Concours Blanc : Épreuve de mathématiques

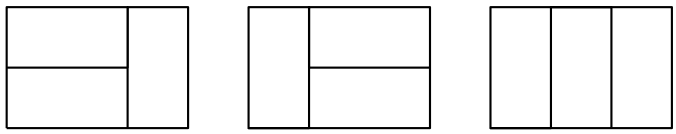
Lycée Carnot

6 janvier 2010

Problème 1 : Variations autour de la suite de Fibonacci

Première partie

On dipose de briques rectangulaire 1×2 et on se propose de construire à l'aide de ces briques un mur de hauteur 2 et de longueur $k \in \mathbb{N}^*$. On note a_n le nombre de murs distincts construits avec n briques. Ainsi, par exemple, $a_3 = 3$:



Déterminer une relation de récurrence lisant a_{n+2}, a_{n+1} et a_n (on pourra remarquer qu'un mur commence soit par une brique verticale soit par deux briques horizontales superposées).

Deuxième partie

On étudie la suite de Fibonacci (F_n) définie par $F_0 = F_1 = 1$ et la relation de récurrence $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

1. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer qu'il existe un couple de réels (α, β) que l'on déterminera tel que, pour tout entier naturel n, $F_n = \alpha \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.
3. Montrer que, $\forall n > 0$, $F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^n$.
4. Déterminer la limite de (F_n) quand n tend vers $+\infty$, puis un équivalent simple de F_n.

Troisième partie

Dans toute cette partie, a_n désigne le nombre de murs distincts construits avec n briques (avec $a_0 = 1$).

1. Montrer que, $\forall n \geqslant 0$, $a_0 + a_1 + \cdots + a_n = a_{n+2} - 1$.
2. Montrer que, $\forall n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{a_1 a_3} + \dfrac{1}{a_2 a_4} + \cdots + \dfrac{1}{a_n a_{n+2}} = 1 - \dfrac{1}{a_{n+1} a_{n+2}}$.
3. Montrer l'inégalité : $\forall n \geqslant 0$, $a_{n+2} > \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$.
4. On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{a_n a_{n+2}}$. Cette série converge-t-elle ? Si oui, quelle est sa somme ?

5. Montrer que $\binom{2n}{0} + \binom{2n-1}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = a_{2n}$, où a_k désigne le $(k+1)$-ème nombre de Fibonacci.

Problème 2 : Nombre de surjections entre ensembles finis

Dans tout ce problème, on note, pour tous entiers naturels n et p, $S_{n,p}$ le nombre de surjections de l'ensemble $\{1;2;\dots;n\}$, vers l'ensemble $\{1;2;\dots;p\}$. Un exemple de telle application pour $n=3$ et $p=2$ est $f : \{1;2;3\} \to \{1;2\}$ définie par $\begin{cases} f(1)=2 \\ f(2)=2 \\ f(3)=1 \end{cases}$. On convient que $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_{n,0}=0$, et $\forall p \in \mathbb{N}$, $S_{0,p}=0$.

Première partie : exemples et généralités

1. Déterminer les valeurs de $S_{3,2}$ et $S_{4,2}$ en faisant la liste de toutes les applications convenables.
2. Que peut-on dire de $S_{n,p}$ quand $n < p$?
3. Déterminer, pour tout entier n, la valeur de $S_{n,1}$.
4. Déterminer, pour tout entier n, la valeur de $S_{n,n}$.

Deuxième partie : détermination de $S_{n,2}$

Pour alléger les notations, on pose dans cette partie, $\forall n \geqslant 2$, $u_n = S_{n,2}$.

1. Vérifier que $u_2 = 2$.
2. Prouver que, $\forall n \geqslant 2$, $u_{n+1} = 2(u_n + 1)$ (on pourra fixer l'image de $n+1$ par une application surjective de $\{1;2;\dots;n+1\}$ dans $\{1;2\}$, et considérer les possibilités pour les images des autres éléments).
3. À l'aide de cette relation de récurrence, déterminer la valeur de u_n.
4. Retrouver cette valeur à l'aide d'un raisonnement combinatoire direct, en comptant le nombre d'applications de $\{1;2;\dots;n\}$ dans $\{1;2\}$ qui ne sont pas surjectives.

Troisième partie : détermination de $S_{n,3}$

On pose désormais, $\forall n \geqslant 3$, $v_n = S_{n,3}$.

1. Vérifier que $v_3 = 6$.
2. Prouver que, $\forall n \geqslant 3$, $v_{n+1} = 3(v_n + u_n) = 3v_n + 3 \times 2^n - 6$.
3. Écrire un programme Pascal calculant la valeur de v_n pour un entier n choisi par l'utilisateur, à l'aide de la relation de récurrence précédente.
4. On pose $\forall n \geqslant 3$, $w_n = v_n - 3$. Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite (w_n).
5. On pose désormais, $\forall n \geqslant 3$, $t_n = w_n + 3 \times 2^n$. Montrer que (t_n) est une suite géométrique de raison 3.
6. En déduire la valeur de t_n, puis celle de u_n et de w_n.
7. Par un raisonnement direct inspiré de celui de la question 2.4 (dénombrer le nombre d'applications non surjectives), retrouver la valeur de v_n.

Quatrième partie : détermination de $S_{n+1,n}$

1. Soit f une application surjective de $\{1;2;\ldots;n+1\}$ dans $\{1;2;\ldots;n\}$. Montrer qu'il existe un unique élément dans $\{1;2;\ldots;n\}$ ayant deux antécédents par f.
2. De combien de façons peut-on choisir ces deux antécédents ?
3. En déduire que $S_{n+1,n} = \dfrac{n(n+1)!}{2}$.

Cinquième partie : cas général

1. Montrer que, $\forall n \geqslant 2$, $\forall p \geqslant n$, $S_{n,p} = nS_{n,p-1} + S_{n-1,p-1}$.
2. À l'aide de cette relation, dresser un tableau similaire au triangle de Pascal donnant les valeurs de $S_{n,p}$ pour des entiers n et p inférieurs ou égaux à 5.
3. Soit j un entier inférieur ou égal à $p-1$, et k tel que $j \leqslant k \leqslant p$, prouver que
$$\binom{p}{k}\binom{k}{j} = \binom{p}{j}\binom{p-j}{k-j}$$
4. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=q}^{k=p}(-1)^k\binom{p}{k}\binom{k}{q} = 0$ (on pourra faire apparaître une formule du binôme de Newton).
5. Déterminer en fonction de $S_{n,k}$, le nombre d'applications de $\{1;2;\ldots;n\}$ dans $\{1;2;\ldots;p\}$ prenant exactement j valeurs différentes (j étant ici un entier inférieur ou égal à p).
6. En déduire que $p^n = \displaystyle\sum_{j=1}^{j=p}\binom{p}{j}S_{n,j}$.
7. Prouver à l'aide des deux résultats précédents que $S_{n,p} = (-1)^p\displaystyle\sum_{k=0}^{k=p}(-1)^k\binom{p}{k}k^n$ (calculer la somme de droite en remplaçant k^n par la formule obtenue à la question 6).