. On notera cette solution y_n.

   (b) Prouver la relation $(x-1)^2 i_n(x) = nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x - a(x-1)^2$.

   (c) Montrer que $i_{n+1}(y_n) > i_n(y_n)$. En déduire la décroissance de la suite (y_n), et sa convergence vers un réel $\beta \in [0; 1[$.

   (d) Montrer que $0 \leqslant ny_n^n \leqslant ny_A^n$ dès que $n \geqslant A$, où $A(A+1) \geqslant 2a$. En déduire la limite de la suite (ny_n^n), puis déterminer β en fonction de a.

Corrigé du sujet ESSEC II 2002

1. (a) C'est une équation du second degré, qu'on sait très bien résoudre : $\Delta = 1 + 4 = 5$, $x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$. La deuxième solution est manifestement négative, quant à la première, on peut l'encadrer en partant de $4 < 5 < 9 \Rightarrow 2 < \sqrt{5} < 3$, donc $\dfrac{1}{2} < x_1 < 1$. il y a donc bien une solution unique à l'équation sur l'intervalle $]0;1[$.

   (b) Si $\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$, on a $\dfrac{3}{2} \leqslant x+1 \leqslant 2$, donc $\dfrac{1}{2} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{2}{3}$. Comme $\dfrac{2}{3} < 1$, on a a fortiori $\dfrac{1}{2} \leqslant f(x) \leqslant 1$.

   (c) La fonction f est bien sûr dérivable sur son ensemble de définition, et $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$.
   En reprenant la question précédente, si $\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$, on a $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{x+1} \leqslant \dfrac{2}{3}$, donc en élevant au carré (tout est positif), $\dfrac{1}{4} \leqslant \dfrac{1}{(x+1)^2} \leqslant \dfrac{4}{9}$, soit $\dfrac{1}{2} \leqslant |f'(x)| \leqslant \dfrac{4}{9}$.

   (d) Commençons par prouver par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\dfrac{1}{2};1\right]$: $u_0 = 1$ appartient bien à l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2};1\right]$. Supposons désormais que $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$, on a d'après la question b $\dfrac{1}{2} \leqslant f(u_n) \leqslant 1$, soit $\dfrac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$, ce qui achève la récurrence.
   Constatons par ailleurs que r_2 est un point fixe de la fonction f : on sait que r_2 vérifie $r_2^2 + r_2 - 1 = 0$, soit $r_2(r_2+1) = 1$, donc $r_2 = \dfrac{1}{r_2+1}$ ou encore $f(r_2) = r_2$.
   On peut désormais appliquer l'IAF à $x = u_n$ et $y = r_2$, qui appartiennent tous deux à l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2};1\right]$ (cf questions précédentes), sur lequel on a vu que $|f'(x)| \leqslant \dfrac{4}{9}$. On en déduit que $|f(u_n) - r_2| \leqslant \dfrac{4}{9}|u_n - r_2|$, soit $|u_{n+1} - r_2| \leqslant \dfrac{4}{9}|u_n - r_2|$.
   Montrons enfin par récurrence la propriété $P_n : |u_n - r_2| \leqslant \left(\dfrac{4}{9}\right)^n$. Pour $n = 0$, $|u_0 - r_2| = |1 - r_2| \leqslant 1$ car $r_2 \in]0;1[$, ce qui prouve P_0. Si on suppose P_n vérifiée, on peut faire le calcul suivant en utilisant successivement le résultat précédent et l'hypothèse de récurrence : $|u_{n+1} - r_2| \leqslant \dfrac{4}{9}|u_n - r_2| \leqslant \dfrac{4}{9} \times \left(\dfrac{4}{9}\right)^n \leqslant \left(\dfrac{4}{9}\right)^{n+1}$. Cette dernière inégalité prouve P_{n+1} et achève donc la récurrence.
   Comme $\dfrac{4}{9} < 1$, la suite $\left(\dfrac{4}{9}\right)^n$ converge vers 0, et le théorème des gendarmes nous permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - r_2| = 0$, c'est-à-dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = r_2$.

2. (a) Cette fois-ci, on ne sait pas résoudre l'équation, il faut donc étudier un peu le polynome $x^3 + x^2 + x - 1$. Sa dérivée est $3x^2 + 2x + 1$, qui a un discriminant négatif et est donc toujours positive. La fonction $x \mapsto x^3 + x^2 + x - 1$ est donc strictement croissante et bijective sur $\mathbb{R}$. Comme elle prend la valeur -1 pour $x = 0$ et la valeur 2 pour $x = 1$, on en déduit qu'elle s'annule entre 0 et 1. L'équation proposée a donc une unique solution (àa cause de la bijectivité) qui appartient à l'intervalle $]0;1[$.

   (b) Le trinome $x^2 + x + 1$ étant strictement croissant sur $\mathbb{R}_+$, on aura, si $\dfrac{1}{3} \leqslant x \leqslant 1$, $f(1) \leqslant f(x) \leqslant f\left(\dfrac{1}{3}\right)$. Comme $f(1) = \dfrac{1}{3}$ et $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+1} < 1$, on aura bien $\dfrac{1}{3} \leqslant f(x) \leqslant 1$, donc l'intervalle est stable.

(c) La fonction g est C^∞ sur $\mathbb{R}$ (son dénominateur ayant un discriminant négatif, il ne s'annule jamais), et $g'(x) = -\dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$; et en dérivant g' comme un produit,
$g''(x) = -\dfrac{2}{(x^2+x+1)^2} - (2x+1) \times \dfrac{-2(2x+1)}{(x^2+x+1)^3} = \dfrac{2(2x+1)^2 - 2(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)^3}$
$= \dfrac{8x^2+8x+2-2x^2-2x-2}{(x^2+x+1)^3} = \dfrac{6x(x+1)}{(x^2+x+1)^2}$. Cette dérivée seconde étant toujours positive sur $\left[\dfrac{1}{3};1\right]$, la dérivée g' y est strictement croissante. Comme $g'\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{\frac{2}{3}+1}{(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+1)^2} = \dfrac{\frac{5}{3}}{\frac{169}{81}} = \dfrac{135}{169}$ et $g'(1) = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$, on peut en déduire que $\forall x \in \left[\dfrac{1}{3};1\right]$, $|g'(x)| \leqslant \dfrac{135}{169}$.

(d) On aimerait appliquer l'IAF à $x = r_3$ et $y = v_n$ en utilisant la majoration de $|f'(x)|$ obtenue à la question précente. Il faut pour cela vérifier que v_n est toujours dans cet intervalle, ce qui se fait en utilisant la stabilité de l'intervalle par une récurrence identique à celle du début la question 1.d ; et que $r_3 \in \left[\dfrac{1}{3};1\right]$ et est un point fixe de g. Comme $\dfrac{1}{3^3}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{3}-1 = \dfrac{1}{27}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{3}-1 = -\dfrac{14}{27} < 0$, on a effectivement $r_2 \geqslant \dfrac{1}{3}$ (cf étude de la question a). De plus, $r_3^3 + r_3^2 + r_3 - 1 = 0 \Rightarrow r_3(r_3^2+r_3+1) = 1 \Rightarrow r_3 = f(r_3)$, donc r_3 est un point fixe de f. On peut donc bien appliquer l'IAF pour obtenir $|f(v_n) - f(r_3)| \leqslant \dfrac{135}{169}|v_n - r_3|$, soit $|v_{n+1} - r_3| \leqslant \dfrac{135}{169}|v_n - r_3|$.

On fait ensuite notre petite récurrence classique pour prouver que $|u_n - r_3| \leqslant \left(\dfrac{135}{169}\right)^n$ (comme dans la question 1.d, on majore $|v_0 - r_3|$ par 1 en utilisant que $\dfrac{1}{3} \leqslant r_3 \leqslant 1$, et le reste de la récurrence est identique en remplaçant les $\dfrac{4}{9}$ par des $\dfrac{135}{169}$).

La conclusion est également la même : $\dfrac{135}{169} < 1$ donc le membre de droite de notre inégalité tend vers 0, et en appliquant le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} |v_n - r_3| = 0$, c'est-à-dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = r_3$.

3. (a) La fonction h_n est C^∞ sur $\mathbb{R}_+$, de dérivée $h_n'(x) = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \cdots + 2x + 1$. La fonction h_n étant stricement croissante sur $\mathbb{R}_+$, elle y est bijective. Comme $h_n(0) = -a < 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n(x) = +\infty$, on en déduit que l'équation $h_n(x) = 0$ a bien une solution (unique par bijectivité) sur $[0;+\infty[$. De plus, on a $h_n(1) = n - a$, donc $h_n(1) > 0$ si $n > a$. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, h_n s'annule alors sur l'intervalle $]0;1[$ et $t_n \in]0;1[$.

(b) C'est un simple calcul : $(x-1)h_n(x) = (x-1)(x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x - a) = x^{n+1} + x^n + \cdots + x^3 + x^2 - ax - x^n - x^{n-1} - \cdots - x^2 - x + a = x^{n+1} - ax - x + a = x^{n+1} - (a+1)x + a$.

(c) Notons que $h_{n+1}(x) = x^{n+1} + h_n(x)$. Comme $h_n(t_n) = 0$ (par définition), on a donc $h_{n+1}(t_n) = t_n^{n+1} > 0$, donc $h_{n+1}(t_n) > h_n(t_n)$. Comme par ailleurs on a aussi, toujours par définition, $h_{n+1}(t_{n+1}) = 0$, on en déduit que $h_{n+1}(t_n) > h_{n+1}(t_{n+1})$. La fonction h_{n+1} étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, cela implique $t_n > t_{n+1}$, et la suite (t_n) est donc strictement décroissante. Étant minorée par 0, elle est donc convergente.

(d) On vient de voir que la suite (t_n) était décroissante, donc $\forall A \geqslant n$, $0 < t_n \leqslant t_A$, et comme t_n et t_A sont tous deux strictement inférieurs à 1, $0 < t_n^n \leqslant t_A^n$. Fixons donc $A \geqslant a$ (de façon à ce que t_A soit une constante). Comme $t_A < 1$ dans ce cas, $\lim\limits_{n\to+\infty} t_A^n = 0$. En appliquant le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n^n = 0$.

(e) En reprenant la relation obtenue à la question b et en l'appliquant pour $x = t_n$, on obtient

$0 = t_n^{n+1} - (a+1)t_n + a$, soit $(a+1)t_n - a = t_n \times t_n^n$. Le membre de droite convergeant vers 0 d'après la question précédente, on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (a+1)t_n - a = 0$, soit $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = \dfrac{a}{a+1}$.

4. (a) Tout comme pour la fonction h_n, i_n est dérivable de dérivée strictement positive sur $\mathbb{R}_+$, donc y est strictement croissante et bijective. Comme $i_n(0) = -a < 0$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} i_n(x) = +\infty$, la fonction s'annule nécessairement une unique fois sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $i_n(1) = n + n - 1 + \cdots + 2 + 1 - a = \dfrac{n(n+1)}{2} - a$. Si $n(n+1) > 2a$, on aura donc $i_n(1) > 0$, et la fonction i_n s'annulera alors sur $]0;1[$.

(b) Encore du calcul : $(x-1)^2 i_n(x) = (x^2 - 2x + 1)\sum\limits_{k=1}^{k=n} kx^k - a(x-1)^2 = \sum\limits_{k=1}^{k=n} kx^{k+2} - \sum\limits_{k=1}^{k=n} 2kx^{k+1} + \sum\limits_{k=1}^{k=n} kx^k - a(x-1)^2 = \sum\limits_{k=3}^{k=n+2} (k-2)x^k - \sum\limits_{k=2}^{k=n+1} (2k-2)x^k + \sum\limits_{k=1}^{k=n} kx^k - a(x-1)^2 = (n-1)x^{n+1} + nx^{n+2} - 2x^2 - 2nx^{n+1} + x + 2x^2 - a(x-1)^2 = nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x - a(x-1)^2$.

(c) Même chose qu'à la question 3.c en constatant que $i_{n+1}(x) = i_n(x) + (n+1)x^{n+1}$, donc $i_{n+1}(y_n) > i_n(y_n)$. On en déduit que $i_{n+1}(y_n) > 0$, soit $i_{n+1}(y_n) > i_{n+1}(y_{n+1})$ puis, par croissance de la fonction i_{n+1}, $y_n > y_{n+1}$. La suite (y_n) est donc décroissante et minorée par 0, elle converge.

(d) Encore une fois, la décroissance de la suite donne immédiatement l'inégalité, et en fixant A à une valeur convenable, on sait que $y_A < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} ny_A^n = 0$ (un petit coup de croissance comparée ici) et, par théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} ny_n^n = 0$.

Reprenons alors la relation de la question b, appliquée à $x = y_n$, pour en déduire en passant à la limite que $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n + a(y_n - 1)^2 = 0$, soit $\beta - a(\beta - 1)^2 = 0$, soit $a\beta^2 - (1+2a)\beta + a = 0$, équation du second degré dont le discriminant vaut $\Delta = (1+2a)^2 - 4a^2 = 1 + 4a$, qui est toujours positif, et admet donc deux racines $\beta_1 = \dfrac{1 + 2a + \sqrt{1+4a}}{2a}$, et $\beta_2 = \dfrac{1 + 2a - \sqrt{1+4a}}{2a}$. reste à savoir laquelle des deux valeurs est la bonne. On sait que $0 \leqslant \beta < 1$. Or, $\beta_1 > 1$ (son numérateur est plus grand que son dénominateur). On a donc $\beta = \dfrac{1 + 2a - \sqrt{1+4a}}{2a}$.

Sujet d'annales : EDHEC 2003

ECE3 Lycée Carnot

1er avril 2011

Un joueur participe à un jeu se jouant en plusieurs parties. Ses observations lui permettent d'affirmer que :

- s'il gagne deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{2}{3}$.
- s'il perd une partie et gagne la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
- s'il gagne une partie et perd la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
- s'il perd deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement : "le joueur gagne la $n^{\text{ième}}$ partie".
De plus, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose :

$$E_n = A_{n-1} \cap A_n \qquad F_n = \overline{A_{n-1}} \cap A_n \qquad G_n = A_{n-1} \cap \overline{A_n} \qquad H_n = \overline{A_{n-1}} \cap \overline{A_n}$$

1. On admet que (E_n, F_n, G_n, H_n) est un système complet d'événements.
   (a) Utiliser la formule des probabilités totales pour montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a : $P(E_{n+1}) = \frac{2}{3}P(E_n) + \frac{1}{2}P(F_n)$.
   (b) Exprimer de la même façon (aucune explication n'est exigée) les probabilités $P(F_{n+1})$, $P(G_{n+1})$ et $P(H_{n+1})$ en fonction de $P(E_n)$, $P(F_n)$, $P(G_n)$ et $P(H_n)$.
   (c) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose : $U_n = \begin{pmatrix} P(E_n) \\ P(F_n) \\ P(G_n) \\ P(H_n) \end{pmatrix}$.

   Vérifier que $U_{n+1} = MU_n$, où $M = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 2/3 \end{pmatrix}$.

2. (a) Soient $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   Calculer PQ. En déduire que P est inversible et donner son inverse.
   (b) On note C_1, C_2, C_3 et C_4 les colonnes de P. Calculer MC_1, MC_2, MC_3 et MC_4. Que constate-t-on ?
   (c) Justifier que $M = PDP^{-1}$, où D est une matrice diagonale que l'on déterminera.

Dans toute la suite, on suppose que le joueur a gagné les deux premières parties.

3. (a) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = PD^nP^{-1}$.
   (b) Montrer, également par récurrence, que : $\forall n \geqslant 2, \quad U_n = M^{n-2}U_2$.
   (c) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, donner la première colonne de M^n, puis en déduire $P(E_n)$, $P(F_n)$, $P(G_n)$ et $P(H_n)$.
   (d) Montrer que l'on a :

$$\lim_{n\to+\infty} P(E_n) = \frac{3}{10} \qquad \lim_{n\to+\infty} P(F_n) = \frac{2}{10} \qquad \lim_{n\to+\infty} P(G_n) = \frac{2}{10} \qquad \lim_{n\to+\infty} P(H_n) = \frac{3}{10}$$

4. Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le joueur gagne la $k^{\text{ième}}$ partie et qui vaut 0 sinon (X_1 et X_2 sont donc deux variables certaines).
   (a) Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, exprimer A_k en fonction de E_k et F_k.
   (b) En déduire, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, la loi de X_k.

5. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note S_n la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur lors des n premières parties.
   (a) Calculer $P(S_n = 2)$ en distinguant les cas $n = 2$, $n = 3$ et $n \geqslant 4$.
   (b) Déterminer $P(S_n = n)$.
   (c) Pour tout entier n supérieur ou égal à 3, écrire S_n en fonction des variables X_k, puis déterminer $E(S_n)$ en fonction de n.

Corrigé du sujet EDHEC 2003

1. (a) Les hypothèses données dans l'énoncé peuvent se traduire sous forme de probabilités conditionnelles : $P_{A_n\cap A_{n-1}}(A_{n+1}) = \dfrac{2}{3}$ etc. En appliquant la formule des probabilités totales, on obtient $P(E_{n+1}) = P_{E_n}(E_n+1) + P_{F_n}(E_n+1) + P_{G_n}(E_n+1) + P_{H_n}(E_n+1)$. Or, les deux dernières probabilités sont nulles car E_{n+1}, qui suppose la partie n gagnée, est incompatible avec G_n et H_n, qui la supposent perdue. Quand aux deux premières, elles sont égales, pour une raison similaire, à $P_{A_n\cap A_{n-1}}(A_{n+1})$ et $P_{A_n\cap \bar{A}_{n-1}}(A_{n+1})$ respectivement, d'où la formule demandée.

   (b) De la même façon on démontre que $P(F_{n+1}) = \dfrac{1}{2}P(G_n)+\dfrac{1}{3}P(H_n)$; $P(G_{n+1}) = \dfrac{1}{3}P(E_n)+\dfrac{1}{2}P(F_n)$ et $P(H_{n+1}) = \dfrac{1}{2}P(G_n)+\dfrac{2}{3}P(H_n)$ (un simple coup d'oeil à l'énoncé de la question suivante suffisait d'ailleurs à trouver les coefficients ...).

   (c) C'est juste une autre façon d'exprimer les relations précédentes, le calcul de MU_n donnant les membres de droite des quatre relations.

2. (a) On calcule $PQ = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = 10I$. On en déduit que $P\times\dfrac{1}{10}Q = I$, autrement dit P est inversible d'inverse $P^{-1} = \dfrac{1}{10}Q$.

   (b) $MC_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$; $MC_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$; $MC_3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ et $MC_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. On constate que chacun des produits MC_i est proportionnel à C_i, avec comme coefficients de proportionnalité respectifs $-\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{1}{6}$, $\dfrac{1}{2}$ et 1 (en termes techniques que vous verrez plutôt l'an prochain, cela signifie que les quatre coefficients de proportionnalité sont des valeurs propres de la matrice M, et les colonnes C_i représentent les coordonnées de vecteurs propres associés à ces valeurs propres).

   (c) Si on a bien compris les calculs de la question précédente, il n'y a plus rien à faire : en regroupant les produits de colonnes, on a constaté que le produit MP donnait une matrice dont chaque colonne était proportionnelle à la colonne correspondante de P. Or, pour multiplier les colonnes d'une matrice par des constantes, il suffit de faire le produit à droite de cette matrice par la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les constantes en question. Ici, on a donc prouvé que $MP = PD$, où $D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ce qui, en multipliant l'égalité à droite par P^{-1}, revient à dire que $M = PDP^{-1}$.

3. (a) C'est une des récurrences à savoir faire les yeux fermés. On pose $P_n : M^n = PD^nP^{-1}$. Pour $n = 1$, on a $M^1 = M = PDP^{-1}$, donc P_1 est vérifiée. Supposons $M^n = PD^nP^{-1}$ alors $M^{n+1} = M^nM = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$. Par principe de récurrence, P_n est vérifiée pour toute valeur de n.

   (b) On initialise à $n = 2$: on a $M^{2-2}U_2 = U_2$ (ce qui est vrai puisque $M^0 = I$), et si $U_n = M^{n-2}U_2$ alors $U_{n+1} = MU_n = MM^{n-2}U_2 = M^{n-1}U_2$. Donc $\forall n \geqslant 2$, $U_n = M^{n-2}U_2$.

(c) Il suffit de calculer la première colonne donc de faire le produit sur la première colonne.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{3}\right)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{6}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ 2\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ 2\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 2\left(\frac{1}{6}\right)^n + 6\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3 \\ 2\left(-\frac{1}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 \\ -2\left(-\frac{1}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 \\ \left(-\frac{1}{3}\right)^n + 2\left(\frac{1}{6}\right)^n - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3 \end{pmatrix}$$

Commme $U_n = M^{n-2}U_2$ et que $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (on a supposé que les deux premières parties étaient gagnées), U_n est simplement la première colonne de M_{n-2} donc $P(E_n) = \frac{1}{10}\left(-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} + 2\left(\frac{1}{6}\right)^{n-2} + 6\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + 3\right)$; $P(F_n) = \frac{1}{10}\left(2\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} - 2\left(\frac{1}{6}\right)^{n-2} -2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + 2\right)$; $P(G_n) = \frac{1}{10}\left(-2\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} - 2\left(\frac{1}{6}\right)^{n-2} + 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + 2\right)$ et $P(H_n) = \frac{1}{10}\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} + 2\left(\frac{1}{6}\right)^{n-2} - 6\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + 3\right)$.

(d) Comme $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{2}$ ont des valeurs absolues strictement inférieures à 1, on a $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0$. D'où les limites demandées.

4. (a) On a manifestement $A_k = E_k \cup F_k$ selon que la $k-1$ème partie a été gagnée ou non.

   (b) Les deux événements E_k et F_k étant incompatibles on a simplement $P(X_k = 1) = P(A_k) = P(E_k) + P(F_k) = \frac{1}{10}\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-2} + 4\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} + 5\right)$, donc X_k suit une loi de Bernouilli de paramètre $\frac{1}{10}\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-2} + 4\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} + 5\right)$.

5. (a) Le joueur étant supposé avoir gagné les deux premières parties, $S_2 = 2$ est un événement certain donc $P(S_2 = 2) = 1$.

   Pour $n = 3$, le joueur ayant gagné les deux premières parties, l'événement $(S_3 = 2)$ n'est autre que $\bar{A}_3$ donc $P(S_3 = 2) = 1 - \frac{1}{10}\left(\left(-\frac{1}{3}\right) + 4\left(\frac{1}{2}\right) + 5\right) = -\frac{1}{10}\left(\frac{-2+12+30}{6}\right) = 1 - \frac{40}{10\times 6} = \frac{1}{3}$ (on a utilisé le résultat obtenu pour la probabilité de A_k pour $k = 3$). On peut également se contenter de constater qu'on cherche à calculer $P_{A_1\cap A_2}(\overline{A_3})$, qui est une des probabilités conditionnelles données en début d'énoncé, égale à $\frac{1}{3}$.

   Pour $n \geqslant 4$, l'événement $S_n = 2$ signifie que toutes les parties de la troisième à la $n$ième ont été perdues. Or, pour $k = 4$, $P_{\overline{A_3}}(\overline{A_4}) = \frac{1}{2}$ et pour $k \geqslant 5$, $P_{\overline{A_{k-2}}\cap\overline{A_{k-1}}}(\overline{A_k}) = \frac{2}{3}$, donc par la formule des probabilités composées, $P(S_n = 2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \prod_{k=5}^{k=n} \frac{2}{3} = \frac{1}{6} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-4}$.

(b) L'événement $S_n = n$ signifie que le joueur a gagné toutes les parties, par un raisonnement similaire au précédent (et même plus simple), $P(S_n = n) = \prod_{k=3}^{k=n} \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$.

(c) Le nombre total de victoires est $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} X_k$ puisque X_k représente le succès ou l'échec à la $k$ième partie. On a donc $E(S_n) = \sum_{k=1}^{k=n} E(X_k) = E(X_1) + E(X_2) + \sum_{k=3}^{k=n} E(X_k) = 1 + 1 + \sum_{k=3}^{k=n} \frac{1}{10}\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-2} + 4\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} + 5\right) = 2 + \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{k=n-2} \left(-\frac{1}{3}\right)^k + \frac{2}{5} \sum_{k=1}^{k=n-2} \left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{n-2}{2} = \frac{n}{2} + 1 + \frac{1}{10} \times \left(-\frac{1}{3}\right) \times \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} - 1}{-\frac{1}{3} - 1} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{n}{2} + 1 + \frac{1}{40}\left(9\left(-\frac{1}{3}\right)^n - 1\right) - \frac{2}{5}\left(4\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right) = \frac{n}{2} + \frac{11}{8} + \frac{9}{40}\left(-\frac{1}{3}\right)^n - \frac{8}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

On peut constater que $E(S_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2}$, ce qui signifie que le joueur tend à gagner la moitié des parties auxquelles il participe, ce qui est raisonnable puisque les quatre probabilités conditionnelles de gain données au tout début du problème ont une moyenne égale à $\frac{1}{2}$. Le terme constant $\frac{11}{8}$ vient du fait qu'on a supposé que le joueur démarrait avec deux victoires.

Feuille d'exercices n°21 : Intégration

ECE3 Lycée Carnot

8 avril 2011

Exercice 1 (* à **)

Calculer les intégrales suivantes :

- $I_1 = \displaystyle\int_1^2 \frac{t-1}{t^2}\, dt$ • $I_2 = \displaystyle\int_e^3 \frac{dx}{x \ln x}$ • $I_3 = \displaystyle\int_1^2 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\, dx$ • $I_4 = \displaystyle\int_0^2 \left|x^2 - 3x + 2\right|\, dx$
- $I_5 = \displaystyle\int_0^4 \sqrt{x}(x - 2\sqrt{x})\, dx$ • $I_6 = \displaystyle\int_0^2 z^4 e^{-z^5}\, dz$ • $I_7 = \displaystyle\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{5}{2}} Ent(x)\, dx$
- $I_8 = \displaystyle\int_1^e \frac{(lns)^5}{s}\, ds$ • $I_9 = \displaystyle\int_0^{\frac{\ln 2}{2}} \frac{e^{2t}}{e^{2t}+2}\, dt$ • $I_{10} = \displaystyle\int_0^2 x^2(x^3+1)^{\frac{3}{2}}\, dx$
- $I_{11} = \displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\exp(\frac{-3}{v^2})}{v^3}\, dv$ • $I_{12} = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1-q}{(q^2-2q)^4}\, dq$ • $I_{13} = \displaystyle\int_1^4 \frac{e^{-\sqrt{z}}}{\sqrt{z}}\, dz$

Exercice 2 (**)

Calculer à l'aide d'intégrations par parties les intégrales suivantes :

- $I_1 = \displaystyle\int_{-1}^1 xe^{3x} dx$ • $I_2 = \displaystyle\int_1^4 \sqrt{3s} \ln s ds$ • $I_3 = \displaystyle\int_1^e z^2 (\ln z)^3 dz$
- $I_4 = \displaystyle\int_1^{e^2} (2x^3+1) \ln x\, dx$ • $I_5 = \displaystyle\int_0^1 (1+x+x^2)e^{2x} dx$
- $I_6 = \displaystyle\int_1^2 \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) dt$ • $I_7 = \displaystyle\int_1^2 (1+2s) \ln\left(1+\frac{1}{s}\right) ds$

Exercice 3 (**)

Calculer en utilisant le changement de variable indiqué (ou un changement de variable affine si rien n'est indiqué) les intégrales suivantes :

- $I_1 = \displaystyle\int_0^1 (t-2)(t+1)^5 dt$ • $I_2 = \displaystyle\int_0^2 \frac{t^2}{t^3+8} dt$ (poser $u = t^3 + 8$)
- $I_3 = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x(x+1)} dx$ (poser $t = \dfrac{x}{x+1}$)
- $I_4 = \displaystyle\int_1^2 \frac{ds}{s(s^3+1)}$ (poser $u = s^3$ et calculer $\dfrac{1}{u-1} - \dfrac{1}{u}$)
- $I_5 = \displaystyle\int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt$ (poser $u = \sqrt{t}$) • $I_6 = \displaystyle\int_1^e \frac{dt}{t\sqrt{\ln t + 1}}$ (poser $u = \ln t$)

Exercice 4 (*)

Soit f la fonction définie sur $]-3;2[$ par $f(x) = \dfrac{3x^2-4x-25}{x^2+x-6}$.

1. Montrer qu'on peut écrire f sous la forme $f(x) = a + \dfrac{b}{x-2} + \dfrac{c}{x+3}$.
2. En déduire l'expression de la primitive de f s'annulant en 1.

Exercice 5 (**)

On s'intéresse à la suite d'intégrales définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x dx$.

1. Montrer que la suite (I_n) converge vers 0.
2. Montrer que $I_n = \dfrac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$.
3. En déduire que $e = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

Exercice 6 (***)

On définit, pour tout entier n, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_1^e x^2(\ln x)^n dx$.

1. Calculer I_1.
2. Montrer que sur $[1;e]$, on a $(\ln x)^{n+1} \leqslant (\ln x)^n$, et en déduire le sens de variation de I_n.
3. Montrer que (I_n) est convergente.
4. Montrer que sur $[1;e]$, $0 \leqslant \ln x \leqslant \dfrac{x}{e}$. En déduire la limite de I_n.
5. Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $I_{n+1} = \dfrac{e^3}{3} - \dfrac{n+1}{3} I_n$. En déduire un équivalent de I_n.

Exercice 7 (**)

Dériver chacune des fonctions suivantes :

- $f_1(x) = \displaystyle\int_0^{2x} e^{-3\sqrt{2\ln t}} dt$
- $f_2(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{1+t+t^2} dt$
- $f_3(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} \sqrt{1+t^2} dt$
- $f_4(x) = \displaystyle\int_{-\sqrt{x}}^{e^x} \frac{t}{\ln t} dt$

Exercice 8 (***)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t} dt$.

1. Montrer que f est dérivable et déterminer sa dérivée. En déduire le tableau de variations de f.
2. On pose désormais $g(x) = f(x) - \ln x$. Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}_+^*$ et en déduire son signe.
3. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

Exercice 9 (**) à (***)

Déterminer les limites de chacune des suites suivantes en utilisant des sommes de Riemann.

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2} \qquad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}} \qquad w_n = \left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Exercice 10 (EDHEC 2004) (**)

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n} dt$.

1. Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, justifier l'existence de u_n.
2. Calculer u_0 et u_1.
3. (a) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ln 2$.
   (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
4. (a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, écrire $\ln 2 - u_n$ sous la forme d'une intégrale.
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ln 2 - u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
   (c) Donner la limite de la suite (u_n).

Exercice 11 (ESCP 92) (****)

Pour tout entier naturel k on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}^+$ par la relation

$$f_k(x) = \int_0^1 t^k e^{-tx} dt$$

1. (a) Montrer que pour tout entier naturel k, la fonction f_k est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.
   (b) Etudier la suite $(f_k(0))_{k\geqslant 0}$. En déduire, pour tout réel positif x, la limite de la suite $(f_k(x))_{k\geqslant 0}$.
2. (a) Soit $x > 0$. Etablir que $f_{k+1}(x) = \dfrac{k+1}{x} f_k(x) - \dfrac{e^{-x}}{x}$ pour tout $k \geqslant 0$.
   (b) Expliciter les fonctions f_0, f_1 et f_2.
   (c) Montrer que, $f_0(x) \underset{+\infty}{\sim} 1/x$.
   (d) A l'aide de la relation établie au c) , montrer que pour tout k, $f_k(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{k!}{x^{k+1}}$.
3. (a) En effectuant un changement de variable, montrer que
   $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x > 0,\ f_k(x) = \dfrac{1}{x^{k+1}} \displaystyle\int_0^x u^k e^{-u}\, du.$
   En déduire que f_k est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer sa dérivée.
   (b) Trouver une relation simple entre f_k' et f_{k+1}.
   (c) Montrer que pour tout réel $\forall y \geqslant 0$, $1 - e^{-y} \leqslant y$. En déduire que pour tout entier naturel k, la fonction f_k est continue en 0. Est-elle dérivable à droite en ce point ?

Corrigé de la feuille d'exercices n°21

Exercice 1 (* à **)

$$I_1 = \int_1^2 \frac{t-1}{t^2}\ dt = \left[\ln t - \frac{1}{t}\right]_1^2 = \ln 2 - \frac{1}{2} - \ln 1 + 1 = \ln 2 + \frac{1}{2}$$

$$I_2 = \int_e^3 \frac{dx}{x\ln x} = [\ln(\ln x)]_e^3 = \ln(\ln 3)$$

$$I_3 = \int_1^2 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\ dx = [e^{\sqrt{x}}]_1^2 = e^{\sqrt{2}} - e$$

$$I_4 = \int_0^2 \left|x^2 - 3x + 2\right|\ dx = \int_0^1 (x^2 - 3x + 2)\ dx + \int_1^2 (-x^2 + 3x - 2)\ dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_0^1 + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x\right]_1^2 = \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 - \frac{8}{3} + 6 - 4 + \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 = 1$$

$$I_5 = \int_0^4 \sqrt{x}(x - 2\sqrt{x})\ dx = \int_0^4 x^{\frac{3}{2}} - 2x\ dx = \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - x^2\right]_0^4 = \frac{2}{5}4^{\frac{5}{2}} - 16 = \frac{64}{5} - 16 = -\frac{16}{5}$$

$$I_6 = \int_0^2 z^4 e^{-z^5}\ dz = \left[-\frac{1}{5}e^{-z^5}\right]_0^2 = -\frac{1}{5}(e^{-32} - e) = \frac{1}{5}(e - \frac{1}{e^{32}})$$

$$I_7 = \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{5}{2}} E(x)\ dx = \int_{-\frac{1}{3}}^0 -1\ dx + \int_0^1 0\ dx + \int_1^2 1\ dx + \int_2^{\frac{5}{2}} 2\ dx = -\frac{1}{3} + 0 + 1 + 1 = \frac{5}{3}$$

$$I_8 = \int_1^e \frac{(lns)^5}{s}\ ds = \left[\frac{1}{6}(\ln s)^6\right]_1^e = \frac{1}{6}$$

$$I_9 = \int_0^{\frac{\ln 2}{2}} \frac{e^{2t}}{e^{2t} + 2}\ dt = \left[\frac{1}{2}\ln(e^{2t} + 2)\right]_0^{\frac{\ln 2}{2}} = \frac{1}{2}(\ln 4 - \ln 3) = \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$$

$$I_{10} = \int_0^2 x^2(x^3 + 1)^{\frac{3}{2}}\ dx = \left[\frac{2}{9}(x^3 + 1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = \frac{2}{9}(9^{\frac{3}{2}} - 1) = \frac{52}{9}$$

$$I_{11} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\exp(\frac{-3}{v^2})}{v^3}\ dv = \left[\frac{1}{6}\exp\left(-\frac{3}{v^2}\right)\right]_1^{\sqrt{3}} = \frac{1}{6}(e^{-1} - e^{-3}) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e^3}\right)$$

$$I_{12} = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1-q}{(q^2 - 2q)^4}\ dq = \left[\frac{1}{6}(q^2 - 2q)^{-3}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{6}\left(\left(\frac{9}{4} - 3\right)^{-3} - \left(\frac{1}{4} - 1\right)^{-3}\right) = \frac{1}{6}\left(\left(-\frac{3}{4}\right)^{-3} - \left(-\frac{3}{4}\right)^{-3}\right) = 0$$

$$I_{13} = \int_1^4 \frac{e^{-\sqrt{z}}}{\sqrt{z}}\ dz = [-2e^{-\sqrt{z}}]_1^4 = -2(e^{-2} - e^{-1}) = 2\left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e^2}\right)$$

Exercice 2 (**)

$$I_1 = \int_{-1}^1 xe^{3x}\ dx = \left[\frac{1}{3}xe^{3x}\right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{1}{3}e^{3x}\ dx = \frac{1}{3}(e^3 + e^{-3}) - \left[\frac{1}{9}e^{3x}\right]_{-1}^1 = \frac{2}{9}e^3 + \frac{4}{9}e^{-3}$$

où on a posé $u'(x) = e^{3x}$; $v(x) = x$; $u(x) = \dfrac{1}{3}e^{3x}$ et $v'(x) = 1$.

$$I_2 = \int_1^4 \sqrt{3s}\ln s\ ds = \sqrt{3}\left[\frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}}\ln s\right]_1^4 - \sqrt{3}\int_1^4 \frac{2}{3}\sqrt{s}\ ds = \frac{2}{3}\sqrt{3}4^{\frac{3}{2}}\ln 4 - \sqrt{3}\left[\frac{4}{9}s^{\frac{3}{2}}\right]_1^4$$
$$= \frac{32\sqrt{3}}{3}\ln 2 - \frac{32}{9}\sqrt{3} + \frac{4}{9}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(32\ln 2 - \frac{28}{3}\right) \quad \text{(on a utilisé } 4^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{4})^3 = 8)$$

où on a posé $u'(s) = \sqrt{s}$; $v(s) = \ln s$; $u(s) = \frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}}$ et $v'(x) = \frac{1}{s}$.

$$I_3 = \int_1^e z^2(\ln z)^3\ dz = \left[\frac{1}{3}z^3(\ln z)^3\right]_1^e - \int_1^e z^2(\ln z)^2\ dz = \frac{e^3}{3} - \left[\frac{1}{3}z^3(\ln z)^2\right]_1^e + \frac{2}{3}\int_1^e z^2\ln z\ dz$$
$$= \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{3} + \left[\frac{2}{9}z^3\ln z\right]_1^e - \frac{2}{9}\int_1^e z^2\ dz = \frac{2}{9}e^3 - \frac{2}{9}\left[\frac{1}{3}z^3\right]_1^e = \frac{2}{9}e^3 - \frac{2}{27}e^3 + \frac{2}{27} = \frac{4e^3+2}{27}$$

où on a posé $u'(z) = z^2$; $v(z) = (\ln z)^3$; $u(z) = \frac{1}{3}z^3$ et $v'(z) = \frac{3}{z}(\ln z)^2$
puis $u'(z) = z^2$; $v(z) = (\ln z)^2$; $u(z) = \frac{1}{3}z^3$ et $v'(z) = \frac{2}{z}\ln z$
et enfin $u'(z) = z^2$; $v(z) = \ln z$; $u(z) = \frac{1}{3}z^3$ et $v'(z) = \frac{1}{z}$.

$$I_4 = \int_1^{e^2} (2x^3+1)\ln x\ dx = \left[\left(\frac{1}{2}x^4 + x\right)\ln x\right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} \frac{1}{2}x^3 + 1\ dx = e^8 + 2e^2 - \left[\frac{1}{8}x^4 + x\right]_1^{e^2}$$
$$= e^8 + 2e^2 - \frac{1}{8}e^8 - e^2 + \frac{1}{8} + 1 = \frac{7}{8}e^8 + e^2 + \frac{9}{8}$$

où on a posé $u'(x) = 2x^3+1$; $v(x) = \ln x$; $u(x) = \frac{1}{2}x^4 + x$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$.

$$I_5 = \int_0^1 (1+x+x^2)e^{2x}\ dx = \left[\frac{1}{2}(1+x+x^2)e^{2x}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 (1+2x)e^{2x}\ dx = \frac{3}{2}e^2 - \frac{1}{2} - \left[\frac{1}{4}(1+2x)e^{2x}\right]_0^1$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}\ dx$$
$$= \frac{3}{2}e^2 - \frac{1}{2} - \frac{3}{4}e^2 + \frac{1}{4} + \left[\frac{1}{4}e^{2x}\right]_0^1 = \frac{3}{4}e^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4} = e^2 - \frac{1}{2}$$

où on a posé $u'(x) = e^{2x}$; $v(x) = 1+x+x^2$; $u(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$ et $v'(x) = 1+2x$
puis $u'(x) = e^{2x}$; $v(x) = 1+2x$; $u(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$ et $v'(x) = 2$.

$$I_6 = \int_1^2 \ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\ dt = \left[t\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{1+t}\ dt = 2\ln\frac{3}{2} - \ln 2 + [\ln(1+t)]_1^2$$
$$= 2\ln 3 - 3\ln 2 + \ln 3 - \ln 2 = 2\ln 3 - 4\ln 2$$

où on a posé $u'(t) = 1$; $v(t) = \ln(1+\frac{1}{t})$; $u(t) = t$ et $v'(t) = -\dfrac{1}{t^2(1+\frac{1}{t})} = -\dfrac{1}{t(t+1)}$.

$$I_7 = \int_1^2 (1+2s)\ln\left(1+\frac{1}{s}\right)\ ds = \left[s(s+1)\ln(1+\frac{1}{s})\right]_1^2 + \int_1^2 1\ ds = 6\ln\frac{3}{2} - 2\ln 2 + 1 = 6\ln 3 - 8\ln 2 + 1$$

où on a posé $u'(s) = 1+2s$; $v(s) = \ln(1+\frac{1}{s})$; $u(s) = s+s^2 = s(s+1)$ et $v'(s) = -\dfrac{1}{s^2(1+\frac{1}{s})}$.

Exercice 3 (**)

Pour I_1, on pose $u = t+1$, donc $du = dt$, et les bornes deviennent 1 et 2 :

$$I_1 = \int_0^1 (t-2)(t+1)^5\ dt = \int_1^2 (u-3)u^5\ du = \left[\frac{u^7}{7} - \frac{u^6}{2}\right]_1^2 = \frac{128}{7} - 32 - \frac{1}{7} + \frac{1}{2} = \frac{127}{7} - \frac{63}{2} = -\frac{193}{14}$$

Pour I_2, on pose $u = t^3+8$, donc $du = 3t^2\ dt$, et les bornes deviennent 8 et 16 :

$$I_2 = \int_0^2 \frac{t^2}{t^3+8}\ dt = \int_8^{16} \frac{1}{3u}\ du = \left[\frac{1}{3}\ln(3u)\right]_8^{16} = \frac{1}{3}(\ln 48 - \ln 24) = \frac{1}{3}(\ln 3 + 4\ln 2 - \ln 3 - 3\ln 2) = \frac{\ln 2}{3}$$

Pour I_3, on pose $t = \dfrac{x}{x+1}$, donc $dt = \dfrac{1}{(x+1)^2}$, et les bornes deviennent $\dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{1}{2}$:

$$I_3 = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x(x+1)}\ dx = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t}\ dt = [\ln t]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} = \ln\frac{1}{3} - \ln\frac{1}{2} = \ln\frac{2}{3}$$

Pour I_4, on pose $u = s^3$, donc $du = 3s^2 ds$, et les bornes deviennent 1 et 8 :

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_1^2 \frac{ds}{s(s^3+1)} = \int_1^8 \frac{1}{3u(u+1)}\ du = \frac{1}{3}\int_1^8 \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\ du \\ &= \frac{1}{3}[\ln u - \ln(u+1)]_1^8 = \frac{1}{3}(\ln 8 - \ln 9 + \ln 2) = \frac{4\ln 2 - 2\ln 3}{3} \end{aligned}$$

Pour I_5, on pose $u = \sqrt{t}$, donc $du = \dfrac{dt}{2\sqrt{t}}$, et les bornes deviennent 1 et $\sqrt{2}$:

$$I_5 = \int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\ dt = \int_1^{\sqrt{2}} 2\ln(u^2)\ du = \int_1^{\sqrt{2}} 4\ln u\ du = 4[u\ln u - u]_1^{\sqrt{2}} = 4(\sqrt{2}\ln\sqrt{2} - \sqrt{2} + 1) = 2\sqrt{2}\ln 2 + 4 - 4\sqrt{2}$$

Pour I_6, on pose $u = \ln t$, donc $du = \dfrac{dt}{t}$, et les bornes deviennent 0 et 1 :

$$I_6 = \int_1^e \frac{1}{t\sqrt{\ln t + 1}}\ dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u+1}}\ du = [2\sqrt{u+1}]_0^1 = 2\sqrt{2} - 2 = 2(\sqrt{2} - 1)$$

Exercice 4 (*)

1. Le plus simple est de partir du résultat et d'identifier. Comme on a $(x+3)(x-2) = x^2+x-6$, on peut écrire

$$a + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x+3} = \frac{ax^2 + ax - 6a + bx + 3b + cx - 2c}{x^2+x-6} = \frac{ax^2 + (a+b+c)x + (-6a+3b-2c)}{x^2+x-6}$$

   Par identification, on a $a = 3$ puis $b + c = -7$ et $3b - 2c = -7$, dont on déduit $b = \dfrac{3}{2}c$ en faisant la différence puis $b = -\dfrac{21}{5}$ et $c = -\dfrac{14}{5}$.

2. La deuxième expression permet d'obtenir une primitive : $F(x) = 3x - \dfrac{21}{5}\ln(2-x) - \dfrac{14}{5}\ln(x+3)$. Si on veut obtenir la primitive de f s'annulant en 1, il suffit de retrancher une constante égale à la valeur de la primitive précédente en 1, c'est-à-dire $3 - \dfrac{14}{5}\ln 4$.

Exercice 5 (**)

1. La fonction intégrée étant positive sur $[0;1]$, la suite I_n est positive. De plus, $\forall x \in [0;1]$, $(1-x)^n e^x \leqslant e$, donc $I_n \leqslant \int_0^1 \frac{e}{n!}\, dx = \frac{e}{n!}$. Le théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que I_n converge vers 0.
2. On effectue une IPP en dérivant l'exponentielle (pour une fois) et en primitivant la puissance : $I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x\, dx = \left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^x\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^x\, dx = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$.
3. On déduit de la question précédente que $I_0 = \frac{1}{1!} + I_1 = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + I_2 = \cdots = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k!} + I_n$. Or, on a $I_0 = \int_0^1 e^x\, dx = [e^x]_0^1 = e - 1 = e - \frac{1}{0!}$. On en déduit donc que $e - I_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!}$, ce qui en passant à la limite donne bien $e = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!}$.

Exercice 6 (***)

1. Par une intégration par parties désormais classique ($u'(x) = x^2$; $v(x) = \ln x$), on a $I_1 = \int_1^e x^2 \ln x\, dx = \left[\frac{x^3}{3} \ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{3}\, dx = \frac{e^3}{3} - \left[\frac{x^3}{9}\right]_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3+1}{9}$.
2. Sur $[1;e]$, $0 \leqslant \ln x \leqslant 1$, donc $0 \leqslant (\ln x)^{n+1} \leqslant (\ln x)^n$. On a donc $0 \leqslant x^2(\ln x)^{n+1} \leqslant x^2(\ln x)^n$, puis par intégration $0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$. La suite (I_n) est décroissante.
3. La suite est décroissante minorée par 0, elle converge.
4. Le plus simple est d'étudier la fonction $f : x \mapsto \ln x - \frac{x}{e}$. On a $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e}$, qui est positif sur l'intervalle $[1;e]$. La fonction f est donc croissante sur $[1;e]$, et $f(e) = 0$, donc f est négative sur $[1;e]$. On en déduit que $I_n \leqslant \int_1^e x^2 \left(\frac{x}{e}\right)^n = \frac{1}{e^n} \int_1^e x^{n+2}\, dx = \frac{1}{e^n(n+3)}$. La majoration calculée tendant vers 0, notre cher théorème des gendarmes s'applique une nouvelle fois, et (I_n) converge vers 0.
5. Il s'agit bien sûr d'une intégration par parties, avec $u'(x) = x^2$ et $v(x) = (\ln x)^{n+1}$:
$$I_{n+1} = \left[\frac{x^3}{3}(\ln x)^{n+1}\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{3}(n+1)(\ln x)^n = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n$$
En faisant tendre n vers $+\infty$, on a donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{3} I_n = \frac{e^3}{3}$, donc $I_n \sim \frac{e^3}{n+1} \sim \frac{e^3}{n}$.

Exercice 7 (**)

- Si on note $g(t) = e^{-3\sqrt{2\ln t}}$, et G une primitive de g sur $]1;+\infty[$ (il faudrait changer la borne inférieure dans l'énoncé pour mettre quelque chose de plus grand que 1, par exemple 2, la fonction g n'étant pas définie pour $x < 1$ ...), on aura (par définition de l'intégrale) $f_1(x) = G(2x) - G(2)$, donc en utilisant la formule de dérivation des fonctions composées $f_1'(x) = 2g(2x) = 2e^{-3\sqrt{2\ln(2t)}}$
- Même principe que ci-dessus : on note $g(t) = \frac{1}{1+t+t^2}$ (qui est pour le coup définie sur $\mathbb{R}$ puisque le dénominateur a un discriminant négatif), et G une primitive de g, on a alors $f_2(x) = G(x^2) - G(x)$, donc $f_2'(x) = 2xg(x^2) - g(x) = \frac{2x}{1+x^2+x^4} - \frac{1}{1+x+x^2}$.

- Posons donc $g(t) = \sqrt{1+t^2}$ (encore une fois définie sur $\mathbb{R}$) et G une primitive ; $f_3(x) = G(-x) - G(x)$, donc $f_3'(x) = -g(-x) - g(x) = -\sqrt{1+(-x)^2} - \sqrt{1+x^2} = -2\sqrt{1+x^2}$
- Cette fois, $g(t) = \dfrac{t}{\ln t}$ (définie sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$), et f_4 n'est définie nulle part puisque $-\sqrt{x}$ est toujours négatif quand la valeur existe. Inutile donc de chercher à dériver f_4.

Exercice 8 (***)

1. La fonction f est la primitive de $\dfrac{e^x}{x}$ s'annulant en 1. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $f'(x) = \dfrac{e^x}{x}$. Cette dérivée étant positive sur $\mathbb{R}_+^*$, f y est croissante.
2. La fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $g'(x) = \dfrac{e^x}{x} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{e^x-1}{x}$. Cette dérivée est positive sur $\mathbb{R}_+^*$, donc g y est croissante. Comme $g(1) = f(1) - \ln 1 = 0$, la fonction g est donc négative sur $]0;1]$ et positive sur $[1;+\infty[$ ($f(1) = 0$ car on effectue alors une intégrale sur l'intervalle $[1;1]$).
3. D'après la question précédente, on a $f(x) \leqslant \ln x$ sur $]0;1[$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$; de même, $f(x) \geqslant \ln x$ si $x \geqslant 1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 9 (** à ***)

- Le but est donc de faire apparaitre une somme de Riemann, ce qui consiste en gros à sortir un $\dfrac{1}{n}$ de la somme et à exprimer ce qui reste dans la somme en fonction de $\dfrac{k}{n}$ uniquement : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{n^2+k^2} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{n^2(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right)$, avec $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.
Le théorème de convergence des sommes de Riemann permet alors d'affirmer que (u_n) converge et que sa limite vaut $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}$.
- Même méthode : $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2k}{n}}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right)$, avec $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}$, donc (v_n) converge vers $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+2x}}\,dx = \left[\sqrt{1+2x}\right]_0^1 = \sqrt{3}-1$.
- Pour w_n, c'est un peu plus subtil, il vaut mieux étudier $\ln(w_n)$ et surtout se rendre compte que $\ln(n!) = \ln(1\times 2\times\cdots\times n) = \ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n$. On a alors : $\ln w_n = \dfrac{1}{n}(\ln((2n)!) - n\ln n - \ln(n!)) = \dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{k=2n} \ln k - n\ln n - \sum_{k=1}^{k=n} \ln k\right) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=n+1}^{k=2n} (\ln k - \ln n) = \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{k=2n} \ln\frac{k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} \ln\frac{n+k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$, donc $(\ln w_n)$ converge vers $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x)\,dx = \int_1^2 \ln u\,du = [x\ln x - x]_1^2 = 2\ln 2 - 1$, et (w_n) converge vers $e^{2\ln 2 - 1} = \dfrac{4}{e}$.

Exercice 10 (EDHEC 2004) (**)

1. Il suffit pour cela de dire que le dénominateur $1+t+t^n$ ne s'annule jamais sut l'intervalle $[0;1]$ (il est toujours supérieur à 1), donc que la fonction à intégrer est continue sur $[0;1]$, ce qui assure l'existence de son intégrale.

2. Calculons donc : $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{2+t}dt = [\ln(2+t)]_0^1 = \ln 3 - \ln 2$; et $u_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+2t}dt = \left[\frac{1}{2}\ln(1+2t)\right]_0^1 = \frac{\ln 3}{2}$.

3. (a) Pour tout t dans $[0;1]$, on a $t^{n+1} \leqslant t^n$, donc $1+t+t^{n+1} \leqslant 1+t+t^n$ puis (tout étant positif) $\frac{1}{1+t+t^{n+1}} \geqslant \frac{1}{1+t+t^n}$. En intégrant cette inégalité entre 0 et 1, on obtient $u_{n+1} \geqslant u_n$, la suite (u_n) est donc croissante.

   (b) Il faut réussir à majorer intelligemment ce qui se trouve sous l'intégrale, en l'occurence en constatant que $\forall t \in [0;1]$, $1+t+t^n \geqslant 1+t$, donc $\frac{1}{1+t+t^n} \leqslant \frac{1}{1+t}$. En intégrant l'inegalité, on obtient $u_n \leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+t}dt = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln 2$.

   (c) La suite (u_n) est donc croissante et majorée, elle converge.

4. (a) En utilisant le calcul fait un peu plus haut, on a $\ln 2 - u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t}dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t+t^n}dt$.

   (b) Il suffit d'arriver à majorer ce qui se trouve sous l'intégrale : $\frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t+t^n} = \frac{1+t+t^n-(1+t)}{(1+t)(1+t+t^n)} = \frac{t^n}{(1+t)(1+t+t^n)}$. Or, ce magnifique dénominateur est certainement plus grand que 1 quand $t \in [0;1]$, donc $\frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t+t^n} \leqslant t^n$, et en intégrant cette inégalité on a $\ln 2 - u_n \leqslant \int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.

   (c) On a vu plus haut que $u_n \leqslant \ln 2$, donc $\ln 2 - u_n \geqslant 0$. Comme on vient de majorer par ailleurs cette même expression par quelque chose qui tend vers 0, un coup de théorème des gendarmes nous donnes $\lim\limits_{n\to+\infty}(\ln 2 - u_n) = 0$, c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ln 2$.

Exercice 11 (ESCP 92) (****)

1. (a) Prenons deux réels x et y dans $\mathbb{R}_+^*$ tels que $x < y$. On a alors $e^{-tx} > e^{-ty}$ pour tout $t \in [0;1]$. De même $t^k e^{-tx} > t^k e^{-ty}$ et on peut intégrer cette inégalité, ce qui donne exactement $f_k(x) > f_k(y)$, donc f_k est bien décroissante.

   (b) On a $f_k(0) = \int_0^1 t^k\ dt = \frac{1}{k+1}$. La suite $(f_k(0))$ est donc décroissante et tend vers 0. Or, f_k étant positive et décroissante sur $\mathbb{R}^+$, on a $\forall x > 0$, $0 \leqslant f_k(x) \leqslant \frac{1}{k+1}$, ce qui suffit à assurer via le théorème des gendarmes que $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

2. (a) Il s'agit de faire une IPP en posant $u(t) = t^{k+1}$ et $v'(t) = e^{-tx}$, donc $u'(t) = (k+1)t^k$ et $v(t) = -\frac{e^{-tx}}{x}$ (faites bien gaffe que la variable ici est t et x est donc une constante). On obtient $f_{k+1}(x) = \left[-t^{k+1}\frac{e^{-tx}}{x}\right]_0^1 + (k+1)\int_0^1 t^k \frac{e^{-tx}}{x}\ dx = -\frac{e^{-x}}{x} + \frac{k+1}{x}f_k(x)$.

   (b) On a $f_0(x) = \int_0^1 e^{-tx}\ dt = \left[-\frac{e^{-tx}}{x}\right]_0^1 = -\frac{e^{-x}}{x} + \frac{1}{x} = \frac{1-e^{-x}}{x}$. On peut utiliser la question précédente pour calculer les fonctions suivantes : $f_1(x) = \frac{1}{x}f_0(x) - \frac{e^{-x}}{x} = \frac{1}{x^2}(1 - e^{-x} - xe^{-x})$, puis $f_2(x) = \frac{2}{x}f_1(x) - \frac{e^{-x}}{x} = \frac{1}{x^3}(2 - 2e^{-x} - 2xe^{-x} - x^2e^{-x})$.

(c) Il suffit de reprendre l'expression trouvée : $\lim_{x\to+\infty} 1 - e^{-x} = 1$, donc $f_0 \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.

(d) Il faut faire une récurrence : on vient de montrer le résultat pour $k = 0$. Supposons le vrai pour f_k, on a alors $f_{k+1}(x) = \frac{f_k(x)}{x}\left(k+1-\frac{e^{-x}}{f_k(x)}\right)$. La parenthèse tend vers $k+1$ car l'exponentielle négative, par croissance comparée, l'emporte sur f_k qui est par hypothèse de récurrence équivalente à une fonction puissance. On a donc $f_{k+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{k+1}{x} f_k \sim \frac{k+1}{x}\frac{k!}{x^{k+1}} \sim \frac{(k+1)!}{x^{k+2}}$, ce qui achève la récurrence.

3. (a) Le changement de variable est $u = tx$, qui donne $du = x\ dt$, et change les bornes de l'intégrale en 0 et x, ce qui donne donc $f_k(x) = \int_0^1 t^k e^{-tx} dt = \int_0^x \left(\frac{u}{x}\right)^k e^{-u}\ \frac{du}{x} = \frac{1}{x^{k+1}}\int_0^x u^k e^{-u}\ du.$

(b) On vient décrire $f_k(x)$ sous la forme d'un produit $g(x)h(x)$, où $g(x) = \frac{1}{x^{k+1}}$, et donc $g'(x) = -\frac{k+1}{x^{k+2}}$, et $h(x) = \int_0^x u^k e^{-u}\ du$, donc $h'(x) = x^k e^{-x}$. On en déduit que $f_k'(x) = -\frac{k+1}{x^{k+2}}h(x) + \frac{1}{x^{k+1}}x^k e^{-x} = -\frac{k+1}{x}f_k(x) + \frac{e^{-x}}{x}$. On vient donc de montrer, en reprenant le résultat de la question 2.a, que $f_k' = -f_{k+1}$.

(c) On étudie la fonction $y \mapsto 1 - e^{-y} - y$ sur $\mathbb{R}^+$. sa dérivée vaut $e^{-y} - 1$, qui est négative sur l'intervalle d'étude. Or, pour $y = 0$, la fonction est nulle. Elle est donc bien négative sur $\mathbb{R}^+$.

On a donc $f_k(x) - f_k(0) = \int_0^1 t^k e^{-tx}\ dt - \int_0^1 t^k\ dt = \int_0^1 t^k(e^{-tx} - 1)\ dt \geqslant \int_0^1 t^{k+1}x\ dt = \frac{x}{k+2}$. Quand x tend vers 0, ceci tend vers 0. Comme par ailleurs $f_k(x) - f_k(0)$ est négatif puisque f_k est décroissante, la fonction f_k est bien continue en 0.

Pour la dérivée, on utilise ce bon vieux théorème du prolongement C^1 ! La fonction f_k est dérivable et C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $f_k' = -f_{k+1}$. On vient de voir que f_{k+1} était continue en 0, donc $\lim_{x\to0} f_{k+1}(x) = f_{k+1}(0) = \frac{1}{k+2}$. On en déduit que $\lim_{x\to0} f_k'(x) = -\frac{1}{k+2}$ puis que f_k est dérivable en 0, de dérivée $f_k'(0) = -\frac{1}{k+2}$.

Sujet d'annales : Ecricome 2005

ECE3 Lycée Carnot

3 mai 2011

Note : L'énoncé initial a été scrupuleusement respecté, à l'exception de la deuxième partie de l'exercice 2, consacrée aux fonctions à deux variables, qui a été supprimée. La question 3.3.3 a été maintenue dans l'énoncé mais pas traitée lors de la résolution.

Exercice 1

On considère, pour tout entier naturel n, l'application φ_n, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_n(x) = (1-x)^n e^{-2x}$$

ainsi que l'intégrale : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \varphi_n(x)dx$.

On se propose de démontrer l'existence de trois réels, a, b, c tels que

$$I_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{\varepsilon(n)}{n^2} \quad \text{avec} \quad : \lim_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0.$$

1. Calculer I_0, I_1.
2. Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Déterminer le signe de I_n pour tout entier naturel n.
4. Qu'en déduit-on pour la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
5. Majorer la fonction $g : x \mapsto e^{-2x}$ sur $[0;1]$.
6. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
7. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
8. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n$.
9. En déduire la limite de la suite $(nI_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
10. Déterminer la limite de la suite $(n(nI_n - 1))_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
11. Donner alors les valeurs de a, b, c.

Exercice 2

On considère la fonction f définie par

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_+^\times, & f(x) = \; x^2 - x\ln(x) - 1 \\ & f(0) = \; -1 \end{cases}$$

le tableau de valeurs de f,

$x =$	$0,5$	1	$1,5$	2	$2,5$	3	$3,5$	4
$f(x) \simeq$	$-0,4$	0	$0,6$	$1,6$	3	$4,7$	$6,9$	$9,5$

ainsi que la fonction φ définie par :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^\times$, $\varphi(x) = \dfrac{2}{x} + \ln(x)$.

2.1 Étude de deux suites associées à f.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Étudier la dérivabilité de la fonction f en 0. En donner une interprétation graphique.
3. Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}_+^\times$, puis dresser son tableau de variations en précisant la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers l'infini.
4. Étudier la nature de la branche infinie.
5. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^\times$ sur un intervalle J que l'on précisera.
6. Quel est le sens de variation de f^{-1} ? Déterminer la limite de $f^{-1}(x)$ lorsque x tend vers l'infini.
7. Justifier que pour tout entier naturel k, il existe un unique réel x_k positif tel que $f(x_k) = k$.
   (a) Donner la valeur de x_0.
   (b) Utiliser le tableau de valeurs de f pour déterminer un encadrement de x_1 et x_2.
   (c) Exprimer x_k à l'aide de f^{-1} puis justifier que la suite (x_k) est croissante et déterminer sa limite lorsque k tend vers l'infini.
8. On définit la suite (u_n) par : $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & \dfrac{3}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} & = & \varphi(u_n) \end{array}\right.$
   (a) Étudier les variations de φ sur $\mathbb{R}_+^\times$.
   (b) On donne $\varphi\left(\dfrac{3}{2}\right) \simeq 1,73$ et $\varphi(2) \simeq 1,69$. Montrer que $\varphi\left(\left[\dfrac{3}{2};2\right]\right) \subset \left[\dfrac{3}{2};2\right]$.
   (c) En étudiant les variations de φ', montrer que : $\forall x \in \left[\dfrac{3}{2};2\right]$, $|\varphi'(x)| \leqslant \dfrac{2}{9}$.
   (d) Montrer que les équations $x = \varphi(x)$ et $f(x) = 1$ sont équivalentes. En déduire que le réel x_1 est l'unique solution de l'équation $x = \varphi(x)$.
   (e) Montrer successivement que pour tout entier n :
$$\frac{3}{2} \leqslant u_n \leqslant 2 \quad ; \quad |u_{n+1} - x_1| \leqslant \frac{2}{9}|u_n - x_1| \quad ; \quad |u_n - x_1| \leqslant \left(\frac{2}{9}\right)^n.$$
   (f) En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 3

On effectue une suite de lancers d'une pièce de monnaie. On suppose que les résultats des lancers sont indépendants et qu'à chaque lancer, la pièce donne pile avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ et face avec la probabilité $q = 1 - p$.
On s'intéresse dans cet exercice à l'apparition de deux piles consécutifs.
Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement « deux piles consécutifs sont réalisés pour la première fois aux lancers numéro n et $n+1$ ».
On définit alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des probabilités des événements A_n par :

- Pour tout entier naturel n non nul : $a_n = P(A_n)$
- avec la convention $a_0 = 0$.

3.1 Encadrement des racines de l'équation caractéristique.

On considère la fonction polynomiale f de la variable réelle x définie par $f(x) = x^2 - qx - pq$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 avec $r_1 < r_2$. Exprimer $r_1 + r_2$ et $r_1 \times r_2$ en fonction de p et q.
2. Calculer $f(1)$, $f(-1)$, $f(0)$.
3. En déduire l'encadrement suivant : $|r_1| < |r_2| < 1$.

3.2 Équivalent de a_n quand n tend vers l'infini.

1. Déterminer a_1, a_2 et a_3 en fonction de p et q.
2. En remarquant que l'événement A_{n+2} est réalisé si et seulement si :
   - on a obtenu pile au premier tirage, face au deuxième tirage, et à partir de ce moment, A_n est réalisé.

   ou
   - on a obtenu face au premier tirage, et à partir de ce moment, A_{n+1} est réalisé.

   Montrer que l'on a, pour tout entier naturel n : $a_{n+2} - qa_{n+1} - pqa_n = 0$.
3. Écrire un programme, en langage Pascal, permettant de calculer a_n, l'entier n, les réel p et q étant donnés par l'utilisateur.
4. Montrer que pour tout entier naturel n, $a_n = \dfrac{p^2}{r_2 - r_1}((r_2)^n - (r_1)^n)$.
5. Donner un équivalent de a_n lorsque n tend vers plus l'infini.

3.3 Expression de a_n en fonction de n par une méthode matricielle.

On définit les matrices A et P par :

$$A = \begin{pmatrix} r_1 + r_2 & -r_1 r_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad P = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

ainsi que les matrices unicolonnes X_n tout entier naturel n, par : $X_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que pour tout entier naturel n : $X_{n+1} = AX_n$.
2. Montrer que les matrices $A - r_1 I$ et $A - r_2 I$ ne sont pas inversibles.
3. En déduire que A est diagonalisable.
4. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
5. Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$. (Les coefficients de la matrice D seront exprimés en fonction de $r_1$et $r_2$seulement).
6. Démontrer par récurrence, que pour tout entier naturel n, $X_n = PD^nP^{-1}X_0$.
7. Retrouver ainsi l'expression de a_n en fonction de r_1, r_2, p et n.

3.4 Étude du temps d'attente du premier double pile.

On désigne par T l'application associant à toute suite de lancers successifs le numéro du lancer où pour la première fois on obtient un double pile. Ainsi, pour tout entier naturel n, $P(T=n+1)=a_n$.

1. Montrer que T est une variable aléatoire, c'est-à-dire que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(T=n+1)=1$.
2. Prouver que T admet une espérance $E(T)$, et que : $E(T)=\dfrac{1+p}{p^2}$.

Corrigé du sujet Ecricome 2005

Exercice 1

1. Pour I_0, c'est un calcul direct : $I_0 = \int_0^1 e^{-2x}dx = \left[\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^1 = \frac{e^{-2}-1}{-2} = \frac{1}{2} - \frac{e^{-2}}{2}$. Pour I_1, on peut procéder à une intégration par parties en posant $u(x) = 1-x$; $v'(x) = e^{-2x}$, et donc $u'(x) = -1$ et $v(x) = \frac{e^{-2x}}{-2}$, ce qui donne $I_1 = \int_0^1 (1-x)e^{-2x} = \left[(1-x)\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{e^{-2x}}{-2}dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-2x}dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}I_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{e^{-2}}{4} = \frac{1+e^{-2}}{4}$.
2. Comme $1-x \in [0;1]$ si $x \in [0;1]$, on aura $(1-x)^{n+1} \leqslant (1-x)^n$ sur l'intervalle d'intégration $[0;1]$, d'où $(1-x)^{n+1}e^{-2x} \leqslant (1-x)^n e^{-2x}$ et on en déduit en intégrant l'inégalité que $I_{n+1} \leqslant I_n$. La suite (I_n) est donc décroissante.
3. La fonction intégrée étant positive, $I_n \geqslant 0$.
4. La suite est décroissante et minorée par 0, elle converge donc.
5. La fonction g est décroissante sur $\mathbb{R}$ (et donc en particulier sur $[0;1]$), donc on peut majorer g sur $[0;1]$ par $g(0) = 1$.
6. Par intégration d'inégalités, on déduit du résultat précédent que $I_n \leqslant \int_0^1 (1-x)^n dx = \left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.
7. C'est une application évidente du théorème des gendarmes.
8. Posons donc $u(x) = (1-x)^{n+1}$ et $v'(x) = e^{-2x}$, ce qui donne $u'(x) = -(n+1)(1-x)^n$, et $v(x) = \frac{e^{-2x}}{-2}$, d'où $I_{n+1} = \left[(1-x)^{n+1}\frac{e^{-2x}}{-2x}\right]_0^1 - \int_0^1 -(n+1)(1-x)^n\frac{e^{-2x}}{-2}dx = 0 - \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{n+1}{2}\int_0^1 (1-x)^n e^{-2x}dx = \frac{1}{2} - \frac{n+1}{2}I_n$. L'égalité demandée en découle en multipliant tout par 2.
9. On peut réécrire le résultat précédent sous la forme $nIn = 1 - I_n - 2I_{n+1}$. En utilisant la convergence de (I_n) vers 0, le membre de droite de cette égalité tend vers 1, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = 1$.
10. Toujours en reprenant l'égalité de la question 8, on a $nI_n - 1 = -I_n - 2I_{n+1}$, donc $n(nI_n - 1) = -nI_n - 2nI_{n+1} = -nI_n - 2(n+1)I_{n+1} + 2I_{n+1}$, et le membre de droite tend vers -3, en utilisant cette fois le résultat de la question 9.
11. Nous avons donc $n(nI_n - 1) = -3 + \varepsilon(n)$, avec $\lim\limits_{n\to+\infty}\varepsilon(n) = 0$. Ou encore $nI_n - 1 = -\frac{3}{n} + \frac{\varepsilon(n)}{n}$, puis $nI_n = 1 - \frac{3}{n} + \frac{\varepsilon(n)}{n}$, et enfin $I_n = \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{\varepsilon(n)}{n^2}$, dont on déduit que $a = 0$; $b = 1$ et $c = -3$.

Exercice 2

1. La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme et produit de fonctions usuelles. Le seul problème se pose en 0. Or, $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1$. On peut donc bien prolonger f par continuité sur $\mathbb{R}^+$ en posant $f(0) = -1$.
2. Le fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $f'(x) = 2x - \ln x - 1$. Cette dérivée ayant une limite infinie en 0, on peut en déduire que la fonction f n'est donc pas dérivable en 0, mais y admet une tangente verticale.

3. Les fonctions f' est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f"(x) = 2 - \frac{1}{x}$. Faisons donc un bon gros tableau de variations :

x		2	
$f''(x)$	$-$	0	$+$
f'	$\searrow$	$\ln 2$	$\nearrow$

La fonction f est donc concave sur $]0;2]$ et convexe sur $[2;+\infty[$. De plus, comme $\ln 2$ est positif, f' sera positive sur $\mathbb{R}_+^*$, et f strictement croissante sur ce même intervalle. Enfin, par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

4. La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, avec pour limites -1 en 0, et $+\infty$ en $+\infty$, elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers $]-1;+\infty[$.

5. D'après le théorème de la bijection, la fonction f^{-1} a même sens de variation que f, elle est strictement croissante sur $]-1;+\infty[$. De plus, on aura $\lim\limits_{x\to-1} f^{-1}(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x) = +\infty$.

6. f est bijective vers $]-1;+\infty[$ et, $\forall k \in \mathbb{N}$, on a $k \in]-1;+\infty[$, donc k a un unique antécédent par f.

   (a) On a $x_0 = 1$ puisque $f(1) = 0$ (il n'y a qu'à regarder le tableau de valeurs).

   (b) La fonction f étant croissante, on a (toujours le tableau de valeurs) $1.5 < x_1 < 2 < x_2 < 2.5$.

   (c) Plus généralement, $x_k = f^{-1}(k)$ donc, f^{-1} étant croissante (et $k < k+1$), on a $x_k < x_{k+1}$, c'est-à-dire que (x_k) est strictement croissante. Comme de plus $\lim\limits_{k\to\infty} k = +\infty$ (c'est idiot, mais il faut le dire !) et $\lim\limits_{k\to+\infty} f^{-1}(k) = +\infty$, on a $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = +\infty$.

7. (a) La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et $\varphi'(x) = -\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-2}{x^2}$. De plus $\varphi(x) = \dfrac{2 + x\ln x}{x}$, donc $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x) = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$. On a donc le tableau suivant :

x	0		2		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
φ	$+\infty$	$\searrow$	$1+\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

   (b) La fonction φ étant strictement décroissante sur $\left[\dfrac{3}{2};2\right]$, on aura $\forall x \in \left[\dfrac{3}{2};2\right]$, $\varphi(2) \leqslant \varphi(x) \leqslant \varphi\left(\dfrac{3}{2}\right)$, donc $1.69 \leqslant \varphi\left(\dfrac{3}{2}\right) \leqslant 1.73$ et comme $\dfrac{3}{2} < 1.69$ et $1.73 < 2$, $\varphi\left(\left[\dfrac{3}{2};2\right]\right) \subset \left[\dfrac{3}{2},2\right]$.

   (c) Dérivons une deuxième fois : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi"(x) = \dfrac{4}{x^3} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{4-x}{x^3}$. La fonction φ' est donc croissante entre $\dfrac{3}{2}$ et 2. Comme $\varphi'\left(\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{2}{9}$ et $\varphi'(2) = 0$, on en déduit que, $\forall x \in \left[\dfrac{3}{2};2\right]$, $-\dfrac{2}{9} \leqslant \varphi'(x) \leqslant 0$, donc $|\varphi'(x)| \leqslant \dfrac{2}{9}$.

   (d) $x = \varphi(x) \Leftrightarrow \dfrac{2}{x} + \ln x = x \Leftrightarrow 2 + x\ln x - x^2 = 0$ car x ne peut pas être nul. Or, $f(x) = 1 \Leftrightarrow x^2 - x\ln x - 1 = 1$; les deux équations sont bien équivalentes. La solution de l'équation $f(x) = 1$, qui est par définition x_1, est donc également solution de $\varphi(x) = x$ (si vous préférez, x_1 est un point fixe de φ).

(e) La première inégalité se démontre par récurrence, posons P_n : $\frac{3}{2} \leqslant u_n \leqslant 2$. Comme $u_0 = \frac{3}{2}$, la propriété P_0 est vérifiée, et en supposant P_n vérifiée, on a $\frac{3}{2} \leqslant u_n \leqslant 2$, donc $\frac{3}{2} \leqslant \varphi(u_n) \leqslant 2$ d'après la question *b.*, donc P_{n+1} est vérifiée et la récurrence est prouvée.
La deuxième étape est une application de l'inégalité des accroissements finis : $u_n \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$, $x_1 \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$ d'après la question 6. et sur $\left[\frac{3}{2}; 2\right]$, on a $|\varphi'(x)| \leqslant \frac{2}{9}$, donc $|\varphi(u_n) - \varphi(x_1)| \leqslant \frac{2}{9}|u_n - x_1|$. Comme $\varphi(x_1) = x_1$ et $\varphi(u_n) = u_{n+1}$, on obtient l'inégalité souhaitée.
La dernière inégalité se démontre à nouveau par récurrence. Posons P_n : $|u_n - x_1| \leqslant \left(\frac{2}{9}\right)^n$. Pour prouver P_0, il faut vérifier que $\left|\frac{3}{2} - x_1\right| \leqslant 1$, ce qui est vrai car $x_1 \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$.
Ensuite, on suppose P_n vérifiée, et on a alors $|u_{n+1} - x_1| \leqslant \frac{2}{9}|u_n - x_1| \leqslant \frac{2}{9} \times \left(\frac{2}{9}\right)^n \leqslant \left(\frac{2}{9}\right)^{n+1}$. La récurrence est prouvée.

(f) On a $0 \leqslant |u_n - x_1| \leqslant \left(\frac{2}{9}\right)^n$. Comme $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2}{9}\right)^n = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n - x_1 = 0$, c'est-à-dire que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = x_1$.

Exercice 3

3.1 Encadrement des racines de l'équation caractéristique.

1. L'équation $f(x) = 0$ a pour discriminant $\Delta = q^2 + 4pq > 0$ (les réels p et q sont évidemment positifs, ce sont des probabilités !), donc l'équation admet effectivement deux racines, on peut toujours noter r_1 la plus petite et r_2 la plus grande. Comme on doit alors avoir $(x-r_1)(x-r_2) = x^2 - qx - qp$, on a $x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1r_2 = x^2 - qx - qp$, d'où par identification $r_1 + r_2 = q$ et $r_1r_2 = -qp$.
2. Calculons donc : $f(1) = 1-q-pq = p-pq = p(1-q) = p^2$; $f(-1) = 1+q-qp = 1+q(1-p) = 1 + q^2$; et $f(0) = -pq$.
3. Comme $f(0) < 0$ tandis que $f(1) > 0$ et $f(-1) > 0$, le théorème des valeurs intermédiaires nous assure que f s'annule sur $]-1; 0[$ et sur $]0; 1[$. Comme on sait par ailleurs qu'elle s'annule exactement deux fois en r_1 et en r_2, on a donc $-1 < r_1 < 0$ et $0 < r_2 < 1$. En découle que $|r_1| < 1$ et $|r_2| < 1$. Pour prouver que $|r_1| < |r_2|$, il suffit de constater que ces deux nombres sont de signes opposés mais que leur somme est strictement positive (elle vaut q, on l'a calculée juste au-dessus).

3.2 Équivalent de a_n quand n tend vers l'infini.

1. L'évènement A_1 signifie qu'on tire deux Piles aux deux premiers lancers, donc $a_1 = p^2$. L'évènements A_2 est réalisé si et seulement si on commence avec un Face, puis on poursuit avec deux Piles (si on avait un Pile au premier tirage, la première succession de deux Piles apparaitrait avant les tirages 2 et 3), donc $a_2 = qp^2$. Enfin, pour que A_3 soit vérifié, on peut avoir les successions PFPP et FFPP sur les quatre premiers tirages (Face au deuxième lancer imposé comme ci-dessus, et peu importe ce qui se passe au premier), ce qui donne $a_3 = a_2 = qp^2$.
2. En effet, si on veut que A_{n+2} soit réalisé (pour $n \geqslant 1$), il ne faut pas commencer par deux Piles. Si on commence avec un Face, on peut oublier ce premier tirage et on attend que le premier PP apparaisse sur les $n+1$ tirages restant, ce qui a pour probabilité a_{n+1}. Si on commence avec un Pile, il faut donc un Face au deuxième tirage, et on peut alors oublier ces

deux tirages et attendre le premier PP sur les n tirages restants. Ces deux situations étant incompatibles, on aura $a_{n+2} = P(F_1) \times a_{n+1} + P(P_1F_2) \times a_n = qa_{n+1} + pqa_n$. Si $n = 0$, on constate tout simplement que $qa_1 + pqa_0 = qp^2 = a_2$, la formule est donc toujours valable. La relation demandée en découle immédiatement.

3. PROGRAM calculan ;
```
USES wincrt ;
VAR a,b,t,p : real ; i,n : integer ;
BEGIN
WriteLn('Choisissez la valeur de p') ;
ReadLn(p) ;
q := 1-p ;
WriteLn('Choisissez la valeur de n') ;
ReadLn(n) ;
IF n=0 THEN WriteLn('a0=0') ELSE
BEGIN
a := p*p ; b := 0 ;
FOR i := 2 To n DO
BEGIN
t := q*b-p*q*a ;
b := a ;
a := b ;
END ;
WriteLn('an=',a) ;
END ;
END.
```
4. La suite (a_n) est récurrente linéaire d'ordre 2, et on a déjà vu plus haut que son équation caractéristique admettait r_1 et r_2 pour racines. On a donc $a_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$, avec $a_0 = \alpha + \beta = 0$ et $a_1 = \alpha r_1 + \beta r_2 = p^2$, donc $\beta = -\alpha$ et $p^2 = \alpha(r_1 - r_2)$. Cela donne bien $\alpha = \dfrac{p^2}{r_1 - r_2}$ et $\beta = \dfrac{p^2}{r_2 - r_1}$, et la formule demandée. On peut aussi prouver la formule par récurrence...
5. On a vu plus haut que $|r_1| < |r_2|$, donc $r_1^n = o(r_2^n)$, et $a_n \sim \dfrac{p_2 r_2^n}{r_2 - r_1}$ (notez au passage que cette probabilité tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, ce qui n'a rien de surprenant).

3.3 Expression de a_n en fonction de n par une méthode matricielle.

1. Calculons donc $AX_n = \begin{pmatrix} (r_1 + r_2)a_{n+1} - r_1r_2a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$. Mais on a vu plus haut que $(r_1 + r_2) = q$ et $r_1r_2 = -pq$, donc le premier terme de AX_n vaut $qa_{n+1} + pqa_n$, qui vaut a_{n+2} d'après la question 3.2.2. Finalement, $AX_n = \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$.
2. Constatons que $A - r_1I = \begin{pmatrix} r_2 & -r_1r_2 \\ 1 & -r_1 \end{pmatrix}$, et que sur cette matrice, $L_1 - r_2L_2$ donne la ligne nulle, ce qui empêche d'inverser la matrice. De même, $A - r_2I = \begin{pmatrix} r_1 & -r_1r_2 \\ 1 & -r_2 \end{pmatrix}$, et cette fois-ci c'est $L_1 - r_1L_2$ qui s'annule, avec la même conclusion.
3. On oublie cette question, hors de notre portée pour l'instant.

4. Appliquons donc le pivot de Gauss à la matrice P : la combinaison $L_2 \leftarrow L_1 - r_1 L_2$ transforme la matrice P en $\begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ 0 & r_2 - r_1 \end{pmatrix}$, puis la combinaison $L_1 \leftarrow (r_1 - r_2)L_1 + r_2 L_2$ donne la matrice diagonale $\begin{pmatrix} r_1(r_1 - r_2) & 0 \\ 0 & r_2 - r_1 \end{pmatrix}$. Il ne reste plus qu'à diviser les lignes respectivement par $r_1(r_1 - r_2)$ et $r_2 - r_1$ pour obtenir l'identité (ça ne pose aucun problème, on sait que tous ces nombres sont non nuls). Les opérations effectuées en parallèle sur l'identité donnent $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -r_1 \end{pmatrix}$, puis $\begin{pmatrix} r_1 & -r_1 r_2 \\ 1 & -r_1 \end{pmatrix}$, et enfin $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r_1 - r_2} & \frac{r_2}{r_2 - r_1} \\ \frac{1}{r_2 - r_1} & \frac{r_1}{r_1 - r_2} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & -r_2 \\ -1 & r_1 \end{pmatrix}$.
5. On calcule donc $AP = \begin{pmatrix} r_1^2 & r_2^2 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix}$ puis $P^{-1}AP = \dfrac{1}{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} r_1^2 - r_1 r_2 & 0 \\ 0 & r_1 r_2 - r_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}$.
6. Faisons donc, puisqu'on nous le propose si gentiment, une jolie récurrence. Pour $n = 0$, c'est clair : $PD^0P^{-1}X_0 = PP^{-1}X_0 = X_0$. Et si on suppose la relation vérifiée au rang n, alors $X_{n+1} = AX_n = APD^nP^{-1}X_0$, avec $A = PDP^{-1}$ (il suffit de multiplier à gauche par P et à droite par P^{-1} la relation de la question précédente). Donc $X_{n+1} = PDP^{-1}PD^nP^{-1}X_0 = PDD^nP^{-1}X_0 = PD^{n+1}P^{-1}X_0$, ce qui prouve l'hérédité et achève la récurrence.
7. Encore un peu de calcul : $D^n = \begin{pmatrix} r_1^n & 0 \\ 0 & r_2^n \end{pmatrix}$, puis $PD^n = \begin{pmatrix} r_1^{n+1} & r_2^{n+1} \\ r_1^n & r_2^n \end{pmatrix}$, puis $PD^nP^{-1} = \dfrac{1}{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} r_1^{n+1} - r_2^{n+1} & r_2^{n+1} r_1 - r_2 r_1^{n+1} \\ r_1^n - r_2^n & r_1 r_2^n - r_2 r_1^n \end{pmatrix}$. Comme $X_0 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^2 \\ 0 \end{pmatrix}$, on obtient finalement $X_n = \dfrac{1}{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} p^2(r_1^{n+1} - r_2^{n+1}) \\ p^2(r_1^n - r_2^n) \end{pmatrix}$. On retrouve bien pour a_n (et accessoirement pour a_{n+1}) la formule trouvée à la question 3.2.4.

3.4 Étude du temps d'attente du premier double pile.

1. Calculons donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \frac{p^2}{r_2 - r_1} \sum_{n=1}^{+\infty} r_2^n - r_1^n$. Cette sommes est bien convergente puisque les raisons des séries géométriques ont une valeur absolue strictement inférieure à 1, et la somme vaut $\dfrac{p^2}{r_2 - r_1}\left(\dfrac{1}{1 - r_2} - 1 - \dfrac{1}{1 - r_1} - 1\right) = \dfrac{p^2}{r_2 - r_1} \times \dfrac{r_2 - r_1}{(1 - r_2)(1 - r_1)} = \dfrac{p^2}{1 - (r_1 + r_2) + r_1 r_2} = \dfrac{p^2}{1 - q - pq} = \dfrac{p^2}{p(1 - q)} = \dfrac{p^2}{p^2} = 1$, donc ça marche.
2. Sous réserve de convergence, $E(T) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(n + 1)a_n = \frac{p^2}{r_2 - r_1} \sum_{n=1}^{+\infty}(n + 1)r_2^n - (n + 1)r_1^n$. On reconnait des séries géométriques dérivées convergentes (il manque juste le premier terme), et $E(T) = \dfrac{p^2}{r_2 - r_1}\left(\dfrac{1}{(1 - r_2)^2} - 1 - \dfrac{1}{(1 - r_1)^2} + 1\right) = \dfrac{p^2}{r_2 - r_1} \times \dfrac{(1 - r_1)^2 - (1 - r_2)^2}{p^4}$, en remplaçant $(1 - r_1)(1 - r_2)$ par p^2 au vu du calcul effectué à la question précédente. Le deuxième numérateur vaut $1 - 2r_1 + r_1^2 - 1 + 2r_2 - r_2^2 = (r_1 + r_2)(r_1 - r_2) + 2(r_2 - r_1) = (r_2 - r_1)(2 - q) = (r_2 - r_1)(1 + p)$. Après simplification, $E(T) = \dfrac{1 + p}{p^2}$.

Sujet d'annales : ESSEC II 1998

ECE3 Lycée Carnot

5 mai 2011

On considère dans ce problème un guichet auquel se présentent aléatoirement des clients. L'objectif est d'étudier la file d'attente se formant à ce guichet au cours du temps, ce qui est traité dans la partie II. Dans la partie I, on étudie une suite récurrente utilisée ultérieurement.

Partie I

On considère un nombre réel strictement positif a et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{a(x-1)}$. On définit alors une suite (u_n) par son premier terme $u_0 = 0$ et la relation $u_{k+1} = f(u_k)$.

1. **Convergence de la suite (u_n).**
   (a) Établir par récurrence pour tout nombre entier n les inégalités $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ et $u_n \leqslant u_{n+1}$.
   (b) En déduire la convergence de la suite (u_n). On notera $L(a)$ sa limite.
2. **Limite de la suite (u_n) lorsque $a < 1$.**
   (a) À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, établir que $0 \leqslant 1 - u_{n+1} \leqslant a(1 - u_n)$.
   (b) En déduire l'inégalité $0 \leqslant 1 - u_n \leqslant a^n$, puis la limite $L(a)$ de la suite (u_n) pour $0 < a < 1$.
3. **Limite de la suite (u_n) lorsque $a \geqslant 1$.**
   (a) On étudie ici les racines de l'équation $f(x) = x$ lorsque $a \geqslant 1$.
   - Prouver que $0 \leqslant 1 - \dfrac{\ln a}{a} \leqslant 1$ pour $a \geqslant 1$.
   - Exprimer l'unique racine de l'équation $f'(x) = 1$ en fonction de a.
   - En déduire les variations de la fonction $x \mapsto f(x) - x$ pour $a = 1$, puis pour $a > 1$.
   - Préciser dans ces deux cas le nombre des racines de l'équation $f(x) = x$.

   On convient désormais de noter $r(a)$ la plus petite racine de l'équation $f(x) = x$.
   On vérifiera en particulier que $0 < r(a) < 1$ pour $a > 1$, et que $r(1) = 1$.

   (b) On étudie ici la plus petite racine $r(a)$ de l'équation $f(x) = x$ lorsque $a \geqslant 1$.
   - Étudier et représenter graphiquement sur $[0, +\infty[$ la fonction $\varphi : x \mapsto xe^{-x}$.
   - Comparer les images des nombres a et $ar(a)$ par cette fonction.
   - En déduire que la fonction φ réalise une bijection de $[0, 1]$ sur $\left[0, \dfrac{1}{e}\right]$ et montrer que la fonction φ^{-1} est continue et strictement croissante sur $\left[0, \dfrac{1}{e}\right]$. Dresser le tableau de variation de φ^{-1}.
   - Prouver que $r(a) = \dfrac{1}{a}\varphi^{-1}(ae^{-a})$, puis déterminer la limite de $r(a)$ en $+\infty$.

   (c) On étudie maintenant la limite de la suite (u_n) lorsque $a \geqslant 1$.
   - Établir l'inégalité $0 \leqslant u_n \leqslant r(a)$.
   - En déduire la limite $L(a)$ de la suite (u_n) pour $a \geqslant 1$.

- Écrire un programme Pascal permettant de déterminer une valeur approchée de $L(a)$ à 10^{-2} près. On obtient ainsi $L(2) = 0,20$, $L(4) = 0,02$, etc.

4. **Courbe représentative de la fonction $a \mapsto L(a)$ pour $a > 0$.**
Déduire de ces résultats l'allure de la courbe représentative de la fonction $a \mapsto L(a)$ pour $a > 0$.

Partie II

Dans cette partie, le temps se déroule comme une succession d'instants 0, 1, 2, 3, ..., n, ... et l'on considère un guichet auquel peut se présenter au plus un client dans un intervalle de temps $[n-1, n[$, c'est à dire entre deux instants consécutifs. On suppose qu'un premier client est au guichet à l'instant 0, et, pour tout entier $n \geqslant 1$, on désigne par B_n la variable aléatoire prenant la valeur 1 si un nouveau client se présente au guichet entre les instants $n-1$ et n, et 0 sinon. Ces variables aléatoires B_1, B_2, ..., B_n, ... sont supposées indépendantes et prennent la valeur 1 avec la probabilité p ($0 < p < 1$). On appelle durée de service d'un client au guichet le temps passé par l'employé du guichet à le servir (une fois son attente dans la file achevée). Ainsi, si la durée de service du premier client est égale à n, le guichet est libre pour le service du client suivant à partir de l'instant n. Les variables aléatoires indiquant les durées de service au guichet des clients successifs sont supposées indépendantes et suivent la même loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. En particulier, on notera D la variable aléatoire indiquant la durée de service au guichet du premier client. On convient d'appeler première vague de clients l'ensemble de ceux arrivés au guichet pendant la durée de service du premier initial, puis, de façon générale, on appelle $(k+1)^{ième}$ vague de clients l'ensemble de ceux arrivés pendant la durée de service des clients de la $k^{ième}$ vague. On désigne alors par N_k le nombre aléatoire des clients de la $k^{ième}$ vague. Par convention, on pose $N_0 = 1$ (la vague numéro 0 est constituée de l'unique client présent au départ au guichet).

1. **Loi de la variable aléatoire N_1.**
Étant donné un entier n, déterminer les probabilités conditionnelles $P_{D=n}(N_1 = k)$, et en déduire à l'aide de la formule des probabilités totales que N_1 suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.

2. **Probabilité pour que la file d'attente au guichet s'achève.**

Dans toute la suite du problème, on convient de poser $p_k = P(N_k = 0)$.

(a) Prouver que l'évènement « la file d'attente au guichet s'achève au bout d'un temps fini » est la réunion des évènements $N_k = 0$. Montrer que cette suite d'évènements $(N_k = 0)$ est croissante, et en déduire que la probabilité que la file se vide en un temps fini, notée L, vaut $L = \lim\limits_{k\to+\infty} P(N_k = 0)$.

(b) Justifier que, $\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2$, $P_{N_1=1}(N_{k+1} = 0) = P(N_k = 0)$ et $P_{N_1=j}(N_{k+1} = 0) = P(N_k = 0)^j$.

(c) En déduire l'expression de p_{k+1} en fonction de p_k, préciser p_0 et, à l'aide des résultats de la partie I, la limite de la suite (p_k) et la probabilité pour que la file d'attente au guichet s'achève au bout d'un temps fini. On discutera et interprètera le résultat obtenu en fonction des valeurs de λp.

(d) Déterminer les valeurs exactes ou approchées à 10^{-2} près des probabilités pour que la file d'attente au guichet s'achève au bout d'un temps fini lorsque la durée moyenne de service d'un client au guichet est égale à 1, 2, 4 ou 8 instants tandis que la probabilité pour qu'un client se présente au guichet entre deux instants consécutifs donnés est égale à 0,5 d'abord, à 0,25 ensuite.

3. **Calcul de l'espérance $E(N_k)$ de la variable aléatoire N_k.**

On convient d'appeler espérance de la variable aléatoire N_{k+1} conditionnée par l'évènement $N_k = i$, et de noter $E_{N_k=i}(N_{k+1})$, l'espérance de N_{k+1} lorsque la probabilité est la probabilité conditionnelle sachant l'évènement $N_k = i$ réalisé, autrement dit $E_{N_k=i}(N_{k+1}) = \sum_{j=0}^{+\infty} j P_{N_k=i}(N_{k+1} = j)$.

(a) On suppose l'évènement $N_k = i$ réalisé. Déterminer alors la loi de la durée de service de ces i clients de la $k^{\text{ième}}$ vague en distinguant les cas $i = 0$ et $i \geqslant 1$.

En déduire la loi de la variable aléatoire N_{k+1} conditionnée par l'évènement $N_k = i$ et vérifier que $E_{N_k=i}(N_{k+1}) = i\lambda p$.

(b) On suppose que l'espérance $E(N_k)$ existe. Établir que

$E(N_k) = \dfrac{1}{\lambda p} \sum_{i=0}^{+\infty} P(N_k = i) E_{N_k=i}(N_{k+1})$. En admettant qu'il est alors licite de permuter les symboles $\sum$ dans le calcul, établir l'existence de l'espérance $E(N_{k+1})$ et donner son expression en fonction de λ, p et de l'espérance $E(N_k)$.

(c) En déduire l'existence et l'expression de $E(N_k)$.

(d) Déterminer l'espérance du nombre de clients qui se présentent au guichet jusqu'à ceux de la $n^{ième}$ vague incluse.

(e) Discuter et interpréter la limite de cette espérance quand n tend vers $+\infty$ pour $\lambda p < 1$. Qu'obtient-on numériquement dans les cas évoqués au $2.d$?

Corrigé du sujet ESSEC II 1998

Partie I

1. (a) Prouvons donc par récurrence la propriété $P_n : u_n \in [0;1]$ et $u_n \leqslant u_{n+1}$. Puisque $u_0 = 0 \in [0;1]$ et $u_1 = f(0) = e^{-a} > 0$, la propriété P_0 est vérifiée. Supposons désormais P_n vérifiée, et constatons que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (en effet, puisque $a > 0$, f est la composée de l'exponentielle et de la fonction $x \mapsto a(x-1)$, qui sont toutes deux strictement croissantes sur $\mathbb{R}$). On aura donc, en exploitant l'hypothèse de récurrence et la croissance de f, $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(1)$, et $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$, c'est-à-dire $e^{-a} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$ et $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$. La propriété P_{n+1} est bien vérifiée, et la récurrence achevée.

   (b) La suite étant croissante et majorée par 1, elle converge.

2. (a) Nous aimerions appliquer l'IAF sur l'intervalle $[0;1]$, auquel appartient u_n d'après la question 1. Pour cela, chercons à encadrer f' sur cet intervalle. La fonction f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et $f'(x) = ae^{a(x-1)} = af(x)$. La fonction f' est donc croissante comme f et, $\forall x \in [0;1]$, $f'(0) \leqslant f'(x) \leqslant f'(1)$. Comme $f'(0) = ae^{-a} > 0$ et $f'(1) = a$, on a donc $0 \leqslant f'(x) \leqslant a$ sur $[0;1]$. L'IAF nous permet alors d'affirmer, puisque $u_n \leqslant 1$, que $0 \leqslant f(1) - f(u_n) \leqslant a(1-u_n)$. Comme $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(1) = 1$, l'encadrement souhaité en découle.

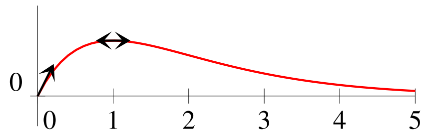
   (b) Prouvons par récurrence la propriété $P_n : 0 \leqslant 1 - u_n \leqslant a^n$. Comme $1 - u_0 = 1 = a^0$, la propriété P_0 est vérifiée. Supposons maintenant P_n vraie, alors d'après la question précédente $0 \leqslant 1 - u_{n+1} \leqslant a(1-u_n)$, avec par hypothèse $1 - u_n \leqslant a^n$. On en déduit que $0 \leqslant 1 - u_{n+1} \leqslant a \times a^n = a^{n+1}$, ce qui prouve P_{n+1} et achève la récurrence. Si $a < 1$, on aura $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$ donc, en appliquant le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - u_n = 0$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

3. (a)
   - Pour cela, introduisons donc la fonction $g : a \mapsto 1 - \dfrac{\ln a}{a}$. Cette fonction g est certainement dérivable sur $[1;+\infty[$, et $g'(a) = -\dfrac{1-\ln a}{a^2}$. La fonction g est donc décroissante sur $[1;e]$ et croissante sur $[e;+\infty[$. Elle admet pour minimum sur $[1;+\infty[$ la valeur $g(e) = 1 - \dfrac{1}{e} > 0$. De plus, $g(1) = \lim\limits_{a\to+\infty} g(a) = 1$ (croissance comparée pour cette dernière limite), donc $0 < g(a) \leqslant 1$ sur $[1;+\infty[$.
   - Nous avons déjà calculé f', résolvons donc l'équation $ae^{a(x-1)} = 1$. Le plus simple est de passer au logarithme (tout est positif) pour obtenir $\ln a + a(x-1) = 0$, soit $x - 1 = -\dfrac{\ln a}{a}$, donc $x = 1 - \dfrac{\ln a}{a}$.
   - On a déjà vu plus haut que la dérivée f' était strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc $f'(x) - 1$, qui est la dérivée de $f(x) - x$, également. Si $a = 1$, la solution obtenue à la question précédente vaut 1, et $f'(x) - 1$ est donc négative sur $]-\infty;1]$ et positive ensuite. La fonction $x \mapsto f(x) - x$ est donc strictement décroissante sur $]-\infty;1]$ et strictement croissante sur $[1;+\infty[$. Elle admet pour minimum $f(1) - 1 = 0$.

     Si $a < 1$, c'est très similaire, $x \mapsto f(x) - x$ est décroissante sur $\left]-\infty; 1 - \dfrac{\ln a}{a}\right]$, et croissante sur $\left[1 - \dfrac{\ln a}{a}; +\infty\right[$. On ne cherchera pas à calculer son minimum, ça ne sert à rien !
   - Les solutions de l'équation $f(x) = x$ sont les valeurs d'annulation de la fonction qu'on vient d'étudier. Si $a = 1$, puisqu'on a un minimum valant 0, 1 est la seule solution de l'équation. Par contre, si $a < 1$, 1 est toujours solution, mais la fonction atteint son minimum avant, et ce minimum est donc strictement négatif. Comme par ailleurs on sait que $f(0) - 0 > 0$ (cf calculs en début de problème) la fonction s'annule une deuxième fois entre 0 et 1. Cette valeur correspond à $r(a)$ (il ne peut pas y avoir d'autres points

d'annulation au vu des variations de la fonction), qui vérifie donc $0 < r(a) < 1$.

(b) • Cette fonction est évidemment dérivable sur $[0;+\infty[$, de dérivée $\varphi'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$. La fonction est donc croissante sur $[0;1]$ et décroissante sur $[1;+\infty[$. De plus, $\varphi(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi x = 0$ (par croissance comparée). Pour compléter le graphique, on peut ajouter que $\varphi'(0) = 1$, ce qui permet de placer la tangente à la courbe à l'origine. Voici ladite courbe :



• On a $\varphi(a) = ae^{-a}$ et $\varphi(ar(a)) = ar(a)e^{-ar(a)}$. Mais rappelons-nous que, par définition, $f(r(a)) = r(a)$, c'est-à-dire que $e^{a(r(a)-1)} = r(a)$, donc $\varphi(ar(a)) = ae^{ar(a)-a}e^{-ar(a)} = ae^{-a} = \varphi(a)$. Les deux images sont tout simplement égales. Si $a > 1$, on peut en déduire, au vu du tableau de variations de φ, que $ar(a) < 1$ (chaque valeur autre que le maximum est prise exactement deux fois par φ, une fois sur $]0;1[$ et une autre sur $]1;+\infty[$, et on ne peut bien sûr avoir $a = ar(a)$, puisque $r(a) < 1$ par construction si $a > 1$).

• La fonction est strictement croissante sur cet intervalle, elle y est certainement bijective. Tout le reste découle du théorème de la bijection : φ^{-1} est continue, strictement croissante, et vérifie $\varphi^{-1}(0) = 0$, et $\varphi^{-1}\left(\frac{1}{e}\right) = 1$.

• On a vu plus haut que $\varphi(ar(a)) = ae^{-a}$. Comme $ar(a) \in [0;1]$, cela équivaut à dire que $ar(a) = \varphi^{-1}(ae^{-a})$, d'où l'égalité demandée. Comme la fonction φ^{-1} est bornée par 0 et 1, on a donc $0 \leqslant r(a) \leqslant \frac{1}{a}$ et, par théorème des gendarmes, $\lim\limits_{a\to+\infty} r(a) = 0$.

(c) • C'est exactement la même récurrence qu'à la toute première question du sujet : $0 \leqslant u_0 \leqslant r(a)$ est évident, et en supposant $0 \leqslant u_n \leqslant r(a)$, il suffit d'invoquer la croissance de f pour obtenir $e^{-a} \leqslant u_{n+1} \leqslant f(r(a))$. Comme $r(a)$ est un point fixe de f, cela prouve l'encadrement pour u_{n+1} et achève la récurrence.

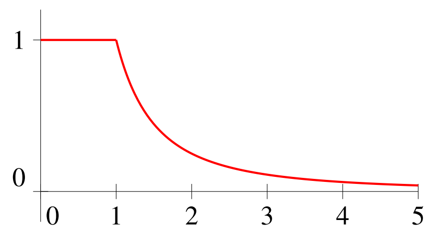
• On sait déjà que la suite converge vers une limite $L(a)$, et l'encadrement précédent permet d'affirmer que $0 \leqslant L(a) \leqslant r(a)$. Or, la limite de la suite est nécessairement un point fixe de f, et $r(a)$ est le plus petit de ces points fixes. Conclusion : u_n converge nécessairement vers $r(a)$. Autrement dit, $L(a) = r(a)$.

• Il y a à peu près douze mille façons d'obtenir ce qui est demandée. Une façon un peu brutale utilisant le fait que la fonction $x \mapsto f(x) - x$ change pour la première fois de signe en $r(a)$ est de calculer toutes les valeurs de $f(x) - x$ en partant de $x = 0$ et en augmentant à chaque étape x de 0.01, jusqu'à obtenir le changement de signe. Voici un programme convenable :

```
PROGRAM approxra ;
USES wincrt ;
VAR a,x : real ;
BEGIN
WriteLn('Choisissez la valeur de a') ;
ReadLn(a) ;
x := 0 ;
REPEAT x := x+0.01
UNTIL exp(a*(x-1))-x<0 ;
WriteLn(x) ;
END.
```

4. On sait que la fonction L est constante égale à 1 sur $[0;1]$ (puisqu'on a $L(a) = 1$ si $a \leqslant 1$). On

a également vu que $\lim\limits_{a\to+\infty} L(a) = 0$. On a bien sûr toujours $0 \leqslant L(a) \leqslant 1$ puisque $L(a) = r(a)$. On sait également que $ar(a) \leqslant 1$, donc $L(a) = r(a) \leqslant \dfrac{1}{a}$. On aimerait bien avoir les variations de L pour confimer l'hypothèse raisonnable que la fonction sera décroissante. Pour cela, on peut se battre avec l'expression obtenue à la fin de la question b, ou bien être malin : si on prend deux valeurs du paramètre a, qu'on note a_1 et a_2, telles que $a_1 \leqslant a_2$, alors on aura $\forall x \in [0;1]$, $e^{a_1(x-1)} \geqslant e^{a_2(x-1)}$ (puisque $x-1$ est alors négatif). En notant (v_n) la suite récurrente associée à la valeur a_1 et (w_n) celle associée à a_2, on prouve alors par une récurrence facile que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \geqslant w_n$ (en effet, si $v_n \geqslant w_n$, alors $v_{n+1} = e^{a_1(v_n-1)} \geqslant e^{a_1(w_n-1)} \geqslant e^{a_2(w_n-1)} = w_{n+1}$). Par passage à la limite, on aura $L(a_1) \geqslant L(a_2)$, ce qui prouve la décroisance de la fonction L. On peut donc imaginer une allure ressemblant à ceci (on peut calculer la pente de la demi-tangente à la courbe à droite de 1, mais cela dépasse largement nos capacités actuelles) :



Partie II

1. La condition $D = n$ impose donc que la premier client passe n instants à être servi au guichet. À chacun de ces n instants, il y a une probabilité p qu'un nouveau client arrive, et N_1 compte le nombre total de nouveaux clients. On reconnait là un cas typique de loi binomiale de paramètre (n, p). On en déduit que $\forall k \in \{0; 1; \dots ; n\}$, $P_{D=n}(N_1 = k) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ (naturellement, si $k > n$, la probabilité conditionnelle est nulle).
   Les évènements $D = n$ formant un système complet d'évènements pour $n \in \mathbb{N}$ (puisque D suit une loi de Poisson, il est en effet autorisé que le client ne passe même pas un instant au guichet), on peut appliquer la formule des probabilités totales pour obtenir $P(N_1 = k) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P_{D=n}(N_1 = k) \times P(D = n)$. On peut en fait commencer la somme à $n = k$ (avant, les probabilités conditionnelles sont nulles) et remplacer par les lois binomiale et de Poisson : $P(N_1 = k) = \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} p^k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} (1-p)^{n-k} \times \frac{\lambda^n}{n!} = \frac{e^{-\lambda} p^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(1-p)^{n-k} \lambda^n}{(n-k)!} = \frac{e^{-\lambda} p^k}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1-p)^n \lambda^{n+k}}{n!} = \frac{e^{-\lambda} p^k \lambda^k}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!}$. On reconnait une série exponentielle, pour obtenir $P(N_1 = k) = \dfrac{e^{-\lambda}(\lambda p)^k}{k!} \times e^{\lambda(1-p)} = \dfrac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^k}{k!}$. On vient de prouver que $N_1 \sim \mathcal{P}(\lambda p)$. En particulier, on aura $E(N_1) = \lambda p$.
2. (a) L'évènement $N_k = 0$ signifie qu'aucun nouveau client n'est apparu lors de la k-ème vague, autrement dit que la file d'attente s'est vidée après le passage de la vague précédente. Faire l'union de ces évènements revient donc à dire qu'il existe un entier pour lequel la file sera vide à l'issue de la k-ème vague, ce qui est bien équivalent à voir la file se vider en un temps fini. La suite est clairement croissante, puisque si $N_k = 0$, la k-ème restera un temps nul au guichet, ce qui ne laisse pas la possibilité pour de nouveaux clients d'arriver lors de la $(k+1)$-ème vague, et implique donc $N_{k+1} = 0$. Par le thèorème de la limite monotone, on a donc $L = \lim\limits_{n\to+\infty} P(N_k = 0)$.

(b) Si $N_1 = 1$, on se retrouve avec une première vague constituée d'un unique client, tout comme pour la vague numérotée 0. La loi de N_2 sera donc la même que celle de N_1 en l'absence de conditionnement, celle de N_3 la même que celle de N_2 en l'absence de conditionnement etc. On a donc en particulier $P_{N_1=1}(N_{k+1} = 0) = P(N_k = 0)$. Assez similairement, si $N_1 = j$, N_2 sera constituée de la réunion des clients apparus pendant le service du premier client de la vague 1 (une sorte de première sous-vague), ceux apparus pendant le service du deuxième client (deuxième sous-vague), etc jusqu'au j-eme client (j-ème sous-vague), et on peut ainsi découper toutes les vagues ultérieures en j morceaux. La k-ème vague sera vide si chacune de ses j sous-vagues est vide, ce qui se produit avec une probabilité $P(N_k = 0)$ d'après le raisonnement précédent (on s'est ramené au cas où il n'y a qu'un client dans N_1). Toutes les sous-vagues étant indépendantes (puisque les variables B_i le sont), on a bien $P_{N_1=j}(N_{k+1} = 0) = P(N_k = 0)^j$. Cette formule est d'ailleurs valable également pour $j = 1$ et même $j = 0$ (si $N_1 = 0$, l'évènement $N_{k+1} = 0$ est certain).

(c) Appliquons donc pour changer la formule des probabilités totales au système complet formé des évènements $N_1 = j$: $p_{k+1} = P(N_{k+1} = 0) = \sum_{j=0}^{+\infty} P_{N_1=j}(N_{k+1} = 0) \times P(N_1 = j) = \sum_{j=0}^{+\infty} p_k^j e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^j}{j!} = e^{-\lambda p} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(p\lambda p_k)^j}{j!} = e^{-\lambda p} e^{p\lambda p_k} = e^{\lambda p(p_k-1)}$. Par ailleurs, on a bien sûr $p_0 = 0$, puisque la vague numérotée 0 est toujours constituée d'un client. On reconnait dans la suite (p_k) une suite récurrente identique à celles étudiées dans la première partie, pour $a = \lambda p$. En reprenant les résultats démontrés dans cette partie, on voit donc que la file d'attente se vide presque sûrement en temps fini lorsque $\lambda p \leqslant 1$. Si $\lambda p > 1$, on aura par contre une probabilité non nulle que la file ne s'arrête jamais, et cette probabilité tendra même vers 0 quand λp tend vers $+\infty$.

(d) Lorsque $p = \frac{1}{2}$, la file d'attente s'achèvera presque sûrement en temps fini si la durée de service moyenne est de 1 (on a alors $\lambda p = \frac{1}{2}$) ou 2 instants ($\lambda p = 1$), mais la probabilité tombe à 0.20 si le temps de service est de quatre instants, et à 0.02 pour 8 instants. Si $p = \frac{1}{4}$, on aura une fin presque sûre avec un temps de service de 1, 2 ou 4 instants, mais une probabilité de $0,20$ que la file s'achève un jour si ce temps de service est de 8 instants.

3. (a) Si $i = 0$, la variable N_k sera identiquement nulle. Si $i \geqslant 1$, en découpant N_k en sous-vagues comme à la question 2.b, N_k sera la somme de i variables indépendantes suivant chacune une loi de Poisson de paramètre λp, ce qui donne $N_k \sim \mathcal{P}(i\lambda p)$. En particulier, $E_{N_k=i}(N_{k+1}) = i\lambda p$.

(b) Par définition, $E(N_k) = \sum_{i=0}^{+\infty} iP(N_k = j) = \frac{1}{\lambda p} \sum_{i=0}^{+\infty} i\lambda p P(N_k = j)$. Il ne reste plus qu'à remplacer ce $i\lambda p$ par $E_{N_k=i}(N_{k+1})$ pour obtenir la formule souhaitée.
On peut désormais remplacer l'espérance conditionnelle par sa définition (sous réserve d'existence) pour obtenir $E(N_k) = \frac{1}{\lambda p} \sum_{i=0}^{+\infty} P(N_k = i) \sum_{j=0}^{+\infty} jP_{N_k=i}(N_{k+1} = j)$
$= \frac{1}{\lambda p} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} jP(N_k = i)P_{N_k=i}(N_{k+1} = j)$ en inversant les sommes comme suggéré. On reconnait désormais, au facteur constant j près, la formule des probabilités totales dans la deuxième somme, donc $E(N_k) = \frac{1}{\lambda p} \sum_{j=0}^{+\infty} jP(N_{k+1} = j) = \frac{E(X_{n+1})}{\lambda p}$. Autrement dit, $E(N_{k+1}) = \lambda p E(N_k)$ (ce qui prouve au passage que $E(N_{k+1})$ existe également).

(c) On vient de voir que, si N_k admettait une espérance, alors N_{k+1} également. Comme N_0 (qui est constante égale à 1) admet certainement une récurrence, le principe de récurrence nous permet d'affirmer que N_k en admettra une pour tout entier k. De plus, la suite $(E(N_k))$ est géométrique de raison λp et de premier terme 1, donc $E(N_k) = (\lambda p)^k$.

(d) Ce nombre de total de clients est simplement donné par la somme des variables N_0, N_1, ..., jusqu'à N_n. Par linéarité de l'espérance, le nombre moyens de clients servis jusqu'à la n-ème vague vaut donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} (\lambda p)^k = \frac{1-(\lambda p)^{n+1}}{1-\lambda p}$ si $\lambda p \neq 1$. Si $\lambda p = 1$, il vaut simplement $n+1$.

(e) Lorsque $\lambda p > 1$, la limite est infinie, ce qui est cohérent puisqu'on a une probabilité non nulle que la file d'attente ne s'arrête jamais, donc qu'on ait une infinité de clients à servir. Si $\lambda p = 1$, la file s'arrête presque sûrement, mais le nombre moyen de clients servis est tout de même infini, un cas fort intéressant. Enfin, si $\lambda p < 1$, sans surprise, le nombre moyen de clients servis au total (qui correspond à la limite) est fini, égale à $\dfrac{1}{1-\lambda p}$. Ainsi, si $\lambda p = \dfrac{1}{2}$ (par exemple une proba $\dfrac{1}{2}$ d'apparition de nouveau client à chaque instant, et un temps moyen de service d'un instant), le nombre moyen de clients servis vaut 2 (pas énorme !). Si $p = \dfrac{1}{4}$ (avec toujours un temps de service d'un instant), on descend à $\dfrac{4}{3}$ de clients servis en moyenne. Il faut vraiment que λp soit proche de 1 pour avoir des résultats plus intéressants. Par exemple, avec $p = \dfrac{1}{10}$ (une chance sur 10 qu'un nouveau client apparaisse à chaque instant) et une durée de service moyenne de 9 instants, on serivra en moyenne 10 clients avant que la file ne se vide.

Feuille d'exercices n°22 : Variables aléatoires infinies

ECE3 Lycée Carnot

6 mai 2011

Exercice 1 (*)

On dispose de deux dés équilibrés, et on effectue une suite de lancers simultanés de ces deux dés. On note X la variable aléatoire donnant le rang d'apparition du premier double 6 lors de ces séries de lancers, et Y le rang d'apparition du premier 6 (peu importe qu'il apparaisse sur le premier ou sur le deuxième dé).

1. Quelle est la probabilité d'obtenir un double 6 lorsqu'on lance simultanément deux dés ? Et celle d'obtenir au moins un 6 ?
2. En déduire les lois suivies par X et Y, ainsi que leurs espérances.
3. Calculer, pour tout entier $n \geqslant 1$, $P((X = n) \cap (Y = n))$.
4. En déduire la probabilité $P(X = Y)$. Que représente cette probabilité ? Le résultat était-il prévisible ?

Exercice 2 (**)

On effectue une suite de lancers d'une pièce équilibrée jusqu'à avoir obtenu au moins une fois Pile et au moins une fois Face. On note X le nombre de tirages effectués.

1. Déterminer $X(\Omega)$.
2. Soit $n \geqslant 2$, montrer que les seuls tirages pour lesquels $X = n$ est vérifié sont $P \dots PF$ et $F \dots FP$, et en déduire la loi de X.
3. Vérifier que X admet une espérance, et calculer $E(X)$.
4. Calculer de même $V(X)$.

Exercice 3 (***)

Le nombre X de candidats se présentant à un examen suit une loi de Poisson de moyenne M. Chaque candidat a une probabilité p d'être reçu, indépendamment des résultats des autres candidats. On note Y le nombre de candidats reçus.

1. Rappeler la loi de X.
2. Soit $(j, k) \in \mathbb{N}^2$. Calculer $P_{X=j}(Y = k)$ (deux cas à distinguer selon la valeur de j).
3. En déduire la valeur de $P(Y = k)$ sous forme d'une somme.
4. Déterminer la loi de Y.

Exercice 4 (***)

Un téléski est constitué de N perches différentes. Un skieur prend une de ces perches, va faire sa descente et revient au même téléski. On admet qu'entre-temps, le nombre de skieurs ayant emprunté le téléski suit une loi géométrique de paramètre p. Quelle est la probabilité que notre skieur retombe sur la même perche ?

Exercice 5 (**)

On lance trois dés à six faces jusqu'à obtenir trois six, sachant que dès qu'un dé tombe sur 6, on arrête de le lancer, et on se contente de relancer les dés n'ayant pas encore donné un 6. On note X_1 le nombre de lancers nécessaires avant d'obtenir un 6 sur le premier (et similairement X_2 et X_3 pour les deux autres dés).

1. Quels sont les lois des variables X_1, X_2 et X_3 ?
2. Déterminer $P(X_i \leqslant k)$ pour un entier k donné.
3. Soit X la variable égale au nombre de lancers nécessaires avant d'obtenir les trois 6. Calculer $P(X \leqslant k)$ (on admettra que les évènements $(X_1 \leqslant k)$, $(X_2 \leqslant k)$ et $(X_3 \leqslant k)$ sont indépendants).
4. En déduire la loi de la variable X.
5. Déterminer, si elle existe, l'espérance de X.

Exercice 6 (EDHEC 1998) (***)

On réalise une suite de lancers d'une pièce équilibrée, chaque lancer amenant donc pile ou face avec une probabilité $\frac{1}{2}$. On note P_k (respectivement F_k) l'évènement : « on obtient pile (resp. face) au k-ème lancer ».
Pour ne pas surcharger l'écriture, on écrira, par exemple, P_1F_2 à la place de $P_1 \cap F_2$.
On note X la variable aléatoire qui prend la valeur k si l'on obtient pour la première fois pile puis face dans cet ordre aux lancers $k-1$ et k (k désignant un entier supérieur ou égal à 2), X prenant la valeur 0 si l'on obtient jamais une telle succession.

1. Calculer $P(X = 2)$.
2. (a) En remarquant que $(X = 3) = P_1P_2F_3 \cup F_1P_2F_3$, calculer $P(X = 3)$.
   (b) Sur le modèle de la question précédente, écrire, pour tout entier k supérieur ou égal à 3, l'évènement $(X = k)$ comme réunion de $(k-1)$ évènements incompatibles.
   (c) Déterminer $P(X = k)$ pour tout entier k supérieur ou égal à 2.
   (d) Calculer $\mathrm{P}(X = 0)$.
3. On se propose, dans cette question, de retrouver le résultat de la question 2) c : par une autre méthode.
   (a) Montrer que, k désignant un entier supérieur ou égal à 3, si le premier lancer est un pile, alors il faut et il suffit que $P_2P_3 \dots P_{k-1}F_k$ se réalise pour que $(X = k)$ se réalise.
   (b) En déduire, en utilisant la formule des probabilités totales, que :
   $\forall k \geqslant 3,\ P(X = k) = \frac{1}{2}P(X = k-1) + \frac{1}{2^k}$
   (c) On pose, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, $u_k = 2^kP(X = k)$. Montrer que la suite $(u_k)_{k\geqslant 2}$ est arithmétique. Retrouver le résultat annoncé.
4. Montrer que X a une espérance $E(X)$, puis la calculer.

Corrigé de la feuille d'exercices n°22

Exercice 1 (*)

1. La probabilité d'obtenir un double six vaut évidemment $\frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$. Celle d'obtenir au moins un six vaut $\frac{11}{36}$ (soit en utilisant une union, soit en passant par le complémentaire).
2. On a donc $X \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{36}\right)$ et $Y \sim \mathcal{G}\left(\frac{11}{36}\right)$. En particulier, $E(X) = 36$ et $E(Y) = \frac{36}{11}$.
3. Pour avoir $X = n$ et $Y = n$ réalisés simultanément, il faut n'obtenir aucun six lors des $n-1$ premiers lancers, et un double six lors du lancer n, ce qui se produit (les lancers sont indépendants) avec probabilité $\left(\frac{25}{36}\right)^{n-1} \times \frac{1}{36}$.
4. L'évènement $X = Y$ est simplement l'union disjointe des évènements $(X = n) \cap (Y = n)$, donc $P(X = Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{25}{36}\right)^{n-1} \times \frac{1}{36} = \frac{1}{36} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{25}{36}\right)^{n} = \frac{1}{36} \times \frac{1}{1 - \frac{25}{36}} = \frac{1}{11}$. Cela n'a rien de surprenant, puisqu'il y a, pour chaque tirage, 11 fois plus de chance de tirer au moins un six que de tirer un double six, autrement dit une chance sur onze que le six intervienne à l'occasion d'un double six.

Exercice 2 (**)

1. On a ici $X(\Omega) = \{2; 3; \dots\}$ puisqu'il faut attendre deux tirages avant d'avoir pu obtenir un Pile et un Face.
2. Pour avoir $X = n$, il faut tirer pour la première un Pile au tirage n, et donc que des Faces avant (ce qui suppose $n \geqslant 2$, ou le contraire. Chacun de ces deux évènements a pour probabilité $\frac{1}{2^n}$, donc $P(X = n) = 2 \times \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$.
3. Sous réserve de convergence, $E(X) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} - 1 = 3$ (on reconnait directement une série géométrique dérivée).
4. Commençons par calculer (aucun problème de convergence) $E(X(X-1)) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2^{n-1}} = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2^{n-2}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{(1-\frac{1}{2})^3} = 8$. On en déduit que $E(X^2) = E(X(X-1)) + E(X) = 11$ et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 11 - 9 = 2$.

Exercice 3 (***)

1. La moyenne d'une loi de Poisson est égale à son paramètre, on a donc $P(X = k) = e^{-M} \frac{M^k}{k!}$.
2. Si $j < k$, $P_{X=j}(Y = k) = 0$ (on ne peut pas avoir plus de reçus que de candidats !). Sinon, à $X = j$ fixé, le nombre de candidats reçus suit une loi binomiale de paramètre (j, p), donc $P_{X=j}(Y = k) = \binom{j}{k} p^k (1-p)^{j-k}$.

3. Il faut prendre en compte toutes les valeurs possibles de j (autrement dit appliquer la formule des probabilités totales au système complet d'évènements formé des $X = j$, pour $j \in \mathbb{N}$), et on obtient $P(Y = k) = \displaystyle\sum_{j=k}^{+\infty} P(X = j)P_{X=j}(Y = k) = \sum_{j=k}^{+\infty} e^{-M}\frac{M^j}{j!}\binom{j}{k}p^k(1-p)^{j-k}$.

4. Il « suffit » de simplifier l'expression précédente :
$$P(Y = k) = e^{-M}p^k \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{M^j}{j!}\frac{j!}{k!(j-k)!}(1-p)^{j-k} = e^{-M}p^kM^k \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{M^{j-k}(1-p)^{j-k}}{k!(j-k)!}$$
$$= e^{-M}\frac{(Mp)^k}{k!}\sum_{j=k}^{+\infty}\frac{(M(1-p))^{j-k}}{(j-k)!} = e^{-M}\frac{(Mp)^k}{k!}e^{M-Mp} = e^{-Mp}\frac{(Mp)^k}{k!}.$$
On reconnait la forme d'une loi de Poisson, seul le paramètre a changé : $Y \sim \mathcal{P}(Mp)$.

Exercice 4 (***)

Le skieur reprendra la même perche si le nombre de skieurs qui sont passés entre temps vaut $N-1$, $2N-1$, …, $kN-1$ pour un entier $k \geqslant 1$. Puisque ce nombre de skieurs est censé suivre une loi géométrique X, la probabilité recherchée vaut $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = kN-1) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{kN-2} = \frac{p}{(1-p)^2}\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^{kN} = \frac{p}{(1-p)^2}\sum_{k=1}^{+\infty}((1-p)^N)^k = \frac{p}{(1-p)^2}\left(\frac{1}{1-(1-p)^N} - 1\right) = \frac{p(1-p)^{N-2}}{1-(1-p)^N}$.
Un petit calcul supplémentaire pour vérifier la crédibilité de la formule (calcul qui n'était pas demandé dans l'énoncé) : quand p tend vers 0, ce qui revient à faire tendre l'espérance de la loi géométrique vers $+\infty$, on peut intuitivement s'attendre à ce que notre probabilité tende vers $\dfrac{1}{N}$ (en effet, si énormément de gens sont passés par le téléski, la valeur de N devient négligeable et toutes les perches tendent à être équiprobables). Et en effet, quand p tend vers 0, le numérateur de notre expression est équivalent à p (le second facteur tend vers 1), et le dénominateur peut se développer à l'aide du binôme de Newton sous la forme $1 - (1 - Np + o(p))$ (il s'agit d'un polynôme dont les termes prépondérants sont ceux de petits degré quand p tend vers 0), ce qui donne pour équivalent Np. Le quotient a donc bien comme limite $\dfrac{1}{N}$.

Exercice 5 (**)

1. Chacune des trois variables suit une loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{6}$.

2. C'est un calcul dont on va finir par avoir l'habitude : $P(X_i \leqslant k) = \displaystyle\sum_{j=1}^{j=k} p(1-p)^{j-1} = p \times \frac{1-(1-p)^k}{1-(1-p)} = 1-(1-p)^k = 1-q^k$ (avec ici $p = \dfrac{1}{6}$, mais on continuera les calculs de façon formelle, c'est aussi simple).

3. Comme $X = \max(X_1, X_2, X_3)$, on aura $(X \leqslant k) = (X_1 \leqslant k) \cap (X_2 \leqslant k) = \cap(X_3 \leqslant k)$, d'où en utilisant la supposition d'indépendance $P(X \leqslant k) = (1-q^k)^3$.

4. L'évènement $X = k$ se produit si $X \leqslant k$ est réalisé, mais pas $X \leqslant k-1$, donc $P(X = k) = P(X \leqslant k) - P(X \leqslant k-1) = (1-q^k)^3 - (1-q^{k-1})^3 = 1 - 3q^k + 3q^{2k} - q^{3k} - 1 + 3q^{k-1} - 3q^{2k-2} + q^{3k-3} = 3q^{k-1}(1-q) - 3q^{2(k-1)}(1-q^2) + q^{3(k-1)}(1-q^3)$.

5. L'espérance existe, son calcul fait intervenir plusieurs séries géométriques dérivées :

$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} 3(1-q)kq^{k-1} - 3(1-q^2)k(q^2)^{k-1} + (1-q^3)k(q^3)^{k-1} = 3\frac{1-q}{(1-q)^2} - 3\frac{1-q^2}{(1-q^2)^2} + \frac{1-q^3}{(1-q^3)^2} = \frac{3}{1-q} - \frac{3}{1-q^2} + \frac{1}{1-q^3}$. Dans le cas qui nous intéresse ici, $q = \frac{5}{6}$, donc $E(X) = \frac{3}{1-\frac{5}{6}} - \frac{3}{1-\frac{25}{36}} + \frac{1}{1-\frac{125}{216}} = 18 - \frac{108}{11} + \frac{216}{81} \simeq 10.85$.

Exercice 6 (EDHEC 1998) (***)

1. L'évenement $X = 2$ se produit si on tire Pile puis Face aux deux premiers lancers, ce qui donne une probabilité $\frac{1}{4}$.
   (a) Pour avoir $X = 3$, il faut avoir Pile et Face aux deuxième et troisième lancers, ce qui réduit les possibilités aux tirages PPF et FPF, pour lesquels on a effectivement $X = 3$. On a donc $P(X = 3) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$.
   (b) Constatons qu'à partir du moment où on obtient un Pile, le premier Face qui apparaitra sera précédé d'un Pile. Les seuls possibilités d'avoir $X = k$ sont donc $\underbrace{P\dots P}_{k-1}F$; $F\underbrace{P\dots P}_{k-2}F$; $FF\underbrace{P\dots P}_{k-3}F$; $\dots$; $\underbrace{F\dots F}_{k-2}PF$, soit $k-1$ tirages possibles (le nombre de Pile varie en effet entre 1 et $k-1$).
   (c) Chacun de ces $k-1$ tirages ayant une probabilité $\frac{1}{2^k}$, on a $P(X = k) = \frac{k-1}{2^k}$.
   (d) L'événement $X = 0$ se produit si aucun des événements $X = k$ ne se produit. Autrement dit, les événements $X = k$ étant incompatibles, on a $P(X = 0) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k)$ (cette dernière série converge nécessairement car elle est majorée par 1). Or, $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k-1}{2^k} = \frac{1}{4}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{k-1}{2^{k-2}} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{4} \times 4 = 1$. On en déduit que $P(X = 0) = 0$. L'événement $X = 0$ est négligeable.

2. (a) En effet, si le premier Face apparait avant le $k$ème lancer, on aura un PF avant le lancer k, donc $X < k$. Et si on n'a pas de Face du tout, naturellement, $X > k$.
   (b) On utilise la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements $(P1, F1)$: $P(X = k) = P((X = k) \cap P_1) + P((X = k) \cap F_1)$. D'après la remarque précédente, le premier terme vaut $\frac{1}{2^k}$ puisqu'il y a un seul tirage possible. Par contre, pour le deuxième terme, on peut oublier le premier tirage puisque c'est un face, et regarder si on obtient un PF sur les $k-1$ derniers tirages, ce qui se produit avec probabilité $P(X = k-1)$, d'où la relation annoncée.
   (c) Si on multiplie l'égalité précédente par 2^k, on obtient $2^kP(X = k) = 1 + 2^{k-1}P(X = k_1)$, soit $u_k = 1 + u_{k-1}$. La suite u_k est donc bien arithmétique, de raison 1 et de premier terme $u_1 = 0$. On a donc $u_k = k - 1$. On en déduit que $P(X = k) = \frac{u_k}{2^k} = \frac{k-1}{2^k}$.

3. C'est un calcul de somme géométrique dérivée seconde, qui converge donc :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k(k-1)}{2^k} = \frac{1}{4}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{k(k-1)}{2^{k-2}} = \frac{1}{4}\frac{2}{(1-\frac{1}{2})^3} = 4.$$

Sujet d'annales : Best Of EDHEC

ECE3 Lycée Carnot

9 mai 2011

Exercice 1 (exercice 1 EDHEC 2008)

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{1}{1+e^x} + nx$.
On appelle (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 5 cm.

1. (a) Déterminer, pour tout réel x, $f_n'(x)$ et $f''(x)$.
   (b) En déduire que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$ ainsi que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$.
   (b) Montrer que les droites (D_n) et (D_n') d'équations $y = nx$ et $y = nx + 1$ sont asymptotes de (C_n).
   (c) Déterminer les coordonnées du seul point d'inflexion, noté A_n, de (C_n).
   (d) Donner l'équation de la tangente (T_1) à la courbe (C_1) en A_1, puis tracer sur un même dessin les droites (D_1), (D_1') et (T_1) ainsi que l'allure de la courbe (C_1).
3. (a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une seule solution sur $\mathbb{R}$, notée u_n.
   (b) Montrer que l'on a, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $-\dfrac{1}{n} < u_n < 0$.
   (c) En déduire la limite de la suite (u_n).
   (d) En revenant à la définition de u_n, montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n}$.

Exercice 2 (exercice 2 EDHEC 2009)

Dans cet exercice, p désigne un réel de $]0;1[$ et on note $q = 1 - p$.
On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant toutes deux la même loi géométrique de paramètre p.

1. On pose $Z = \inf(X, Y)$ et on admet que Z est une variable aléatoire, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
   On rappelle que, pour tout entier naturel k, on a l'égalité $(Z > k) = (X > k) \cap (Y > k)$.
   (a) Pour tout entier naturel k, calculer $P(Z > k)$.
   (b) Établir que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 1, on a
   $P(Z = k) = P(Z > k - 1) - P(Z > k)$.
   (c) En déduire que Z suit la loi géométrique de paramètre $(1 - q^2)$.

2. On définit la variable aléatoire T de la façon suivante

   Pour tout ω de Ω tel que $X(\omega)$ est un entier naturel pair, on pose $T(\omega) = \dfrac{X(\omega)}{2}$, et, pour tout ω de Ω tel que $X(\omega)$ est un entier naturel impair, on pose $T(\omega) = \dfrac{1+X(\omega)}{2}$. On admet que T est une variable aléatoire, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

   (a) Montrer que T prend des valeurs entières non nulles.

   (b) Réciproquement, justifier que tout entier naturel k non nul est élément de $T(\Omega)$ et en déduire que $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

   (c) Exprimer l'événement $(T = k)$ en fonction de certains évènements $(X = i)$ puis montrer que T suit la même loi que Z.

3. On rappelle que la fonction random renvoie de façon uniforme un réel aléatoire élément de $[0;1[$. Compléter le programme suivant pour que, d'une part, il simule les lancers d'une pièce donnant Pile avec la probabilité p et calculer la valeur prise par la variable aléatoire X égale au rang du premier Pile obtenu lors de ces lancers (X suit bien la loi géométrique de paramètre p) et pour que, d'autre part, il calcule et affiche la valeur prise par T, la variable aléatoire T ayant été définie dans la deuxième question.

```
Program edhec2009 ;
Var x,t,lancer :integer ;
Begin
     Randomize ; x :=0 ;
     Repeat lancer :=random ; x :=....... ; until(lancer <=p) ;
     If(x mod 2=0) then .... else.... ;
     Writeln(t) ;
End.
```

Exercice 3 (exercice 3 EDHEC 2002)

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x > 0$, $f(x) = \dfrac{-x \ln x}{1+x^2}$ et $f(0) = 0$.

1. (a) Vérifier que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

   (b) Étudier le signe de $f(x)$.

2. Montrer que l'on définit bien une fonction F sur $\mathbb{R}^+$, en posant $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$.

3. Pour tout x de $\mathbb{R}^+$, on pose $g(x) = F(x) - x$.

   (a) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et que, pour $x > 0$, on peut écrire $g'(x)$ sous la forme $g'(x) = \dfrac{-xh(x)}{1+x^2}$.

   (b) Étudier les variations de h, puis en déduire son signe (on donne $\ln\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \simeq -0,48$).

   (c) En déduire le signe de $g(x)$.

4. On définit la suite (u_n) par la donnée de son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence, valable pour tout entier n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = F(u_n)$.

   (a) Établir par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$.

   (b) Montrer, en utilisant le résultat de la troisième question, que (u_n) est décroissante.

   (c) En déduire que la suite (u_n) converge et donner $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Problème (problème EDHEC 2005)

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O. Au départ, le mobile est à l'origine.
Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n, alors, à l'instant $n+1$ il sera sur le point d'abscisse $k+1$ avec la probabilité p ($0 < p < 1$) ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $1-p$.
Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n et l'on a donc $X_0 = 0$. On admet que, pour tout n de $\mathbb{N}$, X_n est définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Par ailleurs, on note T l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ).
Par exemple, si les abscisses successives du mobile après son départ sont 0, 0, 1, 2, 0, 0, 1, alors on a $T = 1$. Si les abscisses successives sont 1, 2, 3, 0, 0, 1, alors on a $T = 4$. On admet que T est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. (a) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, exprimer l'évènement $(T = k)$ en fonction d'évènements mettant en jeu certaines des variables X_i.
   (b) Donner la loi de X_1.
   (c) En déduire $P(T = k)$ pour tout k de $\mathbb{N}^*$, puis reconnaître la loi de T.
2. (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $X_n(\Omega) = \{0, \ldots, n\}$.
   (b) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, utiliser le système complet d'évènements $(X_{n-1} = k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ pour montrer que $P(X_n = 0) = 1 - p$.
3. (a) Établir que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall k \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$, $P(X_{n+1} = k) = pP(X_n = k-1)$.
   (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in \{0, 1, 2 \ldots, n-1\}$, $P(X_n = k) = p^k(1-p)$. En déduire également la valeur de $P(X_n = n)$. Donner une explication probabiliste de ce dernier résultat.
   (c) Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) = 1$.
4. Dans cette question et dans cette question seulement, on prend $p = \dfrac{1}{3}$.
   On rappelle que `random(3)` renvoie au hasard un entier de $\{0, 1, 2\}$. Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire étudiée et affiche la valeur prise par X_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
Program edhec2005 ;
Var k, n, u, X : integer ;
begin
     Readln(n) ;
     Randomize ;
     X :=0 ;
     For k :=1 to n do
     begin
          u := random(3) ;
          if (u = 2) then X :=......... ;
               else X :=....... ;
          end ;
     Writeln (X) ;
end.
```

5. (a) Montrer que $\forall n \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} = \frac{(n-1)p^n - np^{n-1} + 1}{(1-p)^2}$.

(b) En déduire que $E(X) = \dfrac{p(1-p^n)}{1-p}$.

6. (a) Montrer, en utilisant la question 3.a), que $\forall n \in \mathbb{N}$, $E(X_{n+1}^2) = p(E(X_n^2) + 2EX_n) + 1)$.

(b) Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = E(X_n^2) + (2n-1)\dfrac{p^{n+1}}{1-p}$.

Montrer que $u_{n+1} = pu_n + \dfrac{p(1+p)}{1-p}$.

(c) En déduire l'expression de u_n, puis celle de $E(X_n^2)$ en fonction de p et n.

(d) Montrer enfin que $V(X_n) = \dfrac{p}{(1-p)^2}(1-(2n+1)p^n(1-p) - p^{2n+1})$.

Corrigé du sujet Best Of EDHEC

Exercice 1

1. (a) La fonction f_n est C^∞ sur $\mathbb{R}$ puisque le dénominateur du quotient $\dfrac{1}{1+e^x}$ ne s'annule jamais, et $f_n'(x) = -\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2} + n\,;\ f_n''(x) = \dfrac{-e^x(1+e^x)^2 + e^x \times 2e^x(1+e^x)}{(1+e^x)^4} = \dfrac{-e^x - e^{2x} + 2e^x}{(1+e^x)^3} = \dfrac{e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}$.

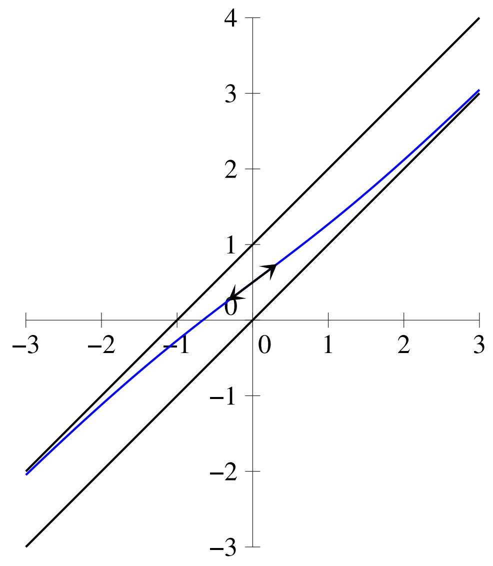
   (b) Au vu de l'expression obtenue pour f'', la fonction f' est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$, admettant donc un minimum en 0 de valeur $f'(0) = n - \dfrac{1}{4}$. Comme n est un entier naturel non nul, f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$, et f est bien strictement croissante.

2. (a) Puisque, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+e^x} = 1$, on a $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty$. De même, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+e^x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$

   (b) Puisque $f_n(x) - nx = \dfrac{1}{1+e^x}$, les calculs de limites précédents prouvent que $y = nx$ est asymptote oblique à la courbe en $+\infty$, et $y = nx+1$ en $-\infty$.

   (c) Le seul point d'annulation de f_n'' a pour abscisse 0, et ordonnée $f_n(0) = \dfrac{1}{2}$.

   (d) Comme $f_1(0) = \dfrac{1}{2}$ et $f_1'(0) = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$, la tangente a pour équation $y = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{2}$. L'allure des différentes courbes est la suivante :



3. (a) La fonction étant strictement croissante et ayant pour limites $-\infty$ et $+\infty$, elle est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. L'équation $f_n(x) = 0$ a donc une seule solution.

   (b) On a déjà vu plus haut que $f_n(0) = \dfrac{1}{2} > 0\,;\ f_n\left(-\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{1+e^{-\frac{1}{n}}} - 1 = -\dfrac{e^{\frac{1}{n}}}{1+e^{\frac{1}{n}}} < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la valeur d'annulation de f_n se trouve donc entre $-\dfrac{1}{n}$ et 0.

   (c) Une application du théorème des gendarmes permet de conclure que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

(d) Puisque u_n converge vers 0, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+e^{u_n}} = \frac{1}{2}$. Or, par définition, $\frac{1}{1+e^{u_n}} = -nu_n$. On a donc $\lim_{n\to+\infty} -nu_n = \frac{1}{2}$, soit $u_n \sim -\frac{1}{2n}$.

Exercice 2

1. (a) Par indépendance des variables X et Y, $P(Z > k) = P(X > k)P(Y > k)$. Or, pour une variable de loi géométrique, $P(X > k) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} pq^{i-1} = pq^k \sum_{i=0}^{+\infty} q^i = \frac{pq^k}{1-q} = q^k$. On en déduit que $P(Z > k) = (q^k)^2 = q^{2k}$.
   (b) En effet, $(Z > k-1) = (Z > k) \cup (Z = k)$, union disjointe d'évènement, donc $P(Z > k-1) = P(Z > k) + P(Z = k)$, d'où la formule demandée.
   (c) On a donc $P(Z = k) = q^{2(k-1)} - q^{2k} = q^{2(k-1)}(1-q^2)$, ce qui correspond bien à une loi géométrique de paramètre q^2.
2. (a) En effet, si X est paire, $\frac{X}{2}$ est un entier naturel non nul (X prend des valeurs strictement positives), et si X est impaire, $\frac{X+1}{2}$ est entier aussi.
   (b) Pour tout entier strictement positif k, la variable T prend la valeur k quand $X = 2k$.
   (c) Il y a deux possibilités pour avoir $T = k$: soit $X = 2k$, soit $X = 2k-1$ (qui est bien impair). Donc $(T = k) = (X = 2k) \cup (X = 2k-1)$ (union d'évènements disjoints), et $P(T = k) = pq^{2k-1} + pq^{2k-2} = pq^{2k-2}(1+q) = (1-q)(1+q)q^{2(k-1)} = (1-q^2)q^{2(k-1)}$. On retrouve la même loi que pour Z.
3. ```
   PROGRAM edhec2009;
   VAR x,t,lancer : integer;
   Begin
   Randomize;
   x := 0;
   REPEAT lancer := random;
   x := x+1;
   UNTIL lancer<=p;
   IF (x mod 2=0) THEN t := x/2 else t := (1+x)/2;
   WriteLn(t);
   End.
   ```

Exercice 3

1. (a) Puisque $\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ (résultat classique de croissance comparée), on aura $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, ce qui prouve la continuité de f en 0. La fonction étant par ailleurs continue sur $]0; +\infty[$ par théorèmes généraux, elle est continue sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) Le dénominateur étant toujours positif, et x également, la fonction est du signe de $-\ln(x)$, soit positive sur $[0; 1]$ et négative sur $[1; +\infty[$.
2. Puisque f est continue sur $[0; x]$ lorsque $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction F est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.
3. (a) La fonction F étant la primitive de f qui s'annule en 0, elle est dérivabke de dérivée f. La fonction g est donc dérivable, et $g'(x) = f(x) - 1 = \frac{-x\ln x - 1 - x^2}{1+x^2} = -\frac{xh(x)}{1+x^2}$, en posant $h(x) = \ln x + \frac{1}{x} + x$ (fonction définie sur $]0; +\infty[$).
   ```

(b) La fonction h est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;+\infty[$, de dérivée $h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + 1 = \frac{x^2-x+1}{x^2}$. Le numérateur de cette dérivée a pour discriminant $\Delta = 1+4 = 5$, et admet donc pour racines $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Puisqu'on ne s'intéresse ici qu'à l'intervalle $]0;+\infty[$, la valeur x_1 nous concerne peu, et h est décroissante sur $]0;x_2]$ puis croissante sur $[x_2;+\infty[$. Elle atteint son minimum en x_2, de valeur $h(x_2) = \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) + \frac{2}{\sqrt{5}-1} + \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Comme $x_2 > \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$, la valeur approchée du ln donnée dans l'énoncé suffit à obtenir $h(x_2) > 0$. La fonction h est donc strictement positive sur $]0;+\infty[$.

(c) En revenant au calcul effectué pour g', on constate que la fonction g est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$. Comme $g(0) = F(0) = 0$, elle est donc négative sur $[0;+\infty[$. Autrement dit, $\forall x > 0$, $F(x) < x$.

4. (a) Prouvons donc par récurrence la propriété $P_n : u_n \in [0;1]$. C'est évidemment vrai pour $u_0 = 1$. Supposons-le pour u_n, et constatons que la fonction F est croissante sur l'intervalle $[0;1]$, puisque sa dérivée f y est positive (question 1.*b*). On a donc $F(0) \leqslant F(u_n) \leqslant F(1)$. Or, $F(0) = 0$, et $F(1) < 1$ d'après la question précédente. On en déduit que $0 \leqslant u_{n+1} < 1$, ce qui prouve P_{n+1} et achève la récurrence.

(b) On a $u_{n+1} - u_n = F(u_n) - u_n = g(u_n) \leqslant 0$ au vu de la question 4.*c* donc la suite (u_n) est décroissante.

(c) La suite étant décroissante minorée par 0, elle converge. Sa limite est un point fixe de la fonction F, qui ne peut être que 0 puisqu'on a vu que, pour $x > 0$, $F(x) < x$. Conclusion : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Problème

1. (a) On peut par exemple écrire $(T = k) = (X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap \cdots \cap (X_{k-1} = 1) \cap (X_k = 0)$.

(b) La variable X_1 ne peut prendre que les valeurs 0 et 1, avec pour probabilités respectives $1-p$ et p, donc $X_1 \sim \mathcal{B}(1,p)$.

(c) Au vu de la formulation du *a*, et la formule des probabilités composées, $P(T = k) = p^k \times (1-p)$. On reconnait ici une loi géométrique de paramètre $1-p$.

2. (a) Prouvons donc le résultat par récurrence. Pour $n = 0$ c'est évident puisque $X_0 = 0$. Supposons que $X_n(\Omega) = \{0;1;\ldots;n\}$, alors notre mobile peut, pour son n-ème déplacement, avancer d'une unité sur l'axe et se retrouver à une abscisse comprise entre 1 et $n+1$; ou retourner à l'abscisse 0. Ce qui donne $X_{n+1}(\Omega) = \{0;1;\ldots;n+1\}$.

(b) C'est un peu le marteau-pilon pour écraser une mouche, mais via la formule des probabilités totales, $P(X_n = 0) = \sum_{k=0}^{n-1} P_{X_{n-1}=k}(X_n = 0) \times P(X_{n-1} = k)$? Les probabilités conditionnelles sont toutes égales à $1-p$, donc $P(X_n = 0) = (1-p)\sum_{k=0}^{n-1} P(X_{n-1} = k) = 1-p$ (la dernière valant 1, on ajoute les probabilités de toutes les valeurs prises par X_{n-1}).

3. (a) On peut utiliser à nouveau les probabilités totales, ou constater plus simplement que pour se trouver à l'abscisse k après n déplacements, il faut nécessairement avoir été à l'abscisse $k-1$ après $n-1$ déplacements, et avoir avancé d'une case (probabilité conditionnelle p).

(b) Effectuons une petite récurrence : pour $n = 1$, on a déjà étudié la loi de X_1, qui correspond bien aux formules données. Supposons les formules correctes au rang n, alors $\forall k \in \{1;2;\ldots;n\}$, $P(X_{n+1} = k) = pP(X_n = k-1) = P \times p^{k-1}(1-p) = p^k(1-p)$ (on applique l'hypothèse de récurrence à l'entier $k-1$ appartenant bien à $\{0;1;\ldots;n-1\}$.

De plus, on a déjà vu que $P(X_n = 0) = 1 - p$, ce qui correspond à la formule donnée. Enfin, constatons que d'après la question précédente, $P(X_{n+1} = n + 1) = pP(X_n = n)$. Autrement dit, la suite $(P(X_n = n))$ est géométrique de raison p et de premier terme $P(X_0 = 0) = 1$. ON en déduit que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(X_n = n) = p^n$. Cela n'a rien de surprenant puisque cela correspond à la situation où on a avancé à chacun des n déplacements.

(c) Calculons $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) = \sum_{k=0}^{n-1} p^k(1-p) + p^n = (1-p)\frac{1-p^n}{1-p} + p^n = 1$.

4. Program edhec2005 ;

```
Var k, n, u, X : integer ;
begin
Readln(n) ;
Randomize ;
X := 0 ;
For k := 1 to n do
begin
u := random(3) ;
if (u = 2) then X := X+1 ;
else X :=0 ;
end ;
Writeln (X) ;
end.
```

5. (a) Une méthode différente de celles déjà vues pour ce calcul classique : faire passer le dénominateur de la fraction de droite à gauche et développer : $\displaystyle (1-p)^2 \sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} - 2\sum_{k=1}^{n-1} kp^k + \sum_{k=1}^{n-1} kp^{k+1} = \sum_{k=0}^{n-2}(k+1)p^k - 2\sum_{k=1}^{n-1} kp^k + \sum_{k=2}^{n}(k-1)p^k = \sum_{k=0}^{n-2} kp^k + \sum_{k=0}^{n-2} p^k - 2\sum_{k=1}^{n-1} kp^k + \sum_{k=2}^{n} kp^k - \sum_{k=2}^{n} p^k$. Plein de choses se télescopent et il reste $1 + p - p^{n-1} - p^n - p - (n-1)p^{n-1} + np^n = (n-1)p^n - np^{n-1} + 1$, exactement ce qu'on doit obtenir au numérateur de droite !

(b) En effet, $\displaystyle E(X_n) = \sum_{k=0}^{n} kP(X_n = k) = (1-p)\sum_{k=1}^{n-1} kp^k + np^n = p \times \frac{(n-1)p^n - np^{n-1} + 1}{1-p} + np^n = \frac{-p^{n+1} + p}{1-p} = \frac{p(1-p^n)}{1-p}$.

6. (a) Par définition, $\displaystyle E(X_{n+1}^2) = \sum_{k=0}^{n+1} k^2 P(X_{n+1} = k) = \sum_{k=1}^{n+1} k^2 pP(X_n = k-1) = p\sum_{k=0}^{n}(k+1)^2 P(X_n = k)$ en décalant l'indice. Il ne reste plus qu'à développer sans subtilité la somme : $\displaystyle E(X_{n+1}^2) = p\left(\sum_{k=0}^{n} k^2 P(X_n = k) + 2kP(X_n = k) + P(X_n = k)\right) = p(E(X_n^2) + 2E(X_n) + 1)$.

(b) Calculons donc :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= E(X_{n+1}^2) + (2n+1)\frac{p^{n+2}}{1-p} \\
&= pE(X_n^2) + 2pE(X_n) + p + (2n+1)\frac{p^{n+2}}{1-p} \\
&= pE(X_n^2) + \frac{2p^2(1-p^n)}{1-p} + p + \frac{(2n+1)p^{n+2}}{1-p} \\
&= pE(X_n^2) + \frac{2p^2 - 2p^{n+2} + p - p^2 + (2n+1)p^{n+2}}{1-p}. \\
&= pE(X_n^2) + \frac{p + p^2 + (2n-1)p^{n+2}}{1-p} \\
&= E(X_n^2) + \frac{p(1+p)}{1-p} + p\frac{(2n-1)p^{n+1}}{1-p} \\
&= pu_n + \frac{p(1+p)}{1-p}
\end{aligned}$$

(c) La suite (u_n) est donc arithmético-géométrique, d'équation de point fixe $x = px + \frac{p(1+p)}{1-p}$, ce qui donne $x = \frac{p(1+p)}{(1-p)^2}$. On pose donc $v_n = u_n - \frac{p(1+p)}{(1-p)^2}$, et on constate que $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{p(1+p)}{(1-p)^2} = pu_n + \frac{p(1+p)}{1-p} - \frac{p(1+p)}{(1-p)^2} = pu_n + \frac{p(1-p^2) - p(1+p)}{(1-p)^2} = pu_n + \frac{-p^2(1+p)}{(1-p)^2} = p\left(u_n - \frac{p(1+p)}{(1-p)^2}\right) = pv_n$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison p et de premier terme $v_0 = pu_0 - \frac{p(1+p)}{(1-p)^2} = -\frac{p}{1-p} - \frac{p(1+p)}{(1-p)^2} = -\frac{p(1-p)+p(1+p)}{(1-p)^2} = -\frac{2p}{(1-p)^2}$. On a donc $v_n = -\frac{2p^{n+1}}{(1-p)^2}$, et $u_n = \frac{p(1+p) - 2p^{n+1}}{(1-p)^2}$.
Reste maintenant à calculer
$E(X_n^2) = \frac{p(1+p) - 2p^{n+1}}{(1-p)^2} - (2n-1)\frac{p^{n+1}}{1-p} = \frac{p + p^2 - 2p^{n+1} - (2n-1)p^{n+1} + (2n-1)p^{n+2}}{(1-p)^2}$
$= \frac{p + p^2 - (2n+1)p^{n+1} + (2n-1)p^{n+2}}{(1-p)^2}$.

(d) Appliquons pour finir la formule de König-Huygens :
$V(X_n) = E(X_n^2) - E(X_n)^2 = \frac{p + p^2 - (2n+1)p^{n+1} + (2n-1)p^{n+2}}{(1-p)^2} - \frac{p^2(1-p^n)^2}{(1-p)^2} = \frac{p + p^2 - (2n+1)p^{n+1} + (2n-1)p^{n+2} - p^2 + 2p^{n+2} - p^{2n+2}}{(1-p)^2} =$
$\frac{p - (2n+1)p^{n+1} + (2n+1)p^{n+2} - p^{2n+2}}{(1-p)^2} = \frac{p(1 - (2n+1)(p^n - p^{n+1}) - p^{2n+1})}{(1-p)^2}$, ce qui correspond à la formule de l'énoncé.

Feuille d'exercices n°23 : Polynômes

ECE3 Lycée Carnot

24 mai 2011

Exercice 1 (*)

Soit P et Q les deux polynômes définis par $P(X) = 2X^3 + 5X - 1$ et $Q(X) = -X^2 + 3X$. Déterminer chacun des polynômes suivants : $P+Q$; PQ ; $P^2(X)$; $P(X^2)$; $P \circ Q$; $Q \circ P$; $3P^3Q - Q \circ P^2$.

Exercice 2 (*)

Déterminer le degré et le coefficient dominant de chacun des polynômes suivants : $P(X) = (X+2)^n - (X+3)^n$; $Q(X) = \prod_{k=0}^{k=n} (2X - k)$; $R(X) = \prod_{k=0}^{k=n} (X-2)^k$.

Exercice 3 (* à ***)

Déterminer tous les polynômes réels vérifiant chacune des conditions suivantes :

1. $P(1) = 0$ et $P(2) = 0$
2. $P(1) = 1$ et $P(2) = 2$
3. $XP' = P$
4. $(X^2 + 1)P'' = 6P$
5. $P(0)0$; $P(1) = 1$; $P'(0) = 2$ et $P'(1) = 3$.

Exercice 4 (**)

Soit $P(X) = X^3 - 2X^2 - 5X + 6$.

1. Déterminer une racine évidente du polynôme P.
2. Factoriser P sous la forme $(X+2)Q(X)$, où Q est un polynôme de degré 2.
3. En déduire le tableau de signe de P sur $\mathbb{R}$.
4. Résoudre les inéquations $(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 - 5 \ln x + 6 > 0$ et $e^{2x} - 2e^x \leqslant 5 - 6e^{-x}$

Exercice 5 (**)

Factoriser les polynômes suivants et dresser leur tableau de signe sur $\mathbb{R}$: $P(X) = -X^3 - 3X^2 + 6X + 8$; $Q(X) = X^3 - 6X^2 + 13X - 10$.

Exercice 6 (* à **)

Dans chacun des cas suivants, effectuer la division euclidienne de P par Q.

1. $P(X) = 3X^3 - 5X^2 + X + 2$ et $Q(X) = X - 2$
2. $P(X) = 1 + 6X^2 + 4X^3 - 5X^4$ et $Q(X) = X^2 - 5X + 3$.
3. $P(X) = X^5 - 7X^4 - X^2 - X + 9$ et $Q(X) = X^2 - 5X + 4$.
4. $P(X) = X^{n+2} - 3X^n + 2X + 3$ et $Q(X) = X^2 - 3$.

Exercice 7 (* à ***)

Factoriser le plus possible chacun des polynômes suivants :

1. $P(X) = 2X^4 - 3X^2 - 2$
2. $P(X) = X^8 + X^4 + 1$
3. $P(X) = X^9 + X^6 + X^3 + 1$
4. $P(X) = (1 + X)^3 + 8X^3$

Exercice 8 (**)

Déterminer un polynôme P de degré 3 vérifiant $P(X+1) - P(X) = X^2$. En déduire une nouvelle façon de prouver la formule bien connue pour $\sum_{k=0}^{k=n} k^2$.

En utilisant une méthode similaire, déterminer une jolie formule pour $\sum_{k=0}^{k=n} k^4$ (attention, il y a du calcul en perspective).

Exercice 9 (***)

Déterminer tous les polynômes P de degré 3 tels que $(X-1)^2$ divise $P - 1$ et $(X+1)^2$ divise $P + 1$.

Exercice 10 (***)

Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe un unique polynôme P vérifiant $P' - P = X^n$, et exprimer ses coefficients à l'aide de factorielles.

Corrigé de la feuille d'exercices n°23

Exercice 1 (*)

On obtient plus ou moins péniblement :

- $P + Q = 2X^3 - X^2 + 8X - 1$
- $PQ = -2X^5 + 6X^4 - 5X^3 + 16X^2 - 3X$
- $P^2 = (2X^3 + 5X - 1)^2 = 4X^6 + 25X^2 + 1 + 20X^4 - 4X^3 - 10X = 4X^6 + 20X^4 - 4X^3 + 25X^2 - 10X + 1$
- $P(X^2) = 2(X^2)^3 + 5(X^2) - 1 = 2X^6 + 5X^2 - 1$
- $P \circ Q = 2(-X^2 + 3X)^3 + 5(-X^2 + 3X) - 1 = -2X^6 + 18X^5 - 54X^4 + 54X^3 - 5X^2 + 15X - 1$
- $Q \circ P = -(2X^3 + 5X - 1)^2 + 3(2X^3 + 5X - 1) = -(4X^6 + 20X^4 - 4X^3 + 25X^2 - 10X + 1) + 6X^3 + 15X - 3 = -4X^6 - 20X^4 + 10X^3 - 25X^2 + 25X - 4$
- $3P^3Q - Q \circ P^2 = 3(2X^3 + 5X - 1)^3(-X^2 + 3X) + (4X^6 + 20X^4 - 4X^3 + 25X^2 - 10X + 1)^2 - 3(4X^6 + 20X^4 - 4X^3 + 25X^2 - 10X + 1)$
  $= (8X^9 + 125X^3 - 1 + 60X^7 + 150X^5 - 12X^6 + 6X^3 - 75X^2 + 15X - 60X^4)(-3X^2 + 9X) + (16X^{12} + 400X^8 + 16X^6 + 625X^4 + 100X^2 + 1 + 160X^{10} - 32X^9 + 200X^8 - 80X^7 + 8X^6 - 160X^7 + 1\,000X^6 - 400X^5 + 40X^4 - 200X^5 + 80X^4 - 8X^3 - 500X^3 + 50X^2 - 20X) - 12X^6 - 60X^4 + 12X^3 - 75X^2 + 30X - 3$
  $= (8X^9 + 60X^7 - 12X^6 + 150X^5 - 60X^4 + 131X^3 - 75X^2 + 15X - 1)(-3X^2 + 9X) + 16X^{12} + 160X^{10} - 32X^9 + 600X^8 - 240X^7 + 1\,012X^6 - 600X^5 + 685X^4 - 496X^3 + 75X^2 + 10X - 2$
  $= (-24X^{11} + 72X^{10} - 180X^9 + 540X^8 + 36X^8 - 108X^7 - 450X^7 + 1\,350X^6 + 180X^6 - 540X^5 - 393X^5 + 1\,179X^4 + 225X^4 - 675X^3 - 45X^3 + 135X^2 + 3X^2 - 9X) + 16X^{12} + 160X^{10} - 32X^9 + 600X^8 - 240X^7 + 1\,012X^6 - 600X^5 + 685X^4 - 496X^3 + 75X^2 + 10X - 2$
  $= 16X^{12} - 24X^{11} + 232X^{10} - 212X^9 + 1\,176X^8 - 798X^7 + 2\,542X^6 - 1\,533X^5 + 2\,089X^4 - 1\,216X^3 + 213X^2 + X - 2$
  Calcul garanti fait main, et tout de même (j'avoue) vérifié ensuite à la machine, il y avait une toute petite erreur...

Exercice 2 (*)

Si on développe le polynôme P à l'aide de la formule du binôme (mais si, un peu de courage), on obtient $P(X) = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} 2^{n-k} X^k - \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} 3^{n-k} X^k = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} (2^{n-k} - 3^{n-k}) X^k$. Or, $2^{n-k} - 3^{n-k}$ vaut 0 lorsque $k = n$ (mais ne s'annule jamais pour les autres valeurs de k). Le polynôme P est donc en fait de degré $n - 1$, et de coefficient dominant $\binom{n}{n-1}(2^{n-1} - 3^{n-1}) = n(2^{n-1} - 3^{n-1})$.

Le polynôme Q est un produit de $n + 1$ polynômes de degré 1, il est donc de degré $n + 1$. Son coefficient dominant vaut 2^{n+1} (on l'obtient simplement en faisant le produit des coefficients dominants de tous les facteurs).

Le polynôme R est un produit de $n + 1$ polynômes, dont l'un est un polynôme constant (pour $k = 0$) et tous les autres sont de degré 1 ; il est donc de degré n. Son coefficient dominant vaut 1.

Exercice 3 (* à ***)

1. Le polynôme P est donc factorisable par $X - 1$ et par $X - 2$, c'est-à-dire que $P = (X - 1)(X - 2)Q$, avec $Q \in \mathbb{R}[X]$.
2. Il suffit de constater que les deux conditions données reviennent à dire que $P(X) - X$ vérifie les conditions de la question 1. Autrement dit, on a $P(X) - X = (X - 1)(X - 2)Q(X)$, soit $P(X) = X + (X - 1)(X - 2)Q(X)$, avec toujours $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$.

3. Si $P(X) = \sum_{k=0}^{k=n} a_k X^k$, on aura $P'(X) = \sum_{k=1}^{k=n} k a_k X^{k-1}$, donc $XP'(X) = \sum_{k=1}^{k=n} k a_k X^k$. Par identification, on aura $XP' = P$ si $a_0 = 0$ et, $\forall k \in \{1; \dots; n\}$, $a_k = k a_k$. Autrement dit, a_1 peut valoir n'importe quoi, mais tous les autres coefficients doivent être nuls. Celà revient à dire que P est de la forme $P = aX$, avec $a \in \mathbb{R}$.
4. Constatons pour commencer que le polynôme nul et solution de l'équation proposée. Intéressons-nous ensuite au degré d'un polynôme P vérifiant la condition demandée : si le terme dominant de P est de la forme $a_n X^n$ (avec $a_n \neq 0$), alors celui de P'' sera $n(n-1)a_n X^{n-2}$, donc celui de $(X^2+1)P''$ sera égal à $n(n-1)a_n X^n$ (tous les autres termes étant de degré inférieur). L'égalité demandée implique donc en particulier que $n(n-1)a_n X^n = 6 a_n X^n$, c'est-à-dire que $n(n-1) = 6$, ou encore $n^2 - n - 6 = 0$. Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 1 + 24 = 25$, et admet deux solutions $n_1 = \frac{1-5}{2} = -2$ et $n_2 = \frac{1+5}{2} = 3$. Le degré d'un polynôme pouvant difficilement être égal à -2, notre P est donc de degré 3. Autrement dit, $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, donc $P'' = 6aX + 2b$, et $(X^2+1)P'' = 6aX^3 + 2bX^2 + 6aX + 2b$. Par identification, les coefficients du polynôme P doivent vérifier $6a = 6a$; $6b = 2b$; $6c = 6a$ et $6d = 2b$. On en déduit que $b = d = 0$, et $c = a$, a pouvant valoir n'importe quoi. Autrement dit, $P = a(X^3 + X)$, avec $a \in \mathbb{R}$
5. On peut constater à l'aide des deux premières conditions, de façon similaire à ce que nous avions fait au 2, que $P(X) - X$ admet 0 et 1 pour racines, et peut donc s'écrire sous la forme $X(X-1)Q(X)$. Autrement dit, on a $P(X) = X + X(X-1)Q(X)$. On en déduit que $P'(X) = 1 + (X-1)Q(X) + XQ(X) + X(X-1)Q'(X) = 1 + (2X-1)Q(X) + X(X-1)Q'(X)$. Les deux dernières conditions peuvent alors s'exprimer sous la forme $P'(0) = 1 - Q(0) = 2$, et $P'(1) = 1 + Q(1) = 3$, donc $Q(0) = -1$ et $Q(1) = 2$. Le polynôme $3X - 1$ prenant respectivement les valeurs -1 en 0 et 2 en 1, on peut constater que $Q(X) - (3X-1)$ a pour racines 0 et 1, autrement dit que $Q(X) = 3X - 1 + X(X-1)R(X)$. En reprenant l'expression précédente de P, on obtient donc $P(X) = X + X(X-1)(3X - 1 + X(X-1)R(X)) = X + (X^2 - X)(3X-1) + X^2(X-1)^2 R(X) = 2X - 4X^2 + 3X^3 + X^2(X-1)^2 R(X)$, avec $R \in \mathbb{R}[X]$. Une autre façon de voir les choses est de dire que les conditions données imposent que le reste de la division euclidienne de P par $X^2(X-1)^2$ soit égal à $2X - 4X^2 + 3X^3$.

Exercice 4 (**)

1. Il y a une racine très évidente qui est 1. On peut aussi constater (par exemple en jetant un oeil à l'énoncé de la question suivante) que -2 est racine de P : $P(-2) = -8 - 2 \times 4 - 5 \times (-2) + 6 = 0$.
2. On peut donc factoriser P sous la forme $P(X) = (X+2)Q(X) = (X+2)(aX^2 + bX + c) = aX^3 + (2a+b)X^2 + (2b+c)X + 2c$. Par identification, on obtient $a = 1$; $2a + b = -2$; $2b + c = -5$ et $2c = 6$, donc $a = 1$; $b = -4$ et $c = 3$, soit $P(X) = (X+2)(X^2 - 4X + 3)$.
3. Le deuxième facteur a pour discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4$ et pour racines $x_1 = \frac{4-2}{2} = 1$ (tiens, on a retrouvé notre autre racine évidente) et $x_2 = \frac{4+2}{2} = 3$. On a donc $P(X) = (X+1)(X-1)(X-3)$, d'où le tableau de signes suivant :

x		-2		1		3	
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

4. La première inéquation se ramène au tableau de signe précédent en posant $X = \ln x$. On en déduit que $X \in]-2; 1[\cup]3; +\infty[$, donc $\mathcal{S} =]e^{-2}; e[\cup]e^3; +\infty[$. Pour la deuxième, on peut tout multiplier par e^x (qui est toujours strictement positif) et tout passer à gauche pour obtenir $e^{3x} - 2e^{2x} - 5e^x + 6 \leqslant 0$, ce qui se ramène encore une fois au tableau précédent en posant cette fois-ci $X = e^x$ (ce qui suppose donc $X > 0$). On obtient $X \in [1; 3]$ (on peut oublier l'autre intervalle puisque $X \geqslant 0$, soit $\mathcal{S} = [0; \ln 3]$.

Exercice 5 (**)

Le polynôme P a pour racine évidente -1 : $P(-1) = 1 - 3 - 6 + 8 = 0$, donc P est factorisable par $X + 1$: $P(X) = (X + 1)(aX^2 + bX + c) = aX^3 + (a + b)X^2 + (b + c)X + c$. Par identification, on obtient $a = -1$; $a + b = -3$; $b + c = 6$ et $c = 8$, soit $a = -1$; $b = -2$ et $c = 8$. On a donc $P(X) = (X+1)(-X^2-2X+8)$. Le deuxième facteur a pour discriminant $\Delta = 4+32 = 36$, donc admet deux racines $x_1 = \dfrac{2-6}{-2} = 2$, et $x_2 = \dfrac{2+6}{-2} = -4$. On en déduit que $P(X) = -(X+1)(X-2)(X+4)$, d'où le tableau de signes suivant :

x		-4		-1		2	
$P(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Le polynôme Q a pour racine évidente 2 : $Q(2) = 8 - 24 + 26 - 10 = 0$, donc $Q(2) = (X - 2)(aX^2 + bX + c) = aX^3 + (b - 2a)X^2 + (c - 2b)X - 2c$. Par identification, $a = 1$; $b - 2a = -6$; $c - 2b = 13$ et $-2c = -10$, soit $a = 1$; $b = -4$ et $c = 5$. On a donc $Q(X) = (X - 2)(X^2 - 4X + 5)$. Le deuxième facteur a pour discriminant $\Delta = 16 - 20 = -4$, donc ledit facteur est toujours positif, et on a le tableau de signes suivant :

x		2	
$P(x)$	$-$	0	$+$

Exercice 6 (* à **)

1.

$$
\begin{array}{rrrrrrrr|l}
 & 3X^3 & - & 5X^2 & + & X & + & 2 & \quad X-2 \\ \cline{9-9}
- & (3X^3 & - & 6X^2) & & & & & 3X^2+X+3 \\
 & & & X^2 & + & X & + & 2 & \\
 & & - & (X^2 & - & 2X) & & & \\
 & & & & & 3X & + & 2 & \\
 & & & & - & (3X & - & 6) & \\
 & & & & & & & 8 &
\end{array}
$$

Conclusion : $3X^3 - 5X^2 + X + 2 = (X - 2)(3X^2 + X + 3) + 8$.

2.

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrr|l}
- & 5X^4 & + & 4X^3 & + & 6X^2 & & & + & 1 & & \quad X^2-5X+3 \\ \cline{12-12}
- & (-5X^4 & + & 25X^3 & - & 15X^2) & & & & & & -5X^2-21X-84 \\
 & & - & 21X^3 & + & 21X^2 & & & + & 1 & & \\
 & & - & (-21X^3 & + & 105X^2 & - & 63X) & & & & \\
 & & & & - & 84X^2 & + & 63X & + & 1 & & \\
 & & & & - & (-84X^2 & + & 420X & - & 252) & & \\
 & & & & & & - & 357X & + & 253 & &
\end{array}
$$

Conclusion : $-5X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 1 = (X^2 - 5X + 3)(-5X^2 - 21X - 84) - 357X + 253$ (eh oui, parfois, les résultats sont ignobles).

3.

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrr|l}
 & X^5 & - & 7X^4 & & & - & X^2 & - & X & + & 9 & X^2-5X+4 \\ \cline{13-13}
- & (X^5 & - & 5X^4 & + & 4X^3) & + & X^2) & & & & & X^3-2X^2-14X-63 \\
 & & - & 2X^4 & - & 4X^3 & - & X^2 & - & X & + & 9 & \\
 & & - & (-2X^4 & + & 10X^3 & - & 8X^2) & & & & & \\
 & & & & - & 14X^3 & + & 7X^2 & - & X & + & 9 & \\
 & & & & - & (-14X^3 & + & 70X^2 & - & 56X) & & & \\
 & & & & & & - & 63X^2 & + & 55X & + & 9 & \\
 & & & & & & - & (-63X^2 & + & 315X & - & 252) & \\
 & & & & & & & & - & 260X & + & 261 &
\end{array}
$$

Conclusion : $X^5 - 7X^4 - X^2 - X + 9 = (X^2 - 5X + 4)(X^3 - 2X^2 - 14X - 63) - 260X + 261$

4. C'est évident le piège idiot de la liste : on ne peut pas faire de division euclidienne si on ne connait pas la valeur de n, mais la division est en fait déjà écrite sous nos yeux en factorisant la première moitié de P par X^n : $X^{n+2} - 3X^n + 2X + 3 = X^n(X^2 - 3) + 2X + 3$. Comme le degré de $2X + 3$ est strictement inférieur à celui de $X^2 - 3$, on a bien effectué la division souhaitée.

Exercice 7 (* à ***)

1. En posant $Y = X^2$, on cherche d'abord à factoriser $2Y^2 - 3Y - 2$, trinôme de discriminant $\Delta = 9 + 16 = 25$, admettant pour racines $Y_1 = \dfrac{3-5}{4} = -\dfrac{1}{2}$ et $Y_2 = \dfrac{3+5}{4} = 2$. On en déduit que $2Y^2 - 3Y - 2 = 2\left(Y + \dfrac{1}{2}\right)(Y - 2) = (2Y + 1)(Y - 2)$, et ensuite que $P(X) = (2X^2+1)(X^2-2) = (2X^2+1(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})$ (le premier facteur ne peut pas se factoriser plus puisqu'il n'a pas de racine).
2. On pourrait avoir envie de poser $Y = X^4$ et procéder comme précédemment, mais un gros souci apparait rapidement : le trinôme obtenu n'a pas de racine. En fait, c'est pire que ça : on sait dès le départ que le polynôme de degré 8 initial n'a pas de racine puisqu'il est toujours strictement positif. Il est néanmoins factorisable (ce n'est pas contradictoire, il ne faut simplement pas s'attendre à obtenir des facteurs de degré 1) en étant un peu (beaucoup ?) astucieux : $P(X) = X^8 + X^4 + 1 = (X^8 + 2X^4 + 1) - X^4 = (X^4 + 1)^2 - (X^2)^2$. On reconnait maintenant une différence de deux carrés, qu'on sait factoriser : $P(X) = (X^4 + X^2 + 1)(X^4 - X^2 + 1)$. Chacun des deux facteurs peut à nouveau se factoriser en utilisant la même technique (encore une fois, pas de méthode plus simple) : $X^4 + X^2 + 1 = (X^2+1)^2 - X^2 = (X^2+X+1)(X^2-X+1)$; et $X^4 - X^2 + 1 = (X^2+1)^2 - 3X^2 = (X^2+1)^2 - (\sqrt{3}X)^2 = (X^2+\sqrt{3}X+1)(X^2-\sqrt{3}X+1)$. Finalement, on obtient la factorisation suivante pour P : $P(X) = (X^2+\sqrt{3}X+1)(X^2+X+1)(X^2-X+1)(X^2-\sqrt{3}X+1)$ (comme prévu, aucun de ces quatre trinômes n'admet de racine, on ne peut donc pas factoriser plus).
3. Commençons par poser $Y = X^3$ et cherchons à factoriser $Y^3 + Y^2 + Y + 1$. Il y a une racine évidente qui est -1, on peut donc écrire $Y^3 + Y^2 + Y + 1 = (Y+1)(aY^2 + bY + c) = aY^3 + (a+b)Y^2 + (b+c)Y + c$. Par identification on a $a = 1$; $a + b = 1$; $b + c = 1$ et $c = 1$, donc $a = c = 1$ et $b = 0$. Autrement dit, $Y^3 + Y^2 + Y + 1 = (Y+1)(Y^2+1)$. Le deuxième facteur ne risque pas de se factoriser plus, on a donc $P(X) = (X^3+1)(X^6+1)$. Le premier facteur, $Y^3 + 1$, a pour racine évidente -1 (encore une fois), donc se factorise par $X + 1$. Une autre façon de voir les chose est d'utiliser l'identité remarquable vue en cours : $X^3+1 = X^3-(-1)^3 = (X+1)(X^2-X+1)$. Le trinôme X^2-X+1 a un discriminant négatif, on ne peut pas le factoriser. Reste à s'occuper du facteur X^6+1, pour lequel on ne risque pas de trouver de racines puisqu'il est toujours positif. On peut utiliser la même astuce que ci-dessus : $X^6 + 1 = (X^2)^3 - (-1)^3 = (X^2+1)(X^4 - X^2 + 1)$. Le facteur $X^2 + 1$ n'admet toujours pas

de racine et n'est pas factorisable, et si vous avez suivi les calculs de la question 2 de ce même exercice, vous savez déjà que $X^4-X^2+1=(X^2+\sqrt{3}X+1)(X^2-\sqrt{3}X+1)$. Conclusion de tous ces calculs : $X^9+X^6+X^3+1=(X+1)(X^2-X+1)(X^2+1)(X^2-\sqrt{3}X+1)(X^2+\sqrt{3}X+1)$.

4. Celui-là est rapide si on pense à utiliser l'identité remarquable $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ (on ne vous a pas mis $P(X)$ sous cette forme-là pour rien !) : $P(X)=(1+X)^3+8X^3=(1+X)^3-(-2X)^3=(1+X+2X)((1+X)^2-2X(1+X)+4X^2)=(1+3X)(1+2X+X^2-2X-2X^2+4X^2)=(1+3X)(3X^2+1)$. On ne peut pas factoriser plus que cela.

Exercice 8 (**)

Un polynôme de degré 3 est de la forme $P=aX^3+bX^2+cX+d$, on a donc dans ce cas $P(X+1)-P(X)=a(X+1)^3+b(X+1)^2+c(X+1)+d-(aX^3+bX^2+cX+d)=3aX^2+3aX+a+2bX+b+c$. Par identification, on aura $P(X+1)-P(X)=X^2$ si $3a=1$; $3a+2b=0$ et $a+b+c=0$, soit $a=\frac{1}{3}$; $b=-\frac{3}{2}a=-\frac{1}{2}$ et $c=-a-b=\frac{1}{6}$ (et d peut être pris comme on le souhaite, on posera par exemple $d=0$). Un polynôme satisfaisant est donc $P=\frac{1}{3}X^3-\frac{1}{2}X^2+\frac{1}{6}X$. En exploitant l'égalité $P(k+1)-P(k)=k^2$ (valable pour tout entier k), on peut en déduire que $\sum_{k=0}^{k=n}k^2=\sum_{k=0}^{k=n}P(k+1)-P(k)=P(n+1)-P(0)$ (c'est une somme télescopique. Comme $P(0)=0$ et $P(n+1)=\frac{1}{3}(n+1)^3-\frac{1}{2}(n+1)^2+\frac{1}{6}(n+1)=\frac{(n+1)(2(n+1)^2-3(n+1)+1)}{6}=\frac{(n+1)(2n^2+4n+2-3n-3+1)}{6}=\frac{(n+1)(2n^2+n)}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, on retrouve une formule bien connue depuis quelques mois désormais.

Pour la deuxième partie de l'exercice, le principe est le même, mais en partant d'un polynôme de degré 5 (d'où les calculs un peu plus compliqués). Posons donc $P=aX^5+bX^4+cX^3+dX^2+eX+f$, alors (en révisant au passage notre triangle de Pascal) on a $P(X+1)-P(X)=a(X+1)^5+b(X+1)^4+c(X+1)^3+d(X+1)^2+e(X+1)+f-(aX^5+bX^4+cX^3+dX^2+eX+f)=5aX^4+10aX^3+10aX^2+5aX+a+4bX^3+6bX^2+4bX+b+3cX^2+3cX+1+2dX+d+e=5aX^4+(10a+4b)X^3+(10a+6b+3c)X^2+(5a+4b+3c+2d)X+a+b+c+d+e$. Par identification, tout ceci sera égal à X^4 si $5a=1$; $10a+4b=0$; $10a+6b+3c=0$; $5a+4b+3c+2d=0$ et $a+b+c+d+e=0$ (et on peut prendre par exemple f égal à 0), soit $a=\frac{1}{5}$; $b=-\frac{5}{2}a=-\frac{1}{2}$; $c=-\frac{2}{3}b=\frac{1}{3}$ (puisque $10a+4b=0$, on a $2b+3c=0$) ; $d=-\frac{1}{2}(5a+4b+3c)=-\frac{1}{2}(1-2+1)=0$, et enfin $e=-a-b-c-d=-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{-6+15-10}{30}=-\frac{1}{30}$. On obtient donc $P(X)=\frac{1}{5}X^5-\frac{1}{2}X^4+\frac{1}{3}X^3-\frac{1}{30}X$, puis de manière similaire à ce qu'on a fait dans la première partie de l'exercice $\sum_{k=0}^{k=n}k^4=P(n+1)=\frac{(n+1)^5}{5}-\frac{(n+1)^4}{2}+\frac{(n+1)^3}{3}-\frac{n+1}{30}=\frac{(n+1)(6(n+1)^4-15(n+1)^3+10(n+1)^2-1)}{30}=\frac{(n+1)(6n^4+24n^3+36n^2+24n+6-15n^3-45n^2-45n-15+10n^2+20n+10-1)}{30}=\frac{(n+1)(6n^4+9n^3+n^2-n))}{30}=\frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$. Le dernier gros facteur ne se factorise pas de façon immédiate, mais les plus curieux d'entre vous pourront constater que $-\frac{1}{2}$ en est une racine : $6\left(-\frac{1}{2}\right)^3+9\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}-1=-6\times\frac{1}{8}+\frac{9}{4}-\frac{1}{2}-1=-\frac{3}{4}+\frac{9}{4}-\frac{2}{4}-\frac{4}{4}=0$. On en déduit que $6n^3+9n^2+n-1=\left(n+\frac{1}{2}\right)(an^2+bn+c)=an^3+\left(b+\frac{1}{2}a\right)n^2+\left(c+\frac{1}{2}b\right)n+\frac{1}{2}c$.

Par identification, on obtient $a = 6$; $b + \frac{1}{2}a = 9$; $c + \frac{1}{2}b = 1$ et $\frac{1}{2}c = -1$; soit $a = 6$; $b = 6$ et $c = -2$. On a donc $6n^3+9n^2+n-1 = \left(n+\frac{1}{2}\right)(6n^2+6n-2) = (2n+1)(3n^2+3n-1)$ (remarquez que le facteur $2n+1$ déjà présent pour la formule de la somme des carrés refait ici son apparition). Reste encore à factoriser le dernier terme si on le souhaite. Il a pour discriminant $\Delta = 9+12 = 21$, et admet donc deux racines $n_1 = \frac{-3-\sqrt{21}}{3}$ et $n_2 = \frac{-3+\sqrt{21}}{3}$. ces deux racines étant assez peu sympathiques, on préfèrera garder la formule suivante :

$$\sum_{k=0}^{k=n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

Exercice 9 (***)

Dire que $(X-1)^2$ divise $P-1$ revient à dire que 1 est une racine double de $P-1$ (c'est du cours), autrement dit que $(P-1)(1) = 0$ et $(P-1)'(1) = 0$. Plus simplement, cela revient à dire que $P(1) = 1$ et $P'(1) = 0$ (la dérivée de $P-1$ étant P'). De même, dire que $(X+1)^2$ divise $P+1$ revient à dire que -1 est racine double de $P+1$, donc $P(-1) = -1$ et $P'(-1) = 0$. Le polynôme P' étant le polynôme dérivé d'un polynôme de degré 3, il est de degré 2. Comme on lui connait deux racines 1 et -1, il est donc nécessairement de la forme $P'(X) = a(X-1)(X+1) = aX^2 - a$, avec $a \in \mathbb{R}$. Un peu d'anticipation sur le chapitre d'intégration permet alors d'affirmer que $P(X) = \frac{a}{3}X^3 - aX + b$, où a et b sont deux réels. Reprenonns maintenant les deux conditions connues sur P : on sait que $P(1) = 1$, donc $\frac{a}{3} - a + b = 1$, et $P(-1) = -1$, donc $-\frac{a}{3} + a + b = -1$. On obtient $b = 0$ en additionnant les deux équations, donc elles se réduisent toutes deux à $\frac{a}{3} - a = 1$, soit $a = -\frac{3}{2}$. Conclusion $P(X) = -\frac{1}{2}X^3 + \frac{3}{2}X$.

Exercice 10 (***)

Commençons par constater qu'un tel polynôme est nécessairement de degré n : en effet, P' est toujours de degré strictement inférieur à P, donc $P' - P$ est toujours de même degré que P. posons alors $P = \sum_{k=0}^{k=n} a_k X^k$. On a donc $P' = \sum_{k=1}^{k=n} k a_k X^{k-1}$, et $P' - P = -a_n X^n + \sum_{k=0}^{k=n-1} ((k+1)a_{k+1} - a_k)X^k$. Pour avoir $P' - P = X^n$, il faut donc avoir $a_n = -1$ et, $\forall k \leqslant n-1$, $a_k = (k+1)a_{k+1}$, ou encore si on préfère, $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $a_{k-1} = k a_k$. On a donc $a_{n-1} = -n$, puis $a_{n-2} = -n(n-1)$, etc. Plus géralement, on aura $a_k = -n(n-1)\dots(n-k+1) = -\frac{n!}{k!}$, donc $P = -\sum_{k=0}^{k=n} \frac{n!}{k!} X^k$ (naturellement, une petite récurrence pour déterminer la valeur des coefficients ne nuirait pas à la rigueur de l'argumentation).

Feuille d'exercices n°24 : Couples de variables aléatoires

ECE3 Lycée Carnot

25 mai 2011

Exercice 1 (*)

Soient X et Y deux variables indépendantes suivant une loi de Bernoulli de même paramètre p. On note $U = X + Y$ et $V = X - Y$. Calculer la loi du couple (U, V). Les deux variables sont-elles indépendantes ?

Exercice 2 (**)

Une armoire est constituée de trois tiroirs. On y range une chaussette verte, une rouge et une noire. On note X le nombre de chaussettes que contient le premier tiroir et N le nombre de tiroirs vides. Déterminez la loi conjointe puis les lois marginales du couple (X, N). Les deux variables sont-elles indépendantes ?

Exercice 3 (**)

On dispose de n urnes numérotées de 1 à n. L'urne k contient k boules elles-mêmes numérotées de 1 à k. On tire une urne au hasard, puis une boule au hasard dans cette urne. On note X le numéro de l'urne et Y le numéro de la boule. Déterminer la loi du couple (X, Y), puis les lois marginales. En déduire l'espérance des variables X et Y.

Exercice 4 (***)

On considère deux variables aléatoires X et Y telle que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{1; 2; \dots; n\}$, et $P((X = i) \cap (Y = j)) = a \times i \times j$.

1. Déterminer la valeur de la constante a.
2. Donner la loi, l'espérance et la variance de X.
3. Déterminer la loi de Y.
4. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
5. Calculer $P(X = Y)$.
6. On pose $U = \max(X, Y)$. Calculer la loi de U.

Exercice 5 (***)

Une urne contient $n + 1$ boules numérotées 0 à n. On y tire successivement et avec remise un certain nombre de boules. La variable aléatoire X_k est définie de la façon suivante : $X_1 = 1$, et ensuite $X_i = 1$ si le numéro obtenu au tirage i n'avait jamais été tiré avant, $X_i = 0$ sinon.

1. Déterminer la loi de X_2.
2. Montrer que X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{i-1}$.
3. Montrer que, si $i < j$, on a $P((X_i = 1) \cap (X_j = 1)) = \dfrac{(n-1)^{i-1}n^{j-i}}{(n+1)^{j-1}}$.
4. En déduire la loi du produit X_iX_j.
5. Les variables X_i et X_j sont-elles indépendantes ?
6. On note Z_p la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus lors des p premiers tirages. Exprimer Z_p en fonction des variables définies précédemment.
7. En déduire son espérance, et la limite de celle-ci lorsque p tend vers $+\infty$.

Exercice 6 (***)

Trois urnes contiennent chacune n boules numérotées de 1 à n. On tire une boule dans chaque urne et on note X_1, X_2 et X_3 les trois numéros obtenus. On note X le plus grand des numéros obtenus, Z le plus petit, et Y celui du milieu. Déterminer la loi du triplet (X, Y, Z) (qui est définie, comme vous pourriez vous en douter, comme la donnée des probabilités de toutes les intersections de trois événements possibles). En déduire la loi de X, de Y et de Z. On pourra commencer pour cet exercice par traiter le cas où $n = 3$.

Exercice 7 (EDHEC 99) (**)

Soient X, Y et Z trois variables aléatoires mutuellement indépendantes et définies sur le même espace probabilisé Ω. On suppose que X, Y et Z suivent la loi $\mathcal{U}_{\{1;2;\dots;n\}}$.

1. (a) Donner la loi du couple (X, Y).
   (b) Montrer que : $\forall k \in \{2; 3; \dots; n+1\}$, $P(X + Y = k) = \dfrac{k-1}{n^2}$.
   (c) Montrer que : $\forall k \in \{n+1; \dots; 2n\}$, $P(X + Y = k) = \dfrac{2n-k+1}{n^2}$.
2. Utiliser la formule des probabilités totales pour déduire de la première question que
$$P(X + Y = Z) = \frac{n-1}{2n^2}$$
   .
3. (a) Montrer que la variable aléatoire $T = n + 1 - Z$ suit la loi $\mathcal{U}_{\{1;2;\dots;n\}}$.
   (b) On admet que T est indépendante de X et de Y. Déterminer la probabilité
$$P(X + Y + Z = n + 1)$$
   .

Exercice 8 (**)

On réalise une suite de lancers avec une piève équilibrée, et on note X le rang d'apparition du premier Pile et Y le rang d'apparition du deuxième Pile.

1. Quelle est la loi suivie par la variable X ?
2. Déterminer la loi du couple (X, Y).
3. En déduire la loi marginale de Y.
4. Déterminer, pour tout entier $j \geqslant 2$, la loi de X conditionnelle à $Y = j$.
5. Déterminer, pour tout entier $i \geqslant 1$, la loi de $Y - n$ conditionnelle à $X = n$. Ce résultat est-il surprenant ?

Exercice 9 (***)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de même paramètre p. On note $U = \max(X, Y)$ et $V = \min(X, Y)$.

1. Déterminer les lois de U et de V.
2. Calculez l'espérance de la variable U.
3. Déterminer $E(V)$ de deux façons différentes (un calcul direct, et un autre utilisant la valeur de $E(U)$).

Exercice 10 (***) (EM Lyon 2010)

Une gare dispose de deux guichets. Trois clients notés C_1, C_2, C_3 arrivent en même temps. Les clients C_1 et C_2 se font servir tandis que le client C_3 attend puis effectue son opération dès que l'un des deux guichets se libère.

On définit X_1, X_2, X_3 les variables aléatoires égales à la durée de l'opération des clients C_1, C_2,. C_3 respectivement. Ces durées sont mesurées en minutes et arrondies à l'unité supérieure ou égale. On suppose que les variables aléatoires X_1, X_2, X_3 suivent la loi géométrique de paramètre p, $p \in]0;1[$ et qu'elles sont indépendantes. On note $q = 1 - p$.

On note A l'événement, : « C_3 termine en dernier son opération ».

Ainsi l'événement A est égal à l'événement : $(\min(X_1, X_2) + X_3) > \max(X_1, X_2)$. On se propose de calculer la probabilité de A.

1. Rappeler la loi de X_1 ainsi que son espérance $E(X_1)$ et sa variance $V(X_1)$. On définit la variable aléatoire Δ par $\Delta = |X_1 - X_2|$.
2. Calculer la probabilité $\mathrm{P}(\Delta = 0)$.
3. Soit n un entier naturel non nul.
   (a) Justifier : $\quad \mathrm{P}(X_1 - X_2 = n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X_1 = k)\,\mathrm{P}(X_2 = n + k)$
   (b) En déduire : $\mathrm{P}(\Delta = n) = 2\dfrac{pq^n}{1+q}$
4. (a) Montrer que Δ admet une espérance $E(\Delta)$ et la calculer.
   (b) Montrer : $\quad E\left((X_1 - X_2)^2\right) = 2V(X_1)$. En déduire que Δ admet une variance $V(\Delta)$ et la calculer.
5. Montrer que l'événement A est égal à l'événement $(X_3 > \Delta)$.
6. (a) En déduire : $\quad \mathrm{P}(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\Delta = k)\,\mathrm{P}(X_3 > k)$
   (b) Exprimer $\mathrm{P}(A)$ à l'aide de p et q.

Corrigé de la feuille d'exercices n°24

Exercice 1 (*)

On a donc $P(X = 1) = P(Y = 1) = p$ et $P(X = 0) = P(Y = 0) = 1 - p$. On en déduit la loi suivante pour (U, V) (pas vraiment d'autre méthode que de procéder au cas pas cas, sachant qu'il n'y a que quatre possibilités) :

$U \backslash V$	-1	0	1	$P(U = i)$
0	0	$(1-p)^2$	0	$(1-p)^2$
1	$p(1-p)$	0	$p(1-p)$	$2p(1-p)$
2	0	p^2	0	p^2
$P(V = j)$	$p(1-p)$	$p^2 + (1-p)^2$	$p(1-p)$	

Les deux variables ne sont manifestement pas indépendantes : on a par exemple $P((U = 0) \cap (V = 1)) = 0$, alors que $P(U = 0) \times P(V = 1) \neq 0$.

Exercice 2 (**)

Le mieux si on ne veut pas se perdre dans le remplissage du tableau est encore d'écrire tous les rangements possibles, au nombre de 27, et de compter. Sinon, on s'en sort sans : si $N = 0$, on a nécessairement $X = 1$ puisqu'on a alors une chaussette dans chaque tiroir, et cela se produit avec probabilité $\dfrac{6}{27}$ (six rangements possibles, on peut permuter les chaussettes). Si $N = 1$, soit $X = 0$ avec probabilité $\dfrac{6}{27}$ (trois cas avec une chaussette dans le deuxième tiroir et deux dans le troisième, trois autres cas où c'est le contraire), soit $X = 1$ avec probabilité $\dfrac{6}{27}$ (deux choix pour le tiroir où caser les deux chaussettes restantes, et trois choix de chaussette à mettre dans le premier tiroir), soit enfin $X = 2$ avec probabilité $\dfrac{6}{27}$ (essentiellement le même raisonnement que le cas précédent). Enfin, si $N = 2$, on a trois cas (il faut choisir le tiroir qui accueille les trois chaussettes), un pour lequel $X = 3$ et deux pour lesquels $X = 0$.

$X \backslash N$	0	1	2	$P(X = i)$
0	0	$\frac{6}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{8}{27}$
1	$\frac{6}{27}$	$\frac{6}{27}$	0	$\frac{12}{27}$
2	0	$\frac{6}{27}$	0	$\frac{6}{27}$
3	0	0	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$
$P(N = j)$	$\frac{6}{27}$	$\frac{18}{27}$	$\frac{3}{27}$	

Encore une fois, les deux variables ne sont pas du tout indépendantes.

Exercice 3 (**)

On a $P((X = i) \cap (Y = j)) = \dfrac{1}{in}$ si $j \leqslant i$, et 0 sinon (le numéro de la boule est toujours inférieur à celui de l'urne). En appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'évènements $(Y = j)$, on a donc $P(X = i) = \displaystyle\sum_{j=1}^{i} \frac{1}{in} = i \times \frac{1}{in} = \frac{1}{n}$. C'est sans surprise une loi uniforme, d'espérance $\dfrac{n+1}{2}$. Quand à Y, on a $P(Y = j) = \displaystyle\sum_{i=j}^{n} \frac{1}{in}$ et $E(Y) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} j \sum_{i=j}^{n} \frac{1}{in} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} \frac{j}{in} =$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{in} \frac{i(i+1)}{2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{i+1}{2n} = \frac{n(n+1)}{4n} + \frac{1}{2} = \frac{n+3}{4}.$$

Exercice 4 (***)

1. On doit avoir $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} P((X=i)\cap(Y=j)) = 1$, c'est-à-dire $1 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} aij = a\sum_{i=1}^{n} i \sum_{j=1}^{n} j = a\frac{n^2(n+1)^2}{4}$, donc $a = \frac{4}{n^2(n+1)^2}$.
2. Via la formule des probabilités totales, $P(X=i) = \sum_{j=1}^{n} P((X=i)\cap(Y=j)) = ai\sum_{j=1}^{n} j = ai\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2i}{n(n+1)}$. Et donc $E(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{2i^2}{n(n+1)} = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{6n(n+1)} = \frac{2n+1}{3}$.
3. La loi de Y est la même que celle de X puisqu'obtenue par le même calcul.
4. On vérifie que $P(X=i)\times P(Y=j) = \frac{2i}{n(n+1)} \times \frac{2j}{n(n+1)} = \frac{4}{n^2(n+1)^2}ij = aij = P((X = i)\cap(Y=j))$. Les deux variables sont donc indépendantes.
5. On a $P(X=Y) = \sum_{i=1}^{n} P((X=i)\cap(Y=i)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{4i^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6n^2(n+1)^2} = \frac{2(2n+1)}{3n(n+1)}$.
6. Comme souvent avec un max, il faut passer par la fonction de répartition. On a $\forall k \in \{1;\dots;n\}$, $\forall x \in [k;k+1[$, $F_X(x) = F_Y(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{2i}{n(n+1)} = \frac{k(k+1)}{n(n+1)}$. On a donc $\forall k \in \{1;\dots;n\}$, $\forall x \in [k;k+1[$, $F_U(x) = F_X(x)F_Y(x) = \frac{k^2(k+1)^2}{n^2(n+1)^2}$. On en déduit que $P(U=k) = F_U(k) - F_U(k-1) = \frac{k^2(k+1)^2}{n^2(n+1)^2} - \frac{(k-1)^2k^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{k^2((k+1)^2-(k-1)^2)}{n^2(n+1)^2} = \frac{k^2\times 4k}{n^2(n+1)^2} = \frac{4k^3}{n^2(n+1)^2}$.

Exercice 5 (***)

1. L'évènement $X_2 = 1$ signifie qu'on tire au deuxième tirage une boule différente de celle tirée au premier, ce qui se produit avec une probabilité $\frac{n}{n+1}$. On en déduit que $X_2 \sim \mathcal{B}\left(1, \frac{n}{n+1}\right)$.
2. De même $X_i = 1$, si chacun des $i-1$ premiers tirages a donné une boule différente de X_i, ce qui se produit avec probabilité $\frac{n}{n+1}$ pour chacun, donc $X_i \sim \mathcal{B}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{i-1}$.
3. On a $X_i = 1$ et $X_j = 1$, si les tirages i et j donnent des résultats différents (probabilité $\frac{n}{n+1}$), si chacun des $i-1$ premiers tirages est différent du i-ème et du j-ème (proba $\frac{n-1}{n+1}$, $i-1$ fois) et si chacun des tirages entre le i-ème et le j-ème est différent du j-ème (proba $\frac{n}{n+1}$, $j-i-1$ fois), soit une probabilité globale de $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{j-i}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{i-1} = \frac{(n-1)^{i-1}n^{j-i}}{(n+1)^{j-1}}$.
4. Si X_i et X_j sont deux lois de Bernoulli, X_iX_j est aussi une loi de Bernoulli, dont le paramètre est la valeur calculée à la question précédente (puisqu'avoir $X_iX_j = 1$ équivaut à $(X_i = 1)\cap(X_j = 1)$).

5. La formule donnant $P((X_i = 1) \cap (X_j = 1))$ n'est manifestement pas égale au produit de $P(X_i = 1)$ par $P(X_j = 1)$. Les deux variables ne sont donc pas indépendantes.

6. On a tout simplement $Z_p = \sum_{i=1}^{p} X_i$.

7. On en déduit que $E(Z_p) = \sum_{i=1}^{p} E(X_i) = \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{i-1} = \frac{1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^p}{1 - \frac{n}{n+1}} = (n+1)\left(1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^p\right)$.
Lorsque p tend vers l'infini, comme $\left(\frac{n}{n+1}\right)^p$ est une suite géométrique de raison strictement inférieure à 1 tendant donc vers 0, cette espérance a pour limite $n+1$. C'est tout à fait logique, quand le nombre de boules tirées tend vers l'infini, on s'attend à tirer toutes les boules de l'urne, soit $n+1$ boules différentes.

Exercice 6 (***)

Commençons donc par le cas particulier où $n = 3$, ce qui permet encore de présenter sous forme de tableau. Les trois tableaux correspondent respectivement à $Z = 1$, $Z = 2$ et $Z = 3$. Il y a 27 tirages possibles au total, se répartissant comme suit :

$Y \backslash X$	1	2	3
1	$\frac{1}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{3}{27}$
2	0	$\frac{3}{27}$	$\frac{6}{27}$
3	0	0	$\frac{3}{27}$

$Y \backslash X$	1	2	3
1	0	0	0
2	0	$\frac{1}{27}$	$\frac{3}{27}$
3	0	0	$\frac{3}{27}$

$Y \backslash X$	1	2	3
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0	$\frac{1}{27}$

Pour obtenir les trois marginales, il faut dans le cas de Z faire la somme tableau par tableau, et dans le cas de X et de Y faire les sommes par lignes et par colonnes, en ajoutant les résultats des trois tableaux. On obtient :

	1	2	3
X	$\frac{1}{27}$	$\frac{7}{27}$	$\frac{19}{27}$
Y	$\frac{7}{27}$	$\frac{13}{27}$	$\frac{7}{27}$
Z	$\frac{19}{27}$	$\frac{7}{27}$	$\frac{1}{27}$

Dans le cas général, c'est un peu plus formel mais pas beaucoup plus compliqué. Soient (i, j, k) trois entiers inférieurs à n. Si $i > j > k$, on a $P((X = i) \cap (Y = j) \cap (Z = k)) = \frac{6}{n^3}$ (il y a n^3 tirages au total, et 6 favorables,, le nombre de permutations possibles des trois résultats). Si $i = j > k$ ou $i > j = k$, on a $P((X = i) \cap (Y = j) \cap (Z = k)) = \frac{3}{n^3}$, si $i = j = k$, on a $P((X = i) \cap (Y = j) \cap (Z = k)) = \frac{1}{n^3}$, et le reste du temps $P((X = i) \cap (Y = j) \cap (Z = k)) = 0$ (tous ces cas sont déjà présents dans le cas $n = 3$).

On en déduit par la formule des probabilités totales que $P(Z=k)=\sum_{j=k}^{n}\sum_{i=j}^{n}P((X=i)\cap(Y=j)\cap(Z=k))=\frac{1}{n^3}+(n-k)\frac{3}{n^3}+\sum_{j=k+1}^{n}\sum_{i=j}^{n}P((X=i)\cap(Y=j)\cap(Z=k))=\frac{1}{n^3}+3\frac{n-k}{n^3}+\sum_{j=k+1}^{n}\frac{3}{n^3}+6\frac{n-j}{n^3}=\frac{1}{n^3}(1+6(n-k)+3(n-k-1)(n-k))$. La loi de X est symétrique de celle de Z : $P(X=k)=P(Z=n+1-k)=\frac{1}{n^3}(1+6(k-1)+3(k-2)(k-1))$.

Enfin, $P(Y=j)=\sum_{i=j}^{n}\sum_{k=1}^{j}P((X=i)\cap(Y=j)\cap(Z=k))=\frac{1}{n^3}+(n-1)\frac{3}{n^3}+\sum_{i=j+1}^{n}\sum_{k=1}^{j-1}\frac{6}{n^3}=\frac{1}{n^3}(1+3(n-1)+6(j-1)(n-j))$. Vous pouvez vérifier que les formules marchent pour $n=3$, voire pour $n=4$ si vous êtes motivés.

Exercice 7 (EDHEC 99) (**)

1. (a) Puisque les deux variables sont indépendantes, $P((X=i)\cap(Y=j))=\frac{1}{n}\times\frac{1}{n}=\frac{1}{n^2}$.

   (b) Si $k\leqslant n+1$, $P(X+Y=k)=\sum_{i=1}^{i=n}P((X=i)\cap(Y=k-i))$. Mais si on veut avoir $1\leqslant k-i\leqslant n$, on devra choisir des valeurs de i vérifiant $i\leqslant k-1$ (on aura toujours $k-i\leqslant n$ si $k\leqslant n+1$), donc $P(X+Y=k)=\sum_{i=1}^{k-1}P((X=i)\cap(Y=k-i))=\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{n^2}=\frac{k-1}{n^2}$.

   (c) Si $k>n+1$, on doit de même se restreindre pour avoir cette fois $k-i\leqslant n$, ce qui impose $i\geqslant k-n$, donc $P(X+Y=k)=\sum_{i=k-n}^{n}P((X=i)\cap(Y=k-i))=\sum_{i=k-n}^{n}\frac{1}{n^2}=\frac{n-(k-n)+1}{n^2}=\frac{2n-k+1}{n^2}$.

2. Les variables $X+Y$ et Z sont indépendantes, on a donc $P(X+Y=Z)=\sum_{k=2}^{n}P(X+Y=k)\times P(Z=k)=\sum_{k=2}^{n}\frac{k-1}{n^2}\times\frac{1}{n}=\frac{1}{n^3}\sum_{k=2}^{n}k-1=\frac{(n-1)n}{2n^3}=\frac{n-1}{2n^2}$.

3. (a) $P(T=k)=P(n+1-Z=k)=P(Z=n+1-k)=\frac{1}{n}$ pour $1\leqslant n+1-k\leqslant n$, c'est-à-dire pour $1\leqslant k\leqslant n$. La variable aléatoire T a bien la même loi que Z.

   (b) On en déduit que $P(X+Y+Z=n+1)=P(X+Y=n+1-Z)=P(X+Y=T)$. Comme Z et T suivent la même loi, cette probabilité est la même que celle calculée un peu plus haut : $\frac{n-1}{2n^2}$.

Exercice 8 (**)

1. C'est une loi géométrique de paramètre $p=\frac{1}{2}$.

2. Soient i et j deux entiers supérieurs ou égaux à 1. Si $i\geqslant j$, on aura bien sûr $P((X=i)\cap(Y=j))=0$ (le deuxième Pile ne peut pas apparaitre avant le premier !). Si $i<j$, un seul tirage permet d'obtenir $X=i$ et $Y=j$: celui constitué de $i-1$ Face, puis le premier Pile, puis

une nouvelle série de Face entre les tirages i et j, et enfin le deuxième Pile. On impose donc le résultat des j premiers lancers de la série, ce qui donne $P((X=i)\cap(Y=j))=\dfrac{1}{2^j}$.

3. Par la formule des probabilités totales, $\forall j \geqslant 2$ (Y prend nécessairement des valeurs supérieurs ou égales à 2), $P(Y=j)=\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty}P((X=i)\cap(Y=j))=\sum_{i=1}^{i=j-1}\frac{1}{2^j}=\frac{j-1}{2^j}$.
4. On a tout simplement $\forall i<j$ $P_{Y=j}(X=i)=\dfrac{P((X=i)\cap(Y=j))}{P(Y=j)}=\dfrac{1}{j-1}$. Autrement dit, si on connait le rang du deuxième Pile, la loi du premier est uniforme sur les tirages précédents.
5. Il faut calculer $P_{X=n}(Y-n=k)=P_{X=n}(Y=n+k)$. Cette probabilité est non nulle pour tout entier $k\geqslant 1$ et vaut $\dfrac{P((X=n)\cap(Y=n+k))}{P(X=n)}=\dfrac{1}{2^{n+k}}\times 2^n=\dfrac{1}{2^k}$. Autrement dit, $Y-n$ suit une loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{2}$ quand elle est conditionnée par $X=n$. C'est tout à fait logique : le temps d'attente du deuxième Pile à partir du lancer suivant le premier Pile suit la même loi que le temps d'attente du premier Pile.

Exercice 9 (***)

1. Commençons par déterminer l'allure de la fonction de répartition d'une loi géométrique :
   $\forall k\geqslant 1$, $\forall x\in[k,k+1[$, $F_X(x)=F_Y(x)=\displaystyle\sum_{i=1}^{i=k}P(X=i)=\sum_{i=1}^{i=k}p(1-p)^{i-1}$
   $=p\times\dfrac{1-(1-p)^k}{1-(1-p)}=1-(1-p)^k$.
   On en déduit la fonction de répartition de U : $\forall k\geqslant 1$, $\forall x\in[k,k+1[$, $F_U(x)=(1-q^k)^2$ (en posant comme d'habitude $q=1-p$), ce dont on déduit que
   $\forall k\geqslant 1$, $P(U=k)=F_U(k)-F_U(k-1)=(1-q^k)^2-(1-q^{k-1})^2=(2-q^k-q^{k-1})(q^{k-1}-q^k)=pq^{k-1}(2-q^k-q^{k-1})$.
   Pour V, c'est curieusement plus facile : $(1-F_X(x))(1-F_Y(x))=q^k\times q^k=q^{2k}$, donc $F_V(x)=1-q^{2k}$, puis $P(V=k)=(1-q^{2k})-(1-q^{2k-2})=q^{2k-2}(1-q^2)$. Autrement dit, $V\sim\mathcal{G}(1-q^2)$.
2. Un peu de motivation : $E(U)=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}2kpq^{k-1}-kpq^{2k-1}-kpq^{2k-2}=2p\sum_{k=1}^{+\infty}kq^{k-1}-pq\sum_{k=1}^{+\infty}k(q^2)^{k-1}-p\sum_{k=0}^{+\infty}k(q^2)^{k-1}=\frac{2p}{(1-q)^2}-\frac{p(q+1)}{(1-q^2)^2}=\frac{2(1-q)}{(1-q)^2}-\frac{1-q^2}{(1-q^2)^2}=\frac{2}{1-q}-\frac{1}{1-q^2}$.
3. Par un calcul direct, puisque V suit une loi géométrique, $E(V)=\dfrac{1}{1-q^2}$. Sinon, on peut aussi utiliser que $U+V=X+Y$, d'où par linéarité $E(V)=E(X)+E(Y)-E(U)=\dfrac{2}{p}-\dfrac{2}{1-q}+\dfrac{1}{1-q^2}=\dfrac{1}{1-q^2}$. Remarquons qu'il est en fait infiniment plus simple de calculer d'abord l'espérance de V puisqu'on reconnait une loi classique, puis d'en déduire celle de U par linéarité.

Exercice 10 (***) (EM Lyon 2010)

1. C'est du cours : $\forall k\geqslant 1$, $P(X_1=k)=pq^{k-1}$; $E(X_1)=\dfrac{1}{p}$ et $V(X_1)=\dfrac{q}{p^2}$.
2. On a $\Delta=0$ si $X_1=X_2$, ce qui donne
   $P(\Delta=0)=P(X_1=X_2)=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}P((X_1=k)\cap(X_2=k))$.

Par indépendance de X_1 et X_2,
$P(\Delta = 0) = \sum_{k=1}^{+\infty}(pq^{k-1})^2 = p^2\sum_{k=1}^{+\infty}(q^2)^{k-1} = \frac{p^2}{1-q^2} = \frac{p^2}{(1-q)(1+q)} = \frac{p}{1+q}$.

3. (a) La formule est vaguement inversée : $X_1 - X_2 = n$ revient à $X_1 = n + X_2$, d'où $P(X_1 - X_2 = n) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_2 = k)P(X_1 = n+k)$ (la formule de l'énoncé est juste malgré tout, puisque X_1 et X_2 ont la même loi).

   (b) L'évènement $\Delta = n$ se produit si $X_1 - X_2 = n$ ou $X_2 - X_1 = n$, deux évènements incompatibles et ayant la même probabilité, donc en utilisant la question précédente $P(\Delta = n) = 2\sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1} \times pq^{n+k-1} = 2pq^n \sum_{k=1}^{+\infty}(q^2)^{k-1} = \frac{2pq^n}{1+q}$ (même fin de calcul qu'à la question 2).

4. (a) Sous réserve d'existence, l'espérance est donnée par $E(\Delta) = \sum_{k=0}^{+\infty} kP(\Delta = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} 2k\frac{pq^k}{1+q}$. Cette somme est, à un facteur près, celle d'une série géométrique dérivée de raison $q < 1$, donc elle converge et $E(\Delta) = \frac{2pq}{1+q}\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{2pq}{(1+q)(1-q)^2} = \frac{2q}{1-q^2}$.

   (b) Si on n'aime pas le calcul, on peut répondre à la question de manière formelle : $E((X_1 - X_2)^2) = E(X_1^2) - 2E(X_1X_2) + E(X_2^2) = 2E(X_1^2) - 2E(X_1)E(X_2) = 2V(X_1)$ via König-Huygens (on a utilisé l'indépendance pour découper l'espérance du produit).

   Autre méthode, le calcul brutal : via théorème du transfert, $E((X_1 - X_2)^2) = \sum_{-\infty}^{+\infty} k^2 P(X_1 - X_2 = k) = 2\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \times \frac{pq^k}{1+q}$ (en effet, $X_1 - X_2$ peut prendre des valeurs négatives, mais le terme de la somme obtenu pour $k = -n$ est identique au terme correspondant à $k = n$, ce qui permet de ne calculer qu'une moitié de la somme).

   On a donc $E((X_1 - X_2)^2) = 2\sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)\frac{pq^k}{1+q} + 2\sum_{k=1}^{+\infty} k\frac{pq^k}{1+q} = \frac{2pq^2}{1+q}\sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} + \frac{2pq}{1+q}\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{4pq^2}{(1+q)(1-q)^3} + \frac{2pq}{(1+q)(1-q)^2} = \frac{4q^2 + 2pq}{(1+q)(1-q)^2} = \frac{2q(2q+p)}{(1+q)(1-q)^2} = \frac{2q}{(1-q)^2}$ car $2q + p = 2 - p = 1 + q$. Finalement, on obtient bien $\frac{2q}{p^2} = 2V(X1)$.

   Ne reste plus qu'à achever le calcul de la variance de Δ. Comme $|X_1 - X_2|^2 = (X_1 - X_2)^2$, $V(\Delta) = E(\Delta^2) - E(\Delta)^2 = \frac{2q}{p^2} - \frac{4q^2}{(1-q^2)^2}$, qu'on peut simplifier ou non selon sa bonne volonté.

5. L'évènement A peut se traduire par $X_3 > \max(X_1 - X_2, X_2 - X_1)$, ce qui correspond bien à $X_3 > \Delta$.

6. (a) C'est une simple application de la formule des probabilités totales avec le système complet formé des évènements $\Delta = k$.

   (b) Commençons par calculer $P(X_3 > k) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} P(X_3 = i) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} pq^{i-1} = pq^k\sum_{i=1}^{+\infty} q^{i-1} = \frac{pq^k}{1-q} = q^k$.

   On a donc $P(A) = P(\Delta = 0) \times P(X_3 > 0) + \sum_{k=1}^{+\infty} P(\Delta = k) \times P(X_3 > k) = \frac{p}{1+q} \times 1 +$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2pq^k}{1+q}\times q^k=\frac{p}{1+q}+\frac{2pq^2}{1+q}\sum_{k=1}^{+\infty}(q^2)^{k-1}=\frac{p}{1+q}+\frac{2pq^2}{(1+q)(1-q^2)}=\frac{p(1+q)+2q^2}{(1+q)^2}=\frac{1+q^2}{(1+q)^2}.$$

Feuille d'exercices de révision n°5

ECE3 Lycée Carnot

31 mai 2011

On effectue une série de lancers d'une pièce équilibrée jusqu'à obtenir un premier Pile. On note Z le nombre de lancers ainsi effectués, puis si ce nombre de lancers a été égal à k, on remplit une urne de k boules numérotées de 1 à k, on tire une boule au hasard dans cette urne et on note X le numéro de la boule tirée. Dans le cas (extrêmement improbable) où on n'obtient jamais Pile lors de la série de lancers de la pièce, on considère que $X = 0$.

1. Rappeler la loi de Z, ainsi que son espérance et sa variance.
2. (a) Déterminer la loi conjointe du couple (Z, X) (en précisant clairement les valeurs pour lesquelles $P((Z = k) \cap (X = i)) = 0$).
   (b) En déduire que, $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $P(X = i) = \displaystyle\sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}$.
   (c) En admettant la formule $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{k=i}^{+\infty} a_{i,k} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{i=k} a_{i,k}$ (où $a_{i,k}$ est une expression pouvant dépendre des deux indices i et k), calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} P(X = i)$.
3. (a) Montrer que, $\forall i \geqslant 1$, $iP(X = i) \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$, et en déduire que X admet une espérance.
   (b) En utilisant la même formule d'inversion des sommes qu'à la question 2.c), calculer $E(X)$.
4. (a) En vous inspirant des questions précédentes, montrer que X^2 admet un moment d'ordre 2 et que $E(X^2) = \displaystyle\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(k+1)(2k+1)}{2^k}$.
   (b) Déterminer trois réels a, b et c tels que $\forall k \geqslant 1$, $(k+1)(2k+1) = ak(k-1) + bk + c$.
   (c) En déduire la valeur de $E(X^2)$, puis calculer $V(X)$.
5. On note dans cette question $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{x^k}{k}$.
   (a) Montrer que $\forall x \in [0; 1[$ $f_n'(x) = \dfrac{1 - x^n}{1 - x}$.
   (b) En déduire que $\forall n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k2^k} = \ln 2 - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}dx$.
   (c) Montrer que, $\forall n \geqslant 1$, $0 \leqslant \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}dx \leqslant \frac{1}{2^n}$, et en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}dx$.
   (d) Déduire des calculs précédents que $P(X = 1) = \ln 2$.

Corrigé de la feuille d'exercices de révision n°5

1. Cours : $Z \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$; $E(Z) = 2$ et $V(Z) = \frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2$.

2. (a) Si $i > k$, on aura toujours $P((Z = k) \cap (X = i)) = 0$. Sinon, $\forall k \geqslant 1$, $\forall i \in \{1; \dots; k\}$, $P((Z = k) \cap (X = i)) = P(Z = k) \times P_{Z=k}(X = i) = \frac{1}{2^k} \times \frac{1}{k}$.

   (b) C'est une simple application de la formule des probabilités totales au système complet d'évènements $(Z = k)$ (la somme débute à $k = i$ puisque la probabilité de l'intersection est nulle si $k < i$).

   (c) On a $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = i) = \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{i=k} \frac{1}{k2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1$ (ce qui est normal).

3. (a) En effet, $iP(X = i) = \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{i}{k2^k} \leqslant \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$ (puisque toutes les valeurs que prend l'indice k sont plus grandes que i), soit $iP(X = i) \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+i}} = \frac{1}{2^i} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{i-1}}$. La série de terme général $iP(X = i)$ est à termes positifs et majorée par une série géométrique convergente, elle converge donc, ce qui signifie que X admet une espérance.

   (b) On a $E(X) = \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{k=i}^{+\infty} \frac{i}{k2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{i=k} \frac{i}{k2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k(k+1)}{2k2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k+1}{2^{k+1}} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{+\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} - 1\right) = \frac{3}{2}$.

4. (a) En reprenant les questions précédentes, $i^2P(X = i) \leqslant \frac{i}{2^{i-1}}$, qui est le terme général d'une série convergente, donc X^2 admet une espérance, et $E(X^2) = \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{k=i}^{+\infty} \frac{i^2}{k2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{i=k} \frac{i^2}{k2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6k2^k}$, d'où la formule demandée.

   (b) On a $(k+1)(2k+1) = 2k^2 + 3k + 1$, et $ak(k-1) + bk + c = ak^2 + (b-a)k + c$, par identification on obtient $a = 2$, $b = 5$ et $c = 1$.

   (c) Il s'ensuit que $E(X^2) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2k(k-1)+5k+1}{2^k} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k(k-1)}{2^k} + \frac{5}{6}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{2^k} + \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2^2} \times \frac{2}{(1-\frac{1}{2})^3} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{8}{6} + \frac{10}{6} + \frac{1}{6} = \frac{19}{6}$. Via König-Huygens, on a donc $V(X) = \frac{19}{6} - \frac{9}{4} = \frac{38-27}{12} = \frac{11}{12}$.

5. (a) En effet, $f_n'(x) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{kx^{k-1}}{k} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1-x^n}{1-x}$.

   (b) En intégrant l'équation précédente entre 0 et $\frac{1}{2}$, on obtient $f_n\left(\frac{1}{2}\right) - f_n(0) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-x^n}{1-x}$. Or, $f_n(0) = 0$, donc $f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k2^k} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x}dx - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}dx$. La première intégrale se calcule, elle est égale à $[-\ln(1-x)]_0^{\frac{1}{2}} = -\ln\frac{1}{2} + \ln 1 = \ln 2$, d'où la formule demandée.

(c) La fonction sous l'intégrale étant positive, l'intégrale est bien positive. De plus, $\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$, $x^n \leqslant \frac{1}{2^n}$, et $\frac{1}{2} \leqslant 1 - x \leqslant 1$, donc $\frac{1}{1-x} \leqslant 2$, d'où en intégrant tout ça $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{2^n} dx = \frac{1}{2^n}$. Une application évidente du théorème des gendarmes donne donc $\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx = 0$.

(d) En passant à la limite dans la formule obtenue à la question 2, on a alors $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k} = \ln 2$. Or, cette somme est justement égale à $P(X = 1)$, d'où le résultat final.

Sujet d'annales : Ecricome 2010

ECE3 Lycée Carnot

7 juin 2011

Dans cet exercice, on étudie des situations probabilistes liées à un jeu de dés à six faces.
Pour ce jeu, effectuer une partie consiste à lancer successivement deux dés équilibrés.
On note :
- D_1 le résultat du premier dé et D_2 le résultat du deuxième dé.
- E_1 l'événement : $(D_1 < D_2)$, E_2 l'événement : $(D_1 = D_2)$ et E_3 l'événement : $(D_1 > D_2)$.

Lors d'une partie,
- si l'événement E_1 se produit alors le joueur ne marque pas de point,
- si l'événement E_2 se produit alors le joueur marque 2 points,
- si l'événement E_3 se produit alors le joueur marque 1 point.

I. Étude de parties successives.

Soit n un entier naturel non nul. Le joueur joue successivement n parties.
Pour tout entier naturel $i \geqslant 1$, on note :
- X_i la variable aléatoire représentant le nombre de points marqués lors de la i-ème partie ;
- Y_i le nombre de points marqués après i parties.

1. Calculer la probabilité de chacun des événements E_1, E_2 et E_3.
2. Soit $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, déterminer la loi de la variable aléatoire X_i puis calculer son espérance et sa variance.
3. Trouver la loi de la variable aléatoire Y_1.
4. Quelle est la loi de la variable aléatoire Y_2 ?
5. (a) Préciser l'ensemble $Y_3(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire Y_3.
   (b) Construire et remplir le tableau de la loi conjointe du couple (Y_2, Y_3).
   (c) En déduire la loi de la variable aléatoire Y_3.
6. (a) Ecrire Y_n en fonction des variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$. En déduire l'espérance et la variance de Y_n.
   (b) En moyenne, combien de parties au minimum doit faire le joueur pour obtenir plus de 10 points ?

II. Etude du temps d'attente.

Le joueur joue maintenant jusqu'à ce qu'il dépasse un nombre de points donné.

Plus précisément on note T_1 (respectivement T_2) la variable aléatoire représentant le nombre de parties effectuées par le joueur lorsque le total de ses points est supérieur ou égal à 1 (respectivement 2) pour la première fois (si cet événement se produit).

Par exemple si les points marqués par le joueur sont dans l'ordre :
Exemple 1 : 0 0 1 0 1 2 . . . .. alors $T_1 = 3$ et $T_2 = 5$.
Exemple 2 : 0 0 0 2 1 2.... alors $T_1 = 4$ et $T_2 = 4$.

1. (a) Préciser l'ensemble $T_1(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire T_1 puis, pour tout k appartenant à $T_1(\Omega)$, donner la valeur de la probabilité $P(T_1 = k)$.
   (b) Donner la valeur de l'espérance et de la variance de la variable aléatoire T_1.
2. (a) Déterminer l'ensemble $T_2(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire T_2.
   (b) Calculer les probabilités $P(T_2 = 1)$ et $P(T_2 = 2)$.
   (c) Prouver que, pour $k \geqslant 3$, on a $P(T_2 = k) = \left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6} + (k-1)\left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} \times \frac{7}{12}$.
   (d) Ce résultat est-il valable pour $k = 1$ et $k = 2$?
   (e) Etablir que : $\sum_{k=1}^{+\infty} P(T_2 = k) = 1$.
   (f) Que peut-on en déduire pour l'événement « le joueur n'obtient jamais un score cumulé supérieur ou égal à 2 » ?
   (g) Calculer $E(T_2)$.

Corrigé du sujet Ecricome 2010

I. Étude de parties successives.

1. La probabilité de l'événement E_2 est de $\dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$ puisque, sur les 36 résultats possibles lorsqu'on lance simultanément deux dés à 6 faces, 6 donnent deux résultats identiques (un pour chaque face du dé). On peut aussi constater que $P(E_1) = P(E_3)$, les deux dés jouant un rôle symétrique. Or, les événements E_1, E_2 et E_3 forment un système complet, donc $P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) = 1$, et $P(E_1) = P(E_3) = \dfrac{1 - P(E_2)}{2} = \dfrac{5}{12}$
2. Au vu des données de l'énoncé, la variable X_i peut prendre les valeurs 0, 1 et 2, avec probabilités respectives $\dfrac{5}{12}$, $\dfrac{5}{12}$ et $\dfrac{1}{6}$ en reprenant les calculs de la question précédente. On calcule sans difficulté $E(X_i) = \dfrac{5}{12} + \dfrac{2}{6} = \dfrac{9}{12} = \dfrac{3}{4}$; puis $E(X^2) = \dfrac{5}{12} + \dfrac{4}{6} = \dfrac{13}{12}$, donc via la formule de König-Huygens $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \dfrac{13}{12} - \dfrac{9}{12} = \dfrac{25}{48}$.
3. La variable Y_1 suit la même loi que la variable X_1 (elle lui est même égale), c'est-à-dire la loi décrite ci-dessus.
4. Par définition, $Y_2 = X_1 + X_2$, ces deux dernières variables étant supposées indépendantes. On a donc $Y_2(\Omega) = \{0; 1; 2; 3; 4\}$; et $P(Y_2 = 0) = P((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0)) = P(X_1 = 0) \times P(X_2 = 0) = \dfrac{25}{144}$; $P(Y_2 = 1) = P(X_1 = 0) \times P(X_2 = 1) + P(X_1 = 1) \times P(X_2 = 0) = \dfrac{25}{72}$; $P(Y_2 = 2) = P(X_1 = 0) \times P(X_2 = 2) + P(X_1 = 1) \times P(X_2 = 1) + P(X_1 = 2) \times P(X_2 = 0) = \dfrac{5}{72} + \dfrac{25}{144} + \dfrac{5}{72} = \dfrac{45}{144} = \dfrac{5}{16}$; $P(Y_2 = 3) = P(X_1 = 1) \times P(X_2 = 2) + P(X_1 = 2) \times P(X_2 = 1) = \dfrac{5}{36}$; et enfin $P(Y_2 = 4) = P(X_1 = 2) \times P(X_2 = 2) = \dfrac{1}{36}$.
5. (a) Au bout de trois parties, tous les nombres de points compris entre 0 et 6 sont possibles : $Y_3(\Omega) = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

   (b) Il faut bien du courage pour remplir le gros tableau de la loi de couple, même si beaucoup de cases contiennent des 0 (si Y_2 prend la valeur k, Y_3 ne peut prendre que les valeurs k, $k+1$ et $k+2$). Un exemple de calcul détaillé : $P((Y_2 = 3) \cap (Y_3 = 4)) = P(Y_2 = 3) \times P(X_3 = 1) = \dfrac{5}{36} \times \dfrac{5}{12} = \dfrac{25}{432}$ (non, ne cherchez pas, ça ne se simplifie pas). Le reste n'est pas plus compliqué, ni plus intéressant d'ailleurs :

$Y_2 \backslash Y_3$	0	1	2	3	4	5	6
0	$\frac{25}{144} \cdot \frac{5}{12} = \frac{125}{1\ 728}$	$\frac{25}{144} \cdot \frac{5}{12} = \frac{125}{1\ 728}$	$\frac{25}{144} \cdot \frac{1}{6} = \frac{25}{864}$	0	0	0	0
1	0	$\frac{25}{72} \cdot \frac{5}{12} = \frac{125}{864}$	$\frac{25}{72} \cdot \frac{5}{12} = \frac{125}{864}$	$\frac{25}{72} \cdot \frac{1}{6} = \frac{25}{432}$	0	0	0
2	0	0	$\frac{5}{16} \cdot \frac{5}{12} = \frac{25}{192}$	$\frac{5}{16} \cdot \frac{5}{12} = \frac{25}{192}$	$\frac{5}{16} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{96}$	0	0
3	0	0	0	$\frac{5}{36} \cdot \frac{5}{12} = \frac{25}{432}$	$\frac{5}{36} \cdot \frac{5}{12} = \frac{25}{432}$	$\frac{5}{36} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{216}$	0
4	0	0	0	0	$\frac{1}{36} \cdot \frac{5}{12} = \frac{5}{432}$	$\frac{1}{36} \cdot \frac{5}{12} = \frac{5}{432}$	$\frac{1}{36} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$

   (c) Pour avoir la loi marginale de Y_3, il suffit de sommer les colonnes dans le tableau, ce qui donne :

k	0	1	2	3	4	5	6
$P(Y_3 = k)$	$\frac{125}{1\ 728}$	$\frac{375}{1\ 728} = \frac{125}{576}$	$\frac{525}{1\ 728} = \frac{175}{576}$	$\frac{425}{1\ 728}$	$\frac{210}{1\ 728} = \frac{35}{288}$	$\frac{15}{432} = \frac{5}{144}$	$\frac{1}{216}$

6. (a) Assez clairement, $Y_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$. Par linéarité de l'espérance, $E(Y_n) = nE(X_1) = \dfrac{3n}{4}$.

Par indépendance des variables X_i, il va se produire la même chose pour la variance : $V(Y_n) = nV(X_1) = \frac{25n}{48}$.

(b) On recherche donc la valeur minimale de n pour laquelle $E(Y_n) \geqslant 10$, c'est-à-dire $\frac{3n}{4} \geqslant 10$, soit $n \geqslant \frac{40}{3}$. Le joueur doit donc jouer 14 fois pour que son espérance de gain dépasse 10 points.

II. Etude du temps d'attente.

1. (a) On reconnait un cas classique de loi géométrique : $T_1 \sim \mathcal{G}\left(\frac{7}{12}\right)$ (on attend que le joueur marque autre chose que 0 point, ce qui se produit à chaque partie avec probabilité $\frac{7}{12}$).
En particulier, $T_1(\Omega) = \{1; 2; \dots; n; \dots\}$, et $P(T_1 = k) = \frac{7}{12}\left(\frac{5}{12}\right)^{k-1}$.

   (b) C'est du cours : $E(T_1) = \frac{12}{7}$, et $V(T_1) = \frac{5}{12} \times \left(\frac{12}{7}\right)^2 = \frac{60}{49}$.

2. (a) En fait, $T_2(\Omega) = \{1; 2; \dots; n; \dots\}$, tout comme pour T_1, puisqu'on peut très bien avoir deux points dès le premier essai.

   (b) On a facilement $P(T_2 = 1) = P(X_1 = 2) = \frac{1}{6}$. Plus de possibilités ensuite : $P(T_2 = 2) = P((X_1 = 0) \cap (X_2 = 2)) + P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)) + P((X_1 = 2) \cap (X_2 = 2)) = \frac{5}{12} \times \frac{1}{6} + \frac{5}{12} \times \frac{5}{12} + \frac{5}{12} \times \frac{1}{6} = \frac{45}{144} = \frac{5}{16}$.

   (c) Pour que $T_2 = k$ se produise, il y a en fait deux possibilités : soit on a marqué aucun point lors des $k-1$ premières parties, et on en marque 2 à la k-ème partie, ce qui se produit avec probabilité $\left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6}$; soit on a obtenu une fois 1 lors d'une des $k-1$ premières parties, 0 à toutes les autres, et 1 ou 2 à la k-ème partie. En n'oubliant pas le choix de la partie ayant donné un score d'un point, cette éventualité a pour probabilité $(k-1) \times \frac{5}{12} \times \left(\frac{5}{12}\right)^{k-2} \times \left(\frac{5}{12} + \frac{1}{6}\right) = (k-1)\left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} \times \frac{7}{12}$. Il ne reste plus qu'à additionner ces deux probabilités pour retrouver la formule de l'énoncé.

   (d) Pour $k = 1$, la formule donne simplement $P(T_1 = 1) = \frac{1}{6}$, ce qui est correct. Pour $k = 2$, on obtient $P(T_2 = 2) = \frac{5}{12} \times \frac{1}{6} + \frac{5}{12} \times \frac{7}{12}$, ce qui donne également la valeur calculée plus haut.

   (e) La série converge puisqu'il s'agit d'une somme d'une série géométrique et d'une géométrique dérivée, et $\sum_{k=1}^{+\infty} P(T_2 = k) = \frac{1}{6} \times \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{12}\right)^k + \frac{7}{12} \times \sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} - \frac{7}{12} \times \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{12}\right)^k = \frac{1}{6} \times \frac{1}{1-\frac{5}{12}} + \frac{7}{12} \times \frac{1}{(1-\frac{5}{12})^2} - \frac{7}{12} \times \frac{1}{1-\frac{5}{12}} = \frac{2}{7} + \frac{12}{7} - 1 = 1$.

   (f) On vient de prouver que $P(\bigcup_{k=1}^{+\infty} T = k) = 1$. L'événement considéré dans cette question étant le complémentaire du précédent, il a une probabilité nulle. Autrement dit, il est quasi certain que le joueur finira par marquer deux points.

   (g) Un dernier calcul (la série converge toujours comme somme de diverses séries géométriques) : $E(T_2) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} + \frac{7}{12}\sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)\left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{(1-\frac{5}{12})^2} + \frac{7}{12} \times$

$$\frac{5}{12} \times \frac{2}{(1 - \frac{5}{12})^3} = \frac{24}{49} + \frac{120}{49} = \frac{144}{49}.$$

Feuille d'exercices n°25 : Espaces vectoriels

ECE3 Lycée Carnot

7 juin 2011

Exercice 1 (*)

Déterminer parmi les ensembles suivants lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$: $A = \{(x,y) \mid x \leqslant y\}$; $B = \{(x,y) \mid xy = 0\}$; $C = \{(x,y) \mid x = y\}$; $D = \{(x,y) \mid x + y = 1\}$; $E = \{(x,y) \mid 2x - 6y = 0\}$.

Exercice 2 (**)

On se place dans l'ensemble E des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de E ?

- fonctions paires.
- fonctions admettant un minimum global.
- fonctions vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = f(x)^2$.
- fonctions admettant une tangente horizontale en $x = 5$.
- fonctions vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = 3f'(x) - 2f(x)$.
- fonctions admettant une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$.

Exercice 3 (*)

On considère dans $\mathbb{R}^3$ les ensembles $F = \{(x,y,z) \mid x+y-z = 0\}$ et $G = \{(a-b, a+b, a-3b) \mid a, b \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et déterminer leur intersection.

Exercice 4 (*)

Dans un espace vectoriel E, on considère trois vecteurs x_1, x_2 et x_3 et on définit $y_1 = x_1+x_2+x_3$, $y_2 = x_1 + x_2$ et $y_3 = 2x_1 + x_2 - x_3$. Montrer que x_1, x_2 et x_3 sont des combinaisons linéaires de y_1, y_2 et y_3. En déduire que $Vect(x_1, x_2, x_3) = Vect(y_1, y_2, y_3)$.

Exercice 5 (**)

Donner une base de chacun des sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^4$: $F = \{(x,y,z,t) \mid x + y - 2z = 2x - 3y + z = -4x + z = 0\}$; $G = \{(a - 2b + c, 2a - 3b, 4a + 2c, 2a + b - c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}^3\}$; $H = \{(x,y,z,t) \mid x + y - z = 2x - y + t = x - 2y - z + t = 0\}$.

Exercice 6 (**)

Montrer que la famille $((0,1,1), (2,0,-1), (2,1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner les coordonnées de $(4,-1,1)$ et de $(1,0,0)$ dans cette base. Mêmes questions avec la famille $((3,-1,1), (2,0,0), (1,-2,4))$.

Exercice 7(*)

On se place dans un espace vectoriel de dimension 3 dont une base est (e_1, e_2, e_3). La famille $(e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_3 + e_1)$ est-elle une base de E ? Et la famille $(e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3)$?

Exercice 8 (***)

On note $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $E = \mathbb{R}^3$, dont on notera les vecteurs en colonne et non en ligne pour une fois.

1. On note $F = \{X \in E \mid AX = 0\}$. Montrer que F est un espace vectoriel.
2. En donner une base.
3. On note $G = \{Y \in E \mid AX = Y$ admet au moins une solution$\}$. Montrer que G est un espace vectoriel.
4. Montrer qu'on peut écrire G comme ensemble des solutions d'un système linéaire.
5. Trouver une base de G.

Exercice 9 (***)

On considère les fonctions e_1, e_2, e_3 et e_4 définies sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $e_1(x) = x$, $e_2(x) = x^2$, $e_3(x) = x \ln x$ et $e_4(x) = x^2 \ln x$. On note E l'espace vectoriel engendré par ces quatre fonctions.

1. On suppose dans cette question que a, b, c et d sont 4 réels tels que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $ax + bx^2 + cx \ln x + dx^2 \ln x = 0$. Montrer que $a + b = 0$.
2. Etablir que $\forall x > 1$, $\dfrac{a}{x \ln x} + \dfrac{b}{\ln x} + \dfrac{c}{x} + d = 0$. En déduire que $d = 0$.
3. Etablir ensuite que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\dfrac{a}{x} + b + c\dfrac{\ln x}{x} = 0$. En déduire que $b = 0$.
4. Montrer finalement que $a = b = c = d = 0$.
5. En déduire que (e_1, e_2, e_3, e_4) est une famille libre, puis que c'est une base de E.

Exercice 10 (***)

On considére les matrices suivantes de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On note E l'ensemble des matrices M s'écrivant sous la forme $M = aI + bJ + cK + dL$, avec a, b, c, $d \in \mathbb{R}^4$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel.
2. Montrer que la famille (I, J, K, L) est libre.
3. Donner la dimension de E.
4. Montrer, en les calculant explicitement, que J^2, K^2, L^2, J^3 et L^3 appartiennent à E.
5. En déduire, sans aucun calcul matriciel, que JK, KJ, KL, LK, JL et LJ appartiennent aussi à E.
6. Etablir enfin que le produit de deux matrices de E est encore une matrice de E.

Corrigé de la feuille d'exercices n°25

Exercice 1 (*)

- A n'est pas un sous-ev de $\mathbb{R}^2$: il est bien stable par somme et par produit par un réel positif, mais pas par produit par un réel négatif ; par exemple $(2,6) \in A$ mais $-3(2,6) = (-6,-18) \notin A$.
- B n'est pas un sous-ev de $\mathbb{R}^2$, il est stable par produit par un réel mais pas par somme ; par exemple $(0;2) \in B$, $(-4;0) \in B$, mais $(0,2)+(-4,0) = (-4,2) \notin B$.
- C est un sous-ev de $\mathbb{R}^2$: si $(x,y) \in C$ et $(x',y') \in C$, alors $x = y$ et $x' = y'$ donc $x+x' = y+y'$ et $(x,y)+(x',y') \in C$; de même, si $x = y$, alors $\lambda x = \lambda y$ donc C est stable par produit par un réel.
- D n'est pas un sous-ev de $\mathbb{R}^2$: il ne contient pas $(0;0)$.
- E est un sous-ev de $\mathbb{R}^2$, c'est l'ensemble des solutions d'une équation linéaire homogène.

Exercice 2 (**)

- C'est un sous-ev, la fonction nulle est bien paire, et une somme de deux fonctions paires, ou un produit d'une fonction paire par un réel, sont bien des fonctions paires.
- Non, ce n'est pas du tout un sous-ev, si on multiplie par -1 une fonction admettant un minimum global (par exemple, $f : x \mapsto x^2$, on obtient en général une fonction admettant un maximum global mais plus de minimum global.
- Pas non plus de sous-ev ici, la fonction exponentielle vérifiant cette équestion, mais pas la fonction $f : x \mapsto 2e^x$.
- Ici, on a bien un sous-ev, la condition proposée se traduit par $f'(5) = 0$, ce qui est bien stable par somme et produit par un réel.
- Oui, c'est un sous-ev. Celà découle en fait facilement de la linéarité de la dérivation.
- Celui-ci ne peut pas être un sous-ev pour une raison simple : la fonction nulle d'admet pas de branche infinie de direction (Oy) en $+\infty$.

Exercice 3 (*)

On peut écrire F sous la forme $F = \{(x,y,x+y) \mid z \in \mathbb{R}\}$. Autrement dit, $F = Vect((1,0,1);(0,1,1))$ (F est bien constitué de l'ensemble des combinaisons linéaires de ces deux vecteurs). C'est donc bien un sous-ev de $\mathbb{R}^3$. De même, $G = Vect((1,1,1);(-1,1,-3))$ est un ev. L'intersection des deux ensembles est constitué des éléments de G vérifiant l'équation définissant F, donc $F \cap G = \{(a-b, a+b, a-3b) \mid a-b+a+b-a+3b = 0\} = \{(a-b, a+b, a-3b) \mid a = -3b\} = \{(-4b,-2b,-6b) \mid b \in \mathbb{R}\} = Vect((-4,-2,-6))$.

Exercice 4 (*)

Il suffit de « retourner » le système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} y_1 & = & x_1 & + & x_2 & + & x_3 \\ y_2 & = & x_1 & + & x_2 & & \\ y_3 & = & 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} y_1 & - & y_2 & = & x_3 & & \\ & & y_2 & = & x_1 & + & x_2 \\ y_1 & + & y_3 & = & 3x_1 & + & 2x_2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} & & y_1 & - & y_2 & = & x_3 \\ 3y_2 & - & y_1 & - & y_3 & = & x_2 \\ y_1 & + & y_3 & - & 2y_2 & = & x_1 \end{array}\right.$$

On a exprimé les vecteurs x_1, x_2 et x_3 comme combinaisons linéaires de y_1, y_2 et y_3, donc ils appartiennent à $Vect(y_1, y_2, y_3)$. Comme l'espace vectoriel engendré par une famille est le plus petit qui la contient, on a alors $Vect(y_1, y_2, y_3) \subset Vect(x_1, x_2, x_3)$. Mais de la même façon, les y_i étant définis comme combinsais linéaires des x_i, l'inclusion en sens inverse est vraie. Les deux espaces sont donc les mêmes.

Remarquons que d'un point de vue matriciel, on a $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, les deux matrices étant inverses l'une de l'autre (si la matrice n'était pas inversible, les deux espaces vectoriels engendrés ne seraient pas les mêmes).

Exercice 5 (**)

Pour F, il faut commencer par résoudre le système (on peut déjà remarquer que t n'apparait pas dans le système donc peut prendre n'importe quelle valeur) : la dernière équation donne $z = 4x$, qu'on peut remplacer dans les deux premières équations pour obtenir $y - 7x = 6x - 3y = 0$. On obtient facilement $x = y = 0$, donc $z = 0$ et $F = \{(0, 0, 0, t) \mid t \in \mathbb{R}\} = Vect((0, 0, 0, 1))$. Une base de F est donc constituée du seul vecteur $((0, 0, 0, 1))$.

C'est beaucoup plus simple pour G : $G = Vect((1, 2, 4, 2); (-2, -3, 0, 1); (1, 0, 2, -1)$. Encore faut-il vérifier que cette famille est libre pour que ce soit une base de G. Supposons donc qu'une combinaison linéaire de ces vecteurs soit nulle : $\lambda(1, 2, 4, 2) + \mu(-2, -3, 0, 1) + \nu(1, 0, 2, -1) = 0$. En regardant la deuxième coordonnée, on obtient $2\lambda - 3\mu = 0$, donc $\mu = \dfrac{3}{2}\lambda$. De même, avec la troisième coordonnée, on obtient $4\lambda + 2\nu = 0$, donc $\nu = -2\lambda$. On peut désormais remplacer tout cela dans la première coordonnée : $\lambda - 2\mu + \nu = 0$, donc $-4\lambda = 0$. On en déduit que $\lambda = 0$, puis $\mu = \nu = 0$, donc la famille est libre. Elle forme donc bien une base de G (qui est donc de dimension 3).

Pour H, il faut aussi commencer par résoudre le système. On a $z = x + y$ (première équation) et $t = y - 2x$ (deuxième équation), ce qui donne en remplaçant dans la dernière équation $-2y - 2x = 0$, soit $y = -x$. On en déduit que $z = 0$ et $t = -3x$. Finalement, $H = \{(x, -x, 0, -3x) \mid x \in \mathbb{R}\} = Vect((1, -1, 0, -3))$. Ce vecteur forme bien entendu une base de H.

Exercice 6 (**)

Dans $\mathbb{R}^3$, tout famille génératrice de trois vecteurs est une base. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, cherchons λ, μ, ν tels que $(x, y, z) = \lambda(0, 1, 1) + \mu(2, 0, -1) + \nu(2, 1, 1)$. La première coordonnée donne $2\mu + 2\nu = x$, soit $\mu = \dfrac{x}{2} - \nu$. La deuxième coordonnée donne $\lambda + \nu = y$, donc $\lambda = y - \nu$. Enfin, on a pour la troisième coordonnée $\lambda - \mu + \nu = z$, donc en remplaçant $\nu = -z + y + \dfrac{x}{2}$. On en déduit $\lambda = z - \dfrac{x}{2}$ et $\mu = z - y$. On peut donc exprimer tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ comme combinaison linéaire des trois vecteurs de la famille, elle est génératrice et comporte trois éléments, c'est une base. Pour obtenir les coordonnées de $(4, -1, 1)$ dans cette nouvelle base, il suffit de calculer les valeurs de λ, μ et ν correspondant à $x = 4$, $y = -1$ et $z = 1$. On obtient $\lambda = -3$; $\mu = 2$ et $\nu = 0$. Les coordonnées de $(4, -1, 1)$ dans la base $((0, 1, 1); (2, 0, -1); (2, 1, 1))$ sont donc $(-3, 2, 0)$. De même, les coordonnées de $(1, 0, 0)$ deviennent $\left(-\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{2}\right)$.

Pour l'autre base, la méthode est la même. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Si $(x, y, z) = \lambda(3, -1, 1) + \mu(2, 0, 0) + \nu(1, -2, 4)$, les deux dernières coordonnées donnent $-\lambda - 2\nu = y$ et $\lambda + 4\nu = z$. En faisant la somme des deux, on obtient $\nu = \dfrac{y + z}{2}$, puis $\lambda = -2y - z$. Enfin, la première coordonnée donne $3\lambda+2\mu+\nu = x$, donc $2\mu = x-3\lambda-\nu = x+\dfrac{11}{2}y+\dfrac{5}{2}z$. Les nouvelles coordonnées de $(4,-1,1)$ sont donc $\left(1,\dfrac{1}{2},0\right)$ et celles de $(1,0,0)$ sont $\left(0,\dfrac{1}{2},0\right)$.

Exercice 7 (*)

Comme l'espace vectoriel possède une base formée de trois vecteurs, il est de dimension 3. Il suffit donc de montrer que les familles sont libres pour qu'elles forment des bases. Supposons qu'une combinaison libéaire de la famille $(e_1+e_2, e_2+e_3, e_3+e_1)$ s'annule : $a(e_1+e_2)+b(e_2+e_3)+c(e_3+e_1) = 0 \Leftrightarrow (a+c)e_1+(a+b)e_2+(b+c)e_3 = 0$. La famille (e_1,e_2,e_3) étant une base, on a nécessairement $a+c = a+b = b+c = 0$, ce dont on déduit rapidement que $a = b = c = 0$. La famille $(e_1+e_2, e_2+e_3, e_3+e_1)$ est donc libre, et c'est une base de E.

C'est encore plus rapide pour $(e_1, e_1+e_2, e_1+e_2+e_3)$: $ae_1+b(e_1+e_2)+c(e_1+e_2+e_3) = 0 \Leftrightarrow (a+b+c)e_1+(b+c)e_2+ce_3 = 0 \Leftrightarrow a+b+c = b+c = c = 0$, donc la famille est libre et est également une base de E.

Exercice 8 (***)

1. Soient X_1, $X_2 \in F$, alors $AX_1 = AX_2 = 0$, donc $A(X_1+X_2) = 0$ et $X_1+X_2 \in F$. De même, si $AX = 0$, on a $A(\lambda X) = 0$, donc F est stable par somme et produit par un réel, il contient manifestement 0, c'est un sous-ev de $\mathbb{R}^3$.
2. Il faut pour cela résoudre le système homogène dont la matrice est A :
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ -2x & + & y & + & 3z & = & 0 \\ -x & & & + & 5z & = & 0 \end{array}\right.$$
La dernière équation donne $x = 5z$, ce qui en remplaçant dans les premières nous donne $-y+7z = 0$ et $y-7z = 0$. Ces deux équations étant équivalentes, on en déduit simplement que $y = 7z$, donc $F = \{(5z, 7z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = Vect((5,7,1))$. Ce vecteur est une base de F.
3. Supposons Y_1, $Y_2 \in G^2$, on a donc $Y_1 = AX_1$ et $Y_2 = AX_2$. Mais alors, $Y_1+Y_2 = A(X_1+X_2) \in G$. De même, $\lambda Y_1 = \lambda AX_1 = A(\lambda X_1)$, donc $\lambda Y_1 \in G$. Enfin, $0 = A \times 0 \in G$, l'ensemble G est donc un sous-ev de $\mathbb{R}^3$.
4. $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in F \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 2z & = & a \\ -2x & + & y & + & 3z & = & b \\ -x & & & + & 5z & = & c \end{array}\right.$ a une solution. Si l'on effectue la même manipulation sur les lignes qu'à la question 2, on obtient de même y et x en fonction de z (et de a, b et c, naturellement), mais en plus on a la condition $a-b+c = 0$. On en déduit que $G = \{(a, b, b-a) \mid a, b \in \mathbb{R}^2\} = Vect((1,0,-1); (0,1,1))$.
5. Les deux vecteurs de la famille précédentent ne sont pas proportionnels, ils forment donc une famille libre, donc une base de G.

Exercice 9 (***)

1. Il suffit de constater qu'on peut remplacer x par n'importe quelle valeur positive, en particulier 1 : on a alors $a+b = 0$.
2. En effet, si $x > 1$, on peut diviser l'égalité de départ par $x^2 \ln x$, qui ne s'annule pas, et on obtient $\dfrac{a}{x\ln x}+\dfrac{b}{\ln x}+\dfrac{c}{x}+d = 0$. Regardons maintenant la limite du membre de gauche quand x tend vers $+\infty$, elle vaut d. Mais comme ce membre de gauche est constant égal à 0 par hypothèse, on doit avoir $d = 0$.

3. C'est exactement la même chose en divisant cette fois par x^2 (et en utilisant que $d = 0$). La limite vaut cette fois-ci b (on a une croissance comparée pour le dernier terme), donc $b = 0$.
4. Comme $a + b = 0$ et $b = 0$, on a donc $a = 0$. Seul c peut encore être non nul, c'est-à-dire qu'on a $cx \ln x = 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, ce qui ne se produit que si $c = 0$ (sinon, la fonction ne s'annule que pour $x = 1$).
5. On vient de montrer que toute combinaison linéaire nulle de la famille avait des coefficients nuls, ce qui prouve que la famille est libre. Comme elle est de plus génératrice (par hypothèse !), c'est une base de E, sui est donc de dimension 4.

Exercice 10 (***)

1. C'est l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille (I, J, K, L), qui est un espace vectoriel, et même précisément l'espace vectoriel engendré par cette famille.
2. Supposons $aI + bJ + cK + dL = 0$, on a donc $\begin{pmatrix} a & c & b & d \\ d & a & c & b \\ b & d & a & c \\ c & b & d & a \end{pmatrix} = 0$, ce qui implique manifestement $a = b = c = d = 0$. La famille est donc libre.
3. La famille (I, J, K, L) est libre et génératrice, elle engendre donc un espace vectoriel de dimension 4.
4. On calcule sans difficulté $J^2 = L$, $K^2 = L$, $L^2 = L$, $J^3 = K$, $K^3 = J$ et $L^3 = L$.
5. On a $JK = JJ^3 = J^4 = (J^2)^2 = L^2 = I$. De même, $KJ = I$, puis $KL = LK = K^3 = J$ et $JL = LJ = J^3 = K$
6. Soient deux matrices de E, qui s'écrivent donc $aI + bJ + cK + dL$ et $eI + fJ + hK + iL$. Leur produit, via un calcul passionnant et en utilisant les résultats des deux questions précédentes, vaut $(ae + bh + cf + di)I + (af + be + ci + dh)J + (ag + bi + ce + df)K + (ai + bf + cg + de)L$, qui appartient bien à E. L'ensemble E est ce qu'on appelle une algèbre (espace vectoriel et stabilité par produit interne).

Feuille d'exercices n°26 : Applications linéaires

ECE3 Lycée Carnot

15 juin 2011

Exercice 1 (*)

On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par $u(P) = XP' - P$. Déterminer le noyau et l'image de u.

Exercice 2 (**)

Donner la matrice (dans les bases canoniques à chaque fois) des applications linéaires suivantes, ainsi que leur noyau et leur image :

$$u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad (x, y) \mapsto (x + y, y - 2x + z)$$

$$u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad (x, y, z) \mapsto (x + y, x + z, y + z)$$

$$u : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^4 \quad P \mapsto (P(1), P(2), P(3), P(4))$$

Exercice 3 (*)

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ définie par $f(x, y) = (x + y, x - y)$. Montrer que f est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 4 (**)

Soient A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'application linéaire $u : M \mapsto AM - MB$ ($u \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$. Calculer le noyau de u dans les cas suivants :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 (*)

Soit p l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $p(x,y) = \dfrac{1}{5}(x+2y, 2x+4y)$. Déterminer le noyau et l'image de p et montrer que $p^2 = p$.

Exercice 6 (**)

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que les images des vecteurs de la base canonique soient $(1,-1,2)$, $(-3,2,-1)$ et $(-7,4,1)$.

1. Déterminer la matrice de u dans la base canonique, ainsi que l'expression de u.
2. Déterminer les antécédents par u de $(-1,1,8)$ et de $(-2,1,3)$.
3. u est-elle injective ? Surjective ?

Exercice 7 (*)

On considère l'endomorphisme u de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $u\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & a-b \\ d & d \end{pmatrix}$. Déterminer le noyau et l'image de u.

Exercice 8 (***)

Soit $A = \begin{pmatrix} 16 & 4 & -4 \\ -18 & -4 & 5 \\ 30 & 8 & -7 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme représenté par A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer une base de $Ker(u)$.
2. Montrer que 1 et 4 sont des valeurs propres de u, et déterminer les vecteurs propres correspondants.
3. En déduire que u est diagonalisable, et préciser une base dans laquelle la matrice de u est diagonale.
4. Déterminer la matrice de passage P de la base canonique à la base définie à la question précédente. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

Exercice 9 (***)

Soit E l'espace vectoriel des suites bornées et f l'endomorphisme de E qui, à une suite (u_n) associe la suite (v_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - u_n$. Déterminer les valeurs propres de f (et les vecteurs propres correspondants).

Exercice 10 (EDHEC 2001) (***)

Soit E un espace vectoriel réel, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Soit a un réel non nul et f_a l'endomorphisme de E, défini par $f_a(e_2) = 0$, $f_a(e_1) = f_a(e_3) = ae_1 + e_2 - ae_3$.

1. (a) Ecrire la matrice A_a de f_a dans la base $\mathcal{B}$ et calculer A_a^2.
   (b) Montrer que si $A_aX = \lambda X$, avec $X \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda = 0$.
   (c) A_a est-elle inversible ?
2. On pose $u_1 = ae_1 + e_2 - ae_3$.

(a) Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, e_2, e_3)$ est une base de E.

(b) Vérifier que la matrice de f_a dans la base $\mathcal{B}'$ est $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Dans la suite, on cherche à caractériser les endomorphismes g de E tels que $g \circ g = f_a$.

3. On suppose qu'un tel endomorphisme g existe et on note M sa matrice dans $\mathcal{B}'$.

   (a) Expliquer pourquoi $M^2 = K$ puis montrer que $MK = KM$.

   (b) Déduire de ces deux relations que $M = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, x, y et z étant 3 réels tels que $xz = 1$.

4. Réciproquement, vérifier que tout endomorphisme g dont la matrice dans $\mathcal{B}'$ est du type ci-dessus est solution de $g \circ g = f_a$.

Exercice 11 (ESC 2001) (***)

On donne les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -14 \\ 6 & 6 & -16 \\ 5 & 5 & -14 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -16 \\ 0 & 4 & -8 \\ 4 & 4 & -12 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice est A dans la base canonique.
Soient $v_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (1, -1, 0)$ et $v_3 = (1, 1, 1)$.

1. (a) Vérifier que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Calculer $f(v_1)$, $f(v_2)$ et $f(v_3)$. En déduire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

   (c) Vérifier la relation $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

   On note D la matrice diagonale précédente.

   (d) Calculer la matrice $\Delta = P^{-1}BP$ et vérifier qu'elle est diagonale.

2. On se propose de calculer les matrices colonne X_n définies par les relations $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+2} = AX_{n+1} + BX_n$. A cet effet, on définit pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $Y_n = P^{-1}X_n$ et on pose également $Y_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que $Y_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $Y_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

   (b) Montrer que pour tout entier naturel n, $Y_{n+2} = DY_{n+1} + \Delta Y_n$.

   (c) Montrer alors que pour tout entier naturel n, $\begin{cases} u_{n+2} = u_{n+1} \\ v_{n+2} = 4v_n \\ w_{n+2} = -4w_{n+1} - 4w_n \end{cases}$ En déduire les expressions explicites de u_n, v_n et w_n en fonction de n.

   (d) Donner finalement la matrice X_n , en fonction de n .

Exercice 12 (EM Lyon 2010) (***)

Partie I : Un endomorphisme de l'espace vectoriel des matrices symétriques d'ordre 2.

- Dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on note $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- On note $\mathcal{S}_2$ l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre 2.

1. Calculer les produits AFA, AGA, AHA.
2. Montrer que $\mathcal{S}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et que (F, G, H) est une base de $\mathcal{S}_2$. En déduire la dimension de $\mathcal{S}_2$.
3. On note u l'application qui à chaque matrice S de $\mathcal{S}_2$, associe la matrice $u(S) = ASA$.
   (a) Montrer que $\forall S \in \mathcal{S}_2,\ u(S) \in \mathcal{S}_2$.
   (b) Montrer que u est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{S}_2$.
   (c) Donner la matrice de u dans la base (F, G, H) de $\mathcal{S}_2$.

Partie II : Diagonalisation d'une matrice carrée d'ordre 3.

On note désormais : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \\ 4 & 12 & 9 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$.

1. On note v l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est M. Vérifier que -4, 1, 16 sont valeurs propres de v et déterminer, pour chacune de celles-ci, les vecteurs propres associés. En déduire une base dans laquelle la matrice de v est diagonale.
2. Déterminer la matrice de passage P entre la base cacnonique et la base construite à la question précédente. Calculer la matrice $D = P^{-1}MP$.
3. Vérifier que $(D + 4I)(D - I)(D - 16I)$ est la matrice nulle.
4. En déduire que $M^3 = 13M^2 + 52M - 64I$.
5. Établir que $u^3 = 13u^2 + 52u - 64e$, où e désigne l'application identité de $\mathcal{S}_2$ et où u est l'application définie dans la première partie.

Corrigé de la feuille d'exercices n°26

Exercice 1 (*)

L'application u est bien linéaire : si P et Q sont deux polynômes, et (λ, μ) un couple de réels, $u(\lambda P + \mu Q) = X(\lambda P + \mu Q)' - (\lambda P + \mu Q) = \lambda XP' + \mu XQ' - \lambda P - \mu Q = \lambda u(P) + \mu u(Q)$. Son noyau est constitué des polynômes vérifiant $XP' - P$. Comme on est dans $\mathbb{R}_2[X]$, on peut écrire $P(X) = aX^2 + bX + c$, donc la condition devient $X(2aX + b) - (aX^2 + bX + c) = 0$, soit $aX^2 + c = 0$. Cela n'est possible que si $a = c = 0$, donc $Ker(u) = \{aX \mid a \in \mathbb{R}\} = Vect(X)$.

Quant à l'image de u, calculons les images par u des éléments de la base canonique : $u(1) = -1$; $u(X) = 0$ et $u(X^2) = 2X^2 - X^2 = X^2$. On en déduit que $Im(u) = Vect(1, X^2)$.

Exercice 2 (**)

Pour la première application, on a comme matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Le noyau est l'ensemble des solutions du système homogène correspondant $\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & & & = & 0 \\ -2x & + & y & + & z & = & 0 \end{array} \right.$. La première équation donne $y = -x$, puis en remplaçant dans la deuxième $-3x + z = 0$, donc $z = 3x$. On a donc $Ker(u) = \{(x, -x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\} = Vect((1, -1, 3))$. Pour obtenir l'image, calculons les images par u des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$: $u(1, 0, 0) = (1, -2)$; $u(0, 1, 0) = (1, 1)$ et $u(0, 0, 1) = (0, 1)$. On a donc $Im(u) = Vect((1, -2); (1, 1); (0, 1))$. Mais cette famille n'est pas libre et par ailleurs engendre $\mathbb{R}^2$ tout entier (en effet, on a par exemple $(x, y) = x(1, 1) + (y - x)(0, 1)$). On a donc en fait $Im(u) = \mathbb{R}^2$.

La matrice de la deuxième application est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Le noyau est l'ensemble des solutions d'un système qui peut s'écrire sous la forme $y = -x$; $z = -x$ et $z = -y$, donc $x = -x = 0$, puis $y = z = 0$. Le noyau de u est donc réduit au vecteur nul (autrement dit, u est injective). L'image est engendrée par les trois vecteurs $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ et $(0, 1, 1)$ et on vérifie facilement que cette famille est libre (le système à résoudre est le même que pour le calcul du noyau). Il s'agit donc d'une base de $\mathbb{R}^3$ (puisqu'elle comporte trois élémants), donc $Im(u) = \mathbb{R}^3$ (en fait, u est une application bijective, ce qu'on peut également prouver en constatant que sa matrice est inversible).

Rappelons que la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ est constituée des polynomes 1, X, X^2 et X^3. On a $u(1) = (1, 1, 1, 1)$; $u(X) = (1, 2, 3, 4)$; $u(X^2) = (1, 4, 9, 16)$ et enfin $u(X^3) = (1, 8, 27, 64)$, donc la matrice de u dans les bases canoniques est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix}$. Le noyau de u est constitué des polynomes de degré 3 qui s'annulent pour $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ et $x = 4$. Mais un tel polynome, s'il n'est pas nul, se factorise par $(X - 1)(X - 2)(X - 3)(X - 4)$, et doit donc être de degré au moins 4. On a donc $Ker(u) = \{0\}$. Quand à l'image, elle est engendrée par les quatre vecteurs calculés plus haut. Montrons que la famille est libre : si une combinaison linéaire de ces quatre vecteurs s'annule, cela signifie que le polynome correspondant s'annule en 1, 2, 3 et 4, ce dont on a déjà dit que c'était impossible sauf pour le polynome nul. L'image est donc de dimension 4, donc $Im(u) = \mathbb{R}^4$.

Exercice 3 (*)

La matrice de f dans les bases canoniques est $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Vérifions qu'elle est inversible. Pour cela, on va plutôt résoudre le système formé des deux équations $x + y = a$ et $x - y = b$. En faisant la somme des deux, on obtient $x = \dfrac{a+b}{2}$, et en faisant la différence $y = \dfrac{a-b}{2}$. Le système est donc bien de Cramer, et la matrice inverse est $M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $f^{-1}(a,b) = \left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x-y}{2}\right)$.

Exercice 4 (**)

- Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a alors $AM = \begin{pmatrix} -a & -b \\ a-c & b-d \end{pmatrix}$ et $MB = \begin{pmatrix} -a & a-b \\ -c & c-d \end{pmatrix}$. On a donc $AM - MB = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & b-c \end{pmatrix}$. Cette matrice est nulle seulement si $a = 0$ et $b = c$, donc $Ker(u) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & d \end{pmatrix} \mid b, d \in \mathbb{R}^2 \right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$.

- Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a alors $AM = \begin{pmatrix} -a & -b \\ a-c & b-d \end{pmatrix}$ et $MA = \begin{pmatrix} -a+b & -b \\ -c+d & -d \end{pmatrix}$. On a donc $AM - MA = \begin{pmatrix} -b & 0 \\ a-d & b \end{pmatrix}$. Cette matrice est nulle seulement si $b = 0$ et $a = d$, donc $Ker(u) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix} \mid a, c \in \mathbb{R}^2 \right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$.

- Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. On a alors $AM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix}$ et $MA = \begin{pmatrix} 0 & b & 2c \\ 0 & e & 2f \\ 0 & h & 2i \end{pmatrix}$. On a donc $AM - MA = \begin{pmatrix} 0 & -b & -2c \\ d & 0 & -f \\ 2g & h & 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice est nulle seulement si $b = c = d = f = g = h = 0$, donc $Ker(u) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \mid a, e, i \in \mathbb{R}^3 \right\}$ $= Vect\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$. Autrement dit, $Ker(u)$ est l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. On a alors $AM = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix}$ et $MA = \begin{pmatrix} a & b & 2c \\ d & e & 2f \\ g & h & 2i \end{pmatrix}$. On a donc $AM - MA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & -f \\ g & h & 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice est nulle seulement si $c = f = g = h = 0$, donc $Ker(u) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \mid a, b, d, e, i \in \mathbb{R}^5 \right\}$, qu'on peut bien sûr écrire comme d'habitude comme espace vectoriel engendré ici par 5 matrices.

Exercice 5 (*)

Le noyau de p est constitué des solutions du système homogène $\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & 2y & = & 0 \\ 2x & + & 4y & = & 0 \end{array}\right.$. Les deux équations sont proportionnelles et équivalentes à $x = -2y$, donc $Ker(p) = \{(-2y, y) \mid y \in \mathbb{R}\} = Vect((-2,1))$. L'image de p est engendrée par les images de $(1,0)$ et de $(0,1)$, qui valent $\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$ et $\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$. Ces deux vecteurs étant proportionnels, on a simplement $Im(p) = Vect\left(\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)\right)$ (ou même $Im(p) = Vect((1,2))$ si on veut faire plus simple). Pour calculer p^2, rien de plus simple : $p(p(x,y)) = \frac{1}{25}(x+2y+2(2x+4y), 2(x+2y)+4(2x+4y)) = \frac{1}{25}(5x+10y, 10x+20y) = \frac{1}{5}(x+2y, 2x+4y)$, on a bien $p^2 = p$ (ce qui fait de p ce qu'on appelle en termes techniques un projecteur).

Exercice 6 (**)

1. Par définition, la matrice est constituée des coordonnées données dans l'énoncé disposées en colonnes, elle vaut donc $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Il faut résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & - & 7z & = & -1 \\ -x & + & 2y & + & 4z & = & 1 \\ 2x & - & y & + & z & = & 8 \end{array}\right.$

   $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & - & 7z & = & -1 \\ & & -y & - & 3z & = & 0 \\ & & -5y & - & 15z & = & -10 \end{array}\right.$

   Les deux dernières équations étant incompatibles, $(-1,1,8)$ nn'a pas d'antécédent par u.

   De même, pour le deuxième vecteur, il faut résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & - & 7z & = & -2 \\ -x & + & 2y & + & 4z & = & 1 \\ 2x & - & y & + & z & = & 3 \end{array}\right.$

   $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & - & 7z & = & -2 \\ & & -y & - & 3z & = & -1 \\ & & -5y & - & 15z & = & -5 \end{array}\right.$

   Cette fois-ci, les deux dernières équations sont équivalentes et donnent $y = 1 - 3z$. En remplaçant dans la première équation, on obtient $x - 3 + 9z - 7z = -2$, soit $x = 1 - 2z$. Finalement, les antécédents de $(-2,1,3)$ sont les vecteurs de la forme $(1-2z, 1-3z, z)$, pour une certaine valeur réelle de z.
3. u n'est pas injective ni surjective puisque certains éléments ont une infinité d'antécédents, et d'autres n'en ont pas.

Exercice 7 (*)

Les matrices appartenant au noyau de u sont celles vérifiant $a = c$, $a = b$ et $d = 0$, donc $Ker(u) = \left\{\begin{pmatrix} a & a \\ a & 0 \end{pmatrix}\right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$. Quant à l'image on l'obtient comme d'habitude en regardant les images des vecteurs de la base canonique : $Im(u) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$. On peut constater que les trois premières images ne forment pas une famille libre (leur somme est nulle) et pousser un peu les calculs pour obtenir que les matrices appartenant à l'image sont exactement celles vérifiant $c = d$.

Exercice 8 (***)

1. Il s'agit de résoudre le système $AX = 0$, c'est-à-dire $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 16x & + & 4y & - & 4z & = & 0 \\ -18x & - & 4y & + & 5z & = & 0 \\ 30x & + & 8y & - & 7z & = & 0 \end{array}\right.$. La somme $L_1 - L_2$ donne $z - 2x = 0$, la combinaison $2L_1 - L_3$ donne $2x - z = 0$. Ces deux équations étant équivalentes, le système n'est pas de Cramer, ses solutions doivent vérifier $z = 2x$ puis, en divisant la première ligne par 4, $4x + y - z = 0$, donc $y = z - 4x = -2x$. Finalement $Ker(u) = \{(x, -2x, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\} = Vect((1, -2, 2))$.
2. Encore des systèmes à résoudre :
$$u(x,y,z) = (x,y,z) \Leftrightarrow MX = X \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 16x & + & 4y & - & 4z & = & x \\ -18x & - & 4y & + & 5z & = & y \\ 30x & + & 8y & - & 7z & = & z \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 15x & + & 4y & - & 4z & = & 0 \\ -18x & - & 5y & + & 5z & = & 0 \\ 30x & + & 8y & - & 8z & = & 0 \end{array}\right.$$
Cette fois-ci, les lignes L_1 et L_3 sont manifestement proportionnelles. De plus, $5L_1 + 4L_2$ donne $x = 0$. Les deux premières équations se réduisent alors à $y = z$, ce qui signifie que tous les vecteur de la forme $(0, y, y)$, avec $y \neq 0$, sont vecteurs propres de u associés à la valeur propre 1.
Même technique pour $u(x,y,z) = 4(x,y,z)$, on se ramène au système homogène suivant :
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 12x & + & 4y & - & 4z & = & 0 \\ -18x & - & 8y & + & 5z & = & 0 \\ 30x & + & 8y & - & 11z & = & 0 \end{array}\right.$$
La somme $L_2 + L_3$ donne $12x - 6z = 0$, soit $z = 2x$, et la combinaison $L_3 - 2L_1$ donne $6x - 3z = 0$, ce qui est une équation équivalente. Encore une fois, le système n'est pas de Cramer, et en remplaçant dans la première équation on obtient $12x + 4y - 8x = 0$, soit $y = -x$. Finalement, les vecteurs propres sont de la forme $(x, -x, 2x)$, avec $x \neq 0$.
3. On a trouvé trois vecteurs propres associés à trois valeurs propres distinctes (en comptant le noyau calculé à la question précédente, qui correspond à la valeur propre 0). La famille formée de ces trois vecteurs sera une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u sera diagonale. Plus précisément, en posant par exemple $\mathcal{B} = ((1,-2,2); (0,1,1); (1,-1,2))$, la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ sera $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
4. La matrice de passage est $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Il ne reste plus qu'à l'inverser. Pour changer du pivot de Gauss, résolvons le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & & & z & = & a \\ -2x & + & y & - & z & = & b \\ 2x & + & y & + & 2z & = & c \end{array}\right.$. On a donc $x = a - z$, et en faisant la somme des deux dernières équations $2y + z = b + c$, soit $2y = b + c - z$. En remplaçant dans la dernière équation, $2a - 2z + \frac{b}{2} + \frac{c}{2} - \frac{z}{2} + 2z = c$, soit $z = 4a + b - c$; puis $x = -3a - b + c$ et $y = b + z - 2x = -2a + c$. C'est-à-dire que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 9 (***)

Ce n'est pas si difficile si on comprend bien ce qu'il faut faire. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, λ sera valeur propre pour l'application f si on peut trouver une suite bornée (u_n) non nulle telle que $f(u_n) = \lambda u_n$, c'est-à-dire si, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \lambda u_n$, ou encore $u_{n+1} = (1+\lambda)u_n$. De telles suites existent bien évidemment, ce sont toutes les suites géométriques de raison $1 + \lambda$. Mais pour que celles-ci (à l'exception de la suite nulle) soient bornées, il faut absolument avoir $|1+\lambda| \leqslant 1$, c'est-à-dire $-1 \leqslant 1+\lambda \leqslant 1$, ou encore $-2 \leqslant \lambda \leqslant 0$. Les valeurs propres de f sont donc tous les nombres réels compris dans l'intervalle $[0;2]$ (une situation très différente de ce que vous étudierez l'an prochain, où les valeurs propres seront systématiquement en nombre fini).

Exercice 10 (EDHEC 2001) (***)

1. (a) Au vu de la définition de f_a, on a $A_a = \begin{pmatrix} a & 0 & -a \\ 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & -a \end{pmatrix}$. On calcule sans problème $A_a^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   (b) Si $A_aX = \lambda X$, on aura $A_a^2X = \lambda A_aX = \lambda^2 X$. Or $A_a^2X = 0$ d'après le calcul précédent, donc $\lambda^2 = 0$ et $\lambda = 0$.

   (c) Non, avec une colonne composée de 0, elle ne peut pas être inversible.

2. (a) La famille étant constitué de 3 vecteurs, il suffit de prouver qu'elle est libre. Supposons que $\lambda u_1 + \mu e_2 + \nu e_3 = 0$, alors $\lambda a e_1 + (\lambda + \mu)e_2 + (\nu - \lambda a)e_3 = 0$. La famille (e_1, e_2, e_3) étant supposée être une base, on a alors $\lambda a = \lambda + \mu = \nu - \lambda a = 0$, dont découle facilement $\lambda = \mu = \nu = 0$ (a étant supposé non nul). La famille est donc libre, et constitue une base de E.

   (b) En effet, par linéarité, $f(u_1) = af(e_1) + f(e_2) - af(e_3) = 0$, $f(e_2) = 0$ et $f(e_3) = u_1$, ce qui correspond bien à la matrice donnée.

3. (a) La matrice de $g \circ g$ dans la base $\mathcal{B}'$ est $M \times M = M^2$, celle de f est K, si les deux applications sont égales, on doit donc avoir $M^2 = K$. On en déduit que $MK = MM^2 = M^3 = M^2M = KM$.

   (b) Commençons par chercher les matrices commutant avec K : si $M = \begin{pmatrix} b & c & d \\ e & f & g \\ h & i & j \end{pmatrix}$, alors $KM = \begin{pmatrix} h & i & j \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $MK = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}$, l'égalité des deux matrices impose donc $e = h = i = 0$ et $b = j$, soit $M = \begin{pmatrix} b & c & d \\ 0 & f & g \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$. On peut alors calculer $M^2 = \begin{pmatrix} b^2 & bc+cf & 2bd+cg \\ 0 & f^2 & fg+gb \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix}$. Cette matrice doit être égale à K, ce qui impose $b^2 = f^2 = 0$, donc $b = f = 0$ (ce qui annule deux autres coefficients de la matrice). Il ne reste plus que la condition $cg = 1$, donc $M = \begin{pmatrix} 0 & c & d \\ 0 & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $cg = 1$, ce qui correspond à la forme de l'énoncé.

4. C'est évident, si la matrice de g ressemble à ceci, son carré est égal à K, donc $g \circ g = f_a$.

Exercice 11 (ESC 2001) (***)

1. (a) La famille étant constituée de trois vecteurs dans un espace de dimension 3, il suffit de vérifier qu'elle est libre. Supposons donc que $a(1,2,1)+b(1,-1,0)+c(1,1,1) = (0,0,0)$. Cela revient à chercher les solutions du système $\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 2a - b + c = 0 \\ a + c = 0 \end{cases}$. La différence des deux équations extrêmes donne immédiatement $b = 0$, et on a ensuite $a+c = 2a+c = 0$, dont on déduit que $a = c = 0$, donc la famille est libre, et constitue une base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Calculons donc : $f(v_1) = A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $f(v_1) = v_1$. De même, on obtient $f(v_2) = (0,0,0)$ et $f(v_3) = (-4,-4,-4) = -4v_3$. La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ (qui est constituée de vecteurs propres pour f est donc $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

   (c) La matrice P étant la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$, $P^{-1}AP$ représente la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, c'est-à-dire la matrice calculée à la question précédente, qui coïncide bien avec D.

   (d) Plutôt que de calculer P^{-1} et finir par un produit matriciel, considérons g l'endomorphisme dont B est la matrice dans la base canonique. On a $g(1,2,1) = (0,0,0)$; $g(1,-1,0) = (4,-4,0) = 4(1,-1,0)$ et $g(1,1,1) = (-4,-4,-4) = -4(1,1,1)$. Les vecteurs de la base $\mathcal{B}$ sont donc également vecteurs propres pour g, et la matrice de g dans cette base (qui est égale à $P^{-1}BP$, est donc diagonale (de coefficients diagonaux 0, 4 et -4).

2. (a) Constatons qu'en multipliant à gauche par P, $Y_n = P^{-1}X_n \Leftrightarrow PY_n = X_n$. Il suffit maintenant de vérifier que $P\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = X_0$, et de même que $P\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = X_1$, ce qui est vrai.

   (b) En effet, $Y_{n+2} = P^{-1}X_{n+2} = P^{-1}AX_{n+1} + P^{-1}BX_n = DP^{-1}X_{n+1} + \Delta P^{-1}X_n = DY_{n+1} + \Delta Y_n$.

   (c) Le système s'obtient simplement en reprenant les expressions obtenues pour D et Δ. On déduit de la première relation que la suite (u_n) est constante à partir du rang 1, donc $\forall n \geqslant 1$, $u_n = -3$; la suite des termes pairs de (v_n), mais également celle des termes impairs, est géométrique de raison 4. Comme $v_0 = 0$, on aura toujours $v_{2n} = 0$; par contre, $v_{2n+1} = 4^n v_1 = -4^n$. Enfin, la suite (w_n) est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2+4x+4 = 0$, soit $(x+2)^2 = 0$, donc $w_n = (\alpha+\beta n) \times (-2)^n$. La condition $w_0 = 1$ impose $\alpha = 2$, et la condition $w_1 = 1$ donne $-2(\alpha+\beta) = 4$, donc $\alpha + \beta = -2$, d'où $\beta = -4$, soit $w_n = (2-4n)(-2)^n$.

   (d) Il ne reste plus qu'à calculer $X_n = PY_n$. Si n est pair (non nul), on obtient $X_n = \begin{pmatrix} -4+(2-4n)(-2)^n \\ -6+(2-4n)(-2)^n \\ -3+(2-4n)(-2)^n \end{pmatrix}$, si n est impair, $X_n = \begin{pmatrix} -3-4^{\frac{n-1}{2}}+(2-4n)(-2)^n \\ -6+4^{\frac{n-1}{2}}+(2-4n)(-2)^n \\ 3+(2-4n)(-2)^n \end{pmatrix}$.

Exercice 12 (EM Lyon 2010) (***)

Partie I

1. On calcule $AF = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ puis $AFA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$; $AG = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ puis $AGA = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$ et $AH = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ puis $AHA = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

2. Une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{S}_2$ si $b = c$, donc $S_2 = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = Vect(F, G, H)$. Les trois matrices formant manifestement une famille libre (une combinaison linéaire des trois aura du mal à s'annuler), c'est une base de S_2, qui est donc de dimension 3.

3. (a) La linéarité est facile à prouver : $A(\lambda S + \mu T)A = \lambda ASA + \mu ATA$. D'après la question précédente, si $S \in \mathcal{S}_2$, $S = \alpha F + \beta G + \gamma H$, donc par linéarité $u(S) = \alpha AFA + \beta AGA + \gamma AHA$. Chacune des trois matrices AFA, AGA et AHA étant symétrique (on les a calculées plus haut), $u(S)$ l'est aussi. L'application u est bien linéaire de $\mathcal{S}_2$ dans lui-même.

   (b) Ah ben, on a déjà tout fait !

   (c) Comme $u(F) = AFA = 4H$; $u(G) = AGA = 4G+12H$ et $u(H) = AHA = 4A+6G+9H$, la matrice recherchée est exactement la matrice M introduite un peu plus loin dans l'énoncé.

Partie II

1. Pour prouver que -4 est valeur propre, il s'agit de résoudre, pour un vecteur-colonne à trois lignes X, le système $MX = -4X$, c'est-à-dire $\begin{cases} & & 4z = -4x \\ & 4y & + \ 6z = -4y \\ 4x & + \ 12y & + \ 9z = -4z \end{cases}$. Via les deux premières équations, $x = -z$ et $y = -\frac{3}{4}z$, et la dernière équation est alors automatiquement vérifiée. Le réel -4 est donc bien valeur propre de v, avec pour vecteurs propres les vecteurs de la forme $\left(-z, -\frac{3}{4}z, z\right)$, avec $z \neq 0$.

   De même, le système $\begin{cases} & & 4z = x \\ & 4y & + \ 6z = y \\ 4x & + \ 12y & + \ 9z = z \end{cases}$ donne $x = 4z$ et $y = -2z$, et la dernière équation est alors toujours vérifie, donc 1 est valeur propre, avec des vecteurs propres de la forme $(4z, -2z, z)$, pour $z \neq 0$.

   Enfin, le système $\begin{cases} & & 4z = 16x \\ & 4y & + \ 6z = 16y \\ 4x & + \ 12y & + \ 9z = 16z \end{cases}$ donne $z = 4x$ et $z = 2y$, donc $y = 2x$, et encore une fois la dernière équation est alors toujours vérifiée, donc 16 est valeur propre, avec des vecteurs propres de la forme $(x, 2x, 4x)$, $x \neq 0$.

   La matrice de v devient donc par exemple diagonale dans la base suivante : $((4, 3, -4); (4, -2, 1); (1, 2, 4))$.

2. La matrice de passage s'écrit $P = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. La matrice $P^{-1}MP$ est la matrice représentant v dans sa base de vecteurs propres, c'est donc une matrice diagonale de coefficients diagonaux -4, 1 et 16. Autrement dit, $P^{-1}MP = D$.

3. En effet, c'est vrai...

4. Commençons par tout développer dans l'égalité précédente : $D^3 - 13D^2 - 52D + 64I = 0$. En multipliant l'égalité précédente à gauche par P et à droite par P^{-1}, on a $PD^3P^{-1} = 13PD^2P^{-1} - 52PDP^{-1} + 64I$. Or, $M = PDP^{-1}$, $M^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$ et $M^3 = M^2 \times M = PD^2P^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$, d'où l'égalité demandée.
5. C'est évident puisque u^3 est représenté dans la base (F, G, H) par M^3, u^2 par M^2 et e par I (ça c'est vrai dans n'importe quelle base).

Sujet d'annales : EM Lyon 1997

ECE3 Lycée Carnot

22 juin 2011

Exercice 1

Soient a, b, c trois reels tous non nuls, et M la matrice carrée d'ordre 3 suivante : $M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{b} & \frac{a}{c} \\ \frac{b}{a} & 1 & \frac{b}{c} \\ \frac{c}{a} & \frac{c}{b} & 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Montrer $M^2 = 3M$.
   (b) En déduire que l'ensemble des valeurs propres de M est inclus dans $\{0; 3\}$.
2. (a) Déterminer, pour chaque valeur propre de M, les vecteurs propres associés.
   (b) La matrice M est-elle diagonalisable ?

   On note $P = \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & -b & 0 \\ c & 0 & -c \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a} & -\frac{2}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & -\frac{2}{c} \end{pmatrix}$.
3. (a) Calculer PQ. Montrer que P est inversible. Quel est son inverse ?
   (b) Vérifier que $M = PDP^{-1}$.
4. Déterminer l'ensemble des matrices Y de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $DY - YD = 3Y$
5. Montrer que l'ensemble des matrices X de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $MX - XM = 3X$ est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Le but de l'exercice est l'étude des extremums de la fonction à deux variables $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + e^{-x}$.

1. (a) Établir que l'équation $e^{-x} = x$, admet une solution et une seule.
   (b) Montrer qu'il existe point critique pour la fonction f et établir que $x_0 - e^{-x_0} = 0$ et $y_0 = \dfrac{x_0}{2}$.
   (c) Montrer que f admet un extremum en (x_0, y_0). Est-ce un minimum ou un maximum ?
2. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = \dfrac{1+x}{1+e^x}$.
   (a) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une solution et une seule, que celle-ci est x_0, et que $\dfrac{1}{2} < x_0 < 1$.
   (b) Former le tableau de variations de g et tracer sa courbe représentative (repère orthonormé, unité 5 cm).
   (c) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$. Établir que la suite (u_n) est croissante et converge vers x_0.

(d)
i. Montrer : $\forall x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$, $|g'(x)| \leqslant \frac{1}{8}$.

ii. Établir que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - x_0| \leqslant \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}$.

iii. En déduire une valeur approchée décimale de x_0 à 10^{-8} près.

iv. Montrer que $f(x_0, y_0) = \frac{x_0^2}{2} + x_0$, et en déduire une valeur approchée décimale à 10^{-7} près de $f(x_0, y_0)$.

Exercice 3

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et d'une pièce truquée telle que la probabilité d'apparition de Pile soit égale à p. On pourra noter $q = 1 - p$. Soit N un entier naturel non nul fixé. On effectue N lancers du dé ; si n est le nombre de 6 obtenus, on lance alors n fois la pièce. On définit trois variables aléatoires X, Y et Z de la manière suivante :

- Z indique le nombre de 6 obtenus aux lancers du dé,
- X indique le nombre de Pile obtenus aux lancers de la pièce,
- Y indique le nombre de Face obtenus aux lancers de la pièce.

Ainsi, $X + Y = Z$ et, si Z prend la valeur 0, alors X et Y prennent la valeur 0.

1. Préciser la loi de Z, son espérance et sa variance.
2. Pour $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, déterminer la probabilité conditionnelle $P_{Z=n}(X = k)$. On distinguera les cas : $k \leqslant n$ et $k > n$.
3. Montrer, pour tout couple d'entiers naturels (k, n) :
   - si $0 \leqslant k \leqslant n \leqslant N$ alors $P((X = k) \cap (Z = n)) = \binom{n}{k}\binom{N}{n} p^k (1-p)^{n-k} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1}{6}\right)^n$.
   - si $n > N$ ou $k > n$ alors $P((X = k) \cap (Z = n)) = 0$.
4. Calculer la probabilité $P(X = 0)$.
5. Montrer pour tout couple d'entiers naturels (k, n) tel que $0 \leqslant k \leqslant n \leqslant N$ que $\binom{n}{k}\binom{N}{n} = \binom{N}{k}\binom{N-k}{n-k}$.

   En déduire la probabilité $P(X = k)$.
6. Montrer que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre $\left(N, \frac{p}{6}\right)$. Quelle est la loi de la variable aléatoire Y ?
7. Est-ce que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes ?

   Déterminer la loi du couple (X, Y).
8. En comparant les variances de Z et de $X + Y$, déterminer la covariance du couple (X, Y).

Corrigé du sujet EM Lyon 1997

Exercice 1

1. (a) En effet, $M^2 = \begin{pmatrix} 1+1+1 & \frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\frac{a}{b} & \frac{a}{c}+\frac{a}{c}+\frac{a}{c} \\ \frac{b}{a}+\frac{b}{a}+\frac{b}{a} & 1+1+1 & \frac{b}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{c} \\ \frac{c}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{a} & \frac{c}{b}+\frac{c}{b}+\frac{c}{b} & 1+1+1 \end{pmatrix} = 3M$.

   (b) Supposons donc qu'un certain réel λ soit valeur propre de la matrice M. On peut donc trouver une matrice-colonne X non nulle telle que $MX = \lambda X$. Mais alors, en multipliant cette égalité à gauche par M, on obtient $M^2X = \lambda MX$, donc en exploitant la question précédente, $3MX = \lambda MX$, ce qui ne peut se produire que si $\lambda = 3$, ou $MX = 0$, cette deuxième hypothèse signifiant que X est vecteur propre pour la valeur propre 0. Conclusion : les deux seules valeurs propres possibles sont 0 et 3.

2. (a) Cherchons donc les éléments du noyau (c'est-à-dire les vecteurs propres associés à la valeur propre 0). soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, alors $MX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{a}{b}y + \frac{a}{c}z = 0 \\ \frac{b}{a}x + y + \frac{b}{c}z = 0 \\ \frac{c}{a}x + \frac{c}{b}y + z = 0 \end{cases}$
Les trois équations de ce système sont en fait équivalentes (en multipliant la première par $\frac{b}{a}$ et $\frac{c}{a}$ respectivement, on obtient la deuxième et la troisième). En gardant la première équation, le système est donc équivalent à $x = -\frac{a}{b}y - \frac{a}{c}z$, ses solutions sont donc $\mathcal{S} = \left\{\left(-\frac{a}{b}y - \frac{a}{c}z; y; z\right)\right\} = Vect\left(\left(-\frac{a}{b}, 1, 0\right); \left(-\frac{a}{c}, 0, 1\right)\right) = Vect((a, -b, 0); (a, 0, -c))$. Ces deux vecteurs n'étant pas proportionnel, le noyau est donc de dimension 2. Procédons de même pour déterminer les vecteurs propres associés à la valeur propre 3, ce qui revient à résoudre le système $\begin{cases} x + \frac{a}{b}y + \frac{a}{c}z = 3x \\ \frac{b}{a}x + y + \frac{b}{c}z = 3y \\ \frac{c}{a}y + \frac{c}{b}y + z = 3z \end{cases}$, ce qui donne $\begin{cases} 2x = \frac{a}{b}y + \frac{a}{c}z \\ 2y = \frac{b}{a}x + \frac{b}{c}z \\ 2z = \frac{c}{a}x + \frac{c}{b}y \end{cases}$ La deuxième équation donne $\frac{a}{b}y = \frac{x}{2} + \frac{a}{2c}z$, et la troisième $\frac{a}{c}z = \frac{x}{2} + \frac{a}{2b}y$. En remplaçant dans la première équation, on obtient $2x = \frac{x}{2} + \frac{a}{2c}z + \frac{x}{2} + \frac{a}{2b}y = x + x$ (en exploitant à nouveau la première équation du système initial), équation toujours vérifiée. On peut donc se limiter aux deux dernières équations du système. En multipliant par exemple la dernière par $\frac{2b}{c}$, on a $2y = \frac{4b}{c}z - \frac{2b}{a}x$, d'où en injectant dans la deuxième équation $\frac{4b}{c}z - \frac{2b}{a}x = \frac{b}{a}x + \frac{b}{c}z$, soit $z = \frac{c}{a}x$. En découle $2y = \frac{4b}{a}x - \frac{2b}{a}x$, donc $y = \frac{b}{a}x$, et enfin $\mathcal{S} = vect\left(\left(1, \frac{b}{a}, \frac{c}{a}\right)\right) = Vect((a, b, c))$.

   (b) On vient de voir que $((a, b, c); (a, -b, 0); (a, 0, -c))$ formait une base constituée de vecteurs propres de la matrice M, qui est donc diagonalisable.

3. (a) On calcule donc $PQ = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I$. La matrice P est donc inversible, d'inverse $P^{-1} = \frac{1}{3}Q$.

(b) Pas vraiment besoin de calcul pour vérifier, au vu des calculs effectués plus haut, la matrice P est matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres 3, 0 et 0. Le produit $P^{-1}MP$ est donc la matrice diagonale D, d'où $M = P(P^{-1}MP)P^{-1} = PDP^{-1}$.

4. Considérons donc une matrice $Y = \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ j & k & l \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on a alors $DY - YD = \begin{pmatrix} 3d & 3e & 3f \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3d & 0 & 0 \\ 3g & 0 & 0 \\ 3j & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3e & 3f \\ -3g & 0 & 0 \\ -3j & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Pour avoir $DY - YD = 3Y$, tous les coefficients de la matrice doivent donc être nuls à l'exception de e et f, qui peuvent être choisis comme on veut.

5. Si $MX - XM = 3X$, alors $PDP^{-1}X - XPDP^{-1} = 3X$, soit en multipliant par P^{-1} à gauche et P à droite, $DP^{-1}XP - P^{-1}XPD = 3P^{-1}XP$. En notant $Y = P^{-1}XP$, Y est donc solution de l'équation $DY - YD = 3Y$ que nous venons de résoudre. on en déduit que $X = PYP^{-1} = P\begin{pmatrix} 0 & e & f \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} e+f & \frac{a(f-2e)}{b} & \frac{a(e-2f)}{c} \\ \frac{b(e+f)}{a} & f-2e & \frac{b(e-2f)}{c} \\ \frac{c(e+f)}{a} & \frac{c(f-2e)}{b} & e-2f \end{pmatrix}$
$= Vect\left(\begin{pmatrix} 1 & \frac{-2a}{b} & \frac{a}{c} \\ \frac{b}{a} & -2 & \frac{b}{c} \\ \frac{c}{a} & \frac{-2c}{b} & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{b} & \frac{-2a}{c} \\ \frac{b}{a} & 1 & \frac{-2b}{c} \\ \frac{c}{a} & \frac{c}{b} & -2 \end{pmatrix}\right)$, qui est bien un espace de dimension car les deux matrices ne sont pas proportionnelles (il suffit de regarder leur diagonale).

Exercice 2

1. (a) Notons h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^{-x} - x$. La fonction h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ comme somme de deux fonction décroissantes ($x \mapsto e^{-x}$ étant elle-même composée d'une fonction croissante et d'une décroissante, donc décroissante), et $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$ (pas de forme indéterminée, tout tend vers $+\infty$), et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$ (pas de forme indéterminée non plus). La foncton h est donc bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et s'annule une fois exactement sur $\mathbb{R}$. cela revient à dire que l'équation $e^{-x} - x = 0$ admet une solution unique, ce qui est équivalent à ce qu'on nous demande de prouver.

   (b) Calculons les dérivées partielles de la fonction f : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - 2y - e^{-x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2x + 4y$. Les points critiques de la fonction vérifient donc (deuxième équation) $y = \dfrac{1}{2}x$, puis en réinjectant dans la première équation $x - e^{-x} = 0$. Cela est assez clairement équivalent au système donné dans l'énoncé.

   (c) Pour cela, nous allons avoir besoin des dérivées partielles secondes : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 + e^{-x}$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 4$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -2$. On a donc $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) \times \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) - \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\right)^2 = 4(2+e^{-x}) - 4 > 0$. Il y a donc un extremum, et comme les deux premières dérivées partielles secondes sont strictement positives en (x_0, y_0), il s'agit d'un minimum local.

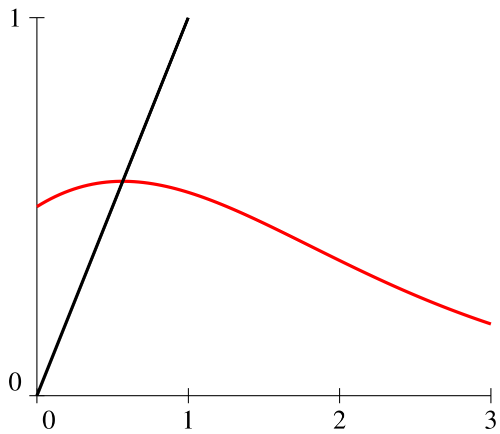
2. (a) On constate que $g(x) = x \Leftrightarrow x(1+e^x) = 1 + x \Leftrightarrow xe^x = 1 \leftrightarrow x = e^{-x}$. Ceci admet bien une solution égale à x_0 sur $\mathbb{R}_+$ (le réel x_0 est positif puisqu'il est égal par définition à e^{-x_0}). On a caractérisé plus haut x_0 comme unique point d'annulation de la fonction h. Or, $h\left(\dfrac{1}{2}\right) = e^{-\frac{1}{2}} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{e}} - \dfrac{1}{\sqrt{4}} > 0$ car $\sqrt{e} < \sqrt{4}$; et $h(1) = \dfrac{1}{e} - 1 < 0$, donc par le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction h s'annule sur l'intervalle $\left]\dfrac{1}{2}; 1\right[$. Comme

x_0 est son seul point d'annulation, $\frac{1}{2} < x_0 < 1$.

(b) La fonction g est évidemment $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$, et $g'(x) = \frac{1+e^x - e^x(1+x)}{(1+e^x)^2} = \frac{1-xe^x}{(1+e^x)^2}$. Au vu des calculs précédents, le numérateur s'annule une seule fois en x_0. De plus, $g(0) = \frac{1}{2}$; $g(x_0) = x_0$ (par définition), et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ car $g(x) \sim \frac{x}{e^x}$ en $+\infty$. D'où le tableau suivant :

x	0		x_0		$+\infty$
$g(x)$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	x_0	$\searrow$	0

Et la courbe correspondante :



(c) L'intervalle $[0; x_0]$ étant stable par g, on prouve par une récurrence immédiate que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0; x_0]$ (c'est vrai pour u_0 et si c'est vrai pour u_n, ce le sera aussi pour $u_{n+1} = g(u_n)$ par stabilité de l'intervalle par g). Or $g(x) - x = \frac{1+x-x-xe^x}{1+e^x} = \frac{1-xe^x}{1+e^x} \geqslant 0$, qui s'annule comme on l'a déjà vu uniquement en x_0. Cette expression est donc positive si $x \leqslant x_0$ (puisqu'elle est de signe constant et que par exemple $g(0) - 0 > 0$. On en déduit que $u_{n+1} - u_n = g(u_n) - u_n \geqslant 0$, puisque $u_n \leqslant x_0$, et la suite (u_n) est donc croissante. Elle est par ailleurs majorée par x_0, et converge donc vers un point fixe de la fonction g. Celle-ci n'en admettant qu'un seul, on a nécessairement $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = x_0$.

(d) i. La fonction g' n'étant pas vraiment évidente à encadrer, la seule solution raisonnable est de dériver une deuxième fois : $g''(x) = \frac{(-xe^x - e^x)(1+e^x)^2 - 2e^x(1+e^x)(1-xe^x)}{(1+e^x)^4} = \frac{e^x(-x - xe^x - 1 - e^x - 2 + 2xe^x)}{(1+e^x)^3} = \frac{e^x(-3 - x - (1-x)e^x}{(1+e^x)^3}$. Tout cela est négatif sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$, donc g' y est décroissante. Or, $g'(1) = \frac{1-e}{(1+e)^2} \simeq -0.124 > -\frac{1}{8}$ (si vous n'aviez pas de calculatrice, c'était tendu) ; et $g'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1 - \frac{\sqrt{e}}{2}}{(1+\sqrt{e})^2} \simeq 0.025 < \frac{1}{8}$. L'encadrement sur la valeur absolue s'en déduit facilement.

ii. Comme $u_1 = g(u_0) = \frac{1}{2}$, et la suite (u_n) est croissante majorée par x_0, on a $\forall n \geqslant 1$, $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$. on a vu que x_0 appartenait à ce même intervalle, sur lequel $|g'|$ est majorée par $\frac{1}{8}$. On peut donc appliquer l'IAF à u_n et x_0 (qui est un point fixe de g) pour obtenir $|u_{n+1} - x_0| \leqslant \frac{1}{8}|u_n - x_0|$. Reste à faire une petite récurrence pour prouver l'inagilité demandée. Pour $n = 0$, $|u_0 - x_0| = x_0 < 1$, et le membre de droite vaut

$\frac{1}{2}\times 8 = 4$, donc l'inégalité est sûrement vraie. Pour $n=1$, on obtient $\left|\frac{1}{2}-x_0\right| \leqslant \frac{1}{2}$, ce qui est également vrai puisque $x_0<1$. Supposons désormais l'inégalité vérifiée pour un entier supérieur ou égal à 1, alors $|u_{n+1}-x_0| \leqslant \frac{1}{8}|u_n-x_0| \leqslant \frac{1}{8}\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1} = \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{8}\right)^n$, ce qui prouve l'iénagilté au rang suivant et achève la récurrence.

iii. Pour avoir une valeur approchée à 10^{-8} près, il faut prendre n tel que $\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1} \leqslant 2\times 10^{-8}$, soit $(1-n)\log 8 \leqslant \log 2 - 8$, ou encore $n \leqslant 1+\frac{8-\log 2}{\log 8}$, ce qui donne $n \geqslant 10$ (impossible de faire ces questions sans calculatrice, elle devait donc être autorisée aux concours en 97...). Reste à calculer une valeur approchée de u_{10} (toujours à la calculatric) pour obtenir $x_0 \simeq 0.56714329$.

iv. Calculons en utilisant le fait que $y_0 = \frac{x_0}{2}$: $f(x_0,y_0) = x_0^2 - x_0^2 + 2\frac{x_0^2}{4} + e^{-x_0} = \frac{x_0^2}{2} + x_0$. La valeur approchée précédente suffit à donner une valeur approchée à 10^{-7} près de $f(x_0,y_0)$, qui vaut environ 0.7279690.

Exercice 3

1. La variable Z est un exemple classique de décompte de succès en N tentatives, chaque succès ayant une probabilité $\frac{1}{6}$ de se produire. on a donc $Z \sim \mathcal{B}\left(N, \frac{1}{6}\right)$; $E(Z) = \frac{N}{6}$ et $V(Z) = \frac{5N}{36}$.
2. La loi conditionnelle de X sachant $Z=n$ est binomiale de paramètre (n,p), donc $P_{Z=n}(X = k) = 0$ si $k>n$, et $P_{Z=n}(X=k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$ sinon.
3. Pour que la probabilité soit non nulle, il faut clairement avoir $n \leqslant N$, et $0 \leqslant k \leqslant n$, et dans ce cas, $P((Z=n)\cap(X=k)) = P(Z=n)\times P_{Z=n}(X=k) = \binom{N}{n}\left(\frac{1}{6}\right)^n\left(\frac{5}{6}\right)^{N-n}\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$.
4. Utilisons la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(Z=n)$, pour n variant entre 0 et N : $P(X_0) = \sum_{n=0}^{N} P((Z=n)\cap(X=0)) = \sum_{n=0}^{N}\binom{N}{n}\left(\frac{1}{6}\right)^n\left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} q^n$
$= \sum_{n=0}^{N}\binom{N}{n}\left(\frac{q}{6}\right)^n\left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} = \left(\frac{q+5}{6}\right)^N$
5. Calculons ce que vaut chaque membre : $\binom{n}{k}\binom{N}{n} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\times\frac{N!}{n!(N-n)!} = \frac{N!}{k!(n-k)!(N-n)!}$ et $\binom{N}{k}\binom{N-k}{n-k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}\times\frac{(N-k)!}{(n-k)!(N-n)!} = \frac{N!}{k!(n-k)!(N-n)!}$. Les deux quantités sont bien égales, utilisons à nouveau la formule des probabilités totales : $P(X=k) = \sum_{n=k}^{N}\binom{N}{n}\left(\frac{1}{6}\right)^n\left(\frac{5}{6}\right)^{N-n}\binom{n}{k}p^k q^{n-k} = \sum_{n=k}^{N}\binom{N}{k}\binom{N-k}{n-k}\left(\frac{1}{6}\right)n\left(\frac{5}{6}\right)^{N-n}p^k q^{n-k}$
$= \binom{N}{k}p^k\sum_{n=0}^{N-k}\left(\frac{1}{6}\right)^{n+k}\left(\frac{5}{6}\right)^{N-n-k}q^n = \binom{N}{k}\left(\frac{p}{6}\right)k\sum_{n=0}^{N-k}\left(\frac{q}{6}\right)^n\left(\frac{5}{6}\right)^{N-k-n}$
$= \binom{N}{k}\left(\frac{p}{6}\right)^k\left(\frac{5+q}{6}\right)^{n-k}$.
6. Puisque $\frac{5+q}{6} = 1-\frac{p}{6}$, on reconnait bien la loi binomiale demandée. En échangeant le rôle de p et q, on obtient de même $Y \sim \mathcal{B}\left(N, \frac{q}{6}\right)$.

7. Les deux variables ne sont bien évidemment pas indépendantes puisque par exemple $P(X = 0) \times P(Y = 0) \neq 0$, alors que $P((X = 0) \cap (Y = 0)) = 0$ (on a effectué au moins un lancer puisque $N \neq 0$). La loi de couple peut être obtenue de la façon suivante : $P((X = k) \cap (Y = l)) = P((Z = k + l) \cap (X = k)) = \binom{N}{k+l}\binom{k+l}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^{k+l}\left(\frac{5}{6}\right)^{N-k-l} p^k q^l$, et ceci pour tous les couples (k, l) tels que $k + l \leqslant N$.
8. Vous la ferez vous-même quand vous saurez ce qu'est une covariance ! Plus sérieusement, on sait que $V(Z) = V(X+Y) = \frac{5N}{36}$, et comme X et Y suivent des lois binômiales, $V(X) = \frac{Np(6-p)}{36}$ et $V(Y) = \frac{Nq(6-q)}{36}$. Or, il existe une jolie formule indiquand que $V(X+Y) = V(X)+V(Y)+2Cov(X, Y)$, donc $Cov(X, Y) = \frac{1}{2}(V(Z) - V(X) - V(Y)) = \frac{5N - Np(6-p) - Nq(6-q)}{72} = \frac{N(p^2 + q^2 - 1)}{72}$.

Devoirs de vacances

ECE3 Lycée Carnot

30 juin 2011

Pour ceux qui n'en auraient pas eu assez pendant l'année (seulement 40 feuilles d'exercices et autres sujets d'annales après tout!) et qui rêvent de passer leur été à faire des maths pour se blinder avant les concours, voici, comme promis, la liste de ce que vous pouvez faire dans tous les sujets de concours posés ces 10 dernières années. Rappelons au passage deux adresses utiles pour trouver des énoncés et dezs corrigés. Tout d'abord le moteur de recherche de l'UPS, qui propose les sujets complets, école par école :

http ://concours-maths-cpge.fr/fichiers.php

Et surtout le site de Pierre Veuillez, qui trie les exercices par thème et en donne des corrigés fiables. Une vraie mine d'or!

http ://mathsece.free.fr/

Allez, voici la liste :

HEC III

- HEC III 2011 : exercice trop centré sur les valeurs propres; le problème, analyse affreusement technique, est abordable : toute la première partie sauf la question 5.a, la deuxième partie pas du tout, la troisième partie est vraiment technique mais faisable aussi.
- HEC III 2010 : exercice trop technique; dans le problème, seule la deuxième partie (et encore, sans la question 11) est abordable.
- HEC III 2009 : trop de notions de deuxième année dans l'exercice; dans le problème, partie I sans problème (enfin, façon de parler, bien sûr), partie II faisable en sautant les histoires de diagonalisation et de valeurs propres, troisième partie tout à fait abordable et intéressante.
- HEC III 2008 : les définitions étant données, l'exercice est faisable, mais vous risquez de nager; la première partie du problème a déjà été vue, les deux autres ne sont pas accessibles.
- HEC III 2007 : comme d'hab, exercice trop technique; et pour cette fois, le problème est inabordable en fin de première année.
- HEC III 2006 : on oublie une fois de plus l'exercice; dans le problème, on peut faire la partie I à l'exception de la question 4, la partie II centré sur un énorme programme Pascal est évidemment faisable par des dieux de l'info comme vous, par contre la III est inaccessible, et on peut faire les calculs de la IV mais sans comprendre donc c'est moins intéressant.
- HEC III 2005 : encore trop de valeurs propres dans l'exercice; problème entièrement faisable (avec de l'info à la fin!).
- HEC III 2004 : pour une fois, un exercice d'analyse, dont vous pouvez faire la première partie; le problème est difficile mais faisable, en supprimant la recherche des valeurs propres au début.
- HEC III 2003 : exercice faisable (mélange étonnant entre ev et probas) ; trop de développements limités et autres notions pas encore vues dans le problème.
- HEC III 2002 : l'exercice est pour une fois faisable, mais tout de même très difficile en fin de première année; par contre, le problème n'est pas abordable.

ESSEC II

- ESSEC II 2011 : l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev étant rappelée, tout doit être faisable, mais seules les deux premières parties sont vraiment raisonnables pour vous pour l'instant.
- ESSEC II 2010 : pas faisable en première année.
- ESSEC II 2009 : tout un problème sur l'estimation. Vous ne savez pas ce que c'est ? Alors n'essayez pas de le faire...
- ESSEC II 2008 : les deux premières parties sont faisables, mais extrêmement techniques, il faut vraiment se sentir à l'aise avec les matrices pour tenter le coup.
- ESSEC II 2007 : trop de probas de deuxième année.
- ESSEC II 2006 : le premier problème est un bon test pour les plus motivés en probas ; le deuxième n'est pas faisable.
- ESSEC II 2005 : trop de notions de deuxième année pour pouvoir l'aborder.
- ESSEC II 2004 : tout est faisable à part la première question de la partie III.
- ESSEC II 2003 : les trois premières parties sont faisables.
- ESSEC II 2002 : tout est faisable, d'ailleurs on a fait ensemble plus ou moins les deux premières parties en cours d'année.

ESSEC III

- ESSEC III 2011 : le premier problème est faisable à l'exception de la détermination des valeurs propres (on admet juste qu'elles sont plus petite que 1 en valeur absolue pour faire la suite) ; le deuxième ne l'est pas.
- ESSEC III 2010 : aucun des deux exercices n'est adapté pour de pauvres première année comme vous.
- ESSEC III 2009 : les deux premiers problèmes sont tout à fait abordables.
- ESSEC III 2008 : tout est faisable, d'ailleurs vous avez déjà fait le permier exercice.
- ESSEC III 2007 : premier exercice trop technique ; problème pas vraiment faisable non plus.
- ESSEC III 2006 : exercice 1 faisable ; deuxième exercice centré sur l'info (mais si !), seule la première partie est faisable.
- ESSEC III 2005 : excellent premier exercice, très complet (pas facile !) ; deuxièmes exercice pas faisable.
- ESSEC III 2004 : le premier exercice est faisable à peu près entièrement, en sautant les histoires de diagonalisation ; le début seulement pour le deuxième exercice (première partie, en faisant gaffe aux notations obsolètes pour les coefficients binomiaux).
- ESSEC III 2003 : sujet indisponible sur UPS (quels zouaves), je ne sais pas dans quel ordre étaient les exercices, mais celui sur les ev est trop technique ; l'autre est faisable.
- ESSEC III 2002 : vous pouvez tenter le début du premier exercice mais c'est difficile ; le deuxième exercice est très intéressant (mais pas évident ; en même temps c'est quand même l'ESSEC...).

CCIP Divers

- CCIP 2005 : les trois premières parties sont faisables et intéressantes.
- ESCP 2005 : exercice trop complexe ; le problème est faisable jusqu'à la question 3 de la partie II incluse.
- CCIP 2004 : entièrement faisable et très intéressant (il vous rappellera d'ailleurs des souvenirs).
- ESCP 2004 : exercice faisable en sautant la première question ; problème de probas bourrin mais faisable.
- HEC Maths II 2003 : tout est faisable sauf la partie II.
- ESCP 2003 : exercice faisable (suite et probas) ; problème trop complexe.

- HEC Maths II 2002 : première partie faisable, attention aux notations obsolètes pour les coefficients binomiaux.
- ESCP 2002 : exercice faisable même s'il utilise un peu plus que ce qu'on connait ; problème faisable (première partie déjà vue en exercice), attention aux notations démodées pour les coefficients binomiaux.

EM Lyon

- EM Lyon 2011 : premier exercice d'analyse complet et intéressant ; deuxième exercice un peu trop technique ; troisième exercice pas faisable.
- EM Lyon 2010 : premier exercice sur les ev déjà fait ; deuxième exercice d'analyse très complet et intéressant ; excellent troisième exercice déjà fait.
- EM Lyon 2009 : premier exercice d'analyse très complet, sauter la question 1.c ; pas assez de résultats pour le deuxième exercice ; très bon troisième exercice dont il faut exclure la dernière question.
- EM Lyon 2008 : premier exercice très intéressant ; deuxième exercice trop technique pour l'instant ; troisième exercice pas faisable.
- EM Lyon 2007 : très bon premier exercice, assez original ; deuxième exercice d'analyse classique ; troisième exercice pas faisable.
- EM Lyon 2006 : pas assez de résultats donnés pour le premier exercice ; deuxième exercice d'analyse très complet, la quatrième question n'est pas faisable ; troisième exercice pas faisable.
- EM Lyon 2005 : excellent premier exercice en supprimant la question 4 ; exercice 2 pas faisable ; troisième exercice de probas très intéressant.
- EM Lyon 2004 : premier exercice d'analyse très bien ; dans le deuxième exercice seule la première partie est faisable ; les deux premières parties du troisième exercice sont excellentes, elles ont d'ailleurs été exploitées dans un de vos devoirs.
- EM Lyon 2003 : pour le premier exercice, première partie parfaite, deuxième à éviter pour l'instant ; deuxième exercice trop technique ; troisième exercice pas faisable.
- EM Lyon 2002 : ce qui est faisable dans l'exercice 1 traine dans une feuille d'exos sur les matrices ; exercice 2 d'analyse technique mais intéressant ; les deux premières parties de l'exercice 3 sont faisables, mais les notations archaïques, remplacer les C_n^k par $\binom{n}{k}$.

EDHEC

- EDHEC 2011 : premier exercice d'analyse intéressant ; deuxième exercice sur les ev pas très intéressant dans la mesure où on ne peut pas faire la dernière question ; troisième exercice déjà fait en devoir ; problème pas faisable.
- EDHEC 2010 : premier exercice sur les fonctions de deux variables qui déborde trop sur le programme de deuxième année ; deuxième exercice sur des produits infinis, sujet rare, intéressant ; troisième exercice pas faisable ; problème mêlant ev et provbas, tout à fait faisable en sautant toute la première question.
- EDHEC 2009 : premier exercice d'analyse court, auquel il faut encore enlever la question de développement limité ; deuxième exercice gentillet de probas, déjà fait ; troisième exercice pas faisable ; problème sur les ev trop technique.
- EDHEC 2008 : premier exercice d'analyse excellent et déjà fait ; deuxième exercice globalement faisable en éliminant notamment la question 2.c ; troisième exercice pas faisable ; problème très moche mais faisable, sauf les deux dernières questions.
- EDHEC 2007 : premier exercice sur les ev pas vraiment faisable ; deuxième exercice vraiment pas faisable ; troisième exercice d'analyse court mais riche ; problème intéressant une fois la première question sautée.

- EDHEC 2006 : premier exercice sur les ev très bien en supprimant la question 3.a ; deuxième exercice pas faisable ; exercice 3 classique sur les fonctions à deux variables ; problème assez lourdement théorique mais faisable.
- EDHEC 2005 : exercice 1 sur les ev très bien en enlevant la question sur la diagonalisabilité ; exercice 2 (fonctions à deux variables) classique ; exercice 3 pas faisable ; problème de probas déjà fait (affreusement calculatoire).
- EDHEC 2004 : exercice 1 pas faisable ; exercice 2 non plus (pas assez de résultats donnés) ; exercice 3 classique (probas) ; problème faisable en sautant la question sur les développements limités.
- EDHEC 2003 : premier exercice pas faisable ; le deuxième non plus ; troisième exercice d'analyse classique, enlever la question 4.a) qui nécessite un développement limité ; problème (chaine de Markov et matrices) déjà fait.
- EDHEC 2002 : premier exercice (probas) pas faisable ; exercice 2 (encore probas) classique ; troisième exercice (analyse) relativement déconcertant mais faisable et intéressant ; problème partiellement déjà vu, faisable et intéressant sauf pour la question de diagonalisabilité.

Ecricome

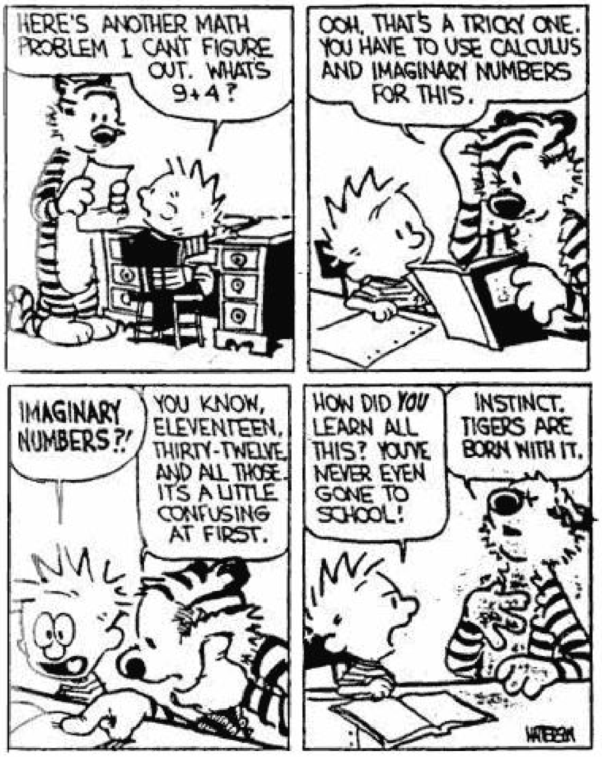
- Ecricome 2011 : premier exercice sur les ev vraiment trop théorique ; deuxième exercice classique, il faut enlever la question I.7 ; troisième exercice de probas tout à fait faisable, et même curieusement élémentaire.
- Ecricome 2010 : premier exercice sur les ev difficile, à éviter pour l'instant ; dans le deuxième exercice, seule la première partie est faisable ; le troisième exercice de probas a déjà été fait dans l'année.
- Ecricome 2009 : premier exercice sur les ev faisable en enlevant la question 1.2 ; deuxième exercice très calculatoire avec des fonctions à deux variables (faisable, mais vous allez souffrir) ; troisième exercice de probas pas faisable.
- Ecricome 2008 : premier exercice sur les ev tout à fait faisable ; deuxième exercice d'analyse classique ; dans le troisième exercice, on peut faire les première et troisième partie (d'ailleurs, on a déjà fait la troisième !).
- Ecricome 2007 : bon premier exercice d'analyse ; deuxième exercice sur les ev trop technique pour l'instant ; début du troisième exercice (deux premières question en enlevant la covariance) envisageable.
- Ecricome 2006 : premier exercice d'analyse un peu technique (sur les fonctions à deux variables, il faut utiliser les résultats que j'ai mis dans la feuille d'exercices) ; deuxième exercice pas faisable ; troisième exercice avec ev et probas (mélange rare) très intéressant, faisable en enlevant la recherche des valeurs propres.
- Ecricome 2005 : premier exercice déjà vu (très bon exo sur les intégrales) ; deuxième exercice d'analyse très classique ; troisième exercice déjà fait, mêlant probas et matrices.
- Ecricome 2004 : les deux premiers exercices vous rappelleront de bons souvenirs, et vous montreront qu'on n'a pas visé très long lors du concours blanc ; dans le troisième exercice de probas, vous pouvez aller jusqu'à la question 3. incluse.
- Ecricome 2003 : premier exercice un peu trop pointu sur les ev (la deuxième moitié est relativement indépendante de la première et tout à fait faisable) ; deuxième exercice sur les fonctions déjà vu en partie (mais très bien !) ; seule la première partie du troisième exercice de probas est faisable.
- Ecricome 2002 : troisième exercice de probas déjà vu cette année ; le deuxième exercice sur les fonctions est tout à fait dans vos cordes ; le premier sur les ev un peu trop avancé pour vous, mais quasiment faisable (il faut juste enlever la recherche des valeurs propres au début).

ESC

- ESC 2009 : vous ne pouvez pas faire les question 1.a) et 2.f) de l'exercice 1 ; pour la fin de l'exercice 2, on a besoin des prorpiétés des fonctions à deux variables vues en exercice mais pas en cours ; la question 3. de l'exercice 3 et l'exercice 4 ne sont pas faisables.
- ESC 2008 : l'exercice 2 et la toute dernière question de l'exercice 3 ne sont pas faisables.
- ESC 2007 : la question 2.a) de l'exercice 2 et la partie B. de l'exercice 3 ne sont pas faisables.
- ESC 2006 : la question 2. de l'exercice 1 et l'exercice 3 ne sont pas faisables.
- ESC 2005 : les question 2.a) et 4. de l'exercice 2 ne sont pas faisables.
- ESC 2004 : l'exercice 1 est faisable par morceaux, mais pas vraiment conseillé en fin de première année ; l'exercice 2 n'est pas faisable ; et je n'ai pas l'énoncé du 3...
- ESC 2003 : seule la question 1. est faisable dans l'exercice 1 ; l'exercice 2 est technique mais faisable ; l'exercice 3 aussi à l'exception de la fin de la question 1.c) qui nécessite un développement limité.
- ESC 2002 : sujet relativement peu adapté aux exigences actuelles, vous pouvez tenter de faire des bouts des deux derniers exercices si vous avez déjà fini tous les autres sujets !

Troisième partie

Devoirs


HERE'S ANOTHER MATH PROBLEM I CAN'T FIGURE OUT. WHAT'S 9+4?
OOH, THAT'S A TRICKY ONE. YOU HAVE TO USE CALCULUS AND IMAGINARY NUMBERS FOR THIS.
IMAGINARY NUMBERS?!
YOU KNOW, ELEVENTEEN, THIRTY-TWELVE, AND ALL THOSE. IT'S A LITTLE CONFUSING AT FIRST.
HOW DID YOU LEARN ALL THIS? YOU'VE NEVER EVEN GONE TO SCHOOL!
INSTINCT. TIGERS ARE BORN WITH IT.
WATTERSON

QCM de rentrée

ECE3 Lycée Carnot

2 septembre 2010

Ce QCM est destiné à tester votre connaissance du programme de Terminale. Une question peut avoir une ou plusieurs réponses valides (mais jamais aucune), une mauvaise réponse enlève des points, une absence de réponse n'a pas d'incidence.

Probabilités

1. Au premier janvier, le prix d'un ticket de métro était de 2 euros. Il baisse de 20% en février, puis augmente de 20% en mars. Quel est son prix après ces deux variations ?
   ☐ 2 euros ☐ $1,92$ euros ☐ $1,28$ euros ☐ $2,08$ euros
2. Si A et B sont deux évènements indépendants, alors :
   ☐ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ ☐ $A \cap B = \emptyset$ ☐ $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
   ☐ $P(A \cup B) = P(A) \times P(B)$
3. Dans une classe de 30 élèves, 12 étudient l'allemand, 25 l'anglais, et 10 les deux langues à la fois. Combien n'étudient ni l'anglais ni l'allemand ?
   ☐ 0 ☐ 3 ☐ -7 ☐ 7
4. Deux évènements indépendants A et B vérifient $P(A) = 0,4$ et $P(B) = 0,2$. On peut en déduire :
   ☐ $P(A \cup B) = 0,8$ ☐ $P(A \cap B) = 0,08$ ☐ $P(A \cup B) = 0,52$
   ☐ on ne peut pas connaitre $P(A \cup B)$ sans information supplémentaire
5. On lance simultanément deux dés à 6 faces. Quelle est la probabilité que la somme des deux chiffres obtenus donne 4 ?
   ☐ $\frac{3}{36}$ ☐ $\frac{1}{36}$ ☐ $\frac{1}{11}$ ☐ $\frac{1}{12}$
6. On lance quatre fois de suite une pièce de monnaie. La probabilité d'obtenir au moins un Pile est de :
   ☐ $\frac{1}{4}$ ☐ $\frac{15}{16}$ ☐ $\frac{3}{4}$ ☐ $\frac{1}{16}$
7. Un joueur joue trois parties successives et indépendantes d'un jeu où il a une chance sur trois de gagner chaque partie. La probabilité qu'il gagne exactement deux parties est de :
   ☐ $\frac{2}{27}$ ☐ $\frac{2}{3}$ ☐ 1 ☐ $\frac{2}{9}$
8. Une classe est constituée de 18 filles et 12 garçons. On sait qu'un élève pris au hasard dans la classe a une chance sur trois d'aimer les maths, mais que cette probabilité monte à une chance sur deux si l'élève est une fille. Quelle est la probabilité qu'un garçon pris au hasard dans la classe aime les maths ?

☐ $\frac{1}{6}$ ☐ $\frac{1}{3}$ ☐ $\frac{1}{18}$ ☐ $\frac{1}{12}$

Analyse

1. Le domaine de définition de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2+4}$ est :
   ☐ $[0;+\infty[$ ☐ $[0;2[\cup]2;+\infty[$ ☐ $[-1;+\infty[$ ☐ $[-1;2[\cup]2;+\infty[$
2. La fonction logarithme népérien est :
   ☐ strictement croissante ☐ stictement positive ☐ définie sur $[0;+\infty[$
   ☐ à valeurs dans $]0;+\infty[$ ☐ négative si $x < 1$
3. Parmi les égalités suivantes, lesquelles sont vraies ?
   ☐ $\ln(0) = 1$ ☐ $e^{a+b} = e^a \times e^b$ ☐ $e^0 = 1$ ☐ $\ln(4) = 2\ln 2$
4. On considère trois fonctions f, g et h vérifiant $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ pour tout réel x. Si l'on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, que peut-on en déduire ?
   ☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ ☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$
   ☐ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ ☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) < \lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$
5. La dérivée de la fonction définie par $f(x) = x\ln x$ est donnée par :
   ☐ $f'(x) = 1 + x\ln x$ ☐ $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ ☐ $f'(x) = 1 + \ln x$ ☐ $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$
6. Une primitive de la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$ est donnée par :
   ☐ $F(x) = x + \ln x$ ☐ $F(x) = \dfrac{\frac{x^2}{2}+x}{\frac{x^2}{2}}$ ☐ $F(x) = x + e + \ln x$ ☐ $F(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$

Pour les trois dernières questions, on vous donne le tableau de variations d'une fonction g :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
g	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	e	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

7. Combien l'équation $g(x) = 0$ admet-elle de solutions ?
   ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ une infitnité ☐ on ne peut pas savoir
8. La tangente à la courbe représentative de g en son point d'abscisse -1 peut avoir pour équation :
   ☐ $y = 3x - 1$ ☐ $y = -3x$ ☐ $y = 2$ ☐ $y = x + 3$
9. La courbe représentative de g admet pour asymptotes :
   ☐ une asymptotes horizontale et peut-être une oblique
   ☐ deux asymptotes horizontales
   ☐ uniquement une asymptote horizontale
   ☐ une asymptote verticale et peut-être une oblique

Corrigé du QCM de rentrée

Probabilités

1. Au premier janvier, le prix d'un ticket de métro était de 2 euros. Il baisse de 20% en février, puis augmente de 20% en mars. Quel est son prix après ces deux variations ?
   ☐ 2 euros ☒ $1,92$ euros ☐ $1,28$ euros ☐ $2,08$ euros
2. Si A et B sont deux évènements indépendants, alors :
   ☐ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ ☐ $A \cap B = \emptyset$ ☒ $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
   ☐ $P(A \cup B) = P(A) \times P(B)$
3. Dans une classe de 30 élèves, 12 étudient l'allemand, 25 l'anglais, et 10 les deux langues à la fois. Combien n'étudient ni l'anglais ni l'allemand ?
   ☐ 0 ☒ 3 ☐ -7 ☐ 7
4. Deux évènements indépendants A et B vérifient $P(A) = 0,4$ et $P(B) = 0,2$. On peut en déduire :
   ☐ $P(A \cup B) = 0,8$ ☒ $P(A \cap B) = 0,08$ ☒ $P(A \cup B) = 0,52$
   ☐ on ne peut pas connaitre $P(A \cup B)$ sans information supplémentaire
5. On lance simultanément deux dés à 6 faces. Quelle est la probabilité que la somme des deux chiffres obtenus donne 4 ?
   ☒ $\dfrac{3}{36}$ ☐ $\dfrac{1}{36}$ ☐ $\dfrac{1}{11}$ ☒ $\dfrac{1}{12}$
6. On lance quatre fois de suite une pièce de monnaie. La probabilité d'obtenir au moins un Pile est de :
   ☐ $\dfrac{1}{4}$ ☒ $\dfrac{15}{16}$ ☐ $\dfrac{3}{4}$ ☐ $\dfrac{1}{16}$
7. Un joueur joue trois parties successives et indépendantes d'un jeu où il a une chance sur trois de gagner chaque partie. La probabilité qu'il gagne exactement deux parties est de :
   ☐ $\dfrac{2}{27}$ ☐ $\dfrac{2}{3}$ ☐ 1 ☒ $\dfrac{2}{9}$
8. Une classe est constituée de 18 filles et 12 garçons. On sait qu'un élève pris au hasard dans la classe a une chance sur trois d'aimer les maths, mais que cette probabilité monte à une chance sur deux si l'élève est une fille. Quelle est la probabilité qu'un garçon pris au hasard dans la classe aime les maths ?
   ☐ $\dfrac{1}{6}$ ☐ $\dfrac{1}{3}$ ☐ $\dfrac{1}{18}$ ☒ $\dfrac{1}{12}$

Analyse

1. Le domaine de définition de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2+4}$ est :

   ☐ $[0; +\infty[$ ☐ $[0; 2[\cup]2; +\infty[$ ☒ $[-1; +\infty[$ ☐ $[-1; 2[\cup]2; +\infty[$

2. La fonction logarithme népérien est :

   ☒ strictement croissante ☐ stictement positive ☐ définie sur $[0; +\infty[$
   ☐ à valeurs dans $]0; +\infty[$ ☒ négative si $x < 1$

3. Parmi les égalités suivantes, lesquelles sont vraies ?

   ☐ $\ln(0) = 1$ ☒ $e^{a+b} = e^a \times e^b$ ☒ $e^0 = 1$ ☒ $\ln(4) = 2\ln 2$

4. On considère trois fonctions f, g et h vérifiant $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ pour tout réel x. Si l'on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, que peut-on en déduire ?

   ☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ ☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ☒ $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$
   ☐ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ ☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) < \lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$

5. La dérivée de la fonction définie par $f(x) = x\ln x$ est donnée par :

   ☐ $f'(x) = 1 + x\ln x$ ☐ $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ ☒ $f'(x) = 1 + \ln x$ ☐ $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$

6. Une primitive de la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$ est donnée par :

   ☒ $F(x) = x + \ln x$ ☐ $F(x) = \dfrac{\frac{x^2}{2} + x}{\frac{x^2}{2}}$ ☒ $F(x) = x + e + \ln x$ ☐ $F(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$

Pour les trois dernières questions, on vous donne le tableau de variations d'une fonction g :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
g	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	e	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

7. Combien l'équation $g(x) = 0$ admet-elle de solutions ?

   ☐ 0 ☐ 1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ une infitnité ☐ on ne peut pas savoir

8. La tangente à la courbe représentative de g en son point d'abscisse -1 peut avoir pour équation :

   ☐ $y = 3x - 1$ ☐ $y = -3x$ ☒ $y = 2$ ☒ $y = x + 3$

9. La courbe représentative de g admet pour asymptotes :

   ☒ une asymptotes horizontale et peut-être une oblique
   ☐ deux asymptotes horizontales
   ☐ uniquement une asymptote horizontale
   ☐ une asymptote verticale et peut-être une oblique

Devoir Surveillé n°1

ECE3 Lycée Carnot

30 septembre 2010

Durée : 2H. Calculatrices interdites

Exercice 1

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $x^4 + x^2 - 20 = 0$
2. $\ln(x+2) - \ln(2x-6) \leqslant \ln 2$
3. $|2x-1| + |4-x| = 5$
4. $\dfrac{-x^3 - 2x^2 - 5}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6} \geqslant -1$

Exercice 2

Soit h la fonction définie par $h(x) = \ln(x^2 - 4)$.

1. Déterminer le domaine de définition de h.
2. Étudier la parité de h.
3. Déterminer, sans calculer sa dérivée, les variations de la fonction h.
4. Résoudre l'équation $h(x) = 0$.

Exercice 3

Dans tout cet exercice, on cherche à étudier la fonction f définie par l'équation $f(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Étudier la parité de f.
3. Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
4. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$, et dresser le tableau de variations de la fonction f.
5. Calculer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en son point d'abscisse $\ln 2$.
6. Démontrer que $\forall x \in [0, +\infty[$, $-\dfrac{1}{3} \leqslant f'(x) \leqslant 0$.

7. Montrer à l'aide de la question précédente que $\forall x \in [0, +\infty[,\ -\frac{1}{3}x + \frac{1}{4} \leqslant f(x)$.
8. Tracer dans un même repère la droite d'équation $y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}$, et la courbe représentative de la fonction f.

Exercice 4

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = |-x^2 - x + 2| + |x - 3|$.

1. Écrire $g(x)$ sans utiliser de valeur absolue, en distinguant des cas selon la valeur de x.
2. Étudier les variations de la fonction g.
3. Tracer une allure de la courbe représentative de la fonction g.
4. Résoudre graphiquement puis par le calcul l'équation $g(x) = 2$.

Corrigé du DS1

Exercice 1

1. En posant $X = x^2$, on se ramène à l'équation $X^2 + X - 20 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 1 + 80 = 81$, donc admet deux racines $X_1 = \dfrac{-1+9}{2} = 4$ et $X_2 = \dfrac{-1-9}{2} = -5$. La valeur -5 est à éliminer pour x^2, donc on a nécessairement $x^2 = 4$, d'où $\mathcal{S} = \{-2; 2\}$.
2. L'inéquation est définie lorsque $x + 2$ et $3x - 6$ sont tous deux strictement positifs, donc pour $x > 3$. Elle revient alors à $\ln \dfrac{x+2}{2x-6} \leqslant \ln 2$, soit $\dfrac{x+2}{2x-6} \leqslant 2$, donc $\dfrac{-3x+14}{2x-6} \leqslant 0$. Un petit tableau de signe mène alors à $\mathcal{S} = \left[\dfrac{14}{3}; +\infty\right[$.
3. Faisons un petit tableau :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		4		$+\infty$
$\lvert 2x-1\rvert$		$1-2x$	0	$2x-1$	$\mid$	$2x-1$	
$\lvert 4-x\rvert$		$4-x$	$\mid$	$4-x$	0	$x-4$	
$\lvert 2x-1\rvert + \lvert 4-x\rvert$		$5-3x$	$\mid$	$x+3$	$\mid$	$3x-5$	

   Sur l'intervalle de droite, on obtient comme solution de l'équation $x = 0$, qui est valable. L'équation centrale donne $x = 2$ qui est aussi valable. Enfin, celle de droite aboutit à $x = \dfrac{10}{3}$, qui elle n'appartient pas au bon intervalle. Finalement, $\mathcal{S} = \{0; 2\}$.
4. En faisant tout passer à gauche, on se ramène à $\dfrac{-5x-11}{x^3+2x^2-5x-6} \geqslant 0$. Le signe du numérateur est facile à obtenir, mais pour le dénominateur il faut commencer par le factoriser. On constate que -1 est racine du dénominateur : $(-1)^3 + 2(-1)^2 - 5(-1) - 6 = -1 + 2 + 5 - 6 = 0$. On peut donc écrire $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x+1)(ax^2+bx+c) = ax^3 + (a+b)x^2 + (b+c)x + c$. Par identification des coefficients, on a $a = 1$, $b = 1$ et $c = -6$, donc $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x+1)(x^2+x-6)$. Le dernier facteur a pour discriminant $\Delta = 1 + 24 = 25$ et admet deux racines $x_1 = \dfrac{-1+5}{2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{-1-5}{2} = -3$. On peut désormais faire un gros tableau de signes :

x		-3		$-\frac{11}{5}$		-1		2	
$5x+1$	$-$	$\mid$	$-$	0	$+$	$\mid$	$+$	$\mid$	$+$
x^3+2x^2-5x-6	$-$	0	$+$	$\mid$	$+$	0	$-$	0	$+$
Q	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$

   Conclusion : $\mathcal{S} =]-\infty; -3[\cup \left[-\dfrac{11}{5}; -1\right[\cup]2; +\infty[$.

Exercice 2

1. La fonction est définie lorsque $x^2 - 4 > 0$, donc $\mathcal{D}_h =]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$.
2. Le domaine de définition de h est symétrique par rapport à 0, et $h(-x) = h(x)$, donc la fonction h est paire.
3. La fonction $x \mapsto x^2 - 4$ est, comme la fonction carré, decroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$. Comme ln est strictement croissante sur son ensemble de définition, on en déduit que h est strictement décroissante sur $]-\infty; -2[$ et strictement croissante sur $]2; +\infty[$.
4. Cela revient à dire $\ln(x^2 - 4) = \ln 1$, donc $x^2 - 4 = 1$, soit $x^2 = 5$. L'équation admet donc deux solutions : $x = \sqrt{5}$ et $x = -\sqrt{5}$.

Exercice 3

1. Le dénominateur de f ne s'annulant jamais (puisque $e^x + 1$ est toujours strictement positif), $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

2. Comme $f(-x) = \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \dfrac{e^{-x}}{e^{-2x}(e^x+1)^2} = \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2} = f(x)$, la fonction f est paire.

3. Quand x tend vers $-\infty$, le numérateur de f tend vers 0 et son dénominateur vers 1, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$. La fonction étant paire, on aura aussi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (ce qu'on peut retrouver par un calcul direct, par exemple en développant le dénominateur et en factorisant tout par e^x).

4. Calculons donc : $f'(x) = \dfrac{e^x(1+e^x)^2 - 2e^x(1+e^x)e^x}{(1+e^x)^4} = \dfrac{e^x(1+e^x) - 2e^{2x}}{(1+e^x)^3} = \dfrac{e^x - e^{2x}}{(1+e^x)^3} = \dfrac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$. Le dénominateur de cette dérivée est toujours positif, le signe du numérateur dépend uniquement de celui de $1-e^x$, qui est positif quand $e^x \leqslant 1$, c'est-à-dire quand $x \leqslant 0$. D'où le tableau de variations suivant ($f(0) = \dfrac{1}{(1+1)^2} = \dfrac{1}{4}$) :

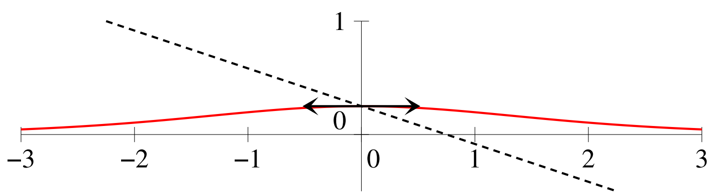
x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

5. Puisque $e^{\ln 2} = 2$, on a $f(\ln 2) = \dfrac{2}{(1+2)^2} = \dfrac{2}{9}$, et $f'(\ln 2) = \dfrac{2(1-2)}{(1+2)^3} = -\dfrac{2}{27}$. L'équation de la tangente est donc $y = -\dfrac{2}{27}(x - \ln 2) + \dfrac{2}{9} = -\dfrac{2}{27}x + \dfrac{2}{9}\left(1 + \dfrac{\ln 2}{3}\right)$.

6. Le fait que $f'(x)$ soit négatif sur cet intervalle a déjà été vu. De plus, $f'(x) + \dfrac{1}{3} = \dfrac{3e^x(1-e^x) + (1+e^x)^3}{(1+e^x)^3} = \dfrac{3e^x - 3e^{2x} + 1 + 3e^x + 3e^{2x} + e^{3x}}{(1+e^x)^3} = \dfrac{1 + 6e^x + e^{3x}}{(1+e^x)^3} \geqslant 0$, d'où la deuxième inégalité demandée.

7. Posons $a(x) = f(x) + \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{4}$. Comme $a'(x) = f'(x) + \dfrac{1}{3} \geqslant 0$, la fonction a est croissante sur $[0; +\infty[$. Or, $a(0) = f(0) - \dfrac{1}{4} = 0$, donc la fonction a prend des valeurs positives sur $[0; +\infty[$, ce qui revient à ce qu'on voulait prouver.

8. Voici les courbes, avec la droite en pointillés :

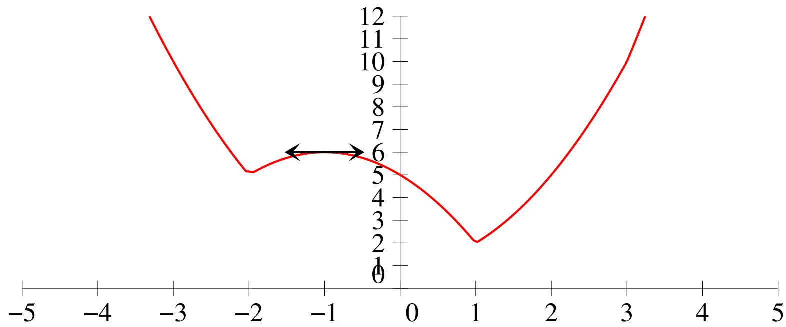


Exercice 4

1. On va avoir besoin de faire un petit tableau : $-x^2 - x + 2$ a pour discriminant $\Delta = 1 + 8 = 9$, admet donc deux racines $x_1 = \dfrac{1+3}{-2} = -2$ et $x_2 \dfrac{1-3}{-2} = 1$. Le trinome est négatif en-dehors de ses racines.

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$\lvert -x^2-x+2\rvert$		x^2+x-2	0	$-x^2-x+2$	0	x^2+x-2	$\lvert$	x^2+x-2	
$\lvert x-3\rvert$		$3-x$	$\lvert$	$3-x$	$\lvert$	$3-x$	0	$x-3$	
$g(x)$		x^2+1	$\lvert$	$-x^2-2x+5$	$\lvert$	x^2+1	$\lvert$	x^2+2x-5	

2. Il faut étudier séparément chaque expression. La fonction $x \mapsto x^2+1$ est décroissante sur $]-\infty;0]$ et croissante sur $[0;+\infty[$, donc g est décroissante sur $]-\infty;-2]$ et croissante sur $[1;3]$. La fonction $x \mapsto -x^2-2x+5$ a une dérivée égale à $-2x-2$, qui s'annule pour $x=-1$. Elle est croissante sur $[-2;-1]$ (donc g aussi) et décroissante sur $[-1;1]$ (donc g aussi). La fonction $x \mapsto x^2+2x-5$, qui est l'opposée de la précédante, est croissante sur $[2;+\infty[$, comme le sera g.
3. On peut calculer les images des valeurs intéressantes : $g(-2)=5$; $g(-1)=6$; $g(1)=2$ et $g(3)=10$. Toutes les portions de courbes sont des morceaux de parabole, on obtient une courbe qui ressemble globalement à ceci :



4. Graphiquement, il semble que la seule valeur pour laquelle la fonction vaut 2 est $x=1$. Par le calcul, on résout $x^2+1=2$, ce qui donne $x=-1$ ou $x=1$. La première solution n'est pas valide, mais $x=1$ si. On résout ensuite $-x^2-2x+5=2$, soit $x^2+2x-3=0$, qui a pour discriminant $\Delta=4+12=16$, et admet donc deux racines $x_3=\dfrac{-2+4}{2}=1$ et $x_4=\dfrac{-2-4}{2}=-3$. On retrouve la solution $x=1$, mais la deuxième n'est pas valide. Enfin, il faut résoudre $x^2+2x-5=2$, soit $x^2+2x-7=0$, qui a pour discriminant $\Delta=4+28=32$, donc admet deux racines $x_5=\dfrac{-2+\sqrt{32}}{2}=-1+2\sqrt{2}$ et $x_6=\dfrac{-1-\sqrt{32}}{2}=-1-2\sqrt{2}$. Aucune de ces deux solutions n'est supérieure à 3 (c'est évident pour x_6 qui est négative, quant à x_5, elle est plus petite que $-1+2\times1,5=2$), donc aucune n'est valide. Finalement, nous avons confirmé que la seule solution de l'équation était $x=1$.

Devoir Surveillé n°2

ECE3 Lycée Carnot

19 octobre 2010

Durée : 3H. Calculatrices interdites.

Exercice 1 : Calculs divers

1. Calculer $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{2^k}{3^{2k}}$.
2. Déterminer deux réels a et b tels que $\frac{1}{(k-1)(k+1)} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k+1}$. En déduire la valeur de $\sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k^2-1}$.
3. Calculer et simplifier la somme double $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (i+j)^3$.
4. Prouver par récurrence que, $\forall n \geqslant 1$, $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.

Exercice 2

Soient (u_n) et (v_n) les deux suites définies par $u_0 = -2$, $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2v_n$ et $v_{n+1} = 3v_n - u_n$.

1. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = 3v_{n+1} - 2v_n$.
2. Déterminer à l'aide de la relation précédente l'expression du terme général de la suite (v_n), puis celui de la suite (u_n).
3. Montrer (sans utiliser les résultats de la question 2.) que la suite $(v_n - u_n)$ est une suite constante et déterminer sa valeur.
4. En déduire une relation de récurrence arithmético-géométrique vérifiée par la suite (u_n), et retrouver la valeur de u_n à l'aide de cette relation.
5. Démontrer, toujours sans utiliser les questions précédentes, que la suite $(2v_n - u_n)$ est géométrique, et déterminer son terme général.

Exercice 3

Le but de l'exercice est de retrouver la formule vue en cours pour la somme des cubes des n premiers entiers, mais par une méthode différentes. On définit pour cela la suite (u_n) de la façon suivante : $u_1 = 1$; $u_2 = 3 + 5$; $u_3 = 7 + 9 + 11$ etc (le terme d'indice n de la suite est la somme des n premiers entiers entiers impairs qui ne sont pas apparus dans l'écriture des termes précédents de la suite).

1. Déterminer la valeur de u_3, u_4 et u_5.
2. Calculer, pour tout entier naturel N, la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=N}(2k-1)$ (vous avez le droit pour cette question d'utiliser les résultats sur les sommes classiques vus en cours).
3. La somme partielle d'indice n de la suite (u_n), définie par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} u_k$, vaut $1 + (3+5) + (7 + 9 + 11) + \dots$. Combien d'entiers impairs y a-t-il dans cette somme ?
4. À l'aide du calcul de la question 2., en déduire la valeur de S_n.
5. Déterminer en utilisant le résultat précédent une expression simple pour u_n, et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} k^3$.

Exercice 4

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2(u_n - 2)^2 + 2$.

1. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2$.
2. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(u_n - 2)$. Montrer que la suite (v_n) est arithmético-géométrique.
3. Déterminer l'expression explicite de v_n, et en déduire celle de u_n.
4. Calculer les sommes partielles de la suite (v_n).
5. En déduire la valeur de $\displaystyle\prod_{k=0}^{k=n}(u_k - 2)$.
6. Démontrer par récurrence (sans utiliser les questions précédentes) que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{2^{n+1}-1} + 2$.

Exercice 5

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Calculer la dérivée f' de la fonction f et dresser son tableau de variations.
3. Montrer que, $\forall x \neq 0$, $f(x) - x = \dfrac{1-x}{\sqrt{x^2-x+1}+x}$. En déduire le signe de $f(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$.
5. Montrer que, $\forall x \in [0;1]$, $0 \leqslant 1 - f(x) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1-x)$.
6. On définit désormais une suite (u_n) par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Calculer u_1 et u_2.
   (b) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$.

(c) Déterminer la monotonie de la suite (u_n).

(d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant 1 - u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1 - u_n)$.

(e) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant 1 - u_n \leqslant \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^n u_0$ (on pourra procéder par récurrence).

(f) Déterminer à l'aide de l'encadrement précédent une valeur de l'entier n pour laquelle $1 - u_n \leqslant 10^{-10}$.

Corrigé du DS2

Exercice 1 (calculs divers)

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{2^k}{3^{2k}} = \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{2}{9}\right)^k = \sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{2}{9}\right)^k - 1 = \frac{1-(\frac{2}{9})^{n+1}}{1-\frac{2}{9}} - 1 = \frac{9}{7} - \frac{9}{7}\left(\frac{2}{9}\right)^{n+1} - 1 = \frac{2}{7} - \frac{2^{n+1}}{7\times 9^n}$.
2. Constatant que $\dfrac{a}{k-1} + \dfrac{b}{k+1} = \dfrac{a(k+1)+b(k-1)}{(k-1)(k+1)} = \dfrac{(a+b)k+a-b}{(k-1)(k+1)}$, l'égalité sera vérifiée si $a+b=0$ et $a-b=1$, donc $b=-a$ et $2a=1$, soit $a=\dfrac{1}{2}$ et $b=-\dfrac{1}{2}$. On calcule ensuite $\displaystyle\sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k^2-1} = \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{k=n+1} \frac{1}{k} =$ $1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{2n+1}{n(n+1)}$.
3. Calculons :
$$\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{j=1}^{j=n} i^3+3i^2j+3ij^2+j^3 = \sum_{i=1}^{i=n} ni^3 + 3\frac{n(n+1)}{2}i^2 + 3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}i + \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$
$$= n\frac{n^2(n+1)^2}{4} + 3\frac{n(n+1)}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\frac{n(n+1)}{2} + n\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$
$$= \frac{n^3(n+1)^2}{2} + \frac{n^2(n+1)^2(2n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)^2(3n+1)}{2}.$$
4. Pour $n=1$, la somme de gauche se réduit à $\dfrac{1}{2}$, et l'expression de droite vaut $2-\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}$, donc l'égalité est vraie. Supposons-là vérifiée au rang n. On a alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{k}{2^k} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{2^k} + \frac{n+1}{2^{n+1}} =$ $2-\dfrac{n+2}{2^n}+\dfrac{n+1}{2^{n+1}} = 2+\dfrac{n+1-2(n+2)}{2^{n+1}} = 2-\dfrac{n+3}{2^{n+1}}$, ce qui est la formule attendue pour le rang $n+1$. D'après le principe de récurrence, la formule est donc vrai pour tout entier $n \geqslant 1$.

Exercice 2

1. On a $v_{n+2} = 3v_{n+1} - u_{n+1} = 3v_{n+1} - 2v_n$.
2. La suite (v_n) est donc récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique $x^2-3x+2=0$ a pour discriminant $\Delta = 9-8 = 1$ et admet donc deux racines $r = \dfrac{3+1}{2} = 2$ et $s = \dfrac{3-1}{2} = 1$. On en déduit que $v_n = \alpha 2^n + \beta$, les réels α et β devant vérifier $\alpha+\beta = v_0 = 1$ et $2\alpha+\beta = v_1 = 3v_0 - u_0 = 5$. En soustryant les deux relations, on obtient $\alpha = 4$, puis $\beta = 1-\alpha = -3$. On a donc $v_n = 4\times 2^n - 3 = 2^{n+2}-3$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n = 2v_{n-1} = 2(2^{n+1}-3) = 2^{n+2}-6$. On constate aisément que pour $n=0$, $2^{0+2}-6 = -2 = u_0$, donc la formule est en fait valable pour tout entier n.
3. Constatons que $v_{n+1}-u_{n+1} = 3v_n - u_n - 2v_n = v_n - u_n$. La suite est donc constante, égale à $v_0 - u_0 = 3$.
4. Puisque $v_n - u_n = 3$, on peut écrire la relation de récurrence pour la suite u_n de la façon suivante : $u_{n+1} = 2(u_n+3) = 2u_n+6$. La suite (u_n) est donc arithmético-géométrique, d'équation de point fixe $x = 2x+6$, soit $x=-6$. On pose donc $z_n = u_n+6$, et on a $z_{n+1} = u_{n+1}+6 = 2u_n+12 = 2(u_n+6) = 2z_n$. La suite (z_n) est donc géometrique de raison 2 et de premier terme $z_0 = u_0+6 = 4$. On a donc $z_n = 4\times 2^n = 2^{n+2}$, puis $u_n = z_n - 6 = 2^{n+2}-6$.
5. Encore un petit calcul : $2v_{n+1} - u_{n+1} = 2(3v_n - u_n) - 2v_n = 6v_n - 2u_n - 2v_n = 4v_n - 2u_n = 2(2u_n - v_n)$. La suite $(2u_n - v_n)$ est donc géométrique de raison 2 et de premier terme $2v_0 - u_0 = 4$, donc $2v_n - u_n = 4\times 2^n = 2^{n+2}$.

Exercice 3

1. On a $u_3 = 27$; $u_4 = 13 + 15 + 17 + 19 = 64$ et $u_5 = 21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 125$.
2. Calcul facile : $\sum_{k=1}^{k=N} 2k - 1 = 2\sum_{k=1}^{k=N} k - N = N(N+1) - N = N^2$.
3. Il y en a $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
4. Puisque les entiers additionnés sont les entiers impairs, c'est-à-dire ceux de la forme $2k-1$, on a $S_n = \sum_{k=1}^{k=\frac{n(n+1)}{2}} (2k-1) = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.
5. Par définition des sommes partielles, on a $u_n = S_n - S_{n-1} = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4} - \dfrac{(n-1)^2n^2}{4} = \dfrac{n^2}{4}((n+1)^2 - (n-1)^2) = \dfrac{n^2}{4}(n^2 + 2n + 1 - n^2 + 2n - 1) = \dfrac{n^2}{4} \times 4n = n^3$. On a donc prouvé que $\sum_{k=1}^{k=n} n^3 = \sum_{k=1}^{k=n} u_k = S_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Exercice 4

1. Petite récurrence : c'est vrai au rang 0 puisque $4 > 2$. Supposons l'inégalité vraie pour u_n, alors $u_n - 2 > 0$, donc $(u_n - 2)^2 > 0$, et $u_{n+1} = 2(u_n - 2)^2 + 2 > 2$, donc la propriété est héréditaire, et vraie pour tout entier n.
2. Comme $u_{n+1} - 2 = 2(u_n - 2)^2$, on aura $\ln(u_{n+1} - 2) = \ln 2 + 2\ln(u_n - 2)$, soit $v_{n+1} = 2v_n + \ln 2$. Cette suite est bien arithmético-géométrique, elle a pour équation de point fixe $x = 2x + \ln 2$, ce qui donne $x = -\ln 2$. Posons donc $w_n = v_n + \ln 2$, on a alors $w_{n+1} = v_{n+1} + \ln 2 = 2v_n + 2\ln 2 = 2w_n$. La suite (w_n) est donc géométrique de raison 2 et de premier terme $w_0 = v_0 + \ln 2 = \ln(4-2) + \ln 2 = 2\ln 2$. On en déduit que $w_n = 2\ln 2 \times 2^n = 2^{n+1}\ln 2$, puis que $v_n = w_n - \ln 2 = (2^{n+1} - 1)\ln 2$, et enfin $u_n = e^{v_n} + 2 = 2^{2^{n+1}-1} + 2$.
3. Calculons $\sum_{k=0}^{k=n} v_k = \ln 2 \sum_{k=0}^{k=n} 2^{k+1} - 1 = 2\ln 2 \sum_{k=0}^{k=n} 2^k - (n+1)\ln 2 = 2\ln 2 \dfrac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} - (n+1)\ln 2 = \ln 2(2^{n+2} - 2 - n - 1) = (2^{n+2} - n - 3)\ln 2$.
4. On aura $\ln\left(\prod_{k=0}^{k=n}(u_k - 2)\right) = \sum_{k=0}^{k=n} \ln(u_k - 2) = \sum_{k=0} k = nv_k = (2^{n+2} - n - 3)\ln 2$, donc $\prod_{k=0}^{k=n}(u_k - 2) = e^{(2^{n+2}-n-3)\ln 2} = 2^{2^{n+2}-n-3}$.
5. Prouvons donc par récurrence la propriété P_n : $u_n = 2^{2^{n+1}-1} + 2$. Pour $n = 0$, on a $2^{2^1-1} + 2 = 2^1 + 2 = 4 = u_0$, donc P_0 est vraie. Supposons, pour un certain entier n, la propriété P_n vérifiée. On a alors $u_{n+1} = 2(u_n - 2)^2 + 2 = 2(2^{2^{n+1}-1} + 2 - 2)^2 + 2 = 2 \times 2^{2(2^{n+1}-1)} + 2 = 2^{1+2.2^{n+1}-2} + 2 = 2^{2^{n+2}-1} + 2$, ce qui prouve P_{n+1}. Par principe de récurrence, la formule est donc vraie pour tout entier n.

Exercice 5

1. Le trinôme sous la racine a un discriminant strictement négatif, il est toujours positif, donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
2. On a $f'(x) = \dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}}$, la fonction f est donc décroissante sur $\left]-\infty; \dfrac{1}{2}\right]$ et croissante sur $\left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$.

3. En multipliant par la quantité conjuguée, $f(x)-x = \dfrac{x^2-x+1-x^2}{\sqrt{x^2-x+1}+x} = \dfrac{1-x}{\sqrt{x^2-x+1}+x}$. Le dénominateur étant toujours positif sur $\mathbb{R}_+^*$, $f(x)-x$ est du signe de $1-x$, c'est-à-dire positif sur $]0;1]$ et négatif sur $[1;+\infty[$.
4. La fonction f étant à valeurs positives, on ne pourra avoir $f(x)=x$ que si $x \geqslant 0$. Dans ce cas, on peut élever les deux membres de l'équation au carré pour obtenir $x^2-x+1=x^2$, donc $x=1$.
5. Comme $f(0)=1$ et $f(1)=1$, au vu des variations de la fonction f, on aura toujours sur $[0;1]$ $f(x) \leqslant 1$, donc $1-f(x) \geqslant 0$. Pour l'autre inégalité, on peut calculer $1-f(x) = \dfrac{1-(x^2-x+1)}{1+\sqrt{x^2-x+1}} = \dfrac{x(1-x)}{1+\sqrt{x^2-x+1}}$. Or le dénominateur admet un minimum pour $x=\dfrac{1}{2}$, égal à $1+\sqrt{\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}+1} = 1+\dfrac{\sqrt{3}}{2} > \sqrt{3}$. On a donc $1-f(x) \leqslant \dfrac{x(1-x)}{\sqrt{3}} \leqslant \dfrac{1-x}{\sqrt{3}}$ puisque $x \leqslant 1$.
6. (a) Calculons : $u_1 = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, puis $u_2 = f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{3}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1} = \dfrac{\sqrt{7-2\sqrt{3}}}{2}$.

   (b) Une petite récurrence : c'est vrai pour u_0 qui est par hypothèse égal à $\dfrac{1}{2}$. Si on suppose que $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$, au vu du tableau de variations de f, on aura $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqslant f(u_n) \leqslant 1$, soit $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$. Comme $\sqrt{3} > 1$, a fortiori $u_{n+1} \geqslant \dfrac{1}{2}$, ce qui prouve l'hérédité et achève la récurrence.

   (c) On a vu à la question 3 que $f(x)-x$ était positif sur $]0;1]$. Comme u_n appartient toujours à cet intervalle, on aura toujours $f(u_n) \geqslant u_n$, soit $u_{n+1} \geqslant u_n$. La suite (u_n) est donc croissante.

   (d) C'est une simple application de la question 5, avec $x = u_n$.

   (e) L'inégalité de gauche a déjà été prouvée, prouvons donc par récurrence que $1-u_n \leqslant \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^n u_0$. Pour $n=0$, l'inégalité revient à dire que $1-u_0 \leqslant u_0$, ce qui est vrai avec $u_0 = \dfrac{1}{2}$. Supposons donc l'inégalité vraie au rang n, on a alors $1-u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1-u_n)$ (question précédente) et $1-u_n \leqslant \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^n u_0$, d'où $1-u_{n+2} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^n u_0 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n+1} u_0$. La formule est donc vraie au rang $n=1$ et, par principe de récurrence, pour tout entier n.

   (f) Il suffit d'avoir $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^n u_0 \leqslant 10^{-10}$, soit en passant au logarithme $-10\ln 10 \geqslant -n\ln\sqrt{3} - \ln 2$, donc $n \geqslant \dfrac{20\ln 10 - 2\ln 2}{\ln 3}$.

Devoir Surveillé n°3

ECE3 Lycée Carnot

30 novembre 2010

Durée : 4H. Calculatrices interdites.

Exercice 1

On définit la suite (u_n) par $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{\binom{n}{k}}$.

1. (a) Écrire les premières lignes du triangle de Pascal, et calculer u_0, u_1, u_2, u_3 et u_4.

   (b) Montrer que, si $k \leqslant \dfrac{n-1}{2}$, $\binom{n}{k} \leqslant \binom{n}{k+1}$ (autrement dit, chaque ligne du triangle de Pascal est constitué de termes croissants jusqu'à son milieu).

   (c) En déduire que, $\forall 2 \leqslant k \leqslant n-2$, $\dfrac{1}{\binom{n}{k}} \leqslant \dfrac{1}{\binom{n}{2}}$, puis que $\forall n \geqslant 2$, $2 \leqslant u_n \leqslant 2 + \dfrac{2}{n} + \displaystyle\sum_{k=2}^{k=n-2} \frac{1}{\binom{n}{2}}$.

   (d) Prouver que (u_n) converge, et préciser sa limite.

2. (a) À l'aide de la formule de Pascal, montrer que $\forall k \leqslant n$, $\dfrac{1}{\binom{n}{k}} \geqslant \dfrac{1}{\binom{n+1}{k+1}}$.

   (b) Montrer que, pour $n \geqslant 3$, $\dfrac{1}{\binom{n}{1}} + \dfrac{1}{\binom{n}{2}} \geqslant \dfrac{1}{\binom{n+1}{1}} + \dfrac{1}{\binom{n+1}{2}} + \dfrac{1}{\binom{n+1}{3}}$.

   (c) Déduire des deux questions précédentes que (u_n) est décroissante à partir de u_3.

3. (a) Montrer à l'aide d'un changement d'indice que $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \frac{k!(n+1-k)!}{n!} = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(k+1)!(n-k)!}{n!}$.

   (b) En déduire que $2\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \frac{k!(n+1-k)!}{n!} = (n+2)\sum_{k=0}^{k=n} \frac{k!(n-k)!}{n!}$.

   (c) Montrer que la suite (u_n) vérifie la relation de récurrence $\forall n \geqslant 1$, $u_{n+1} = 1 + \dfrac{n+2}{2n+2} u_n$.

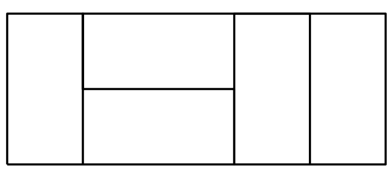
(d) Écrire un programme PASCAL calculant la valeur de u_n pour un entier n choisi par l'utilisateur (en utilisant la relation obtenue à la question précédente).

(e) En admettant que la suite (v_n) définie par $v_n = n(u_n - 2)$ converge, déterminer sa limite, et en déduire un équivalent simple de $u_n - 2$.

Exercice 2

Un domino traditionnel est un rectangle séparé en deux carrés sur lesquels sont inscrits deux chiffres compris entre 0 et 6. Pour tout cet exercice, le terme « domino double » désignera un domino dont les deux carrés contiennent le même chiffre et « domino simple » un domino sur lequel sont inscrits deux nombres distincts.

1. Dans un premier temps, on tire simultanément deux dominos dans une boîte contenant un exemple de chaque domino traditionnel (l'ordre des deux carrés sur un domino n'est pas important, il n'y a donc qu'un seul domino $4-5$ par exemple).
   (a) Déterminer le nombre de dominos que contient la boite. Combien parmi eux sont des dominos simples ?
   (b) Combien y a-t-il de tirages possibles au total ?
   (c) Combien de tirages constitués de deux dominos doubles ? D'un double et d'un simple ?
   (d) Combien de tirages pour lesquels le chiffre 1 n'apparait sur aucun des deux dominos ?
   (e) Combien de tirages pour lesquels on obtient deux chiffres 2 sur les deux dominos tirés ?
   (f) Combien de tirages pour lesquels les deux dominos ont (au moins) un chiffre en commun ?
   (g) Combien de tirages pour lesquels la somme des quatre chiffres tirés vaut 5 ?
2. On suppose désormais que les dominos peuvent avoir sur leurs faces des nombres compris entre 0 et $n-1$ (et non plus 0 et 6 comme auparavant). Comme précédemment, on place un exemplaire de chaque domino dans une boite, et eon en tire cette fois-ci trois successivement avec remise.
   (a) Montrer que le nombre de dominos est désormais égal à $\dfrac{n(n+1)}{2}$.
   (b) Déterminer le nombre total de tirages possibles.
   (c) Combien de tirages pour lesquels obtient au moins un double ?
   (d) Combien de tirages pour lesquels on obtient deux fois exactement le chiffre 0 ?
3. On dispose désormais de dominos jaunes, rouges et verts en nombre aussi grand que nécessaire. On veut construire un mur de dominos de hauteur 2 et de longueur n à l'aide de ces dominos (cf schéma pour un exemple de mur de hauteur 2 et de longueur 5). Un domino vertical sera nécessairement jaune, mais quand on pose deux dominos horizontaux, on a le choix entre mettre un vert au-dessus et un rouge en-dessous, ou le contraire. On note u_n le nombre de murs de longueur n distincts possibles.



   (a) En faisant la liste des cas possibles, déterminer la valeur de u_1, u_2, u_3 et u_4.
   (b) Prouver que, $\forall n \geqslant 1$, $u_{n+2} = 2u_n + u_{n+1}$.
   (c) En déduire la valeur de u_n en fonction de n.

Exercice 3

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} - \ln n$, et $v_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$.

1. (a) En étudiant les variations de la fonction $f : x \mapsto \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x}$, prouver que, $\forall n \geqslant 1$, $\ln(n+1) - \ln n \leqslant \frac{1}{n}$. On **admet** pour la suite de l'exercice que $\forall n \geqslant 2$, $\frac{1}{n} \leqslant \ln n - \ln(n-1)$.
   (b) En déduire que $\forall n \geqslant 1$, $\ln(n+1) \leqslant \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln n$.
   (c) Déterminer un équivalent simple de $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$ quand n tend vers $+\infty$.
   (d) En reprenant les résultats de la question 1, déterminer la monotonie des suites (u_n) et (v_n).
   (e) Prouver que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
   (f) En déduire qu'il existe un réel c (qu'on ne cherchera pas à déterminer) tel que $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} = \ln n + c + \alpha_n$, avec $\lim_{n \to +\infty} \alpha_n = 0$.
2. On s'intéresse désormais à la suite (w_n) définie par $w_n = \sum_{k=n+1}^{k=2n} \frac{1}{k}$.
   (a) Calculer (et simplifier) les valeurs de w_0, w_1, w_2 et w_3.
   (b) Déterminer la monotonie de la suite (w_n).
   (c) Prouver que $\forall n \geqslant 1$, $w_n \leqslant 1$.
   (d) En déduire la convergence de la suite (w_n), et un encadrement de sa limite.
   (e) Prouver que $u_{2n} - u_n = w_n - \ln 2$, et en déduire la limite de (w_n).
3. Dans cette dernière partie, on considère une dernière suite (t_n) définie par $t_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} = \frac{t_n}{t_n^2 + t_n + 1}$.
   (a) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n \in [0; 1]$.
   (b) Étudier la monotonie de (t_n), et en déduire sa convergence.
   (c) Montrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{t_n} \geqslant n + 1$.
   (d) En déduire à l'aide d'une nouvelle récurrence que, $\forall n \geqslant 1$, $\frac{1}{t_n} \leqslant n + 1 + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$.
   (e) En réutilisant les résultats des questions précédentes et ceux de la première partie, déterminer un équivalent simple de t_n.

Corrigé du DS3

Exercice 1

1. (a) Les cinq premières lignes (pour n allant de 0 à 4 si vous préférez) suffisent pour cette question : 1 puis 1 1 puis 1 2 1 puis 1 3 3 1 puis 1 4 6 4 1. On en déduit que $u_0 = \frac{1}{1} = 1$; $u_1 = 1+1 = 2$; $u_2 = 1+\frac{1}{2}+1 = \frac{5}{2}$; $u_3 = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+1 = \frac{8}{3}$ et $u_4 = 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+1 = \frac{8}{3}$.

   (b) On a $\binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n! \times (n-k)}{k!(n-k)! \times (k+1)} = \binom{n}{k} \times \frac{n-k}{k+1}$. Les deux nombres étant positifs, $\binom{n}{k+1}$ sera plus grand que $\binom{n}{k}$ si $\frac{n-k}{k+1} \geqslant 1$, c'est-à-dire si $n-k \geqslant k+1$, soit $2k \leqslant n-1$, ce qui donne bien la condition de l'énoncé.

   (c) De la question précédente découle que $\binom{n}{2} \leqslant \binom{n}{3} \leqslant \cdots \leqslant \binom{n}{k}$ pour tout entier k inférieur ou égal à $\frac{n-1}{2}$. Or, en utilisant la symétrie des coefficients binomiaux, on aura de même $\binom{n}{k} \leqslant \binom{n}{k+1} \leqslant \cdots \leqslant \binom{n}{n-2}$ si $k \geqslant \frac{n+1}{2}$. Comme par ailleurs $\binom{n}{n-2} = \binom{n}{2}$, on aura bien pour tous les entiers compris entre 2 et $n-2$, $\binom{n}{k} \leqslant \binom{n}{2}$, d'où en passant à l'inverse la première inégalité demandée. Il suffit ensuite de découper la somme définissant u_n en petits morceaux : $u_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{\binom{n}{k}} = \frac{1}{\binom{n}{0}} + \frac{1}{\binom{n}{1}} + \sum_{k=2}^{k=n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}} + \frac{1}{\binom{n}{n-1}} + \frac{1}{\binom{n}{n}} = 1 + \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{k=n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}} + \frac{1}{n} + 1 = 2 + \frac{2}{n} + \sum_{k=2}^{k=n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}}$. On en déduit sans problème que $u_n \geqslant 2$, et en utilisant l'inégalité qu'on vient de démontrer, que $u_n \leqslant 2 + \frac{2}{n} + \sum_{k=2}^{k=n-2} \frac{1}{\binom{n}{2}}$.

   (d) En explicitant la valeur du coefficient binomial, l'inégalité de droite donne en fait $u_n \leqslant 2 + \frac{2}{n} + \sum_{k=2}^{k=n-2} \frac{2}{n(n-1)} = 2 + \frac{2}{n} + \frac{n-3}{n(n-1)}$. Cette expression ayant pour limite 2 quand n tend vers $+\infty$, le théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$.

2. (a) Puisque $\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n-1}{k-1}$, on a certainement $\binom{n}{k} \geqslant \binom{n-1}{k-1}$, d'où l'inégalité demandée en passant à l'inverse.

   (b) Un peu de courage, calculons la différence des deux termes : $\frac{1}{\binom{n}{1}} + \frac{1}{\binom{n}{2}} - \frac{1}{\binom{n+1}{1}} - \frac{1}{\binom{n+1}{2}} - \frac{1}{\binom{n+1}{3}} = \frac{1}{n} + \frac{2}{n(n-1)} - \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n(n+1)} - \frac{6}{(n-1)n(n+1)}$
   $= \frac{(n-1)(n+1) + 2(n+1) - n(n-1) - 2(n-1) - 6}{(n-1)n(n+1)}$
   $= \frac{n^2 - 1 + 2n + 2 - n^2 + n - 2n + 2 - 6}{(n-1)n(n+1)} = \frac{n-3}{(n-1)n(n+1)}$ qui est bien positif si $n \geqslant 3$.

(c) En effet, si $n \geqslant 3$, $u_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{\binom{n}{k}} = 1 + \frac{1}{\binom{n}{1}} + \frac{1}{\binom{n}{2}} + \sum_{k=3}^{k=n} \frac{1}{\binom{n}{k}} \leqslant 1 + \frac{1}{\binom{n+1}{1}} + \frac{1}{\binom{n+1}{2}} + \frac{1}{\binom{n+1}{3}} + \sum_{k=3}^{k=n} \frac{1}{\binom{n+1}{k+1}}$. L'expression de droite n'étant autre que celle de u_{n+1}, on aura bien $u_n \geqslant u_{n+1}$ si $n \geqslant 3$, d'où la décroissance de la suite.

3. (a) Il suffit de poser $i = n-k$, le $k!(n+1-k)!$ du numérateur devient alors un $(n-i)!(i+1)!$, le dénominateur ne change pas, et i varie de $n-n$ à $n-0$, c'est-à-dire de 0 à n.

(b) L'idée est d'additionner la somme initiale avec celle obtenue à la question précédente, et de simplifier : $2\sum_{k=0}^{k=n} \frac{k!(n+1-k)!}{n!}$

$$= \sum_{k=0}^{k=n} \frac{k!(n+1-k)!}{n!} + \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(k+1)!(n-k)!}{n!}$$

$$= \sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{(n+1-k) \times k!(n-k)!}{n!} + \frac{(k+1) \times k!(n-k)!}{n!} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(n+1-k+k+1) \times k!(n-k)!}{n!} = (n+2) \sum_{k=0}^{k=n} \frac{k!(n-k)!}{n!}.$$

(c) On a $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{k=n+1} \frac{1}{\binom{n+1}{k}} = \sum_{k=0}^{k=n+1} \frac{k!(n+1-k)!}{(n+1)!}$.En séparant le dernier terme et en utilisant la question précédente,

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{k!(n+1-k)!}{n!} = 1 + \frac{n+2}{2(n+1)} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{k!(n-k)!}{n!} = 1 + \frac{n+2}{2n+2} u_n.$$

(d)
```
PROGRAM cacahouete ;
USES wincrt ;
VAR u : real ; i,n : integer ;
BEGIN
WriteLn('Choisissez la valeur de n') ;
ReadLn(n) ;
u := 1 ;
FOR i := 0 TO n-1 DO u := 1+(i+2)*u/(2*i+2) ;
WriteLn(u) ;
END.
```

(e) En utilisant la relation précédente, $v_{n+1} = (n+1)(u_{n+1} - 2) = (n+1)\left(\frac{n+2}{2n+2} u_n - 1\right) = \frac{n+2}{2} u_n - n - 1 = \frac{n}{2} u_n - n + u_n - 1 = \frac{n}{2}(u_n - 2) + u_n - 1 = \frac{1}{2} v_n + u_n - 1$.
En admettant que (v_n) converge vers une limite l, le membre de gauche de cette égalité tend vers l, et celui de droite vers $\frac{1}{2} l + 1$ (puisque la suite (u_n) a pour limite 2), donc on doit avoir $l = \frac{1}{2} l + 1$, soit $l = 2$. On a donc $\lim_{n \to +\infty} n(u_n - 2) = 2$, soit $u_n - 2 \sim \frac{2}{n}$.

Exercice 2

1. (a) Il y a 7 dominos doubles et $\binom{7}{2} = 21$ dominos simples, soit au total 28 dominos.

(b) Il y a donc $\binom{28}{2} = 378$ tirages possibles.

(c) Il y a $\binom{7}{2} = 21$ tirages constitués de deux dominos doubles, et $7 \times 21 = 147$ d'un double et d'un simple.

(d) Il y a 7 dominos faisant apparaitre le chiffre 1, donc 21 sans chiffre 1, soit $\binom{21}{2} = 210$ tirages convenables.

(e) Soit on obtient le double 2 et un quelconque des 21 dominos ne faisant pas apparaitre le 2, soit on obtient deux dominos simples ayant un 2. Comme ces derniers sont au nombre de 6, il y a au total $21 + \binom{6}{2} = 26$ tirages convenables.

(f) Soit on tire un double et un simple contenant le chiffre du double (7 choix pour le double, et à chaque fois 6 simples convenables), soit deux simples contenant un même chiffre (sept possibilités pour le chiffre commun, $\binom{6}{2}$ choix de simples, sachant que les deux simples ne peuvent pas avoir deux chiffres en commun). Au total, $7 \times 6 + 7 \times 15 = 147$.

(g) Il faut distinguer plein de cas : soit on a $5 + 0 + 0 + 0$ (un seul cas) ; soit $4 + 1 + 0 + 0$ (deux cas, le double 0 et le $1 - 4$ ou le $0 - 1$ et le $0 - 4$) ; soit $3 + 2 + 0 + 0$ (encore deux cas) ; soit $3 + 1 + 1 + 1$ (un seul cas) ; soit $2 + 2 + 1 + 0$ (deux cas) ; soit $2 + 1 + 1 + 1$ (un seul cas). Au total, 9 cas possibles.

2. (a) Il y a n dominos doubles, et $\binom{n}{2}$ dominos simples, soit $n + \dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2}$ dominos.

(b) On a désormais des listes, il y a $\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^3$ tirages possibles.

(c) Le nombre de tirages où on n'obtient pas de double est $\left(\dfrac{n(n-1)}{2}\right)^3$, donc par complémentaire le nombre cherché vaut $\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^3 - \left(\dfrac{n(n-1)}{2}\right)^3$.

(d) Soit on obtient le double zéro et deux autres dominos parmi les $\dfrac{n(n-1)}{2}$ n'ayant pas de zéro (il y en a n qui contiennent un zéro), soit deux simples contenant le zéro et un ne le contenant pas. Comme l'ordre est de plus important (il faut choisir dans le premier cas la position du double zéro, dans l'autre la position du domino sans zéro), le nombre de tirages vaut $3 \times \left(\dfrac{n(n-1)}{2}\right)^2 + 3 \times n^2 \times \dfrac{n(n-1)}{2}$

3. (a) On obtient sans trop de problèmes $u_1 = 1$; $u_2 = 3$ (soit deux jaunes verticaux, soit rouge/vert horizontaux avec deux positions possibles) ; $u_3 = 5$ (un avec trois jaunes, quatre avec un jaune soit au début soit au bout) et $u_4 = 11$ (j'ai la flemme de faire des dessins, en plus je manque de couleurs : un avec quatre jaunes, quatre sans jaunes, et six avec deux jaunes qu'on peut placer à trois endroits).

(b) Considérons un mur de longueur $n + 2$. Soit il s'achève avec un domino jaune, qui est alors précédé d'un mur de longueur $n + 1$, pour lequel on a u_{n+1} constructions possibles. Soit il s'achève avec un binôme rouge/vert (deux possibilités) précédé cette fois d'un mur de longueur n pouvant être construit de u_n façons. Au total, on obtient bien $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$.

(c) La suite (u_n) est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - x - 2 = 0$. Celle-ci a pour discriminant 9 et admet pour racines $x_1 = 2$ et $x_2 = -1$. On en déduit que $u_n = \alpha 2^n + \beta(-1)^n$, où on a $u_1 = 2\alpha - \beta = 1$, et $u_2 = 4\alpha + \beta = 3$, donc en additionnant $6\alpha = 4$, soit $\alpha = \dfrac{2}{3}$, et $\beta = 2\alpha - 1 = \dfrac{1}{3}$. On a donc $u_n = \dfrac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}$

Exercice 3

1. (a) Étudions donc : la fonction f est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$, de dérivée $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^2-x(x+1)+x+1}{(x+1)x^2}=\dfrac{1}{(x+1)x^2}$. La fonction f est donc strictement croissante sur $]0;+\infty[$. Or, $\ln(x+1)-\ln x=\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$, qui a pour limite 0 quand x tend vers $+\infty$. La fonction f estdonc toujours négative. En particulier, $\forall n\geqslant 1$, $\ln(n+1)-\ln n-\dfrac{1}{n}\leqslant 0$.

   (b) Si on somme l'inagilité précédente pour k variant entre 1 et n, on obtient $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}\ln(k+1)-\ln k\leqslant\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}$. La somme de gauche est une somme télescopique valant $\ln(n+1)-\ln 1=\ln(n+1)$. Pour l'autre côté, on utilise la deuxième inégalité donnée par l'énoncé, mais on ne peut sommer qu'entre 2 et n : $\displaystyle\sum_{k=2}^{k=n}\frac{1}{k}\leqslant\sum_{k=2}^{k=n}\ln k-\ln(k-1)=\ln n-\ln 1$. Il suffit d'ajouter le terme pour $k=1$, qui vaut 1, pour obtenir l'encadrement souhaité.

   (c) Divisons l'encadrement précédent par $\ln n$: $\displaystyle\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\leqslant\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}\leqslant\frac{1}{\ln n}+1$. Le membre de droite tend manifestement vers 1 ; quand à celui de gauche il vaut $\dfrac{\ln n+\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}=1+\dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}$, ce qui tend aussi vers 1. Conclusion via le théorème des gendarmes : $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}\sim\ln n$.

   (d) Calculons donc $\displaystyle u_{n+1}-u_n=\sum_{k=1}^{k=n+1}\frac{1}{k}-\ln(n+1)-\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}+\ln n=\frac{1}{n+1}+\ln n-\ln(n+1)$, qui est négatif car $\dfrac{1}{n+1}\leqslant\ln(n+1)-lnn$ (deuxième inégalité de la première question, décalée pour avoir des $n+1$ à la place des n). La suite (u_n) est donc décroissante. De même, on calcule $v_{n+1}-v_n=\dfrac{1}{n+1}+\ln(n+1)-\ln(n+2)$, qui cette fois-ci est positif en utilisant la première inégalité de la première question. La suite (v_n) est donc croissante (note : en calculant u_n-u_{n-1} au lieu de $u_{n+1}-u_n$, on retombe exactement sur les inégalités initiales).

   (e) Il ne reste qu'à prouver que leur différence tend vers 0 : $\displaystyle u_n-v_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}-\ln n-\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}+\ln(n+1)=\ln(n+1)-\ln n=\ln\frac{n+1}{n}$, qui a bien pour limite 0 (ce qui se trouve dans le ln tend vers 1). Les suites sont donc adjacentes.

   (f) La suite (u_n) converge donc vers une certaine limite c, ou si l'on préfère $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}-\ln n-c$ tend vers 0, ce qui est exactement ce qu'on nous demande de prouver.

2. (a) Pour $n=0$, la somme est vide, donc $w_0=0$. Ensuite, $w_1=\dfrac{1}{2}$ (un seul terme dans la somme) ; $w_2=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{7}{12}$ et $w_3=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{15+12+10}{60}=\dfrac{37}{60}$.

(b) Calculons donc $w_{n+1}-w_n = \displaystyle\sum_{k=n+2}^{k=2(n+1)} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{k=2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \geqslant 0$, donc (w_n) est une suite croissante.

(c) Le terme w_n est une somme de n nombres, dont le plus grand vaut $\dfrac{1}{n+1}$. On en déduit que $w_n \leqslant n \times \dfrac{1}{n+1} \leqslant 1$.

(d) La suite (w_n) étant croissante et majorée, elle converge. Sa limite est certainement inférieure ou égale à 1 au vu de la question précédente. La suite étant croissante, la limite est par ailleurs supérieure à chacun de ses termes, donc en particulier à $\dfrac{37}{60}$ au vu des calculs de la première question.

(e) En effet, $u_{2n} - u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=2n} \frac{1}{k} - \ln(2n) - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} + \ln n = \sum_{k=n+1}^{k=2n} \frac{1}{k} - \ln \frac{2n}{n} = w_n - \ln 2$. Comme on a vu plus haut que la suite (u_n) était convergente (peu importe vers quoi), u_{2n} et u_n convergent vers cette même limite, donc $u_{2n} - u_n$ tend vers 0. On en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} w_n - \ln 2 = 0$, ou encore $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} w_n = \ln 2$.

3. (a) Petit raisonnement par récurrence : c'est vrai par hypothèse pour t_0 qui est égal à 1. Supposons donc $t_n \in [0;1]$, alors $0 \leqslant t_n < t_n^2 + t_n + 1$, donc $0 \leqslant \dfrac{t_n}{t_n^2+t_n+1} < 1$, ce qui prouve l'encadrement pour t_{n+1} et achève la récurrence.

(b) Calculons pour changer $t_{n+1}-t_n = \dfrac{t_n}{t_n^2+t_n+1} - t_n = \dfrac{t_n - t_n^3 - t_n^2 - t_n}{t_n^2+t_n+1} = \dfrac{-t_n(1+t_n)}{t_n^2+t_n+1} \leqslant 0$. La suite (t_n) est donc décroissante ; étant minorée par 0, elle converge.

(c) Pour $n = 0$, $\dfrac{1}{t_0} = 1 \geqslant 0+1$ est vraie. Supposons donc $\dfrac{1}{t_n} \geqslant n+1$. On a alors $\dfrac{1}{t_{n+1}} = \dfrac{t_n^2+t_n+1}{t_n} = t_n + 1 + \dfrac{1}{t_n} \geqslant t_n + 1 + n + 1$. Comme on sait par ailleurs que $t_n \geqslant 0$, on en déduit que $\dfrac{1}{t_{n+1}} \geqslant n+2$, ce qui prouve l'hérédité de notre propriété et achève la récurrence.

(d) Pour $n = 1$, on a $t_1 = \dfrac{1}{1+1+1} = \dfrac{1}{3}$, donc $\dfrac{1}{t_1} = 3$, et $n+1+\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} = 1+1+\frac{1}{1} = 3$, donc l'inégalité est vérifiée. Supposons la vraie pour un certain entier n, alors en reprenant le calcul de la question précédente, $\dfrac{1}{t_{n+1}} = t_n + 1 + \dfrac{1}{t_n} \leqslant t_n + 1 + n + 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$. Or, on vient de voir que $\dfrac{1}{t_n} \geqslant n+1$, donc en passant à l'inverse $t_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. On en déduit finalement que $\dfrac{1}{t_{n+1}} \leqslant \dfrac{1}{n+1} + n + 2 + \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} = n + 2 + \sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{1}{k}$. Par principe de récurrence, la majoration est donc vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

(e) En divisant les deux inégalités précédentes par n, on obtient l'encadrement $\dfrac{n+1}{n} \leqslant \dfrac{1}{nt_n} \leqslant \dfrac{n+1}{n} + \dfrac{\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}}{n}$. Le membre de gauche de cet encadrement a pour limite 1, et celui de droite aussi car on a vu plus haut que $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} \sim \ln n$, donc par croissance comparée $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}}{n} = 0$. Le théorème des gendarmes nous permet alors de conclure que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{nt_n} = 1$. On a donc $\lim_{n\to+\infty} nt_n = 1$, c'est-à-dire que $t_n \sim \frac{1}{n}$.

Concours Blanc n°1

ECE3 Lycée Carnot

5 janvier 2011

Problème 1 : Séries et factorielles

Dans tout ce problème, on étudie différentes séries ayant une forme proche de celle de la série exponentielle.

I.Un exemple

Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = 2$, $u_2 = 3$ et $\forall n \geqslant 1$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.

1. Prouver que, $\forall n \geqslant 1$, $u_n \in \mathbb{Z}$.
2. Déterminer une formule explicite pour u_n.
3. Prouver que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{u_n}{n!}$ est convergente, et calculer sa somme.
4. Expliquer pourquoi, quelle que soit la suite (u_n) récurrente linéaire d'ordre 2 dont l'équation caractéristique a un discriminant positif ou nul, la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{u_n}{n!}$ sera convergente.

II.Série exponentielle

Le but de cette partie est de prouver la convergence de la série exponentielle et de donner quelques propriétés de sa limite, **sans** utiliser vos connaissances éventuelles sur cette série.

1. Montrer que, $\forall n \geqslant 4$, $n! \geqslant 2^n$.
2. En déduire que, $\forall n \geqslant 4$, $\displaystyle\sum_{k=4}^{k=n} \frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{2^3}$.
3. Prouver la convergence de la série exponentielle $\displaystyle\sum \frac{1}{k!}$, et donner un encadrement de sa limite.
4. Écrire un programme PASCAL calculant la somme partielle d'indice n de la série exponentielle, pour un entier n choisi par l'utilisateur.

III.Suites et séries de Cantor

Une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ d'**entiers** relatifs est appelée suite de Cantor si $u_1 \in \mathbb{Z}$ et $\forall n \geqslant 2,\ 0 \leqslant u_n \leqslant n-1$. La série de Cantor associée à une telle suite (u_n) est la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{u_n}{n!}$. On considère dans cette partie une suite de Cantor (u_n) et on note S_n la somme partielle de la série de Cantor associée : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{u_k}{k!}$.

1. Calculer en fonction de n et p la somme $A = \displaystyle\sum_{k=p+1}^{k=n} \frac{k-1}{k!}$ (on pourra utiliser un télescopage).
2. Montrer que, $\forall 1 \leqslant p < n,\ 0 \leqslant S_n - S_p \leqslant A$.
3. En déduire que la série de Cantor associée à (u_n) est convergente. On notera S sa limite.
4. Montrer que, $\forall p \geqslant 1,\ S_p \leqslant S \leqslant S_p + \dfrac{1}{p!}$.

IV.Développement de Cantor d'un réel

On considère désormais un réel quelconque x et on note, pour $n \geqslant 1$, $p_n = Ent(n!x)$ (où $Ent(x)$ désigne la partie entière de x, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x). On définit ensuite (u_n) par $u_1 = p_1$ et, $\forall n \geqslant 2,\ u_n = p_n - np_{n-1}$.

1. Montrer que, $\forall n \geqslant 1,\ u_n \in \mathbb{Z}$.
2. Montrer que, $\forall n \geqslant 2,\ np_{n-1} \leqslant p_n \leqslant n!x < p_n + 1 \leqslant n(p_{n-1}+1)$.
3. En déduire que (u_n) est une suite de Cantor.
4. On note comme précédemment S_n la somme partielle de la série de Cantor associée à (u_n) : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{u_k}{k!}$. Exprimer S_n en fonction de p_n.
5. Prouver que la série converge vers x.

Problème 2 : Coefficients binomiaux généralisés

On définit le coefficient binomial généralisé $\dbinom{x}{n}$, pour x réel et n entier naturel, par $\dbinom{x}{0} = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $\dbinom{x}{k} = \dfrac{x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1)}{k(k-1)(k-2)\dots 2\times 1}$ pour tout x réel et tout naturel $k > 0$. Il est clair que, pour x entier naturel, on retrouve la notion usuelle de coefficient binomial.

I.Quelques valeurs

1. Calculer $\dbinom{-2}{3}$ et $\dbinom{\sqrt{2}}{2}$.
2. Calculer $\dbinom{-1}{n}$.
3. Montrer que pour tout naturel $n > 0$, $\dbinom{-\frac{1}{2}}{n} = (-1)^n \dbinom{2n}{n} \times \dfrac{1}{2^{2n}}$.
4. Montrer que, pour tout entier naturel $n > 0$, $\dbinom{\frac{1}{2}}{n} = (-1)^{n+1} \dbinom{2n}{n} \times \dfrac{1}{2^{2n}} \times \dfrac{1}{an+b}$, où a et b sont deux entiers que l'on précisera.

II. Formule de Pascal

1. Montrer que, pour tout réel x et tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\displaystyle\binom{x}{k} = \binom{x-1}{k} + \binom{x-1}{k-1}$.
2. Déduire de ce qui précède que, pour tout naturel $n \geqslant 1$, $\displaystyle\frac{2n}{2n-1}\binom{2n}{n} = 4\binom{2n-2}{n-1}$.

III. Formule de Vandermonde

1. Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tous entiers naturels n et b et pour tout réel a, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$.
2. On pose $P(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{t}{n-k}$ et $Q(t) = \binom{a+t}{n}$. Il est clair que P et Q sont des polynômes en t. On précisera le degré de chacun de ces polynômes. Calculer $P(0)$, $P(1)$, …, $P(n)$; $Q(0)$, $Q(1)$, …, $Q(n)$. En déduire que la formule démontrée à la question précédente reste vraie pour tous réels a et b (on pourra utiliser le fait que deux polynômes de degré n prenant la même valeur en $n+1$ réels distincts sont nécessairement égaux).
3. Montrer que pour tout naturel n, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} = 2^{2n}$.
4. Un train est formé de $2n$ wagons et d'une locomotive. Un convoi est dit « équitable » si exactement la moitié des wagons devant la locomotive sont vides, ainsi qu'exactement la moitié des wagons derrière la locomotive. Ainsi, pour $n = 2$, les convois Loco-Vide-Plein-Vide-Plein ; Plein-Vide-Loco-Vide-Plein ou Plein-Vide-Vide-Plein-Loco sont équitables.

   Montrer que le nombre de convois équitables formés de $2n$ wagons est égal à 4^n.

Corrigé du Concours Blanc n°1

Problème 1 : Séries et factorielles

I.Un exemple

1. C'est une récurrence double facile : u_1 et u_2 sont des entiers, et en supposant que u_n et u_{n+1} sont tous les deux entiers, la relation de récurrence implique que $u_{n+2} \in \mathbb{Z}$, ce qui prouve l'hérédité.
2. La suite est récurrente linéaire double, d'équation caractéristique $x^2-5x+6=0$. Cette dernière a pour discriminant $\Delta = 25-24 = 1$, et admet deux racines $r = \dfrac{5+1}{2} = 3$ et $s = \dfrac{5-1}{2} = 2$. On en déduit que $u_n = \alpha 3^n + \beta 2^n$, où α et β, au vu des valeurs initiales, vérifient $3\alpha + 2\beta = 2$ et $9\alpha + 4\beta = 3$. En soustrayant le double de la première équation à la deuxième, on obtient $3\alpha = -1$, soit $\alpha = -\dfrac{1}{3}$, puis $\beta = \dfrac{2-3\alpha}{2} = \dfrac{3}{2}$. Conclusion : $\forall n \geqslant 1$, $u_n = 3 \times 2^{n-1} - 3^{n-1}$.
3. Les sommes partielles de la série sont données par $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{u_k}{k!} = \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{k=n} \frac{2^k}{k!} - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{k=n}\frac{3^k}{k!}$. Chacune de ces deux séries est convergente (séries exponentielles, au manque du premier terme près), donc la série étudiée également et sa somme vaut $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} = \frac{3}{2}(e^2-1) - \frac{1}{3}(e^3-1) = \frac{3}{2}e^2 - \frac{e^3}{3} - \frac{7}{6}$.
4. Si l'équation caractéristique admet deux racines distinctes (discriminant strictement positif), la suite peut se mettre sous la forme $\alpha r^n + \beta s^n$, et les sommes partielles de la série étudiée seront sommes de deux séries exponentielles convergentes. S'il y a une racine double, on peut mettre u_n sous la forme $u_n = (\alpha + \beta n)r^n$, et cette fois les sommes partielles s'écriront $\displaystyle\alpha \sum_{k=1}^{k=n} \frac{r^k}{k!} + \beta s \sum_{k=1}^{k=n} \frac{s^{n-1}}{(n-1)!}$, qui est encore une fois une somme de deux séries exponentielles convergentes.

II.Série exponentielle

1. Cela se fait très bien par récurrence. Pour $n = 4$, $2^4 = 16$ et $4! = 24$, donc l'inégalité est vérifiée. Si on suppose que, pour un certain entier supérieur ou égal à 4, $2^n \leqslant n!$, alors $2^{n+1} = 2 \times 2^n \leqslant 2 \times n! \leqslant (n+1) \times n! = (n+1)!$, ce qui prouve l'hérédité et achève la récurrence.
2. Pour tout les indices de la somme, au vu de la question précédente, on aura $\dfrac{1}{k!} \leqslant \dfrac{1}{2^k}$, donc $\displaystyle\sum_{k=4}^{k=n} \frac{1}{k!} \leqslant \sum_{k=4}^{k=n} \frac{1}{2^k}$, somme géométrique égale à $\displaystyle\frac{1}{2^4}\sum_{k=0}^{k=n-4} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^4}\frac{1-\frac{1}{2^{n-3}}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{2^{n-3}}\right) \leqslant \frac{1}{8}$.
3. La série exponentielle est une série à termes positifs, majorée au vu de ce qui précède par $\dfrac{1}{0!} + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{8}$. Elle converge donc, et sa limite l vérifie certainement $1 + 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} \leqslant l \leqslant 1 + 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{8}$, soit $\dfrac{8}{3} \leqslant l \leqslant \dfrac{64}{27}$.
4. PROGRAM expo ;

```
USES wincrt ;
VAR s : real ; i,f,n : integer ;
BEGIN
WriteLn('Choisissez un entier n') ;
ReadLn(n) ;
s := 1 ; f := 1 ;
```

```
FOR i := 1 TO n DO
BEGIN
f := f*i ;
s := s+1/f ;
END ;
WriteLn('La valeur de la somme partielle est ',s) ;
END.
```

III.Suites et séries de Cantor

1. On peut écrire (si $p < n$, sinon la somme est bien sûr nulle) $\sum_{k=p+1}^{k=n} \frac{k-1}{k!} = \sum_{k=p+1}^{k=n} \frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=p+1}^{k=n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{p!} - \frac{1}{n!}$.
2. On a en effet $S_n - S_p = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{u_k}{k!} - \sum_{k=1}^{k=p} \frac{u_k}{k!} = \sum_{k=p+1}^{k=n} \frac{u_k}{k!}$. Or, par hypothèse, on a toujours $\frac{u_k}{k!} \leqslant \frac{k-1}{k!}$, donc notre expression est bien majorée par la somme calculée précédemment. Par ailleurs, $S_n - S_p \geqslant 0$ puisqu'à partir du rang 2, $\frac{u_k}{k!} \geqslant 0$.
3. En particulier, on aura $\forall n \geqslant 2$, $S_n - S_1 \leqslant 1 - \frac{1}{n!} \leqslant 1$, soit $S_n \leqslant S_1 + 1$. La suite S_n étant croissante, elle converge.
4. Il suffit de reprendre l'encadrement de la question 2 : $0 \leqslant S_n - S_p \leqslant \frac{1}{p!} - \frac{1}{n!}$, et de passer à la limite pour obtenir $0 \leqslant S - S_p \leqslant \frac{1}{p!}$, ce qui est équivalent à ce qui nous est demandé.

IV.Développement de Cantor d'un réel

1. C'est évident au vu de la définition de u_n, puisque les termes de la suite (p_n) sont des entiers.
2. Les inégalités $p_n \leqslant n!x < p_n + 1$ ne sont que la définition de la partie entière. De même, on aura $p_{n-1} \leqslant (n-1)!x < p_{n-1} + 1$, donc $np_{n-1} \leqslant n!x < n(p_{n-1} + 1)$. Le nombre np_{n-1} étant un entier inférieur à $n!x$, il est nécessairement plus petit que p_n (par définition de la partie entière). De même, $n(p_{n-1} + 1)$ est un entier strictement supérieur à $n!x$, donc supérieur ou égal à $p_n + 1$.
3. Le nombre u_1 est certainement entier. De plus, au vu des inégalités précédentes, on aura toujours $0 \leqslant p_n - np_{n-1}$, et $p_n + 1 \leqslant np_{n-1} + n$, soit $p_n - np_{n-1} \leqslant n - 1$. Autrement dit, $0 \leqslant u_n \leqslant n - 1$, ce qui définit bien une suite de Cantor.
4. On se convainc assez facilement que $S_n = \frac{p_n}{n!}$, ce qui se prouve par récurrence : $S_1 = \frac{u_1}{1!} = p_1$. Ensuite, si on suppose $S_n = \frac{p_n}{n!}$, on aura $S_{n+1} = S_n + \frac{u_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{p_n}{n!} + \frac{p_{n+1} - (n+1)p_n}{(n+1)!} = \frac{p_n}{n!} + \frac{p_{n+1}}{(n+1)!} - \frac{p_n}{n!} = \frac{p_{n+1}}{(n+1)!}$, ce qui prouve l'hérédité. On peut aussi faire un calcul direct de somme télescopique.
5. En divisant par $n!$ les inégalités de la question 2, on a notamment $\frac{p_n}{n!} \leqslant x < \frac{p_n}{n!} + \frac{1}{n!}$. Une simple application du théorème des gendarmes nous donne donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{p_n}{n!} = x$, et la série (S_n) converge vers x.

Problème 2 : coefficients binomiaux généralisés

I.Quelques valeurs

1. Calculons donc $\binom{-2}{3} = \dfrac{(-2)\times(-3)\times(-4)}{3!} = -4$; et $\binom{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1}{2} = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
2. Calculons encore $\binom{-1}{n} = \dfrac{(-1)(-2)\dots(-n)}{n!} = (-1)^n$.
3. Calculons toujours $\binom{-\frac{1}{2}}{n} = \dfrac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\dots(-\frac{2n-1}{2})}{n!} = \dfrac{(-1)^n\times 1\times 3\cdots\times(2n-1)}{2^n n!} = \dfrac{(-1)^n}{2^n n!}\times$ $\dfrac{1\times 2\times 3\cdots\times 2n}{2\times 4\cdots\times 2n} = \dfrac{(-1)^n}{2^n n!}\times\dfrac{(2n)!}{2^n n!} = \dfrac{(-1)^n}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$.
4. Calculons enfin $\binom{\frac{1}{2}}{n} = \dfrac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})\dots(-\frac{2n-3}{2})}{n!} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n!}\times\dfrac{1\times 3\times\dots(2n-3)}{2^n} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{2^n n!}\times$ $\dfrac{(2n)!}{2\times 4\times(2n-2)(2n-1)(2n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{2^n n!}\dfrac{(2n)!}{2^n n!(2n-1)} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}}\binom{2n}{n}\dfrac{1}{2n-1}$.

II.Formule de Pascal

1. $\binom{x-1}{k} + \binom{x-1}{k-1} = \dfrac{(x-1)(x-2)\dots(x-k)}{k!} + \dfrac{(x-1)(x-2)\dots(x-k+1)}{(k-1)!}$ $= \dfrac{(x-1)(x-2)\dots(x-k+1)(x-k+k)}{k!} = \binom{x}{k}$.
2. Déduisons : $\binom{2n}{n} = \binom{2n-1}{n} + \binom{2n-1}{n-1}$. Par symétrie, les deux coefficients de droite sont en fait égaux, et $\binom{2n}{n} = 2\binom{2n-1}{n-1} = 2\times\dfrac{(2n-1)!}{(n-1)!n!} = 2\times\dfrac{2n-1}{n}\left(\dfrac{(2n-2)!}{(n-1)!^2}\right)$, ce qui donne la formule demandée.

III. Formule de Vandermonde

1. Procédons par récurrence sur l'entier b.

   Pour $b = 0$, la formule devient $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{a}\binom{0}{n-k} = \binom{a}{n}$, ce qui est vrai puisque la somme de droite se réduit au terme obtenu pour $k = n$ (tous les auters sont nuls), terme qui vaut $\binom{n}{a}$.

   Supposons désormais la formule vrai au rang b, alors (en supposant $n \geqslant 1$, sinon il n'y a rien à démontrer), on peut appliquer la formule de Pascal pour obtenir $\binom{a+b+1}{n} = \binom{a+b}{n} + \binom{a+b}{n-1}$. en appliquant l'hypothèse de récurrence à chacun des deux morceaux du membre de droite, on a alors $\displaystyle\binom{a+b+1}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b}{n-k} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{a}{k}\binom{b}{n-1-k} = \binom{a}{n}\binom{0}{b} +$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\binom{a}{k}\left(\binom{b}{n-k} + \binom{b}{n-1-k}\right)$. ne reste plus qu'à appliquer la formule de Pascal dans la somme regroupée, pour obtenir exactement le résultat souhaité.
2. En écrivant explicitement $Q(t)$, on a une constante au dénominateur et n facteurs au numérateur qui en font un polynôme de degré n. Pour $P(t)$, on a une somme de polynômes de degrés respectifs 0, 1, …, n, donc P est également de degré n. Or, on vient de voir à la question précédente que P et Q prenaient les mêmes valeurs pour tous les entiers, et en particulier que

$P(k) = Q(k) = \binom{a+k}{n}$ si $0 \leqslant k \leqslant n$. Les deux polynômes sont donc identiques, ce qui prouve la formule de Vandermonde généralisée.

3. En appliquant la formule de Vandermonde à $a = b = -\dfrac{1}{2}$, on obtient $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{-\frac{1}{2}}{k}\binom{-\frac{1}{2}}{n-k} = \binom{-1}{n}$. Or, au vu des résultats de la première partie,
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{-\frac{1}{2}}{k}\binom{-\frac{1}{2}}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2k}{k} \frac{1}{2^{2k}} (-1)^{n-k} \binom{2n-2k}{n-k} \frac{1}{2^{2n-2k}} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}.$$
Comme le membre de droite, toujours d'après la première partie, vaut $(-1)^n$, la formule demandée en découle.

4. Il suffit de constater que la valeur demandée est exactement égale à la somme du membre de gauche de la formule précédente : soit la locomotive est en tête, et il faut placer n wagons vides parmi $2n$ wagons ; soit elle se trouve en troisième position (si elle est en deuxième position, le convoi ne peut pas être équitable, pusiqu'il y a un seul wagon devant elle) et il faut choisir l'emplacement d'un wagon vide parmi deux possible devant, et de $n-1$ wagons vides parmi $2n-2$ derrière ; soit plus généralement elle est après $2k$ wagons, et il faut choisir k wagons vides parmi $2k$, à multiplier par le choix de $n-k$ wagons vides parmi $2n-2k$ derrière la locomotive. Tout ceci donne donc une somme égale à $2^{2n} = 4^n$.

Devoir Surveillé n°5

ECE3 Lycée Carnot

10 février 2011

Durée : 2H. Calculatrices interdites.

Exercice 1 (d'après Ecricome ECT 2004)

Chaque jour, une entreprise livre un colis. Pour cela, elle a le choix entre les services de deux sociétés de transport désignées par les lettres A et B. Les colis livrés par la société A ont une probabilité $\dfrac{1}{10}$ d'arriver en retard, ceux livrés par la société B ont une probabilité $\dfrac{1}{5}$ d'arriver en retard.

1. On suppose dans cette question que les colis sont envoyés via la société B dans 60% des cas et par la société A le reste du temps.
   (a) Quelle est la probabilité qu'un colis donné arrive en retard ?
   (b) Un jour, un colis arrive en retard. Quelle est la probabilité que le colis ait été livré par la société A ?
2. On suppose désormais que pendant trois jours de suite, les colis ont été livrés par la société B.
   (a) Déterminer la probabilité qu'aucun des trois colis envoyés ne soit arrivé en retard.
   (b) Déterminer les probabilités respectives qu'un, deux puis trois colis soient arrivés en retard.
   (c) Chaque colis arrivé à l'heure est facturé 8 euros à notre entreprise, et chaque colis en retard 3 euros. Quelle est la probabilité que la facture totale pour ces trois jours ne dépasse pas 15 euros ?
3. On suppose désormais que le choix de la société pour la livraison obéit aux règles suivantes : un certain jour, numéroté jour 0, c'est la société A qui est choisie. À partir de ce jour, l'entreprise conserve la même société de livraison pour le lendemain à chaque fois que le colis arrive à l'heure, mais en change systématiquement si le colis arrive en retard. On note u_n la probabilité que le colis livré au jour n soit livré par la société A.
   (a) Déterminer la valeur de u_1.
   (b) Déterminer la probabilité qu'on fasse appel à la société B avant le jour numéro 5 (jour 5 inclus).
   (c) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{7}{10}u_n + \dfrac{2}{10}$
   (d) En déduire la valeur de u_n, puis celle de la probabilité que le colis livré au jour n soit livré en retard, ainsi que sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2

Une urne contient une boule jaune, une verte et une rouge. On effectue n tirages successifs avec remise dans l'urne, et on s'intéresse au nombre de boules différentes obtenues à l'issue de ces n tirages. On note ainsi A_n l'évènement « Après n tirages, une seule boule a été tirée », B_n l'évènement « Après n tirages, deux boules distinctes ont été tirées » et C_n l'évènement « À l'issue des n tirages, les trois boules ont été tirées ». On notera également a_n, b_n et c_n les probabilités correspondantes.

1. (a) Déterminer a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 et c_2.
   (b) Calculer les probabilités conditionnelles $P_{A_n}(A_{n+1})$, $P_{A_n}(B_{n+1})$, $P_{A_n}(C_{n+1})$, $P_{B_n}(A_{n+1})$, $P_{B_n}(B_{n+1})$, $P_{B_n}(C_{n+1})$, $P_{C_n}(A_{n+1})$, $P_{C_n}(B_{n+1})$ et $P_{C_n}(C_{n+1})$.
   (c) En déduire l'existence d'une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.
   (d) Prouver que, $\forall n \geqslant 1$, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$.
2. On considère dans cette partie la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer A^2.
   (b) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe trois réels u_n, v_n et t_n tels que $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u_n & 2^n & 0 \\ v_n & t_n & 3^n \end{pmatrix}$, et déterminer par la même occasion des relations de récurrence vérifiées par les suite (u_n), (v_n) et (t_n).
   (c) En calculant $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} u_{i+1} - u_i$, prouver que $u_n = 2^{n+1} - 2$.
   (d) En vous servant de même de $\displaystyle\sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{t_{i+1}}{2^{i+1}} - \frac{t_i}{2^i}$, déterminer la valeur de t_n.
   On admet qu'on pourrait obtenir similairement $v_n = 3^n - 2^{n+1} + 1$.
3. (a) Exprimer M en fonction de A et en déduire la valeur de M^{n-1}, puis celles de a_n, b_n et c_n.
   (b) Déterminer les limites de ces trois suites. Les résultats obtenus sont-ils logiques ?
   (c) À partir de quelle valeur de n a-t-on plus de 99% de chances d'avoir tiré au moins deux boules différentes ?

Corrigé du DS5

Exercice 1 (d'après Ecricome ECT 2004)

1. (a) C'est une application de la formule des probabilités totales (ou si vous préférez, on fait un petit arbre) : la probabilité demandée vaut $\dfrac{60}{100} \times \dfrac{1}{5} + \dfrac{40}{100} \times \dfrac{1}{10} = \dfrac{12}{100} + \dfrac{4}{100} = \dfrac{16}{100}$.

   (b) Notons R l'évènement « Le colis arrive en retard ». On vient de voir que $P(R) = \dfrac{16}{100}$. De plus, $P_A(R) = \dfrac{1}{10}$, et $P(A) = \dfrac{4}{10}$. Par la formule de Bayes, $P_R(A) = \dfrac{\frac{4}{10} \times \frac{1}{10}}{\frac{16}{100}} = \dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4}$.

2. (a) Puisqu'un colis a quatre chances sur cinq d'arriver à l'heure, pour trois jours de suite, la probabilité de n'avoir aucun retard vaut $\left(\dfrac{4}{5}\right)^3 = \dfrac{64}{125}$ (un peu plus d'une chance sur deux).

   (b) Pour trois colis en retard, facile, ça vaut $\dfrac{1}{125}$. Pour un colis en retard, il ne faut pas oublier le choix du jour du retard, ce qui donne $3 \times \dfrac{1}{5} \times \left(\dfrac{4}{5}\right)^2 = \dfrac{48}{125}$. De même, pour deux jours de retard, la probabilité vaut $\dbinom{3}{2} \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^2 \times \dfrac{4}{5} = \dfrac{12}{125}$. On peut vérifier que la somme des quatre dernières probabilités calculées vaut 1, ce qui est rassurant.

   (c) Pour avoir moins de 15 euros de facture, il faut qu'il y ait eu au moins deux retards, soit une probabilité de $\dfrac{12}{125} + \dfrac{1}{125} = \dfrac{13}{125}$ (à peine plus d'une chance sur 10).

3. (a) Puisque c'est la société A qui livre au jour 0, le colis a une chance sur 10 d'être en retard (auquel cas on passera à B), et on a donc $u_1 = \dfrac{9}{10}$.

   (b) Déterminons plutôt la probabilité de l'événement contraire : on ne fera appel à la société B pour les jours 1 à 5 si les cinq premiers colis livrés par A (ceux des jours 0 à 4) arrivent à l'heure, soit une probabilité de $\left(\dfrac{9}{10}\right)^5 = \dfrac{59\ 049}{100\ 000}$ (valeur non attendue, évidemment). La probabilité qu'on utilise B avant le jour 5 vaut donc $1 - \left(\dfrac{9}{10}\right)^5$.

   (c) C'est une application de la formule des probabilités totales. Si on note A_n et B_n les évènements correspondant aux livraisons par A et B au jour n, on a $P_{A_n}(A_{n+1}) = \dfrac{9}{10}$ (il faut que le colis soit à l'heure) et $P_{B_n}(A_{n+1}) = \dfrac{1}{5}$ (il faut que le colis soit en retard pour changer de livreur) donc $P(A_{n+1}) = \dfrac{9}{10}P(A_n) + \dfrac{1}{5}(1 - P(A_n))$, soit $u_{n+1} = \dfrac{9}{10}u_n + \dfrac{1}{5}(1 - u_n) = \dfrac{7}{10}u_n + \dfrac{2}{10}$.

   (d) On reconnait bien sûr une suite arithmético-géométrique, dont l'équation de point fixe $x = \dfrac{7}{10}x + \dfrac{2}{10}$ donne $x = \dfrac{2}{3}$. On pose donc $v_n = u_n - \dfrac{2}{3}$, et $v_{n+1} = u_{n+1} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{7}{10}u_n + \dfrac{2}{10} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{7}{10}u_n - \dfrac{14}{30} = \dfrac{7}{10}\left(u_n - \dfrac{2}{3}\right)$. Comme $v_0 = u_0 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$, on a $v_n = \dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{7}{10}\right)^n$, puis $u_n = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{7}{10}\right)^n$. La limite de la suite vaut $\dfrac{2}{3}$ (ce qui est cohérent car les colis livrés par A sont deux fois moins souvent en retard que ceux de B).

Exercice 2

1. (a) Après un tirage on a forcément tiré une seule boule donc $a_1 = 1$ et $b_1 = c_1 = 0$. Après deux tirages on a toujours $c_2 = 0$, mais $a_2 = \dfrac{1}{3}$ (une chance sur trois de retomber sur la même boule) et $b_2 = \dfrac{2}{3}$.

   (b) Commençons par la fin, c'est plus simple : si on a déjà tiré les trois boules après n tirages, ce sera toujours le cas après $n+1$, donc $P_{C_n}(C_{n+1}) = 1$ et $P_{C_n}(A_{n+1}) = P_{C_n}(B_{n+1}) = 0$. Si on a tiré seulement deux boules après n tirages, il y a une chance sur trois de tirer la boule non encore tirée, donc $P_{B_n}(C_{n+1}) = \dfrac{1}{3}$; $P_{B_n}(B_{n+1}) = \dfrac{2}{3}$ et $P_{B_n}(A_{n+1}) = 0$. De même, on obtient $P_{A_n}(A_{n+1}) = \dfrac{1}{3}$; $P_{A_n}(B_{n+1}) = \dfrac{2}{3}$ et $P_{A_n}(C_{n+1}) = 0$.

   (c) Via la formule des probabilités totales (les évènements A_n, B_n et C_n formant évidemment un système complet), on obtient facilement, en utilisant les résultats de la question précédente, $a_{n+1} = \dfrac{1}{3}a_n$; puis $b_{n+1} = \dfrac{2}{3}a_n + \dfrac{2}{3}b_n$ et enfin $c_{n+1} = \dfrac{1}{3}b_n + c_n$. Il suffit donc de poser $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$ pour obtenir la relation souhaitée.

   (d) C'est la récurrence débile qu'on vous demande de faire à chaque fois. C'est vrai au rang 0, et si on le suppose au rang n, alors $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M.M^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$, ce qui achève la récurrence.

2. (a) On obtient $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}$

   (b) Cela se prouve évidemment par récurrence. C'est certainement vrai au rang 1 en posant $u_1 = 2$, $v_1 = 0$ et $t_1 = 1$ (il suffit de regarder A). Si on le suppose vrai au rang n, en multipliant cette matrice par A, on a $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u_n + 2^{n+1} & 2^{n+1} & 0 \\ v_n + 2t_n & 2t_n + 3^n & 3^{n+1} \end{pmatrix}$. Tout cela fonctionne parfaitement, avec les relations $u_{n+1} = u_n + 2^{n+1}$; $v_{n+1} = v_n + 2t_n$ et $t_{n+1} = 2t_n + 3^n$.

   (c) D'après la question précédente, $u_{n+1} - u_n = 2^{n+1}$, donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{i=n-1} u_{i+1} - u_i = \sum_{i=1}^{i=n-1} 2^{i+1} = \sum_{i=2}^{i=n} 2^i = \frac{1 - 2^{n+1}}{1-2} - 1 - 2 = 2^{n+1} - 4$. Par ailleurs, la somme qu'on vient de calculer est télescopique, et égale à $u_n - u_1$. Conclusion : $u_n = u_1 + 2^{n+1} - 4 = 2^{n+1} - 2$.

   (d) Le principe est le même, la somme télescopique vaut $\dfrac{t_n}{2^n} - \dfrac{t_1}{2}$, mais est aussi égale à $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \frac{2t_i + 3^i}{2^{i+1}} - \frac{t_i}{2^i} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{3}{2}\right)^i = \frac{1}{2}\left(\frac{1 - (\frac{3}{2})^n}{1 - \frac{3}{2}} - 1\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^n - \frac{3}{2}$, d'où finalement en multipliant tout par 2^n, $t_n = 2^{n-1}t_1 + 3^n - 3 \times 2^{n-1} = 3^n - 2 \times 2^{n-1} = 3^n - 2^n$.

3. (a) Comme $M = \dfrac{1}{3}A$, on aura évidemment $M^{n-1} = \dfrac{1}{3^{n-1}}A^{n-1}$. Il ne reste plus qu'à multiplier

tout ça par la matrice colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire à garder la première colonne de la matrice M^{n-1}, ce qui donne $a_n = \dfrac{1}{3^{n-1}}$; $b_n = \dfrac{2^n - 2}{3^{n-1}}$ et $c_n = 1 - \dfrac{2^n - 1}{3^{n-1}}$.

(b) Les deux premières suites ont pour limite 0 (somme de suites géométriques de raison inférieure à 1), la dernière tend vers 1. Cela parait tout à fait normal : quand on fait plein de tirages, la probabilité de tirer les trois boules se rapproche de 1.

(c) Il faut donc avoir $\dfrac{1}{3^{n-1}} \leqslant \dfrac{1}{100}$, soit $3^{n-1} \geqslant 100$, ce qui se produit dès que $n = 6$.

Devoir Surveillé n°6

ECE3 Lycée Carnot

15 mars 2011

Durée : 4H. Calculatrices interdites.

Exercice 1

Dans tout cet exercice, on considre la fonction f définie par $f(x) = \ln(e^x - e^{-x})$.

1. Étude de la fonction f.
   (a) Déterminer le domaine de définition de f.
   (b) Déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$, et étuder la branche infinie de f en $+\infty$.
   (c) Déterminer la position de la courbe représentative de f par rapport à la droite d'équation $y = x$.
   (d) Étudier les variations de f, puis tracer sa courbe en tenant compte de tous les calculs effectués dans cette première partie.
2. On s'intéresse désormais, pour un entier $n \in \mathbb{N}$, à l'équation $f(x) = n$.
   (a) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, cette équation admet une unique solution, que l'on notera u_n.
   (b) Déterminer la monotonie de la suite (u_n).
   (c) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
3. Comportement asymptotique de (u_n).
   (a) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - n = 0$ (on pourra réutiliser les calculs effectués au moment de l'étude des branches infinies), et déterminer un équivalent simple de $u_n - n$.
   (b) En revenant à sa définition, déterminer une valeur explicite de u_n.

Exercice 2 (d'après ESC 2005)

Une urne contient initialement deux boules rouges et une boule bleue indiscernables au toucher. On effectue dans cette urne une suite (infinie) de tirages, avec les conditions suivantes :

- Si la boule tirée est bleue, on la remet dans l'urne.
- Si la boule tirée est rouge, on ne la remet pas dans l'urne mais on remet une boule bleue dans l'urne à sa place.

Pour tout entier naturel n non nul, on note Y_n la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges présentes dans l'urne après n tirages. On notera pour chaque entier naturel k non nul les évènements suivants : R_k : « Lors du k-ème tirage, on tire une boule rouge dans l'urne », et B_k : »Lors du k-ème tirage, on tire une boule bleue dans l'urne ».

1. Donner la loi de probabilité de Y_1, ainsi que son espérance et sa variance.
2. Quelles sont les valeurs possibles prises par Y_n dans le cas où n est supérieur ou égal à 2 ?
3. Calculer pour tout entier naturel non nul n, $P(Y_n = 2)$.
4. On pose, pour tout entier naturel non nul n, $u_n = P(Y_n = 1)$.
   (a) Montrer que $u_2 = \dfrac{2}{3}$.
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{2}{3^{n+1}}$. Cette relation reste-t-elle valable lorsque $n = 1$?
   (c) Écrire un programme PASCAL calculant la valeur de u_n, pour un entier n choisi par l'utilisateur.
   (d) On pose pour tout entier naturel n non nul $v_n = u_n + \dfrac{2}{3^n}$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ est géométrique.
   (e) En déduire la valeur de v_n, puis celle de u_n.
5. Déduire des résultats précédents $P(Y_n = 0)$ pour tout entier naturel non nul n.
6. Calculer l'espérance de Y_n.
7. On note désormais A_n l'évènement : « La dernière boule rouge est tirée au n-ème tirage ».
   (a) Exprimer l'évènement A_n en fonction d'évènements faisant intervenir les variables Y_n et Y_{n-1}.
   (b) En déduire la valeur de $P(A_n)$.
   (c) Calculer $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} P(A_n)$. Comment interpréter le résultat obtenu ?

Exercice 3 (d'après ESSEC Techno 2005)

Une urne contient $2n$ boules, parmi lesquelles n sont numérotées de 1 à n, et les n restantes portent le numéro 0. On tire simultanément dans cette urne n boules.

1. Quelques calculs de probabilités.
   (a) Quelle est la probabilité de ne tirer que des boules portant le numéro 0 ?
   (b) Soit $i \in \{1; \dots; n\}$. Déterminer la probabilité que la boule numéro i fasse partie des n boules tirées (simplifier le résultat).
   (c) Déterminer la probabilité qu'aucun numéro supérieur ou égal à 4 ne soit tiré. Calculer explicitement cette probabilité lorsque $n = 6$.
2. Pour tout entier $i \in \{1; \dots; n\}$, on note désormais X_i la variable valant 1 si la boule numéro i a été tirée, 0 sinon.
   (a) Quelle est la loi de la variable X_i ? Préciser l'espérance et la variance de X_i.
   (b) Soient i et j deux entiers distincts compris entre 1 et n. Déterminer la loi et l'espérance de la variable X_iX_j. Les évènements $X_i = 1$ et $X_j = 1$ sont-ils indépendants ?
3. On définit désormais une nouvelle variable aléatoire $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} iX_i$.
   (a) Que représente la variable S ?
   (b) Calculer l'espérance de S.
   (c) Quelle est la plus petite valeur de n pour laquelle la somme des numéros obtenus devient en moyenne supérieure ou égale à 30 ?

4. On définit deux nouvelles variables aléatoires : Z est égale au nombre de boules tirées portant le numéro 0, et X le nombre de boules tirées ne portant pas le numéro 0.

   (a) Déterminer la loi de Z, en déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

   (b) Déterminer l'espérance et la variance de Z dans le cas particulier où $n = 2$.

   (c) Quel lien y a-t-il entre X et Z ? En déduire les valeurs des espérances de X et de Z.

   (d) Retrouver l'espérance de X en exprimant X à l'aide des variables X_i.

   (e) Déduire de la valeur de $E(Z)$ une expression simple pour $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} k\binom{n}{k}^2$.

Corrigé du DS6

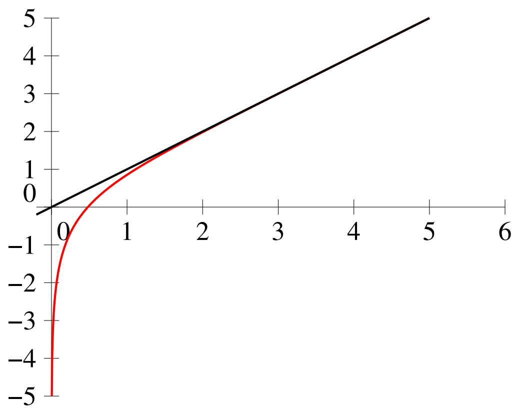
Exercice 1

1. (a) Pour que f soit définie, il faut avoir $e^x - e^{-x} > 0$, soit $e^x > e^{-x}$, ou encore $x > -x$ puisque la fonction exponentielle est croissante. Cela donne $2x > 0$, donc $\mathcal{D}_k =]0; +\infty[$.

   (b) Comme $\lim\limits_{x\to 0} e^x - e^{-x} = 0$, on a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$. En $+\infty$, $e^x - e^{-x}$ tend vers $+\infty$, donc f aussi. De plus, $f(x) = \ln(e^x(1 - e^{-2x})) = x + \ln(1 - e^{-2x})$. On en déduit que $\dfrac{f(x)}{x} = 1 + \dfrac{\ln(1 - e^{-2x})}{x}$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1 - e^{-2x}) = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$. On calcule donc $f(x) - x = \ln(1 - e^{-2x})$, dont on a déjà vu que ça tendait vers 0 en $+\infty$. Conclusion : f admet en $+\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = x$.

   (c) Encore une fois, on reprend $f(x) - x = \ln(1 - e^{-2x})$. Comme $1 - e^{-2x} < 1$, cette expression est négative, donc la courbe de f est toujours en-dessous de son asymptote.

   (d) Dérivons donc f : $f'(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$. Cette dérivée est strictement positive sur $]0; +\infty[$, la fonction f est donc strictement croissante. Voici la courbe de f :



2. (a) On a vu que la fonction f était strictement croissante et continue, elle est donc bijective de $]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$ (au vu du calcul des limites). L'équation $f(x) = n$ a donc une unique solution quelle que soit la valeur de n.

   (b) Puisque $f(u_n) < f(u_{n+1})$, la fonction f étant croissante, $u_n < u_{n+1}$, et la suite est strictement croissante.

   (c) D'après le théorème de la bijection, la réciproque f^{-1} de f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$. Or, on a $u_n = f^{-1}(n)$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

3. (a) Par définition de u_n, on a $u_n - n = u_n - f(u_n)$. Or on a vu que $\lim\limits_{x\to+\infty} x - f(x) = 0$. La suite (u_n) ayant pour limite $+\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - n = 0$. De plus, $u_n - n = -\ln(1 - e^{-2u_n})$. Comme e^{-2u_n} tend vers 0, on peut appliquer l'équivalent classique de $\ln(1 + x)$ en 0 pour obtenir $u_n - n \sim e^{-2u_n}$. Or, $u_n = n + o(1)$, donc $e^{-2u_n} = e^{-2n+o(1)} = e^{-2n}e^{o(1)} \sim e^{-2n}$ puisque l'exponentielle de quelque chose qui tend vers 0 tend vers 1.

   (b) On sait en fait résoudre l'équation $\ln(e^x - e^{-x}) = n$: elle équivaut à $e^x - e^{-x} = e^n$ soit, après multiplication par e^x, $e^{2x} - e^n e^x - 1 = 0$. En posant $X = e^x$, on se ramène à l'équation du second degré $X^2 - e^n X - 1 = 0$. Celle-ci a pour discriminant $\Delta = e^{2n} + 4$ (toujours positif) et admet donc deux racines $X_1 = \dfrac{e^n + \sqrt{e^{2n} + 4}}{2}$, et X_2 qu'on oubliera car elle est négative. On revient à $x = \ln X = \ln \left(\dfrac{e^n + \sqrt{e^{2n}+4}}{2} \right)$, qui est donc la valeur exacte de u_n.

Exercice 2 (d'après ESC 2005)

1. Après un seul tirage, deux situations possible : on a tiré une boule rouge avec probabilité et on a alors $Y_1 = 1$; ou on a tiré une boule bleue avec probabilité $\dfrac{1}{3}$ et on garde $Y_1 = 2$. On a donc $P(Y_1 = 2) = \dfrac{1}{3}$ et $P(Y_1 = 1) = \dfrac{2}{3}$, d'où $E(Y_1) = \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{3}$; puis $E(X^2) = \dfrac{4}{3} + \dfrac{2}{3} = 2$, donc d'après la formule de König-Huygens $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2 - \dfrac{16}{9} = \dfrac{2}{9}$.
2. On a en général $Y_n(\Omega) = \{0; 1; 2\}$ (puisqu'il y a remise tant qu'on tire des boules bleues, on peut garder 2 boules rouges autant de temps qu'on le veut).
3. Pour avoir $Y_n = 2$, il faut tirer la boule bleue n fois de suite (il y aura toujours une seule boule bleue dans l'urne dans ce cas), ce qui se produit avec une probabilité de $\dfrac{1}{3^n}$.
4. (a) Pour avoir $Y_2 = 1$, il faut soit tirer la boule bleue puis une rouge, ce qui se produit avec une probabilité $\dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{9}$; soit une rouge puis une des deux bleues qui sont alors dans l'urne, ce qui se produit avec une probabilité $\dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3}$. Au total on a bien $P(Y_2 = 1) = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$.

   (b) Commençons par noter que $P_{Y_n=0}(Y_{n+1} = 1) = 0$, $P_{Y_n=1}(Y_{n+1} = 1) = \dfrac{2}{3}$ (puisqu'il y a alors deux boules bleues dans l'urne) et $P_{Y_n=2}(Y_{n+1} = 1) = \dfrac{2}{3}$ (puisqu'il y a cette fois-ci deux boules rouges dans l'urne). Les évènements $Y_n = 0$, $Y_n = 1$ et $Y_n = 2$ forment un système complet d'évènements. On peut donc appliquer la formule des probabilités totales pour obtenir $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3^n}$, ce qui donne bien la formule souhaitée. Pour $n = 1$, on a $\dfrac{2}{3}u_1 + \dfrac{2}{3^2} = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{9} = \dfrac{6}{9} = u_2$. La relation est donc également vraie pour $n = 1$.

   (c)
   ```
   PROGRAM suite;
   USES wincrt;
   VAR n,i : integer; u,a : real;
   BEGIN
   WriteLn('Choissez l'entier n');
   ReadLn(n);
   u := 2/3; a := 2/9;
   FOR i := 2 TO n DO
   BEGIN
   u := 2*u/3+a;
   a := a/3;
   END;
   WriteLn('u_n=',u);
   END.
   ```

   (d) Calculons donc $v_{n+1} = u_{n+1} + \dfrac{2}{3^{n+1}} = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{4}{3^{n+1}} = \dfrac{2}{3}\left(u_n + \dfrac{2}{3^n}\right) = \dfrac{2}{3}v_n$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$.

   (e) Comme $v_1 = u_1 + \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{3}$, on obtient $v_n = \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} = \dfrac{2^{n+1}}{3^n}$, puis $u_n = \dfrac{2^{n+1}-2}{3^n}$.

(f) On a bien sûr $P(Y_n = 0) = 1 - P(Y_n = 2) - P(Y_n = 1) = 1 - \dfrac{1}{3^n} - \dfrac{2^{n+1}-2}{3^n} = \dfrac{3^n - 2^{n+1} + 1}{3^n}$.

(g) Par définition, $E(Y_n) = \dfrac{2^{n+1}-2}{3^n} + \dfrac{2}{3^n} = \dfrac{2^{n+1}}{3^n}$.

(h) i. On a simplement $A_n = (Y_n = 0) \cap (Y_{n-1} = 1)$.

ii. On en déduit que $P(A_n) = P(Y_{n-1} = 1) \times P_{Y_{n-1}=1}(Y_n = 0) = \dfrac{1}{3}P(Y_{n-1} = 1) = \dfrac{2^n - 2}{3^n}$.

iii. Calculons donc (ce sont des séries géométriques toutes bêtes) : $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} P(A_n) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n - 2\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} - 1 - \frac{2}{3} - 2\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1 - \frac{1}{3}\right) = 3 - \frac{5}{3} - 3 + \frac{8}{3} = 1$. Cela revient à dire que la probabilité qu'on finisse par tirer la dernière boule blanche vaut 1. Autrement dit, il est quasiment certain qu'on finira par tirer les deux boules rouges.

Exercice 3 (d'après ESSEC Techno 2005)

1. (a) Il y a $\dbinom{2n}{n}$ tirages possibles au total (l'ordre n'a aucune importance ici), dont un seul donnant toutes les boules numéro 0, donc la probabilité demandée vaut $\dfrac{1}{\binom{2n}{n}}$.

(b) Si on impose que la boule numéro i soit tirée, il reste à choisir $n-1$ boules parmi les $2n-1$ restantes, donc la probabilité de tirer le numéro i vaut $\dfrac{\binom{2n-1}{n-1}}{\binom{2n}{n}} = \dfrac{(2n-1)!}{(n-1)!n!} \times \dfrac{n!^2}{(2n)!} = \dfrac{n}{2n} = \dfrac{1}{2}$ (plutôt logique puisqu'on tire la moitié des boules de l'urne).

(c) Si $n \leqslant 3$, cette probabilité vaut bien sûr 1. Dans le cas contraire, il y a $n+3$ boules dont le numéro n'atteint pas 4, donc la probabilité vaut $\dfrac{\binom{n+3}{n}}{\binom{2n}{n}} = \dfrac{(n+3)!}{6n!} \times \dfrac{n!^2}{(2n)!} = \dfrac{n!(n+3)!}{6(2n)!}$.

Pour $n = 6$, on obtient $\dfrac{6! \times 9!}{6 \times 12!} = \dfrac{6!}{6 \times 10 \times 11 \times 12} = \dfrac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{10 \times 11 \times 12} = \dfrac{1}{11}$.

2. (a) La variable X_i suit bien sûr une loi binômiale, et au vu de la question 1.*b*, son paramètre vaut $\dfrac{1}{2}$. On a donc $E(X_i) = \dfrac{1}{2}$ et $V(X_i) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$.

(b) La variable X_iX_j est aussi une variable de Bernoulli (quand on multiplie des 0 et des 1, on ne peut pas obtenir autre chose que 0 ou 1), et $P(X_iX_j = 1) = P((X_i = 1) \cap (X_j = 1))$. Cet évènement se produit si on tire simultanément les boules i et j, ce qui laisse $\dbinom{2n-2}{n-2}$ choix pour les boules restantes. On a donc $P(X_iX_j = 1) = \dfrac{\binom{2n-2}{n-2}}{\binom{2n}{n}} = \dfrac{(2n-2)!}{(n-2)!n!} \times \dfrac{n!^2}{(2n)!} = \dfrac{n(n-1)}{(2n(2n-1)} = \dfrac{n-1}{2(2n-1)}$. Comme $P(X_i = 1) \times P(X_j = 1) = \dfrac{1}{4} \neq \dfrac{n-1}{2(2n-1)}$, les deux évènements ne sont pas indépendants.

3. (a) La variable iX_i vaut i si la boule numéro i est tirée, 0 sinon. En faisant la somme de ces variables, on obtient donc la somme des numéros tirés (les boules 0 n'ayant évidemment aucune influence sur cette somme).

(b) Par linéarité, $E(S) = \sum_{i=1}^{i=n} iE(X_i) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{i}{2} = \frac{n(n+1)}{4}$.

(c) On veut avoir $\frac{n(n+1)}{4} \geqslant 30$, soit $n(n+1) \geqslant 120$. Les plus courageaux iront résoudre l'inéquation du second degré, les autres constateront que $n(n+1)$ est croissant sur $\mathbb{N}$, que $10 \times 11 < 120$ mais $11 \times 12 > 120$. Il faut donc avoir $n \geqslant 11$.

4. (a) Comme il y a n boules portant le numéro 0 et n ne le portant pas, le nombre de tirages vérifiant $Z = k$ est de $\binom{n}{k} \times \binom{n}{n-k}$ (k boules choisies dans le premier lot, $n-k$ dans le deuxième), ou encore $\binom{n}{k}^2$ en utilisant la symétrie des coefficients binômiaux. On a donc $P(Z = k) = \frac{\binom{n}{k}^2}{\binom{2n}{n}}$. Comme Z prend ses valeurs entre 0 et n, on aura $\sum_{k=0}^{k=n} P(Z = k) = 1$, ce qui donne bien (en faisant passer le dénominateur constant à droite) $\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ (qui n'est autre qu'un cas particulier de la formule de Vandermonde).

(b) Si $n = 2$, on a $\binom{2n}{n} = \binom{4}{2} = 6$; et $\binom{2}{0} = \binom{2}{2} = 1$ et $\binom{2}{1} = 2$, d'où $P(Z = 0) = P(Z = 2) = \frac{1}{6}$ et $P(Z = 1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. On en déduit $E(Z) = 1$ (la loi est symétrique), puis $E(Z^2) = \frac{4}{6} + \frac{4}{6} = \frac{4}{3}$, donc, via König-Huygens, $V(Z) = \frac{4}{3} - 1^2 = \frac{1}{3}$.

(c) On a manifestement $X + Z = n$, donc $X = n - Z$. Or, Z et X suivent la même loi (même raisonnement pour calculer la loi de X que pour celle de Z), donc ont la même espérance. Par linéarité, on obtient donc $2E(X) = n$, soit $E(X) = E(Z) = \frac{n}{2}$.

(d) Par ailleurs, $X = \sum_{i=1}^{i=n} X_i$, donc $E(X) = \sum_{i=1}^{i=n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$.

(e) En revenant à la définition, $E(Z) = \sum_{i=1}^{i=n} i\frac{\binom{n}{i}^2}{\binom{2n}{n}}$. On peut faire démarrer la somme à $i = 0$ (ça ne change rien) et faire passer la constante du dénominateur de l'autre côté pour obtenir, en utlisant la valeur de $E(Z)$, $\sum_{i=0}^{i=n} i\binom{n}{i}^2 = \frac{n}{2}\binom{2n}{n}$.

Devoir Surveillé n°7

ECE3 Lycée Carnot

5 avril 2011

Durée : 4H. Calculatrices interdites.

Exercice 1

On considère deux fonctions f et g par $f(x) = x + 1 + \dfrac{x - 1 + \ln x}{x^2}$ et $g(x) = x^3 - x + 3 - 2\ln x$.

1. Étudier les variations de la fonction g et en déduire que $g(x) > 0$ sur son domaine de définition.
2. Déterminer les limites et éventuelles branches infinies de f.
3. Déterminer la position relative de la courbe représentative de f et de la droite d'équation $y = x + 1$.
4. Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$ et en déduire les variations de f.
5. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathcal{D}_f$ et que $\alpha \in \left]\dfrac{1}{2}; 1\right[$.

Exercice 2

Soit h la fonction définie par $h(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) - 2x$.

1. Déterminer le domaine de définition de h.
2. Montrer que h est impaire.
3. Démontrer que h est dérivable sur son domaine de définition et que $h'(x) = 2\dfrac{x^2}{1-x^2}$.
4. Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe représentative de h en son point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$.
5. Dresser le tableau de variation de h en précisant ses limites aux bornes de son domaine de définition.
6. Calculer h'' et étudier la convexité de h.
7. Montrer que, $\forall x \in \left[0; \dfrac{1}{2}\right]$, $0 \leqslant h'(x) \leqslant \dfrac{2}{3}$.
8. Tracer une courbe représentative soignée de h, ainsi que de la tangente T (on donne $\ln 3 \simeq 1.1$).
9. On définit une suite (u_n) par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = h(u_n)$.

(a) Montrer que l'intervalle $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ est stable par h, et en déduire que, $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$.

(b) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $|u_{n+1}|\leqslant\frac{2}{3}|u_n|$, puis en déduire que $|u_n|\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

(c) En déduire la limite de la suite (u_n).

10. Écrire un programme PASCAL calculant la valeur de u_n pour un entier n choisi par l'utilisateur, puis un programme calculant la plus petite valeur de n pour laquelle $u_n\leqslant\varepsilon$, la valeur de ε étant choisie par l'utilisateur.

Exercice 3

On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$.

1. **Étude de la fonction f.**

(a) Déterminer deux réels a et b tels que $f(x)=a+\dfrac{b}{x+1}$.

(b) Faire une étude complète de f (variations, branches infinies, convexité).

(c) Déterminer les points fixes de f, ainsi que le signe de $f(x)-x$.

(d) Montrer que, $\forall x\in\left[\frac{1}{2};1\right]$, $|f'(x)|\leqslant\frac{8}{9}$.

(e) Tracer la courbe représentative de f en prenant en compte tous les calculs effectués dans cette partie.

2. **Une suite récurrente.**

(a) Soit (u_n) la suite définie par $u_0=\frac{1}{2}$ et, $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$. Représenter sur le graphique précédent les cinq premiers termes de la suite (u_n).

(b) Calculer ces cinq premiers termes.

(c) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\in\left[\frac{1}{2};1\right]$.

(d) Déterminer la monotonie de la suite (u_n), et en déduire sa convergence vers une limite à préciser.

(e) Montrer que, $\forall n\in\mathbb{N}$, $|u_n-1|\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{8}{9}\right)^n$.

(f) En déduire un entier n_0 à partir duquel $|u_n-1|\leqslant 10^{-3}$ (on donne $\log 2\simeq 0.3$ et $\log\frac{8}{9}\simeq -0.05$).

3. **Un peu de calcul matriciel.**

(a) Montrer que u_n peut s'écrire, pour tout entier n, sous la forme $\dfrac{p_n}{q_n}$, où (p_n) et (q_n) sont deux suites d'entiers.

(b) On note désormais A la matrice $A=\begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix}$. Déduire des calculs de la question précédente que $\begin{pmatrix}p_{n+1}\\q_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}p_n\\q_n\end{pmatrix}$, puis prouver que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\begin{pmatrix}p_n\\q_n\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

(c) Montrer que, pour tout entier n, il existe un réel a_n tel que $A^n=\begin{pmatrix}2^n&0\\a_n&1\end{pmatrix}$.

(d) Calculer la valeur de a_n, et en déduire la matrice A^n.

(e) On introduit désormais une deuxième matrice $P=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

(f) On note $D = P^{-1}AP$. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

(g) Calculer D et retrouver ainsi l'expression de A^n calculée un peu plus haut.

(h) En déduire les valeurs de p_n, q_n puis u_n en fonction de n.

(i) Déterminer le plus petit entier n pour lequel $|u_n - 1| \leqslant 10^{-3}$ et comparer le résultat obtenu à celui de la dernière question de la deuxième partie.

Corrigé du DS7

Exercice 1

1. La fonction g est définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;+\infty[$, et $g'(x) = 3x^2 - 1 - \dfrac{2}{x} = \dfrac{3x^3 - x - 2}{x}$. Le numérateur admet pour racine évidente $x = 1$, on peut le factoriser sous la forme $3x^3 - x - 2 = (x-1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$. Par identification des coefficients, on obtient $a = 3$, $b = 3$ et $c = 2$. On a donc $3x^3 - x - 2 = (x-1)(3x^2 + 3x + 2)$. Le deuxième facteur a pour discriminant $\Delta = 9 - 24 = -15$, il est toujours positif. On en déduit que la fonction g est strictement décroissante sur $]0;1]$ et strictement croissante sur $[1;+\infty[$. Elle admet donc un minimum en $x = 1$ de valeur $g(1) = 3$. La fonction est donc toujours strictement positive.

2. On a assez manifestement $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^*$. De plus, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - 1 + \ln x}{x^2} = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ (pas de formein déterminée ici). En $+\infty$, les plus observateurs remarqueront que $f(x) - (x+1) = \dfrac{x - 1 + \ln x}{x^2} \sim \dfrac{1}{x}$, qui a donc pour limite 0. Ceci suffit à affirmer que la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$.

3. Il faut donc étudier le signe de $\dfrac{x - 1 + \ln x}{x^2}$. Or, $\forall x \geqslant 1$, $x - 1 \geqslant 0$ et $\ln x \geqslant 0$, donc la courbe de f est au-dessus de la droite. Au contraire, si $x \in]0;1]$, $x - 1$ et $\ln x$ sont tous deux négatifs, et la courbe est en-dessous de la droite.

4. Calculons : $f(x) = x + 1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{\ln x}{x^2}$, donc $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{2\ln x}{x^3} = \dfrac{g(x)}{x^3}$. Comme $x \geqslant 0$, $x^3 \geqslant 0$ et on a vu que g était toujours positive donc f est strictement croissante.

5. Au vu des limites calculées, f est bijective de $]0;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, donc s'annule une seule fois. Comme de plus $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{2} + \dfrac{-\frac{1}{2} - \ln 2}{\frac{1}{4}} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{4}{2} - 4\ln 2 = -\dfrac{1}{2} - 4\ln 2 < 0$ et $f(1) = 2 + 0 = 2 > 0$, donc la valeur d'annulation est bien comprise entre $\dfrac{1}{2}$ et 1.

Exercice 2

1. La fonction h est définie si $\dfrac{1+x}{1-x} > 0$, soit $\mathcal{D}_g =]-1;1[$ (tableau de signes si vous n'êtes pas convaincus).

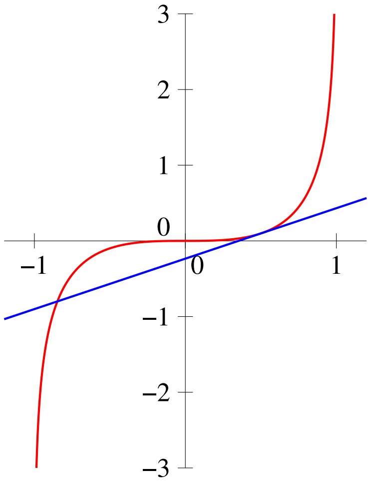
2. Le domaine de définition de h est symétrique par rapport à 0, et $h(-x) = \ln \dfrac{1-x}{1+x} - 2x = -\ln \dfrac{1+x}{1-x} - 2x = -h(x)$, donc la fonction est impaire.

3. La fonction h est $\mathcal{C}^\infty$ comme somme et quotient de fonctions usuelles et $h'(x) = \dfrac{\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}}{\frac{1+x}{1-x}} - 2 = \dfrac{2}{(1+x)(1-x)} - 2 = \dfrac{2 - 2 + 2x^2}{1 - x^2} = \dfrac{2x^2}{1-x^2}$.

4. Calculons $h\left(\dfrac{1}{2}\right) = \ln \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} - 2 \times \dfrac{1}{2} = \ln 3 - 1$, et $h'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2 \times \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \dfrac{2}{3}$, donc l'équation de la tangente T est $y = \dfrac{2}{3}\left(x - \dfrac{1}{2}\right) + \ln 3 - 1 = \dfrac{2}{3}x + \ln 3 - \dfrac{4}{3}$.

5. La fonction h' est strictement positive sur $\mathcal{D}_h$, donc h y est strictement croissante. De plus, $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1+x}{1-x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 1^-} h(x) = +\infty$. Par imparité de h, $\lim\limits_{x\to -1^+} h(x) = -\infty$.

6. Calculons $h''(x) = \dfrac{2x(1-x^2)+2x(x^2)}{(1-x^2)^2} = \dfrac{2x}{(1-x^2)^2}$. La fonction h est donc concave sur $]-1;0]$ et convexe sur $[0;1[$, avec un point d'inflexion en 0. Notons que $h(0)=0$ et $h'(0)=0$, donc la tanegnte à la courbe au point d'inflexion est horizontale.
7. La fonction h' est croissante sur $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$ d'après la question précédente, et $h'(0)=0$ et $h'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2}{3}$, d'où l'encadrement demandé.
8. Voilà la courbe demandée :



9. (a) La fonction h est croissante sur $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$, et $h(0)=0$ et $h\left(\dfrac{1}{2}\right) = \ln 3 - 1 < \dfrac{1}{2}$, donc l'intervalle est effectivement stable par h. On prouve ensuite par récurrence que $u_n \in \left[0;\dfrac{1}{2}\right]$. En effet, u_0 appartient à l'intervalle par hypothèse, et si u_n est dans l'intervalle, $h(u_n) = u_{n+1}$ aussi par stabilité de l'intervalle.
   (b) Toutes les hypothèses sont réunies pour appliquer l'inégalité des accroissements finis sur $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$ à $y = u_n$ et $x = 0$ (qui est bien un point fixe de h). On obtient alors $|u_{n+1}| \leqslant \dfrac{2}{3}|u_n|$. On effectue ensuite une nouvelle récurrence pour prouver que $|u_n| \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$. C'est vrai pour u_0 puisque $u_0 = \dfrac{1}{2}$, et si on suppose l'hypothèse vérifiée pour u_n, on a $|u_{n+1}| \leqslant \dfrac{2}{3}|u_n| \leqslant \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$, ce qui prouve l'hérédité.
   (c) Comme $\dfrac{2}{3} \in [-1;1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0$, ce qui prouve que la suite (u_n) tend vers 0.
10.
```
PROGRAM terme ;
VAR u : real ; n,i : integer ;
BEGIN
WriteLn('Choisissez la valeur de n') ;
ReadLn(n) ;
u := 1/2 ;
FOR i := 1 TO n DO u := ln((1+u)/1-u))-2*u ;
WriteLn(u) ;
END.
```

```
PROGRAM deux ;
VAR u,eps : real ; n : integer ;
BEGIN
u := 1/2 ; n :=0 ;
WHILE u > eps DO
BEGIN
u := ln((1+u)/1-u))-2*u ;
n := n+1 ;
END ;
WriteLn(n) ;
END.
```

Exercice 3

1. (a) Calculons $a + \dfrac{b}{x+1} = \dfrac{ax+a+b}{x+1}$. Par identification, on doit donc avoir $a = 2$ et $a+b = 0$, d'où $\dfrac{2x}{x+1} = 2 - \dfrac{2}{x+1}$.

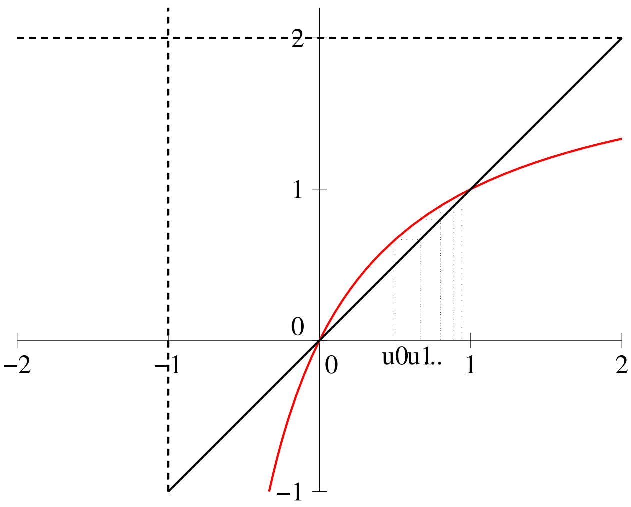
   (b) La fonction f est définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$. Elle admet pour limite $+\infty$ en -1^- (le numérateur est négatif et le dénominateur tend vers 0^-), et $-\infty$ en -1^+. La forme obtenue à la question 1 permet par ailleurs d'obtenir très rapidement $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 2$, la courbe admet donc une asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$.

   La dérivée de f vaut $f'(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2}$, la fonction est donc strictement croissante sur $]-\infty;-1[$ et sur $]-1;+\infty[$. De plus, $f''(x) = -\dfrac{4}{(x+1)^3}$, donc la fonction f est convexe sur $]-\infty;-1[$ et concave sur $]-1;+\infty[$.

   (c) On a $f(x) - x = \dfrac{2x - x^2 - x}{x+1} = \dfrac{x(1-x)}{x+1}$, donc f admet pour points fixes $x = 0$ et $x = 1$. De plus, la courbe est en-dessous de la droite d'équation $y = x$ sur $]-1;0[$ et sur $[1;+\infty[$, et au-dessus sur $]-\infty;-1[$ et sur $[0;1[$ (encore un tableau de signes pour ceux qui doutent).

   (d) Si $x \in \left[\dfrac{1}{2};1\right]$, $\dfrac{9}{4} \leqslant (x+1)^2 \leqslant 4$, donc $\dfrac{1}{2} \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{8}{9}$, ce qui implique bien l'inégalité demandée.

   (e) Voici la courbe, avec les premiers termes de la suite (u_n).



2. (a) Cf courbe précédente.

   (b) Calculons donc : $u_1 = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$; $u_2 = f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{4}{5}$; $u_3 = \frac{\frac{8}{5}}{\frac{9}{5}} = \frac{8}{9}$, et $u_4 = \frac{\frac{16}{9}}{\frac{17}{9}} = \frac{16}{17}$.

   (c) C'est une récurrence assez évidente : $u_0 = \frac{1}{2} \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$, et en supposant que u_n appartient à cet intervalle, $u_{n+1} = f(u_n) \in \left[f\left(\frac{1}{2}\right); f(1)\right] = \left[\frac{2}{3}; 1\right]$ car la fonction f est croissante sur cet intervalle. Comme $\left[\frac{2}{3}; 1\right] \subset \left[\frac{1}{2}; 1\right]$, la propriété est bien héréditaire.

   (d) Comme $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \geqslant 0$ puisque $u_n \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$, intervalle sur lequel $f(x) - x \geqslant 0$, la suite (u_n) est croissante. Étant majorée par 1, elle converge. Sa limite ne peut être que 0 ou 1 puisqu'il s'agit d'un point fixe de la fonction f. Or, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_0 = \frac{1}{2}$, donc la suite ne peut pas converger vers 0. Elle a donc pour limite 1.

   (e) Commençons par appliquer l'IAF entre $x = 1$ et $y = u_n$, qui appartiennent tous deux à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ sur lequel on a majoré $|f'|$ par $\frac{8}{9}$. On peut donc en déduire que $|f(u_n) - f(1)| \leqslant \frac{8}{9}|u_n - 1|$, soit $|u_{n+1} - 1| \leqslant \frac{8}{9}|u_n - 1|$

3. (a) Effectuons donc une petite récurrence : c'est manifestement vrai pour u_0, en posant $p_0 = 1$ et $p_1 = 2$. Supposons donc que $u_n = \frac{p_n}{q_n}$, alors $u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n + 1} = \frac{2\frac{p_n}{q_n}}{\frac{p_n}{q_n} + 1} = \frac{2p_n}{p_n + q_n}$ (en mettant au même dénominateur et en simplifiant. Ca fonctionne donc très bien, en constatant qu'il suffit de poser $p_{n+1} = 2p_n$ et $q_{n+1} = p_n + q_n$.

   (b) C'est absolument évident puisque $A\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2p_n \\ p_n + q_n \end{pmatrix}$. Il ne reste plus qu'à reprendre la fin de la question précédente.

   (c) Encore une récurrence ! C'est vrai pour $n = 1$ en posant $a_1 = 1$ (et même pour $n = 0$ en posant $a_0 = 0$). En supposant la propriété vraie au rang n, on a alors $A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 \\ 2a_n + 1 & 1 \end{pmatrix}$. Cette matrice est bien de la forme attendue, avec $a_{n+1} = 2a_n + 1$.

(d) La suite (a_n) est arithmético-géométrique, d'équation de point fixe $x = 2x+1$, ce qui donne $x = -1$. Posons donc $b_n = a_n+1$, on a alors $b_{n+1} = a_{n+1}+1 = 2a_n+1+1 = 2(a_n+1) = 2b_n$. La suite (b_n) est donc géométrique de raison 2 et de premier terme $b_0 = a_0 + 1 = 1$. On a donc $b_n = 2^n$ et $a_n = b_n - 1 = 2^n - 1$.

(e) La matrice P est certainement inversible puisqu'elle est triangulaire et ne possède pas de 0 sur la diagonale. Pour l'inverser, une seule opération nécessaire, il suffit de remplacer L_2 par $L_2 - L_1$ pour transformer P en I. En effectuant la même opération sur la matrice identité, on obtient donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(f) C'est, pour changer, une récurrence. Pour $n = 1$, comme $D = P^{-1}AP$, en multipliant par P à gauche et P^{-1} à droite, on a $PDP^{-1} = PP^{-1}APP^{-1} = A$, ce qui est la formule attendue. Supposons désormais $A^n = PD^nP^{-1}$, en utilisant le calcul précédent, on a alors $A^{n+1} = A^n \times A = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$.

(g) On calcule $P^{-1}A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ puis $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a donc sans difficulté $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, puis $PD^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 2^n & 1 \end{pmatrix}$, et enfin $A^n = P^{-1}D^nP = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 2^n - 1 & 1 \end{pmatrix}$, ce qui est bien la même formule que plus haut.

(h) Il ne reste plus qu'à calculer $A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n \\ 2^n + 1 \end{pmatrix}$, et à en déduire que $p_n = 2^n$, $q_n = 2^n + 1$, et donc $u_n = \dfrac{2^n}{2^n + 1} = 1 - \dfrac{1}{2^n + 1}$ (on remarque que la convergence de u_n vers 1 est assez évidente au vu de sa formule explicite).

(i) On a $|u_n - 1| \leqslant 10^{-3}$ dès que $\dfrac{1}{2^{n+1}} \leqslant \dfrac{1}{1\ 000}$, soit $2^n \geqslant 500$. Cela se produit pour $n = 9$ (en effet, $2^9 = 512$), une valeur nettement inférieure à celle obtenue dans la deuxième partie. Comme quoi l'IAF est utile mais ne donne pas des résultats très précis.

Concours Blanc n°2 : épreuve d'analyse

ECE3 Lycée Carnot

16 mai 2011

Durée de l'épreuve : 4H.
Les calculatrices sont **interdites**.

Exercice 1

Soient f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

et (u_n) la suite de nombres réels déterminée par :

$$\begin{cases} u_0 = \displaystyle\int_0^1 f(x)dx \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)dx \end{cases}$$

On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de f, relativement à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

I. Etude de f.

1. Montrer que la fonction f est paire sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
3. Déterminer la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$.
4. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.
5. Montrer qu'il existe un réel u tel que f soit convexe sur $[0; u]$ et concave sur $[u; +\infty[$.
6. Tracer l'allure de la fonction sur la feuille annexe jointe à ce document.
7. Montrer que f_0, restriction de f à $[0; +\infty[$, réalise une bijection de l'intervalle $[0, +\infty[$ sur un intervalle J à préciser.
8. Pour tout y de l'intervalle $]0, 1]$, déterminer l'unique réel x appartenant à l'intervalle $[0, +\infty[$ tel que $f_0(x) = y$.
9. Déterminer alors la bijection réciproque f_0^{-1}.

II. Calcul d'aire

On considère la fonction numérique F de la variable réelle x définie par :

$$F(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

Pour tout réel λ strictement positif, on note $a(\lambda)$ l'aire (exprimée en unités d'aire) du domaine $A(\lambda)$ constitué par l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que :

$$A(\lambda) = \{\lambda \leqslant x \leqslant 2\lambda \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$$

ainsi

$$a(\lambda) = \int_{\lambda}^{2\lambda} f(x)dx$$

1. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$$
En déduire l'ensemble de définition de F.
2. Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que F est impaire sur son ensemble de définition.
4. Déterminer la limite de F lorsque x tend vers $+\infty$. En déduire la limite de F quand x tend vers $-\infty$.
5. Exprimer $a(\lambda)$ en fonction de λ et calculer la limite de $a(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

III. Etude de la suite (u_n).

1. Calculer u_0 et u_1.
2. Effectuer une intégration par parties et calculer u_3.
3. Déterminer le sens de variations de la suite (u_n).
4. Montrer que la suite (u_n) est convergente. (On ne cherchera pas sa limite dans cette question)
5. Justifier l'encadrement suivant :
$$\forall x \in [0, 1], \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \frac{x^n}{\sqrt{1 + x^2}} \leqslant x^n$$
En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n + 1}$$
6. Déterminer alors la limite de la suite (u_n).

Exercice 2

Dans cet exercice, on étudie l'exponentielle d'une matrice pour une matrice carrée d'ordre 3, puis d'ordre 2.

I. Exponentielle d'une matrice carrée d'ordre 3.

Soient A et P les matrices définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la matrice P est inversible et déterminer P^{-1}.
2. On pose $T = PAP^{-1}$.
   (a) Calculer la matrice T.
   (b) Calculer T^2, T^3, puis T^n pour tout entier naturel $n \geqslant 3$.
3. En déduire que $\forall n \geqslant 3$, $A^n = 0$, où 0 désigne la matrice carrée nulle d'ordre 3.
4. Pour tout réel t, on définit la matrice $E(t)$ par $E(t) = I + tA + \dfrac{t^2}{2}A^2$, où I désigne la matrice carrée unité d'ordre 3.
   (a) Montrer que $\forall\,(t,t') \in \mathbb{R}^2, \quad E\,(t)\,E\,(t') = E\,(t+t')$.
   (b) Pour tout t réel, calculer $E(t)E(-t)$. En déduire que la matrice $E(t)$ est inversible et déterminer son inverse en fonction de I, A, A^2, et t.
   (c) Pour tout t réel et pour tout entier naturel n, déterminer $[E(t)]^n$ en fonction de I, A, A^2, t et n.

II. Exponentielle d'une matrice carrée d'ordre 2.

Soient B, Q et D les matrices définies par $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
Pour tout entier naturel n non nul, et pour tout réel t, on définit la matrice $E_n(t)$ par :

$$E_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}B^k \quad \text{que l'on note } E_n(t) = \begin{pmatrix} a_n(t) & c_n(t) \\ b_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la matrice Q est inversible et déterminer Q^{-1}.
2. Calculer $Q^{-1}BQ$.
3. Pour tout entier naturel n, montrer que $B^n = \begin{pmatrix} 2-2^n & 1-2^n \\ 2^{n+1}-2 & 2^{n+1}-1 \end{pmatrix}$.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2t^k - (2t)^k}{k!}$.
   Exprimer de même $b_n(t)$, $c_n(t)$ et $d_n(t)$ sous le forme d'une somme.
5. Déterminer les limites de $a_n(t)$, $b_n(t)$, $c_n(t)$ et $d_n(t)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
6. Pour tout t réel, on pose alors $E(t) = \begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to+\infty} a_n\,(t) & \lim\limits_{n\to+\infty} c_n\,(t) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} b_n\,(t) & \lim\limits_{n\to+\infty} d_n\,(t) \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que $E(t) = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{2t} & e^t - e^{2t} \\ 2e^{2t} - 2e^t & 2e^{2t} - e^t \end{pmatrix}$.
   (b) Déterminer deux matrices E_1 et E_2, telles que pour tout t réel on ait : $E(t) = e^tE_1 + e^{2t}E_2$.
   (c) Calculer E_1^2, E_2^2, E_1E_2, E_2E_1.
   (d) En déduire que pour tout t réel, $E(t)$ est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 3

Il y a beaucoup d'erreurs dans ce programme. Corrigez-les.

programme Somme-des-carrés

{Ce programme calcule la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{200}(-1)^k k^2$;

begin

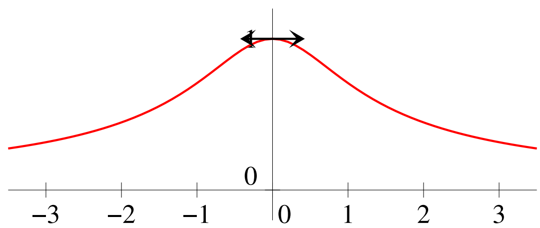
```
        var k, somme : integer;
        for k=1 to 200 do
                if odd(k) then somme := somme +k^2;
                else somme := somme - k^2;
        writeln('la somme vaut :',somme)
end
```

Corrigé de la première épreuve du Concours Blanc n°2

Exercice 1

I. Etude de f.

1. En effet, f est définie sur $\mathbb{R}$ (ce qui se trouve sous la racine est toujours supérieur ou égal à 1), et $f(-x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+(-x)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = f(x)$, donc f est paire.
2. La fonction f est dérivable et même C^∞ sur son ensemble de définition, et comme $f(x) = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$, $f'(x) = -\dfrac{1}{2} \times (2x) \times (1+x^2)^{-\frac{3}{2}} = -\dfrac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$. Cette dérivée est toujours du signe opposé à celui de x, donc la fonction f est strictement croissante sur $]-\infty;0]$, et strictement décroissante sur $[0;+\infty[$. Elle a pour maximum $f(0) = 1$.
3. Sans difficulté aucune, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+x^2} = +\infty$.
4. Au vu des deux questions précédentes, f est bornée par 0 et 1 sur $[0;+\infty[$. La fonction étant paire, ces bornes sont en fait valables sur $\mathbb{R}$ tout entier.
5. Calculons donc la dérivée seconde de f, qui est certainement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$: $f''(x) = \dfrac{-(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + x \times \frac{3}{2} \times 2x(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{(1+x^2)^3} = \dfrac{-1-x^2+3x^2}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}} = \dfrac{2x^2-1}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}$. Le dénominateur de cette dérivée seconde est toujours positif, et son numérateur s'annule en $u = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, la fonction étant bien concave sur $[0,u[$ et convexe sur $[u,+\infty[$.
6. Voici l'allure de la courbe (sauf les magnifiques tracés de la feuille jointe que je me suis pas embêté à reproduire) :



7. La fonction f étant strictement croissante sur $[0;+\infty[$, elle y est bijective, et les calculs précédents montrent que l'intervalle image est $J =]0;1]$.
8. Si $f(x) = y$, alors $\dfrac{1}{y} = \sqrt{1+x^2}$, donc $\dfrac{1}{y^2} = 1+x^2$, et $x^2 = \dfrac{1}{y^2} - 1$. Comme x doit être positif, on en déduit que $x = \sqrt{\dfrac{1}{y^2} - 1} = \dfrac{\sqrt{1-y^2}}{y}$.
9. La fonction f^{-1} est définie sur $]0;1]$ par $f^{-1}(y) = \dfrac{\sqrt{1-y^2}}{y}$.

II. Calcul d'aire

1. En effet, si $x \geqslant 0$, c'est clair. Sinon, on cherche à prouver que $-x < \sqrt{x^2+1}$, ce qui est équivalent puisque les deux membres sont positifs en supposant $x < 0$ à l'inégalité $x^2 < x^2+1$, qui est indiscutablement vraie. La fonction F est donc définie sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction F est C^∞ sur $\mathbb{R}$, de dérivée $F'(x) = \dfrac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}(x+\sqrt{x^2+1})} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} = f(x)$. La fonction F est bien une primitive de f.
3. Calculons $F(-x) = \ln(-x+\sqrt{(-x)^2+1}) = \ln(\sqrt{x^2+1}-x)$. Or, via multiplication par la quantité conjuguée, $\sqrt{x^2+1}-x = \dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$; donc $F(-x) = \ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = -\ln(\sqrt{x^2+1}+x) = -F(x)$, et la fonction F est impaire.
4. Encore un calcul qui ne devrait pas poser de problème : ce qui se trouve dans le ln tend vers $+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$. La fonction F étant impaire, on a donc $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$.
5. Par définition de l'intégrale, $a(\lambda) = F(2\lambda) - F(\lambda) = \ln(2\lambda+\sqrt{4\lambda^2+1}) - \ln(\lambda+\sqrt{\lambda^2+1}) = \ln\dfrac{2\lambda+\sqrt{4\lambda^2+1}}{\lambda+\sqrt{\lambda^2+1}}$. Cherchons la limite de ce quotient, qui est égal lorsque $\lambda > 0$ à $\dfrac{2\lambda+\lambda\sqrt{4+\frac{1}{\lambda^2}}}{\lambda+\lambda\sqrt{1+\frac{1}{\lambda^2}}} = \dfrac{2+\sqrt{4+\frac{1}{\lambda^2}}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{\lambda^2}}}$. Tout ceci converge vers $\dfrac{2+\sqrt{4}}{1+\sqrt{1}} = \dfrac{4}{2} = 2$, donc $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} a(\lambda) = \ln 2$.

III. Etude de la suite (u_n).

1. Calculons donc $u_0 = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = F(1)-F(0) = \ln(1+\sqrt{1+1})-\ln(0+\sqrt{0+1}) = \ln(1+\sqrt{2})$.
   Puis $u_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = [\sqrt{1+x^2}]_0^1 = \sqrt{2}-1$.
2. On a $u_3 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}$. Essayons donc, comme nous le suggère aimablement l'énoncé, une IPP en posant $\begin{cases} u(x) = x^2 & v'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} \\ u'(x) = 2x & v(x) = \sqrt{x^2+1} \end{cases}$, pour obtenir $u_3 = [x^2\sqrt{x^2+1}]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 2x\sqrt{x^2+1} = \sqrt{2} - \left[\frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \sqrt{2} - \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3} = \frac{2-\sqrt{2}}{3}$.
3. Pout tout $x \in [0;1]$, et pour tout entier n, $x^{n+1} \leqslant x^n$, donc $x^{n+1}f(x) \leqslant x^n f(x)$, et en intégrant l'inégalité $u_{n+1} \leqslant u_n$, donc la suite (u_n) est décroissante.
4. Comme de plus (u_n) est l'intégrale d'une fonction positive, donc positive, la suite est décroissante minorée par 0, et converge donc.
5. Il suffit de rappeler que $0 < f(x) \leqslant 1$, donc $x^n f(x) \leqslant x^n$ sur $[0;1]$, et $u_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.
6. Un petit coup de théorème des gendarmes pour achever l'exercice, la suite (u_n) converge vers 0.

Exercice 2

I. Exponentielle d'une matrice carrée d'ordre 3.

1. Appliquons donc l'algorithme du pivot à la matrice P :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ L_3 \leftrightarrow L_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow 3L_3 + L_1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 0 & -3 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow 3L_1 + L_2$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 6 & -12 & -18 \\ 0 & -3 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1/6 \\ L_2 \leftarrow -L_2/3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

La matrice P est inversible, d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

2. (a) On a $PA = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis $T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   (b) On obtient $T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis $T^3 = 0$, donc $\forall n \geqslant 3$, $T^n = 0$.

3. En effet, on prouve par récurrence que $A^n = PT^nP^{-1}$: c'est vrai pour $n = 1$ car $A = P(P^{-1}AP)P^{-1} = PTP^{-1}$, et le supposant vrai au rang n, alors $A^{n+1} = A^nA$ $= (PT^nP^{-1})(PTP^{-1}) = PT^{n+1}P^{-1}$. Pour $n \geqslant 3$, on a bien $A^n = P \times 0 \times P^{-1} = 0$.

4. (a) Calculons donc $E(t)E(t') = \left(I + tA + \dfrac{t^2}{2}A^2\right)\left(I + t'A + \dfrac{t'^2}{2}A^2\right) = I + t'A + \dfrac{t'^2}{2}A^2 + tA + tt'A^2 + \dfrac{t^2}{2}A^2 = I + (t+t')A + \dfrac{t'^2 + 2tt' + t^2}{2}A^2 = E(t+t')$ (tous les termes faisant intervenir des puissances de A supérieurs ou égales à 3 ont été supprimés au vu de la question précédente).

   (b) Comme $E(t)E(-t) = E(t-t) = E(0) = I$, on en déduit que $E(t)$ est inversible, d'inverse $E(-t) = I - tA + \dfrac{t^2}{2}A^2$.

   (c) En utilisant toujours le résultat de la question 4.a), on prouve que $E(t)^n = E(nt)$ (par exemple par récurrence : c'est vrai pour $n = 1$, et en le supposant vrai au rang

n, $(E(t))^{n+1} = (E(t))^n E(t) = E(nt)E(t) = E(nt+t) = E((n+1)t))$, donc $E(t)^n = I + ntA + \dfrac{n^2t^2}{2}A^2$.

II. Exponentielle d'une matrice carrée d'ordre 2.

1. Le pivot ne nécessite que deux étapes $L_2 \leftarrow -L_1 - L_2$ puis $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$, ce qui donne $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.
2. On obtient facilement et rapidement $Q^{-1}BQ = D$.
3. Puisque l'énoncé donne le résultat, on peut éviter le calcul de QD^nQ^{-1} (qui n'est cependant pas bien compliqué) et procéder par récurrence : pour $n = 0$, la matrice proposée est bien égale à l'identité. Supposons la formule vraie au rang n, alors $B^{n+1} = B^n \times B = \begin{pmatrix} 2-2^n & 1-2^n \\ 2^{n+1}-2 & 2^{n+1}-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2^{n+1} & 2^n-2+3-3\times 2^n \\ 2^{n+2}-2 & 2-2^{n+1}+3\times 2^{n+1}-3 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 2-2^{n+1} & 1-2^{n+1} \\ 2^{n+2}-2 & 2^{n+2}-1 \end{pmatrix}$, ce qui est bien la formule attendue.
4. Par définition, $a_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \frac{t^k}{k!}(B^k)_{11} = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{t^k}{k!}(2-2^k)$, d'où la formule annoncée. De même, en reprenant le résultat de la question précédente, $b_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \frac{2(2t)^k - 2t^k}{k!}$, $c_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \frac{t^k-(2t)^k}{k!}$ et $d_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \frac{2(2t)^k - t^k}{k!}$.
5. On reconnait dans les sommes précédentes des sommes partielles de séries exponentielles, qui convergent donc, et on calcule sans difficulté (en séparant en deux la somme à chaque fois) les limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n(t) = 2e^t - e^{2t}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n(t) = 2e^{2t} - 2e^t$; $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n(t) = e^t - e^{2t}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n(t) = 2e^{2t} - e^t$.
6. (a) De qui se moque-t-on dans cet énoncé ? On vient de le faire à la question précédente !
   (b) Il suffit manifestement de poser $E_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $E_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.
   (c) Un peu de calcul donne $E_1^2 = E_1$; $E_2^2 = E_2$ et $E_1E_2 = E_2E_1 = 0$.
   (d) Calculons donc $E(t)E(t') = (e^tE_1 + e^{2t}E_2)(e^{t'}E_1 + e^{2t'}E_2) = e^te^{t'}E_1^2 + e^{2t}e^{2t'}E_2^2 = e^{t+t'}E_1 + e^{2(t+t')}E_2 = E(t+t')$.
   (e) Au vu des calculs effectués dans la première partie du problème, on peut deviner que l'inverse de $E(t)$ sera $E(-t)$. Vérifions-le : $E(t)E(-t) = (e^tE_1 + e^{2t}E_2)(e^{-t}E_1 + e^{-2t}E_2) = e^te^{-t}E_1^2 + e^{2t}e^{-2t}E_2 = E_1 + E_2 = I$ (les simplification utilisent les résultats de la question précédente). On a donc bien $(E(t))^{-1} = E(-t)$.

Exercice 3

On peut repérer notamment les erreurs suivantes :

- Le nom du programme contient un accent.
- Il manque le ; à la fin de la première ligne, ainsi qu'à la fin de l'avant-dernière, et le point final derrière le end.
- Le commentaire n'est pas refermé par un }.
- Les variables sont déclarées après le begin.
- Dans la boucle for, on devrait avoir un k :=1 et non k=1.
- Les instructions après le then et le else sont inversées (ou alors on calcule la mauvaise somme).

- De façon moins visible, Pascal risque de bugguer dans son calcul, les entiers manipulés étant trop gros.

Concours Blanc n°2 - Probabilités et Algèbre

ECE3 Lycée Carnot

19 mai 2011

Durée de l'épreuve : 4H.
Les calculatrices sont **interdites**.

Le sujet est constitué de deux problèmes indépendants. Le candidat peut traiter les questions dans l'ordre qu'il souhaite, à condition d'indiquer clairement les résultats des questions non traitées qu'il admet pour la suite de l'exercice.

Problème 1

Première partie : calcul matriciel.

On considère dans cette partie les matrices M et P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définies par $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On notera par ailleurs I la matrice identité d'ordre 3.

1. Calculer M^2 et M^3, puis vérifier que $M^3 - 4M^2 - 4M + 16I = 0$.
2. Déduire de la relation précédente que la matrice M est inversible, et donner son inverse.
3. En constatant que 2 en est une solution, résoudre l'équation $x^3 - 4x^2 - 4x + 16 = 0$.
4. En factorisant la relation obtenue à la question 1, prouver alors que la matrice $M - 2I$ n'est pas inversible.
5. On pose pour cette question $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Résoudre le système $MX = 2X$, et retrouver ainsi le résultat de la question précédente.
6. Montrer que la matrice P est inversible, et calculer son inverse P^{-1}.
7. Vérifier que $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale, que l'on notera désormais D.
8. Prouver que, $\forall n \geqslant 1$, $M^n = PD^nP^{-1}$, et en déduire l'expression de la matrice M^n.

Deuxième partie : un problème de probabilités.

Un préparationnaire interrompt chaque soir ses révisions de mathématiques pour dîner, et dispose pour cela de trois options : se faire des pâtes, aller prendre un hamburger au fast-food en bas de chez lui, ou réchauffer au micro-ondes un plat préparé. On observe pendant un certain temps les dîners du préparationnaire, et on constate les phénomènes suivants :

- au jour numéroté 0 où l'on débute l'observation, le préparationnaire a mangé un hamburger.
- s'il mange des pâtes au jour n, le préparationnaire mangera à nouveau des pâtes le lendemain avec probabilité $\frac{1}{2}$, descendra manger un hamburger sinon (mais ne mangera jamais de plat préparé).
- s'il mange un hamburger au jour n, il aura 3 chances sur 4 de manger des pâtes le lendemain, et une chance sur 4 de se faire un plat préparé.
- s'il mange un plat préparé au jour n, il mangera un hamburger ou à nouveau un plat préparé le lendemain, avec probabilité $\frac{1}{2}$ pour chaque.

On note dans tout le problème et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ les évènements suivants :

- A_n : « Le préparationnaire mange des pâtes au jour n ».
- B_n : « Le préparationnaire mange un hamburger au jour n ».
- C_n : « Le préparationnaire mange un plat préparé au jour n ».

On note par ailleurs $a_n = P(A_n)$; $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$, et $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

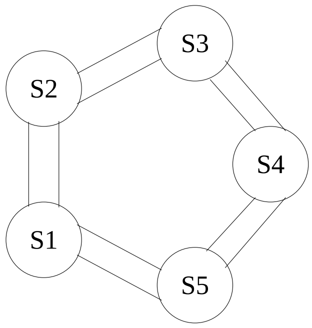
1. Déterminer les probabilités a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 et c_2.
2. Quelle relation aura-t-on en général entre a_n, b_n et c_n ?
3. On suppose, pour cette question uniquement, que notre préparationnaire mange à nouveau un hamburger au jour numéro 2. Quelle est alors la probabilité qu'il ait mangé un plat de pâtes au jour 1 ?
4. À l'aide de la formule des probabilités totales, prouver les relations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lclclcl} a_{n+1} & = & \frac{1}{2}a_n & + & \frac{3}{4}b_n & & \\ b_{n+1} & = & \frac{1}{2}a_n & & & + & \frac{1}{2}c_n \\ c_{n+1} & = & & & \frac{1}{4}b_n & + & \frac{1}{2}c_n \end{array}\right.$$

5. En déduire une matrice A telle que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$.
6. Prouver que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^n U_0$.
7. Exprimer A en fonction de la matrice M étudiée dans la première partie du problème, et en déduire les valeurs des probabilités a_n, b_n et c_n.
8. Déterminer les limites de ces probabilités quand n tend vers $+\infty$.
9. Un plat de pâtes contient environ $1,5$ kilocalories, le hamburger 3 kilocalories, et le plat préparé 2 kilocalories. En notant X_n la variable aléatoire donnant le nombre de kilocalories ingérées par notre préparationnaire lors de son dîner, déterminer $E(X_1)$, puis $E(X_n)$, et enfin $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n)$. Un repas équililibré étant estimé à environ 2 kilocalories, peut-on considérer que notre préparationnaire a une alimentation équilibrée ?

Problème 2

Deux personnes P_1 et P_2 ont rendez-vous dans un complexe formé de cinq sites S_1, S_2, S_3, S_4 et S_5 disposés en pentagone et reliés par des routes, comme l'illustre le schéma ci-dessous. Ils arrivent au rendez-vous à l'heure prévue, mais suite à un malentendu, P_1 se présente au site S_1 et P_2 au site S_2.



Ils décident alors de partir à la recherche l'un de l'autre. Ils empruntent les différentes routes du complexe, avec les règles suivantes :

- à partir d'un site, chacun choisit de se rendre sur l'un des deux sites voisins, les deux possibilités étant équiprobables ;
- les déplacements des deux personnes se font simultanément ;
- tous les choix de déplacement se font indépendamment les uns des autres.

Ils continuent à se déplacer ainsi jusqu'à se retrouver éventuellement sur un même site (ils ne se rencontrent pas le long des routes). Une fois retrouvés, ils ne se déplacent plus.

A. Modélisation du problème

Pour tout entier naturel n, on définit les trois évènements A_n, B_n, C_n :

- A_n : « les deux personnes sont sur le même site après le $n^{\text{ème}}$ déplacement »
- B_n : « les deux personnes sont sur des sites adjacents après le $n^{\text{ème}}$ déplacement »
- C_n : « les deux personnes sont à deux routes de distance après le $n^{\text{ème}}$ déplacement »

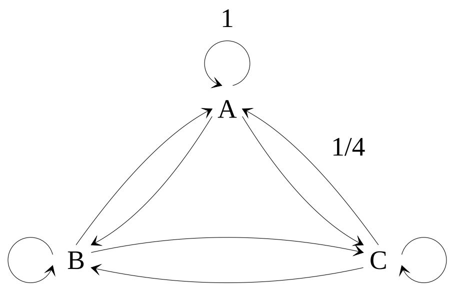
On note a_n, b_n, c_n les probabilités des évènements A_n, B_n, C_n.

1. Justifier que A_n, B_n, C_n forment un système complet d'évènements.

2. Déterminer les valeurs de a_0, b_0 et c_0.

3. (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{C_n}(A_{n+1}) = \dfrac{1}{4}$ et $P_{C_n}(C_{n+1}) = \dfrac{3}{4}$.

   (b) Déterminer toutes les probabilités conditionnelles analogues. On représentera les résultats en reproduisant et complétant le schéma suivant :



4. Etablir les relations suivantes, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $\left\{ \begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & a_n + \dfrac{1}{4} c_n \\ b_{n+1} & = & \dfrac{3}{4} b_n + \dfrac{1}{4} c_n \\ c_{n+1} & = & \dfrac{1}{4} b_n + \dfrac{1}{2} c_n \end{array} \right.$
5. (a) Déterminer une relation entre b_{n+2}, b_{n+1} et b_n.
   (b) En déduire une expression de b_n en fonction de n.
   On fera intervenir les nombres $\alpha = \dfrac{5-\sqrt{5}}{8}$ et $\beta = \dfrac{5+\sqrt{5}}{8}$.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $c_n = \dfrac{\sqrt{5}}{5}(\beta^n - \alpha^n)$.
6. (a) Exprimer a_n en fonction de n, α et β.
   On pourra s'intéresser à la somme $a_n + b_n + c_n$.
   (b) Déterminer la limite de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
   (c) Quelle est la probabilité que les deux personnes ne se retrouvent jamais ?

B. Nombre de déplacements avant rencontre

On définit la variable aléatoire X égale au nombre de déplacements effectués par chacune des personnes avant leur rencontre sur un même site.

1. Déterminer $X(\Omega)$, l'ensemble des valeurs prises par X.
2. Soit $n \in X(\Omega)$, montrer : $P(X = n) = \dfrac{\sqrt{5}}{20}(\beta^{n-1} - \alpha^{n-1})$.
3. Calculer l'espérance de X.
4. Calculer la variance et l'écart-type de X.

Corrigé de la deuxième épreuve du Concours Blanc n°2

Problème 1

Première partie : calcul matriciel

1. On calcule donc $M^2 = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 6 \\ 4 & 8 & 6 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, puis $M^3 = \begin{pmatrix} 32 & 36 & 24 \\ 24 & 16 & 24 \\ 8 & 12 & 16 \end{pmatrix}$. En découle $M^3 - 4M^2 - 4M + 16I = \begin{pmatrix} 32-40-8+16 & 36-24-12 & 24-24 \\ 24-16-8 & 16-32+16 & 24-16-8 \\ 8-8 & 12-8-4 & 16-24-8+16 \end{pmatrix} = 0$.

2. On a donc $M(M^2 - 4M - 4I) = 16I$, donc M est inversible et $M^{-1} = \dfrac{1}{16}(M^2 - 4M - 4I) = \dfrac{1}{16}\begin{pmatrix} -2 & -6 & 6 \\ -4 & 4 & -4 \\ 2 & -2 & -6 \end{pmatrix}$.

3. En effet, $2^3 - 4 \times 2^2 - 4 \times 2 + 16 = 8 - 16 - 8 + 16 = 0$. Le polynome $x^3 - 4x^2 - 4x + 16$ se factorise donc sous la forme $(x-2)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c$. Par identification des coefficients, $a = 1$, $b - 2a = -4$, $c - 2b = -4$ et $-2c = 16$, soit $a = 1$, $b = -2$ et $c = -8$. On a donc $x^3 - 4x^2 - 4x + 16 = (x-2)(x^2 - 2x - 8)$. Le deuxième facteur a pour discriminant $\Delta = 4 + 32 = 36$, et admet pour racines $x_1 = \dfrac{2+6}{2} = 4$, et $x_2 = \dfrac{2-8}{2} = -2$. Finalement, notre équation a trois solutions égales à 2, -2 et 4.

4. Au vu du calcul précédent, on peut écrire $(M-2I)(M+2I)(M-4I) = 0$. Si la matrice $M-2I$ était inversible, on aurait donc, en multipliant par son invers, $(M+2I)(M-4I) = 0$, ou encore $M^2 - 2M - 8I = 0$, ce qui n'est pas le cas (il suffit de regarder le premier coefficient de la première ligne, il vaut -2). La matrice $M - 2I$ n'est donc pas inversible.

5. Le système demandé peut s'écrire sous la forme $\begin{cases} 2x + 3y = 2x \\ 2x + 2z = 2y \\ y + 2z = 2z \end{cases}$

   La résolution est pour le moins facile, on obtient immédiatement $y = 0$, puis $x + z = 0$. Ce système n'est pas un système de Cramer, ce qui signifie que la matrice du système $MX - 2X = 0$ n'est pas inversible. Autrement dit, $M - 2I$ n'est pas inversible.

6. Appliquons dans la joie et la bonne humeur, et si possible sans erreur de calcul, notre cher pivot de Gauss :

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow 3L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow 3L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 0 & -18 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow 4L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 - L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 12 & 12 & 0 \\ 0 & -36 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow 3L_1 + L_2$$

$$\begin{pmatrix} 36 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1/36 \\ L_2 \leftarrow -L_2/36 \\ L_3 \leftarrow L_3/4 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

La matrice P est donc inversible, et $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$.

7. On calcule $MP = \begin{pmatrix} 12 & -6 & -2 \\ 8 & 8 & 0 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, puis $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

8. Une petite récurrence pour commencer : comme $D = P^{-1}MP$, $M = PP^{-1}MPP^{-1} = PDP^{-1}$, ce qui prouve la formule pour $n = 1$. ensuite, en supposant le résultat vérifié au rang n, on aura $M^{n+1} = M^n \times M = (PD^nP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$, ce qui prouve l'hérédité. Ne reste plus qu'un peu de calcul : $PD^n = \begin{pmatrix} 3 \times 4^n & 3 \times (-2)^n & -2^n \\ 2 \times 4^n & -4 \times (-2)^n & 0 \\ 4^n & (-2)^n & 2^n \end{pmatrix}$, puis enfin

$$M^n = \begin{pmatrix} \frac{4^n}{2} + \frac{(-2)^n}{4} + \frac{2^n}{4} & \frac{4^n}{2} - \frac{(-2)^n}{2} & \frac{4^n}{2} + \frac{(-2)^n}{4} - \frac{3\times 2^n}{4} \\ \frac{4^n}{3} - \frac{(-2)^n}{3} & \frac{4^n}{3} + \frac{2\times(-2)^n}{3} & \frac{4^n}{3} - \frac{(-2)^n}{3} \\ \frac{4^n}{6} + \frac{(-2)^n}{12} - \frac{2^n}{4} & \frac{4^n}{6} - \frac{(-2)^n}{6} & \frac{4^n}{6} + \frac{(-2)^n}{12} + \frac{3\times 2^n}{4} \end{pmatrix}$$

Deuxième partie : un problème de probabilités.

1. Puisque le préparationnaire mange un hamburger au jour 0, les relations de l'énoncé donnent immédiatement $a_1 = \frac{3}{4}$, $b_1 = 0$ et $c_1 = \frac{1}{4}$. Pour le jour suivant, il faut appliquer la formule des probabilités totales au système complet d'événements constitué de A_1 et C_1 (on vient de voir que B_1 ne se produisait jamais) : $a_2 = a_1 \times P_{A_1}(A_2) + c_1 \times P_{C_1}(A_2) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times 0 = \frac{3}{8}$; de même, $b_2 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; et $c_2 = \frac{3}{4} \times 0 + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.
2. Les événements A_n, B_n et C_n formant un système complet, on aura toujours $a_n + b_n + c_n = 1$.
3. On cherche à calculer $P_{B_2}(A_1)$. Cette probabilité vaut, d'après la formule de Bayes, $\dfrac{P(A_1) \times P_{A_1}(B_2)}{P(B_2)} = \dfrac{\frac{3}{4} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{4}$.

4. Il suffit d'appliquer la formule des probabilités totales au système complet d'événements forme de A_n, B_n et C_n et d'utiliser les probabilités conditionnelles données dans l'énoncé. Par exemple, $P(A_{n+1}) = P_{A_n}(A_{n+1}) \times P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1}) \times P(B_n) + P_{C_n}(A_{n+1}) \times P(C_n) = \dfrac{1}{2}a_n + \dfrac{3}{4}b_n$.
5. Écrit sous forme matricielle, le système précédent donne effectivement $U_{n+1} = AU_n$, avec $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
6. C'est une récurrence presque immédiate. La relation est évidente pour $n = 0$: $A^0U_0 = IU_0 = U_0$, et en la supposant vraie au rang n, on aura d'après la question précédente $U_{n+1} = AU_n = A(A^nU_0) = A^{n+1}U_0$, ce qui prouve l'hérédité.
7. On constate que $A = \dfrac{1}{4}M$, donc $A^n = \dfrac{1}{4^n}M^n$. Comme $U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, on en déduit U_n, et on obtient

$$\begin{cases} a_n &= \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \\ b_n &= \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \\ c_n &= \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{6}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \end{cases}$$

8. Tous les termes non constants ont une limite nulle car ce sont des suites géométriques de raison comprise entre -1 et 1. Il reste donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \dfrac{1}{3}$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \dfrac{1}{6}$.
9. La variable X_n ne prend que les valeurs $1,5$, 2 et 3, avec probabilités respectives a_n, c_n et b_n. En particulier, $E(X_1) = 1,5 \times a_1 + 2 \times c_1 + 3 \times b_1 = \dfrac{9}{8} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{13}{8}$. Plus généralement, $E(X_n) = \dfrac{3}{2}a_n + 2c_n + 3b_n = \dfrac{3}{4} - \dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n + 1 + 2\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{25}{12} + \dfrac{11}{12}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.
La limite de cette suite étant de $\dfrac{25}{12}$, on peut conclure qu'à long terme, l'alimentation moyenne de notre préparationnaire ne sera pas tout à fait équilibrée.

Problème 2

A. Modélisation du problème

1. Les évènements A_n, B_n et C_n sont manifestement incompatibles (sauf si une des deux personnes a le don d'uniquité), et P_1 et P_2 ne peuvent pas se trouver à plus de deux routes de distance sur le pentagone. L'un des trois évènements A_n, B_n et C_n est donc nécessairement modifié, et ceux-ci forment un système complet d'évènements.
2. L'énoncé stipulant que P_1 et P_2 se trouvent initialement en S_1 et S_2, c'est-à-dire sur des sites adjacents, $b_0 = 1$ et $a_0 = c_0 = 0$.
3. (a) Supposons donc C_n vérifié, autrement dit que P_1 et P_2 se trouvent à deux routes de distance, par exemple en S_1 et en S_3. Au déplacement suivant, P_1 peut donc se trouver en S_2 ou en S_5, et P_2 en S_2 ou en S_4. Les quatres (deux fois deux) possibilités étant équiprobables, et une seule voyant nos deux personnes aboutir au même endroit, on a bien $P_{C_n}(A_{n+1}) = \dfrac{1}{4}$. Accessoirement, on constate que sur les trois cas restants, un seul amène nos deux compères à des sites adjacents, et deux les laissent à deux routes de distance, donc $P_{C_n}(B_{n+1}) = \dfrac{1}{4}$ et $P_{C_n}(C_{n+1}) = \dfrac{1}{2}$.

(b) Ca c'est beaucoup plus facile ! L'énoncé stipulant que P_1 et P_2 arrêtent de bouger une fois qu'ils se rencontrent, A_{n+1} sera automatiquement vérifié si A_n l'est, d'où $P_{A_n}(A_{n+1}) = 1$ (et donc bien sûr $P_{A_n}(B_{n+1}) = P_{A_n}(C_{n+1}) = 0$).

(c) Ne reste plus qu'à supposer B_n réalisé et à voir ce qui se passe. On a alors par exemple P_1 en S_1 et P_2 en S_2, d'où après le déplacement suivant les quatre possibilités (S_5, S_1) ; (S_5, S_3) ; (S_2, S_1) et (S_2, S_3). Dans trois cas les compères sont toujours sur des sites adjacents, dans le dernier ils se retrouvent à deux routes d'écart, donc $P_{B_n}(B_{n+1}) = \frac{3}{4}$; $P_{B_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{4}$, et $P_{B_n}(A_{n+1}) = 0$.

4. Appliquons la formule des probabilités totales au systèmes complet d'évènements (A_n, B_n, C_n) : $P_{A_{n+1}} = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) + P(A_n) \times P_{C_n}(A_{n+1}) = a_n + \frac{1}{4}c_n$. Les deux autres relations s'obtiennent de façon similaire en exploitant les calculs de probabilités conditionnelles précédents.

5. (a) En décalant la deuxième relation de la question précédente, puis en exploitant la troisième, on obtient $b_{n+2} = \frac{3}{4}b_{n+1} + \frac{1}{4}c_{n+1} = \frac{3}{4}b_{n+1} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n\right) = \frac{3}{4}b_{n+1} + \frac{1}{16}b_n + \frac{1}{8}c_n$. Mais, en reprenant une fois de plus la deuxième relation et en la « retournant » un peu, on a $\frac{1}{4}c_n = b_{n+1} - \frac{3}{4}b_n$, donc en reportant $b_{n+2} = \frac{3}{4}b_{n+1} + \frac{1}{16}b_n + \frac{1}{2}b_{n+1} - \frac{3}{8}b_n = \frac{5}{4}b_{n+1} - \frac{5}{16}b_n$.

(b) La suite (b_n) est donc récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{5}{16} = 0$. Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = \frac{25}{16} - \frac{20}{16} = \frac{5}{16} = \left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^2$, et ses deux racines sont, sans grande surprise, $\frac{\frac{5}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}}{2} = \alpha$ et $\frac{5+\sqrt{5}}{8} = \beta$.

On peut donc écrire $b_n = w\alpha^n + z\beta^n$, avec $b_0 = 1$, et $b_1 = \frac{3}{4}b_0 + \frac{1}{4}c_0 = \frac{3}{4}$, donc $w + z = 1$, ou encore $z = 1 - w$; et $w\alpha + z\beta = \frac{3}{4}$, soit $w\alpha + (1-w)\beta = \frac{3}{4}$, donc $w(\alpha - \beta) = \frac{3}{4} - \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{8}$. Comme $\alpha - \beta = \frac{-2\sqrt{5}}{8} = -\frac{\sqrt{5}}{4}$, on a donc $w = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} = \frac{5-\sqrt{5}}{10} = \frac{4}{5}\alpha$; puis $z = 1 - w = \frac{5+\sqrt{5}}{10} = \frac{4}{5}\beta$. Finalement, $b_n = \frac{5}{4}(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1})$.

(c) En reprenant (et en multipliant par 4) la deuxième relation de la question 4, on obtient $c_n = 4b_{n+1} - 3b_n = \frac{16}{5}(\alpha^{n+2} + \beta^{n+2}) - \frac{12}{5}(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) = \frac{4\alpha^n}{5}(4\alpha^2 - 3\alpha) + \frac{4\beta^n}{5}(4\beta^2 - 3\beta)$.
Or, en reprenant l'équation caractéristique de (b_n), on a $4\alpha^2 - 3\alpha = 2\alpha - \frac{5}{4} = \frac{5-\sqrt{5}}{4} - \frac{5}{4} = -\frac{\sqrt{5}}{4}$; de même $4\beta^2 - 3\beta = 2\beta - \frac{5}{4} = \frac{5+\sqrt{5}}{4} - \frac{5}{4} = \frac{\sqrt{5}}{4}$. Finalement, la relation devient donc $c_n = \frac{\sqrt{5}}{5}(\beta^n - \alpha^n)$ comme annoncé dans l'énoncé.

6. (a) En revenant à la toute première question du sujet, la complétude du système d'évènements permet d'affirmer que $a_n = 1 - b_n - c_n = 1 - \frac{1}{5}(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) - \frac{\sqrt{5}}{5}(\beta^n - \alpha^n)$, qu'on peut tenter de simplifier ou non selon son courage (la formule exacte n'a ici que peu d'intérêt, on s'en dispensera donc).

(b) Hormis le 1 initial, (a_n) est une somme de suites géométriques de raison α ou β. Or, $2 < \sqrt{5} < 3$, donc $2 < 5 - \sqrt{5} < 5 + \sqrt{5} < 8$, ce qui suffit à constater que $|\alpha| < 1$ et $|\beta| < 1$. On en déduit que $\lim_{n \to +\infty} a_n = 1$.

(c) Notons D l'évènement « Les deux personnes ne se rencontrent jamais ». On a donc $\bar{D} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Cette union est formée d'une suite croissante d'évènements (cf question 3.b), donc par théorème de la limite monotone a pour probabilité $\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = 1$. Par passage au complémentaire, on peut dire que $P(D) = 0$, autrement dit qu'il est quasi-sûr que les personnes finiront par se rencontrer.

B. Nombre de déplacements avant rencontre

1. La variable X prend bien sûr ses valeurs dans $\mathbb{N}$, mais ne peut pas être égale à 0, ni à 1 (car $P_{B_n}(A_{n+1}) = 0$, donc $P(A_1) = 0$. On a en fait $X(\Omega) = \{2, 3, \dots\}$.
2. L'évènement X_n est réalisé si A_n est réalisé mais pas A_{n-1}, donc si $A_n \cap B_{n-1}$ ou $A_n \cap C_{n-1}$ sont réalisés. Le premier cas étant impossible, $P(X_n) = P(A_n \cap C_{n-1}) = P(C_{n-1}) \times P_{C_{n-1}}(A_n) = \frac{1}{4}c_{n-1} = \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{5}}{20}(\beta^{n-1} - \alpha^{n-1}) = \frac{\sqrt{5}}{20}(\beta^{n-1} - \alpha^{n-1})$.
3. L'espérance de X existe car $nP(X = n)$ est une somme de termes généraux de séries géométriques dérivées convergentes. Calculons-la donc : $E(X) = \sum_{n=2}^{+\infty} n\frac{\sqrt{5}}{20}(\beta^{n-1} - \alpha^{n-1}) = \frac{\sqrt{5}}{20}\left(\frac{1}{(1-\beta)^2} - 1 - \frac{1}{(1-\alpha)^2} + 1\right) = \frac{\sqrt{5}}{20}\left(\frac{1}{(1-\beta)^2} - \frac{1}{(1-\alpha)^2}\right)$. Or, $\frac{1}{(1-\beta)^2} = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{8}\right)^{-2} = \frac{64}{14-6\sqrt{5}}$; et $\frac{1}{(1-\alpha)^2} = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{8}\right)^{-2} = \frac{64}{14+6\sqrt{5}}$. D'où $\frac{1}{(1-\beta)^2} - \frac{1}{(1-\alpha)^2} = \frac{64}{14-6\sqrt{5}} - \frac{64}{14+6\sqrt{5}} = \frac{64(14+6\sqrt{5}-14+6\sqrt{5})}{196-36\times 5} = \frac{64\times 12\sqrt{5}}{16} = 48\sqrt{5}$. Encore un petit effort et on en voit le bout : $E(X) = \frac{\sqrt{5}}{20} \times 48\sqrt{5} = 12$. Il faudra donc en moyenne 12 déplacements (chacun) pour que P_1 et P_2 se rejoignent.
4. Tentons de calculer $E(X(X-1)) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\frac{\sqrt{5}}{20}(\beta^{n-1} - \alpha^{n-1}) = \frac{\sqrt{5}\beta}{20}\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\beta^{n-2} - \frac{\sqrt{5}\alpha}{20}\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\alpha^{n-2} = \frac{\sqrt{5}}{10}\left(\frac{\beta}{(1-\beta)^3} - \frac{\alpha}{(1-\alpha)^3}\right)$. On simplifie ? Allez, soyons fous : $\frac{\beta}{(1-\beta)^3} = \beta\times\left(\frac{3-\sqrt{5}}{8}\right)^{-3} = \frac{512\beta}{72-32\sqrt{5}} = \frac{64(5+\sqrt{5})}{72-32\sqrt{5}} = \frac{64(5+\sqrt{5})(72+32\sqrt{5})}{72^2-32^2\times 5} = \frac{64(520+232\sqrt{5})}{5\ 184 - 5\ 120} = 520+232\sqrt{5}$; de même $\frac{\alpha}{(1-\alpha)^3} = \alpha\times\left(\frac{3+\sqrt{5}}{8}\right)^{-3} = \frac{512\alpha}{72+32\sqrt{5}} = \frac{64(5-\sqrt{5})(72-32\sqrt{5})}{72^2-32^2\times 5} = 520-232\sqrt{5}$. Tout compte fait, ce n'est pas si immonde que ça : $E(X(X-1)) = \frac{\sqrt{5}}{10}\times 464\sqrt{5} = 232$. On en déduit via König-Huygens que $V(X) = E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2 = 232 + 12 - 12^2 = 244 - 144 = 100$, soit $\sigma(X) = 10$ (qui eût cru à un résultat si simple il y a quelques lignes ? Hein, je suis sûr que vous avez douté, soyez francs un peu !).

Rapport du jury du concours blanc n°2, épreuve de probabilités

Problème 1

- **I.2.** Beaucoup de candidats factorisent l'expression $M^3 - 4M^2 - 4M + 16I$ sous la forme $M(M^2 - 4M + 4)$. Les matrices et les nombres réels, tout comme les choux et les carottes, ne sont pourtant pas faits pour être additionnés entre eux. Cela a d'ailleurs posé problème à certains candidats qui ont ensuite essayé d'expliciter la matrice M^{-1}. Un autre groupe a décidé, au mépris de l'indication de l'énoncé, d'inverser la matrice M par la méthode du pivot de Gauss. Certains sont même revenus au pivot de Gauss après avoir pourtant correctement effectué la factorisation leur donnant l'expression de M^{-1} ! Bien du temps perdu inutilement.
- **I.3.** Une grande majorité de candidats fait une confiance absolue à l'énoncé, et se dispense donc de vérifier que 2 est effectivement racine du polynôme.
- **I.4.** Beaucoup de candidats pensent que si le produit d'une matrice donnée par une matrice quelconque n'est pas égale à l'identité, alors celle-ci n'est pas inversible. C'est évidemment absurde, la condition pour que A soit inversible est qu'il **existe** une matrice B telle que $AB = I$. Il fallait ici constater que, si le produit d'une matrice inversible par une autre matrice est nulle, cette dernière doit être nulle.
- **I.5.** Certains candidats étaient fort contents d'affirmer (à tort) que la seule solution du système était la solution nulle, ce qui aurait pourtant eu pour conséquence l'inversibilité de la matrice $M - 2I$, soit l'opposé de ce qu'on leur demandait de prouver. Un système admet une unique solution si et seulement si la matrice du système est inversible, ce n'était pas le cas ici.
- **II.2.** Beaucoup de candidats n'ont pas saisi que, si l'énoncé demandait une relation entre a_n, b_n et c_n, celle-ci ne devait pas faire apparaître les valeurs a_{n-1}, b_{n-1} et c_{n-1}. Ils auraient peut-être pu se douter qu'on ne leur demandait pas de faire deux fois la même chose aux questions 2 et 4.
- **II.6.** Une proportion non négligeable de candidats manipule sans aucune hésitation des « suites géométriques » matricielles, alors qu'une récurrence est attendue pour ce genre de question.
- **II.7.** Un nombre très inquiétant de candidats n'est pas capable de passer de la relation $A = \frac{1}{4}M$, à la suivante : $A^n = \frac{1}{4^n}M^n$, oubliant d'élever le $\frac{1}{4}$ à la puissance n. Le fait d'obtenir ensuite pour leurs probabilités des valeurs qui tendent allègrement vers $+\infty$ ne les dérange naturellement pas plus que ça.
- **II.8.** Certains candidats moins optimistes que leurs camarades évoqués à la question précédente obtiennent des probabilités tendant toutes vers 0 (alors même qu'ils ont correctement affirmé plus haut que leur somme était toujours égale à 1), ou dont la somme tend vers $\frac{3}{4}$ ou autres valeurs fantaisistes laissant présager que le préparationnaire dont on étudie les dîners ne va pas finir sa scolarité dans un très bon état.

Problème 2

- **A.1.** Certains se contentent d'expliquer ce qu'est un système complet d'événements (on peut faire confiance au correcteur pour connaître ses définitions) au lieu d'expliquer pourquoi on en a un ici. D'autres ne justifient pas le point essentiel, qui est que l'union des trois événements recouvre bien l'ensemble des possibilités.
- **A.5.b** Un grand nombre de candidats ayant essayé d'effectuer les calculs de cette question ont été perturbés par l'habitude qu'ils ont de noter α et β les coefficients (et r et s les racines) dans une récurrence linéaire d'ordre 2. Ils ont ainsi souvent supposé que l'énoncé leur avait gentiment donné la valeur de ces coefficients et sont dispensés de vérifier leur valeur. Ces candidats auraient du avoir la présence d'esprit de constater que leur formule finale donnait une valeur totalement fausse pour b_1.
- **A.6.b** Le fait que les raisons α et β des suites géométriques rencontrées aient une valeur absolue

inférieure à 1 n'est le plus souvent pas du tout détaillé.

- **A.6.c** Les candidats étant arrivés jusqu'à la fin de cette première partie ont très mal justifié (ou pas du tout justifié) le fait que la probabilité que les deux personnes ne se rencontrent jamais est nulle. En particulier, des confusions assez vilaines entre la valeur de a_n et la limite de la suite quand n tend vers $+\infty$ ont été observées dans plusieurs copies.
- **B.1.** Trop de candidats ne font pas l'effort de constater que les deux personnes ne peuvent pas se retrouver avant d'avoir effectué deux déplacements chacun. Par ailleurs, beaucoup de notations incompréhensibles pour l'ensemble $X(\Omega)$, la plus fréquente étant sûrement $\{2;\ldots;n\}$, la valeur de l'entier (on suppose que c'en est un ?) n étant apparemment laissée au libre choix du correcteur.
- **B.2.** Beaucoup de candidats confondent l'événement $X = n$ avec l'événement A_n, qui représente le fait que les deux personnes se soient retrouvées **au plus tard** après n déplacements.
- **B.3 et B.4.** Les justifications de convergence des séries et utilisations des formules classiques manquent terriblement de rigueur (sommes finies qui se transforment subitement en sommes infinies, départ de la somme à 0, 1 ou 2 selon l'humeur du candidat). Aucun candidat n'a fait l'effort de simplifier les valeurs trouvées pour l'espérance et la variance, ce qui était pourtant faisable avec les valeurs de α et β fournies par l'énoncé.

Devoir Surveillé n°10

ECE3 Lycée Carnot

10 juin 2011

Durée : 4H. Calculatrices interdites.

Exercice 1 (d'après Ecricome 2000)

On considère une urne contenant des boules blanches (en proportion p), des boules rouges (en proportion r) et des boules vertes (en proportion u) vérifiant $p \geqslant \frac{1}{4}$, $r \geqslant \frac{1}{4}$, $u \geqslant \frac{1}{4}$ et bien entendu $p + r + u = 1$.

On effectue indéfiniment des tirages successifs d'une boule dans cette urne avec remise entre deux tirages. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note B_n (respectivement R_n, V_n) l'événement « On tire une boule blanche (respectivement rouge, verte) au n-ème tirage ».

On appelle X (respectivement Y) la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche (resp rouge). On définit alors la variable $D = |X - Y|$ égale au nombre de tirages séparant la sortie de la première blanche et de la première rouge.

1. Déterminer la loi de X. Faire de même pour Y.
2. Soient i et j des entiers naturels non nuls. En distinguant les cas $i = j$, $i < j$ et $i > j$, exprimer l'événement $(X = i) \cap (Y = j)$ à l'aide des événements décrits dans l'énoncé. En déduire la loi du couple (X, Y).
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Soit k un entier naturel non nul, montrer l'égalité $P(D = k) = \dfrac{pr}{p + r}[(1 - p)^{k-1} + (1 - r)^{k-1}]$.
5. Montrer que D admet une espérance et que $E(D) = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{r} - \dfrac{2}{p + r}$.
6. Prouver à l'aide de manipulations simples sur les inégalités que $E(D) \leqslant \dfrac{16}{3}$.
7. Prouver à l'aide de manipulations moins simples que $E(D) \geqslant 2$.

Exercice 2 (EDHEC 2011)

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose de n urnes, numérotées de 1 à n, contenant chacune n boules. On répète n tirages, chacun consistant à choisir une urne au hasard et à en extraire une boule au hasard. On suppose que les choix des urnes sont indépendants les uns des autres.

Pour tout i de $\{1, 2, \dots, n\}$, on note X_i la variable aléatoire prenant la valeur 1 si l'urne numérotée i contient toujours n boules au bout de ces n tirages, et qui prend la valeur 0 sinon.

1. (a) Montrer que $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $P(X_i = 1) = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$.

   (b) Justifier également que, si i et j sont deux entiers distincts, éléments de $\{1, 2, ..., n\}$, on a : $P((X_i = 1) \cap (X_j = 1)) = \left(1 - \dfrac{2}{n}\right)^n$.

   (c) Comparer $\left(1 - \dfrac{2}{n}\right)$ et $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^2$ et en déduire que, si i et j sont deux entiers distincts, éléments de $\{1, 2, \ldots, n\}$, alors les variables X_i et X_j en sont pas indépendantes.

2. On pose $Y_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_i$.

   (a) Déterminer l'espérance de la variable Y_n.

   (b) En déduire $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{E(Y_n)}{n}$ et donner un équivalent de $E(Y_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3. Pour tout i de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on note N_i la variable aléatoire égale au nombre de boules manquantes dans l'urne numérotée i à la fin de ces n épreuves.

   (a) Donner sans calcul la loi de N_i ainsi que la valeur de $E(N_i)$.

   (b) Que vaut le produit $N_i X_i$?

   (c) Les variables N_i et X_i sont-elles indépendantes ?

4. Compléter le programme informatique suivant pour qu'il simule l'expérience décrite au début de cet exercice et affiche les valeurs prises par X_1 et N_1 pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
Program edhec_2011 ;
Var x1, n1, n, k, tirage, hasard : integer ;
Begin
     Randomize ;
     Writeln('donnez un entier naturel n supérieur ou égal à 2') ;
     Readln(n) ;
     n1 :=0 ; x1 :=1 ;
     For k :=1 to n do
     begin
          hasard := random(n)+1 ;
          if hasard = 1 then begin x1 :=---- ; n1 := ---- ; end ;
     end ;
     Writeln(x1,n1) ;
End.
```

Problème (HEC Techno 97)

I. Question préliminaire.

Soit T une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

1. Rappeler les valeurs de son espérance et de sa variance ; en déduire la valeur de $E(T^2)$.
2. Déduire de ce qui précède (ou refaire un calcul indépendant) que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} \leqslant 2 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2^k} \leqslant 6$$

II. Étude de la suite de lancers d'une pièce.

Soit n un entier naturel non nul. On considère l'expérience aléatoire consistant en la succession de n lancers d'une pièce équilibrée, les résultats des différents lancers étant indépendants. Un résultat de cette expérience aléatoire est donc une suite de n Pile ou Face.

On note S_n le nombre de Pile obtenus au cours des n lancers et T_n le rang d'apparition du premier Pile (si on n'obtient aucun Pile lors des n lancers, on décide que $T_n = 0$). Par exemple Si $n = 5$, et qu'on tire successivement Pile, Face, Face, Pile, Face, alors $S_5 = 2$ et $T_5 = 1$; si on a tiré Face, Face, Face, Face, Face, alors $S_5 = 0$ et $T_5 = 0$.

1. Dans cette question $n = 3$.
   (a) Donner la loi du couple (S_3, T_3).
   (b) Donner la loi de T_3 et calculer son espérance.
   (c) Quelle est la loi de S_3 et quelle est son espérance ?
   (d) Les variables S_3 et T_3 sont-elles indépendantes ?
   (e) Calculer les probabilités suivantes :
   - $P(S_3 = T_3)$
   - $P_{T_3 \neq 0}(S_3 = T_3)$
   - $P_{S_3=2}(T_3 = 1)$

   (f) Donner la loi de la variable produit S_3T_3, calculer son espérance et en déduire le quotient $\dfrac{E(S_3T_3)}{E(S_3)E(T_3)}$.
2. Désormais et jusqu'à la fin du problème on revient au cas général où n désigne un entier naturel non nul.
   Pour $k = 0$ puis pour tout entier k compris entre 1 et n, calculer la probabilité conditionnelle $P_{S_n=1}(T_n = k)$. Pourquoi ce résultat était-il intuitivement prévisible ?
3. (a) Préciser les valeurs prises par la variable T_n et donner sa loi.
   (b) Pour $x \in [0, 1[$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$.
   Donner une autre expression de $f(x)$, puis deux expressions de $f'(x)$.
   En déduire la valeur de l'espérance de T_n en fonction de n et montrer que sa limite quand $n \to \infty$ est égale à 2.
   (c) Reconnaître la loi de S_n et préciser son espérance.
   Justifier l'inégalité $S_nT_n \geqslant S_n$ et en déduire que $E(S_nT_n) \geqslant \dfrac{n}{2}$.
   (d) Déterminer la loi conditionnelle de S_n sachant que $T_n = k$, en précisant en particulier les valeurs que peut alors prendre la variable S_n.
   (e) Étudier les variations de la fonction $x \mapsto x(n + 1 - x)$ définie sur $[0, n + 1]$.
   En distinguant les cas n pair et n impair, donner la valeur maximale que peut prendre la variable S_nT_n.
   En déduire que $E(S_nT_n) \leqslant \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2$.
   (f) À l'aide des résultats obtenus à la question d, exprimer $E(S_nT_n)$ sous forme d'une somme double qu'on ne cherchera pas à calculer.
4. On **admet** que $E(S_nT_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} \times \frac{n-k+2}{2}$.
   (a) Utiliser la question préliminaire pour montrer que $\dfrac{n+2}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} - 3 \leqslant E(S_nT_n) \leqslant n + 2$.

(b) En déduire $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{E(S_n T_n)}{n}$.

(c) En déduire la valeur de $\lim_{n \to \infty} \dfrac{E(S_n T_n)}{E(S_n)E(T_n)}$. Interpréter ce résultat (on comparera notamment au résultat indiquant que, pour deux variables aléatoires indépendantes X et Y, on a $E(XY) = E(X)E(Y)$).

Corrigé du DS10

Exercice 1 (d'après Ecricome 2000)

1. Puisque les tirages s'effectuent avec remise, la probabilité de tirer une boule blanche sera toujours égale à p, et le temps d'attente de la première boule blanche suivra donc une loi géométrique de paramètre p. De même, $Y \sim \mathcal{G}(r)$.
2. Si $i = j$, on aura bien entendu $P((X = i) \cap (Y = j)) = 0$, puisqu'on ne peut pas tirer simultanément une boule blanche et une rouge pour la première fois. Pour $i < j$, on a $(X = i) \cap (Y = j) = V_1 \cap \cdots \cap V_{i-1} \cap B_i \cap (V_{i+1} \cup B_{i+1}) \cap \cdots \cap (V_{j-1} \cup B_{j-1}) \cap R_j$. La probabilité correspondante vaut donc $u^{i-1} \times p \times (u+p)^{j-i-1} \times r$. De même, si $j < i$, on aura $P((X = i) \cap (Y = j)) = u^{i-1} \times r \times (u+r)^{j-i-1} \times p$. On peut aussi remplacer dans les formules $u + p$ par $1 - r$ et $u + r = 1 - p$ (tout comme précédemment on peut remplacer les $V_k \cup B_k$ par des $\overline{R_k}$).
3. Au vu des lois trouvées à la première question, $P(X = i) \times P(Y = j) = p(1-p)^{i-1} \times r(1-r)^{j-1}$, ce qui ne correspond pas à la formule obtenue pour $P((X = i) \cap (Y = j))$ (il suffit par exemple de constater que ça ne donne pas 0 lorsque $i = j$). Les deux variables ne sont donc pas indépendantes.
4. Constatons que $D = k$ équivaut à $X - Y = k$ ou $Y - X = k$ (pour $k \geqslant 1$). Commençons par calculer, en utilisant comme toujours pour une somme ou une différence une décomposition sur un système complet d'événements et en reprenant les calculs de la question 2, $P(Y - X = k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} P((X = i) \cap (Y = k+i)) = \sum_{i=1}^{+\infty} pu^{i-1} r(1-r)^{k+i-i-1} = pr(1-r)^{k-1} \times \frac{1}{1-u} = \frac{pr(1-r)^{k-1}}{p+r}$ (simple calcul de série géométrique). On obtiendrait de même (il suffit d'inverser le rôle de p et de r), $P(X - Y = k) = \dfrac{pr(1-p)^{k-1}}{p+r}$, d'où la formule de l'énoncé.
5. On constate que $kP(D = k)$ est une somme de deux termes généraux de séries géométriques dérivées convergentes, donc l'espérance existe, et $E(D) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{kpr}{p+r}((1-p)^{k-1} + (1-r)^{k-1}) = \frac{pr}{p+r}\left(\frac{1}{(1-(1-p))^2} + \frac{1}{(1-(1-r))^2}\right) = \frac{r}{p(p+r)} + \frac{p}{r(p+r)}$. Or, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{r} - \dfrac{2}{p+r} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+r} + \dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{p+r} = \dfrac{p+r-p}{p(p+r)} + \dfrac{p+r-r}{r(p+r)} = E(D)$.
6. Au vu des hypothèses de l'énoncé, $p \geqslant \dfrac{1}{4}$ donc $\dfrac{1}{p} \leqslant 4$. De même $\dfrac{1}{r} \leqslant 4$. Enfin, $p + r = 1 - u \leqslant 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$, donc $\dfrac{2}{p+r} \geqslant 83$, et $-\dfrac{2}{p+r} \leqslant -\dfrac{8}{3}$, et $E(D) \leqslant 4 + 4 - \dfrac{8}{3} = \dfrac{16}{3}$.
7. On veut prouver que $\dfrac{r}{p(p+r)} + \dfrac{p}{r(p+r)} \geqslant 2$, ce qui équivaut à $r^2 + p^2 \geqslant 2pr(p+r)$, soit encore en passant tout à gauche $r^2(1-2p) + p^2(1-2r) \geqslant 0$. Or, comme $r \geqslant \dfrac{1}{4}$, et $u \geqslant \dfrac{1}{4}$, on aura $p = 1 - r - u \leqslant 1 - \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$. On en déduit que $1 - 2p \geqslant 0$, et de même pour $1 - 2r$, ce qui prouve la dernière inégalité obtenue et le fait que $E(D) \geqslant 2$.

Exercice 2 (EDHEC 2011)

1. (a) Avoir $X_i = 1$ signifie qu'aucun des n tirages ne s'est produit dans l'urne i, autrement dit que chacun a été effectué dans une des $n - 1$ urnes restantes, ce qui se produit avec probabilité $\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$.

(b) Par le même raisonnement, il faut que chaque tirage soit effectué dans une des $n-2$ urnes restant une fois qu'on a éliminé l'urne i et l'urne j, ce qui se produit avec probabilité $\left(\frac{n-2}{n}\right)^n = \left(1-\frac{2}{n}\right)^n$.

(c) On a $\left(1-\frac{1}{n}\right)^2 = 1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2} \neq 1-\frac{2}{n}$. À quoi sert ce calcul ? on en déduit que $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n} \neq \left(\frac{1}{-}\frac{2}{n}\right)^n$, ce qui suffit à prouver la non indépendance des variables X_i et X_j puisque la première valeur est celle de $P(X_i=1)\times P(X_j=1)$, et la seconde celle de $P((X_i=1)\cap(X_j=1))$.

2. (a) Chacune des variables X_i suit une loi de Bernoulli, d'espérance $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$, et par linéarité de l'espérance, $E(Y_n) = nE(X_i) = n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.

   (b) On a donc $\frac{E(Y_n)}{n} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln(1-\frac{1}{n})}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$, $n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \sim n \times \left(-\frac{1}{n}\right) \sim -1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{E(Y_n)}{n} = e^{-1} = \frac{1}{e}$. En découle immédiatement que $E(Y_n) \sim \frac{n}{e}$, ce qui signifie que, quand on augmente le nombre d'urnes, la proportion d'urne restant intactes après n tirages se rapproche en moyenne de $\frac{1}{e}$.

3. (a) Cela revient à compter le nombre de fois où on a pioché dans l'urne i, ce qui se produit pour chaque tirage avec une probabilité $\frac{1}{n}$. On a donc $N_i \sim \mathcal{B}\left(n;\frac{1}{n}\right)$, et $E(N_i) = n\times\frac{1}{n} = 1$.

   (b) Lorsque $X_i = 1$, c'est qu'on n'a jamais tiré dans l'urne i, donc $N_i = 0$ et $N_iX_i = 0$. Si $X_i \neq 1$, c'est que $X_i = 0$ et dans ce cas on a aussi $N_iX_i = 0$. La variable produit est donc nulle.

   (c) Non, sûrement pas, sinon on aurait notamment $E(N_iX_i) = E(N_i)\times E(X_i)$, ce qui n'est pas le cas puisque l'espérance de gauche vaut 0, et celles de droite sont non nulles toutes les deux.

4.
```
Program edhec_2011 ;
Var x1, n1, n, k, tirage, hasard : integer ;
Begin
     Randomize ;
     Writeln('donnez un entier naturel n supérieur ou égal à 2') ;
     Readln(n) ;
     n1 :=0 ; x1 :=1 ;
     For k :=1 to n do
     begin
          hasard := random(n)+1 ;
          if hasard = 1 then begin x1 := 0 ; n1 := n1+1 ; end ;
     end ;
     Writeln(x1,n1) ;
End.
```

Problème (HEC Techno 97)

I. Question préliminaire.

Soit T une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$.

1. Question de cours : $E(T) = 2$ et $V(T) = \frac{1}{2} \times 4 = 2$. On en déduit en utilisant la formule de König-Huygens dans un sens inhabituel que $E(T^2) = V(T) + E(T)^2 = 2 + 4 = 6$.
2. Puisque $P(T = k) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{2^k}$, ce sont des sommes partielles des séries de terme général $kP(T = k)$ et $k^2P(T = k)$, convergeant respectivement vers 2 et 6 d'après la question précédente, donc les inégalités sont évidentes.

II. Étude de la suite de lancers d'une pièce.

1. (a) Commençons par constater que $S_3(\Omega) = T_3(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$. Les probabilités des intersections se calculent sans difficulté, par exemple $P((S_3 = 2) \cap (T_3 = 1)) = P(PPF \cup PFP) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$. On obtient le tableau suivant :

$S_3 \backslash T_3$	0	1	2	3
0	$\frac{1}{8}$	0	0	0
1	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
2	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	0
3	0	$\frac{1}{8}$	0	0

(b) On peut retrouver les lois marginales à partir de la loi de couple, mais ce n'est pas vraiment nécessaire. La variable T_3 suit une loi géométrique « tronquée » puisqu'on s'arrête après trois tirages et que T_3 prend la valeur 0 si aucun Pile n'a encore été tiré. La loi peut être représentée par le tableau suivant :

k	0	1	2	3
$P(T_3 = k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

On calcule sans difficulté $E(T_3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} = \frac{11}{8}$.

(c) Là, pour le coup, c'est une loi usuelle : $S_3 \sim \mathcal{B}\left(3, \frac{1}{2}\right)$, et $E(S_3) = \frac{3}{2}$.

(d) Non, il y a plein de zéros dans le tableau à des endroits correspondant à des probabilités non nulles pour S_3 et T_3.

(e) • En utilisant le tableau de la loi conjointe,
$$P(S_3 = T_3) = \sum_{k=0}^{k=3} P((S_3 = k) \cap (T_3 = k)) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + 0 = \frac{3}{8}.$$
• Revenons à la définition des probabilités conditionnelles :
$$P_{T_3 \neq 0}(S_3 = T_3) = \frac{P((T_3 = S_3) \cap (T_3 \neq 0))}{P(T_3 \neq 0)} = \frac{\frac{2}{8}}{\frac{7}{8}} = \frac{2}{7}.$$
• Encore un petit calcul : $P_{S_3=2}(T_3 = 1) = \dfrac{P((S_3 = 2) \cap (T_3 = 1)}{P(S_3 = 2)} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{8}} = \dfrac{2}{3}$.

(f) En reprenant le tableau de la loi conjointe et en supprimant les cas où les probabilités sont nulles, on constate que $S_3T_3(\Omega) = \{0; 1; 2; 3; 4\}$, et la loi de S_3T_3 est donnée par le tableau suivant :

k	0	1	2	3	4
$P(T_3 = k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Par exemple, $P(S_3T_3 = 2) = P((S_3 = 1) \cap (T_3 = 2)) + P((S_3 = 2) \cap (T_3 = 1)) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$.
Ensuite, on calcule $E(S_3T_3) = \frac{1}{8} + \frac{6}{8} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} = \frac{17}{8}$. Enfin, $\dfrac{E(S_3T_3)}{E(S_3)E(T_3)} = \dfrac{17}{8} \times \dfrac{8}{11} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{34}{33}$.

2. Bien évidemment, $P_{S_n=1}(T_n = 0) = 0$: si on a tiré exactement 1 Pile sur les n lancers, T_n ne peut pas prendre la valeur 0. Pour $k \neq 0$, calculons la probabilité conditionnelle en utilisant le

fait que S_n suit une loi binomiale : $P_{S_n=1}(T_n = k) = \dfrac{P((S_n = 1) \cap (T_n = k)}{P(S_n = 1)}$. La probabilité du numérateur vaut $\dfrac{1}{2^n}$ puisqu'un seul tirage correspond à ces conditions (celui où on tire un seul Pile au rang k), donc $P_{S_n=1}(T_n = k) = \dfrac{1}{2^n \times \binom{n}{1}\frac{1}{2^n}} = \dfrac{1}{n}$. Tout ceci est effectivement très prévisible : si on sait qu'on a tiré exactement un Pile, le rang auquel on l'a tiré devrait suivre une loi uniforme sur $\{1; 2; \dots; n\}$.

3. (a) On a $T_n(\Omega) = \{0; 1; \dots; n\}$. Pour la loi, $P(T_n = 0) = \dfrac{1}{2^n}$ (probabilité de ne tirer que des Face sur les n tirages) et $\forall k \geqslant 1$, $P(T_n = k) = \dfrac{1}{2^k}$ (probabilité de tirer $k-1$ Face puis un Pile).

   (b) On reconnait une somme géométrique : $f(x) = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$. Si on dérive l'expression initiale, $f'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$. Si on dérive la deuxième expression,
   $f'(x) = \dfrac{-(n+1)x^n(1-x) + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2} = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$.
   Or, $E(T_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} kP(T_n = k) = \sum_{k=0}^{n} k\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2}f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{n \times \frac{1}{2^{n+1}} - (n+1) \times \frac{1}{2^n} + 1}{2(1-\frac{1}{2})^2} = \frac{n}{2^n} - \frac{n+1}{2^{n-1}} + 2 = 2 - \frac{n+2}{2^n}$. Par un argument de croissance comparée assez immédiat, la limite de cette expression est bien égale à 2 quand n tend vers $+\infty$.

   (c) On l'a déjà dit plus haut : $S_n \sim \mathcal{B}\left(n; \dfrac{1}{2}\right)$, donc $E(S_n) = \dfrac{n}{2}$.
   L'inégalité $S_nT_n \geqslant S_n$ est évidente dès que $T_n \geqslant 1$, et si $T_n = 0$, celà signifie qu'on n'a jamais tiré de Pile, donc que $S_n = 0$. dans ce cas, l'inégalité reste vraie : $0 \times 0 \geqslant 0$. On en déduit que $E(S_nT_n) \geqslant E(S_n) = \dfrac{n}{2}$.

   (d) Si on sait que $T_n = k$, on sait que les $k-1$ premiers lancers ont donné des Face, et le k-ème un Pile, chacun des $n-k$ lancers restants pouvant toujours donner Pile ou Face avec probabilité $\dfrac{1}{2}$ pour chaque. La variable S_n peut donc prendre des valeurs comprises entre 1 et $n-k+1$ (on évite d'oublier le Pile imposé au tirage k), et on peut dire que $S_n - 1$ suit une loi binômiale de paramètre $\left(n-k; \dfrac{1}{2}\right)$. Ou encore que $\forall i \in \{1; 2; \dots; n+1-k\}$, $P(S_n = i) = \dbinom{n-k}{i-1}\dfrac{1}{2^{n-k}}$.

   (e) La fonction est clairement dérivable, de dérivée $n + 1 - 2x$, et admet donc un maximum en $x = \dfrac{n+1}{2}$. Puisqu'on sait que T_n prend ses valeurs entre 1 et n et S_n, une fois que $T_n = k$, entre 1 et $n+1-k$, la valeur la plus grande prise par S_nT_n est obtenue quand la valeur de $k(n+1-k)$ est maximale. Si n est impair, $\dfrac{n+1}{2}$ est un entier, et au vu de l'étude de fonction précédente, le maximum des valeurs prises par S_nT_n vaut $\dfrac{n+1}{2}\left(n + 1 - \dfrac{n+1}{2}\right) = \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2$. Si n est pair, le maximum de la fonction n'est pas atteint en un entier, les valeurs les plus grandes possibles pour S_nT_n peuvent donc être atteintes pour les deux entiers les plus proches, c'est-à-dire en $\dfrac{n}{2}$ et en $\dfrac{n}{2} + 1$. Les images de ces deux valeurs par notre fonction sont toutes deux égales à $\dfrac{n(n+2)}{4} = \dfrac{n^2 + 2n}{4} \leqslant$

$\dfrac{n^2+2n+1}{4} = \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2$. Dans tous les cas, la valeur maximale prise par la variable S_nT_n, et donc son espérance, sont majorées par $\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2$.

(f) On peut écrire $E(S_nT_n) = \sum_{i,k} ikP((S_n = i) \cap (T_n = k))$ pour tous les couples (i, k) pour lesquels la probabilité de l'intersection est non nulle. C'est-à-dire $E(S_nT_n) = \sum_{i,k} ikP(T_n = k) \times P_{T_n=k}(S_n = i) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{k}{2^k} \sum_{i=1}^{n+1-k} i\dbinom{n-k}{i-1}\dfrac{1}{2^{n-k}}$.

4. (a) En découpant simplement la somme, $E(S_nT_n) = \dfrac{n+2}{2}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k}{2^k} - \dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k^2}{2^k}$. On a vu dans la question préliminaire que la dernière somme était majorée par 6, donc $E(S_nT_n) \geqslant \dfrac{n+2}{2}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k}{2^k} - \dfrac{1}{2} \times 6$, ce qui donne la minoration de l'énoncé. Pour la majoration, il suffit de minorer la deuxième somme par 0, pour obtenir $E(S_nT_n) \leqslant \dfrac{n+2}{2}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k}{2^k} \leqslant \dfrac{n+2}{2} \times 2$, toujours en utilisant les résultats de la question préliminaire.

(b) En divisant l'encadrement par n, on a $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k}{2^k} - \dfrac{3}{n} \leqslant \dfrac{E(S_nT_n)}{n} \leqslant 1 + \dfrac{2}{n}$. Le majorant a clairement pour limite 1. Quand au minorant, la parenthèse tend vers $\dfrac{1}{2}$, la somme vers 2 (toujours les calculs de la question préliminaire), et le $\dfrac{3}{n}$ vers 0. Le tout tend donc également vers 1, et on peut appliquer le théorème des gendarmes pour conclure que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{E(S_nT_n)}{n} = 1$.

(c) Au vu des calculs effectués plus haut, $E(S_n)E(T_n) = \dfrac{n}{2}\left(2 - \dfrac{n+2}{2^n}\right) = n - \dfrac{n(n+2)}{2^{n+1}}$. Cette expression est équivalente à n en $+\infty$, donc $\dfrac{E(S_nT_n)}{E(S_n)E(T_n)} \sim \dfrac{E(S_nT_n)}{n}$, ce qui tend vers 1 d'après la question précédente. On peut donc tenter d'interpréter les choses en disant que, lorsque n grandit, les variables S_n et T_n ont tendance à se comporter de plus en plus comme des variables indépendantes (pour lesquelles le quotient serait égal à 1). On remarquera, pour $n = 3$, les calculs effectués plus haut donnent déjà une valeur du quotient très proche de 1.

Devoir à la Maison n°1

ECE3 Lycée Carnot

à rendre le 24 septembre 2010

Exercice 1

Donner la négation des énoncés suivants :

1. Tous les élèves de la classe auront au-dessus de la moyenne en maths au moins une fois dans l'année.
2. Il a plu tous les jours au mois de juin à Londres.
3. Dans tout pommier ayant plus de 100 fruits, il y a au moins une pomme pourrie.

Exercice 2

Le retour du VRAI/FAUX. Justifier soigneusement chaque réponse (démontrer les résultats vrais, donner des contre-exemples quand c'est faux, éventuellement citer une hypothèse à ajouter pour rendre l'énoncé vrai) :

1. $\exists x > 0,\ \forall y > 0,\ x < y$.
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x = \ln y$.
3. $\forall a \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ a < \ln x$.
4. $\forall x < \sqrt{2},\ \exists a \in \mathbb{Q}_+^*,\ x + a < \sqrt{2}$.

Exercice 3

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $\ln(x^2) - 5\ln x = 2$
2. $|x+2| - |2x-5| = |3-x|$
3. $x - 3\sqrt{x} \leqslant -2$
4. $Ent(x^2 - 3x - 1) \leqslant 2$
5. $3\sqrt{2}x^{\frac{1}{8}} - x^{\frac{1}{4}} = 4$

Exercice 4

Soient f et g les fonctions définies sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \ln(1+x)$ et $g(x) = \dfrac{2x}{x+2}$. On note h la fonction définie sur ce même intervalle par $h(x) = f(x) - g(x)$.

1. Étudier les variations de h. En déduire que f est minorée par g sur $[0;+\infty[$.
2. Montrer que les courbes représentatives de f et de g admettent une tangente commune en 0.
3. Tracer dans un même repère les deux courbes ainsi que la tangente en question.
4. On définit désormais, pour tout réel strictement positif k, la fonction f_k par $f_k(x) = \ln(1+x) - kx$. Étudier les variations de la fonction f_1.
5. Déterminer $f_1(0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)$, et en déduire que f_1 majore f.
6. Montrer que, si $k \geqslant 1$, f est majorée par f_k.
7. Déterminer de même s'il existe des valeurs de k appartenant à $]0;1[$ pour lesquelles f_k majore f.

Corrigé du DM1

Exercice 1

1. Au moins un élève de la classe n'aura jamais la moyenne en maths cette année.
2. Il y a eu au moins un jour sans pluie en juin à Londres.
3. Il existe un pommier ayant plus de 100 fruits dont aucun n'est pourri.

Exercice 2

1. FAUX : si x est un nombre strictement positif, on peut toujours en trouver un autre plus petit que lui, par exemple $\frac{x}{2}$.
2. VRAI : il suffit de prendre $y = e^x$.
3. VRAI : par exemple $x = e^a + 1$.
4. VRAI : si $x < \sqrt{2}$, alors $\sqrt{2} - x > 0$, et on peut trouver un nombre rationnel strictement inférieur à $\sqrt{2} - x$ (en considérant par exemple les nombres de la forme $\frac{1}{n}$, on a une suite tendant vers 0 quand n tend vers $+\infty$, donc on finira par y trouver des valeurs plus petites que n'importe quel nombre strictement positif). Un tel rationnel a vérifie donc $x + a < \sqrt{2}$.

Exercice 3

1. Puisque $\ln(x^2) = 2\ln x$, on se ramène simplement à l'équation $-3\ln x = 2$, soit $\ln x = -\frac{2}{3}$, et $x = e^{-\frac{2}{3}}$ (l'équation initiale n'a de sens que pour $x > 0$, mais la solution obtenue est bien positive), donc $\mathcal{S} = \{e^{-\frac{2}{3}}\}$.
2. Faisons un petit tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		$\frac{5}{2}$		3		$+\infty$
$\|x+2\|$		$-x-2$	0	$x+2$	$\|$	$x+2$	$\|$	$x+2$	
$\|2x-5\|$		$5-2x$	$\|$	$5-2x$	0	$2x-5$	$\|$	$2x-5$	
$\|3-x\|$		$3-x$	$\|$	$3-x$	$\|$	$3-x$	0	$x-3$	
$\|x+2\|-\|2x-5\|-\|3-x\|$		$2x-10$	$\|$	$4x-6$	$\|$	4	$\|$	$-2x+10$	

L'équation a des solutions lorsque l'expression de la dernière ligne s'annule, ce qui ne peut manifestement pas se produire sur $\left[\frac{5}{2}; 3\right]$. Sur $\left[-2; \frac{5}{2}\right]$, $4x - 6$ s'annule en $\frac{3}{2}$, solution valable puisqu'appartenant à l'intervalle. Sur $\left]-\infty; \frac{5}{2}\right]$, $2x-10$ s'annule pour $x = 5$, solution également non valable. Enfin, sur $[3; +\infty[$, $-2x + 10$ s'annule en 5, qui est cette fois-ci une solution acceptable. Conclusion : $\mathcal{S} = \{5\}$.

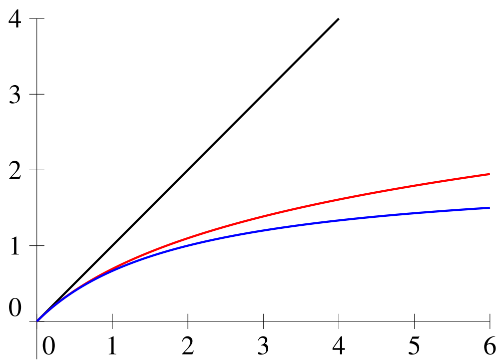
3. On pose $X = \sqrt{x}$ (naturellement, x devra être positif pour que l'inéquation ait en sens). L'inéquation devient $X^2 - 3X + 2 \leqslant 0$, le discriminant du trinome est $\Delta = 9 - 8 = 1$, il y a donc deux racines $x_1 = \frac{3-1}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$. On doit donc avoir $\sqrt{x} \in [1; 2]$, soit $x \in [1; 4]$.
4. Cela revient simplement à demander $x^2 - 3x - 1 < 3$, soit $x^2 - 3x - 4 < 0$. Ce trinome a pour discriminant $\Delta = 9 + 16 = 25$, et admet donc deux racines $x_1 = \frac{3-5}{2} = -1$ et $x_2 + \frac{3+5}{2} = 4$. Le trinome est strictement négatif entre ses racines, donc $\mathcal{S} =]-1; 4[$

5. Un peu d'observation laisse penser que poser $X = x^{\frac{1}{8}}$ peut être intéressant puisque l'équation devient alors $3\sqrt{2}X - X^2 = 4$, soit $X^2 - 3\sqrt{2}X + 4 = 0$. Le discriminant de ce trinome vaut $18 - 4 \times 4 = 2$, donc il y a deux solutions $X_1 = \dfrac{3\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ et $X_2 = \dfrac{3\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$, ce qui donne pour l'équation initiale $x_1 = X_1^8 = 2^4 = 16$ et $x_2 = X_2^8 = 2^8 \times 16 = 4\ 096$.

Exercice 4

Soient f et g les fonctions définies sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \ln(1 + x)$ et $g(x) = \dfrac{2x}{x + 2}$. On note h la fonction définie sur ce même intervalle par $h(x) = f(x) - g(x)$.

1. Dérivons h : $\forall x \in [0; +\infty[$, $h'(x) = f'(x) - g'(x) = \dfrac{1}{1 + x} - \dfrac{2(x + 2) - 2x}{(x + 2)^2} = \dfrac{1}{1 + x} - \dfrac{4}{(x + 2)^2} = \dfrac{(x + 2)^2 - 4(1 + x)}{(1 + x)(x + 2)^2} = \dfrac{x^2}{(1 + x)(x + 2)^2}$. Cette dérivée est toujours positive sur $\mathcal{D}_h$, donc la fonction h est croissante sur $[0; +\infty[$. Comme $h(0) = 0 - 0 = 0$, on en déduit que la fonction h est toujours positive, c'est-à-dire que $\forall x \geqslant 0$, $f(x) - g(x) \geqslant 0$, ce qui prouve bien que f est minorée par g.
2. Calculons les tangentes aux deux courbes en 0. Pour f, on obtient $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$, donc la tangente a pour équation $y = x$. Pour g, on a également $g(0) = 0$ et $g'(0) = \dfrac{4}{4} = 1$, d'où la même équation pour la tangente.
3. Constatons en passant qu'au vu des dérivées calculées pour la première question, les fonctions f et g sont toutes deux croissantes sur $[0; +\infty[$, et traçons une allure des courbes :



4. La fonction $f_1 : x \mapsto \ln(1 + x) - x$ a pour dérivée $f_1'(x) = \dfrac{1}{1 + x} - 1 = -\dfrac{x}{1 + x}$. Cette dérivée étant négative sur $[0; +\infty[$, f_1 est décroissante.
5. On a $f_1(0) = 0 - 0 = 0$. Pour la limite, on peut constater que $f_1(x) = x\left(\dfrac{\ln(1 + x)}{x} - 1\right)$. La parenthèse a pour limite -1 car $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(1 + x)}{x} = 0$ par croissance comparée (ce n'est pas exactement un résultat de croissance comparée, mais on s'y ramène en contstant que $\ln(1 + x) \leqslant \ln 2x$ pour $x \geqslant 1$ par exemple). La limite ne sert d'ailleurs abolument à rien pour constater que f_1 est toujours négative, donc que f est majorée par x.
6. Comme $\forall x \geqslant 0$, $\forall k \geqslant 1$, $x \leqslant kx$, on aura bien $f(x) \leqslant x \leqslant kx$, donc f majorée par kx.
7. Étudions pour cela les variations de la fonction f_k : $f_k'(x) = \dfrac{1}{1 + x} - k = \dfrac{1 - k - kx}{1 + x}$. Le numérateur de cette dérivée s'annule lorsque $x = \dfrac{1 - k}{k} = \dfrac{1}{k} - k$, qui est un réel strictement positif lorsque $k \in]0; 1[$. La fonction f_k est donc strictement croissante puis décroissante, admet

un maximum strictement positif (puisque $f_k(0) = 0$, ce qui rend impossible le fait que kx majore f_k.

Devoir à la Maison n°2

ECE3 Lycée Carnot

à rendre le 4 novembre 2010

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 4$. On pose ensuite $v_n = 3u_n - 2n + 4$.

1. Prouver que la suite (v_n) est d'un type bien connu et en déduire la valeur de v_n.
2. Calculer la valeur de u_n.
3. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} u_k$.

Exercice 2

On considère l'application f définie par $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 - 1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer si f est injective ou surjective sur $\mathcal{D}_f$.
3. Montrer que f est bijective de $[0;1[\cup]1;+\infty[$ vers un ensemble à déterminer.
4. On note g la réciproque de f (restreinte à $[0;1[\cup]1;+\infty[$). Déterminer l'expression de $g(x)$.

Exercice 3

1. Déterminer quatre réels a, b, et c tels que $\forall k \geqslant 1$,

$$\frac{1}{k(k+2)(k+4)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+2} + \frac{c}{k+4}$$

.

2. À l'aide de la question précédente, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+2)(k+4)}$.
3. Vérifier la formule obtenue à la question précédente à l'aide d'une démonstration par récurrence.

Exercice 4

Le but de cet exercice est de déterminer les suites (un) qui vérifient pour tout entier n la relation (R) : $u_{n+3} - u_{n+2} - 4u_{n+1} + 4u_n = 0$.

1. Résoudre l'équation $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$.
2. Déterminer les raisons des suites géométriques vérifiant la relation (R).
3. On considère maintenant une suite (u_n) qui vérifie (R).
   (a) Déterminer, en fonction de u_0, u_1 et u_2, les réels a, b et c qui vérifient le système
   $$\left\{\begin{array}{ccccccc} a & + & b & + & c & = & u_0 \\ a & + & 2b & - & 2c & = & u_1 \\ a & + & 4b & + & 4c & = & u_2 \end{array}\right.$$
   (b) On introduit la suite auxiliaire (v_n) définie par $v_n = u_n - a - b2^n - c(-2)^n$. Montrer que la suite (v_n) vérifie la condition (R), puis, à l'aide d'une récurrence triple, que (v_n) est la suite nulle.
   (c) En déduire la forme générale des suites vérifiant (R).

Corrigé du DM2

Exercice 1

1. Essayons donc d'exprimer v_{n+1} en fonction de v_n : $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) + 2 = 3u_n - 2n + 4 - n + 1 = 3u_n - 3n + 5 = 3v_n - 1$. La suite (v_n) est donc une suite arithmético-géométrique. Son équation de point fixe est $x = 3x - 1$, qui donne $x = \dfrac{1}{2}$. Posons donc $w_n = v_n - \dfrac{1}{2}$, on a alors $w_{n+1} = v_{n+1} - \dfrac{1}{2} = 3v_n - \dfrac{3}{2} = 3w_n$. La suite (w_n) est donc géométrique de raison 3 et de premier terme $w_0 = v_0 - \dfrac{1}{2} = u_0 + 2 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2}$. Concluion : $w_n = \dfrac{5 \times 3^n}{2}$, puis $v_n = \dfrac{5 \times 3^n + 1}{2}$.

2. La relation entre u_n et v_n permet d'obtenir $u_n = v_n + n - 2 = \dfrac{5 \times 3^n - 3}{2} + n$.

3. C'est un calcul un peu brutal, mais qui ne fait intervenir que des sommes classiques : $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} u_k = \frac{5}{2}\sum_{k=0}^{k=n} 3^k - \sum_{k=0}^{k=n} \frac{3}{2} + \sum_{k=0}^{k=n} k = \frac{5}{2}\frac{1-3^{n+1}}{1-3} - \frac{3(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{5 \times 3^{n+1} - 5 - 6n - 6 + 2n^2 + 2n}{4} = \frac{5 \times 3^{n+1} + 2n^2 - 4n - 11}{4}$.

Exercice 2

1. Un calcul sommaire donne $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-1; 1\}$.

2. Pour voir si f est injective, considérons deux réels x et x' tels que $f(x) = f(x')$, soit $\dfrac{2x^2}{x^2 - 1} = \dfrac{2x'^2}{x'^2 - 1}$, ce qui donne $2x^2(x'^2 - 1) = 2x'^2(x^2 - 1)$ puis $-2x^2 = -2x'^2$. Ceci n'implique pas que $x = x'$ (on peut aussi avoir $x = -x'$), la fonction n'est pas injective. On a par exemple $f(2) = f(-2) = \dfrac{8}{3}$. Pour la surjectivité, cherchons les antécédents d'un réel quelconque y, et partons donc de $y = \dfrac{2x^2}{x^2 - 1}$. Cela implique $yx^2 - y = 2x^2$, soit $x^2(y - 2) = y$, ou encore $x^2 = \dfrac{y}{y - 2}$. Cette équation n'a pas de solution lorsque $y = 2$ (mais aussi lorsque $y \in]0; 2[$), donc la fonction f n'est pas non plus surjective.

3. Sur l'ensemble en question, f devient injective puisque seul l'antécédent positif de y est valable (et il y en a toujours un positif et un négatif parmi les deux). Reste à déterminer quels sont les valeurs de y pour lesquelles $x^2 = \dfrac{y}{y - 2}$ admet une solution, c'est-à-dire les valeurs pour lesquelles $\dfrac{y}{y - 2} \geqslant 0$. Un petit tableau de signe permet de déterminer que l'ensemble d'arrivée de f sera $] - \infty; 0] \cup]2; +\infty[$.

4. D'après les calculs précédents, g est définie sur $] - \infty; 0] \cup]1; +\infty[$ par $g(y) = \sqrt{\dfrac{y}{y - 2}}$ (on garde l'antécédent positif de y).

Exercice 3

1. Un peu de calcul, ça ne peut pas faire de mal :

$$\begin{aligned}\frac{a}{k}+\frac{b}{k+2}+\frac{c}{k+4} &= \frac{a(k+2)(k+4)+bk(k+4)+ck(k+2)}{k(k+2)(k+4)}\\ &= \frac{a(k^2+6k+8)+b(k^2+4k)+c(k^2+2k)}{k(k+2)(k+4)}\\ &= \frac{(a+b+c)k^2+(6a+4b+2c)k+8a}{k(k+2)(k+4)}\end{aligned}$$

Par identification, on obtient donc $a+b+c=6a+4b+2c=0$ et $8a=1$, soit $a=\frac{1}{8}$, puis en divisant la deuxième équation par 2, $3a+2b+c=0$. Il ne reste plus qu'à soustraire la première équation pour avoir $2a+b=0$, soit $b=-2a=-\frac{1}{4}$, puis $c=-a-b=\frac{1}{8}$. Finalement, $\frac{1}{k(k+2)(k+4)}=\frac{1}{8k}-\frac{1}{4(k+2)}-\frac{1}{8(k+4)}$.

2. La somme en question est une somme télescopique (mais oui !) : $\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k(k+2)(k+4)}=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{8k}-\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{4(k+2)}+\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{8(k+4)}=\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}-\frac{1}{4}\sum_{k=3}^{k=n+2}\frac{1}{k}+\frac{1}{8}\sum_{k=5}^{k=n+4}\frac{1}{k}=$ $\frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+4}\right)=$ $\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{24}+\frac{1}{32}-\frac{1}{12}-\frac{1}{16}+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+4}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{12+4+3-8}{96}+$ $\frac{1}{8}\frac{(n+1)(n+2)(n+4)+(n+1)(n+2)(n+3)-(n+2)(n+3)(n+4)-(n+1)(n+3)(n+4)}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}=$ $\frac{11}{96}+\frac{n^3+7n^2+14n+8+n^3+6n^2+11n+6-n^3-9n^2-26n-24-n^3-8n^2-19n-12}{8(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}=$ $\frac{11}{96}-\frac{4n^2+20n+22}{8(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}=\frac{11}{96}-\frac{2n^2+10n+11}{4(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$.

3. Notons P_n la propriété : $\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k(k+2)(k+4)}=\frac{11}{96}-\frac{2n^2+10n+11}{4(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$. Pour $n=1$, le membre de gauche vaut $\frac{1}{1\times3\times5}=\frac{1}{15}$, et le membre de droite vaut $\frac{11}{96}-\frac{23}{4(2\times3\times4\times5)}=\frac{11}{96}-\frac{23}{480}=\frac{55-23}{480}=\frac{32}{480}=\frac{1}{15}$. Ouf, ça marche ! Supposons désormais P_n vérifiée, on a alors $\sum_{k=1}^{k=n+1}\frac{1}{k(k+2)(k+4)}=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k(k+2)(k+4)}+\frac{1}{(n+1)(n+3)(n+5)}=$ (par hypothèse de récurrence) $\frac{11}{96}-\frac{2n^2+10n+11}{4(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}+\frac{1}{(n+1)(n+3)(n+5)}=\frac{11}{96}-$ $\frac{(2n^2+10n+11)(n+5)-4(n+2)(n+4)}{4(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}=\frac{11}{96}-\frac{2n^3+20n^2+61n+55-4n^2-24n-32}{4(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}=$ $\frac{11}{96}-\frac{2n^3+16n^2+37n+23}{4(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}$. Si on veut que la formule soit vraie au rang $n+1$, le numérateur devrait être égal à $(n+1)(2(n+1)^2+10(n+1)+11)=(n+1)(2n^2+4n+2+10n+10+11)=(n+1)(2n^2+14n+23)=2n^3+16n^2+37n+23$. Ca marche ! La propriété est donc bien prouvée par récurrence (qui a dit que cet exercice était immonde ?).

Exercice 4

1. Le réel 1 est racine évidente de l'équation. On a donc $x^3-x^2-4x+4=(x-1)(ax^2+bx+c)=ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c$. Par identification, on obtient $a=1$; $b-a=-1$ donc $b=0$; $c-b=-4$ donc $c=-4$. Conclusion : $x^3-x^2-4x+4=(x-1)(x^2-4)=(x-1)(x-2)(x+2)$. Les solutions sont donc $\mathcal{S}=\{-2;1;2\}$.

2. Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q. On a donc $u_n = u_0 \times q^n$, et de même pour les termes suivants. Pour que (u_n) vérifie la relation, il faut donc avoir $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_0q^{n+3} - u_0q^{n+2} - 4u_0q^{n+1} + 4u_0q^n = 0$, soit $u_0q^n(q^3 - q^2 - 4q + 4) = 0$. En supposant la suite non nulle, on en déduit que q est solution de l'équation précédente, donc $q = -2$, $q = 1$ ou $q = 2$.
3. (a) Il s'agit de résoudre ce magnifique système. La différence des deux premières lignes donne $b - 3c = u_1 - u_0$; la différence des deux dernières donne $2b + 6c = u_2 - u_1$. En soustrayant à cette dernière relation la précédente multipliée par deux, on a $12c = u_2 - u_1 - 2u_1 + 2u_0 = 2u_0 - 3u_1 + u_2$, donc $c = \dfrac{u_0}{6} - \dfrac{u_1}{4} + \dfrac{u_2}{12}$; puis $b = 3c + u_1 - u_0 = -\dfrac{u_0}{2} + \dfrac{u_1}{4} + \dfrac{u_2}{4}$; et enfin $a = u_0 - b - c = \dfrac{4u_0}{3} - \dfrac{u_2}{3}$.

   (b) Par hypothèse, (u_n) vérifie (R), et les suites constantes et géométriques de raison 2 ou -2 également. La suite (v_n) est donc une somme de quatre suites vérifiant la relation (R). Il n'est alors pas difficile de se convaincre que (v_n) également vérifie la relation (R) (la relation étant linéaire, une somme de suites la vérifiant la vérifiera également).

   Prouvons donc par récurrence triple la propriété $P_n : v_n = 0$. Il faut faire une unitialisation triple : $v_0 = u_0 - a - b - c = 0$; $v_1 = u_1 - a - 2b + 2c = 0$ et $v_2 = u_2 - a - 4b - 4c = 0$ par définition des réels a, b et c. Supposons maintenant P_n, P_{n+1} et P_{n+2} vérifiées, alors, la suite vérifiant la relation (R), on a $v_{n+3} = v_{n+2} + 4v_{n+1} - 4v_n = 0 + 0 + 0 = 0$, donc P_{n+3} est vérifiée, et (v_n) est bien la suite nulle.

   (c) Conclusion : $u_n = a + b2^n + c(-2)^n$. On peut expliciter u_n à l'aide de u_0, u_1 et u_2 en reprenant les formules obtenues pour a, b et c, mais ce n'est finalement pas très intéressant. Ce qui l'est plus, c'est de voir que les suites récurrentes linéaires d'ordre 3 se comportent comme celles d'ordre 2 : les solutions sont sommes de suites géométriques dont les raisons sont solutions de l'équation caractéristique de la relation.

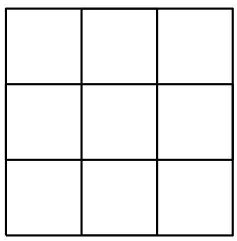
(Mini)-Devoir à la Maison n°3

ECE3 Lycée Carnot

à rendre le 24 novembre 2010

Toute les réponses doivent être **justifiées** le plus soigneusement possible (une bonne explication vaut mieux que cinq lignes de calcul incompréhensibles). Vous pouvez vous servir de la calculatrice pour donner les valeurs numériques correspondant aux formules obtenues (et ainsi vous donner une idée des ordres de grandeurs, et éventuellement repérer des réponses peu crédibles).

On souhaite colorier la grille toutes les cases de la grille suivante en utilisant quatre couleurs : bleu, vert, rouge et jaune.



Pour chacune des conditions suivantes, indiquer le nombre de grilles possibles :

1. Aucune condition.
2. Aucune case de la grille n'est bleue.
3. Toutes les cases sont de la même couleur.
4. Le coloriage n'utilise en fait que deux couleurs (exactement) sur les quatre.
5. Les deux premières lignes sont entièrement rouges.
6. La grille ne contient pas plus de trois cases jaunes.
7. La grille contient quatre cases de chaque couleur.
8. Chaque ligne contient une case de chaque couleur.
9. Chaque ligne et chaque colonne contiennent une case de chaque couleur.
10. La grille contient autant de cases rouges que de bleues.
11. La grille contient autant de cases rouges que de bleues, mais deux vertes de plus que de jaunes.
12. La grille contient une colonne (au moins) entièrement verte.

Corrigé du DM3

1. Il y a 16 cases à colorier, avec quatre couleurs possibles pour chaque case (et répétitions possibles, bien évidemment), soit 4^{16} possibilités.
2. Si aucune case n'est bleue, il ne reste plus que trois couleurs possibles pour chaque case, soit 3^{16} possibilités.
3. Il faut choisir la couleur ... et c'est tout. Il n'y a donc que quatre grilles possibles.
4. Il faut choisir les deux couleurs parmi les quatre possibles, puis colorier les 16 cases de la grille à l'aide de ces deux couleurs, soit $\binom{4}{2}(2^{16}-2)$ possibilités. Pourquoi -2 ? Parce qu'on veut exactement deux couleurs utilisées et qu'une fois choisies les deux couleurs (par exemple bleu et jaune), il faut éviter, parmi les 2^{16} coloriages n'utilisant que ces deux couleurs, les deux pour lesquels la grille sera unicolore (toute bleue ou toute jaune dans notre exemple).
5. Il reste alors huit cases à colorier comme on le souhaite, soit 4^8 possibilités.
6. Il y a donc soit 0 case jaune (3^{16} possibilités, comme à la question 2), soit une (il faut la choisir, puis colorier les 15 cases restantes, soit $\binom{16}{1}\times 3^{15}$ possibilités), soit deux (même raisonnement, $\binom{16}{2}\times 3^{14}$ possibilités), soit trois. Au total, $3^{16}+\binom{16}{1}\times 3^{15}+\binom{16}{2}\times 3^{14}+\binom{16}{3}\times 3^{13}$ grilles possibles.
7. Il faut choisir quelles sont les quatre cases bleues : $\binom{16}{4}$ possibilités ; puis quelles sont les quatre cases rouges : $\binom{12}{4}$; les quatre cases vertes : $\binom{8}{4}$; et on n'a plus le choix pour les quatre cases jaunes. Soit $\binom{16}{4}\times\binom{12}{4}\times\binom{8}{4}$ possibilités.
8. Sur chaque ligne, il faut choisir l'ordre dans lequel apparaissent les couleurs, ce qui peut se faire de 4! façons. Comme il y a quatre lignes à remplir indépendamment, cela fait $(4!)^4$ possibilités.
9. C'est beaucoup plus pénible que tout le reste. On commence par choisir l'ordre sur la première ligne, ce qui laisse 4! possibilités. On choisit ensuite la position des trois autres cases rouges (par exemple), ce qui peut se faire de 3! façons (trois possibilités pour la case rouge de la deuxième ligne, puisqu'il faut éviter la colonne où se trouve déjà une case rouge, puis deux pour celle de la troisième ligne, et plus de choix pour la quatrième case rouge). Une fois tous ces choix effectués, il ne reste en fait que quatre façons de compléter la grille. Supposons par exemple que la case rouge de la deuxième ligne se trouve en-dessous d'une case bleue (les couleurs jouant toutes le même rôle, ça ne change rien que ce soit une autre couleur que bleu) : soit on met une case bleue en-dessous de la rouge de la première ligne, et on n'a plus le choix pour les cases bleues des troisième et quatrième ligne, ni pour la fin de la deuxième ligne, il ne reste que 2 possibilités pour les cases vertes et jaunes des deux dernières lignes ; soit on met une verte ou une jaune en-dessous de la rouge de la première ligne, et là on n'a plus de choix du tout, donc deux autres possibilités. Finalement, on a $4!\times 3!\times 4$ possibilités.
10. La grille peut contenir au choix, soit 8 cases bleues et 8 rouges (et pas d'autre choix à faire), soit 7 cases bleues et 7 rouges (et deux qu'on colore au choix en jaune ou vert), 6 bleues et 6 rouges (et quatre cases avec deux couleurs possibles), etc. On ne peut pas faire plus simple que la magnifique somme suivante : $\binom{16}{8}\times\binom{8}{8}+\binom{16}{7}\times\binom{9}{7}\times 2^2+\binom{16}{6}\times\binom{10}{6}\times 2^4+\binom{16}{5}\times\binom{11}{5}\times 2^6+\binom{16}{4}\times\binom{12}{4}\times 2^8+\binom{16}{3}\times\binom{13}{3}\times 2^{10}+\binom{16}{2}\times\binom{14}{2}\times 2^{12}+\binom{16}{1}\times\binom{15}{1}\times 2^{14}+2^{16}$.
11. Les possibilités sont plus réduites : on ne peut plus avoir 8 rouges et 8 bleues, mais on peut avoir 7 rouges, 7 bleues et 2 vertes ; 6 rouges, 6 bleues, 3 vertes et 1 jaune ; 5 rouges, 5 bleues,

4 vertes et 2 jaunes etc, jusqu'à 0 rouge, 0 bleue, 9 vertes et 7 jaunes, soit un total de $\binom{16}{7} \times \binom{9}{7} + \binom{16}{6} \times \binom{10}{6} \times \binom{4}{3} + \binom{16}{5} \times \binom{11}{5} \times \binom{6}{4} + \binom{16}{4} \times \binom{12}{4} \times \binom{8}{5} + \binom{16}{3} \times \binom{13}{3} \times \binom{10}{6} + \binom{16}{2} \times \binom{14}{2} \times \binom{12}{7} + \binom{16}{1} \times \binom{15}{1} \times \binom{14}{8} + \binom{16}{9}$.

12. Passons au complémentaire. Pour choisir une colonne qui ne soit pas entièrement verte, il y a $4^4 - 1$ possibilités (quatre cases à colorier et un seul coloriage pour lequel tout est vert). Si on veut qu'aucune colonne ne soit entièrement verte, il y a donc $(4^4 - 1)^4$ coloriages possibles (on répète sur chaque colonne le calcul précédent). Le nombre de coloriages avec au moins une colonne entièrement verte est donc $4^{16} - (4^4 - 1)^4$.

Devoir à la Maison n°4

ECE3 Lycée Carnot

à rendre le 4 février 2011

Exercice 1

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 dans lesquelles on effectue des tirages avec remise. L'urne U_1 contient deux boules noires et deux boules blanches, l'urne U_2 une boule blanche et trois noires. De plus, les tirages s'effectuent selon le protocole suivant :

- le premier tirage s'effectue dans l'urne U_1.
- si on obtient une boule blanche lors du tirage numéro n, alors le tirage $n+1$ s'effectue dans l'urne U_1 ; si on obtient une boule noire au tirage n, le tirage $n+1$ s'effectue dans l'urne U_2.

On note B_n l'événement « On tire une boule blanche au tirage n », et $u_n = P(B_n)$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Les événements B_1 et B_2 sont-ils indépendants ?
3. Déterminer les probabilités conditionnelles $P_{B_n}(B_{n+1})$ et $P_{\overline{B_n}}(B_{n+1})$.
4. En déduire une relation de récurrence vérifiée par la suite (u_n).
5. Déterminer la valeur de u_n et sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2

On considère dans cet exercice les matrices carrées réelles d'ordre trois suivantes : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3, puis vérifier que $A^3 = A^2 + 2A$.
2. Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, il existe un couple unique (a_n, b_n) de réels tel que $A^n = a_nA + b_nA^2$, et exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
3. Écrire un programme en Turbo-Pascal qui calcule et affiche a_n et b_n pour un entier n choisi par l'utilisateur.
4. Montrer que, $\forall n \geqslant 1$, $b_{n+2} = b_{n+1} + 2b_n$.
5. En déduire a_n et b_n en fonction de n.
6. Donner l'expression de A^n en fonction de A, A^2 et n. Écrire explicitement la matrice A^8.
7. Déterminer l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $AM = MA$ (question indépendante du reste de l'exercice).

Corrigé du DM4

Exercice 1

1. Puisque l'énoncé nous précise que le premier tirage a lieu dans U_1 qui contient deux boules de chaque couleur, $u_1 = P(B_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Pour le deuxième tirage, cela dépend de ce qui s'est passé au premier. On a, au vu du calcul précédent, une probabilité $\frac{1}{2}$ de tirer dans chaque urne. La formule des probabilités totales nous donne alors $u_2 = \frac{1}{2} \times \frac{2}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$.
2. Pour le savoir, calculons donc $P(B_1 \cap B_2)$. On a $P(B_1) = \frac{1}{2}$ et $P_{B_1}(B_2) = \frac{1}{2}$. En fait cette dernière probabilité suffit à conclure que les deux évènements ne sont pas indépendants puisqu'elle est différente de $P(B_2)$.
3. Au vu de l'énoncé, on aura toujours $P_{B_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{2}$ (puisqu'on effectuera le tirage $n+1$ dans l'urne 1) et $P_{\overline{B_n}}(B_{n+1}) = \frac{1}{4}$ (dans ce cas, on tire dans l'urne 2).
4. Les évènements B_n et $\overline{B_n}$ formant évidemment un système complet d'évènements, on peut appliquer la formule des probabilités totales pour obtenir $P(B_{n+1}) = P(B_n) \times P_{B_n}(B_{n+1}) + P(\overline{B_n}) \times P_{\overline{B_n}}(B_{n+1})$, soit $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{4}(1 - u_n) = \frac{1}{4}u_n + \frac{1}{4}$.
5. On reconnait une suite arithmético-géométrique dont l'équation de point fixe $x = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$, donne $x = \frac{1}{3}$. On pose donc $v_n = u_n - \frac{1}{3}$, et on a $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{4}u_n + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{12} = \frac{1}{4}\left(u_n - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4}v_n$. Comme par ailleurs $v_1 = u_1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, on en déduit que $v_n = \frac{1}{6 \times 4^{n-1}}$, puis $u_n = v_n + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6 \times 4^{n-1}}$. La limite de u_n vaut $\frac{1}{3}$.

Exercice 2

1. On calcule donc $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On vérifie sans difficulté que $A^2 + 2A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^3$.
2. Procédons par récurrence. C'est vrai pour $n = 1$, car $A = 1 \times A + 0 \times A^2$. On peut donc poser $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$. Supposons désormais que $A^n = a_nA + b_nA^2$, alors $A^{n+1} = A \times A^n = A(a_nA + b_nA^2) = a_nA^2 + b_nA^3$. En utilisant la relation obtenue à la question précédente, on a donc $A^{n+1} = a_nA^2 + b_n(A^2 + 2A) = 2b_nA + (a_n + b_n)A^2$. La matrice A^{n+1} est donc de la forme souhaitée, en posant $a_{n+1} = 2b_n$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$, ce qui achève la récurrence.
3.
```
PROGRAM suites ;
USES wincrt ;
VAR a,b,t : real ; i,n : integer ;
BEGIN
WriteLn('Choisissez la valeur de n') ;
ReadLn(n) ;
a := 1 ; b := 0 ;
FOR i := 2 TO n DO
```

```
BEGIN
t := a;
a := 2*b;
b := t+b;
END;
WriteLn('a',n,'=',a,' et b',n,'=',b);
END.
```

4. En utilisant les relations de récurrence obtenues à la question 2, on a $b_{n+2} = a_{n+1} + b_{n+1} = 2b_n + b_{n+1}$.
5. La suite (b_n) est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristiques $x^2 - x - 2 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 1+8 = 9$, et pour racines $r = \dfrac{1-3}{2} = -1$, et $s = \dfrac{1+3}{2} = 2$. On a donc $b_n = \alpha(-1)^n + \beta \times 2^n$. Comme par ailleurs $b_1 = 0$, et $b_2 = 1$ (puisque $A^2 = 1 \times A^2 + 0 \times A$), on en déduit que $-\alpha + 2\beta = 0$, soit $\alpha = 2\beta$; et $\alpha + 4\beta = 1$, soit $6\beta = 1$, donc $\beta = \dfrac{1}{6}$, puis $\alpha = \dfrac{1}{3}$, et enfin $b_n = \dfrac{(-1)^n}{3} + \dfrac{2^n}{6} = \dfrac{2^{n-1} + (-1)^n}{3}$. On a ensuite $a_n = 2b_{n-1} = \dfrac{2^{n-1} + 2(-1)^{n-1}}{3}$.
6. Finalement, on a $A^n = \dfrac{2^{n-1} + (-1)^n}{3} A^2 + \dfrac{2^{n-1} + 2(-1)^{n-1}}{3} A$. Pour $n = 8$, on a donc $A^8 = \dfrac{2^7 + 1}{3} A^2 + \dfrac{2^7 - 2}{3} A = \dfrac{129}{3} A^2 + \dfrac{126}{3} A = 43A^2 + 42A = \begin{pmatrix} 171 & 85 & 85 \\ 85 & 43 & 43 \\ 85 & 43 & 43 \end{pmatrix}$.
7. Posons $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. On a $AM = \begin{pmatrix} a+d+g & b+e+h & c+f+i \\ a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}$ et $MA = \begin{pmatrix} a+b+c & a & a \\ d+e+f & d & d \\ g+h+i & g & g \end{pmatrix}$. Pour que les deux matrices soient égales, on doit avoir en observant les quatre coefficients en bas à droite $b = c = d = g$. Puis, en prenant le coefficient en haut à gauche, on obtient $a+d+g = a+b+c$, ce qui est toujours vrai d'après les égalités précédentes. Enfin, les quatre derniers coefficients donnent : $a = b+e+h = c+f+i = d+e+f = g+h+i$. En remplaçant c, d et g par b, on a donc $a = b+e+h = b+f+i = b+e+f = b+h+i$, soit encore $a-b = e+h = f+i = e+f = h+i$. Comme $e+h = e+f$, alors $f = h$, puis $e+h = f+i$ donne $e = i$. Toutes les égalités se réduisent alors à $a-b = e+f$, soit $a = b+e+f$. Finalement, les matrices convenant sont de la forme $M = \begin{pmatrix} b+e+f & b & b \\ b & e & f \\ b & f & e \end{pmatrix}$, avec $b, e, f \in \mathbb{R}^3$.

Devoir à la Maison n°5

ECE3 Lycée Carnot

à rendre le 2 mars 2011

Exercice 1

Étudier le plus complètement possible (limites, branches infinies, position de la courbe par rapport aux asymptotes, signe, dérivée, variations et courbe) chacune des deux fonctions suivantes :

- $f(x) = \dfrac{2x^2+3x-2}{x-2}$
- $g(x) = \dfrac{x}{e^{-\frac{1}{x^2}}}$

Exercice 2 (EDHEC 97)

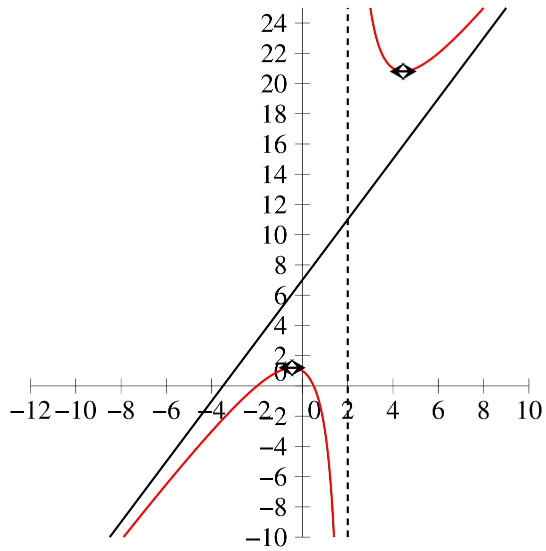
Pour tout entier naturel n non nul, on note f_n la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_n(x) = x - n\ln(x)$

1. (a) Etudier cette fonction et dresser son tableau de variations (on en profitera pour déterminer les asymptotes et autres branches infinies de f_n).
   (b) En déduire, lorsque n est supérieur ou égal à 3, l'existence de deux réels u_n et v_n solutions de l'équation $f_n(x) = 0$ et vérifiant $0 < u_n < n < v_n$.
2. Etude de la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$.
   (a) Montrer que $\forall n \geqslant 3$, $1 < u_n < e$.
   (b) Montrer que $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$, en déduire que (u_n) est décroissante.
   (c) En déduire la convergence de (u_n) et montrer, en encadrant $\ln(u_n)$, que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
   (d) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(u_n)}{u_n - 1} = 1$; en déduire que $u_n - 1 \sim \dfrac{1}{n}$.
3. Etude de la suite $(v_n)_{n\geqslant 3}$
   (a) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
   (b) Calculer $f_n(n\ln(n))$ puis montrer que $\forall n \geqslant 3$, $n\ln(n) < v_n$.
   (c) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = x - 2\ln(x)$.
   Etudier g et donner son signe. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n > 2\ln(n)$.
   (d) En déduire le signe de $f_n(2n\ln(n))$, puis établir que : $n\ln(n) < v_n < 2n\ln(n)$
   (e) Montrer enfin que : $\ln(v_n) \sim \ln(n)$

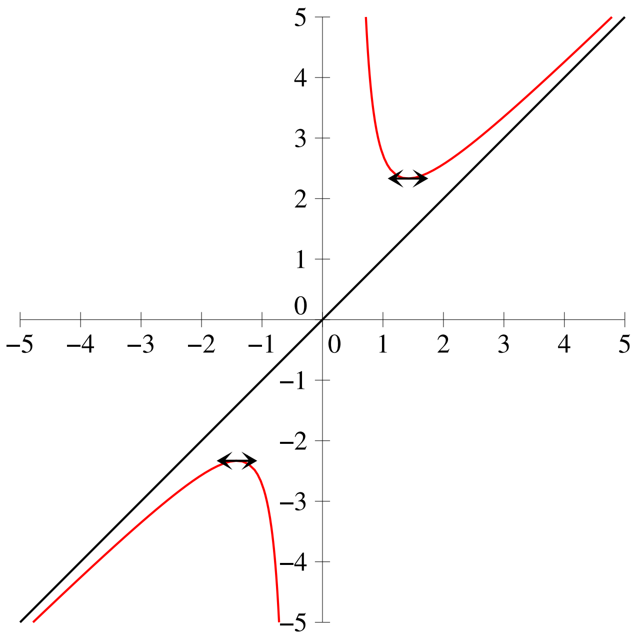
Corrigé du DM5

Exercice 1

- Commençons comme toujours par le domaine de définition : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$.
  Quand x tend vers 2, le numérateur tend vers 12, donc $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$.
  Pour les branches infinies, $f(x) \underset{\pm\infty}{\sim} 2x$, donc les limites sont bien infinies. De plus, $\dfrac{f(x)}{x} \underset{\pm\infty}{\sim} 2$.
  Reste à calculer $f(x) - 2x = \dfrac{2x^2+3x-2-2x(x-2)}{x-2} = \dfrac{7x-2}{x-2}$, donc $f(x) - 2x \underset{\pm\infty}{\sim} 7$. La droite d'équation $y = 2x+7$ est donc asymptote oblique à la courbe en $+\infty$ et en $-\infty$. La position relative de la courbe par rapport à l'asymptote oblique est obtenue en étudiant le signe de $f(x)-2x-7 = \dfrac{7x-2}{x-2} - 7 = \dfrac{12}{x-2}$. La courbe est donc en-dessus de l'asymptote sur $]-\infty; 2[$, et au-dessous sur $[2; +\infty[$.
  Le signe de f est obtenu en étudiant celui du numérateur, trinome dont le discriminant vaut $\Delta = 9+16 = 25$, et admet pour racines $x_1 = \dfrac{-3-5}{4} = -2$ et $x_2 = \dfrac{-3+5}{4} = \dfrac{1}{2}$. La courbe coupe donc l'axe des abscisses aux points d'abscisses -2 et $\dfrac{1}{2}$. Elle est en-dessous de l'axe sur $]-\infty; -2]$ (ne pas oublier de tenir compte du $x-2$ au dénominateur pour le signe, un petit tableau de signe peut être prudent) et sur $\left[\dfrac{1}{2}; 2\right[$, et au-dessus sur $\left[-2; \dfrac{1}{2}\right]$ et sur $]2; +\infty[$.
  Passons aux variations, on a $f'(x) = \dfrac{(4x+3)(x-2)-(2x^2+3x-2)}{(x-2)^2} = \dfrac{2x^2-8x-4}{(x-2)^2}$. Cette dérivée est du signe de x^2-4x-2 (en factorisant le numérateur par 2), trinôme de discriminant $\Delta = 16+8 = 24$, admettant pour racines $x_3 = \dfrac{4-\sqrt{24}}{2} = 2-\sqrt{6}$, et $x_4 = \dfrac{4+\sqrt{24}}{2} = 2+\sqrt{6}$.
  Pour situer tout cela par rapport aux autres valeurs déjà calculées, x_4 est manifestement supérieure à 2, et x_3 se situe entre x_1 et x_2 (puisque $\sqrt{6}$ est comprise entre 2 et 3). La fonction f est croissante sur $]-\infty; x_3]$ et sur $[x_4; +\infty[$, et décroissante sur $[x_3; 2[$ et $]2; x_4]$.
  Elle admet un maximum local en x_3, de valeur $f(2-\sqrt{6}) = \dfrac{2(2-\sqrt{6})^2+3(2-\sqrt{6})-2}{2-\sqrt{6}-2} = \dfrac{8-8\sqrt{6}+12+6-3\sqrt{6}-2}{-\sqrt{6}} = \dfrac{11\sqrt{6}-24}{\sqrt{6}} = 11-4\sqrt{6}$. Il y a également un minimum local en x_4 de valeur $f(2+\sqrt{6}) = \dfrac{2(2+\sqrt{6})^2+3(2+\sqrt{6})-2}{2+\sqrt{6}-2} = \dfrac{8+8\sqrt{6}+12+6+3\sqrt{6}-2}{\sqrt{6}} = \dfrac{11\sqrt{6}+24}{\sqrt{6}} = 11+4\sqrt{6}$ Tout cela nous donne une courbe ressemblant à ceci :



- La fonction g est définie sur $\mathbb{R}^*$ (le dénominateur ne peut pas s'annuler, mais encore faut-il que ce qui est dans l'exponentielle soit défini). Constatons au passage que $g(x) = xe^{\frac{1}{x^2}}$, ce qui est plus facile à manier pour la suite.
  Quand x tend vers 0, $\dfrac{1}{x^2}$ tend toujours vers $+\infty$, donc l'exponentielle tend vers $+\infty$. On a une belle forme indéterminée, qui se résoud à coups de croissance comparée. Pour faire les choses rigoureusement, on pose $X = \dfrac{1}{x^2}$ et on a alors $g(x) = \dfrac{e^X}{\sqrt{X}}$, et l'exponentielle l'emporte. On a donc $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = -\infty$ (à cause du signe de x).
  En $+\infty$ comme en $-\infty$, $e^{\frac{1}{x^2}}$ tend vers 1, donc les limites de f sont infinies, mais $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x^2}} = 1$. Calculons donc $f(x) - x = x(e^{\frac{1}{x^2}} - 1)$. Comme $\dfrac{1}{x^2}$ tend vers 0 quand x tend vers un infini, on peut utiliser l'équivalent classique $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$ pour obtenir $f(x) - x \underset{x\to\pm\infty}{\sim} x \times \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{x}$. Cet équivalent ayant pour limite 0, la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe en $+\infty$ et en $-\infty$. La position relative est donnée par le signe de $x(e^{\frac{1}{x^2}} - 1)$. Comme $\dfrac{1}{x^2} > 0$, la parenthèse est positive, donc $f(x) - x$ est du signe de x. Autrement dit, la courbe est en-dessous de l'asymptote sur $]-\infty; 0[$ et au-dessus sur $]0; +\infty[$.
  Le signe ne pose ici aucun problème puisque g est du signe de x, autrement dit négative sur $]-\infty; 0[$ et positive sur $]0; +\infty[$.
  Pour les variations, $g'(x) = e^{\frac{1}{x^2}} - x \times \dfrac{2}{x^3} e^{\frac{1}{x^2}} = \dfrac{x^2 - 2}{x^2} e^{\frac{1}{x^2}}$. La fonction g est donc croissante sur $]-\infty; -\sqrt{2}]$ et sur $[\sqrt{2}; +\infty[$, et décroissante sur $[-\sqrt{2}; 0[$ et sur $[0; \sqrt{2}[$. Elle admet un maximum local en $-\sqrt{2}$, de valeur $g(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}e^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{2e}$; et un minimum local en $\sqrt{2}$ de valeur $g(\sqrt{2}) = \sqrt{2e}$. Autre chose à signaler ? Oui, bien sûr, la fonction g est clairement impaire, ce qui aurait pu nous éviter la moitié des calculs. Pour terminer, la courbe :



Exercice 2

1. (a) La fonction f_n est dérivable sur son domaine de définition, et $f_n'(x) = 1 - \dfrac{n}{x} = \dfrac{x-n}{x}$. Cette dérivée est du signe de $x - n$ et s'annule donc pour $x = n$. La fonction f admet un minimum global en n, de valeur $f_n(n) = n - n\ln n = n(1 - \ln n)$. De plus, on a $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) = +\infty$ (pas de forme indéterminée), et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ par croissance comparée. Enfin, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_n(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{n\ln x}{x} = 0$ (toujours de la croissance comparée), et enfin $f_n(x) - x = -n\ln x$ tend vers $-\infty$, donc il y a en $+\infty$ une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = x$. Voici le tableau de variations de f_n :

x	0		n		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	$n(1-\ln n)$	$\nearrow$	$+\infty$

   (b) Si $n \geqslant 3$, $1 - \ln n < 0$, donc la fonction f_n s'annule une fois sur $]0; n[$, et une autre fois sur $]n; +\infty[$, d'où le résultat demandé.

2. (a) Calculons donc $f_n(1) = 1 - n\ln 1 = 1 > 0$, et $f_n(e) = e - n\ln e = e - n$. Si $n \geqslant 3$, $e - n < 0$, donc (en utilisant les théorème des valeurs intermédiaires par exemple, ou plus simplement en observant le tableau de variations de f_n), f_n s'annule entre 1 et e, d'où $1 < u_n < e$.

   (b) Calculons à nouveau : $f_n(u_{n+1}) = u_{n+1} - n\ln(u_{n+1})$. Or, par définition de u_{n+1}, on a $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$, c'est-à-dire que $u_{n+1} - (n+1)\ln u_{n+1} = 0$, ou encore $u_{n+1} = (n+1)\ln(u_{n+1})$. On en déduit que $f_n(u_{n+1}) = (n+1)\ln(u_{n+1}) - n\ln(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$. Comme on vient de le voir, $u_{n+1} > 1$, donc $\ln(u_{n+1}) > 0$. Toujours en utilisant la décroissance de f_n sur $]0; n]$, on en déduit que $u_{n+1} < u_n$, c'est-à-dire que la suite (u_n) est decroissante.

   (c) La suite est décroissante et minorée par 1, donc converge. On a vu plus haut que $u_n = n\ln(u_n)$, ce qu'on peut aussi écrire $\ln(u_n) = \dfrac{u_n}{n}$, donc $\dfrac{1}{n} \leqslant \ln u_n \leqslant \dfrac{e}{n}$. D'après le théorème des gendarmes, $(\ln(u_n))$ converge donc vers 0, ce qui implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

   (d) Maintenant qu'on sait que u_n converge vers 1, on peut aussi dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - 1 = 0$, ce dont on peut déduire (résultats classique de cours) que $\ln(1 + u_n - 1) \sim u_n - 1$, c'est-à-dire que $\ln u_n \sim u_n - 1$.Cela revient bien à $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\ln u_n}{u_n - 1} = 1$. Or, on sait que $\ln(u_n) = \dfrac{u_n}{n} \sim \dfrac{1}{n}$ puisque $u_n \sim 1$. On a donc $u_n - 1 \sim \ln u_n \sim \dfrac{1}{n}$. Une autre façon d'écrire les choses est de dire que $u_n = 1 + \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

3. (a) Puisque $v_n > n$, une simple application du théorème de comparaison permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

   (b) Calculons donc : $f_n(n \ln n) = n \ln n - n \ln(n \ln n) = n \ln n - n \ln n - n \ln(\ln n) = -n \ln(\ln n)$. Si $n \geqslant 3$, $\ln n \geqslant \ln 3 > 1$, donc $\ln(\ln n) > 0$, et $f_n(n \ln n) < 0$. En utilisant la croissance de f sur $[n; +\infty[$, on en déduit que $v_n < n \ln n$.

   (c) L'étude a déjà été faite puisque g n'est autre que f_2. La fonction g est donc décroissante sur $]0; 2]$ et croissante sur $[2; +\infty[$, atteignant un minimum qui vaut $g(2) = 2(1 - \ln 2) > 0$. La fonction est donc toujours strictement positive. On peut en particulier en déduire que $\forall n \geqslant 1$, $g(n) > 0$, donc $n > 2 \ln n$.

   (d) Encore un petit calcul : $f_n(2n \ln n) = 2n \ln n - n \ln(2n \ln n) = 2n \ln n - n \ln n - n \ln(2 \ln n) = n \ln n - n \ln(2 \ln n) = n(\ln n - \ln(2 \ln n))$. Or, d'après la question précédente, $n > 2 \ln n$, donc $\ln n > \ln(2 \ln n)$, et $f_n(2n \ln n) > 0$. En utilisant une dernière fois la croissance de f_n, on en déduit que $v_n < 2n \ln n$, d'où l'encadrement.

   (e) Passons donc à la moulinette logarithmique l'encadrement précédent : $\ln(n \ln n) < \ln(v_n) \leqslant \ln(2n \ln n)$, soit $\ln n + \ln(\ln n) \leqslant \ln v_n \leqslant \ln 2 + \ln n + \ln \ln n$. Le mieux pour obtenir l'équivalent est de tout diviser par $\ln n$: $1 + \dfrac{\ln \ln n}{\ln n} \leqslant \dfrac{\ln v_n}{\ln n} \leqslant \dfrac{\ln 2}{\ln n} + 1 + \dfrac{\ln \ln n}{\ln n}$. Il ne reste plus qu'à constater que des deux côtés de l'encadrement on a des termes qui convergent vers 1 (c'est de la croissance comparée pour $\dfrac{\ln \ln n}{\ln n}$), donc $\dfrac{\ln v_n}{\ln n}$ tend aussi vers 1, ce qui signifie bien que $v_n \sim \ln n$.

Devoir à la Maison n°6

ECE3 Lycée Carnot

à rendre le 27 avril 2011

Problème 1 (bac C 1993)

Partie A.

1. Étudier sur l'intervalle $]0;+\infty[$ le sens de variation de la fonction h_1 définie par $h_1(x) = x - ln(x)$.
   Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$ on a $h_1(x) > 0$.
   On définit alors sur l'intervalle $]0;+\infty[$ la fonction f_1 par $f_1(x) = \dfrac{x}{x - \ln(x)}$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f_1.
   Déterminer les limites de f_1 aux bornes de l'intervalle $]0;+\infty[$.
   Dresser le tableau de variations de f_1.
3. On considère la fonction φ_1 définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $\begin{cases} \varphi_1(0) = 0 \\ \varphi_1(x) = f_1(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$
   Montrer que φ_1 est un prolongement par continuité de f_1 et étudier la dérivabilité de φ_1 en 0.

Partie B

.

Dans cette partie, n désigne un entier naturel supérieur où égal à 2.

1. Étudier sur l'intervalle $]0;+\infty[$ le sens de variation de la fonction h_n définie par $h_n(x) = x^n - ln(x)$.
   En déduire que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$ on a : $h_n(x) > 0$.
   On définit alors sur l'intervalle $]0;+\infty[$ la fonction f_n par $f_n(x) = \dfrac{x}{x^n - \ln(x)}$.
2. On définit sur l'intervalle $]0;+\infty[$ la fonction g_n par $g_n(x) = 1 + (1-n)x^n - ln(x)$.
   Montrer que g_n est strictement décroissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
   En déduire l'existence d'un réel unique a_n tel que : $g_n(a_n) = 0$.
   Comparer a_n et 1. Quelle est la valeur de a_2 ?
3. (a) Démontrer que pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$, on a $f_n'(x) = \dfrac{g_n(x)}{(x^n - \ln(x))^2}$.
   En déduire le sens de variation de f_n.
   (b) Préciser les limites de f_n aux bornes de $]0;+\infty[$ et dresser le tableau des variations de f_n.

4. (a) En vous aidant la la question 3 de la partie A., montrer que f_n admet un prolongement par continuité φ_n dérivable sur $[0; +\infty[$.

   (b) Tracer la représentation graphique $\mathcal{C}_2$ de φ_2 dans un repère orthonormé (unité 4 cm).

Partie C.

Calcul approché de l'intégrale $\displaystyle\int_1^3 f_1(x)dx$ par la méthode des rectangles.

1. En utilisant la question $A.1$, déterminer lorsque x appartient à l'intervalle $[1; 3]$, un encadrement de $x - ln(x)$. En déduire que pour tout x de l'intervalle $[1; 3]$, on a $|f_1'(x)| \leqslant 1|$.

2. On considère deux nombres réels α et β tels que $1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 3$ et on pose $A = \displaystyle\int_\alpha^\beta f_1(x)dx$ et $J = \displaystyle\int_\alpha^\beta f_1(\alpha)dx$.

   (a) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[\alpha; \beta]$, on a $\alpha - x \leqslant f_1(x) - f_1(\alpha) \leqslant x - \alpha$.

   (b) En déduire que $\displaystyle\int_\alpha^\beta (\alpha - x)dx \leqslant A - J \leqslant \int_\alpha^\beta (x - \alpha)dx$.

   (c) Montrer que $|A - J| \leqslant \dfrac{1}{2}(\beta - \alpha)^2$.

3. On partage l'intervalle $[1; 3]$ en n intervalles de même longueur en utilisant les réels $x_0, x_1, \ldots, x_n$ tels que $1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 3$. On a donc $x_{k+1} - x_k = \dfrac{2}{n}$ pour k appartenant à $\{0; 1; \ldots; n-1\}$. On pose $A_k = \displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f_1(x)dx$ et $J_k = \displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f_1(x_k)dx$.

   Démontrer que $\left|\displaystyle\int_1^3 f_1(x)dx - (J_0 + J_1 + \cdots + J_{n-1})\right| \leqslant \dfrac{2}{n}$.

   En déduire une valeur approchée de $\displaystyle\int_1^3 f_1(x)dx$ à 10^{-1} près. On légitimera le choix de n.

Problème 2 (adapté de HEC 2008)

Dans tout le problème, N désigne un entier naturel fixé supérieur ou égal à 2, et p un réel fixé de l'intervalle $]0, 1[$. On pose : $q = 1 - p$. Soit n un entier naturel quelconque. Dans une population de N individus, on s'intéresse à la propagation d'un certain virus. Chaque jour, on distingue dans cette population deux catégories d'individus : en premier lieu, les individus sains, c'est-à-dire ceux qui ne sont pas porteurs du virus, et les individus contaminés par le virus et qui sont contagieux. Ces catégories évoluent jour après jour selon le modèle suivant :

- chaque jour n, chaque individu sain peut être contaminé par n'importe lequel des individus contagieux ce jour avec la même probabilité p, ces contaminations éventuelles étant indépendantes les unes des autres.
- un individu contaminé le jour n devient contagieux le jour $n + 1$.
- chaque individu contagieux le jour n redevient sain le jour $n + 1$.

On note alors X_n le nombre aléatoire d'individus contagieux le jour n. On remarquera que si, pour un certain entier naturel i, on a $X_i = 0$, alors on a aussi $X_{i+1} = 0$.

Partie I. Un cas particulier

Dans cette partie uniquement, on suppose que l'on a : $N = 3$ et $p = \dfrac{1}{3}$. On considère les matrices

$$S = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 4 & 9 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -6 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la matrice R est inversible et calculer son inverse R^{-1}.
2. (a) Calculer le produit matriciel $R^{-1}SR$.
   (b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$ l'expression de la matrice S_n.
3. Soit n un entier fixé de $\mathbb{N}$.
   (a) Déterminer, pour tout entier k, la probabilité conditionnelle de $P_{X_n=0}(X_{n+1} = k)$.
   (b) Déterminer, pour tout entier k, la probabilité conditionnelle de $P_{X_n=3}(X_{n+1} = k)$.
   (c) Vérifier qu'en supposant l'évènement $X_n = 1$ réalisé (respectivement $X_n = 2$ réalisé), la loi de X_{n+1} est la loi binomiale de paramètres $\left(2, \dfrac{1}{3}\right)$ (resp. $\left(1, \dfrac{5}{9}\right)$).
   (d) On note $E_{X_n=i}(X_{n+1})$ l'espérance de la loi obtenue pour la variable X_{n+1} en supposant vérifié l'évènement $X_n = i$. Déterminer les valeurs respectives de $E_{X_n=1}(X_{n+1})$ et $E_{X_n=2}(X_{n+1})$.
4. On suppose, uniquement dans cette question, que X_0 suit la loi binomiale de paramètre $\left(3, \dfrac{1}{3}\right)$.
   (a) Déterminer la loi de X_1 et calculer $E(X_1)$.
   (b) Vérifier la formule suivante : $E(X_1) = \displaystyle\sum_{i=0}^{i=3} E_{X_0=i}(X_1) \times P(X_0 = i)$.
5. Pour tout entier naturel n, on définit la matrice $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \\ t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer une relation entre u_n, v_n, w_n et t_n.
   (b) À l'aide de la formule des probabilités totales, déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que : $U_{n+1} = MU_n$.
   (c) Exprimer M en fonction de S. En déduire les puissances de M.
   (d) Donner l'expression des réels u_n et v_n en fonction de n, v_0 et w_0.
6. On pose : $F = \displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} (X_n = 0)$.
   (a) Que représente l'évènement F ?
   (b) Montrer que le virus finit par disparaître avec probabilité 1, quelle que soit la loi de la variable aléatoire initiale X_0.

Corrigé du DM6

Problème 1 (Bac C 1993)

Partie A.

1. La fonction h_1 est définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;+\infty[$, de dérivée $h_1'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$. Cette dérivée s'annule pour $x = 1$, la fonction h_1 est donc décroissante sur $]0;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$. Elle admet pour minimum global $h_1(1) = 1$, donc est bien strictement positive sur $]0;+\infty[$.
2. Au vu de la question précédente, le dénominateur de f_1 ne s'annule jamais sur $]0;+\infty[$, et f_1 est donc définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur cet intervalle (quotient de fonction usuelles). Elle admet pour dérivée $f_1'(x) = \dfrac{x - \ln x - x(1-\frac{1}{x})}{(x-\ln x)^2} = \dfrac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}$. Cette dérivée est du signe de $1 - \ln x$, qui s'annule pour $x = e$. La fonction f_1 est croissante sur $]0;e]$ et décroissante sur $[e;+\infty[$. Elle admet un maximum global pour $x = e$, de valeur $f_1(e) = \dfrac{e}{e-1}$.

   En $+\infty$, on a $f_1(x) \sim \dfrac{x}{x}$ (croissance comparée), donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = 1$ (asymptote horizontale). En 0, pas de problème, il n'y a pas de forme indéterminée, et $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x) = 0$. D'où le tableau suivant :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\dfrac{e}{e-1}$	$\searrow$	1

3. Le fait qu'il s'agisse d'un prolongement par continuité découle directement du calcul de la limite en 0. Pour la dérivée, cherchons à applpiquer le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$: la fonction est donc continue sur $[0;+\infty[$, $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$, reste la limite de f_1' en 0 : $f_1'(x) = \dfrac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2} \underset{0}{\sim} \dfrac{-\ln x}{(-\ln x)^2} \sim -\dfrac{1}{\ln x}$. Cette dérivée a pour limite 0 en 0, la fonction φ_1 est donc $\mathcal{C}^1$ sur $[0;+\infty[$, et $\varphi_1'(0) = 0$ (tangente horizontale).

Partie B.

1. Comme dans la première partie, la fonction est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;+\infty[$, de dérivée $h_n'(x) = nx^{n-1} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{nx^n - 1}{x}$. Cette dérivée s'annule lorsque $x^n = \dfrac{1}{n}$, c'est-à-dire $x = \dfrac{1}{n^{\frac{1}{n}}}$. Cette valeur appartenant à $]0;1[$, son image par h_n est positive : au dénominateur, on a $1 - \ln\left(\dfrac{1}{n^{\frac{1}{n}}}\right) > 0$. On en déduit la stricte positivité de h_n.
2. La fonction g_n est définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;+\infty[$, et $g_n'(x) = n(1-n)x^{n-1} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{n(1-n)x^n - 1}{x}$. Puisque $n \geqslant 2$, le numérateur de cette dérivée est toujours négatif, et la fonction g_n est donc strictement croissante. Comme g_n a pour limite $+\infty$ en 0 (pas de forme indéterminée ici), et $-\infty$ en $+\infty$ (pas de forme indéterminée non plus !), g_n est donc bijective de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$, et s'annule une fois.

   Pour comparer a_n et 1, il suffit de calculer $g_n(1) = 2 - n \leqslant 0$. On a donc $a_n \leqslant 1$. Pour $n = 2$, on constate que g_2 s'annule en 1, donc $a_2 = 1$.
3. (a) Calculons donc (la fonction est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ puisque son dénominateur ne s'y annule pas) : $f_n'(x) = \dfrac{x^n - \ln x - x(nx^{n-1} - \frac{1}{x})}{(x^n - \ln x)^2} = \dfrac{x^n - \ln x - nx^n + 1}{(x^n - \ln x)^2} =$

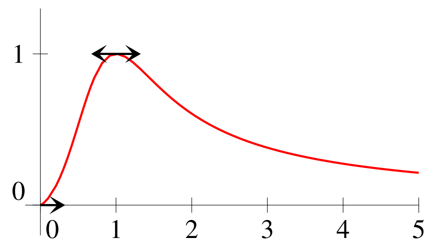
$\dfrac{g_n(x)}{(x^n - \ln x)^2}$. La fonction f_n est donc strictement croissante sur $]0; a_n]$, et décroissante sur $[a_n; +\infty[$.

(b) En 0, la limite vaut toujours 0 sans problème. En $+\infty$, on a désormais une fonction équivalent à $\dfrac{x}{x^n}$, qui tend donc vers 0. D'où un tableau ressemblant à ceci :

x	0		a_n		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$f_n(a_n)$	$\searrow$	0

4. (a) On fait exactement la même chose que dans la première partie : puisque la fonction tend vers 0 en 0, on prolonge par continuité en posant $\varphi_n(0) = 0$. Il ne reste qu'à calculer la limite de la dérivée pour appliquer le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$: tout comme pour f_1', $f_n'(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{-\ln x}{(-\ln x)^2}$, donc la dérivée a pour limite 0, et φ_n est donc dérivable en 0, avec une tangente horizontale à l'origine.

(b) Pour φ_2, on peut calculer la valeur du maximum puisqu'on sait que $a_2 = 1$: $f_2(1) = 1$. On obtient une courbe ressemblant à ceci :



Partie C.

1. Puisque h_1 est croissante sur $[1; 3]$, on a $\forall x \in [1; 3]$, $x - \ln x \in [1; 3 - \ln 3]$, donc $\dfrac{1}{3 - \ln 3} \leqslant \dfrac{1}{(x - \ln x)^2} \leqslant 1$. Sur ce même intervalle, on a $1 - \ln 3 \leqslant 1 - \ln x \leqslant 1$. Il faut faire très attention, avant de multiplier les encadrements, au fait que dans le dernier, on a $1 - \ln 3 \leqslant 0$. Sur l'intervalle $[1; e]$, où tout est positif, on a donc $0 \leqslant f_1'(x) \leqslant 1$, mais sur $[e, 1]$, on obtient $\dfrac{1 - \ln 3}{1} \leqslant f'(x) \leqslant 0$. Peu importe, puisque ce minorant négatif est plus grand que -1, ce qui permet tout de même de conclure que $|f_1'(x)| \leqslant 1$.

2. (a) Il suffit d'utiliser l'inégalité démontrée juste au-dessus, sous la forme $-1 \leqslant f_1'(x) \leqslant 1$, pour prouver que, $\forall (\alpha, x) \in [1; 3]^2$ tels que $\alpha \leqslant x$ (tout cela fait bien partie des hypothèses de l'énoncé), $-1(x - \alpha) \leqslant f_1(x) - f_1(\alpha) \leqslant 1(x - \alpha)$. Ceci est bien l'encadrement demandé.

(b) Il ne reste plus qu'à intégrer l'inégalité précédente : $\displaystyle\int_\alpha^\beta (\alpha - x)dx \leqslant A - J \leqslant \int_\alpha^\beta (x - \alpha)dx$. Ensuite, on sépare simplement l'intégrale du milieu en deux via la linéarité de l'intégrale.

(c) Calculons l'intégrale de droite $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x - \alpha)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \alpha x\right]_\alpha^\beta = \frac{\beta^2}{2} - \frac{\alpha^2}{2} - \alpha\beta + \alpha^2 = \frac{\beta^2 + \alpha^2 - 2\alpha\beta}{2} = \frac{(\beta - \alpha)^2}{2}$. L'intégrale de gauche étant simplement l'opposé de celle-ci, on obtient bien $|A - J| \leqslant \dfrac{(\beta - \alpha)^2}{2}$.

3. En utilisant les résultats des questions précédentes, on aura $\forall k \in \{0; 1; \dots; n-1\}$, $|A_k - J_k| \leqslant \dfrac{(x_{k+1} - x_k)^2}{2} = \dfrac{2}{n^2}$. Or, on a $A = A_0 + A_1 + \cdots + A_{n-1}$. On peut donc écrire $|A - (J_0 + J_1 +$

$\cdots + J_{n-1})| = |(A_0 - J_0) + (A_1 - J_1) + \cdots + (A_{n-1} - J_{n-1})| \leqslant |A_0 - J_0| + \cdots + |A_{n-1} - J_{n-1}| \leqslant n \times \dfrac{2}{n^2} = \dfrac{2}{n}$ (on a utilisé l'inégalité triangulaire au milieu de calcul).
Au vu de cette inégalité, on sait que $J_0 + J_1 + \cdots + J_{n-1}$ sera une valeur approchée à 0.1 près de A dès que $\dfrac{2}{n} \leqslant 0.1$, c'est-à-dire pour $n \geqslant 20$. Prenons donc $n = 20$, on a alors $x_0 = 1$; $x_1 = 1.1$, $x_2 = 1.2$, …, $x_{19} = 2.9$, et $A \simeq J_0 + J_1 + \cdots + J_{19} = \displaystyle\int_1^{1.1} f_1(1)dx + \cdots + \int_{2.9}^{3} f_1(2.9)dx = 0.1(f_1(1) + f_1(1.1) + \cdots + f_1(2.9))$. Si on a une calculatrice sous la main, on peut calculer $A \simeq 2.9$.

Problème 2 (HEC 2008)

1. Appliquons donc dans la joie et la bonne humeur le pivot de Gauss à notre matrice R :

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -6 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_4 \leftarrow L_4 + L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow 6L_1 - 5L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 - L_4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1/6 \\ L_3 \leftarrow L_3/6 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice R est bien inversible, d'inverse $R^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. (a) C'est un calcul peu passionnant : $R^{-1}S = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ 9 & 9 & 9 & 9 \end{pmatrix}$, puis $R^{-1}SR = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

   (b) Notons D la matrice diagonale calculée à la question précédente, et prouvons par récurrence que $S^n = RD^nR^{-1}$: c'est vrai pour $n = 1$, car $S = R(R^{-1}SR)R^{-1} = RDR^{-1}$; en supposant la formule exacte au rang n, on a ensuite $S^{n+1} = S \times S^n = (RDR^{-1})(RD^nR^{-1}) = RD^{n+1}R^{-1}$. On en déduit donc que $S^n = R \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9^n \end{pmatrix} R^{-1}$, soit

$$S^n = \begin{pmatrix} 9^n & 9^n - 5^n & 9^n - 5^n & 9^n \\ 0 & \frac{(-1)^n + 5^{n+1}}{6} & \frac{5^{n+1} - 5(-1)^n}{6} & 0 \\ 0 & \frac{5^n - (-1)^n}{6} & \frac{5^n + 5(-1)^n}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. (a) Si personne n'est contagieux au jour n (c'est ce que signifie $X_n = 0$), personne ne le sera au jour $n+1$ (puisque personne n'aura pu être contaminé), soit $P_{X_n=0}(X_{n+1} = 0) = 1$, et $P_{X_n=0}(X_{n+1} = 1) = P_{X_n=0}(X_{n+1} = 2) = P_{X_n=0}(X_{n+1} = 3) = 0$.

   (b) Si tout les individus sont contagieux au jour n (hypothèse $X_n = 3$), d'après l'énoncé, ils seront tous sains le jour $n+1$ donc $P_{X_n=3}(X_{n+1} = 0) = 1$ et $P_{X_n=3}(X_{n+1} = 1) = P_{X_n=3}(X_{n+1} = 2) = P_{X_n=3}(X_{n+1} = 3) = 0$.

   (c) Si on suppose $X_n = 1$ réalisé, il y a donc un individu contagieux au jour n et deux individus sains. Chacun de ces deux individus a donc une probabilité $p = \frac{1}{3}$ de devenir contagieux (indépendemment l'un de l'autre), le nombre de personnes contaminées suivra donc bien une loi binômiale de paramètre $\left(2; \frac{1}{3}\right)$.

   Si $X_n = 2$, il y a cette fois-ci un seul individu sain (et donc suscptible d'être contaminé), donc X_{n+1} suivra une loi de Bernouilli. Reste à déterminer son paramètre, c'est-à-dire la probabilité que l'individu sain soit contaminé, sachant qu'il a deux possibilités de se faire contaminer puisqu'il y a deux malades. Autrement dit, la probabilité qu'il ne soit **pas** contaminé vaut $\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$. La loi de X_{n+1} sera donc bien binômiale de paramètre $\left(1; \frac{5}{9}\right)$.

   (d) D'après la question précédente, il s'agit simplement de calculer des espérances de lois binômiales, donc $E_{X_n=1}(X_{n+1}) = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ et $E_{X_n=2}(X_{n+1}) = \frac{5}{9}$.

4. (a) On a donc la loi suivante pour X_0 : $P(X_0 = 0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$; $P(X_0 = 1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{12}{27} = \frac{4}{9}$; $P(X_0 = 2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{2}{9}$ et $P(X_0 = 3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{27}$. Les quatre évènements dont on vient de calculer les probabilités forment un système complet d'évènements, on peut appliquer (quatre fois) la formule des probabilités totales pour déterminer la loi de X_1.

   Commençons par préciser les probabilités conditionnelles manquantes : au vu de la question c, $P_{X_n=2}(X_{n+1} = 0) = \frac{4}{9}$; $P_{X_n=2}(X_{n+1} = 1) = \frac{5}{9}$ et $P_{X_n=2}(X_{n+1} = 2) = P_{X_n=2}(X_{n+1} = 3) = 0$; et $P_{X_n=1}(X_{n+1} = 0) = \binom{2}{0} \times \left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$; $P_{X_n=1}(X_{n+1} = 1) = \binom{2}{1} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ et $P_{X_n=1}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{9}$.

   On a donc $P(X_1 = 0) = P(X_0 = 0) \times P_{X_0=0}(X_1 = 0) + P(X_0 = 1) \times P_{X_0=1}(X_1 = 0) + P(X_0 = 2) \times P_{X_0=2}(X_1 = 0) + P(X_0 = 3) \times P_{X_0=3}(X_1 = 0) = \frac{8}{27} \times 1 + \frac{4}{9} \times \frac{4}{9} + \frac{2}{9} \times \frac{4}{9} + \frac{1}{27} \times 1 = \frac{51}{81}$. De même, $P(X_1 = 1) = \frac{8}{27} \times 0 + \frac{4}{9} \times \frac{4}{9} + \frac{2}{9} \times \frac{5}{9} + \frac{1}{27} \times 0 = \frac{26}{81}$;

$P(X_1 = 2) = \dfrac{8}{27} \times 0 + \dfrac{4}{9} \times \dfrac{1}{9} + \dfrac{2}{9} \times 0 + \dfrac{1}{27} \times 0 = \dfrac{4}{81}$, et $P(X_1 = 3) = 0$ (toutes les probabilités conditionnelles sont nulles). Résumons tout cela dans un tableau :

k	0	1	2	3
$P(X_1 = k)$	$\frac{51}{81}$	$\frac{26}{81}$	$\frac{4}{81}$	0

D'où une espérance $E(X_1) = \dfrac{26 + 2 \times 4}{81} = \dfrac{34}{81}$.

(b) Calculons la somme en question en reprenant les résultats de la question 3.d) : $\displaystyle\sum_{i=0}^{i=3} E_{X_0=i}(X_1) \times P(X_0 = i) = 0 \times \frac{8}{27} + \frac{2}{3} \times \frac{4}{9} + \frac{5}{9} \times \frac{2}{9} + 0 \times \frac{1}{27} = \frac{34}{81}$, l'égalité est vérifiée.

5. (a) Les quatre évènements formant un système complet, on aura $u_n + v_n + w_n + t_n = 1$.

(b) D'après la formule des probabilités totales,

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} P_{X_n=0}(X_{n+1}=0) & P_{X_n=1}(X_{n+1}=0) & P_{X_n=2}(X_{n+1}=0) & P_{X_n=3}(X_{n+1}=0) \\ P_{X_n=0}(X_{n+1}=1) & P_{X_n=1}(X_{n+1}=1) & P_{X_n=2}(X_{n+1}=1) & P_{X_n=3}(X_{n+1}=1) \\ P_{X_n=0}(X_{n+1}=2) & P_{X_n=1}(X_{n+1}=2) & P_{X_n=2}(X_{n+1}=2) & P_{X_n=3}(X_{n+1}=2) \\ P_{X_n=0}(X_{n+1}=3) & P_{X_n=1}(X_{n+1}=3) & P_{X_n=2}(X_{n+1}=3) & P_{X_n=3}(X_{n+1}=3) \end{pmatrix} U_n,$$

c'est-à-dire que $M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & 1 \\ 0 & \frac{4}{9} & \frac{5}{9} & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) On constate simplement que $M = \dfrac{1}{9}S$, donc $M^n = \dfrac{1}{9^n}S^n$.

(d) Une petit récurrence permet de prouver que $U_n = M^n U_0$ (en effet, c'est trivialement vrai pour $n = 0$, et si on le suppose au rang n, alors $U_{n+1} = MU_n = M(M^n U_0) = M^{n+1}U_0$), donc en effectuant le produit matriciel sur les deux premières lignes, $u_n = \dfrac{1}{9^n}(9^n u_0 + (9^n - 5^n)v_0 + (9^n - 5^n)w_0 + 9^n t_0) = u_0 + v_0 + w_0 + t_0 - \left(\dfrac{5}{9}\right)^n (v_0 + w_0) = 1 - \left(\dfrac{5}{9}\right)^n (v_0 + w_0)$; et $v_n = \dfrac{1}{9^n}\left(\dfrac{(-1)^n + 5^{n+1}}{6}v_0 + \dfrac{5^{n+1} - 5(-1)^n}{6}w_0\right) = \dfrac{5^{n+1}(v_0 + w_0) + (-1)^n(v_0 - 5w_0)}{6 \times 9^n}$.

6. (a) Les évènements $(X_n = 0)$ forment une suite croissante d'évènements (puisque $X_n = 0 \Rightarrow X_{n+1} = 0$, dont l'union représente toutes les situations où l'épidémie finira par être éradiquée (puisque, si $X_n = 0$, plus personne ne retombera malade).

(b) On n'a pas encore vu en cours le théorème de la limite monotone, qui dit que pour une suite croissante d'évènements, la probabilité de l'union est égale à la limite des probabilités, mais c'est assez intuitif : puisque $X_n = 0$ recouvre de plus en plus de cas et que l'union de tous ces cas représente l'éradiction de la maladie, la probabilité u_n va se rapprocher quand n tend vers $+\infty$ de celle que la maladie soit éradiquée. Autre façon de voir les choses : u_n représente la probabilité que la maladie soit éradiquée en moins de n jours. En prenant la limite, on obtient la probabilité que la maladie soit éradiquée, sans préciser le temps à attendre. Au vu de la formule obtenue et du fait que $\dfrac{5}{9} \in]-1;1[$, cette limite vaut 1 quelles que soient les valeurs de v_0 et w_0 (et a fortiori de u_0 et t_0 qui n'interviennent pas dans l'expression de u_n), ce qui signifie bien que le virus disparait presque sûrement, indépendamment de la loi de X_0.

Interrogation Écrite n°1

ECE3 Lycée Carnot

22 septembre 2010

Tous les calculs doivent apparaitre sur la feuille.

1. Quelle est la contraposée de la phrase « Je suis un élève d'ECE3, donc j'ai M.Lafon comme prof de maths » ?

2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists M \in \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant M$. Cette proposition est-elle vraie, fausse, ou cela dépend-il de la fonction f ?

3. Déterminer le domaine de définition de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x+2}{1-x}}$.

4. Déterminer les variations de la fonction $g : x \mapsto (\sqrt{x} - 4)^2$ (sans calculer de dérivée).

5. Résoudre l'équation $|x^2 - 2x + 1| = |2x - 3|$.

Corrigé de l'Interrogation n°1

1. Quelle est la contraposée de la phrase « Je suis un élève d'ECE3, donc j'ai M.Lafon comme prof de maths » ?

   Je n'ai pas M.Lafon comme prof de maths, donc je ne suis pas un élève d'ECE3.

2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists M \in \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant M$. Cette proposition est-elle vraie, fausse, ou cela dépend-il de la fonction f ?

   Cette proposition est toujours vraie, $M = f(x)$ **convient.**

3. Déterminer le domaine de définition de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x+2}{1-x}}$.

   Il faut que le quotient sous la racine soit positif, ce qui est le cas lorsque $x \in [-2;1[$ **(tableau de signes).**

4. Déterminer les variations de la fonction $g : x \mapsto (\sqrt{x} - 4)^2$ (sans calculer de dérivée).

   La fonction g **est définie sur** $[0;+\infty[$ **et strictement croissante. Elle prend des valeurs positives lorsque** $\sqrt{x} \geqslant 4$**, soit** $x \geqslant 16$**, des valeurs négatives sinon. Sa composée par la fonction carré, qui est croissante sur** $[0;+\infty[$ **et décroissante sur** $]-\infty;0]$**, est donc décroissante sur** $[0;16]$ **et croissante sur** $[16;+\infty[$**.**

5. Résoudre l'équation $|x^2 - 2x + 1| = |2x - 3|$.

   On aura soit $x^2 - 2x + 1 = 2x - 3$**, soit** $x^2 - 2x + 1 = -2x + 3$**, donc** $x^2 - 4x + 4 = 0$ **ou** $x^2 - 2 = 0$**. Pour la première équation, on recnnait une identité remarquable :** $(x-2)^2 = 0$**, donc** $x = 2$**. La deuxième revient à** $x^2 = 2$**, donc** $x = \sqrt{2}$ **ou** $x = -\sqrt{2}$**. Finalement,** $\mathcal{S} = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}; 2\}$.

Interrogation Écrite n°2

ECE3 Lycée Carnot

7 octobre 2010

Tous les calculs doivent apparaitre sur la feuille.

1. Rappeler la formule donnant les sommes partielles d'une suite arithmétique.

2. Déterminer le terme général de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 4u_n - 6$.

3. Déterminer le terme général de la suite (u_n) définie par $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \dfrac{u_n - u_{n+1}}{2}$.

4. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 1}{2u_n + 4}$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n = \dfrac{2u_n - 1}{u_n + 1}$.
Montrer que la suite (t_n) est géométrique, puis en déduire la valeur de t_n puis celle de u_n.

Corrigé de l'Interrogation n°2

1. Rappeler la formule donnant les sommes partielles d'une suite arithmétique.
$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = \frac{u_0 + u_n}{2}(n+1)$.
2. Déterminer le terme général de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 4u_n - 6$.
La suite est arithmético-géométrique, d'équation de point fixe $x = 4x - 6$, soit $x = 2$. On pose donc $v_n = u_n - 2$, et $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = 4u_n - 8 = 4(u_n - 2) = 4v_n$. La suite (v_n) est géométrique de raison 4 et de premier terme $v_0 = u_0 - 2 = -1$, donc $v_n = -4^n$, puis $u_n = v_n + 2 = 2 - 4^n$.
3. Déterminer le terme général de la suite (u_n) définie par $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \frac{u_n - u_{n+1}}{2}$.
La suite est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = 0$. Celle-ci a pour discriminant $\Delta = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$, et admet donc deux racines $r = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{2} = \frac{1}{2}$, et $s = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{2} = -1$. On peut donc écrire $u_n = \frac{\alpha}{2^n} + \beta(-1)^n$, avec au vu des valeurs initiales $\alpha + \beta = 1$ et $\frac{\alpha}{2} - \beta = 1$, d'où en additionnant $3\frac{\alpha}{2} = 2$, donc $\alpha = \frac{4}{3}$, puis $\beta = -\frac{1}{3}$. Finalement, $u_n = \frac{1}{3 \times 2^{n-2}} + \frac{(-1)^{n+1}}{3}$.
4. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{2u_n + 4}$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n = \frac{2u_n - 1}{u_n + 1}$. Montrer que la suite (t_n) est géométrique, puis en déduire la valeur de t_n puis celle de u_n.
Calculons donc $t_{n+1} = \frac{2u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{6u_n+2}{2u_n+4} - 1}{\frac{3u_n+1}{2u_n+4} + 1} = \frac{6u_n + 2 - 2u_n - 4}{3u_n + 1 + 2u_n + 4} = \frac{4u_n - 2}{5u_n + 5} = \frac{2}{5}t_n$. La suite (t_n) est donc géométrique de raison $\frac{2}{5}$ et de premier terme $t_0 = \frac{2u_0 - 1}{u_0 + 1} = \frac{1}{2}$, donc $t_n = \frac{2^{n-1}}{5^n}$. Comme $t_n(u_n + 1) = 2u_n - 1$, on a $u_n(t_n - 2) = -1 - t_n$, soit $u_n = \frac{1 + t_n}{2 - t_n} = \frac{5^n + 2^{n-1}}{2 \times 5^n - 2^{n-1}}$.

Interrogation Écrite n°3

ECE3 Lycée Carnot

13 octobre 2010

Tous les calculs doivent apparaitre sur la feuille.

1. Rappeler la formule donnant les sommes partielles d'une suite arithmétique.

2. Déterminer le terme général de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 4u_n - 6$.

3. Déterminer le terme général de la suite (u_n) définie par $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \dfrac{u_n - u_{n+1}}{2}$.

4. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 1}{2u_n + 4}$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n = \dfrac{2u_n - 1}{u_n + 1}$. Montrer que la suite (t_n) est géométrique, puis en déduire la valeur de t_n puis celle de u_n.

Corrigé de l'Interrogation n°3

1. Rappeler la définition d'une partition d'un ensemble E.

   Une partition de E est un ensemble de sous-ensembles A_1, A_2, ..., A_n tels que $\bigcup A_i = E$ et $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\forall j \neq i$, $A_i \cap A_j = \emptyset$.

2. Déterminer le terme général de la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + 2$.

   La suite est arithmético-géométrique, d'équation de point fixe $x = 3x + 2$, soit $x = -1$. On pose donc $v_n = u_n + 1$, et $v_{n+1} = u_{n+1} + 1 = 3u_n + 3 = 3(u_n + 1) = 3v_n$. La suite (v_n) est géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = u_0 + 1 = 3$, donc $v_n = 3^{n+1}$, puis $u_n = v_n - 1 = 3^{n+1} - 1$.

3. Déterminer le terme général de la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$, $u_1 = \dfrac{10}{3}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $3u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n$.

   La suite est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $3x^2 - 4x + 1 = 0$. Celle-ci a pour discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4$, et admet donc deux racines $r = \dfrac{4+2}{6} = 1$, et $s = \dfrac{4-2}{6} = \dfrac{1}{3}$. On peut donc écrire $u_n = \alpha + \dfrac{\beta}{3^n}$, avec au vu des valeurs initiales $\alpha + \beta = 2$ et $\alpha + \dfrac{\beta}{3} = \dfrac{10}{3}$, soit $3\alpha + \beta = 10$. En faisant la différene des deux on obtient $2\alpha = 8$, soit $\alpha = 4$, puis $\beta = -2$. Finalement, $u_n = 4 - \dfrac{2}{3^n}$.

4. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{2u_n + 1}$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n = \dfrac{2u_n - 3}{2u_n + 2}$. Montrer que la suite (t_n) est géométrique, puis en déduire la valeur de t_n puis celle de u_n.

   Calculons donc $t_{n+1} = \dfrac{2u_{n+1} - 3}{2u_{n+1} + 2} = \dfrac{\frac{4u_n+6}{2u_n+1} - 3}{\frac{4u_n+6}{2u_n+1} + 2} = \dfrac{4u_n + 6 - 6u_n - 3}{4u_n + 6 + 4u_n + 2} = \dfrac{-2u_n + 3}{8u_n + 8} = -\dfrac{1}{4}t_n$. La suite (t_n) est donc géométrique de raison $-\dfrac{1}{4}$ et de premier terme $t_0 = \dfrac{2u_0 - 3}{2u_0 + 2} = -\dfrac{1}{4}$, donc $t_n = \left(-\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}$. Comme $t_n(2u_n + 2) = 2u_n - 3$, on a $u_n(2t_n - 2) = -3 - 2t_n$, soit $u_n = \dfrac{3 + 2t_n}{2 - 2t_n} = \dfrac{3.4^{n+1} + 2(-1)^{n+1}}{2.4^{n+1} + 2(-1)^{n+1}}$.

Interrogation Écrite n°4

ECE3 Lycée Carnot

24 novembre 2010

1. Rappeler la formule de Vandermonde, ainsi que sa démonstration.

2. Quel est le nombre d'anagrammes du mot ANAGRAMMES ?

3. Développer $(1-2x)^4$.

4. Une vieille plaque minéralogique de voiture parisienne est constituée d'un nombre à quatre chifres (toutes les nombre sont possibles, y compris ceux commençant par un ou plusieurs zéros) suivis de deux lettres pouvant être identiques (suivies du 75 indiquant le département mais il est imposé pour cet exercice donc on n'en tient pas compte).
   (a) Combien y a-t-il de plaques minéralogiques au total ?

   (b) Combien de plaques dont les deux lettres sont deux voyelles ?

   (c) Combien de plaques avec quatre chiffres distincts ?

   (d) Combien de plaques dont les chiffres sont en ordre strictement croissant ?

   (e) Combien de plaques contiennent exactement deux fois le chiffre 5 ?

Corrigé de l'Interrogation n°4

1. Tout ce qu'il faut se trouve dans le cours
2. Il y a 10 lettres dans le mot, donc une est répétée deux fois, et une autre trois fois, soit $\dfrac{10!}{2!3!} = \dfrac{13!}{12}$ anagrammes.
3. $(1-2x)^4 = 1^4 + 4 \times 1^3 \times (-2x) + 6 \times 1^2 \times (-2x)^2 + 4 \times 1 \times (-2x)^3 + (-2x)^4 = 1 - 8x + 24x^2 - 32x^3 + 16x^4$.
4. (a) Il y a $10^4 \times 26^2$ plaques possibles.
   (b) Il n'en reste plus que $10^4 \times 6^2$ si on veut deux voyelles.
   (c) Cela diminue les possibilités sur les chiffres : $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 26^2$.
   (d) Il suffit de choisir les quatre chiffres (nécessairement distincts) présents sur la plaque, l'ordre sera ensuite imposé par la croissance stricte. Il y a $\dbinom{10}{4}$ façons de choisir les 4 chiffres, donc $\dbinom{10}{4} \times 26^2$ plaques convenables.
   (e) Il faut choisir les deux chiffres qui ne sont pas des 5, la position des deux 5 dans la plaque, et les deux lettres : $9^2 \times \dbinom{4}{2} \times 26^2$.

Interrogation Écrite n°5

ECE3 Lycée Carnot

20 janvier 2011

1. Rappeler la définition de la transposée d'une matrice, ainsi que celle d'évènements indépendants.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 et A^3.

3. Dans une urne sont contenues 5 boules numérotées de 1 à 5. On en tire deux simultanément. Calculer les probabilités suivantes :
   (a) On tire deux numéros impairs.
   (b) On tire la boule numéro 1.
   (c) On tire deux numéros distincts.
   (d) La somme des deux numéros est supérieure ou égale à 7.

4. Reprendre le petit exercice précédent avec désormais des tirages successifs avec remise.

Corrigé de l'Interrogation n°5

1. Voir le cours.
2. On obtient $A^2 = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ -2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ et $A^2 = \begin{pmatrix} -6 & -5 & -16 \\ 2 & 1 & -4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.
3. Dans le premier cas, il y a $\binom{5}{2} = 10$ tirages possibles.
   (a) Il y a $\binom{3}{2} = 3$ tirages possibles soit une proba de $\dfrac{3}{10}$.
   (b) Il y a 4 tirages, soit une proba de $\dfrac{4}{10}$.
   (c) Ce sera toujours le cas. Autrement dit, la proba vaut 1.
   (d) Pas vraiment plus malin à faire que compter à la main, il y a quatre cas (3 et 4, 3 et 5, 2 et 5, 4 et 5), donc une proba de $\dfrac{4}{10}$.
4. Cette fois-ci, on a $5^2 = 25$ tirages possibles.
   (a) Il y a $3^2 = 9$ tirages possibles soit une proba de $\dfrac{9}{25}$.
   (b) Si on veut au moins une fois le 1, il y a (en passant au complémentaire) $25 - 4^2 = 9$ tirages possibles soit une proba de $\dfrac{9}{25}$.
   (c) Cette fois-ci le nombre de tirages convenable est 5×4, d'où une proba de $\dfrac{4}{5}$.
   (d) Il y a cette fois-ci 10 tirages convenables (attention à tenir compte de l'ordre, les quatre comptés dans l'exercice précédent correspondent désormais à deux tirages chacun, auxquels il faut ajouter le $4-4$ et le $5-5$), soit une proba de $\dfrac{2}{5}$.

Interrogation Écrite n°6

ECE3 Lycée Carnot

4 mars 2011

1. Compléter le tableau suivant :

	$X(\Omega)$	$P(X=k)$	$E(X)$	$V(X)$
$\mathcal{U}(n)$				
$\mathcal{B}(n;p)$				
$\mathcal{H}(N;n;p)$				

2. Quatre élèves d'une auto-école, numérotés par souci de simplicité de 1 à 4, passent leur permis le même jour. Chacun de ces élèves a une chance sur trois de réussir son permis (indépendamment les uns des autres). On note X le nombre d'élèves qui vont réussir leur permis, et Y le numéro du premier élève à réussir le permis (si aucun des quatre ne réussit, on posera $Y = 0$).
   - (a) Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X.
   - (b) Déterminer $P(Y = 0)$.
   - (c) Déterminer la loi de Y.
   - (d) Calculer $P_{Y=3}(X = 2)$. Les évènements $Y = 3$ et $X = 2$ sont-ils indépendants ?
   - (e) On suppose désormais que pendant une semaine de cinq jours, quatre élèves (différents à chaque fois) passent le permis chaque jour, avec toujours une chance sur trois pour chacun de s'en sortir. On note Z le nombre de jours où tous les élèves qui se présentent ratent leur examen. Déterminer la loi de Z.

Corrigé de l'Interrogation n°6

1. Compléter le tableau suivant :

	$X(\Omega)$	$P(X=k)$	$E(X)$	$V(X)$
$\mathcal{U}(n)$	$\{1;2;\dots;n\}$	$\dfrac{1}{n}$	$\dfrac{n+1}{2}$	$\dfrac{n^2-1}{12}$
$\mathcal{B}(n;p)$	$\{0;1;\dots;n\}$	$\dbinom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
$\mathcal{H}(N;n;p)$	$\{\max(0;n-Nq);1\dots;\min(n,Np)\}$	$\dfrac{\binom{Np}{k}\binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	np	$np(1-p)\dfrac{N-n}{N-1}$

2. (a) La variable X suit une loi binômiale de paramètre $\left(4;\dfrac{1}{3}\right)$. On a donc $E(X)=\dfrac{4}{3}$ et $V(X)=4\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{8}{9}$.

   (b) On a $P(Y=0)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^4=\dfrac{16}{81}$.

   (c) À l'aide d'une application répétée de la formule des probabilités composées, on obtient $P(Y=1)=\dfrac{1}{3}$; $P(Y=2)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{9}$; puis $P(Y=3)=\dfrac{4}{27}$ et enfin $P(Y=4)=\dfrac{8}{81}$.

   (d) Si on sait que le premier succès intervient au troisième candidat, on aura $X=2$ si (et seulement si) on a un succès pour le quatrième candidat, soit $P_{Y=3}(X=2)=\dfrac{1}{3}$. Par ailleurs, on sait que $P(X=2)=\dbinom{4}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=6\times\dfrac{1}{9}\times\dfrac{4}{9}=\dfrac{8}{27}$. Les deux résultats étant différents, les évènements ne sont pas indépendants.

   (e) On a vu plus haut que la probabilité d'un jour sans succès était de $\dfrac{16}{81}$. Si on répète cette expérience sur 5 jours, la variable Z va suivre une loi binômiale de paramètre $\left(5;\dfrac{16}{81}\right)$. En particulier, son espérance est très proche de 1. On a donc en moyenne quasiment un jour par semaine où tout le monde rate le permis.

Quatrième partie

Colles


OCCUPER SON PROF DE MATHS TOUTE LA JOURNÉE? SIMPLE!
MOI QUAND JE COMPREND PAS UN TRUC, JE RÉPONDS "C'EST PAS FAUX!" C'EST MA BOTTE SECRÈTE!
BEN MOI QUAND ON COMPREND PAS CE QUE JE RACONTE, JE DIS "C'EST TRIVIAL."
PERCEVAL
(Kaamelott)
EUH... C'EST PAS FAUX
C'EST TRIVIAL!
OUAIS... PAS FAUX.
...TRIVIAL MÊME!
C'EST PAS FAUX...
C'EST TRIVIAL!
C'EST PAS FAUX. ...
TOUT À FAIT TRIVIAL.
ETC.

Groupes de colles

Groupe 1
Duparc Sophie
Motte Oriane
Sentis Pauline

Groupe 2
De Saint-Martin Axel
Léon Mélanie
Mesbahi Laura

Groupe 3
Beirnaert Clémence
Regenet Alexandra
Remond Juliette

Groupe 4
Arshina Marina
Bensoussan Sarah
Ly Phek-Bouay

Groupe 5
Bennis Insaf
Tramontana Margot
Trapier Raphaël

Groupe 6
Donty Jeimila
Frimont Apolline
Girod Élisa

Groupe 7
Bonnet de Paillerets Thibaud
Bressand Jason
Savart Simon

Groupe 8
Nedelcheva Simona
Panni Laura
Tran Binh Than Sylvie

Groupe 9
Benmansour Hassani Nesrine
Bennani Lina
Houessou Pamela

Groupe 10
De Laborderie Solène
Guillaume Romane
Sengayrac Simon-Pierre

Groupe 11
Ali Naida
Carbajo Eugénie
Vevert Bertrand

Groupe 12
Gully Claire
Karimpour Clément
Teyssieux Freddy

Groupe 13
Billard Madrières Camille
Brizon Margaux
Dequin Chloé

Groupe 14
Drissi Samir
Jeannin Arthur
Terry Pierre-Louis

Groupe 15
Duval Ophélia
Finkel Charlotte
Mercier Tiphaine

Note : les groupes notés avec une étoile pour certaines colles de langues sont des binômes : pour l'allemand le groupe 1* estconstitué de Melles DUPARC et SENTIS ; pour l'espagnol 1, le groupe 5* est constitué de Melle TRAMONTANA et M. TRAPIER ; pour le russe, le groupe 4* est constitué de Melles ARSHINA et BENSOUSSAN. Enfin, pour les colles de philosophie, le groupe 1* est le même que ci-dessus, Melle MOTTE ne pouvant faire ses colles de philosophie le mercredi après-midi.

Planning des semaines de colle :

- Semaine 2 : Semaine du 27/09 au 01/10
- Semaine 3 : Semaine du 04/10 au 08/10
- Semaine 4 : Semaine du 11/10 au 15/10
- Semaine 5 : Semaine du 18/10 au 22/10
- Semaine 6 : Semaine du 08/11 au 12/11
- Semaine 7 : Semaine du 15/11 au 19/11
- Semaine 8 : Semaine du 22/11 au 26/11
- Semaine 9 : Semaine du 29/11 au 03/12
- Semaine 10 : Semaine du 06/12 au 10/12
- Semaine 11 : Semaine du 13/12 au 17/12
- Semaine 13 : Semaine du 10/01 au 14/01
- Semaine 14 : Semaine du 17/01 au 21/01
- Semaine 15 : Semaine du 24/01 au 28/01
- Semaine 16 : Semaine du 31/01 au 04/02
- Semaine 17 : Semaine du 07/02 au 11/02
- Semaine 18 : Semaine du 28/02 au 04/03
- Semaine 19 : Semaine du 07/03 au 11/03
- Semaine 20 : Semaine du 14/03 au 18/03
- Semaine 21 : Semaine du 21/03 au 25/03
- Semaine 22 : Semaine du 28/03 au 01/04
- Semaine 23 : Semaine du 04/04 au 08/04
- Semaine 24 : Semaine du 25/04 au 29/04
- Semaine 25 : Semaine du 02/05 au 06/05
- Semaine 26 : Semaine du 09/05 au 13/05
- Semaine 28 : Semaine du 23/05 au 27/05
- Semaine 29 : Semaine du 30/05 au 03/06

Colloscope

Colleur	Horaire	Salle	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	13	14	15
MATHS															
M.Gélineau	Lundi 15^{30}-16^{30}	**16**	8	3	4	1	2	13	10	5	6	3	4	1	12
M.Connétable	Mercredi 13-14	**202**	4	5	12	3	8	15	14	15	4	11	6	13	4
M.Connétable	Mercredi 14-15	**202**	10	9	6	7	4	9	2	7	10	9	12	7	10
M.Connétable	Mercredi 15-16	**202**	■	13	■	11	■	5	■	3	■	5	■	3	■
M.Lafon	Jeudi 15^{30}-16^{30}	**Préfa 2**	6	11	2	15	12	1	6	11	14	1	8	15	6
M.Lafon	Jeudi 16^{30}-17^{30}	**Préfa 2**	12	1	14	13	10	7	8	9	12	13	2	11	14
Mme Chekroun	Lundi 16^{30}-17^{30}	**13**	2	15	8	5	6	3	4	13	2	7	10	5	2
Mme Chekroun	Jeudi 16^{30}-17^{30}	**13**	14	7	10	9	14	11	12	1	8	15	14	9	8
AEHSC															
Mme Duchêne	Mardi 12^{30}-13^{30}	**R2**	1	14	5	6	9	8	1	12	5	10	7	2	1
Alternance	Mercredi 13-14	**104**	15	■	7	■	5	■	13	■	7	■	9	■	7
Alternance	Mercredi 14-15	**104**	3	6	9	10	15	12	5	4	11	14	13	6	11
Alternance	Mercredi 15-16	**104**	11	8	13	14	3	4	9	10	15	12	15	4	3
Alternance	Mercredi 16-17	**104**	7	2	11	4	13	2	15	8	9	6	5	10	9
Alternance	Mercredi 17-18	**104**	5	12	3	8	7	6	11	14	3	2	11	8	5
Mme Duchêne	Vendredi 16^{30}-17^{30}	**8**	9	10	1	12	11	14	7	2	1	8	3	14	13
Mme Duchêne	Vendredi 17^{30}-18^{30}	**8**	13	4	15	2	1	10	3	6	13	4	1	12	15
Philo															
Mme Boutot	Mercredi 14-15	**R1**	1*	4	15	12	13	14	15	6	9	10	11	2	9
Mme Boutot	Mercredi 15-16	**R1**	5	10	3	2	1*	8	11	12	13	4	7	6	5
Mme Boutot	Mercredi 16-17	**R1**	9	8	7	6	5	10	3	2	1*	14	15	12	13
Mme Boutot	Mercredi 17-18	**R1**	13	14	11	■	9	4	7	■	5	8	3	■	1*
Lettres															
Mme Fleur	Lundi 16^{30}-17^{30}	**6**	7	12	5	14	15	2	1	10	7	6	5	14	15
Mme Fleur	Lundi 17^{30}-18^{30}	**6**	3	■	9	8	11	■	13	8	3	■	9	10	11
M.Casalaspro	Vendredi $16^{30} - 17^{30}$	**6**	11	6	13	10	3	12	9	4	11	2	1	4	3
M.Casalaspro	Vendredi $17^{30} - 18^{30}$	**6**	15	2	1	4	7	6	5	14	15	12	13	8	7
Allemand															
Mme Guillous	Mercredi 13-14		■	2	1*	2	1*	2	1*	2	1*	2	1*	2	1*
Anglais															
Mme Jasz	Lundi 16^{30}-17^{30}	**118**	■	9	12	1	8	5	2	1	10	15	6	1	14
Mme Jasz	Lundi 17^{30}-18^{30}	**118**	■	1	■	7	■	1	■	3	■	1	■	13	■
Mme Trang	Mercredi 13-14	**Préfa 1**	■	15	14	13	10	11	4	9	12	7	8	5	2
Mme Trang	Mercredi 14-15	**Préfa 1**	■	7	2	5	12	3	6	15	14	13	10	11	4
Mme Serfaty	Mercredi 13-14	**10**	■	13	4	11	14	9	8	7	2	5	12	3	6
Mme Gallix	Mercredi 15-16	**109**	■	5	6	3	2	15	10	13	4	11	14	9	8
Mme Gallix	Mercredi 16-17	**109**	■	11	8	9	4	7	12	5	6	3	2	15	10
M.Webber	Mercredi 16-17	**212**	■	3	10	15	6	13	14	11	8	9	4	7	12
Espagnol 1															
Mme Eymard	Mercredi 13-14	**211**	■	■	5*	■	3	■	5*	■	3	■	5*	■	3
Mme Eymard	Mercredi 14-15	**211**	■	■	3	■	5*	■	3	■	5*	■	3	■	5*
Espagnol 2															
M.Puyade	Lundi $15^{30} - 16^{30}$	**15**	■	6	7	10	11	14	15	8	9	12	13	6	7
M.Puyade	Lundi $16^{30} - 17^{30}$	**15**	■	8	9	12	13	6	7	10	11	14	15	8	9
Mme Walter	Mercredi 13-14	**petite A2**	■	10	11	14	15	8	9	12	13	6	7	10	11
Mme Walter	Mercredi 14-15	**petite A2**	■	12	13	6	7	10	11	14	15	8	9	12	13
Mme Walter	Mercredi 15-16	**petite A2**	■	14	15	8	9	12	13	6	7	10	11	14	15
Russe															
Mme Tokarev	Jeudi $17^{30} - 18^{10}$	**5 ?**	■	■	4*	■	4*	■	4*	■	4*	■	4*	■	4*
TD Maths	Mardi $13^{30} - 15^{30}$	**R1**	P	I	P	I	P	I	P	I	P	I	P	I	P
TD Maths	Mardi $15^{30} - 17^{30}$	**R1**	I	P	I	P	I	P	I	P	I	P	I	P	I
TD Info	Vendredi $15^{30} - 16^{30}$	**2**	I	P	I	P	I	P	I	P	I	P	I	P	I
TD Info	Vendredi $16^{30} - 17^{30}$	**2**	P	I	P	I	P	I	P	I	P	I	P	I	P

Colleur	Horaire	Salle	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	28	29
MATHS															
M.Gélineau	Lundi 15^{30}-16^{30}	**16**	7	14	5	2	3	4	1	8	9	10	5	6	3
M.Connétable	Mercredi 13-14	**202**	9	2	11	4	9	10	15	6	13	2	3	4	5
M.Connétable	Mercredi 14-15	**202**	5	8	3	14	13	12	11	4	5	8	15	14	9
M.Connétable	Mercredi 15-16	**202**	15	■	7	■	5	■	3	■	7	■	11	■	13
M.Lafon	Jeudi 15^{30}-16^{30}	**Préfa 2**	13	12	15	8	1	14	7	12	15	14	7	2	1
M.Lafon	Jeudi 16^{30}-17^{30}	**Préfa 2**	1	10	9	6	11	2	13	10	1	6	9	12	11
Mme Chekroun	Lundi 16^{30}-17^{30}	**13**	3	4	13	10	15	6	5	2	3	4	13	8	7
Mme Chekroun	Jeudi 16^{30}-17^{30}	**13**	11	6	1	12	7	8	9	14	11	12	1	10	15
AEHSC															
Mme Duchêne	Mardi 12^{30}-13^{30}	**R2**	8	15	12	5	14	1	6	9	10	13	2	1	8
Alternance	Mercredi 13-14	**104**	■	13	■	7	■	13	■	7	■	15	■	3	■
Alternance	Mercredi 14-15	**104**	4	11	14	15	6	9	10	11	8	9	4	5	6
Alternance	Mercredi 15-16	**104**	12	5	8	9	2	5	4	13	4	7	14	11	12
Alternance	Mercredi 16-17	**104**	2	3	10	11	12	15	14	3	2	5	8	15	10
Alternance	Mercredi 17-18	**104**	6	7	4	3	10	3	8	5	12	11	6	7	2
Mme Duchêne	Vendredi 16^{30}-17^{30}	**8**	14	1	6	13	4	7	2	1	14	3	10	9	4
Mme Duchêne	Vendredi 17^{30}-18^{30}	**8**	10	9	2	1	8	11	12	15	6	1	12	13	14
Philo															
Mme Boutot	Mercredi 14-15	**R1**	8	3	12	5	10	15	2	9	14	11	6	13	10
Mme Boutot	Mercredi 15-16	**R1**	14	7	6	1*	4	3	12	5	8	3	2	9	4
Mme Boutot	Mercredi 16-17	**R1**	4	11	2	13	14	7	6	1*	4	15	12	5	8
Mme Boutot	Mercredi 17-18	**R1**	10	15	■	9	8	11	■	13	10	7	■	1*	14
Lettres															
Mme Fleur	Lundi 16^{30}-17^{30}	**6**	6	1	8	3	2	5	10	11	12	1	10	7	6
Mme Fleur	Lundi 17^{30}-18^{30}	**6**	■	13	14	7	■	9	8	15	■	13	14	3	■
M.Casalaspro	Vendredi $16^{30} - 17^{30}$	**6**	2	9	10	15	12	13	4	7	6	9	8	11	12
M.Casalaspro	Vendredi $17^{30} - 18^{30}$	**6**	12	5	4	11	6	1	14	3	2	5	4	15	2
Allemand															
Mme Guillous	Mercredi 13-14		2	1*	2	1*	2	1*	2	1*	2	1*	■	■	■
Anglais															
Mme Jasz	Lundi 16^{30}-17^{30}	**118**	11	12	1	8	7	2	1	10	1	6	■	■	■
Mme Jasz	Lundi 17^{30}-18^{30}	**118**	1	■	9	■	1	■	5	■	3	■	■	■	■
Mme Trang	Mercredi 13-14	**Préfa 1**	3	14	15	10	13	4	11	12	9	8	■	■	■
Mme Trang	Mercredi 14-15	**Préfa 1**	9	2	7	12	5	6	3	14	15	10	■	■	■
Mme Serfaty	Mercredi 13-14	**10**	15	4	13	14	11	8	9	2	7	12	■	■	■
Mme Gallix	Mercredi 15-16	**109**	7	6	5	2	3	10	15	4	13	14	■	■	■
Mme Gallix	Mercredi 16-17	**109**	13	8	11	4	9	12	7	6	5	2	■	■	■
M.Webber	Mercredi 16-17	**212**	5	10	3	6	15	14	13	8	11	4	■	■	■
Espagnol 1															
Mme Eymard	Mercredi 13-14	**211**	■	3	■	5*	■	3	■	5*	■	3	■	■	■
Mme Eymard	Mercredi 14-15	**211**	■	5*	■	3	■	5*	■	3	■	5*	■	■	■
Espagnol 2															
M.Puyade	Lundi $15^{30} - 16^{30}$	**15**	10	11	14	15	8	9	12	13	6	7	■	■	■
M.Puyade	Lundi $16^{30} - 17^{30}$	**15**	12	13	6	7	10	11	14	15	8	9	■	■	■
Mme Walter	Mercredi 13-14	**petite A2**	14	15	8	9	12	15	6	9	10	11	■	■	■
Mme Walter	Mercredi 14-15	**petite A2**	6	7	10	11	14	13	8	7	12	13	■	■	■
Mme Walter	Mercredi 15-16	**petite A2**	8	9	12	13	6	7	10	11	14	15	■	■	■
Russe															
Mme Tokarev	Jeudi $17^{30} - 18^{10}$	**5 ?**	■	4*	■	4*	■	4*	■	4*	■	4*	■	■	■
TD Maths	Mardi $13^{30} - 15^{30}$	**R1**	I	P	I	P	I	P	I	P	I	P	I	P	I
TD Maths	Mardi $15^{30} - 17^{30}$	**R1**	P	I	P	I	P	I	P	I	P	I	P	I	P
TD Info	Vendredi $15^{30} - 16^{30}$	**2**	P	I	P	I	P	I	P	I	P	I	P	I	P
TD Info	Vendredi $16^{30} - 17^{30}$	**2**	I	P	I	P	I	P	I	P	I	P	I	P	I

Semaine n°2 (du 27/09 au 01/10 2010)

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera systématiquement noté en-dessous de la moyenne.

Fonctions usuelles

- Éléments de logique : quantificateurs, implications, contraposée.
- Domaines de définition de fonctions simples (faisant intervenir racines carrées et ln).
- Parité, périodicité.
- Variations de fonctions usuelles (aucune définition précise de la limite ou de la dérivée n'a été donnée, on se contente pour l'instant des connaissances de Terminale).
- Fonctions logarithmes et exponentielles de base quelconque (variations et courbes).
- Fonctions puissances : rappels sur les puissances entières et généralisation aux puissances quelconques.
- Résultats de croissance comparée (admis).
- Valeur absolue (propriétés algébriques, résolution d'équations et inéquations ; courbe de la fonction valeur absolue et de fonctions plus complexes faisant intervenir des valeurs absolues).
- Partie entière (définition et courbe).

Sommes, produits, récurrences

- Symbole $\sum$, propriétés et règles de calcul (y compris les changements d'indice).
- Démonstration par récurrence, récurrence double et récurrence forte.
- **Calcul des sommes classiques suivantes :** $\displaystyle\sum_{i=0}^{i=n} i\,;\ \sum_{i=0}^{i=n} i^2\,;\ \sum_{i=0}^{i=n} i^3\,;\ \sum_{i=0}^{i=n} q^i$.

Prévisions pour la semaine suivante (5 au 9 octobre) : même programme, avec produits, sommes doubles et sommes télescopiques.

Semaine n°3 (du 04/10 au 08/10 2010)

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera systématiquement noté en-dessous de la moyenne.

Fonctions usuelles

- Éléments de logique : quantificateurs, implications, contraposée.
- Domaines de définition de fonctions simples (faisant intervenir racines carrées et ln).
- Parité, périodicité.
- Variations de fonctions usuelles (aucune définition précise de la limite ou de la dérivée n'a été donnée, on se contente pour l'instant des connaissances de Terminale).
- Fonctions logarithmes et exponentielles de base quelconque (variations et courbes).
- Fonctions puissances : rappels sur les puissances entières et généralisation aux puissances quelconques.
- Résultats de croissance comparée (admis).
- Valeur absolue (propriétés algébriques, résolution d'équations et inéquations ; courbe de la fonction valeur absolue et de fonctions plus complexes faisant intervenir des valeurs absolues).
- Partie entière (définition et courbe).

Sommes, produits, récurrences

- Symbole $\sum$, propriétés et règles de calcul (y compris les changements d'indice) ; exemple de calcul faisant intervenir des sommes télescopiques.
- Démonstration par récurrence, récurrence double et récurrence forte.
- **Calcul des sommes classiques suivantes :** $\displaystyle\sum_{i=0}^{i=n} i$; $\displaystyle\sum_{i=0}^{i=n} i^2$; $\displaystyle\sum_{i=0}^{i=n} i^3$; $\displaystyle\sum_{i=0}^{i=n} q^i$.
- Sommes doubles.
- Symbole $\prod$, règles de calcul ; définition des factorielles.

Prévisions pour la semaine suivante : toujours les sommes, début des suites.

Semaine n°4 (du 11/10 au 15/10 2010)

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera noté systématiquement en dessous de la moyenne.

Sommes, produits, récurrences

Même si la partie centrale du programme porte sur le premier chapitre consacré aux suites, les exercices peuvent faire intervenir des récurrences ou des calculs de sommes. Les **calculs de sommes classiques** peuvent toujours faire l'objet d'une question de cours.

Suites

- Généralités et vocabulaire : indice, terme général, définition d'une suite par une formule explicite ou par récurrence, suites croissantes, décroissantes, majorées, minorées, bornées, sommes partielles.
- Suites arithmétiques : **formule explicite, sens de variation, sommes partielles**.
- Suites géométriques : **formule explicite, sens de variation, sommes partielles**.
- Suites arithmético-géométriques (la **méthode de calcul du terme général** peut faire l'objet d'une question de cours).
- Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (forme du terme général admise, mais la **méthode de résolution** peut faire l'objet d'une question de cours).
- Pour l'instant, aucun nouveau résultat sur les limites (ni même la définition avec des ε) n'a été vu en cours, les éventuels calculs de limites doivent donc rester élémentaires.

Prévisions pour la semaine suivante : même contenu sur les suites, plus ensembles et applications.

Semaine n°5 (du 18/10 au 22/10 2010)

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera noté systématiquement en dessous de la moyenne.

Suites

- Généralités et vocabulaire : indice, terme général, définition d'une suite par une formule explicite ou par récurrence, suites croissantes, décroissantes, majorées, minorées, bornées, sommes partielles.
- Suites arithmétiques : **formule explicite, sens de variation, sommes partielles**.
- Suites géométriques : **formule explicite, sens de variation, sommes partielles**.
- Suites arithmético-géométriques (la **méthode de calcul du terme général** peut faire l'objet d'une question de cours).
- Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (forme du terme général admise, mais la **méthode de résolution** peut faire l'objet d'une question de cours).
- Pour l'instant, aucun nouveau résultat sur les limites (ni même la définition avec des ε) n'a été vu en cours, les éventuels calculs de limites doivent donc rester élémentaires.

Ensembles et applications

- Vocabulaire ensembliste : sous-ensembles, union, intersection, lois de Morgan, partitions, produit, ensemble des parties d'un ensemble.
- Vocabulaire sur les applications : images, antécédents, restriction, prolongement, composée, applications injectives, surjectives et bijectives
- **La composée de deux applications injectives (resp.surjectives) est injective (resp.surjective)**.
- Bijection réciproque, notion d'image et d'image réciproque d'un sous-ensemble.

Prévisions pour après les vacances : même contenu sur les ensembles, plus la convergence des suites.

Semaine n°6 (du 08/11 au 12/11 2010)

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera noté systématiquement en dessous de la moyenne.

Ensembles et applications

- Vocabulaire ensembliste : sous-ensembles, union, intersection, lois de Morgan, partitions, produit, ensemble des paryies d'un ensemble.
- Vocabulaire sur les applications : images, antécédents, restriction, prolongement, composée, applications injectives, surjectives et bijectives
- **La composée de deux applications injectives (resp.surjectives) est injective (resp.surjective)**.
- Bijection réciproque, notion d'image et d'image réciproque d'un sous-ensemble.

Convergence de suites

- Définition de la convergence et des limites infinies « avec des ε ».
- **Unicité de la limite** d'une suite convergente.
- Théorème de convergence monotone (admis).
- Limites des suites usuelles : limite d'une suite arithmétique et d'une suite géométrique.
- Opérations et limites : limite d'une somme, d'un produit, d'un inverse.
- Théorèmes de comparaison et **théorème des gendarmes**.
- Suites adjacentes (la démonstration de la convergence n'est pas à savoir).
- PAS d'équivalence pour cette semaine.

Prévisions pour la semaine suivante : toujours convergence de suites, avec en plus équivalents et négligeabilité.

Semaine n°7 (du 15/11 au 19/11 2010)

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera noté systématiquement en dessous de la moyenne.

Convergence de suites

- Définition de la convergence et des limites infinies « avec des ε ».
- **Unicité de la limite** d'une suite convergente.
- Théorème de convergence monotone (admis).
- Limites des suites usuelles : limite des suites arithmétiques et géométriques.
- Opérations et limites : limite d'une somme, d'un produit, d'un inverse.
- Théorèmes de comparaison et **théorème des gendarmes**.
- Suites adjacentes (la démonstration de la convergence n'est pas à savoir).
- Équivalence et négligeabilité : définitions et principales propriétés. Croissances comparées. Equivalents classiques : $\ln(1+u_n) \sim u_n$ et $e^{u_n} - 1 \sim u_n$ lorsque $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Prévisions pour la semaine suivante : dénombrement.

Semaine n°8 (du 22/11 au 26/11 2010)

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera noté systématiquement en dessous de la moyenne.

Dénombrement

- Cardinaux d'ensembles finis : définition d'ensemble fini, **cardinal d'une union**, d'un complémentaire et d'un produit (la démonstration du cardinal d'une union est à savoir, sans détailler la preuve de la bijection dans le cas disjoint). Formule de Poincaré (donnée dans le cas général, mais surtout à savoir exprimer pour une union de trois ou quatre ensembles).
- Listes, arrangements et combinaisons : définitions et cardinal.
- Propriétés des coefficients binomiaux : symétrie, **formule de Pascal** (démonstration calculatoire ou combinatoire au choix), triangle du même Pascal, formule du binôme de Newton, **formule de Vandermonde** (démonstration uniquement combinatoire).
- Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.

Prévisions pour la semaine suivante : toujours le dénombrement.

Semaine n°9 (du 01/12 au 05/12 2010)

Même programme que la semaine précédente.

Semaine n°10 (du 06/12 au 10/12 2010)

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera noté systématiquement en dessous de la moyenne.

Systèmes linéaires

- Vocabulaire : systèmes de Cramer, système incompatible, système homogène, système triangulaire.
- Résolution d'un système par la méthode du pivot de Gauss (qui doit pouvoir être décrite de façon précise, mais PAS de matrices pour le moment).
- Exemples de systèmes faisant intervenir un paramètre.

Séries

- Vocabulaire sur les séries : terme général, convergence, reste d'indice n, séries absolument convergentes et semi-convergentes.
- Propriétés élémentaires des séries convergentes : convergence du terme général vers 0, linéarité de la somme, comparaison de séries à termes positifs, nature identique de séries à termes positifs de terme général équivalent (théorème uniquement énoncé pour pouvoir faire un peu plus d'exercices, mais pas démontré).
- Séries classiques : séries géométriques, géométriques dérivée et dérivée seconde (formules à savoir démontrer pour les séries géométrique et dérivée, mais pas pour la dérivée seconde) ; séries exponentielles (formule non prouvée) ; divergence de la série harmonique et équivalent de la somme partielle (démonstration non exigible).

Note : en début de semaine, les élèves n'auront pas fait d'exercices sur les séries. On pourra donner un exercice de dénombrement pour compléter la colle si on le souhaite.

Prévisions pour la semaine suivante (13 au 17 décembre) : même chose.

Semaine n°11 (du 15/12 au 19/12 2010)

Même programme que la semaine précédente.

Semaine n°13 (du 10/01 au 14/01 2011)

Toutes les démonstrations du cours (points notés en gras dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera noté systématiquement en dessous de la moyenne.

Fonctions à deux variables

- Représentation de domaines de définitions simples de fonctions à deux variables (faisant intervenir équations de droites ou de cercles centrés à l'origine).
- Lignes de niveaux, applications partielles, dérivées partielles et dérivées partielles secondes (aucun résultat théorique n'a été énoncé).
- Points critiques (aucune méthode de détermination de la nature de ces points critiques n'est au programme).

Probabilités

- Vocabulaire : univers, évènements (certain, impossible, incompatibles, système complet d'évènements), tribus, lois de probabilité.
- Propriétés élémentaires des probabilités : probabilité d'un complémentaire, probabilité d'une union, formule de Poincaré.
- Équiprobabilité sur un univers fini.
- Probabilités conditionnelles : formule des probabilités composées, formule des probabilités totales.
- Chaines de Markov (pas d'utilisation de graphe, naturellement, mais ce type de problème doit être familier).
- La formule de Bayes et l'indépendance ne sont pas au programme de cette semaine.

Prévisions pour la semaine suivante (17 au 21 janvier) : même chose, avec le chapitre de probabilit és complété.

Semaine n°14 (du 17/01 au 21/01 2011)

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera noté systématiquement en dessous de la moyenne.

Fonctions à deux variables

- Représentation de domaines de définitions simples de fonctions à deux variables (faisant intervenir équations de droites ou de cercles centrés à l'origine).
- Lignes de niveaux, applications partielles, dérivées partielles et dérivées partielles secondes (aucun résultat théorique n'a été énoncé).
- Points critiques (aucune méthode de détermination de la nature de ces points critiques n'est au programme).

Probabilités

- Vocabulaire : univers, évènements (certain, impossible, incompatibles, système complet d'évènements), tribus, lois de probabilité.
- Propriétés élémentaires des probabilités : **probabilité d'un complémentaire**, probabilité d'une union, formule de Poincaré.
- Équiprobabilité sur un univers fini.
- Probabilités conditionnelles : formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, **formule de Bayes**.
- Chaines de Markov (pas d'utilisation de graphe, naturellement, mais ce type de problème doit être familier).
- Indépendance, indépendance mutuelle d'une famille d'évènements, **indépendance de A et $\bar{B}$ lorsque A et B sont indépendants**.

Prévisions pour la semaine suivante (24 au 28 janvier) : probabilités, calcul matriciel.

Semaine n°15 (du 24/01 au 28/01 2011)

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera noté systématiquement en dessous de la moyenne.

Probabilités

- Vocabulaire : univers, évènements (certain, impossible, incompatibles, système complet d'évènements), tribus, lois de probabilité.
- Propriétés élémentaires des probabilités : **probabilité d'un complémentaire**, probabilité d'une union, formule de Poincaré.
- Équiprobabilité sur un univers fini.
- Probabilités conditionnelles : formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, **formule de Bayes**.
- Chaines de Markov (pas d'utilisation de graphe, naturellement, mais ce type de problème doit être familier).
- Indépendance, indépendance mutuelle d'une famille d'évènements, **indépendance de A et $\bar{B}$ lorsque A et B sont indépendants**.

Calcul matriciel

- Vocabulaire et notations : matrices carrées, triangulaires, matrice nulle, matrice identité, matrices diagonales et nilpotentes.
- Opérations sur les matrices : somme, produit par un réel, produit, transposée, puissances de matrices, formule du binome de Newton.

Note : les inverses de matrices n'ont pas été vus pour l'instant, un chapitre ultérieur leur sera consacré.

Prévisions pour la semaine suivante (31 janvier au 4 février) : calcul matriciel, limites.

Semaine n°16 (du 31/01 au 04/02 2011)

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera noté systématiquement en dessous de la moyenne.

Calcul matriciel

- Vocabulaire et notations : matrices carrées, triangulaires, matrice nulle, matrice identité, matrices diagonales et nilpotentes.
- Opérations sur les matrices : somme, produit par un réel, produit, transposée, puissances de matrices, formule du binome de Newton.
- Quelques exemples de chaines de Markov faisant intervenir un calcul de puissances matricielles ont été vus en cours.

Note : les inverses de matrices n'ont pas été vus pour l'instant, un chapitre ultérieur leur sera consacré.

Limites

- Définition des différents types de limites pour une fonction (limites finies, limites en $\pm\infty$, limites infinies).
- Opérations sur les limites.
- Négligeabilité et équivalence.
- Asymptotes et branches infinies (le **plan d'étude général des branches infinies** est à connaitre parfaitement).

Prévisions pour la semaine suivante (7 février au 11 février) : limites, continuité.

Semaine n°17 (du 07/02 au 11/02 2011)

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera noté systématiquement en dessous de la moyenne.

Limites, continuité

- Définition des différents types de limites pour une fonction (limites finies, limites en $\pm\infty$, limites infinies).
- Opérations sur les limites.
- Négligeabilité et équivalence.
- Asymptotes et branches infinies (le **plan d'étude général des branches infinies** est à connaitre parfaitement).
- Théorème des gendarmes et autres utilisations d'inégalités pour les calculs de limites.
- Continuité (en un point, sur un intervalle, théorèmes généraux).
- Théorème des valeurs intermédiaires (non prouvé) et conséquences. La **méthode de dichotomie** doit pouvoir être expliquée clairement (et la propriété correspondante énoncée correctement).
- Théorème de la bijection (non prouvé) et applications, notamment à l'étude de suites implicites.

Prévisions pour la semaine suivante : continuité, variables aléatoires (début).

Semaine n°18 (du 28/02 au 04/03 2011)

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera noté systématiquement en dessous de la moyenne.

Limites, continuité

- Définition des différents types de limites pour une fonction (limites finies, limites en $\pm\infty$, limites infinies).
- Opérations sur les limites.
- Négligeabilité et équivalence.
- Asymptotes et branches infinies (le **plan d'étude général des branches infinies** est à connaitre parfaitement).
- Théorème des gendarmes et autres utilisations d'inégalités pour les calculs de limites.
- Continuité (en un point, sur un intervalle, théorèmes généraux).
- Théorème des valeurs intermédiaires (non prouvé) et conséquences. La **méthode de dichotomie** doit pouvoir être expliquée clairement (et la propriété correspondante énoncée correctement).
- Théorème de la bijection (non prouvé) et applications, notamment à l'étude de suites implicites.

Variables aléatoires finies

- Définition d'une variable aléatoire, loi d'une variable aléatoire.
- Fonction de répartition : définition, passage de la loi à la fonction de répartition et vice-versa.
- Espérance d'une variable aléatoire : définition, linéarité de l'espérance, théorème de trasfert (pas de démonstrations), espérance d'une constante et d'une variable indicatrice, variables aléatoires centrées.

Prévisions pour la semaine suivante : variables aléatoires finies (avec variances et peut-être un peu de lois usuelles en plus).

Semaine n°19 (du 07/03 au 11/03 2011)

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera noté systématiquement en dessous de la moyenne.

Variables aléatoires

- Définition, notations classiques, loi d'une variable aléatoire (variables finies uniquement, donc sous forme de tableau).
- Fonction de répartition (on doit savoir passer du tableau donnant la loi à la fonction de répartition en escalier, et vice-versa).
- Espérance d'une variable aléatoire, espérance d'une constante, d'une variable indicatrice d'un évènement, linéarité de l'espérance, variable aléatoire centrée, théorème de transfert ($E(g(X)) = \sum_{k\in X(\Omega)} g(k)P(X=k)$).
- Moments d'ordre supérieur, variance, écart-type, **formule** $V(aX+b) = a^2V(X)$, **théorème de König-Huygens**, variable réduite.
- Lois usuelles finies : loi uniforme sur $\{1;\dots;n\}$ (**calcul de l'espérance et de la variance**) ; loi de Bernoulli de paramètre p ; loi binômiale de paramètre (n,p) (**calcul de l'espérance** et de la variance) ; loi hypergéométrique de paramètre (N,n,p) (calcul de l'espérance et de la variance).
- Note : les lois usuelles seront encore fraîches dans les mémoires, surtout en début de semaine.

Prévisions pour la semaine suivante (14 au 18 mars) : même programme.

Semaine n°20 (du 14/03 au 18/03 2010)

Même programme que la semaine précédente.

Semaine n°21 (du 21/03 au 25/03 2011)

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera noté systématiquement en dessous de la moyenne.

Dérivation

- Définition du nombre dérivé comme limite du taux d'accroissement, interprétation géométrique (les exemples du cours, **calculs des dérivées des fonctions carré et racine carrée à l'aide de la définition**, sont à savoir refaire).
- Développement limité à l'ordre 1, équation d'une tangente, lien entre dérivabilité et continuité.
- Dérivée à gauche et à droite en un point.
- Formule de dérivation d'une somme, d'un produit, d'un inverse, d'un quotient, d'une composée et d'une réciproque. La **formule pour le produit** est à savoir démontrer.
- Dérivées des fonctions usuelles (puissances quelconques, ln et exp). La **preuve par récurrence de la dérivée de x^n (pour $n > 0$)** est à connaitre.
- Définition des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$, $\mathcal{D}^n$ et $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle, et théorème de prolongement C^1 (admis). Stabilité du caractère $\mathcal{C}^\infty$ par somme, produit et composée. Caractère $\mathcal{C}^\infty$ des fonctions usuelles sur leur domaine de dérivabilité.
- Convexité (définition géométrique : la courbe est au-dessus de ses tangentes, la définition formelle a simplement été citée et n'est pas exigible), caractérisation pour les fonction C^2, points d'inflexion.

Prévisions pour la semaine suivante (28 mars au 1er avril) : même programme, plus l'IAF et l'application aux suites récurrentes.

Semaine n°22 (du 28/03 au 01/04 2011)

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera noté systématiquement en dessous de la moyenne.

Dérivation

- Définition du nombre dérivé comme limite du taux d'accroissement, interprétation géométrique (les exemples du cours, **calculs des dérivées des fonctions carré et racine carrée à l'aide de la définition**, sont à savoir refaire).
- Développement limité à l'ordre 1, équation d'une tangente, lien entre dérivabilité et continuité.
- Dérivée à gauche et à droite en un point.
- Formule de dérivation d'une somme, d'un produit, d'un inverse, d'un quotient, d'une composée et d'une réciproque. La **formule pour le produit** est à savoir démontrer.
- Dérivées des fonctions usuelles (puissances quelconques, ln et exp). La **preuve par récurrence de la dérivée de x^n (pour $n > 0$)** est à connaitre.
- Définition des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ et $\mathcal{D}^n$ sur un intervalle, et théorème de prolongement C^1 (admis). Stabilité du caractère $\mathcal{C}^\infty$ par somme, produit et composée. Caractère $\mathcal{C}^\infty$ des fonctions usuelles sur leur domaine de définition.
- Convexité (définition géométrique : la courbe est au-dessus de ses tangentes, la définition formelle a simplement été citée et n'est pas exigible), caractérisation pour les fonction $\mathcal{C}^2$, points d'inflexion.
- Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis, Inégalité des accroissements finis (deux versions, l'une avec valeur absolue et l'autre sans).
- Étude de suites récurrentes : représentation graphique, étude de convergence et majoration de l'erreur via IAF.

Prévisions pour la semaine suivante (4 au 8 avril) : suites récurrentes, inversion de matrices.

Semaine n°23 (du 04/04 au 08/04 2011)

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera noté systématiquement en dessous de la moyenne.

Dérivation

- Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis, Inégalité des accroissements finis (deux versions, l'une avec valeur absolue et l'autre sans).
- Étude de suites récurrentes : représentation graphique, étude de convergence et majoration de l'erreur via IAF.

Inversion de matrices

- Définition, propriétés élémentaires (inverse d'un produit, inverse d'une puissance).
- Lien entre systèmes linéaires et inversion de matrices, pivot de Gauss pour l'inversion de matrices.
- Calcul de puissances de matrices à l'aide de relations du type $P^{-1}AP = D$, où D est une matrice diagonale (naturellement, il ne s'agit pas de savoir diagonaliser, la matrice P sera toujours fournie).

Prévisions pour la semaine de la rentrée : inversion de matrices.

Semaine n°24 (du 25/04 au 29/04 2011)

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera noté systématiquement en dessous de la moyenne.

Inversion de matrices

- Définition, propriétés élémentaires (inverse d'un produit, inverse d'une puissance).
- Lien entre systèmes linéaires et inversion de matrices, pivot de Gauss pour l'inversion de matrices.
- Calcul de puissances de matrices à l'aide de relations du type $P^{-1}AP = D$, où D est une matrice diagonale (naturellement, il ne s'agit pas de savoir diagonaliser, la matrice P sera toujours fournie).
- Exemples d'application à des études de chaines de Markov.

Intégration

- Primitives de fonctions continues : existence (utilisation de la fonction aire sous la courbe), unicité de la primitive vérifiant $F(x_0) = y_0$, primitives de fonctions usuelles (qui peuvent naturellement faire l'objet d'une **question de cours**).
- Définition de l'intégrale, propriétés élémentaires : relation de Chasles, linéarité, intégration d'inégalités.
- **Intégration par parties**.
- Exemples d'études de suites d'intégrales (calcul de limite via encadrement, d'équivalent à l'aide d'une IPP).

Prévisions pour la semaine suivante (2 au 6 mai) : intégration (tout le chapitre).

Semaine n°25 (du 02/05 au 06/05 2010)

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera noté systématiquement en dessous de la moyenne.

Intégration

- Primitives de fonctions continues : existence (utilisation de la fonction aire sous la courbe), unicité de la primitive vérifiant $F(x_0) = y_0$, primitives de fonctions usuelles (qui peuvent naturellement faire l'objet d'une **question de cours**).
- Définition de l'intégrale, propriétés élémentaires : relation de Chasles, linéarité, intégration d'inégalités.
- **Intégration par parties**.
- Exemples d'études de suites d'intégrales (calcul de limite via encadrement, d'équivalent à l'aide d'une IPP).
- Formule de changement de variable (tout changement de variable autre qu'affine devant être donné).
- Fonctions définie par une intégrale (on doit notamment savoir dériver une fonction définie par une intégrale à bornes variables).
- Compléments : sommes de Riemann (convergence non démontrée).

Prévisions pour la semaine suivante (9 au 13 mai) : sûrement le même programme (peut-être un peu de variables infinies).

Semaine n°26 (du 09/05 au 13/05 2010)

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera noté systématiquement en dessous de la moyenne.

Intégration

- Primitives de fonctions continues : existence (utilisation de la fonction aire sous la courbe), unicité de la primitive vérifiant $F(x_0) = y_0$, primitives de fonctions usuelles (qui peuvent naturellement faire l'objet d'une **question de cours**).
- Définition de l'intégrale, propriétés élémentaires : relation de Chasles, linéarité, intégration d'inégalités.
- **Intégration par parties**.
- Exemples d'études de suites d'intégrales (calcul de limite via encadrement, d'équivalent à l'aide d'une IPP).
- Formule de changement de variable (tout changement de variable autre qu'affine devant être donné).
- Fonctions définie par une intégrale (on doit notamment savoir dériver une fonction définie par une intégrale à bornes variables).
- Compléments : sommes de Riemann (convergence non démontrée).

Variables aléatoires infinies

- Compléments de probabilités sur les univers infinis : évènements négligeables et presque sûrs, théorème de la limite monotone.
- Variables aléatoires discrètes infinies : définition, loi, espérance, variance.
- Les lois classiques infinies (loi de Poisson et loi géométrique) ne sont **PAS** au programme cette semaine.

Prévisions pour la semaine suivante (23 au 27 mai) : variables infinies.

Semaine n°28 (du 23/05 au 27/05 2011)

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera noté systématiquement en dessous de la moyenne.

Variables aléatoires infinies

- Compléments de probabilités : suites monotones d'évènements et limite monotone ; évènements presque sûrs et négligeables.
- Variables infinies : loi, fonction de répartition, espérance, variance.
- Lois usuelles infinies : loi géométrique (**calcul de l'espérance et de la variance**), loi de Poisson (**calcul de l'espérance et de la variance**), **loi de Poisson comme limite de lois binômiales** de paramètre $\left(n, \dfrac{\lambda}{n}\right)$.

Prévisions pour la semaine suivante (30 mai au 3 juin) : même programme, et un peu de couples de variables.

Semaine n°29 (du 30/05 au 03/06 2011)

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera noté systématiquement en dessous de la moyenne.

Variables aléatoires infinies

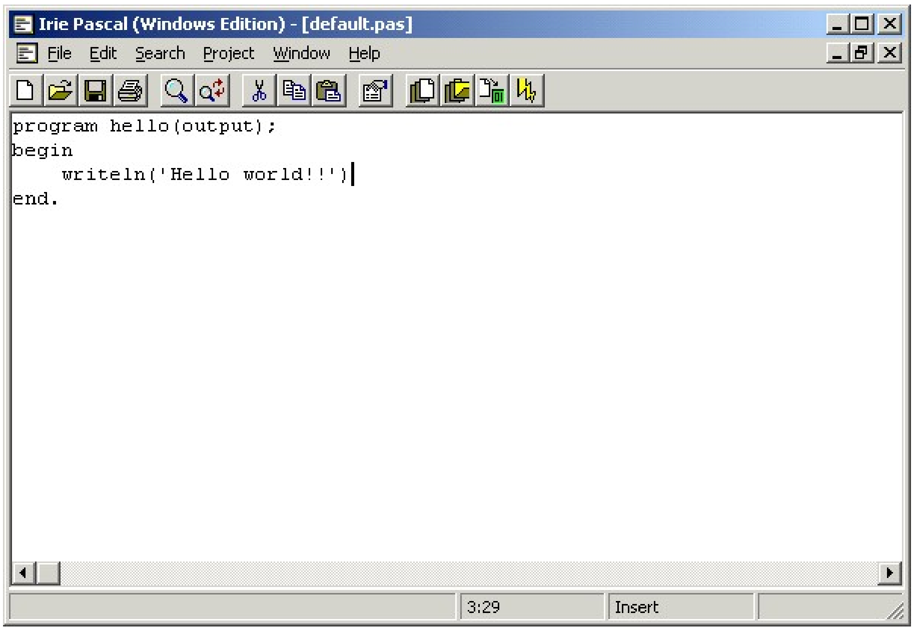
- Compléments de probabilités : suites monotones d'évènements et limite monotone ; évènements presque sûrs et négligeables.
- Variables infinies : loi, fonction de répartition, espérance, variance.
- Lois usuelles infinies : loi géométrique (**calcul de l'espérance et de la variance**), loi de Poisson (**calcul de l'espérance et de la variance**), **loi de Poisson comme limite de lois binômiales** de paramètre $\left(n, \dfrac{\lambda}{n}\right)$.

Couples de variables aléatoires

- Loi conjointe, lois marginales et lois conditionnelles.
- Indépendance de variables aléatoires.
- **Sommes de variables indépendantes suivant des lois binômiales de même paramètre p, somme de variables indépendantes suivant des lois de Poisson.**

Cinquième partie

Informatique


Irie Pascal (Windows Edition) - [default.pas]
File Edit Search Project Window Help
program hello(output);
begin
writeln('Hello world!!')
end.
3:29
Insert

TD1 : Introduction à la programmation et à Pascal

Nous y voila, premier TD d'informatique de l'année, vous allez enfin savoir ce qui vous attend dans cette matière qui occupe une place un peu particulière en prépa commerciale. Mettons déjà une première chose au point : il ne s'agit pas d'apprendre à manipuler un quelconque outil ou logiciel informatique, mais bel et bien de se concentrer sur la pratique de la programmation, et plus particulièrement de la programmation appliquée aux mathématiques. D'où le paragraphe suivant :

Qu'est-ce que la programmation ?

Le principe de base de la programmation est simple : faire faire à une machine des choses qui nous demanderaient trop de temps ou de calculs. La programmation est de nos jours présente à peu près partout autour de nous : un avion en pilotage automatique, ou le jeu video dernier cri, fonctionnent à grands coups de programmes. La machine, qui a le grand avantage d'avoir des limitations beaucoup moins contraignantes qu'un être humain pour ce qui est de la capacité de calcul, a toutefois un gros défaut, celui de ne pas avoir de cerveau. Pour lui faire faire ce qu'on veut, il est donc essentiel de décomposer le travail en une suite d'instructions suffisamment élémentaires pour pouvoir être effectuées de façon mécanique par la machine. Un langage de programmation, c'est donc en gros la chose suivante : une liste de commandes relativement basiques et compréhensibles par la machine, à partir desquelles nous pourrons imaginer des algorithmes et construire des programmes permettant de faire des choses plus complexes. Exemple idiot pour vous donner une idée de ce que ça signifie : si votre machine sait multiplier deux nombres, vous pouvez écrire un programme permettant d'élever un nombre au carré (il suffit de le multiplier par lui-même).

Outre la liste des instructions disponibles, il existe une autre donnée inhérente au langage de programmation que l'apprenti programmeur se doit de maitriser : la syntaxe. En effet, la machine, décidémment très bête, ne comprendra vos instructions que si elles respectent scrupuleusement des règles de syntaxe très précises. C'est un peu comme si vous aviez en face de vous quelqu'un qui ne comprend pas une phrase sous prétexte que vous avez mal accordé le verbe, ou même qu'il manque un signe de ponctuation ou une majuscule. C'est incontestablement le côté le plus rebutant de la programmation au début : on a l'impression de ne jamais arriver à faire un programme sans erreurs de syntaxe...

Un programme, à quoi ça ressemble ?

L'écriture d'un programme se déroule en trois phases :

- l'écriture proprement dite, où le programmeur tape ses instructions à la suite les unes des autres, dans le langage adéquat (le langage PASCAL est un des plus simples qui soient, vous avez de la chance).
- la compilation, où la machine relit votre programme en vérifiant la syntaxe. Si elle trouve une erreu, elle vous le signalera (en essayant de vous expliquer quelle est l'erreur, mais ce n'est pas toujours très compréhensible). S'il n'y a pas d'erreur, votre programme est prêt à être exécuté, ce qui ne signifie absolument pas qu'il va faire ce que vous voulez (la machine ne peut pas deviner à quoi est censé servir votre programme !).
- l'exécution : vous faites tourner le programme, la machine exécute vos instructions et, habituellement, vous donne un résultat. Il peut aussi (hélas) y avoir des problèmes pendant cette étape : si vous demandez par exemple à l'intérieur du programme à faire une division par un nombre qui se trouve être égal à zéro, le programme va compiler (l'opération de division est écrite correctement), mais va renvoyer une erreur à l'exécution.

Quant au programme proprement dit, c'est une suite de lignes de texte ayant la structure suivante :

- une ligne d'en-tête qui annonce le nom du programme et ressemble à ceci :
  PROGRAM nomduprogramme ;

- une zone de déclarations, où le programmeur doit annoncer tout ce qu'il va utiliser à l'intérieur du programme (c'est un peu comme la douane, vous devez déclarer tout ce qui se trouve dans votre programme). Pour l'instant, nous nous conterons de déclarer de temps à autre des variables. Par exemple, si on veut écrire un programme résolvant les équations du second degré, les calculs vons faire intervenir des nombres notés a, b, c et Δ. Il faut préciser en début de programme que nous utiliserons des variables appelées a, b, c et Δ, et également dire qu'il s'agira de nombres réels, ce qu'on fait de la façon suivante :
  VAR a, b, c, delta : real;
  Le « real » (réel) en fin de ligne est ce qu'on appelle le type de la variable, sa déclaration est obligatoire. Nous verrons un peu plus tard quels types de variables on peut définir en Pascal, et les quelques subtilités que ces histoires de variables et de types entrainent. Pour l'instant, on ne travaillera qu'avec des « real ».
- enfin, le corps du programme, qui débute nécessairement par un **BEGIN** et se conclut par un **END.** (oui, oui, avec un . derrière, si vous l'oubliez, Pascal va râler), et qui contient entre ces deux mots-clés les instructions du programme, séparées par des **;** (là encore, ces ; sont indispensables, tout comme ils le sont après l'en-tête et la déclaration des variables).

Quelques instructions histoire de pouvoir écrire nos premiers programmes

On ne va provisoirement utiliser que trois types d'instructions dans nos programmes :

- WriteLn() (ou Write, qui fait la même chose sans sauter de ligne, et n'est donc à peu près jamais utilisée pour des raisons de lisibilité) sert à écrire quelque chose à l'écran lors de l'exécution. Si on veut écrire du texte, il faut le mettre entre apostrophes, sinon Pascal croit que vous voulez afficher à l'écran la *valeur* d'une variable dont le nom est le texte en question.
  WriteLn('youhou'); va ainsi écrire youhou à l'écran
  WriteLn(youhou); va afficher la valeur de la variable youhou (et s'il n'y a pas de variable s'appelant youhou, ce qui est au fond assez probable, Pascal va râler).
- ReadLn() (ou Read) permet de « lire » quelque chose que l'utilisateur tape à l'écran, et de l'affecter à une variable (précisée dans la parenthèse).
  ReadLn(a); va ainsi attendre que l'utilisateur tape une valeur puis appuye sur Entrée, et va affecter cette valeur à la variable a.
- l'instruction d'affectation est (de loin) la plus utilisée à l'intérieur d'un programme. Elle permet de stocker une valeur dans une des variables définies en début de programme. En gros, une variable est une case dans la mémoire de la machine sur laquelle vous avez mis une étiquette (le nom de la variable), et lui affecter une valeur revient à mettre cette valeur dans la case en question. Vous pouvez ensuite réutiliser cette valeur via son nom de variable. Les affectations en Pascal se font à l'aide de la syntaxe nomdevariable := valeur
  a :=7/2 ; va ainsi stocker la valeur $\dfrac{7}{2}$ dans la variable qui s'appelle a.
  a :=2*b ; va stocker dans la variable a le double de la valeur actuellement dans la variable b.

TD2 : Instructions conditionnelles

La semaine dernière, nous avons simplement vu comment notre nouvel ami Pascal s'y prenait pour communiquer avec nous, à savoir sa façon un peu particulière de lire et d'écrire. Comme nous aurons du mal à faire des programmes intéressants, uniquement avec ces deux concepts, je vous donne tout de suite une liste d'instructions qui, contrairement aux Read et Write, ne vont rien effectuer de visible à l'exécution du programme, mais seront la plupart du temps des calculs intermédiaires menant à la résolution du problème posé.

- La plus importante est l'instruction d'affectation, qui permet de stocker une valeur dans une variable (préalablement déclarée, naturellement). Vous me direz « Ne fait-on pas un ReadLn pour ce genre de choses ? ». Oui, si vous voulez que ce soit l'utilisateur qui choisisse la valeur à stocker, mais pas si celle-ci découle d'un calcul. Reprenons l'exemple d'une résolution d'équation du second degré : c'est l'utilisateur qui choisit a, b et c, mais ensuite la machine doit calculer la valeur de Δ. Les instructions d'affectation se font en Pascal sous la forme **a := valeur ;** ce texte signifiant qu'on affecte la valeur à droite du signe := dans la variable portant le nom indiqué à gauche. Ainsi, si on veut faire calculer un discriminant à Pascal, on lui dira **delta := b*b-4*a*c ;** . Pascal est naturellement capable d'effectuer les opérations élémentaires, mais comprend aussi les fonctions usuelles comme ln ou exp.
- Les instructions conditionnelles permettent d'effectuer une action (un calcul par exemple) si une certaine condition est vérifiée, et de faire autre chose sinon. La syntaxe intuitive est à peu près celle-ci : SI la condition est vérifiée, ALORS il faut faire ceci, SINON il faut faire cela. Ca tombe bien, la syntaxe Pascal est essentiellement la même, utilisant les trois mots-clés **IF**, **THEN** et **ELSE**. Il est à noter que l'ensemble d'une instruction conditionnelle est considérée comme une seule commande, il n'y a donc qu'un seul ; à mettre à la fin de l'instruction suivant le **ELSE**. Le **ELSE** en question est d'ailleurs facultatif : on peut décider de donner un ordre à Pascal si une certaine condition est vérifiée, mais de ne rien faire dans le cas contraire, auquel cas un **IF** suivi d'un **THEN** suffit. Un exemple pour clarifier les choses :

  ```
  PROGRAM valeur_absolue ;
  VAR x : real ;
  BEGIN
  WriteLn('Entrez la valeur de x.') ;
  ReadLn(x) ;
  IF x < 0 THEN WriteLn(-x) ELSE WriteLn(x) ;
  END.
  ```

  Ce programme calcule la valeur absolue d'un nombre entré par l'utilisateur. Les conditions apparaissant derrière le **IF** seront la plupart du temps du style $\mathbf{x} > \mathbf{a}$, ou $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ (notez que dans ce dernier cas, le signe = est bien compris par Pascal comme une demande de vérifier une égalité, et non pas une affectation qui utiliserait un :=).
- rien à voir avec les instructions, je vous donne une petite liste des types les plus fréquemment utilisés en Pascal (je vous rappelle que le type est le mot qu'on indique après le : lors d'une déclaration du variable pour indiquer de quel sorte d'objet il s'agit. Nous avons déjà vu STRING (chaîne de caractère) et REAL (nombre réel), il existe aussi INTEGER (nombre entier), LONGINT (gros nombre entier, nous verrons un jour l'utilité de ce truc), et bien d'autres que nous verrons au cours de l'année.

Exercices

- Écrire un programme demandant trois nombres à l'utilisateur et calculant leur moyenne.
- Écrire un programme calculant la plus grande de deux valeurs saisies par l'utilisateur.
- Faire la même chose avec trois valeurs.

- Écrire un programme effectuant la résolution des équations du premier degré, en faisant bien attention aux cas particuliers.
- Écrire un programme effectuant la résolution d'équations du second degré.

Corrigé du TD2

Voici les programmes demandés lors de ce TD :

```
PROGRAM moyenne;
USES wincrt;
VAR a,b,c : real;
BEGIN
WriteLn('Choisissez trois nombres réels');
ReadLn(a,b,c);
WriteLn('La moyenne de vos nombres vaut ',(a+b+c)/3);
END.
```

```
PROGRAM Max2;
USES wincrt;
VAR x,y : real;
BEGIN
WriteLn('Choisissez deux nombres réels');
ReadLn(x,y);
IF x>y THEN WriteLn('Le plus grand nombre est ',x)
        ELSE WriteLn('Le plus grand nombre est ',y);
END.
```

```
PROGRAM Max3;
USES wincrt;
VAR x,y,z : real;
BEGIN
WriteLn('Choisissez trois nombres réels');
ReadLn(x,y,z);
IF x>y THEN IF x>z THEN WriteLn('Le plus grand nombre est ',x)
                        ELSE WriteLn('Le plus grand nombre est ',z)
        ELSE IF y>z THEN WriteLn('Le plus grand nombre est ',y)
                       ELSE WriteLn('Le plus grand nombre est ',z);
END.
```

```
PROGRAM premier_degre;
USES wincrt;
VAR a,b : real;
BEGIN
WriteLn('Choisissez les coefficients a et b de votre équation');
ReadLn(a,b);
IF a<>0 THEN WriteLn ('La solution unique de votre équation est ',-b/a)
          ELSE IF b<>0 THEN WriteLn ('Il n'y a pas de solution')
                         ELSE WriteLn('Tous les réels sont solution');
END.
```

```
PROGRAM second_degre;
USES wincrt;
VAR a,b,c,d : real;
BEGIN
WriteLn('Choisissez les coefficients a, b et c de votre équation');
ReadLn(a,b,c);
d :=b*b-4*a*c;
```

```
IF d>0 THEN WriteLn('Il y a deux solutions : x1= ',(-b-sqrt(d))/(2*a),' et x2= ',(-b+sqrt(d))/(2*a))
        ELSE IF d=0 THEN WriteLn('L'unique solution est ',-b/(2*a))
                      ELSE WriteLn ('Il n'y a pas de solution') ;
END.
```

TD3 : Boucles FOR

Ce TD va vous rappeler de bons souvenirs de cours de maths récents, puisque le principe d'une boucle FOR en Pascal est assez proche de celui du symbole $\sum$ en maths, à savoir « supprimer des petits points ». Une boucle FOR est donc une instruction répétitive permettant d'effectuer plusieurs fois de suite des calculs similaires. Des exemples classiques en maths sont les calculs de sommes, mais aussi les calculs de termes d'une suite définie par une formule de récurrence. L'instruction FOR obéit à la syntaxe suivante :

FOR i := 1 to n DO instruction ;

Comme en mathématiques quand on manipule une somme, la variable i est muette et vous pouvez donc lui donner n'importe quel autre nom. Elle devra bien sûr, comme toute variable, être déclarée en début de programme, avec un type integer. Toujours comme en maths, votre variable prendra toutes les valeurs entières entre la valeur initiale et la valeur finale stipulées. Les instructions placées à l'intérieur de la boucle peuvent être des calculs faisant intervenir la variable i (comme en maths quand on calcule par exemple $\sum_{i=1}^{i=12} i^2$), mais il est très fortement déconseillé de modifier la valeur de i à l'intérieur de la boucle, sous d'obtenir des bugs étranges (notez que i augmente tout seul à l'intérieur de la boucle). Dernier détail, on a le droit de faire des boucles où la valeur de i diminue au lieu d'augmenter, il suffit de remplacer dans la syntaxe le mot TO par DOWNTO. Petit exemple de programme utilisant une boucle FOR :

```
PROGRAM suite;
VAR u : real;
i,n : integer;
BEGIN
WriteLn('Choisissez la valeur de n');
ReadLn(n);
u := 1;
FOR i := 1 to n do u := u/2 + 1/u;
WriteLn('u_n=',u);
END.
```

Dans le cas où l'on souhaite effectuer plusieurs instructions à chaque étape de la boucle, on encadrera ces instructions par un BEGIN et un END (sinon, seule la première sera effectuée à chaque étape, et les suivantes seulement quand la boucle sera terminée).

Petits exercices

1. Écrire un programme calculant $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$, pour une valeur de n choisie par l'utilisateur.
2. Écrire un programme calculant $n!$, pour une valeur de n choisi par l'utilisateur.
3. Écrire un programme calculant, pour un entier n choisi par l'utilisateur, la valeur du terme d'indice n de la suite de Fibonacci (définie, rappelons-le, par $u_0 = u_1 = 1$ puis $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$).
4. Écrire un programme qui calcule et affiche les n premières valeurs de la suite (u_n) définie par $u_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!}$.

Corrigé du TD3

Petits exercices

1. PROGRAM somme ;
   USES wincrt ;
   VAR i,n,s : integer ;
   BEGIN
   WriteLn('Choissez la valeur de l'entier n') ;
   ReadLn(n) ;
   s := 0 ;
   FOR i := 1 TO n DO s := s+1/i ;
   WriteLn(s) ;
   END.
2. PROGRAM factorielle ;
   USES wincrt ;
   VAR i,n,p : integer ;
   BEGIN
   WriteLn('Choisissez la valeur de n') ;
   ReadLn(n) ;
   p := 1 ;
   FOR i := 1 TO n DO p := p*i ;
   WriteLn(p) ;
   END.
3. PROGRAM fibonacci ;
   USES wincrt ;
   VAR i,n,u,v,w : integer ;
   BEGIN
   WriteLn('Choisissez n') ;
   ReadLn(n) ;
   u := 0 ; v := 1 ;
   FOR i := 2 TO n DO
   BEGIN
   w := u+v ;
   u := v ;
   v := w ;
   END ;
   WriteLn(v) ;
   END.
4. PROGRAM suitecompliquee ;
   USES wincrt ;
   VAR i,n,p : integer ; u : real ;
   BEGIN
   WriteLn('Choisissez la valeur de n') ;
   ReadLn(n) ;
   u := 1 ; p := 1 ;

```
FOR i := 1 TO n DO
BEGIN
p := p*i ;
u := u+1/p ;
END ;
WriteLn(u) ;
END.
```

TD4 : Boucles REPEAT et WHILE

Nous avons vu lors du TD précédent, en étudiant les boucles FOR, une première façon de faire des instructions répétitives en Pascal. C'est un bon début, mais les boucles FOR présentent un défaut : il faut savoir à l'avance le nombre d'étapes du calcul, ce qui ne pose aucun problème quand il s'agit par exemple de calculer le terme d'indice n d'une suite récurrente, mais est beaucoup plus gênant quand on a envie de faire certains calculs jusqu'à ce qu'un évènement se produise. Exemple classique, on veut faire jouer l'utilisateur au jeu suivant : l'ordinateur tire un nombre au hasard entre 0 et 100, et l'utilisateur doit le deviner en utilsant le moins d'essais possible, sachant qu'à chaque essai l'ordinateur lui précise si le nombre tenté est trop grand ou trop petit. On souhaite donc que l'utilisateur propose des nombres jusqu'à ce qu'il soit tombé sur le bon nombre, on ne sait pas à l'avance le nombre d'essais nécessaire.

Les boucles REPEAT et WHILE servent donc, tout comme les boucles FOR, à faire des instructions répétitives, mais l'arrêt de la boucle sera déterminé par une condition et non plus par un nombre d'étapes donné. La différence entre les deux instructions est minime : avec une boucle REPEAT, l'instruction est effectuée avant que la condition ne soit testée, alors qu'avec une boucle WHILE, le test a lieu d'abord. Leur syntaxe respective est la suivante :

REPEAT instruction UNTIL condition ;

WHILE condition DO instruction ;

Il est souvent utile malgré tout de compter le nombre d'étapes dans une boucle de type REPEAT ou WHILE. Pour cela, la méthode consiste à créer une variable entière qui servira de compteur, à l'initialiser à la valeur 0 et à augmenter sa valeur d'une unité à chaque passage de la boucle. Par exemple, le programme suivant calcule la valeur du plus petit entier pour lequel $n! > 1000$:

```
PROGRAM tagada ;
VAR p,i : integer ;
BEGIN
i :=0 ; p :=1 ;
WHILE p<1000 DO
BEGIN
i :=i+1 ;
p :=p*i ;
END ;
WriteLn(i) ;
END.
```

Si on remplaçait la boucle WHILE par une boucle REPEAT, on calculerait exactement la même chose, mais on simplifieerait légèrement la syntaxe du programme, car on n'aurait pas besoin du BEGIN END ; qui a été nécessaire avec la boucle WHILE : en effet, tout ce qui se trouve entre les mots-clés REPEAT et UNTIL est effectué à chaque tour de boucle, quel que soit le nombre d'instructions.

Petits exercices

1. Écrire un programme permettant de jouer au jeu décrit un peu plus haut. Pour tirer un nombre aléatoire, on dispose de l'instruction **random(100)**, qui permet exactement de tirer un entier aléatoire entre 0 et 99. Par contre, pour que cette instruction fonctionne, il faut insérer la commande **Randomize ;** auparavant dans le programme (par exemple juste après le begin). Compléter le programme pour qu'il compte le nombre d'essais effectués avant de trouver la bonne réponse. Question subsidaire : quelle est la meilleure tactique à ce jeu ? Combien d'essais aupire mettra-t-on à trouver le nombre avec cette tactique ?

2. On note $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$. On admet que $\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$ (depuis le temps qu'on voit cette somme, vous allez finir par le savoir). Écrire un programme calculant la plus petite valeur de n pour laquelle $S_n > 5$, puis $S_n > 10$.
3. La suite de Syracuse est définie de la façon suivante : u_0 est un entier naturel différent de 0, et ensuite, on a $u_{n+1} = \frac{u_n}{2}$ si u_n est pair (j'ai bien dit si u_n est pair, et pas si n est pair), et $u_{n+1} = 3u_n + 1$ si u_n est impair. Vérifier à la main sur quelques exemples que la suite finit par prendre la valeur 1 (et est ensuite périodique). Écrire un programme calculant la plus petite valeur de n pour laquelle $u_n = 1$ (u_0 étant choisi par l'utilisateur). Modifier le programme pour qu'il calcule également la plus grande valeur prise par la suite.
4. On a vu en cours que les deux suites définies par $u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$ étaient adjacentes.

   Écrire un programme calculant une valeur approchée de leur limite commune à ε près, ε étant choisi par l'utilisateur.

Corrigé du TD4

Exercices sur les boucles répétitives

1. PROGRAM jeu ;
   USES wincrt ;
   VAR x,a,n : integer ;
   BEGIN
   Randomize ;
   x := Random(100) ;
   n := 0 ;
   WriteLn('Choisissez un entier compris entre 0 et 99') ;
   REPEAT
   ReadLn(a) ;
   n := n+1 ;
   IF a > x THEN WriteLn('Trop grand, essayez encore') ;
   IF a < x THEN WriteLn('Trop petit, essayez encore') ;
   UNTIL a=x ;
   Writeln('Bravo, vous avez gagné en ',n,' essais') ;
   END.
2. PROGRAM harmonique ;
   USES wincrt ;
   VAR s ; real ; n : integer ;
   BEGIN
   s := 1 ; n := 1 ;
   REPEAT
   n := n+1 ;
   s := s+1/n ;
   UNTIL s >5 ;
   WriteLn(n) ;
   END.
3. PROGRAM syracuse ;
   USES wincrt ;
   VAR u,n,m : integer ;
   BEGIN
   WriteLn('Choisissez la valeur de départ') ;
   ReadLn(u) ;
   n := 0 ; m := u ;
   REPEAT
   n := n+1 ;
   IF (u mod 2 =0) THEN u := u div 2 ELSE u := 3*u+1 ;
   IF u > m THEN m := u ;
   UNTIL u=1 ;
   WriteLn('nombre de termes : ',n) ;
   WriteLn('plus grand terme : ',m) ;
   END.

4. PROGRAM adjacentes ;

```
USES wincrt ;
VAR u,e : real ; n : integer ;
BEGIN
WriteLn('Choisir la précision de la valeur approchée') ;
ReadLn(e) ;
u := 0 ; n := 0 ;
REPEAT
n := n+1 ;
u := u+1/(n*n) ;
UNTIL 1/n < e ;
WriteLn(u) ;
END.
```

Note : ce dernier programme ne calcule que les valeurs de la suite (u_n) et pas celle de la suite (v_n), cette deuxième ne sert à rien pour le calcul de la valeur approchée de la limite. On sait que (u_n) converge vers la limite l et que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < l < v_n$, c'est-à-dire que $l \in \left]u_n ; u_n + \dfrac{1}{n}\right[$. Autrement dit, u_n est une valeur approchée de l à $\dfrac{1}{n}$ près.

TD5 : Révisions

Une dernière séance sur la manipulation de tous les types d'instruction vus jusqu'à présent ne peut pas faire de mal avant d'attaquer de nouvelles notions la semaine prochaine. Que des exercices au programme une fois de plus, donc :

Petits exercices

1. Écrire un programme calculant la somme double $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{j^2}$, pour un entier n choisi par l'utilisateur.
2. Écrire un programme qui demande à l'utilisateur un nombre réel x et un nombre entier positif n, et qui affiche la valeur de x^n. Modifier le programme pour qu'il calcule également les puissances négatives.
3. Dans cet exercice, nous allons tenter d'écrire quelques programmes permettant de déterminer si un nombre entier choisi par l'utilisateur est un nombre premier (rappel au cas où : un nombre est premier s'il n'est divisible que par 1 et par lui-même).
   - Écrire un premier programme testant si n est premier en vérifiant pour chaque entier compris entre 2 et $n-1$, si n est divisible ou non par celui-ci (on pourra réutiliser l'instruction **mod** utilisée dans un précédent TP pour caractériser la parité d'un entier). Pourquoi peut-on en fait se contenter de tester la divisibilité par les entiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{n}$? Comment modifier le programme pour en tenir compte ?
   - Améliorer ce programme pour qu'il s'arrête dès qu'il rencontre un diviseur de n (on sait alors que n n'est pas premier).
   - Écrire un programme affichant à l'écran la liste des nombres premiers inférieurs à 100.

Corrigé du TD5

1. PROGRAM sommedouble ;
   USES wincrt ;
   VAR i,j,n : integer ; s : real ;
   BEGIN
   WriteLn('Choisissez la valeur de n') ;
   ReadLn(n) ;
   s := 0 ;
   FOR j :=1 TO n DO
   FOR i :=1 TO j DO
   s :=s + i/(j*j) ;
   WriteLn(s) ;
   END.
2. PROGRAM puissance ;
   USES wincrt ;
   VAR x,p : real ; i,n : integer ;
   BEGIN
   WriteLn('Choisissez les valeurs de x et de n') ;
   ReadLn(x,n) ;
   p := 1 ;
   IF n<0 THEN x := 1/x ;
   FOR i := 1 TO n DO p := p*x ;
   WriteLn(p) ;
   END.
3. • PROGRAM premier1 ;
     USES wincrt ;
     VAR n,i : longint ;
     BEGIN
     WriteLn('Choisissez un entier n') ;
     ReadLn(n) ;
     i :=1 ;
     FOR i :=2 TO trunc(sqrt(n)) DO
     IF n mod i =0 THEN WriteLn('Pas premier, divisible par ',i) ;
     END.

     Note : l'instruction trunc n'est rien d'autre que la partie entière.

   • PROGRAM premier2 ;
     USES wincrt ;
     VAR n,i : longint ;
     BEGIN
     WriteLn('Choisissez un entier n') ;
     ReadLn(n) ;
     i :=1 ;
     REPEAT
     i :=i+1 ;
     UNTIL ((n mod i=0) OR (i >trunc(sqrt(n)))) ;
     IF (i > trunc(sqrt(n))) THEN WriteLn('Le nombre entier ',n,' est premier')
     ELSE WriteLn('Le nombre ',n,' n est pas premier car divisible par ', i) ;
     END.

- ```
  PROGRAM liste ;
  USES wincrt ;
  VAR i,j : integer ;
  BEGIN
  FOR i :=2 TO 100 DO
  BEGIN
  j := 1 ;
  REPEAT
  j := j+1 ;
  UNTIL ((i mod j=0) OR (j > trunc(sqrt(i)))) ;
  IF (j > trunc(sqrt(i))) THEN WriteLn(i) ;
  END ;
  END.
  ```
  ```

TD6 : Tableaux

Définition de types

Jusqu'à présent, nous n'avons travaillé qu'avec des types de données en PASCAL qui stockent une seule valeur à la fois (entière, réelle, ...). Il est pourtant souvent utile de stocker d'un seul coup plusieurs valeurs. Nous verrons bientôt que c'est quelque chose que nous aurons naturellement envie de faire quand nous travaillerons avec des matrices (pensez déjà que ça peut servir par exemple pour la résolution de systèmes). C'est également très utile quand on veut travailler avec des polynomes (pour lesquels il faut stocker un certain nombre de coefficients), exemple que nous utiliserons principalement pour l'instant. La façon la plus simple de représenter informatiquement un polynome est de ne conserver que les coefficients dans un tableau, par exemple par degré croissant (c'est plus facile si on veut pouvoir manipuler des polynomes de degré variable dans un même programme). Ainsi, le polynome $x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 9x - 4$ sera représenté par le tableau $[-4; 9; 5; 3; 1]$. Ca tombe bien, il existe en PASCAL un type ARRAY qui est en fait un tableau de nombres dont on spécifie à l'avance la longueur et le type de données qu'il permettra de stocker. On peut ainsi déclarer des variables de la façon suivante :

VAR miaou : ARRAY[0..10] OF real ;

Tout ce qui est après les deux points : ARRAY[0..10] OF real désigne simplement le type de la variable miaou : il s'agit d'un tableau dont les cases seront numérotées de 0 à 10 (autrement dit, un tableau à 11 cases) et dont chaque case contient un réel (on peut naturellement remplacer 0 et 10 par des entiers quelconques). La variable miaou pourra donc par exemple représenter un polynome de degré 10 (qui a bien 11 coefficients). Comme toujours, Pascal est très pontilleux sur la syntaxe, à respecter scrupuleusement. Collé au ARRAY se trouvent toujours des crochets à l'intérieur desquels deux entiers séparés par deux points (pas plus ni moins) indiquent la numérotation des éléments du tableau. On peut aussi, tant qu'on y est, définir nous-même de nouveaux types faisant intervenir des tableaux, histoire d'alléger un peu les notations dans les programmes. Une déclaration de type se fait dans l'en-tête du programme, par une ligne du genre TYPE blabla = ARRAY[p..n] OF typesimple, où n et p sont deux entiers et typesimple un type « classique », réels, entiers etc. Ainsi :

TYPE polynome = ARRAY[0..10] OF real ; VAR p,q : polynome ;

définit un nouveau type, le type polynome, qui est représenté par des tableaux de 11 réels, puis deux variables p et q de ce nouveau type, donc deux tableaux à 11 réels.

Une telle variable devra, comme toute autre, être initialisée, ce qui nécessite de donner une valeur à chacun de ses coefficients. On ne peut malheureusement pas initialiser un tableau en bloc (si vous écrivez quelque chose du genre p := 0 ; Pascal va vous dire qu'il y a incompatibilité de type car p est un tableau et 0 un réel), il faut donc faire une petite boucle pour passer en revue tous les éléments du tableau. L'élément du tableau p se trouvant dans la case numéro i est désigné en Pascal par p[i] (autrement dit, dans notre exemple, p[0], p[1], ..., p[10] sont des réels). Pour initialiser notre tableau de 11 réels en mettant des zéros dans toutes les cases, on procèdera donc ainsi :

FOR i :=0 to 10 DO p[i] :=0 ;

De la même façon, demander à l'utilisateur de saisir successivement tous les éléments d'un tableau demandera en général d'utiliser une boucle.

Exercices sur les polynomes

Dans tous les programmes nécessitant d'utiliser des polynomes, on prendra l'habitude de définir le type polynome par :

TYPE polynome := ARRAY[0..99] OF real ;

Ceci nous permet de travailler avec des polynomes dont le degré n'excède pas 99. Naturellement, si on travaille avec des polynomes de petit degré, la plupart des éléments de notre tableau seront égaux à 0.

Pour s'entrainer, nous allons écrire quelques petits programmes utilisant ce nouveau type :

1. Écrire un programme permettant de stocker dans un tableau les coefficients d'un polynome P saisis par l'utilisateur (on demandera d'abord le degré du polynome pour éviter de faire taper 95 zéros à l'utilisateur).
2. Compléter le programme précédent en lui faisant calculer la valeur de $P(0)$ et de $P(1)$ (et même de $P(2)$ si vous êtes courageux).
3. Compléter le premier programme pour lui faire calculer le polynome dérivé du polynome saisi.

Corrigé du TD6

Exercices sur les polynomes

1. ```
   PROGRAM saisie;
   USES wincrt;
   TYPE polynome = ARRAY[0..99] OF real;
   VAR p : polynome; i,d : integer;
   BEGIN
   WriteLn('Saisissez le degré de votre polynome');
   ReadLn(d);
   FOR i := 0 TO d DO
   BEGIN
   Writeln('Saisissez le coefficient de degré ',i,' de votre polynome');
   ReadLn(p[i]);
   END;
   END.
   ```
2. ```
   PROGRAM images;
   USES wincrt;
   TYPE polynome = ARRAY[0..99] OF real;
   VAR p : polynome; i,d : integer; a,b,c : real;
   BEGIN
   WriteLn('Saisissez le degré de votre polynome');
   ReadLn(d);
   FOR i := 0 TO d DO
   BEGIN
   Writeln('Saisissez le coefficient de degré ',i,' de votre polynome');
   ReadLn(p[i]);
   END;
   WriteLn('P(0)=',p[0]);
   a := p[0];
   FOR i := 1 TO d DO a := a+p[i];
   WriteLn('P(1)=',a);
   b := p[0]; c := 1;
   FOR i := 1 TO d DO
   BEGIN
   c := 2*c; b := b+p[i]*c;
   END;
   WriteLn('P(2)=',c);
   END.
   ```
3. ```
   PROGRAM derivee;
   USES wincrt;
   TYPE polynome = ARRAY[0..99] OF real;
   VAR p,q : polynome; i,d : integer;
   BEGIN
   WriteLn('Saisissez le degré de votre polynome');
   ```
   ```

```
ReadLn(d) ;
FOR i := 0 TO d DO
BEGIN
Writeln('Saisissez le coefficient de degré ',i,' de votre polynome') ;
ReadLn(p[i]) ;
END ;
FOR i := 1 TO d DO q[i-1] := i*p[i] ;
Write(q[0] :0) ;
FOR i :=1 TO d-1 DO Write('+',q[i] :0,'x^',i) ;
END.
```

TD7 : Exercices sur les tableaux

Exercice 1

Écrire un programme Pascal permettant de calculer des moyennes coefficientées. On demandera à l'utilisateur de donner le nombre de notes intervenant dans le calcul de moyenne, puis chacune des notes (qu'on classera dans un tableau), et enfin chacun des coefficients (qu'on classera dans un autre tableau). On affichera enfin la moyenne coefficientée.

Exercice 2

On cherche dans cet exercice à faire calculer à Pascal des coefficients binomiaux.

- Écrire tout d'abord un programme qui demande une valeur de n et une valeur de k à l'utilisateur et qui calcule $\binom{n}{k}$ à l'aide de la définition (quotient de factorielles). On définira les variables comme des longint pour calculer des valeurs un peu plus grandes.
- Écrire maintenant un programme qui demande seulement à l'utilisateur une valeur de n et qui affiche tous les coefficients binomiaux de la ligne numéro n du trangle de Pascal. On utilisera pour cela la formule de Pascal : autrement dit, on remplira un tableau en faisant les mêmes calculs que ceux qu'on fait quand on remplit le triangle de Pascal à la main ; au départ le tableau sera constitué d'un 1 suivi de plein de 0 puis on doit obtenir 1 1 0 ..., puis 1 2 1 0 ... aux différentes étapes de notre boucle (un seul tableau est nécessaire pour faire tourner le programme, mais faites bien attention à l'ordre dans lequel vous changez les valeurs des éléments de votre tableau).

Exercice 3

Pour les plus motivés, écrire un programme Pascal demandant deux polynomes à l'utilisateur (cf le TP précédant pour cela) et affichant leur produit (commencer par regarder à la main sur un exemple avec deux polynomes de degré 3 comment se calculent les coefficients du produit de deux polynomes).

Corrigé du TD7

Exercice 1

```
PROGRAM moyennes;
USES wincrt;
VAR t,u : ARRAY[1..99] OF real; i,n : integer; s,c : real;
BEGIN
WriteLn('Quel est le nombre de notes?');
ReadLn(n);
FOR i := 1 TO n DO
BEGIN
WriteLn('Entrez la note numéro ',i,' puis son coefficient');
ReadLn(t[i],u[i]);
END;
s := 0; c := 0;
FOR i := 1 TO n DO
BEGIN
s := s+t[i]*u[i];
c := c+u[i];
END;
WriteLn('La moyenne coefficientée est de ',s/c);
END.
```

Exercice 2

- ```
  PROGRAM coefbin;
  USES wincrt;
  VAR n,k,f,g,h : longint; i : integer;
  BEGIN
  WriteLn('Choisissez les valeurs de n et k');
  ReadLn(n,k);
  f := 1; g := 1; h :=1;
  FOR i :=1 TO n DO f := f*i;
  FOR i :=1 TO k DO g := g*i;
  FOR i :=1 TO n-k DO h := h*i;
  WriteLn(f/(g*h));
  END.
  ```
- ```
  PROGRAM coefbinleretour;
  USES wincrt;
  VAR t : ARRAY[0..99] OF integer; n,i,j : integer;
  BEGIN
  WriteLn('Choisissez un entier n');
  ReadLn(n);
  t[0] := 1;
  FOR i := 1 TO n DO
  FOR j := i DOWNTO 1 DO t[j] := t[j]+t[j-1];
  FOR i := 0 TO n DO Write(t[i],' ');
  END.
  ```

Exercice 3

```
PROGRAM produitpoly ;
USES wincrt ;
VAR p,q,r : ARRAY[0..99] OF real ; i,j,d,e : integer ;
BEGIN
WriteLn('Quel est le degré du premier polynome ?') ;
ReadLn(d) ;
FOR i := 0 TO d DO
BEGIN
WriteLn('Coefficient de degré ',i,' du premier polynome ?') ;
ReadLn(p[i]) ;
END ;
WriteLn('Quel est le degré du deuxième polynome ?') ;
ReadLn(e) ;
FOR i := 0 TO e DO
BEGIN
WriteLn('Coefficient de degré ',i,' du deuxième polynome ?') ;
ReadLn(q[i]) ;
FOR i := 0 TO d+e DO r[i] := 0 ;
FOR i := 0 TO d+e DO
FOR j := 0 TO i DO r[i] := r[i] + p[j]*q[i-j] ;
FOR i := 0 TO d+e-1 DO Write(r[i],X^,i,'+') ;
WriteLn(r[d+e],X^,d+e) ;
END.
```

TD8 : Joyeux Noël

Jouons un peu

Recopiez le programme suivant dans votre Pascal préféré (ou allez le copier-coller à l'adresse suivante : http ://www.normalesup.org/ glafon/noel.txt) :

```
program sgrat ;
uses wincrt ;
var t,u : ARRAY[0..6,0..11] OF integer ; i,j,n,a,b : integer ;
BEGIN
Randomize ;
FOR i :=0 TO 6 DO FOR j :=0 TO 11 DO t[i,j] :=0 ;
FOR i :=1 TO 5 DO FOR j :=1 TO 10 DO u[i,j] :=9 ;
FOR i :=1 TO 10 DO t[random(5)+1,random(10)+1] :=9 ;
n :=50 ;
FOR i :=1 TO 5 DO FOR j :=1 TO 10 DO IF t[i,j]=9 THEN n :=n-1 ;
FOR i :=1 TO 5 DO FOR j :=1 TO 10 DO
IF t[i,j]<>9 THEN
BEGIN
IF t[i-1,j-1]=9 THEN t[i,j] :=t[i,j]+1 ;
IF t[i-1,j]=9 THEN t[i,j] :=t[i,j]+1 ;
IF t[i-1,j+1]=9 THEN t[i,j] :=t[i,j]+1 ;
IF t[i,j-1]=9 THEN t[i,j] :=t[i,j]+1 ;
IF t[i,j+1]=9 THEN t[i,j] :=t[i,j]+1 ;
IF t[i+1,j-1]=9 THEN t[i,j] :=t[i,j]+1 ;
IF t[i+1,j]=9 THEN t[i,j] :=t[i,j]+1 ;
IF t[i+1,j+1]=9 THEN t[i,j] :=t[i,j]+1 ;
END ;
REPEAT
WriteLn('Oh la belle grille !') ;
FOR i :=1 TO 5 DO
BEGIN
FOR j :=1 TO 10 DO Write(u[i,j],' ') ;
WriteLn('') ;
END ;
WriteLn('Choisissez fsjvbkjervu') ;
ReadLn(a,b) ;
IF u[a,b]<>9 THEN WriteLn('djvbdjvb') ELSE
BEGIN
IF t[a,b]=9 THEN WriteLn('dzkvnzklvnireov') ;
n :=n-1 ;
u[a,b] :=t[a,b] ;
END ;
UNTIL (n=0) OR (t[a,b]=9) ;
IF n=0 THEN WriteLn('eflknbier') ;
END.
```

1. Faire tourner ce programmme en essayant de comprendre comment ça marche. Expliquer en particulier le rôle de la variable n, et ce à quoi correspondent les valeurs 9 dans les tableaux t et u (ils ne jouent pas le même rôle dans les deux tableaux).
2. Compléter les divers WriteLn avec des phrases ayant plus de sens.

3. Modifier le programme pour qu'il propose des grilles de taille choisies par l'utilisateur.
4. Modifier le programme pour que l'utilisateur puisse également choisir le nombre de mines maximal.
5. Modifier le programme pour que l'aspect de la grille soit plus sympathique (en ajoutant des traits horizontaux et verticaux pour bien délimiter les cases, par exemple, ou en ajoutant en haut des colonnes et à gauche des lignes le numéro de la ligne ou de la colonne).

Corrigé du TD8

Le petit programme proposé pour ce dernier TD de l'année était bien sûr censé simuler le classique jeu de démineur. La variable n représente le nombre de cases restant à déminer par le joueur (d'où l'initialisation à 50 dans le cas d'une grille 5×10, puis un passage sur la grille pour diminuer cette valeur de 50 du nombre de mines situées sur la grille ; et enfin le n := n-1 à chaque fois que le joueur teste une case). Les 9 dans la première grille désignent les mines, les autres cases sont remplies du nombre de mines adjacentes en testant brutalement la présence de mines dans les cases voisines ; les 9 dans la deuxième grille représentent simplement les cases qui n'ont pas encore été testées par le joueur. Voici un programme plus etoffé que celui proposé en TD, qui permet de choisir nombre de lignes, de colonnes et nombre maximal de mines :

```
program demineur;
uses wincrt;
var t,u : ARRAY[0..31,0..31] OF integer; i,j,n,a,b,c,l : integer;
BEGIN
Randomize;
WriteLn('Choisissez le nombre de lignes et de colonnes de la grille');
ReadLn(l,c);
FOR i :=0 TO l+1 DO FOR j :=0 TO c+1 DO t[i,j] :=0;
FOR i :=1 TO l DO FOR j :=1 TO c DO u[i,j] :=9;
WriteLn('Choisissez le nombre maximal de mines');
ReadLn(n);
FOR i :=1 TO n DO t[random(l)+1,random(c)+1] :=9;
n :=l*c;
FOR i :=1 TO l DO FOR j :=1 TO c DO IF t[i,j]=9 THEN n :=n-1;
FOR i :=1 TO l DO FOR j :=1 TO c DO
IF t[i,j]<>9 THEN
BEGIN
IF t[i-1,j-1]=9 THEN t[i,j] :=t[i,j]+1;
IF t[i-1,j]=9 THEN t[i,j] :=t[i,j]+1;
IF t[i-1,j+1]=9 THEN t[i,j] :=t[i,j]+1;
IF t[i,j-1]=9 THEN t[i,j] :=t[i,j]+1;
IF t[i,j+1]=9 THEN t[i,j] :=t[i,j]+1;
IF t[i+1,j-1]=9 THEN t[i,j] :=t[i,j]+1;
IF t[i+1,j]=9 THEN t[i,j] :=t[i,j]+1;
IF t[i+1,j+1]=9 THEN t[i,j] :=t[i,j]+1;
END;
REPEAT
WriteLn('Oh la belle grille!');
FOR i :=1 TO l DO
BEGIN
FOR j :=1 TO c DO Write(u[i,j],' ');
WriteLn('');
END;
WriteLn('Choisissez les coordonnées de la case déminer');
ReadLn(a,b);
IF u[a,b]<>9 THEN WriteLn('Case déjà essayée...') ELSE
BEGIN
IF t[a,b]=9 THEN WriteLn('Pas de chance, tu as explosé!');
n :=n-1;
u[a,b] :=t[a,b];
END;
```

```
UNTIL (n=0) OR (t[a,b]=9) ;
IF n=0 THEN WriteLn('Bravo, tu as gagné !!') ;
END.
```

TD9 : Complexité

Depuis le début de l'année, nous apprenons péniblement à écrire des algorithmes en Pascal servant à calculer des choses plus ou moins compliquées. Nous nous sommes jusqu'ici assez peu préocuppés d'optimiser nos algorithmes pour les rendre les plus efficaces possibles. C'est pourtant un souci prédominant de l'informatique actuelle. On peut en gros s'intéresser à deux choses quand on veut rendre un programme le plus performant possible :

- la quantité de mémoire utilisée par l'algorithme (ainsi, il sera toujours préférable d'utiliser le moins de variables possible dans un programme, surtout quand ce sont des variables gourmandes en mémoire comme des tableaux).
- le temps d'exécution de l'algorithme : on a intérêt à minimiser le nombre d'opérations effectuées au sein de l'agorithme pour qu'il tourne plus rapidement.

On parle de complexité en espace ou en temps pour mesurer ces deux paramètres. On ne s'intéressera pour l'instant qu'à la complexité en temps, c'est-à-dire qu'on cherchera à comparer le temps mis par différents algorithmes pour résoudre un même problème. Pour cela, on essaiera tout simplement de compter le nombre d'opérations effectuées par l'agorithme et de le comparer à la taille des données manipulées par l'algorithme. Comme nous travaillons pour l'instant avec des tableaux, la taille des données sera tout simplement le nombre d'éléments que nous utiliserons dans nos tableaux. Ainsi, si notre tableau représente un polynome, le nombre d'éléments utilisés est égal au degré du polynome plus un. On classera les algorithmes en différentes catégories selon le nombre d'opérations effectuées. On dira notamment qu'un algorithme est :

- linéaire si le nombre d'opérations est proportionnel à la taille des données (ainsi, avec des données dix fois plus volumineuses, l'algorithme mettra dix fois plus de temps).
- quadratique si le nombre d'opérations est proportionnel au carré de la taille des données (ainsi, avec des données dix fois plus volumineuses, l'algorithme mettra cent fois plus de temps).
- polynomial si le nombre d'opérations est proportionnel à une certaine puissance de la taille des données.
- exponentiel le nombre d'opérations est proportionnel à un certain nombre élevé à une puissance égale taille des données (ainsi, si le nombre d'opérations est proportiel à 2^n où n représente la taille des données, l'agorithme mettra deux fois plus de temps pour tourner à chaque fois qu'on rajoute un élément dans notre tableau, ce qui est absolument affreux).

Ainsi, si un algoritme met 1 seconde pour trier les données d'un tableau contenant 10 éléments, et qu'on veut lui faire trier un tableau à 100 éléments, il mettra :
- 10 secondes s'il est linéaire
- 100 secondes s'il est quadratique
- 1 000 secondes (soit un peu plus d'un quart d'heure) s'il est cubique
- 2^{90} secondes (soit un peu plus de 39 milliards de millards d'années) s'il est exponentiel de base 2
- 1.1^{90} secondes (environ une heure et demie) s'il est exponentiel de base 1.1

Petits exercices

Exercice 1

1. Estimer le nombre d'opérations (additions ou multiplications) effectuées par un algorithme calculant tous les coefficients binomiaux de la n-ème ligne du triangle de Pascal :
   - en utilisant la formule $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ pour chaque valeur de k.
   - en utilisant cette même formule, mais en stockant les valeurs des factorielles de façon à ne calculer qu'un seule fois chaque factorielle différente.

- en utlisant cette même formule mais en calculant les factorielles les unes après les autres en les stockant à chaque étape.
- en utilisant la formule de Pascal (algorithme vu au TD7)

2. En considérant qu'une addition est en moyenne 10 fois plus rapide qu'une multiplication, comparer le temps d'exécution de chaque algorithme pour remplir la 50 ème ligne du triangle.

Exercice 2

Déterminer le nombre de comparaisons nécessaire pour trier dans l'ordre un tableau contenant 16 éléments quand on utilise chacune des méthodes suivantes :

1. on cherche le plus petit élément du tableau, on le supprime du tableau, puis on recommence jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'éléments dans le tableau.
2. on compare les deux premiers éléments du tableau (on les échange si besoin), puis les deux suivants et ainsi de suite jusqu'au deux derniers ; on recommence 15 fois cette manoeuvre (c'est le tri à bulles que nous avons écoqué dans un précédent TP).
3. on découpe de tableau en 8 paquets de 2 ; on trie chaque paquet, puis on regroupe les paquets de 2 en paquets de 4, puis de 8, et on finit par regrouper les deux paquets de 8 (je vous laisse déterminer combien de comparaisons il faut faire à chaque étape pour regrouper dans le bon ordre).

Corrigé du TD9

Exercice 1

1. - Il y a $n-1$ multiplications à faire au numérateur pour calculer $n!$, et $n-1$ au dénominateur également ($k-1$ pour $k!$, $n-k-1$ pour l'autre factorielle, et une dernière pour multiplier les 2), et enfin une division. Le tout à faire $n+1$ fois pour remplir complètement la ligne. Soit $n+1$ divisions et $(n+1)(2n-1)$ multiplications, donc de l'ordre de $2n^3$ opérations.
   - On fera $n-1+n-2+\cdots+1 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ multiplications pour calculer toutes les factorielles, et deux opérations supplémentaires pour chaque coefficient binomial (une multiplication et une division), soit $\dfrac{n(n-1)}{2} + 2(n+1)$ opérations, donc de l'ordre de $\dfrac{n^2}{2}$ opérations.
   - Il suffit en fait d'effectuer $n-1$ multiplications pour toutes les factorielles. On a alors au total $n-1+2(n+1) = 3n+1$ opérations.
   - Cette fois-ci, on ne fera que des additions : 1 pour passer de la ligne 1 à la ligne 2, 2 pour le passage à la ligne 3 etc, jusqu'à $n-1$ pour le passage à la ligne n, donc au total $\dfrac{n(n-1)}{2}$ additions.
2. Pour la ligne 50, on a donc le choix, en considérant les deux dernières méthodes, entre 151 multiplications (ou divisions) et 1 225 additions. Si une addition est 10 fois plus rapide qu'une multiplication, la dernière méthode est légèrement plus rapide. En pratique, elle est en fait beaucoup plus efficace car toutes les méthodes à base de multiplications vont effectuer des calculs sur des entiers énormes, qui vont très vite devenir très longs.

Exercice 2

1. On a besoin de 15 comparaisons pour trouver le plus élément, puis de 14 pour le deuxième etc, soit au total $\dfrac{15 \times 16}{2} = 120$ comparaisons. Pour un tableau à n éléments, on aurait de l'ordre de $\dfrac{n^2}{2}$ comparaisons.
2. Il y a 15 comparaisons à effectuer à chaque tour, soit au total $15 \times 15 = 225$ comparaisons (on peut faire moins de comparaisons à partr du deuxième tour pour se ramener au même nombre de comparaisons que ci-dessus).
3. Il faut 8 comparaisons pour trier les paquets de 2, 4×3 comparaisons pour les regrouper en paquets de 4, puis 2×7 comparaisons pour faire 2 paquets de 8 et enfin 15 comparaisons pour la dernière étape, soit au total 49 comparaisons. Pour un tableau à n éléments, on peut prouver que le nombre de comparaisons sera de l'ordre de $n \times \ln n$, ce qui est nettement plus efficace que les deux algorithmes précédents.

TD10 : Matrices

Matrices en Pascal

Rien de très nouveau cette semaine en réalité, puisque les manipulations de matrices en Pascal ne vont faire que reprendre ce qu'on a déjà vu sur les tableaux, mais avec des tableaux à deux dimensions. Pour définir des variables représentant des matrices, on utilisera toujours des types ARRAY, mais au lieu de ne leur donner qu'une dimension (le nombre de cases, dans un tableau traditionnel), on en donnera deux : le nombre de lignes et le nombre de colonnes. Ainsi, une variable matricielle sera définie par un intitulé de ce genre (il est plus logique de numéroter à partir de 1 pour des matrices) :

```
VAR M : ARRAY[1..99,1..99] OF real;
```

En pratique, on évitera de définir des matrices trop grandes, les capacités de Pascal risquant comme souvent de nous jouer des tours. Pour accéder à l'élément situé sur la ligne i et la colonne j de la matrice M, on pourra utiliser la variable M[i,j]. Pour initialiser une matrice ou faire des calculs sur tous les éléments d'une matrice, nous aurons souvent recours à des doubles boucles, puisqu'il faudra faire varier les lignes et les colonnes. Ainsi, par exemple, pour mettre des 1 partout dans la matrice définie précédemment, on écrira :

```
FOR i := 1 TO 99 DO
FOR j := 1 TO 99 DO M[i,j] := 1;
```

Petits exercices

1. Commençons simplement : écrire un programme qui demande une matrice à l'utilisateur et l'affiche à l'écran (il faudra naturellement commencer par demander à l'utilisateur le nombre de lignes et de colonnes de la matrice, puis les coefficients). on affichera uniquement les éléments de la matrice et pas les parenthèses autour.
2. Écrire un programme affichant la transposée d'une matrice saisie par l'utilisateur.
3. Écrire un programme demandant deux matrices à l'utilisateur et calculant leur somme (en l'insultant si les matrices ne sont pas de même taille).
4. Beaucoup plus lourd : écrire un programme calculant et affichant le produit de deux matrices entrées par l'utilisateur.

Corrigé du TD10

1. ```
   PROGRAM matrice ;
   USES wincrt ;
   VAR t : ARRAY[1..20,1..20] OF real ; n,p,i,j : integer ;
   BEGIN
   WriteLn('Choisissez les dimensions de la matrice') ;
   ReadLn(n,p) ;
   FOR i := 1 TO n DO
   FOR j := 1 TO p DO
   BEGIN
   WriteLn('Coefficient ligne ',i,' colonne ',j,' ?') ;
   ReadLn(t[i,j]) ;
   END ;
   FOR i := 1 TO n DO
   BEGIN
   FOR j := 1 TO p DO Write(t[i,j],' ') ;
   WriteLn('') ;
   END ;
   END.
   ```
2. Il suffit d'inverser le rôle de i et j dans la dernière double boucle du programme précédent, c'est-à-dire de remplacer celle-ci par :
   ```
   FOR j := 1 TO p DO
   BEGIN
   FOR i := 1 TO n DO Write(t[i,j],' ') ;
   WriteLn('') ;
   END ;
   ```
3. ```
   PROGRAM sommematrices ;
   USES wincrt ;
   VAR t,u,v : ARRAY[1..20,1..20] OF real ; n,p,q,r,i,j : integer ;
   BEGIN
   WriteLn('Choisissez les dimensions de la première matrice') ;
   ReadLn(n,p) ;
   FOR i := 1 TO n DO
   FOR j := 1 TO p DO
   BEGIN
   WriteLn('Coefficient ligne ',i,' colonne ',j,' ?') ;
   ReadLn(t[i,j]) ;
   END ;
   WriteLn('Choisissez les dimensions de la deuxième matrice') ;
   ReadLn(q,r) ;
   FOR i := 1 TO q DO
   FOR j := 1 TO r DO
   BEGIN
   WriteLn('Coefficient ligne ',i,' colonne ',j,' ?') ;
   ReadLn(u[i,j]) ;
   ```

```
END;
IF (n <> q) OR (p <> r) THEN WriteLn('Les deux matrices ne sont pas sommables')
ELSE BEGIN
FOR i := 1 TO n DO
BEGIN
FOR j := 1 TO p DO
BEGIN
v[i,j] := t[i,j] + u[i,j];
Write(v[i,j],' ');
END;
WriteLn('');
END;
END;
END.
```

4.
```
PROGRAM produitmatrices;
USES wincrt;
VAR t,u,v : ARRAY[1..20,1..20] OF real; n,p,q,r,i,j,k : integer; a : real;
BEGIN
WriteLn('Choisissez les dimensions de la première matrice');
ReadLn(n,p);
FOR i := 1 TO n DO
FOR j := 1 TO p DO
BEGIN
WriteLn('Coefficient ligne ',i,' colonne ',j,' ?');
ReadLn(t[i,j]);
END;
WriteLn('Choisissez les dimensions de la deuxième matrice');
ReadLn(q,r);
FOR i := 1 TO q DO
FOR j := 1 TO r DO
BEGIN
WriteLn('Coefficient ligne ',i,' colonne ',j,' ?');
ReadLn(u[i,j]);
END;
IF (p <> q) THEN WriteLn('Les deux matrices ne sont pas multipliables')
ELSE BEGIN
FOR i := 1 TO n DO
BEGIN
FOR j := 1 TO r DO
BEGIN
a : = 0;
FOR k := 1 TO p DO a := a + t[i,k]*u[k,j];
v[i,j] := a;
Write(v[i,j],' ');
END;
WriteLn('');
```

```
END;
END;
END.
```

TD11 : Fonctions

Principe

Le langage PASCAL dispose d'un certain nombre de fonctions prédéfinies qu'on a déjà eu l'occasion d'utiliser dans nos programmes, comme la fonction racine carrée (**sqrt**) ou même les fonctions logarithme ou exponentielle (respectivement notées **ln** et **exp**). Il y a toutefois quelques manques criants (par exemple, pas de façon simple d'écrire des puissances, ou pas de raccourci pour les factorielles), et il est de toute façon utile de temps à autre de définir de nouvelles fonctions pour une utilisation limitée à un seul programme (par exemple, on cherche à effectuer via Pascal un tableau de valeurs pour la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2-3}{x^2+1}$). Cela tombe bien, puisqu'on peut définir à l'intérieur d'un programme Pascal des fonctions de toutes sortes.

Syntaxe

La définition d'une fonction se fait dans l'en-tête du programme, par exemple à la suite des déclarations de variables. Elle constitue en fait un sous-programme qui peut contenir ses propres déclarations de variables et dont le corps sera encadré par un BEGIN et un END ; (pas de END. qui est réservé pour la fin du programme complet). En effet, les fonctions Pascal sont à prendre dans le sens le plus général possible, et peuvent prendre plusieurs variables de types différents et renvoyer un résultat d'à peu près n'importe quel type également. La première chose à préciser à Pascal quand on définit une fonction sera donc le nombre de variables ainsi que leur type, et le type du résultat. cela se fait de la façon suivante :

FUNCTION nomfonction (var1 : type1 ; var2 : type2 . . . ; vark : typek) : typeresultat ;

Ainsi, la déclaration de la fonction factorielle aura pour en-tête :

FUNCTION factorielle (n : longint) :longint ;

Les variables apparaissant dans cet en-tête (ici l'entier n, le résultat ne portant pas de nom) sont définies et typées dans cet en-tête, inutile donc de les déclarer à nouveau ensuite. Par contre, on peut avoir besoin de déclarer à l'intérieur de la déclaration de fonction d'autres variables servant à calculer la valeur de la fonction (ici un indice i pour faire tourner une boucle calculant la valeur de la factorielle). Ces variables seront définies comme d'habitude par une ligne du type VAR nom : type ; à l'intérieur de la déclaration de fonction, et ne seront utilisables qu'à l'intérieur de cette même déclaration (on parle de variables **locales** par opposition aux variables **globales** qu'on définit pour l'intégralité du programme), et « disparaitront » dès que le calcul de la valeur de la fonction sera terminé. On peut même donner un même nom à une variable globale et à une variable locale, il n'y aura aucune interaction entre les deux (c'est tout de même très fortement déconseillé !). Le corps de la déclaration de fonction proprement est constitué d'instructions (comme n'importe quel corps de programme), mais il est interdit de faire apparaitre des WriteLn ou des ReadLn dedans, et il doit par contre **nécessairement** contenir une ligne du type

nomfonction :=valeur ;

qui sert à définir la fonction. La valeur dépendra a priori des variables qu'on lui a associées, et cette fonction pourra ensuite être appelée à l'intérieur du programme par la commande nomfonction(var1,var2,. . .) (comme vous le noteriez naturellement en maths). Ainsi, une fonction réelle élémentaire comme $f : x \mapsto x^2 + x$ peut être définie par la déclaration suivante :

```
FUNCTION f (x : real) : real ;
BEGIN
f := x ?x+x ;
END ;
```

Si on insère ensuite dans notre programme une ligne du genre a := f(14) ; Pascal calculera f(14) à l'aide de la définition précédente et affectera la valeur obtenue à la variable a.

Petits exercices

1. Écrire une déclaration de fonction Pascal prenant comme variables un réel et un entier, et calculant la puissance correspondante.
2. Écrire un programme Pascal affichant les images de tous les entiers compris entre -5 et 5 par la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2+3}$.
3. Écrire une déclaration de fonction Pascal calculant la factorielle d'un entier. Écrire ensuite un programme faisant appel à cette fonction pour calculer un coefficient binomial (choisi par l'utilisateur) via un quotient de factorielles.
4. Écrire un programme calculant le terme d'indice n de la suite vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, où $f(x) = e^{-x}$. Les valeurs de n et u_0 seront choisies par l'utilisateur, et on utilisera bien sûr une définition de fonction pour f.

Corrigé du TD11

1. FUNCTION puiss(x : real ; n : integer) : real ;
   VAR i : integer ; a : real ;
   BEGIN
   a := 1 ;
   FOR i := 1 TO n DO a := a*x ;
   puiss := a ;
   END ;
2. PROGRAM valeurs ;
   USES wincrt ;
   VAR i : integer ;
   FUNCTION f(x : real) : real ;
   BEGIN
   f := sqrt(x*x+3) ;
   END ;
   BEGIN
   FOR i := -5 TO 5 DO WriteLn(f(i)) ;
   END.
3. On écrit directement le programme complet :

   PROGRAM coefbin ;
   USES wincrt ;
   VAR k,p : integer ;
   FUNCTION fact(p : longint) : longint ;
   VAR i : integer ; a : longint ;
   BEGIN
   a := 1 ;
   FOR i := 1 TO p DO a := a*i ;
   fact := a ;
   END ;
   BEGIN
   WriteLn('Choisissez les valeurs de k puis de n') ;
   ReadLn(k,n) ;
   WriteLn(fact(n)/(fact(k)*fact(n-k)) ;
   END.
4. PROGRAM suite ;
   USES wincrt ;
   VAR n,i : integer ; u : real ;
   FUNCTION f(x : real) : real ;
   BEGIN
   f := exp(-x) ;
   END ;
   BEGIN
   WriteLn('Choisissez la valeur de u0, puis celle de n') ;
   ReadLn(u,n) ;
   FOR i := 1 TO n DO u := f(u) ;
   WriteLn(u) ;
   END.

Corrigé du TD12 (pas d'énoncé)

Pas d'énoncé pour cette semaine, mais un corrigé quand même. Lors de ce TD, nous avons écrit deux programmes permettant de calculer des valeurs approchées de l'unique solution de l'équation $x^3 + 2x + 1 = 0$ sur l'intervalle $[-1; 0]$ (fonction croisée dans un exemple du cours de maths). Le premier programme consistait en un simple parcours de l'intervalle :

```
PROGRAM zero ;
USES wincrt ;
VAR a : real ;
FUNCTION f (x : real) : real ;
BEGIN
f := x*x*x+2*x+1 ;
END ;
BEGIN
a := -1 ;
REPEAT a := a+0.01 ;
UNTIL f(a) >0 ;
WriteLn(a) ;
END.
```

Ce programme utilise notre connaissance du signe négatif de $f(-1)$ et calcule une valeur approchée à $0,01$ près du point d'annulation de notre fonction. Naturellement, on peut changer $0,01$ par une autre valeur plus petite, mais les calculs deviennent vite très longs. La dichotomie est beaucoup plus efficace. Nous avons donc écrit un second programme où, par souci de simplicité, l'utilisateur choisit le nombre d'étapes de la dichotomie :

```
PROGRAM dichotomie ;
USES wincrt ;
VAR a,b : real ; n : integer ;
FUNCTION f (x : real) : real ;
BEGIN
f := x*x*x+2*x+1 ;
END ;
BEGIN
WriteLn('Choisir le nombre détapes') ;
ReadLn(n) ;
a := -1 ; b := 0 ;
FOR i := 1 TO n DO
IF f((a+b)/2) >0 THEN b := (a+b)/2 ELSE a := (a+b)/2 ;
WriteLn(a) ;
END.
```

TD13 : Probabilités

Probabilités en Pascal

Pour faire des probas en Pascal, on utilise finalement très peu de commandes :

- Randomize ; sert à initialiser le générateur de nombres aléatoires, il est indispensable de placer cette instruction en début de programme dès qu'on fait des probas.
- random(n) ; où n est un entier naturel renvoie un nombre entier aléatoire compris entre 0 et n-1 (ainsi, il faut taper random(101) si on veut un nombre aléatoire entre 0 et 100 ; si vous préférez, le nombre qu'on met entre parenthèses indique le nombre de résultats possibles).
- random ; (sans argument) renvoie un nombre réel aléatoire compris entre 0 et 1.

Petits exercices

1. Écrire un programme simulant un lancer de dé, le nombre de faces du dé étant choisi par l'utilisateur.
2. Écrire un programme effectuant des lancers de dé à six faces jusqu'à obtenir le chiffre 6, et indiquant le nombre d'essais effectués (on pourra changer le nombre de faces du dé ensuite, pour comparer).
3. Écrire un programme lançant n pièces à Pile ou Face (n étant choisi par l'utilisateur) et affichant le nombre de Face obtenus.
4. Écrire un programme simulant 30 lancers de dé à six faces, et affichant simplement les 30 résultats obtenus.
5. Modifier le programme précédant pour qu'au lieu d'afficher les résultats de façon brute, il indique le nombre de fois que chaque face du dé a été obtenue (on pourra utiliser un tableau).

Corrigé du TD13

1. PROGRAM de ;
   USES wincrt ;
   VAR n : integer ;
   BEGIN
   Randomize ;
   WriteLn('Choisissez le nombre de faces du dé') ;
   ReadLn(n) ;
   WriteLn('Le dé est tombé sur la face ',random(n)+1) ;
   END.
2. On écrit directement le programme pour un dé à n faces :

   PROGRAM attente ;
   USES wincrt ;
   VAR i,n : integer ;
   BEGIN
   Randomize ;
   WriteLn('Choisissez le nombre de faces du dé') ;
   ReadLn(n) ;
   REPEAT i := i+1 UNTIL random(n)+1=n ;
   WriteLn('On a eu besoin de ',i,' essais') ;
   END.
3. PROGRAM pieces ;
   USES wincrt ;
   VAR a,i,n : integer ;
   BEGIN
   Randomize ;
   WriteLn('Choisissez le nombre de lancers') ;
   ReadLn(n) ;
   a := 0 ;
   FOR i := 1 TO n DO IF random(2)=1 THEN a := a+1 ;
   WriteLn('On a obtenu ',a,' faces') ;
   END.
4. On va directement passer à la question 5.
5. Et tant qu'à faire, l'utilisateur choisira le nombre de lancers :

   PROGRAM uniforme ;
   USES wincrt ;
   VAR i,n : integer ; t : ARRAY[0..5] OF integer ;
   BEGIN
   Randomize ;
   WriteLn('Choisissez le nombre de lancers') ;
   ReadLn(n) ;
   FOR i := 0 TO 5 DO t[i] := 0 ;
   FOR i := 1 TO n DO
   BEGIN

```
a := random(6) ;
t[a] := t[a]+1 ;
END ;
FOR i :=0 TO 5 DO WriteLn('Le dé est tombé ',t[i],' fois sur la face numéro ',i+1) ;
END.
```

TD14 : Simulations

Simulations diverses

Nous avons vu la semaine dernière comment simuler un nombre n choisi par l'utilisateur de lancers de dé à 6 faces. Autrement dit, nous avons simulé n occurences d'une loi uniforme sur $\{1; \dots; 6\}$.

1. Modifier le programme en question pour qu'il effectue n simulations de lancers de dé à k faces, n et k étant choisis par l'utilisateur (on stockera toujours les résultats dans un tableau).
2. Écrire un programme effectuant n lancers de pièces déséquilibrées, ayant une probabilité p de tomber sur Pile, et comptant le nombre de Piles obtenues (si vous préférez, simuler n occurences de loi de Bernoulli de paramètre p).
3. Écrire un programme effectuant n simulations de loi binomiale de paramètre (m, p), n, m et p étant tous choisis par l'utilisateur (résultats stockés dans un tableau).
4. Écrire un programme simulant n fois une variable hypergéométrique de paramètre (N, m, p), tout étant choisi par l'utilisateur (on commencera par écrire un programme effectuant une simulation).

Corrigé du TD14

Ce TD14 consacré aux simulations informatiques s'est finalement étendu sur trois séances, et nous avons programmé un peu plus que ce qui était demandé dans la feuille initiale. Voici donc les programmes réalisés au cours de ces séances :

- Simulation de n lancers de dés à k faces :

```
PROGRAM lancers;
USES wincrt;
VAR n,k,i,a : integer; t : ARRAY[0..99] OF integer;
BEGIN
Randomize;
WriteLn('Choisir le nombre de faces du dé');
ReadLn(k);
WriteLn('Choisir le nombre de lancers');
ReadLn(n);
FOR i := 0 TO k-1 DO t[i] := 0;
FOR i := 1 TO n DO
BEGIN
a := random(k);
t[a] := t[a]+1;
END;
FOR i := 0 TO k-1 DO WriteLn('On a obtenu ',t[i],' fois la face numéro ',i+1);
END.
```

- Simulation de n lancers de pièce déséquilibrée et comptage du nombre de Pile obtenus :

```
PROGRAM desequilibre;
USES wincrt;
VAR i,n,a : integer; p : real;
BEGIN
Randomize;
WriteLn('Choisir la proba de tomber sur Pile');
ReadLn(p);
WriteLn('Choisir le nombre de lancers');
ReadLn(n);
a := 0;
FOR i := 1 TO n DO
IF random<=p THEN a := a+1;
WriteLn('On a obtenu ',a,' Pile en ',n,' lancers.');
END.
```

- Et le même avec un nombre de simulations choisi par l'utilisateur pour tester des binômiales :

```
PROGRAM binomiale;
USES wincrt;
VAR i,n,a,j,m : integer; p : real; t : array[0..99] OF integer;
BEGIN
Randomize;
WriteLn('Choisir la proba de tomber sur Pile');
ReadLn(p);
WriteLn('Choisir le nombre de lancers');
ReadLn(n);
WriteLn('Choisir le nombre de simulations');
ReadLn(m);
FOR i := 0 TO n DO t[i] := 0;
FOR j := 1 TO m DO
```

```
BEGIN
a := 0;
FOR i := 1 TO n DO
IF random<=p THEN a := a+1;
t[a] := t[a]+1;
END;
FOR i := 0 TO n DO
WriteLn('On a obtenu ',t[i],' fois ',i,' Pile.');
END.
```

- Pour se reposer un peu entre deux lois usuelles, une simulation de lancers de deux dés, en regardant la somme des deux chiffres obtenus :

```
PROGRAM sommedes;
USES wincrt;
VAR n,i,a : integer; t : ARRAY[2..12] OF integer;
BEGIN
Randomize;
WriteLn('Choisir le nombre de lancers');
ReadLn(n);
FOR i := 2 TO 12 DO t[i] := 0;
FOR i := 1 TO n DO
BEGIN
a := random(6)+random(6)+2;
t[a] := t[a]+1;
END;
FOR i := 2 TO 12 DO WriteLn('On a obtenu ',t[i],' fois la somme ',i);
END.
```

- Le retour des lois usuelles avec des simulations d'hypergéométrique :

```
PROGRAM hypergeo;
USES wincrt;
VAR n,k,i,j,m,t,a : integer; p,b : real; t : ARRAY[0..99] OF integer;
BEGIN
Randomize;
WriteLn('Choisir les paramètres de la loi hypergéométrique');
ReadLn(m,n,p);
WriteLn('Choisir le nombre de simulations');
ReadLn(k);
FOR i := 0 T0 n DO t[i] := 0;
FOR j := 1 TO k DO
BEGIN
a := 0; t := m; b := m*p;
FOR i := 1 TO n DO
IF random(t) <b THEN
BEGIN
a := a+1; t := t-1; b :=b-1;
END
ELSE t := t-1;
t[a] := t[a]+1;
END;
FOR i := 0 TO n DO WriteLn('On a obtenu ',t[i],' fois ',i,' boules blanches.');
END.
```

Pour ceux qui auraient besoin d'explications, les différentes variables représentent les choses suivantes : t est comme toujours le tableau servant à stocker le nombre de fois où chaque résultat a été obtenu ; m, n et p les paramètres de la loi (m est noté N dans notre cours de maths) ; k le nombre de simulations de cette loi qu'on a envie d'effectuer ; i et j sont des invariants de boucle (j pour la boucle des simulations, i pour la boucle des tirages à l'intérieur de chaque simulation) ; enfin, à l'intérieur de chaque simulation, t représente le nombre de boules restant dans l'urne après le i-ème tirage, b le nombre de boules blanches restant dans l'urne et a le nombre de boules blanches tirées jusqu'ici (variables réinitialisées à chaque simulation).

- Pour terminer, nous avons tenté d'étudier l'expérience aléatoire suivante : dans une urne se trouvent deux boules blanches et 18 noires. On tire toutes les boules de l'urne successivement sans remise et on note X et Y les variables aléatoires donnant les rangs des tirages des deux boules blanches (X étant le premier et Y le deuxième). Voici un programme effectuant un nombre de simulations de cette expérience choisi par l'utilisateur, stockant les valeurs obtenues dans deux tableaux (un pour X et un pour Y) et calculant les espérances de X et de Y :

```
PROGRAM deuxblanches;
USES wincrt;
VAR i,n,a,k : integer; ex,ey : real; tx,ty; ARRAY[1..20] OF integer :
BEGIN
Randomize;
WriteLn('Choisissez le nombre de simulations');
ReadLn(n);
FOR i := 1 TO 19 DO tx[i] := 0;
FOR i := 2 TO 20 DO ty[i] := 0;
FOR i := 1 TO n DO
BEGIN
k := 20;
WHILE random(k)>1 DO k := k-1;
tx[21-k] := tx[21-k]+1;
REPEAT k := k-1 UNTIL random(k)=0;
ty[21-k] := ty[21-k]+1;
END;
ex := 0; ey := 0;
FOR i := 1 TO 19 DO ex := ex+i*tx[i]/n;
FOR i := 2 TO 20 DO ey := ey+i*ty[i]/n;
WriteLn(ex);
WriteLn(ey);
END.
```

Avec un nombre de simulations suffisamment élevé, on obtient des espérances proches de 7 et 14, ce qui correspond à dire qu'en moyenne, on va tirer 6 boules noires avant la première blanche, 6 boules noires après la deuxième blanche, et six boules noires entre les deux. Essayons de calculer l'espérance de X mathématiquement en déterminant sa loi. On a clairement $P(X = 1) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$; puis $P(X = 2) = \frac{18}{20} \times \frac{2}{19}$; $P(X = 3) = \frac{18}{20} \times \frac{17}{19} \times \frac{2}{18} = \frac{17 \times 2}{20 \times 19}$; et plus généralement $P(X = k) = \frac{2(20-k)}{20 \times 19}$ (formule valable pour toutes les valeurs de k comprises entre 1 et 19, les plus courageux le démontreront proprement) ; d'où $E(X) = \sum_{k=1}^{19} \frac{2k(20-k)}{20 \times 19} = \sum_{k=1}^{19} \frac{2}{19}k - \frac{1}{190}k^2 = \frac{2}{19} \times \frac{19 \times 20}{2} - \frac{1}{190} \times \frac{19 \times 20 \times 39}{6} = 20 - \frac{39}{3} = 20 - 13 = 7$. Plutôt que de recommencer les calculs pour Y , on peut constater que $21 - Y$ suit la même loi que X en renversant l'ordre des tirages.

TD15 : Suites récurrentes

Exercice 1

Dans une récente feuille d'exercices de mathématiques, nous avons étudié la suite récurrente (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{4}(2 - u_n^2)$. Nous avons prouvé qu'elle convergeait vers $\sqrt{2}$ et qu'on avait $|un - \sqrt{2}| \leqslant 10^{-9}$ dès que $n \geqslant 30$ (en utilisant l'IAF).

1. Écrire un programme Pascal demandant un entier n à l'utilisateur et affichant les valeurs des n premiers termes de la suite (et pas uniquement celle de u_n).
2. Écrire un programme qui calcule la première valeur de un pour laquelle $|u_n - \sqrt{2}| \leqslant \varepsilon$, la valeur de ε étant choisie par l'utilisateur. Déterminer ainsi la plus petite valeur de n pour laquelle $|u_n - \sqrt{2}| \leqslant 10^{-9}$, et comparer à la valeur obtenue avec l'IAF.
3. Écrire un programme demandant une valeur de n à l'utilisateur et calculant le quotient $\dfrac{u_{k+1} - \sqrt{2}}{u_k - \sqrt{2}}$ (rapport des écarts entre deux termes consécutifs de la suite et la limite) pour tous les entiers k inférieurs ou égaux à n.
4. Vers quelle valeur ce quotient semble-t-il converger ? Expliquer pourquoi ce quotient a effectivement une limite, et la déterminer mathématiquement.

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{e^{u_n} - 1}$. Écrire un programme déterminant une valeur approchée à ε près de sa limite, en utilisant la technique suivante : on calculera les termes de la suite jusqu'à obtenir $|u_{n+1} - u_n| \leqslant \varepsilon$, on admet qu'on a alors $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$. Écrire ensuite un second programme ayant le même objectif, mais utilisant le fait que $|u_n - l| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ (on calculera donc en parallèle la valeur de u_n et celle de 2^n jusqu'à obtenir la condition $\dfrac{1}{2^n} \leqslant \varepsilon$.

Corrigé du TD15

Exercice 1

1. PROGRAM termes ;
   USES wincrt ;
   VAR u : real ; i,n : integer ;
   BEGIN
   WriteLn('Choisir la valeur de n') ;
   ReadLn(n) ;
   u := 0 ;
   FOR i := 1 TO n DO
   BEGIN
   u := u+(2-u*u)/4 ;
   WriteLn('u',i,'=',u) ;
   END ;
   END.
2. PROGRAM approx ;
   USES wincrt ;
   VAR u,e : real ; n : integer ;
   BEGIN
   WriteLn('Choisir epsilon') ;
   ReadLn(e) ;
   u := 0 ; n := 0 ;
   REPEAT u := u+(2-u*u)/4 ;
   n := n+1 ;
   UNTIL abs(u-sqrt(2)) < e ;
   WriteLn(n) ;
   END.

   On obtient ainsi $n = 19$ pour $\varepsilon = 10^{-9}$, ce qui est sensiblement moins qu'avec la majoration donnée par l'IAF.
3. PROGRAM quotient ;
   USES wincrt ;
   VAR u,v : real ; i,n : integer ;
   BEGIN
   WriteLn('Choisir la valeur de n') ;
   ReadLn(n) ;
   u := 0 ; v := 2 ;
   FOR i := 1 TO n DO
   BEGIN
   u := v ;
   v := u+(2-u*u)/4 ;
   WriteLn((v-sqrt(2))/(u-sqrt(2))) ;
   END ;
   END.

4. Il semble que la suite se rapproche d'environ 0.29 (du moins tant que Pascal arrive à en calculer les termes sans bugguer). Et en effet, on sait que $\dfrac{u_{n+1}-\sqrt{2}}{u_n-\sqrt{2}} = \dfrac{f(u_n)-f(\sqrt{2})}{u_n-\sqrt{2}}$, où $f(x) = x+2-\dfrac{1}{4}x^2$. On reconnait un taux d'accroissement : comme u_n converge vers $\sqrt{2}$, le quotient converge donc vers $f'(\sqrt{2})$. On a $f'(x) = 1-\dfrac{1}{2}x$, donc $f'(\sqrt{2}) = 1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, ce qui correspond bien à la valeur observée.

Exercice 2

```
PROGRAM approx1;
USES wincrt;
VAR u,v,e : real;
BEGIN
WriteLn('Choisir epsilon');
ReadLn(e);
v := 0;
REPEAT
u := 0; v := u/(exp(u)-1);
UNTIL abs(v-u)<e;
WriteLn(v);
END.
```

```
PROGRAM approx2;
USES wincrt;
VAR u,a,e : real;
BEGIN
WriteLn('Choisir epsilon');
ReadLn(e);
u := 0; a := 1;
REPEAT
u := u/(exp(u)-1); a := a/2;
UNTIL a<e;
WriteLn(u);
END.
```

TD16 : Intégration numérique

Pour calculer une intégrale à la main, rien de plus facile, il suffit de maîtriser à la perfection primitives, changements de variables et autres intégrations par parties. La machine, elle, va compenser comme d'habitude son intelligence limitée par une capacité de calcul impressionnante. Nous allons étudier dans ce TD quelques méthodes permettant de calculer des valeurs approchées d'intégrale à l'aide de calculs de sommes, et essayer de comparer ces méthodes entre elles.

Méthode des rectangles

C'est une méthode que nous avons déjà abordée en cours de maths lorsque nous avons parlé de sommes de Riemann. Il s'agit simplement de découper l'intervalle d'intégration en n morceaux et, sur chacun de ces morceaux, d'approcher la courbe de la fonction f par un rectangle dont la hauteur est donnée par l'image par f du point situé à gauche du rectangle. Ainsi, on effectue le calcul suivant : $\int_a^b f(t)dt \simeq \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$. Maintenant, à vous de travailler (pour plus de simplicité, on note $a_i = a + k\frac{b-a}{n}$ dans ce qui suit)

1. Montrer que, $\forall x \in [a_i; a_{i+1}]$, $|f(x) - f(a_i)| \leqslant M_1|x - a_i|$, où M_1 est un majorant de f' sur $[a; b]$.
2. En déduire une majoration de l'erreur commise en approchant $\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt$ par $f(a_i)\frac{b-a}{n}$, puis majorer l'erreur commise lorsqu'on calcule l'intégrale de f sur $[a; b]$ par cette méthode.
3. On suppose dans cette question $a = 0$ et $b = 1$, et on admet que pour les fonctions qu'on cherchera à intégrer, on aura toujours $M_1 \leqslant 10$. Déterminer les plus petites valeurs de n pour lesquelles notre calcul d'intégrale sera valable à 0.01 près, puis à 10^{-9} près.

Méthode des trapèzes

Le principe est très similaire à celui de la méthode des rectangles, la seule différence étant qu'au lieu d'approcher la courbe par un rectangle de hauteur $f(a_i)$, on utilise cette fois un trapèze dont le dernier côté joint les points $(a_i, f(a_i))$ et $(a_{i+1}, f(a_{i+1}))$.

1. Faire un petit dessin pour représenter la situation, puis écrire la valeur approchée sous forme d'une somme similaire à celle utilisée pour la méthode des rectangles.
2. On admet la généralisation suivante de l'inégalité des accroissements finis : pour tout x appartenant à l'intervalle $[a_i, a_{i+1}]$, l'écart entre $f(x)$ et la valeur aobtenue sur le trapèze est majoré en valeur absolue par $(a_{i+1} - x)(x - a_i)\frac{M_2}{2}$, où M_2 est un majorant de $|f''|$ sur $[a; b]$. En déduire, comme ci-dessus, une majoration de l'erreur commise en utilisant la méthode des trapèzes pour approcher notre intégrale.
3. En reprenant à nouveau $a = 0$ et $b = 1$, et en admettant cette fois-ci qu'on aura $M_2 \leqslant 100$, donner des valeurs de n pour lesquelles l'erreur est plus petite que 0.01, puis plus petite que 10^{-9}.
4. Comparer le nombre de calculs effectués par chaque méthode. Laquelle semble la plus efficace ?

Méthode de Simpson

Le principe est toujours le même : découper l'intervalle en n morceaux, et utiliser pour chacun de ces morceaux un calcul approché faisant intervenir les valeurs de la fonction f en certains points. La méthode des rectangles se contentait de prendre la valeur en un point, celle des trapèzes faisait une moyenne entre deux valeurs ; pour Simpson, on passe à trois images, avec des coefficients un peu inattendus : $\int_{a_i}^{a_{i+1}} f \simeq \frac{f(a_i) + 4f(\frac{a_i+a_{i+1}}{)} + f(a_{i+1})}{2} 6(a_{i+1} - a_i)$.

Vérifier que cette méthode donne la valeur exacte de l'intégrale pour un polynôme de degré 2 (vous pouvez vous contenter de vérifier que ça marche pour $f(x) = x^2$). On admet que cette méthode est encore nettement plus efficace que celle des trapèzes dans le cas général.

Et le Pascal dans tout ça ?

Il serait grand temps en effet de revenir à de la programmation. Votre but est simple : écrire un programme calculant une valeur approchée de l'intégrale d'une fonction f donnée (on ne peut pas demander à l'utilisateur de saisir la fonction en Pascal, c'est trop compliqué) entre deux bornes a et b choisies par l'utilisateur, tout d'abord en utilisant la méthode des rectangles, puis en utilisant la méthode des trapèzes,e t enfin la méthode de Simpson (on fera trois programmes distincts, et on laissera également le choix à l'utilisateur de l'entier n représentant le nombre de morceaux dans le découpage de l'intervalle).

Corrigé du TD16

Méthode des rectangles

1. C'est une application immédiate de l'IAF, toutes les hypothèses ayant gentiment été données dans l'énoncé.
2. Constatons que $\left|\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt - \frac{b-a}{n}f(a_i)\right| = \left|\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt - \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(a_i)dt\right| \leqslant \int_{a_i}^{a_{i+1}} |f(t) - f(a_i)|dt$ (en utilisant les propriétés du cours sur les valeurs absolues). On peut appliquer alors le résultat de la question précédente pour majorer l'erreur par $M_1 \int_{a_i}^{a_{i+1}} t - a_i dt$ ($t - a_i$ étant toujours positif sur l'intervalle d'intégration, on se débarasse de la valeur absolue). Or $\int_{a_i}^{a_{i+1}} t - a_i dt = \left[\frac{t^2}{2} - a_i t\right]_{a_i}^{a_{i+1}} = \frac{a_{i+1}^2}{2} - a_i a_{i+1} - \frac{a_i^2}{2} + a_i^2 = \frac{a_{i+1}^2 - 2a_i a_{i+1} + a_i^2}{2} = \frac{(a_{i+1} - a_i)^2}{2} = \frac{(b-a)^2}{2n^2}$. L'erreur maximale commise sur $[a_i; a_{i+1}]$ est donc de $\frac{M_1(b-a)^2}{2n^2}$.
   L'erreur totale commise sur l'intervalle $[a; b]$ vaut n fois l'erreur précédente (puisque l'intervalle a été découpé en n morceaux), soit $\frac{M_1(b-a)^2}{2n}$.
3. On a sous ces hypothèses une erreur maximale de $\frac{5}{n}$. Cette erreur descend sous la valeur 0.01 pour $n = 500$, et en-dessous de 10^{-9} pour $n = 5\ 000\ 000\ 000$ (ce qui fait un gros paquet de rectangles !).

Méthode des trapèzes

1. Vous aurez peut-être droit à un petit dessin le jour où je serai motivé. En attendant, contentons-nous de constater qu'on dessine sur l'intervalle $[a_i; a_{i+1}]$ un trapèze dont les côtés parallèles ont pour longueur $f(a_i)$ et $f(a_{i+1}$, et donc la largeur vaut, comme pour les rectangles précédemment, $\frac{b-a}{n}$. On en déduit donc que, via cette méthode, $\int_a^b f(t)dt = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{i=n-1} \frac{f(a_i) + f(a_{i+1})}{2} = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)}{2} + \sum_{i=1}^{i=n-1} f(a_i) + \frac{f(b)}{2}\right)$.
2. On obtient alors, de façon très similaire à ce qui se passait pour les rectangles, une erreur majorée par $\int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{M_2}{2}(a_{i+1} - t)(t - a_i)dt$ (tout cela étant positif). Ne reste plus qu'à calculer $\int_{a_i}^{a_{i+1}} (a_{i+1} - t)(t - a_i)dt = \int_{a_i}^{a_{i+1}} -t^2 + a_i t + a_{i+1}t - a_i a_{i+1} dt = \left[-\frac{t^3}{3} + \frac{a_i t^2}{2} + \frac{a_{i+1}t^2}{2} - a_i a_{i+1} t\right]_{a_i}^{a_{i+1}} = -\frac{a_{i+1}^3}{3} + \frac{a_i a_{i+1}^2}{2} + \frac{a_{i+1}^3}{2} - a_i a_{i+1}^2 + \frac{a_i^3}{3} - \frac{a_i^3}{2} - \frac{a_{i+1}a_i^2}{2} + a_i^2 a_{i+1} = \frac{a_{i+1}^3 - 3a_{i+1}^2 a_i + 3a_i^2 a_{i+1} - a_i^3}{6} = \frac{(a_{i+1} - a_i)^3}{6} = \frac{(b_a)^3}{6n^3}$. En découle une erreur sur $[a_i; a_{i+1}]$ inférieure à $\frac{M_2(b-a)^3}{12n^3}$
   Comme précédemment, cette majoration sera multipliée par n pour obtenir l'erreur maximale sur l'intervalle $[a; b]$ tout entier, qui vaut donc $\frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}$.
3. Avec les données de l'énoncé, l'erreur est majorée par $\frac{25}{3n^2}$. Elle descend en-dessous de 0.01 si $n^2 \geqslant \frac{2500}{3}$, soit $n \geqslant 29$; et en-dessous de 10^{-9} lorsque $n^2 \geqslant \frac{25 \times 10^9}{3}$, soit $n \geqslant 91\ 288$.
4. Au vu de la somme obtenue pour les trapèzes, on effectue en fait à peine plus de calcul avec cette méthode qu'avec la précédente : une image de plus à calculer par la fonction f, et deux

divisions par 2. Les valeurs de n nécessaires pour obtenir de bonnes approximations étant nettement plus petites avec les trapèzes, cette méthode est largement préférable.

Méthode de Simpson

1. Il suffit de vérifier que ça marche sur un intervalle, c'est-à-dire de prouver que $6\int_a^b x^2 = (b-a)\left(a^2+b^2+4\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right) = (b-a)(a^2+b^2+a^2+2ab+b^2) = 2(b-a)(a^2+b^2+ab) = 2(ba^2+b^3+ab^2-a^3-ab^2-a^2b) = 2(b^3-a^3)$. En effet, $6\int_a^b x^2dx = 6\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b = 2(b^3-a^3)$. On peut ensuite découper en n morceaux si on le souhaite, chacun des morceaux d'intégrale sera égal à chaque morceau de somme.

Et le Pascal dans tout ça ?

Nous avons écrit trois programmes (un pour chaque méthode) permettant de calculer une valeur approchée de $\int_1^2 \ln x dx$, la valeur de n étant choisie par l'utilisateur. D'abord avec les rectangles, en prenant les valeurs à droite des rectangles :

```
PROGRAM rectangles;
USES wincrt;
VAR i,n : integer; s : real;
BEGIN
WriteLn('Choisissez la valeur de n');
ReadLn(n);
s := 0;
FOR i := 1 TO n DO s := s+ln(1+i/n);
WriteLn(s/n);
END.
```

On enchaine avec les trapèzes (pas grand chose à changer) :

```
PROGRAM trapezes;
USES wincrt;
VAR i,n : integer; s : real;
BEGIN
WriteLn('Choisissez la valeur de n');
ReadLn(n);
s := 0;
FOR i := 1 TO n-1 DO s := s+ln(1+i/n);
s := s+ln(2)/2;
WriteLn(s/n);
END.
```

Et enfin Simpson :

```
PROGRAM Simpson;
USES wincrt;
VAR i,n : integer; s : real;
BEGIN
```

```
WriteLn('Choisissez la valeur de n');
ReadLn(n);
s := 0;
FOR i := 0 TO n-1 DO s := s+ln(1+i/n)+ln(1+(i+1)/n)+4*ln(1+(2*i+1)/(2*n));
WriteLn(s/(6*n));
END.
```

Comme on sait par ailleurs calculer la valeur exacte de cette intégrale (qui vaut $2\ln 2 - 1 \simeq 0.38629436112$), on peut tester la rapidité de convergence de chaque méthode. Ce-dessous, un tableau regroupant le nombre de décimales exactes obtenues pour chaque méthode, pour diverses valeurs de n :

n	10	100	1 000	10 000
Rectangles	1	2	3	4
Trapèzes	3	5	7	9
Simpson	7	11		

Lexique

Structure d'un programme :

PROGRAM nomduprogramme ;
USES wincrt ;
VAR nomvariable : type ;
BEGIN
instructions ;
END.

Les commentaires éventuels se mettent entre accolades : {Ce programme ne fonctionne pas.}

Types de variables les plus fréquents :

Les seuls types utilisés à ce jour sont **real** pour les nombres réels, **integer** pour les petits entiers, **longint** pour les entiers plus gros, **char** pour les caractères (un seul caractère) et **string** pour une chaine de caractères (un bloc de texte donc). On croisera aussi **boolean** pour des variables de test, qui ne peuvent prendre que deux valeurs : **true** ou **false**.

Procédures d'entrée-sortie :

WriteLn('texte',variable) ; affiche à l'écran tous les arguments placés entre apostrophes, et la valeur des variables qui ne sont pas placés entre apostrophes. Les différents éléments à afficher doivent être séparés par une virgule.

ReadLn(variable) ; stocke la valeur tapée par l'utilisateur dans la variable spécifiée.

Régles de syntaxe de base :

Toutes les instructions doivent être suivies d'un **;**

L'affectation d'une valeur à une variable se fait via **variable := valeur ;** (le simple = étant réservé aux tests).

Syntaxe des boucles :

IF test THEN instruction1 ELSE instruction 2 ; (pas de ; avant le ELSE, qui est par ailleurs facultatif : si on ne met pas de ELSE, il ne se passe rien si la condition n'est pas vérifiée).

FOR i :=1 TO n DO
BEGIN
instruction1 ; . . . ; instructionk ;
END ; (le BEGIN et le END sont facultatifs dans le cas où on n'effectue qu'une instruction à chaque passage dans la boucle ; le 1 et le n peuvent être remplacés par n'importe quel entier).

WHILE test DO
BEGIN
instruction1 ; . . . ; instructionk ;
END ;

REPEAT instruction1 ; . . . ; instructionk ;

UNTIL test ;

Opérations booléennes

Lorsqu'on veut effectuer (dans une instruction conditionnelle ou une boucle WHILE ou REPEAT) un test faisant intervenir plusieurs condition, on dispose des opérations logiques suivantes (mettez des parenthèses partout, c'est plus prudent) :

(test1) AND (test2) sera vrai seulement si test1 et test2 sont vérifiés.
(test1) OR (test2) sera vrai dès que test1 ou test2 est vérifié.
NOT (test1) sera vrai si test1 est faux (rarement utilisé).

Tableaux

Une variable de type tableau (par exemple **VAR t : ARRAY[1..10] OF real;** permet de stocker plusieurs variables d'un même type dans un tableau aux cases numérotées (de 1 à 10 dans notre exemple). La variable se trouvant dans la case numéro i du tableau est notée $t[i]$. On ne peut pas effectuer d'opérations simultanées sur toutes les cases d'un tableau, d'où emploi constant de boucles FOR.

Fonctions

Une fonction se déclare dans l'en-tête, en même temps que les variables. Une déclaration de fonction est un mini-programme pouvant contenir ses propres variables et autres instructions. Elle est nécessairement délimitée par un BEGIN ; et un END ; et doit contenir une ligne de la forme $f :=$ pour définir la fonction. L'en-tête de déclaration d'une fonction ressemble à :

FUNCTION nomfonction (var1 : type1 ; var2 : type2 . . . ; vark : typek) : typeresultat ;

Probabilités

Un programme faisant intervenir le simulateur aléatoire doit contenir l'instruction **Randomize ;**. La fonction prédéfinie **random** tire des nombres aléatoires dans l'intervalle $[0; 1]$, la fonction **random(n)** tire un entier aléatoire compris entre 0 et $n - 1$.

Programmes classiques

Pour finir, trois programmes dont vous croiserez la structure suffisamment souvent pour que ça vaille le coup de les connaitre sur le bout des doigts. Tout d'abord, un calcul de suite récurrente, ici le calcul du terme d'indice n (choisi par l'utilisateur) de la suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{3} - 2$:

```
PROGRAM suite ;
USES wincrt ;
VAR i,n : integer ; u : real ;
BEGIN
WriteLn('Choisissez la valeur de n') ;
ReadLn(n) ;
u :=3 ;
FOR i :=1 TO n DO
u :=u*u/3-2 ;
WriteLn(u) ;
END.
```

Un deuxième qui calcule $\sum_{k=1}^{k=?} \frac{1}{k^2}$ en s'arrêtant quand $\frac{1}{k^2}$ devient plus petit qu'un réel e choisi par l'utilisateur :

```
PROGRAM somme;
USES wincrt;
VAR k : longint; e,s : real;
BEGIN
WriteLn('Choisissez la valeur de e');
ReadLn(e);
k :=0; s :=0;
REPEAT
k :=k+1;
s :=s+1/(k*k);
UNTIL 1/(k*k) <e;
WriteLn(s);
END.
```

Et un dernier simulant une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{6}$, c'est-à-dire effectuant des lancers de dé jusqu'à tomber sur la face numérotée 6 :

```
PROGRAM geometrique;
USES wincrt;
VAR a,n : integer;
BEGIN
Randomize;
n := 0;
REPEAT a := random(6);
n := n+1;
UNTIL a := 5;
WriteLn(n);
END.
```

TD17 : Simulation de variables infinies

Exercice 1

Écrire un programme effectuant un nombre n (choisi par l'utilisateur) de simulations d'une loi géométrique de paramètre p (choisi par l'utilisateur également) et stockant les résultats dans un tableau (on évitera de prendre un p trop proche de 0 pour ne pas avoir à créer un tableau gigantesque, par exemple $p = \frac{1}{6}$ et un tableau de 20 cases donneront une bonne idée de ce qui se passe).

Exercice 2

Le but de cet exercice est de simuler la loi de la variable aléatoire étudiée dans l'exemple 2 du cours (chapitre sur les variables infinies). Rappelons-en la définition : on effectue dans une urne contenant une boule blanche, une verte et une rouge une succession de tirages jusqu'à avoir tiré deux boules blanches, et on note X le nombre de tirages effectués au moment de l'apparution de cette deuxième boule blanche. Écrire un programme Pascal effectuant n simulations de cette loi (n étant un entier choisi par l'utilisateur, et les résultats stockés dans un tableau dont on affichera les 20 premières lignes). Pour les plus courageux, comparer les résultats obtenus avec ceux d'une simulation de loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{6}$ (les deux lois ayant une espérance égale à 6).

Exercice 3

Encore une simulation de loi vue en cours de maths : vous n'avez certainement pas oublié ce très bel exercice : une urne contient une boule blanche et une boule noire, et on tire dans cette urne jusqu'à obtention d'une boule blanche, sachant qu'à chaque tirage d'une boule noire, on remet la boule noire et on en ajoute une autre. On a vu que cette variable aléatoire n'admettait pas d'espérance. Écrire un programme Pascal simulant n fois de suite cette loi (n étant choisi par l'utilisateur). Pour une fois, on ne présentera pas les résultats sous forme de tableau, mais on affichera après chaque simulation une phrase du style « On a tiré la première boule blanche au tirage 1 276 ». On évitera de prendre donc de prendre de grandes valeurs de n quand on fera tourner le programme...

Exercice 3

Un ivrogne se balade dans la rue. À chaque pas qu'il effectue, il a une chance sur deux d'avancer d'un mètre, et une chance sur deux de reculer d'autant. On note X_k la distance parcourue (qui sera comptée négativement si l'ivrogne a plus reculé qu'il n'a avancé) par l'ivrogne au bout de k pas. Écrire un programme Pascal effectuant n simulations de la variable aléatoire X_k (pour la présentation des résultats, on notera que Pascal autorise à définir des indices négatifs dans ses tableaux), n et k étant choisis par l'utilisateur.

Soit maintenant j un entier strictement positif. Écrire un programme Pascal simulant la marche aléatoire de l'ivrogne jusqu'à ce que celui-ci soit repassé j fois par son point de départ, et afficher le nombre de pas effectués par l'ivrogne lors de cette marche. Comparer les résultats obtenus lorsqu'on fait grandir la valeur de j (si on est courageux, on pourra effectuer toute une série de simulations pour chaque valeur de j pour avoir des résultats plus faciles à interpréter).

Corrigé du TD17

Exercice 1

```
PROGRAM geometrique ;
USES wincrt ;
VAR t : ARRAY[1..99] OF real ; n, i, z : longint ; p : real ;
BEGIN
Randomize ;
WriteLn('Choisissez le nombre de simulations') ;
ReadLn(n) ;
WriteLn('Choisissez le paramètre de la loi') ;
ReadLn(p) ;
FOR i := 2 TO 99 DO t[i] := 0 ;
FOR i := 1 TO n DO
BEGIN
z := 0 ;
REPEAT z := z+1 UNTIL random < p ;
t[z] := t[z]+1 ;
END ;
FOR i := 1 TO 20 DO WriteLn('On a obtenu ',t[i],' fois la valeur ',i) ;
END.
```

Un exemple de résultats obtenus avec $p = \frac{1}{6}$ et $n = 10\ 000$:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\lvert X = k\rvert$	1 692	1 391	1 099	980	814	656	542	478	412

k	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\lvert X = k\rvert$	319	271	226	171	168	138	120	78	78	61	49

Exercice 2

```
PROGRAM loipascal ;
USES wincrt ;
VAR t : ARRAY[2..99] OF real ; n, i, z : longint ;
BEGIN
Randomize ;
WriteLn('Choisissez le nombre de simulations') ;
ReadLn(n) ;
FOR i := 2 TO 99 DO t[i] := 0 ;
FOR i := 1 TO n DO
BEGIN
z := 0 ;
REPEAT z := z+1 UNTIL random < 1/3 ;
REPEAT z := z+1 UNTIL random < 1/3 ;
t[z] := t[z]+1 ;
END ;
FOR i := 2 TO 20 DO WriteLn('On a obtenu ',t[i],' fois la valeur ',i) ;
END.
```

Voila ce qu'on obtient par exemple pour 10 000 simulations, à comparer avec les résultats de l'exercice précédent :

k	2	3	4	5	6	7	8	9
$\|X = k\|$	1 112	1 517	1 450	1 291	1 154	868	689	519

k	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\|X = k\|$	369	272	222	163	109	84	57	38	27	25	7

Exercice 3

```
PROGRAM mengoli;
USES wincrt;
VAR n,i,k : longint;
BEGIN
Randomize;
Writeln('Choisissez le nombre de simulations');
ReadLn(n);
FOR i := 1 TO n DO
BEGIN
k := 0;
REPEAT k := k+1 UNTIL random < 1/(k+1);
WriteLn('On a tiré une boule blanche au tirage numéro ',k);
END;
END.
```

Exercice 4

```
PROGRAM ivrogne;
USES wincrt;
VAR t : ARRAY[-99..99] OF longint; n,k,i,j,z : longint;
BEGIN
Randomize;
WriteLn('Choisissez le nombre de pas effectués par l'ivrogne à chaque simulation');
ReadLn(k);
WriteLn('Choissez le nombre de simulations');
ReadLn(n);
FOR i := -99 TO 99 DO t[i] := 0;
FOR i := 1 TO n DO
BEGIN
z := 0;
FOR j := 1 TO k DO
IF random<1/2 THEN z := z+1 ELSE z := z-1;
t[z] := t[z]+1;
END;
FOR i := -k TO k DO WriteLn('On a obtenu ',t[i],' fois la valeur ',i);
END.
```

Voici maintenant un programme qui effectue n simulations du temps d'attente de la j-ème fois où on repasse par la case départ, n et j étant demandés à l'utilisateur :

```
PROGRAM ivrognebis;
USES wincrt;
VAR n,i,j,z,a,b : longint;
BEGIN
```

```
Randomize ;
WriteLn('Choissez le nombre de simulations') ;
ReadLn(n) ;
WriteLn('Choisissez le nombre de fois que notre ivrogne doit repasser par son point de départ') ;
ReadLn(j) ;
FOR i := 1 TO n DO
BEGIN
z := 0 ; a := 0 ; b :=0 ;
REPEAT
a := a+1 ;
IF random<1/2 THEN z := z+1 ELSE z := z-1 ;
IF z=0 THEN b := b+1 ;
UNTIL b=j ;
WriteLn('Notre ivrogne a effectué ',a,' pas avant de revenir ',j,'fois au départ') ;
END ;
END.
```

On constate, assez logiquement, que le temps moyen de la ballade augmente quand on augmente j, mais qu'il semble que l'ivrogne finisse par revenir autant de fois qu'on le souhaite à son point de départ (attention tout de même à ne pas prendre un j trop grand si on ne veut pas faire planter notre cher Pascal).

Annexe A

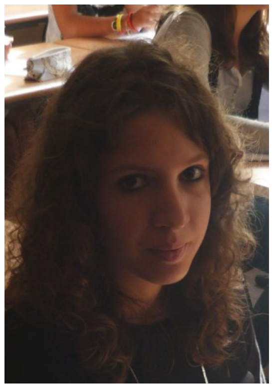
Trombinoscope

Après cet alignement quelque peu impressionnant de théorèmes, remarques, sujets d'annales, instructions Pascal et autres fautes de frappe, il est temps d'achever ce bilan sur une note plus légère, et en images ! Tout d'abord, un aperçu du casting quatre étoiles qui a joué son rôle avec plus ou moins de brio et de talent tout au long de l'année sur les chaises de la salle R1 : les élèves (le prof et notre guest star la souris n'auront pas droit à leur place sur le trombi, par contre j'ai laissé tous ceux et celles qui étaient avec nous en début d'année, même si certains sont restés un peu moins longtemps que d'autres). Les profs ont beau râler dessus à longueur de temps, les élèves restent quand même leur fond de commerce. Et pour ceux qui trouveraient que mon talent de photographe n'est pas à la hauteur de mes capacités en calcul mental, sachez que le trombi de l'année passé était neeeeeeeettement plus moche que celui-là. Encore un siècle en ECE3 et je ferai un trombi digne d'un calendrier Pirelli. Euh, ou pas en fait. Quoi qu'il en soit, mes plus plates excuses à ceux et celles dont j'ai allègrement massacré le portrait.

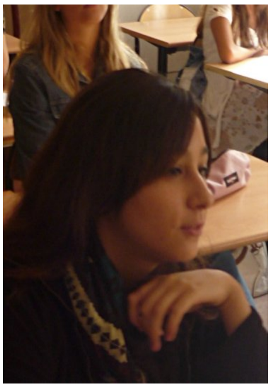
Ali
Naïda

Arshina
Marina

Beirnaert
Clémence

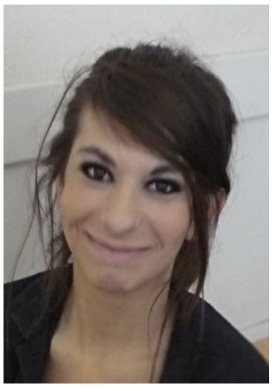


Benmansour
Nesrine



Bennani
Lina

Bennis
Insaf

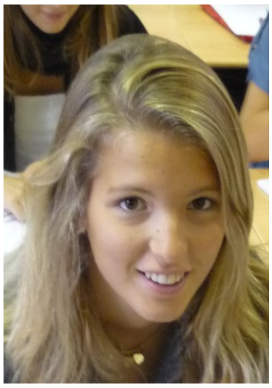


Bensoussan
Sarah

Billard
Camille

Bonnet
Thibaud

Bressand
Jason



Brizon
Margaux

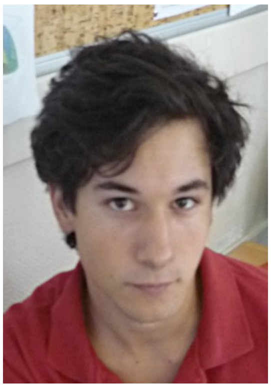
Carbajo
Eugénie


De Laborderie
Solène


De Saint-Martin
Axel


Dequin
Chloë

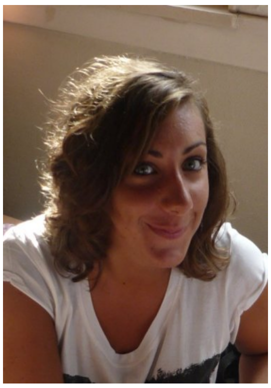

Donty
Jeimila


Drissi
Samir

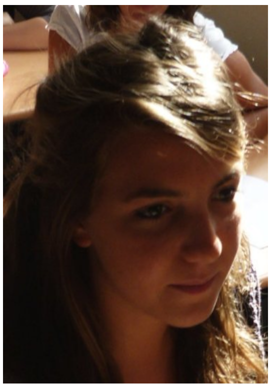

Duparc
Sophie


Duval
Ophélia

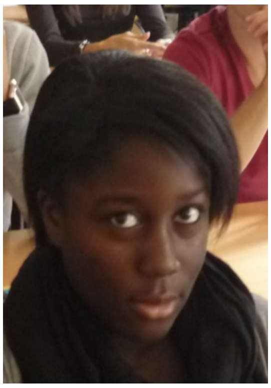

Finkel
Charlotte


Frimont
Apolline


Girod
Élisa

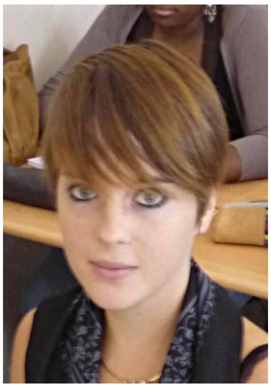

Guillaume
Romane

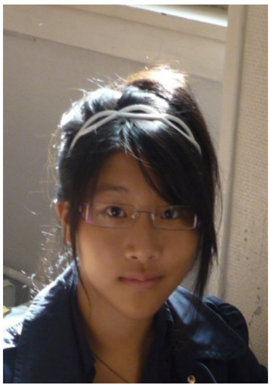

Gully
Claire

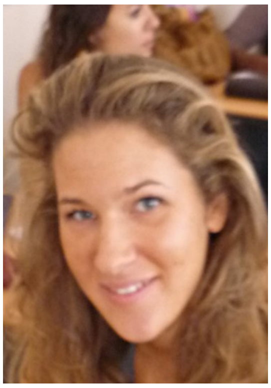

HOUESSOU
Pamela

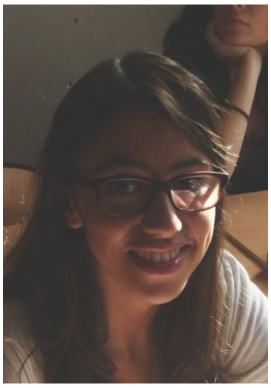

JEANNIN
Arthur


KARIMPOUR
Clément


LEON
Mélanie


LY
Phek-Bouay

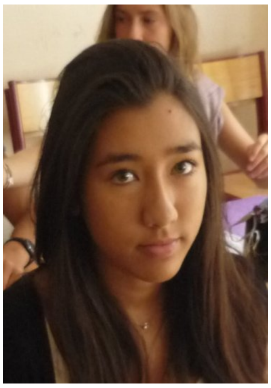

MERCIER
Tiphaine


MESBAHI
Laura


MOTTE
Oriane


NEDELCHEVA
Simona


PANNI
Laura


REGENET
Alexandra

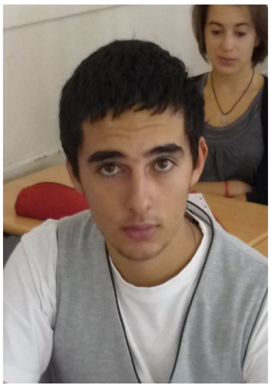

REMOND
Juliette

SAVART
Simon

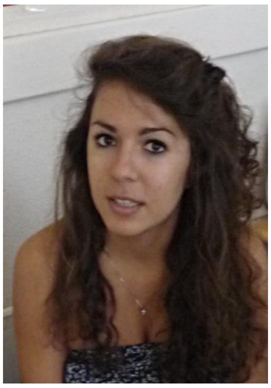
SENGAYRAC
Simon-Pierre

SENTIS
Pauline

TERRY
Pierre-Louis



TEYSSIEUX
Freddy



TRAMONTANA
Margot

TRAN BINH THANH
Sylvie

TRAPIER
Raphaël

VEVERT
Bertrand

Annexe B

Festivités de fin d'année

Comme le veut désormais la tradition, l'année s'est (presque) achevée avec un petit gouter qui s'est tenu dans la salle R1, et dont voici un (petit) témoignage photographique

Bon, ok, y a peu de photos et elles sont pourries, mais il fallait bien laisser croire que les étudiants en prépa commerciale étaient capables de célebrer la fin d'année sans débordements (d'alcool notamment).

Venons-en maintenant aux choses sérieuses, avec ces quelques moments captés sur le vif lors de la déjà mythique soirée Car NO Limit qui s'est déroulée au soir même du conseil de classe (et accessoirement à la veille d'un dernier cours de maths à huit heures qui s'est transformé en sieste collective). Naturellement, la censure faschiste décrétée par les organisatrices sur la diffusion des photos fait que celles-ci ne seront qu'un reflet très déformé et édulcoré de la véritable ambiance qui a régné ce soir-là, mais ce sera mieux que rien.

Déjà, la preuve que le prof ne raconte pas totalement n'importe quoi à propos de cette soirée : il y était ! Et, de gauche à droite, Camille, Bertrand, Clémence, Alexandra, Juliette, Ophélia et Charlotte aussi.

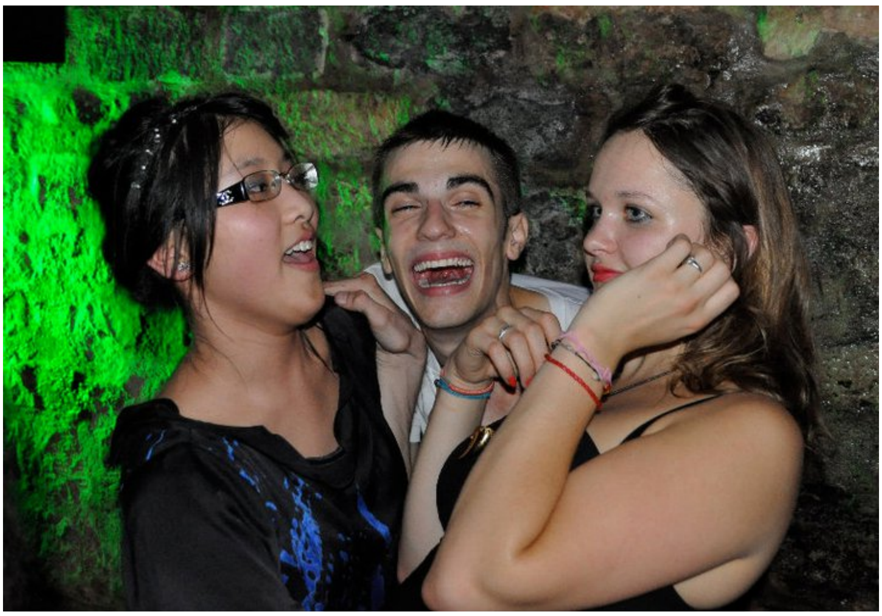
Certaines privilégiées ont eu droit à des photos en plus petit effectif avec leur prof de maths, ici solène et Tiphaine, et sur la suivante Pauline et Oriane.

Une petite anecdote au passage : quand je montre ces photos à des collègues de prépa scientifique, ils réagissent assez systématiquement de la même façon « C'est marrant, y a plein de nanas sur tes photos », ce à quoi je réponds naturellement « Bah non, c'est juste la proportion normale dans une classe d'ECE ». Et là, ils courrent demander leur mutation.

Il fait déjà bien chaud sur la piste pour Samir, Marina, Pierre-Louis et Phek-Bouay (le prof, lui, naturellement, a préféré rester scotché au bar).

Bon, il y a quand même certaines photos où on arrive à avoir presque autant de garçons que de filles ! Bon, ok, celui de gauche n'est pas de la classe... Pour le reste, Romane, Margot, Claire et Clément ont encore l'air plus ou moins normaux.

Je ne peux pas rester à la terrible envie de faire remarquer que Freddy n'a pas l'air très réveillé sur celle-ci, Cléménce, Simon-Pierre, Jason et Alexandra sont plus en forme.



Nous retrouvons ici Bertrand dans son état normal, entouré de Phek-Bouay et Élisa.

La soirée avance, et ça commence à bouger un peu plus. En position verticale, Sarah, Élisa, Simon-Pierre, Laura et Apolline.

Nous voilà en milieu de soirée, et nos chers carnotins sont dans un état plus ou moins présentable. Nous jetterons un voile pudique sur la suite de cette soirée, mais les plus motivés pourront faire une petite interpolation pour imaginer à quoi ressemblaient les plus courageux au petit matin. Ils pourront même prolonger leur interpolation sur trois ans pour imaginer l'état moyen d'un étudiant à sa sortie de son École de commerce.

En attendant, je souhaite pour la dernière fois de bonnes vacances à ceux qui ont encore des perspectives de repos pour le mois d'août, et c'est encore à Raphaël que je laisse le soin de conclure ce compte-rendu définitif : « Bah moi, les vacances c'est fini mais c'était cool, j'ai fait du toboggan. Et puis de toute façon à la crèche on a pas de DS de maths, alors la rentrée devrait être assez cool. »