ECE3 2009-2010 : Un an de maths

Guillaume LAFON

25 juin 2010

Table des matières

Déjà la fin...

Comme le disait si bien Caton le Grand (ou si ce n'est lui, un de ses émules ; tous ceux qui ne voient pas ce que Caton peut bien faire ici sont priés d'ajouter à leur programme de révisions pour les vacances une relecture de l'intégrale d'Astérix), les bonnes choses ont une fin. Notez, et c'est plutôt rassurant, les mauvaises aussi. Quelle que soit la catégorie dans laquelle vous avez envie de ranger les quelque 300 et quelques heures de cours de maths subies depuis notre première rencontre en septembre dernier (vous voulez des chiffres ? 21 chapîtres, 191 définitions, 165 propositions (et quelques théorèmes), 169 remarques, et un nombre d'exercices qu'on préfèrera oublier très vite), pas de doute, c'est bel et bien fini !

Déjà. Ou enfin, c'est selon. En ce qui me concerne, l'année est passée à une vitesse incroyable, mais j'ai quelques bonnes raisons pour cela que vous ne partagez pas : je suis vieux, du moins si on me compare à vous, et il est scientifiquement prouvé que, plus on vieillit, plus le temps passe vite (ce qui explique sûrement que la plupart des jeunes gens de votre âge préfèrent profiter de cette période bénie plutôt que se plonger intensivement dans le travail comme vous. Vous devez quand même être un peu masos sur les bords, non ?) ; le petit monstre roux qui a débarqué dans ma vie en décembre a une fâcheuse tendance à accélérer le temps également (surtout la nuit) ; et surtout, bien sûr, je n'ai pas tout à fait la même pression au niveau de mon boulot, et pas du tout la fameuse terreur de la sale note qui pourrit tant la vie du préparationnaire moyen.

Mais plutôt que de parler de choses qui fâchent, pourquoi ne pas tenter de se rappeler le reste, ce qui semble à première vue tenir du détail, et qui fait pourtant de ces années de prépa autre chose qu'une simple accumulation (certes impressionnante) de connaissances ingérées en un temps limité, pour la transformer en une aventure humaine qui vous marquera sans nul doute dureblement ? Au risque de tomber dans un inventaire à la Prévert, malgré l'absence de raton-laveur, souvenons-nous donc ensemble de ce prof de maths paparazzi mitraillant les élèves dès le premier jour pour constituer un trombinoscope dont la réussite esthétique fût pour le moins contestable ; de la première question de la première interro de l'année « Nier la phrase : Il a plu tous les jours de juillet en Bretagne » ; des nombreux fous rires en TD de Pascal, dont la raison n'avait sûrement que bien peu à voir avec le sujet d'étude du jour ; des trop nombreuses fois où nous avons retrouvé « notre » salle sens dessus dessous après une réunion tardive la veille ; des interventions inimitables de M.Francisco (mais oui, je peux dessiner un trapèze...) ; des bavardages incessants de Melle Duparc, qu'on aurait malgré tout aimer garder parmi nous jusqu'au bout ; des retards systématiques de M.Jurkiewicz et Melle Boutevin ; de la joie de M.Bodier le jour où j'ai rendu le DS6 ; de ce que chacun d'entre vous a pu apporter à cette classe, je ne peux pas tous vous citer (certains de ceux qui ont été cités m'en voudront peut-être déjà) mais l'année n'aurait pas été la même si un seul d'entre vous n'avait pas été là. Et puis bien sûr, on se souviendra aussi des blagues pourries du prof ; des nombreux matheux, souvent un peu fous, qu'on aura croisés tout au long de cette année, mais aussi de ceux qu'on n'a pas vraiment croisés mais dont je n'ai pas pu m'empêcher de vous parler ; de tous les exercices ou autres démonstrations que j'ai qualifiés de rigolos mais qui ne vous ont pas vraiment fait rire ; des alignements de calculs affreux dont j'ai recouvert le tableau de mon écriture illisible ; des erreurs d'énoncé planquées dans la plupart des sujets que je vous ai posés ; les noms ridicules donnés à mes programmes en TD d'info. Et puis il y aura tous vos souvenirs à vous, accumulés depuis votre place d'élève, et que je n'ai pas eu la chance de partager (ce qui vaut peut-être mieux pour certains d'entre eux, allez savoir).

Et du côté du prof, alors, ça se vit comment, une année de prépa ? Finalement, il y a pas mal de choses en commun : l'alternance des cours et des colles ; la tension avant les devoirs, et la tristesse qui pointe le bout de son nez à chaque mauvaise note (qui sont finalement beaucoup plus nombreuses pour nous que pour vous, si on réfléchit bien !) ; le plaisir de voir qu'une question a été bien réussie, ou le désespoir de constater que la récurrence c'est toujours pas ça ; l'absence totale d'envie de se mettre au travail par moments (souvent quand il y a un paquet de devoirs à la maison à corriger) ; l'obligation qui en résulte de devoir faire les choses au dernier moment, et donc mal voire pas du tout (alors, ça se voit, les cours pas préparés, ou non ? Et les cours du vendredi matin quand je suis complètement endormi après une soirée bridge ?) ; le bonheur des deux semaines de vacances après quelques semaines de travail ; et surtout cette sentation étrange de ne jamais quitter totalement le petit monde de la prépa, même une fois rentré à la maison, allant parfois jusqu'à farfouiller dans

FaceBook à la recherche de petites infos (de ce point de vue, le groupe ECE3 Carnot 2009-2011 a été une grosse déception ; mais j'ai l'impression que vos successeurs sont mieux partis que vous). Ma copine peut témoigner, sans jamais vous avoir vu (mais elle regrette de ne pas avoir pu passer au pique-nique), elle vous connait tous un petit peu (en tout cas, elle connait vos notes de maths...). À côté de cela, il y aussi, en tant que prof, les moments où on se sent très loin de ses élèves. Par exemple après un calcul délicat ou une explication alambiquée, quand on se retourne vers la classe et que tout ce qu'on lit la quarantaine de paire d'yeux braqués sur nous c'est « Monsieur, là, on n'est plus sur la même planète ». Il y a aussi ces drôles d'heures que constituent les surveillances de devoir. Une sorte d'inversion des rôles s'y produit : les élèves dans leur travail, dans leur réflexion commune et pourtant isolée, et le prof qui occupe son temps à des futilités, compter le nombre de gauchers (j'ai du le faire un nombre invraisemblable de fois depuis le début de l'année, mais je suis toujours incapable de me souvenir combien il y en a), réviser son classement des plus jolies filles de la classe ...Ou alors, observer, tout simplement, cette société miniature occupée à une tâche identique, mais avec de subtiles différences d'un élève à l'autre. Il y a ceux qui sont totalement concentrés, bouchons dans les oreilles, et ceux qui se laissent distraire par le moindre bruit ; ceux qui restent impassibles et ceux qui laisse voir tout leur énervement (ou parfois leur désespoir) quand une question leur résiste ; ceux qui jettent des coups d'oeil réguliers vers moi, et ceux qui restent plongés dans leur copie ; ceux qui rendent leur copie en souriant, indépendamment de ce qu'ils ont pu mettre dedans, et ceux dont le visage exprime déjà l'opinion de ce qu'ils sont en train de me livrer. Ces surveillances, bien qu'étant les moments où la classe est la moins vivante, font partie de ceux où les personnalités se révèlent le plus. Vous l'aurez compris, ce sont des heures que j'apprécie particulièrement (vous aurez d'ailleurs sûrement constaté que, contrairement à beaucoup de collègues, je fais rarement autre chose quand je surveille), et pas seulement parce que c'est très reposant pour moi (ça peut aussi être affreusement traitre un lendemain de soirée bridge, la tentation de l'endormissement étant très forte).

Des heures que j'ai appréciées, il y en a eu beaucoup d'autres avec vous cette année. J'ai sincèrement pris beaucoup de plaisir à vous accompagner dans cette épreuve que constitue une première année de prépa, et vous m'avez notammé charmé par votre dynamisme (parfois un peu bruyant, certes) et votre solidarité à toute épreuve. Il ne me reste plus maintenant qu'à vous souhaiter bonne route, et à vous rappeler que votre avenir ne se limite pas à votre réussite scolaire. La prépa a l'immense mérite de vous offrir un socle de connaissances très solide et des opportunités de lancement dans la vie professionnelle incomparables, mais c'est à vous ensuite de vous créer un parcours et de faire des choix de vie qui correspondent à votre personnalité, à celui ou à celle que vous avez envie de devenir. Ne vous laissez pas abasourdir par les sirènes du conformisme ambiant, et faites ce que qui vous plait vraiment, le bonheur est à ce prix.

Comme je suis vraiment en train de m'égarer du côté de la philosophie de comptoir, je crois qu'il est temps de conclure cette introduction par ces mots : une chose est certaine, une année de prépa, ça ne s'oublie pas. Et j'espère que ces quelques lignes joueront leur petit rôle pour que cette année avec moi ne se résume pas totalement à des termes barbares comme « séries convergentes », « suites arithmético-géométriques » ou « formule des probabilités totales » qui pullulent dans les (nombreuses) pages qui suivent cet avant-propos.

Bonne vacances à tous, profitez-en pour sortir un peu du monde tout de même un brin étouffant de la prépa, il sera bien temps d'y revenir en septembre. En attendant, petit exercice transdisciplinaire pour les vacances : résumer tout ce qui suit en 50 pages, plus ou moins 10% !

Guillaume 'Roupoil' Lafon
25 juin 2010

Votre professeur préféré se préparant à aller faire cours. Comment ça, pas crédible en costard ? Pour enseigner à des prépas HEC, ça pourrait le faire, non ?

Première partie

Cours


APPELEZ.MOI LE GÉRANT !
IL Y A UN MANUEL DE GEOMETRIE SPECTRALE TROISIÈME ANNÉE DANS MON POTAGE !
G.M.

Chapitre 1

Fonctions usuelles

Pour ce premier chapitre de l'année, on commence en douceur (enfin, tout est relatif, naturellement) avec un retour sur quelques notions et résultats sur les fonctions usuelles que vous avez pour la plupart déjà vus en lycée. Pour cette raison, mais également parce que nous manquons encore de définitions précises, ce chapitre comportera exceptionnellement peu de démonstrations (elles seront, je vous rassure tout de suite, refaites au cours de l'année). Disons que vous avez là une compilation de choses que nous utiliserons suffisamment souvent pour je considère normal que vous les ayez en permanence en tête.

1.1 Vocabulaire

1.1.1 Ensembles et domaines de définition

Nous reverrons plus en détail dans un chapitre ultérieur les opérations sur les ensembles, nous nous contenterons donc ici du strict minimum.

Définition 1. Un **ensemble** est une collection d'objets mathématiques. Il est souvent décrit par une propriété commune de ces objets, par exemple $[2;3[= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x < 3\}$. Le symbole $\in$ signifie « appartient à » et le symbole $\mid$ signifie « tels que ». La notation entre accolades désigne toujours un ensemble en mathématiques.

Définition 2. Un ensemble F est **inclus** dans un ensemble E si tout élément de F appartient aussi à E. On le note $F \subset E$.

Remarque 1. Il ne faut pas confondre appartenance et inclusion. Ainsi, $\sqrt{7} \in [2;3[$, mais $[\pi - 1; \sqrt{7}] \subset [2;3[$.

Définition 3. Nous utiliserons tout au long de l'année les deux symboles supplémentaires suivants, appelés un peu pompeusement **quantificateur existentiel** et **quantificateur universel** :

- le symbole $\exists$ signifie « il existe » ; ainsi, le fait qu'une fonction f s'annule sur l'intervalle $[0;1]$ peut s'écrire plus mathématiquement $\exists x \in [0;1]$, $f(x) = 0$.
- le symbole $\forall$ signifie « quel que soit » ; ainsi, le fait qu'une fonction f soit nulle sur l'intervalle $[0;1]$ s'écrit $\forall x \in [0;1]$, $f(x) = 0$. Notez bien la différence entre ces deux exemples, il est évidemment essentiel de ne pas confondre les deux symboles.

Remarque 2. Dans les cas où a besoin de plusieurs quantificateurs pour exprimer une propriété (ça arrive souvent), l'ordre dans lequel on les dispose est aussi très important. On les lit naturellement de gauche à droite, ce qui donne par exemple :

- $\exists x \in \mathbb{R}$, $\forall y \neq x \in \mathbb{R}$, $f(x) > f(y)$ signifie que f admet un maximum (global) en x ($f(x)$ est plus grand que toutes les autres images par f).
- $\forall y \in \mathbb{R}$, $\exists x \neq y \in \mathbb{R}$, $f(x) > f(y)$ signifie que f n'admet pas de maximum (quelle que soit la valeur de y, on peut trouver un x ayant une image plus grande par f).

Définition 4. Le symbole $\Rightarrow$ est un symbole d'**implication** : $A \Rightarrow B$ signifie que la propriété B est vraie dès que A l'est (par contre, si A est fausse, B peut bien être vraie ou fausse, ça n'a pas d'importance). Le symbole $\Leftrightarrow$ est un symbole d'équivalence : $A \Leftrightarrow B$ signifie que A implique B **et** B implique A. Autrement dit, dès que l'une est vraie, l'autre aussi, et dès que l'une est fausse l'autre aussi. Autre façon de voir les choses : $A \Rightarrow B$ et sa **réciproque** $B \Rightarrow A$ sont toutes les deux vraies.

Exemple (théorème de Pythagore et réciproque) : Un triangle ABC est rectangle en $A \Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Remarque 3. Quand on calcule les longueurs des côtés d'un triangle, et qu'on invoque l'absence d'égalité de Pythagore pour prouver que le triangle n'est pas rectangle, on n'utilise pas la réciproque du théorème, mais bel et bien le théorème lui-même, ou plutôt sa **contraposée** : si $A \Rightarrow B$, la contraposée stipule que la négation de B implique la négation de A (on reviendra sur ce concept plus tard).

Définition 5. Le **domaine de définition** d'une fonction d'une variable réelle est $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ existe}\}$. Sauf mention du contraire, le domaine de définition est constitué de tous les réels pour lesquels $f(x)$ peut être calculé.

Exemples : Les trois cas nécessitant un peu de réflexion à notre niveau sont les suivants :
- annulation d'un dénominateur : si $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-4}$, alors $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-2; 2\}$.
- positivité sous une racine : si $f(x) = \sqrt{4-2x}$, alors $\mathcal{D}_f =]-\infty; 2]$.
- stricte positivité sous un ln : si $f(x) = \ln(x^2 - 9)$, alors $\mathcal{D}_f =]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[$

1.1.2 Parité et périodicité

Définition 6. Une fonction réelle f est **paire** si son domaine de définition est symétrique par rapport à 0 et si $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = f(x)$. Une fonction réelle f est **impaire** si son domaine de définition est symétrique par rapport à 0 et si $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = -f(x)$.

Exemples : La fonction $f : x \mapsto x^2 + 12$ est paire. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{x^2+1}$ est impaire.

Remarque 4. La représentation graphique d'une fonction paire dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. La représentation graphique d'une fonction impaire dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Définition 7. Une fonction réelle f est **périodique de période** T si, $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $x + T \in \mathcal{D}_f$ et $f(x+T) = f(x)$.

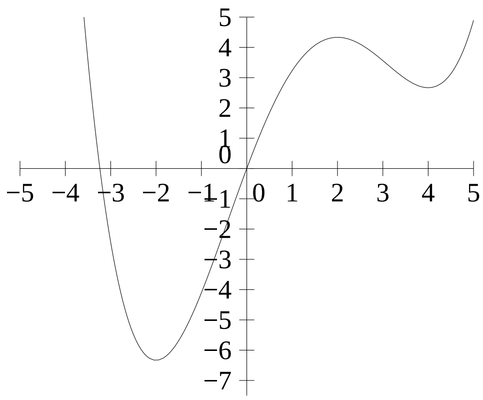
Remarque 5. La représentation graphique d'une fonction périodique de période T est stable par translation de vecteur $T\vec{i}$, où $\vec{i}$ est le vecteur unitaire de l'axe des abscisses. Nous verrons un exemple de telle fonction plus loin dans ce chapitre.

1.1.3 Monotonie et bornes

Définition 8. Une fonction réelle f est **croissante** (resp. **décroissante**) sur un intervalle I si, $\forall (x,y) \in I^2$, $x < y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$ (resp. $f(x) \geqslant f(y)$). Je vous épargne les définitions de croissance et décroissance stricte.

Définition 9. Une fonction réelle f admet un **maximum** (local) en x sur l'intervalle I si $x \in I$ et $\forall y \in I$, $f(y) \leqslant f(x)$. On parle de **maximum global** si $I = \mathcal{D}_f$. On définit de même **minimum local et global**.

Exemple : La fonction représentée ci-dessous admet un minimum global en -2, un minimum local en 4, un maximum local en 2 et pas de maximum global.



Définition 10. Le réel m est un **minorant** de la fonction f sur l'intervalle I si $\forall x \in I,\ f(x) \geqslant m$. De même, M est un **majorant** de f sur I si $\forall x \in I,\ f(x) \leqslant M$. On dit que f est bornée sur I si elle y admet à la fois un majorant et un minorant.

Remarque 6. Un minorant n'est pas la même chose qu'un minimum. Par exemple, la fonction carré a pour minimum 0 sur $\mathbb{R}$, mais elle est aussi minorée par -2, -15 et tout plein d'autres valeurs. Une fonction peut même être minorée sans avoir de minimum, par exemple la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$.

1.2 Variations

Ce paragraphe sera très court, puisque je ne reviendrai volontairement pas sur les calculs et autres propriétés des dérivées que vous avez vus au lycée (nous aurons un chapitre entier consacré à la dérivation dans quelques mois). Il va toutefois de soi que devez connaitre vos dérivées de fonctions usuelles sur le bout des doigts.

Proposition 1. Si f est une fonction dérivable en a, le nombre dérivé $f'(a)$ représente le coefficient directeur de la tangente en a à la courbe représentative de la fonction f. Plus précisément, cette tangente a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Et comme il n'y a pas que la dérivée dans la vie, rappelons les propriétés suivantes, valables pour des fonctions qui ne sont pas supposées dérivables.

Proposition 2. La somme de deux fonctions croissantes (resp. décroissantes) est croissante (resp. décroissante).
Si f et g sont de même monotonie sur I et $f(I)$ respectivement, alors $g \circ f$ est croissante sur I. Si f et g sont de monotonie opposée sur I et $f(I)$ respectivement, alors $g \circ f$ est décroissante sur I.

Exemple : Il faut faire très attention aux intervalles pour les composées. Prenons $h(x) = (2x-4)^2$. On peut écrire $h = g \circ f$, où f est une fonction affine croissante sur $\mathbb{R}$ et g la fonction carré décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$. Comme $f(]-\infty;2]) = \mathbb{R}_-$, et $f([2;+\infty[) = \mathbb{R}_+$, on peut conclure que h est décroissante sur $]-\infty;2]$ et croissante sur $[2;+\infty[$.

1.3 Logarithmes et exponentielles

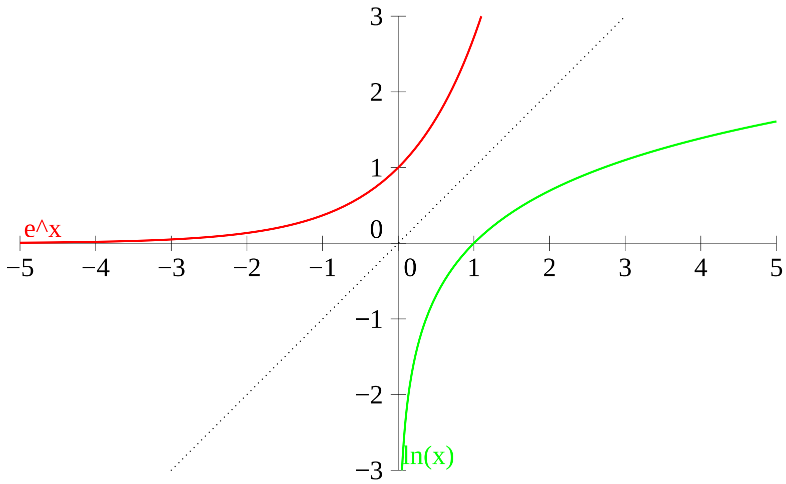
La cohérence des définitions et les résultats de ce paragraphe sont provisoirement admis.

1.3.1 La fonction logarithme népérien

Définition 11. La fonction **logarithme népérien**, notée ln est l'unique primitive de la fonction inverse définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et vérifiant $\ln 1 = 0$.

Proposition 3. Variations de la fonction ln : La fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.

Voici la courbe représentative du logarithme népérien, ainsi que celle de l'exponentielle :



Proposition 4. Régles de calcul avec la fonction ln : le logarithme népérien transforme les produits en somme et les quotients en différences. On a donc $\forall (x,y) > 0$, $\ln(xy) = \ln x + \ln y$; $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$. Cas particulier : $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$. Enfin, on a également, découlant de la première formule, $\ln(x^n) = n \ln x$ pour tout entier naturel n.

1.3.2 La fonction exponentielle

Définition 12. La fonction **exponentielle**, notée exp : $x \mapsto e^x$ est la réciproque de la fonction ln. Elle est définie sur $\mathbb{R}$ par $x = \ln y \Leftrightarrow e^x = y$.

Proposition 5. La fonction exponentielle est dérivable, et elle est sa propre dérivée. Elle est strictement croisssante et strictement positive sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

Remarque 7. Les courbes de l'exponentielle et du logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Proposition 6. Les régles de calcul avec la fonction exponentielle sont les mêmes que les règles de calcul sur les puissances. Rappelons au passage que $e^1 = e \simeq 2,71$.

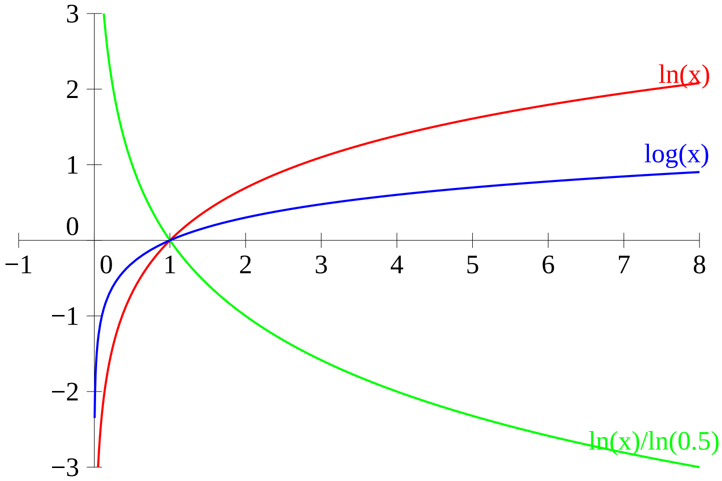
1.3.3 Logarithmes et exponentielles de base a

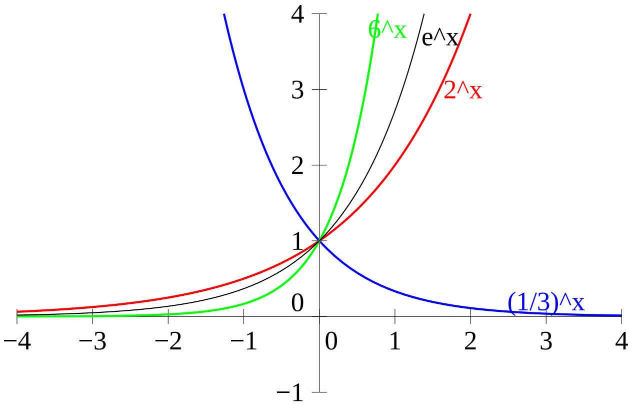
Définition 13. Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$, on définit la fonction **logarithme de base** a sur $]0;+\infty[$ par $\log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$, et la fonction **exponentielle de base** a sur $\mathbb{R}$ par $\exp_a(x) = e^{x \ln a}$ (plus simplement noté $\exp_a(x) = a^x$.

Proposition 7. Les fonctions $\log_a$ et $\exp_a$ sont réciproques l'une de l'autre. Elles vérifient les mêmes règles de calcul que ln et exp respectivement. Elles sont toutes deux strictement croissantes sur leur ensemble de définition si $a > 1$, et strictement décroissantes sinon.

Remarque 8. Le logarithme népérien n'est donc rien d'autre que le logarithme de base e. On note habituellement log la fonction logarithme de base 10, aussi appelé logarithme décimal.

Voici quelques exemples de courbes de fonctions logarithmes, puis de fonctions exponentielles :



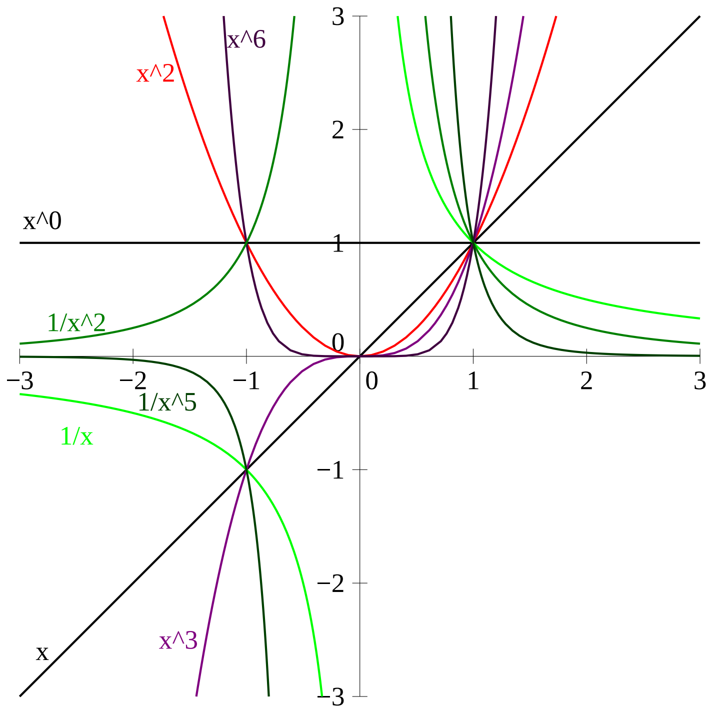


1.4 Fonctions puissances

1.4.1 Puissances entières

Pour tout entier naturel n, la fonction $f_n : x \mapsto x^n$ est définie sur $\mathbb{R}$. Si n est pair, la fonction f_n est paire. Si n est impair, f_n est impaire. La fonction f_0 est constante égale à 1. Pour n impair, la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$; pour n pair non nul, f_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Si n est un entier négatif, on définit également une fonction puissance sur $\mathbb{R}^*$ par $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{x^{-n}}$. La parité de ces fonctions est toujours la même que celle de n. Si n est impair, f_n est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ (mais ne dites surtout pas qu'elle est décroissante sur $\mathbb{R}^*$, on ne parle de monotonie que sur un intervalle). Si n est pair, f_n est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$ et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.
Voici quelques exemples de courbes de puissances entières :



1.4.2 Puissances quelconques

À l'aide des fonctions ln et exp, on peut définir des fonctions puissances pour des puissances non entières, mais seulement sur $\mathbb{R}_+^*$:

Définition 14. La fonction f_a est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_a : x \mapsto e^{a \ln x}$. On la note plus simplement $f_a(x) = x^a$.

Proposition 8. Les fonctions puissances sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, et $f_a'(x) = ax^{a-1}$. La fonction f_a est strictement croissante si $a > 0$, strictement décroissante si $a < 0$.

Ces nouvelles fonctions puissances ressemblent en fait beaucoup aux précédentes. Pour la peine, je me dispense de vous donner des exemples de courbes représentatives.

Remarque 9. Si $a \neq 0$, la fonction f_a est réciproque de la fonction $f_{\frac{1}{a}}$. Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{\frac{1}{n}}$ correspond à la notion de racine n-ième. On a par exemple $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ et $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$.

1.5 Limites classiques

Quelques résultats qui peuvent servir, notamment ceux de croissance comparée, qui sont absolument fondamentaux.

Proposition 9. On a $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

Proposition 10. : Croissance comparée des fonctions usuelles en $+\infty$.

- $\forall a > 1$, $\forall b > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a^x}{x^b} = +\infty$
- $\forall b > 0$, $\forall c > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^b}{(\ln x)^c} = +\infty$

Autrement dit, on peut répartir de la façon suivante les fonctions usuelles en $+\infty$, les « plus fortes » étant à droite :
$(\ln x)^{\frac{1}{2}}$ $\quad \ln x$ $\quad (\ln x)^2$ $\quad (\ln x)^{47}$ $\qquad \sqrt{x}$ $\quad x$ $\quad x^2$ $\quad x^{2436525}$ $\qquad 1,2^x$ $\quad 2^x$ $\quad e^x$ $\quad 12^x$

Remarque 10. On peut déduire de ces résultats les autres propriétés suivantes :
- $\forall a > 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x \times x^n = 0$
- $\forall b > 0$, $\forall c > 0$, $\lim\limits_{x \to 0^+} x^b (\ln x)^c = 0$.

1.6 Valeur absolue, partie entière

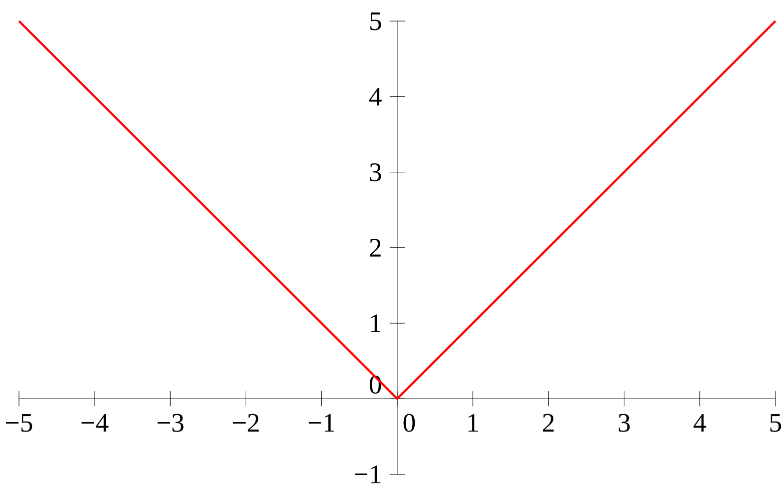
1.6.1 La fonction valeur absolue

Définition 15. La fonction **valeur absolue** est notée $x \mapsto |x|$. Elle est définie sur $\mathbb{R}$ par $|x| = x$ si $x \geqslant 0$ et $|x| = -x$ si $x \leqslant 0$.

Remarque 11. Autrement dit, la valeur absolue d'un réel x est sa distance à 0. Ainsi, une valeur absolue est toujours positive. On peut généraliser ce résultat en remarquant que, pour tous réels x et y, $|x - y|$ représente la distance entre x et y. Cette notion de distance est notamment très utile pour résoudre des équations et inéquations faisant intervenir des valeurs absolues. Cf la première feuille de TD pour des exercices faisant intervenir de telles résolutions, notons simplement deux cas à retenir absolument car ils nous serviront beaucoup par la suite :
- $|x - a| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow x \in [a - \varepsilon ; a + \varepsilon]$ (où ε est un réel positif).
- $|x - a| \geqslant \varepsilon \Leftrightarrow x < a - \varepsilon$ ou $x > a + \varepsilon$.

Proposition 11. La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0. Elle est paire, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Voici la courbe représentative de la fonction valeur absolue, qui est en fait constituée de par sa définition de deux demi-droites :



Proposition 12. Quelques autres propriétés des valeurs absolues qui peuvent être utiles pour les calculs :
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $|-x| = |x|$
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|xy| = |x| \times |y|$
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}^*$, $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$
- **Inégalité triangulaire** $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|x + y| \leqslant |x| + |y|$

Démonstration.

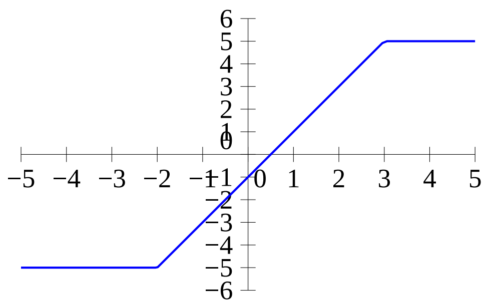
- Le premier point est une simple reformulation de la parité de la fonction valeur absolue.
- Si x et y sont de même signe, xy est positif, donc $|xy| = xy$, et $|x| \times |y| = xy$ ou $|x| \times |y| = (-x) \times (-y) = xy$ selon le signe commun de x et y. Si x et y sont de signe différent, $|x| \times |y| = -xy$, et xy étant négatif, $|xy| = -xy$. Dans tous les cas, ça marche !
- Pour le quotient, c'est exactement comme pour le produit, les règles de signe étant les mêmes.
- Si x et y sont tous deux positifs, $x + y$ l'est également et $|x + y| = x + y = |x| + |y|$. De même, si x et y sont négatifs, $|x + y| = -x - y = |x| + |y|$. Enfin, supposons x positif et y négatif (x et y jouant un rôle symétrique, le dernier cas sera démontré par la même occasion). On ne connait alors par le signe de $x + y$, mais ce qui est certain c'est que $y \leqslant x + y \leqslant x$. On a alors certainement $|x + y| \leqslant \max(|x|, |y|) \leqslant |x| + |y|$.

□

Exemple : Dans les cas où les valeurs absolues continuent à poser des problèmes de calcul, il est encore plus prudent de séparer plusieurs cas selon les valeurs de x. Imaginons que nous cherchions à tracer la courbe représentative de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x + 2| - |x - 3|$. Trois cas se présentent :

- si $x \leqslant -2$, $x + 2$ et $x - 3$ sont tous deux négatifs, donc $f(x) = -(x + 2) + (x - 3) = -5$
- si $-2 \leqslant x \leqslant 3$, $x + 2$ est positif et $x - 3$ négatif, donc $f(x) = x + 2 + x - 3 = 2x - 1$
- enfin, si $x \geqslant 3$, $f(x) = x + 2 - (x - 3) = 5$

La courbe recherchée ressemble donc à ceci :



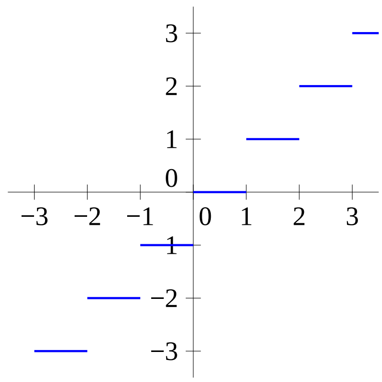
1.6.2 Les fonctions partie entière et décimale

Définition 16. La fonction **partie entière** est définie sur $\mathbb{R}$ de la façon suivante : $Ent(x)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x.

Exemples : $Ent(2,65743565678) = 2$; $Ent(5) = 5$; $Ent(-3,4) = -4$. Autrement dit, la partie entière de x est le seul entier vérifiant $Ent(x) \leqslant x \leqslant Ent(x) + 1$.

Proposition 13. La fonction partie entière est constante par morceaux. Elle est continue sur tous les intervalles de la forme $]n; n + 1[$, où $n \in \mathbb{Z}$.

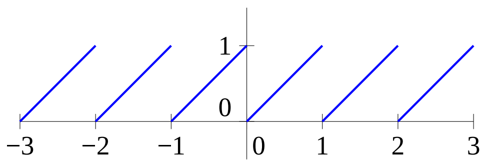
Voici la courbe de la fonction partie entière :



Définition 17. La fonction **partie fractionnaire** est définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x - Ent(x)$.

Proposition 14. La fonction partie fractionnaire coïncide avec la fonction $x \mapsto x$ sur l'intervalle $[0; 1[$, et est périodique de période 1. Elle est continue sur tout intervalle de la forme $[n; n + 1[$ et toujours positive.

Voici la courbe de la fonction partie fractionnaire :



Chapitre 2

Sommes, produits, récurrence

Pour ce deuxième chapitre, un peu de théorie, puisque celui-ci va nous permettre de définir quelques notations et méthodes supplémentaires qui nous seront bien utiles par la suite (ou peut-être devrais-je dire plutôt pour les suites, puisqu'il s'agit du premier thème faisant intervenir de façon assez intensive le symbole somme et les récurrences).

2.1 Sommes et produits

2.1.1 Symbole Σ et propriétés

La somme est l'opération la plus élémentaire qui soit en mathématiques, vous l'utilisez d'aileurs fréquemment depuis une bonne dizaine d'années maintenant. Mais autant sommer deux ou trois nombres est chose aisée, autant l'affaire se complique quand on a besoin de faire la somme d'un grand nombre de termes (voire même d'une infinité, comme on le verra un peu plus tard). Plutôt que de recourir à des petits points à la fois peu rigoureux et inefficaces, on utilise une notation un peu plus complexe au premier abord, mais qui simplifie grandement les calculs une fois maîtrisée.

Définition 18. Le symbole $\sum$ signifie « somme ». Plus précisément, la notation $\sum_{i=2}^{i=7} a_i$ se lit par exemple « somme pour i variant de 2 à 7 des a_i » et peut se détailler de la façon suivante : $\sum_{i=2}^{i=7} a_i = a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7$.

Remarque 12.

- Les bornes choisies, 2 et 7, ne sont que des exemples, on peut prendre n'importe quoi, y compris des bornes variables, par exemple $\sum_{i=n}^{i=n^2} a_i = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n^2-1} + a_{n^2}$. Par contre, la borne de départ doit toujours être plus petite que la borne d'arrivée (sinon la somme est nulle).
- La lettre i est une variable muette, autrement dit on peut la changer par n'importe quelle autre lettre sans changer la valeur de la somme. On choisit traditionnellement les lettres i, j, k, etc. pour les indices de sommes.
- Dans une somme, la variable muette prend toujours **toutes** les valeurs entières comprises entre la valeur initiale et la valeur finale.

Exemple : $\sum_{i=2}^{i=n} a = (n-1)a$ (faites bien attention au nombre de termes que contient la somme...).

Proposition 15. Règles de calcul sur les sommes. On a le droit d'effectuer les opérations suivantes :

- factoriser par une constante : $\sum_{i=0}^{i=n} a x_i = a \sum_{i=0}^{i=n} x_i$

- séparer ou regrouper des sommes de mêmes indices : $\sum_{i=0}^{i=n} a_i + b_i = \sum_{i=0}^{i=n} a_i + \sum_{i=0}^{i=n} b_i$
- séparer les indices en deux (relation de Chasles) : $\sum_{i=0}^{i=n} a_i = \sum_{i=0}^{i=p} a_i + \sum_{i=p+1}^{i=n} a_i$
- faire un changement d'indice : $\sum_{i=1}^{i=n} a_i = \sum_{j=0}^{j=n-1} a_{j+1}$ (on a posé $j = i - 1$)

Remarque 13. Tenter de simplifier d'une façon ou d'une autre $\sum_{i=0}^{i=n} a_i b_i$ est par contre une très bonne manière de s'attacher la rancoeur tenace de votre professeur ; les sommes et produits ne font pas bon ménage.

Exemple 1 : On cherche à calculer la somme des n premiers entiers : $S = \sum_{i=0}^{i=n} i$. Constatons que $S = \sum_{i=0}^{i=n} (n - i)$ (faire la somme en partant de 0 et en montant jusqu'à n revient au même que partir de n et descendre jusqu'à 0). En ajoutant les deux sommes, on obtient $S + S = \sum_{i=0}^{i=n} i + \sum_{i=0}^{i=n} (n - i)$, soit $2S = \sum_{i=0}^{i=n} (i + n - i) = \sum_{i=0}^{i=n} n = n(n + 1)$, donc on déduit que $S = \frac{n(n+1)}{2}$.

Exemple 2 : Une technique classique quand on cherche à calculer des sommes est l'utilisation de sommes télescopiques, qui consiste à constater que la différence de deux sommes ayant beaucoup de termes communs comporte en fait nettement moins de termes que ce qu'elle n'en a l'air au départ. Considérons $S = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i(i+1)}$. A priori pas évident à calculer, du moins tant qu'on a pas constaté que $\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} = \frac{i+1-i}{i(i+1)} = \frac{1}{i(i+1)}$. On peut alors faire le calcul suivant :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i+1} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i} - \sum_{j=2}^{j=n+1} \frac{1}{j} = 1 + \sum_{i=2}^{i=n} \frac{1}{i} - \sum_{j=2}^{j=n} \frac{1}{j} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Si la fin du calcul ne vous semble pas claire, on peut aussi voir les choses ainsi :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

2.1.2 Sommes doubles

Rien ne nous interdit de mettre une somme à l'intérieur d'une autre somme. Dans ce cas, il est toutefois très important d'utiliser deux indices différents pour les deux sommes, sous peine de confusion totale. Plusieurs notations sont possibles pour exprimer des sommes doubles : $\sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} i a_j = \sum_{j=1}^{j=n} \sum_{i=1}^{i=n} i a_j = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} i a_j$. Cette somme est constituée de n^2 termes qu'on peut par exemple représenter dans un tableau contenant n lignes et n colonnes. L'ordre dans lequel on place les deux sommes est indifférent (d'où également la possibilité de n'utiliser qu'une seule somme), on a donc intérêt à les placer dans l'ordre le plus pratique pour le calcul, ici par exemple :

$$\sum_{j=1}^{j=n}\sum_{i=1}^{i=n} ia_j = \sum_{j=1}^{j=n} a_j \left(\sum_{i=1}^{i=n} i\right) = \sum_{j=1}^{j=n} a_j \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}\sum_{j=1}^{j=n} a_j.$$

2.1.3 Produits

Le fonctionnement est très similaire à celui des sommes :

Définition 19. Le symbole $\prod$ signifie « produit ». Par exemple, $\displaystyle\prod_{i=1}^{i=5} i = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$.

Définition 20. On appelle **factorielle** de l'entier naturel n, et on note $n!$, le nombre $n! = \displaystyle\prod_{i=1}^{i=n} i$.

Exemples : $\prod i = 1^{i=n} a = a^n$; $\qquad \dfrac{(n+1)!}{n!} = \dfrac{\displaystyle\prod_{i=1}^{i=n+1} i}{\displaystyle\prod_{i=1}^{i=n} i} = n+1$

Proposition 16. Les règles de calcul suivantes peuvent être utiles quand on manipule des produits :

- séparer ou regrouper des produits ayant les mêmes indices : $\displaystyle\prod_{i=1}^{i=n} a_i \times \prod_{i=1}^{i=n} b_i = \prod_{i=1}^{i=n} a_i b_i$
- séparer les indices (relation de Chasles) : $\displaystyle\prod_{i=1}^{i=n} a_i = \prod_{i=1}^{i=p} a_i \times \prod_{i=p+1}^{i=n} a_i$
- faire un changement d'indice : $\displaystyle\prod_{i=2}^{i=n+1} a_i = \prod_{j=1}^{j=n} a_{j+1}$

Remarque 14. Bien entendu, tenter de simplifier $\displaystyle\prod_{i=1}^{i=n}(a_i + b_i)$ serait une grave erreur que, j'en suis certain, vous ne commettrez pas deux fois (ni même une seule, si possible).

Exemple : Un petit calcul de produit pour finir ce paragraphe. $P = \displaystyle\prod_{i=1}^{i=n} 3i = \prod_{i=1}^{i=n} 3 \times \prod_{i=1}^{i=n} i = 3^n n!$

2.2 Démonstration par récurrence

2.2.1 Énoncé et exemples

La démonstration par récurrence est un schéma de démonstration que nous utiliserons extrêmement souvent cette année, et qu'il est donc essentiel de maîtriser parfaitement. Réaliser une bonne récurrence n'est pas très compliqué si on se force à bien en respecter la structure, la rigueur est donc de mise pour ne pas dire de bêtise !

Définition 21. Considérons un ensemble de propriétés P_n dont l'énoncé dépend de la valeur de l'entier noté n. Le **principe de récurrence** de récurrence stipule que, si

- P_0 est vraie
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n \Rightarrow P_{n+1}$

alors les propriétés P_n sont vraies quel que soit l'entier n.

Autrement dit, pour prouver l'ensemble de toutes les propriétés P_n, il suffit de prouver la première (P_0), et de montrer qu'on arrive à prouver P_{n+1} à partir de P_n pour un entier n quelconque. Une bonne rédaction d'une démonstration par récurrence fera toujours intervenir les quatre points suivants :

- **Énoncé** clair et précis des propriétés P_n et du fait qu'on va réaliser une récurrence.
- **Initialisation** : on vérifie que P_0 est vraie (habituellement un calcul très simple).
- **Hérédité** : on suppose P_n vraie pour un entier n quelconque (c'est l'hypothèse de récurrence) et on prouve P_{n+1} à l'aide de cette hypothèse (si on n'utilise pas l'hypothèse de récurrence, c'est qu'on n'avait pas besoin de faire une récurrence !).
- **Conclusion** : En invoquant le principe de récurrence, on peut affirmer avoir démontré P_n pour tout entier n.

Exemple : On va reprendre le premier calcul de somme détaillé plus haut dans le cours.

- Nous allons démontrer par récurrence que la propriété P_n : $\displaystyle\sum_{i=0}^{i=n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ est vraie pour tout entier n.
- Pour $n = 0$, nous avons $\displaystyle\sum_{i=0}^{i=n} i = 0$ et $\dfrac{0(0+1)}{2} = 0$, donc P_0 est vraie.
- Supposons P_n vraie pour un entier n quelconque, c'est-à-dire que $\displaystyle\sum_{i=0}^{i=n} i = \frac{n(n+1)}{2}$. On peut alors effectuer le calcul suivant : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n+1} i = \sum_{i=0}^{i=n} i + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, ce qui prouve P_{n+1}.
- D'après le principe de récurrence, nous pouvons donc affirmer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{i=n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

2.2.2 Variations du principe de récurrence

Le monde mathématique n'étant pas parfait, une récurrence classique n'est hélas pas toujours suffisante pour montrer certaines propriétés. Il faut donc être capable de modifier légèrement la structure dans certains cas :

- si on ne cherche à montrer P_n que lorsque $n \geqslant n_0$ (n_0 étant un entier fixe dépendant du contexte), on peut toujours procéder par récurrence, mais en initialisant à n_0.
- il est parfois nécessaire que l'hypothèse de récurrence porte non pas sur une valeur de n, mais sur deux valeurs consécutives. On peut alors effectuer une récurrence double : on vérifie P_0 et P_1 lors de l'étape d'initialisation, et on prouve P_{n+2} à l'aide de P_n et P_{n+1} lors de l'hérédité.
- on peut même avoir besoin pour prouver l'hérédité que la propriété soit vérifiée pour **tous** les entiers inférieurs. Dans ce cas, on parle de récurrence forte : le plus simple est de modifier la définition de la propriété P_n pour lui donner un énoncé comment par $\forall k \leqslant n$. Ainsi, lorsqu'on suppose P_n vérifiée, on a une relation vraie pour toutes les valeurs de k inférieures ou égales à n (les plus malins d'entre vous noteront d'ailleurs qu'on peut toujours rédiger une récurrence sous forme de récurrence forte, ça ne demande pas plus de travail et ça ne peut pas être moins efficace ; c'est toutefois un peu plus lourd et déconseillé sauf nécessité).

Exemple : On considère une suite réelle définie de la façon suivante : $u_0 = 1$; $u_1 = 3$ et $\forall n \geqslant 2$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Notre but va être de prouver par récurrence double la propriété P_n : $u_n = 2^{n+1} - 1$.

- double initialisation : pour $n = 0$, $2^1 - 1 = 1 = u_0$, et pour $n = 1$, $2^2 - 1 = 3 = u_1$, donc P_0 et P_1 sont vérifiées.
- hérédité : on suppose que, pour un entier n fixé, P_n et P_{n+1} sont vraies, c'est-à-dire que $u_n = 2^{n+1} - 1$ et $u_{n+1} = 2^{n+2} - 1$. On peut alors calculer $u_{n+2} = 3(2^{n+2} - 1) - 2(2^{n+1} - 1) = 3 \times 2^{n+2} - 3 - 2^{n+2} + 2 = 2 \times 2^{n+2} - 1 = 2^{n+3} - 1$, donc P_{n+2} est vérifiée.
- conclusion : par principe de récurrence double, on peut conclure que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{n+1} - 1$.

Remarque 15. Le problème de ce genre de démonstration est évidemment qu'il faut déjà avoir une idée du résultat pour pouvoir le prouver par récurrence. Ainsi, dans le dernier exemple, il faut conjecturer la forme du terme général de la suite (par exemple en calculant ses premiers termes) avant de pouvoir vérifier la formule par récurrence.

2.2.3 Quelques sommes classiques

Dans ce dernier paragraphe, nous nous contenterons d'énoncer (et de démontrer, tout de même) les valeurs de quelques sommes très utiles, qui sont à connaître absolument par coeur.

Proposition 17.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{i=n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{i=n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{i=n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{i=1}^{i=n}\right)^2$
- $\forall q \neq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Démonstration.
- Nous avons déjà démontré deux fois ce résultat, dont une par récurrence, ça suffit comme ça !
- Nous allons prouver par récurrence la propriété P_n : $\displaystyle\sum_{i=0}^{i=n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Pour $n = 0$, nous avons $\displaystyle\sum_{i=0}^{i=n} i^2 = 0^2 = 0$, et $\dfrac{0(0+1)(2\times 0+1)}{6} = 0$, donc P_0 est vérifiée. Supposons désormais P_n vraie pour un entier n quelconque, on peut alors écrire $\displaystyle\sum_{i=0}^{i=n+1} i^2 = \sum_{i=0}^{i=n} i^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)(n(2n+1)+6n+6)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$, donc P_{n+1} est vérifiée. D'après le principe de récurrence, on peut conclure que P_n est vraie pour tout entier naturel n.
- Nous allons prouver par récurrence la propriété P_n : $\displaystyle\sum_{i=0}^{i=n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. Pour $n = 0$, nous avons $\displaystyle\sum_{i=0}^{i=n} i^3 = 0^3 = 0$, et $\dfrac{0^2(0+1)^2}{4} = 0$, donc P_0 est vérifiée. Supposons désormais P_n vraie pour un entier n quelconque, on peut alors écrire $\displaystyle\sum_{i=0}^{i=n+1} i^3 = \sum_{i=0}^{i=n} i^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$, donc P_{n+1} est vérifiée. D'après le principe de récurrence, on peut conclure que P_n est vraie pour tout entier naturel n.
- Nous allons prouver par récurrence la propriété P_n : $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Pour $n = 0$, nous avons $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} q^k = q^0 = 1$, et $\dfrac{1-q^1}{1-q} = 1$, donc P_0 est vérifiée. Supposons désormais P_n vraie pour

une entier n quelconque, on peut alors écrire $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n+1} q^k = \sum_{k=0}^{k=n} q^k + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$, donc P_{n+1} est vérifiée. D'après le principe de récurrence, on peut conclure que P_n est vraie pour tout entier naturel n.

$\square$

Chapitre 3

Suites I, généralités, suites remarquables

Le premier grand thème à notre programme cette année, ce sont les suites. Pour ce premier chapitre qui leur sera consacré (il y en aura seulement deux), nous allons revenir sur des notions que vous avez déjà vues, en élargissant un peu le champ des suites classiques à connaitre. Vous avez vu au lycée les suites arithmétiques et géométriques (nous rappellerons les principaux résultats les concernant), nous en rajouterons deux autres types.

3.1 Généralités sur les suites

Définition 22. Une **suite réelle** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une liste infinie de nombres réels, habituellement numérotés à partir de 0. Ainsi, on note u_0 le premier terme de la suite, u_1 le deuxième etc. Le nombre u_n (pour n fixé) est appelé **terme d'indice** n de la suite, et u_n (n n'étant pas fixé) est appelé **terme général** de la suite (attention à ne pas confondre notamment u_n et (u_n)).

Remarque 16. Une autre façon de voir les choses est de dire qu'une suite (u_n) est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, où on choisit de noter l'image de l'entier n u_n plutôt que $u(n)$.

On peut définir une suite réelle de bien des façons, les plus fréquentes étant les suivantes :

- par la liste de ses éléments, par exemple $u_0 = 2$; $u_1 = 4$; $u_2 = 6$; $u_3 = 8$; $u_4 = 10$ etc. C'est la méthode la plus naturelle, mais elle trouve très vite ses limites puisqu'il faut que la suite soit suffisamment simple pour qu'on devine tous les termes à partir des premiers.
- par une formule explicite pour le terme général, par exemple $u_n = n^2 - 4n + 1$. C'est une définition qui ressemble beaucoup à la définition usuelle d'une fonction, et qui est extrêmement pratique pour les calculs. C'est celle qu'on cherchera à obtenir le plus souvent.
- de façon implicite, par exemple u_n est l'unique réel positif vérifiant $e^{u_n} - u_n - 2 = n$ (croyez-moi sur parole, il y en a un et un seul pour chaque valeur de n). Pas vraiment extrêmement pratique pour les calculs, mais on n'arrive pas toujours à obtenir une formule explicite. Dans ce cas, on arrive quand même à s'en sortir à l'aide d'études de fonctions, nous reverrons donc ce genre de suites plus tard dans l'année.
- un cas très fréquent est le cas de la définition par récurrence. Elle consiste à donner une relation de récurrence entre les termes de la suite, c'est-à-dire à exprimer u_{n+1} en fonction de u_n, et à préciser la valeur de u_0 (sinon, c'est comme pour une récurrence non initialisée, ça ne sert à rien). Par exemple, $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 - 5$. C'est beaucoup moins pratique pour les calculs qu'une définition explicite, mais c'est souvent la définition la plus naturelle que nous aurons d'une suite. Il peut arriver qu'une suite soit définie par récurrence double (u_{n+2} en fonction de u_{n+1} et u_n), auquel cas il faut préciser les valeurs de u_0 et u_1, voire par récurrence triple ou pire (mais c'est plus rare !).

Définition 23. Une suite réelle (u_n) est **croissante** (resp. **décroissante**) si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$ (resp. $u_n \geqslant u_{n+1}$; je vous fais grâce des définitions de croissance et décroissance stricte). Une suite réelle est **stationnaire** si elle est constante à partir d'un certain rang : $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n_0$, $u_n = u_{n_0}$.

Exemple : Une technique classique pour étudier le sens de variation d'une suite est de calculer $u_{n+1}-u_n$ et de déterminer son signe. Prenons la suite définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2+u_n+2$, alors $u_{n+1} - u_n = u_n^2 + 2 > 0$, donc la suite est strictement croissante.
Dans le cas d'une suite à termes strictement positifs, on peut également calculer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et déterminer si ce quotient est supérieur ou inférieur à 1.

Définition 24. Une suite (u_n) est **majorée** (resp. **minorée**) par un réel m si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant m$ (resp. $u_n \geqslant m$). Elle est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemple : On est souvent amenés à effectuer des récurrences pour prouver des propriétés de croissance, majoration, etc. sur les suites. Considérons la suite définie par $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n} + 1$. Le calcul des premiers termes de la suite semble indiquer que la suite prend ses valeurs entre 2 et 3. Prouvons par récurrence pour tout $n \geqslant 1$ la propriété P_n : $u_n \in [2;3]$. Pour $n = 1$, $u_1 = \sqrt{4} + 1 = 3$ donc P_1 est vérifiée. Supposons désormais P_n vérifiée pour un certain entier n, alors $2 \leqslant u_n \leqslant 3$, donc $\sqrt{2} + 1 \leqslant \sqrt{u_n} + 1 \leqslant \sqrt{3} + 1$, et $u_{n+1} \in [\sqrt{2} + 1; \sqrt{3} + 1]$. Comme $2 < \sqrt{2}+1 < \sqrt{3}+1 < 3$, on peut conclure que P_{n+1} est vérifiée et, par principe de récurrence, que, $\forall n \geqslant 1$, $u_n \in [2;3]$.
Si vous êtes observateur, vous aurez aussi constaté que la suite (u_n) semblait décroissante. C'est un peu plus subtil à prouver par récurrence (essayez, vous verrez le problème), mais il existe d'autres méthodes pour déterminer le sens de variation de ce genre de suites, que nous étudierons plus tard.

Définition 25. On appelle **somme partielle d'indice** n de la suite (u_n) la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} u_k$.

Cette notion trouvera toute son importance dans le chapitre ultérieur consacré aux séries, mais nous allons commencer à calculer de telles sommes dans la deuxième partie de ce chapitre.

3.2 Quelques suites à connaitre

3.2.1 Suites arithmétiques

Définition 26. Une suite réelle (u_n) est appelée **suite arithmétique** de raison $r \in \mathbb{R}$ si elle vérifie la relation de récurrence suivante : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.

Proposition 18. Une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 vérifie les résultats suivants :

- formule explicite : $\forall n \in \mathbb{R}$, $u_n = u_0 + nr$.
- variations : si $r > 0$, la suite (u_n) est strictement croissante ; si $r < 0$, elle est strictement décroissante.
- sommes partielles : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} u_k = \frac{(u_0 + u_n)(n+1)}{2}$.

Démonstration.

- Une petite récurrence permet de prouver P_n : $u_n = u_0+nr$. C'est vrai au rang 0 : $u_0 = u_0+0\times r$, et en le supposant vrai au rang n, on a par définition $u_{n+1} = u_n+r = u_0+nr+r = u_0+(n+1)r$, donc P_{n+1} est vérifiée. D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.
- Cela découle de façon immédiate de la constatation que $u_{n+1} - u_n = r$.

- $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = \sum_{k=0}^{k=n} u_0 + kr = \sum_{k=0}^{k=n} u_0 + r\sum_{k=0}^{k=n} k = (n+1)u_0 + r\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(2u_0+nr))(n+1)}{2} = \frac{(u_0+u_0+nr)(n+1)}{2} = \frac{(u_0+u_n)(n+1)}{2}$. On a réutilisé pour ce calcul une des sommes classiques calculées au chapitre précédent.

□

Exemple : Dans la bonne ville de Glourz, l'abonnement annuel aux transports en commun coutait 200 zlourks en l'an 2 000, mais augmente de $6,5$ zlourks chaque année. Si on note u_n la valeur de l'abonnement annuel à l'année $2\ 000+n$, la suite (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 6,5$ et de premier terme $u_0 = 200$. Ainsi, le tarif de l'abonnement pour 2 010 sera de $u_{10} = 200+10\times 6,5 = 265$ zlourks. Un habitant ayant vécu à Glourz entre 2 000 et 2 010 inclus (soit 11 années au total) et ayant pris son abonnement tous les ans aura payé au total $\sum_{k=0}^{k=10} u_k = \frac{11(u_0+u_{10})}{2} = \frac{11(200+265)}{2} = 2\ 557,5$ zlourks.

3.2.2 Suites géométriques

Définition 27. Une suite réelle (u_n) est appelée **suite géométrique** de raison $q \in \mathbb{R}$ si elle vérifie la relation de récurrence suivante : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = q \times u_n$.

Proposition 19. Une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 vérifie les résultats suivants :

- formule explicite : $\forall n \in \mathbb{R}$, $u_n = u_0 \times q^n$.
- variations : si $q > 1$ et $u_0 > 0$, la suite (u_n) est strictement croissante ; si $0 < q < 1$ et $u_0 > 0$, elle est strictement décroissante (si $u_0 < 0$, c'est le contraire). Si $q < 0$, les termes de la suite sont de signe alterné.
- sommes partielles : $\forall n \in \mathbb{N}$, si $q \neq 1$, $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Démonstration.

- Une petite récurrence permet de prouver $P_n : u_n = u_0 \times q^n$. C'est vrai au rang 0 : $u_0 = u_0 \times q^0$, et en le supposant vrai au rang n, on a par définition $u_{n+1} = u_n \times q = u_0 \times q^n \times q = u_0 \times q^{n+1}$, donc P_{n+1} est vérifiée. D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$.
- On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_0 \times q^{n+1} - u_0 \times q^n = u_0 q^n(q-1)$. Toues les résultats concernant le sens de variation en découlent.
- $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = \sum_{k=0}^{k=n} u_0 \times q^k = u_0 \sum_{k=0}^{k=n} q^k = u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. On a réutilisé pour ce calcul une des sommes classiques calculées au chapitre précédent.

□

Exemple : Dans la bonne ville de Schmurz, l'abonnement annuel aux transports en commun coutait 200 zlourks en l'an 2 000, mais augmente de 3% chaque année. Si on note u_n la valeur de l'abonnement annuel à l'année $2\ 000+n$, la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,03$ et de premier terme $u_0 = 200$ (en effet, $u_{n+1} = u_n + \frac{3u_n}{100} = u_n \times (1+0,03)$). Ainsi, le tarif de l'abonnement pour 2 010 sera de $u_{10} = 200 \times 1,03^{10} \simeq 268,8$ zlourks. Un habitant ayant vécu à Glourz entre 2 000 et 2 010 inclus (soit 11 années au total) et ayant pris son abonnement tous les ans aura payé au total $\sum_{k=0}^{k=10} u_k = 200\frac{1-1,03^{11}}{1-1,03} \simeq 2\ 561,6$ zlourks.

3.2.3 Suites arithmético-géométriques

Définition 28. Une suite réelle (u_n) est **arithmético-géométrique** s'il existe deux réels $a \notin \{0:1\}$ et $b \neq 0$ tels qu'elle vérifie la relation de récurrence suivante : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$.

Théorème 1. Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique, alors, en notant α l'unique solution de l'équation $x = ax + b$ (aussi appelée **équation de point fixe** de la suite), la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \alpha$ est une suite géométrique de raison a.

Démonstration. L'existence et l'unicité du réel α découlent du fait qu'on a imposé $a \neq 1$ dans la définition d'une suite arithmético-géométrique. Remarquons ensuite que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha = au_n + b - \alpha = au_n - a\alpha = a(u_n - \alpha) = av_n$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison a. □

Remarque 17. On déduit du théorème précédent que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + \alpha = v_0 \times a^n + \alpha = (u_0 - \alpha)a^n + \alpha$, ce qui donne une expression explicite du terme de u_n. En pratique, en présence d'une suite arithmético-géométrique, on présentera les calculs de la façon suivante :

- calcul du point fixe α.
- définition de la suite (v_n).
- vérification que (v_n) est suite géométrique.
- conclusion : expression du terme général u_n.

Exemple Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 1$. L'équation de point fixe de la suite est $x = 2x - 1$, qui a pour unique solution $\alpha = 1$, on pose donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 1$. On remarque que $v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = 2u_n - 2 = 2(u_n - 1) = 2v_n$, donc la suite (v_n) est géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = u_0 - 1 = 1$. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2^n$, donc $u_n = v_n + 1 = 2^n + 1$.

Si on le souhaite, on peut aisément calculer les sommes partielles de la suite (u_n) :
$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = \sum_{k=0}^{k=n} 2^k + \sum_{k=0}^{k=n} 1 = \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} + n + 1 = 2^{n+1} + n.$$

3.2.4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition 29. Une suite réelle est dite **récurrente linéaire d'ordre** 2 si elle vérifie une relation de récurrence double linéaire à coefficients constants, c'est-à-dire que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$, où a et b sont deux réels non nuls.

Définition 30. Soit (u_n) une suite récurrente linéaire d'ordre 2. On appelle **équation caractéristique** de la suite l'équation du second degré $r^2 - ar - b = 0$.

Théorème 2. Si l'équation caractéristique d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 (u_n) admet deux racines réelles distinctes r et s, le terme général de la suite peut s'écrire sous la forme $u_n = \alpha r^n + \beta s^n$, α et β étant deux réels pouvant être déterminés à l'aide des deux premiers termes de la suite.
Si l'équation caractéristique admet une racine réelle double r, alors $u_n = (\alpha + \beta n)r^n$ (avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$).
Si l'équation caractéristique n'a pas de racine réelle, on ne peut malheureusement rien dire d'intéressant à notre niveau.

Démonstration. Constatons que, si r et s sont racines de l'équation caractéristique, toutes les suites de la forme $u_n = \alpha r^n + \beta s^n$ vérifient la récurrence linéaire : en effet, $r^2 = ar + b \Rightarrow r^{n+2} = ar^{n+1} + br^n$ (et de même pour s^{n+2}), donc $u_{n+2} = \alpha r^{n+2} + \beta s^{n+2} = \alpha(ar^{n+1} + br^n) + \beta(as^{n+1} + bs^n) = au_{n+1} + bu_n$. Comme de plus la suite u_n est complètement déterminée par ses deux premiers termes et la relation de récurrence double, une suite vérifiant cette même relation de récurrence et ayant les deux mêmes premiers termes que (u_n) est égale à celle-ci.

Le principe est le même dans le deuxième cas : $u_{n+2} = (\alpha + \beta n)r^{n+2} = (\alpha + \beta n)(ar^{n+1} + br^n) = \alpha ar^{n+1} + \alpha br^n + \beta nar^{n+1} + \beta nbr^n = au_{n+1} + bu_n$. Le point délicat de cette démonstration, que nous allons subtilement esquiver, est en fait d'arriver à prouver qu'il existe toujours une suite du type donné ayant les deux mêmes premiers termes que u_n. Nous nous contenterons pour l'instant d'admettre (et de constater sur des exemples) que c'est bien le cas, et qu'on ne peut pas en général se contenter d'une forme plus simple (par exemple avec une seule des deux racines dans le premier cas). $\square$

Exemple : Nous en avons déjà vu un en application du principe de récurrence. Mais désormais, nous disposons d'outils permettant justement d'éviter les récurrences et surtout de trouver facilement la forme du terme général de la suite. Prenons la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$; $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Son équation caractéristique est $r^2 - 5r + 6$, qui a pour discriminant $\Delta = 25 - 24 = 1$, et donc deux racines réelles $r = \dfrac{5+1}{2} = 3$ et $s = \dfrac{5-1}{2} = 2$. D'après le théorème précédent, on peut donc affirmer que $u_n = 3^n\alpha + 2^n\beta$. Les valeurs de u_0 et u_1 donnent respectivement $3^0\alpha + 2^0\beta = \alpha + \beta = 0$, et $3\alpha + 2\beta = 1$, dont on déduit $\beta = -\alpha$, puis $\alpha = 1$, donc $\beta = -1$. Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n - 2^n$.

Encore une fois, le calcul éventuel de sommes partielles ne pose guère de problème puisque la suite est une somme de deux suites géométriques.

Chapitre 4

Ensembles et applications

Les ensembles sont les objets les plus basiques que l'on puisse manipuler en mathématiques. En effet, tout objet mathématique est un ensemble, auquel on ajoute éventuellement d'autres propriétés qui en font une fonction, une matrice ou plus simplement un entier (oui, un entier est un ensemble comme un autre, même si je ne m'étendrai pas là-dessus ici). Et pourtant, on ne définit jamais ce qu'est un ensemble mathématique. En effet, la notion d'ensemble est tellement élémentaire qu'on ne peut pas s'appuyer sur une autre notion pour la décrire.

4.1 Ensembles

Définition 31. Un **ensemble** E est une collection d'objets. On peut définir un ensemble mathématique en nommant tous les objets le constituant, par exemple $E = \{4; 5; 6; 7; 8\}$ ou en les caractérisant par une propriété commune, par exemple $E = \{n \in \mathbb{N} \mid 4 \leqslant n \leqslant 8\}$. Ce deuxième type de définition fait souvent intervenir un autre ensemble.

Définition 32. Deux ensembles sont **égaux** s'ils sont constitués des mêmes éléments. Un ensemble E est **inclus** dans un ensemble F si tous les éléments de E appartiennent à F, ce qu'on note $E \subset F$. On dit aussi que E est un **sous-ensemble** de F, et on parle de **sous-ensemble propre** lorsqu'en plus $E \neq F$ (on peut également noter $E \subsetneq F$ pour un sous-ensemble propre).

Remarque 18. Pour prouver que $E \subset F$, on considère généralement un élément quelconque de E, et on essaie de prouver qu'il appartient à F. Pour montrer l'égalité de deux ensembles, on procèdera souvent par double inclusion : on prouve séparément $E \subset F$ et $F \subset E$.

Définition 33. L'ensemble ne contenant aucun élément, appelé **ensemble vide**, est noté $\emptyset$.

Définition 34. Soient A et B deux ensembles inclus dans un même ensemble E. On définit la réunion de A et de B par $A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \,\mathbf{ou}\, x \in B\}$; et l'intersection de A et de B par $A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \,\mathbf{et}\, x \in B\}$.

Remarque 19. On peut très bien définir des unions ou intersections de plus de deux ensembles, qu'on notera souvent en utilisant une variable muette comme pour les sommes et les produits. On peut même avoir des unions ou intersections infinies, par exemple, $\bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}^*} \left] -\frac{1}{n}; \frac{1}{n} \right[= \{0\}$. En général, $x \in \bigcap\limits_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \forall i \in I, x \in A_i$ et $x \in \bigcup\limits_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \exists i \in I, x \in A_i$.

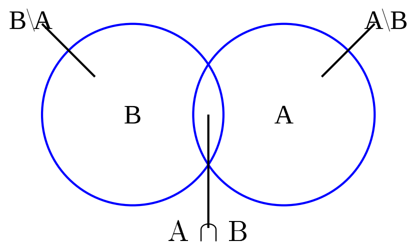
Proposition 20. Les propriétés élémentaires sur les opérations de réunion et d'intersection sont les suivantes :

- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (on peut donc noter $A \cup B \cup C$).
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (on peut donc noter $A \cap B \cap C$).
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Démonstration. L'associativité des deux opérations (les deux premières propriétés) est évidente. L'ensemble $A \cup B \cup C$ est simplement constitué des éléments appartenant à un (au moins) des trois ensembles A, B et C, ceci ne dépend absolument pas de l'ordre dans lequel on fait les réunions. De même pour l'intersection.

Montrons que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Soit $x \in A \cap (B \cup C)$, cela signifie que $x \in A$ et soit $x \in B$, soit $x \in C$. Dans le premier cas, $x \in A \cap B$, dans le deuxième $x \in A \cap C$, donc dans les deux cas $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, et la première inclusion est vraie. Dans l'autre sens, si $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, on a soit $x \in A \cap B$, soit $x \in A \cap C$. Dans les deux cas, $x \in A$, et x appartient à l'un des deux ensembles B et C, donc $x \in A \cap (B \cup C)$, ce qui montre la deuxième inclusion. La deuxième propriété de distributivité se montre de façon similaire. □

Définition 35. Soit A un sous-ensemble d'un ensemble E. On définit le **complémentaire** de A dans E par $\overline{A} = \{x \in E \mid x \notin A\}$. Plus généralement, si B est un autre sous-ensemble de E, on peut définir le complémentaire de A dans B (aussi appelé différence de B et de A) par $B \backslash A = \{x \in B \mid x \notin A\}$.



Exemple : Soit $E = \mathbb{R}$ et $A = [-3; 5]$, alors $\overline{A} =]-\infty; 3[\cup]5; +\infty[$.

Proposition 21. Lois de Morgan. Deux propriétés symétriques à retenir :
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Démonstration. Ne pas appartenir à A ou à B est équivalent à n'appartenir ni à A, ni à B. C'est juste ceci que retranscrit la première loi de Morgan. La deuxième est similaire. □

Définition 36. Une **partition** d'un ensemble E est un ensemble de sous-ensembles A_1, ..., A_n de E vérifiant $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = E$ et $\forall (i,j) \in \{1; \dots; n\}^2,\ A_i \cap A_j = \emptyset$. Autrement dit, tout élément de E appartient à un et un seul des ensembles A_i.

Exemple : Si on note $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ est pair }\}$ et $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ est impair }\}$, les ensembles A et B forment une partition de $\mathbb{N}$.

Remarque 20. On peut en fait définir de même la notion de partition infinie.

Définition 37. Le **produit cartésien** de deux ensembles E et F est l'ensemble constitué de tous les couples d'éléments (x, y), avec $x \in E$ et $y \in F$. On le note $E \times F$.

Remarque 21. Les notations sont très importantes : l'ensemble $\{2; 3\}$ est constitué de deux éléments (les entiers 2 et 3), alors que l'ensemble $\{(2, 3)\}$ est constitué d'un seul élément, la paire d'entiers $(2, 3)$.

Remarque 22. Encore une fois, on généralise facilement à plus de deux ensembles.

Remarque 23. Lorsque $E = F$, on note E^2 plutôt que $E \times E$, et plus généralement
$\underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{n \text{ fois}} = E^n$.

Définition 38. L'ensemble des parties d'un ensemble E, noté $\mathcal{P}(E)$, est l'ensemble dont les éléments sont les sous-ensembles de E.

Exemple : Si $E = \{1; 2; 3\}$, $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1; 2\}; \{1; 3\}; \{2; 3\}; \{1; 2; 3\}\}$.

4.2 Applications

Une application est un cas particulier de ce que vous avez l'habitude d'appeler une fonction. La différence est qu'une application doit être définie sur tout son ensemble de départ, alors qu'on parle par exemple de fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour la fonction inverse (mais on peut très bien parler de l'application inverse de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$).

Définition 39. Une **application** f est la donnée d'un ensemble E, appelé ensemble de départ de l'application, d'un ensemble F appelé ensemble d'arrivée, et pour chaque élément x de E, d'un unique élément de F noté $f(x)$. On appelle $f(x)$ **image** de l'élément x par f, et si $y \in E$, les éléments x de E vérifiant $f(x) = y$ sont appelés **antécédents** de y par f (un élément y peut très bien ne pas avoir d'antécédent, ou au contraire en avoir plusieurs).

Exemple : L'application $x \to x$, définie sur un ensemble quelconque E, est appelée application identité, souvent notée id (ou id_E si on veut bien préciser l'ensemble de départ). La fonction $x \mapsto \dfrac{3}{x-2}$ est une application de $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ dans $\mathbb{R}$.

Remarque 24. Deux applications sont identiques si elles ont même ensemble de départ, même ensemble d'arrivée et envoient un même élément sur une même image. Par exemple, les fonctions d'une variable réelle $f : x \mapsto x - 4$ et $g : x \mapsto \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x - 1}$ sont différentes, même si elles coïncident sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$: elles n'ont pas le même ensemble de définition.

Définition 40. Soit $f : E \to F$ une application et E' un sous-ensemble de E. L'application $g : E' \to F$ définie par $\forall x \in E'$, $g(x) = f(x)$ est appelée **restriction** de f au sous-ensemble E' et notée $f_{|E'}$. On dit egalement que f est un **prolongement** de g à E.

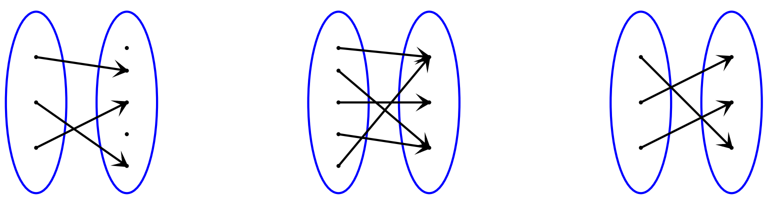
Exemple : La fonction $x \to x \ln x$, définie sur R_+^*, peut se prolonger en une fonction $\tilde{f}$ définie et continue sur R_+ en posant $\tilde{f}(0) = 0$. En pratique, on utilise souvent la même notation pour désigner le prolongement que pour la fonction d'origine, même si c'est un abus de notation.

Définition 41. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications, alors la **composée** de g et de f est l'application $g \circ f : E \to G$ définie par $g \circ f(x) = g(f(x))$.

Remarque 25. La composition n'est bien sûr pas commutative ; en général, $f \circ g$ n'est même pas définie quand $g \circ f$ l'est.

Exemple : On considère les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ et $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définies par $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt{x}$; alors $g \circ f(x) = |x|$ et $f \circ g(x) = x$ (la première composée étant définie sur $\mathbb{R}$ et la deuxième sur $\mathbb{R}_+$).

Définition 42. Soit $f : E \to F$ une application, f est dite **injective** si $\forall (x, x') \in E^2, f(x) = f(x') \Rightarrow x = y$; f est dite **surjective** si $\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$; enfin, f est dite **bijective** si elle est à la fois injective et surjective.



f injective $\quad$ f surjective $\quad$ f bijective

Remarque 26. Autrement dit, f est injective si tout élément de F a au plus un antécédent par f, surjective si tout élément de F a au moins un antécédent de F, et bijective si tout élément de F a exactement un antécédent par f. On peut aussi définir une application injective de la façon suivante : $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$.

Exemples : L'application $x \mapsto x^2$, qui va de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$, est surjective (tout réel positif admet une racine carrée) mais pas injective car par exemple 2 et -2 ont la même image par f. L'application racine carrée est pas contre bijective de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même.

Proposition 22. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective. Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.

Démonstration. Supposons g et f injectives, et soient $x, x' \in E^2$ tels que $g(f(x)) = g(f(x'))$. Par injectivité de g, on a alors nécessairement $f(x) = f(x')$, puis par injectivité de f, $x = x'$, ce qui prouve l'injectivité de $g \circ f$. Supposons désormais g et f surjectives et soit $z \in G$. Par surjectivité de g, $\exists y \in F$, $z = g(y)$, puis par surjectivité de f, $\exists x \in E$, $y = f(x)$. Mais alors $z = g \circ f(x)$, donc z a un antécédent par $g \circ f$, ce qui prouve sa surjectivité. □

Remarque 27. La réciproque de ces propriétés est totalement fausse, voir la feuille d'exercices pour quelques exemples.

Proposition 23. Une application $f : E \to F$ est bijective si et seulement si il existe $g : F \to E$ telle que $g \circ f = id_E$ et $f \circ g = id_F$. L'application g est alors appelée **bijection réciproque** de f (ou réciproque tout court) et notée f^{-1}.

Remarque 28. Cette réciproque, bien que notée f^{-1}, n'a rien à voir avec la fonction inverse de f, que pour cette raison nous noterons toujours $\dfrac{1}{f}$. Notons au passage que f^{-1} est effectivement bijective, de réciproque f (c'est évident une fois le théorème démontré).

Démonstration. Supposons f bijective et soit $y \in F$. Il existe un unique antécédent x de y par f, on pose $g(y) = x$. On a alors par construction $f \circ g(x) = x$, donc $f \circ g = id_F$. De plus, si $x \in E$, $g(f(x))$ est un antécédent de $f(x)$, mais comme il n'y en qu'un ça ne peut être que x, donc on a aussi $g \circ f = id_E$.
Réciproquement, si $g \circ f = id_E$ et $f \circ g = id_F$, considérons x et x' tels que $f(x) = f(x')$, on a alors $g \circ f(x) = g \circ f(x')$, donc $x = x'$, ce qui prouve l'injectivité de f. Soit maintenant $y \in F$, alors $g(y)$ est un antécédent de y par f puisque $f \circ g(y) = y$, donc f est sujective. L'application f est donc bijective. □

Remarque 29. Vous connaissez déjà quelques exemples classiques de bijections réciproques, notamment ln (bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$) et exp (bijective réciproque de ln de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$). Vous savez également que les représentations graphiques de ces deux fonctions sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$. C'est une propriété générale des fonctions réciproques.

Exemple : L'application $f : x \mapsto 3x + 6$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et son application réciproque est l'application $g : x \mapsto \dfrac{1}{3}x - 2$. En effet, $g \circ f(x) = \dfrac{1}{3}(3x + 6) - 2 = x$ et $f \circ g(x) = 3\left(\dfrac{1}{3}x - 2\right) + 6 = x$.

Proposition 24. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications bijectives, alors $g \circ f : E \to G$ est une application bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Démonstration. f et g étant à la fois injectives et surjectives, $g \circ f$ est à la fois injective et surjective (cf plus haut) donc bijective. De plus, $\forall x \in E$, $f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f(x) = f^{-1}((g^{-1} \circ g)(f(x))) = f^{-1}(f(x)) = x$ et de même $\forall x \in G$, $g \circ f \circ f^{-1} \circ g^{-1}(x) = x$. □

Définition 43. Soit $f : E \to F$ une application et $A \subset E$. On appelle **image** (directe) de A l'ensemble des images des éléments de A : $f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A, f(x) = y\}$. Soit maintenant $B \subset F$, on appelle **image réciproque** de B par F l'ensemble des antécédents d'élements de B : $f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$.

Remarque 30. La deuxième notation n'a pas été choisie de façon contradictoire avec la définition d'application réciproque (encore heureux). Si f est bijective, l'image réciproque d'une partie B de F est confondue avec son image directe par f^{-1}.

Exemple : Considérons l'application $f : x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors $f([2;5]) = [4;25]$; $f([-1;3]) = [0;9]$; $f^{-1}([4;9]) = [-3;-2] \cup [2;3]$.

Chapitre 5

Suites II, convergence

Après un premier chapitre sur les suites assez général où rien d'extrêmement complexe n'avait été abordé, nous entrons dans le vif du sujet avec le principal sujet d'étude à notre programme cette année : la convergence. Ce chapitre est doublement important puisque toutes les très importantes notions vues ici seront reprises (et adaptées, bien entendu) dans le cadre des fonctions d'ici quelques mois. La notion de limite n'est sûrement pas une totale découverte pour vous, mais nous allons l'aborder cette année dans un cadre très rigoureux qui peut déstabiliser au premier abord. Certes, les définitions sont un peu complexes, mais une fois assimilées, elles sont en fait beaucoup plus maniables que la notion très floue que vous aviez pu voir jusqu'à présent.

5.1 Définitions

La notion de limite est intuitivement assez simple : on se rapproche « autant qu'on le souhaite » d'une certaine valeur quand n devient « suffisamment grand ». Pour rendre cette idée mathématiquement rigoureuse, il suffit en fait d'expliciter les deux expressions entre guillemets via l'utilisation de quantificateurs.

5.1.1 Limites finies

Définition 44. Une suite réelle (u_n) **converge** vers une **limite** $l \in \mathbb{R}$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n_0$, $|u_n - l| < \varepsilon$. On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$. Toute suite convergeant vers une limite l est appelée suite **convergente**. Sinon, la suite est dite **divergente** (même si elle peut avoir une limite infinie).

Rappelons que $|u_n - l| < \varepsilon$ signifie que $u_n \in]l - \varepsilon; l + \varepsilon[$. Autrement dit, aussi petit que soit l'intervalle que l'on prend autour du réel l (c'est-à-dire aussi proche de 0 que soit ε dans notre définition), les valeurs de la suite vont finir par être **toutes** dans cet intervalle, à condition qu'on attende suffisamment longtemps (jusqu'à n_0).

Méthode : Pour prouver qu'une suite donnée converge vers un certain réel à l'aide de cette définition (ce qu'on fera heureusement assez rarement, mais il est important de bien comprendre les mécanismes cachés derrière le formalisme), on procède ainsi :

- On fixe ε à une valeur strictement positive quelconque.
- On calcule $|u_n - l|$.
- On cherche une valeur de n_0 (qui va naturellement dépendre de ε) pour laquelle cette expression est inférieure à ε.

Exemple : Considérons la suite définie par $u_n = \dfrac{n+3}{n+2}$, et prouvons que sa limite vaut 1. Soit $\varepsilon > 0$, alors $|u_n - 1| = \left|\dfrac{n+3}{n+2} - 1\right| = \left|\dfrac{n+3-(n+2)}{n+2}\right| = \left|\dfrac{1}{n+2}\right| = \dfrac{1}{n+2}$. L'expression étant positive, il suffit de déterminer pour quelles valeurs de n on a $\frac{1}{n+2} < \varepsilon$, ce qui nous donne $n > \frac{1}{\varepsilon} - 2$. On peut donc choisir $n_0 = Ent\left(\frac{1}{\varepsilon} - 2\right)$ (remarquez que, plus ε est proche de 0, plus n_0 devient grand, ce qui est logique).

Remarque 31. Le fait qu'une suite soit ou non convergente ne dépend absolument pas de ce qui se passe « au début » de la suite. Autrement dit, on peut très bien modifier par exemple le milliard de premiers termes d'une suite, ça ne change rien à sa limite éventuelle (on devra juste chercher nos n_0 un peu plus loin). Dans le même ordre d'idée, décaler les indices de la suite ou même en sauter une partie ne va pas changer grand chose : ainsi, si $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$, on aura $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$ et $\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = l$ (attention tout de même, pour cette dernière propriété, la réciproque n'est pas vraie).

Proposition 25. Soit (u_n) une suite convergente, alors sa limite l est unique.

Démonstration. Nous allons pour la première fois cette année recourir à un raisonnement par l'absurde pour démontrer cette proposition. Supposons donc que le résultat énoncé est faux, c'est-à-dire qu'une même suite (u_n) admet deux limites distinctes l et l' (notons par exemple l' la plus grande des deux), et tentons de montrer que ceci entraine une absurdité. Appliquons donc la définition de la limite avec $\varepsilon = \frac{l'-l}{3}$: on peut donc trouver d'une part un entier n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \in]l-\varepsilon; l+\varepsilon[$; d'autre part un entier n_0' tel que $\forall n \geqslant n_0'$, $u_n \in]l'-\varepsilon; l'+\varepsilon[$. mais alors, dès que $n \geqslant \max(n_0, n_0')$, on a $u_n \in]l-\varepsilon; l+\varepsilon[\cap]l'-\varepsilon; l'+\varepsilon[$, ce qui est très gênant puisque cette intersection est vide d'après la définition de ε. Conclusion, l'hypothèse effectuée était absurde, et une suite ne peut pas avoir deux limites différentes. □

Proposition 26. Toute suite convergente est bornée.

Démonstration. Appliquons la définition de la limite avec par exemple $\varepsilon = 1$. On obtient un entier n_0 tel que, $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \in]l-1; l+1[$. Par ailleurs, les termes de la suite d'indice inférieur à n_0 sont en nombre fini, il en existe donc un qui est le plus grand (notons sa valeur M) et un qui est le plus petit (on va le noter m). Il est alors facile de constater que la suite est minorée par $\min(m, l-1)$ et majorée par $\max(M, l+1)$. □

Théorème 3. Théorème de convergence monotone :
Toute suite décroissante et minorée converge. Toute suite croissante et majorée converge.

Démonstration. Ce résultat, bien que relativement intuitif, est plus difficile à démontrer qu'il n'en a l'air, au point d'ailleurs que nous allons l'admettre (une des difficultés étant de caractériser la limite comme étant le plus petit majorant de la suite, et de montrer qu'une telle chose existe). □

Remarque 32. Attention ! Une suite croissante et majorée par un réel M ne converge pas nécessairement **vers M**. La suite a tout un paquet de majorants, dont un seul est sa limite.

Exemple : La suite définie par $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}dx$ est croissante (car, $\forall x \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x^{n+1} \leqslant x^n$, donc $\frac{1}{1+x^n} \leqslant \frac{1}{1+x^{n+1}}$), et majorée par 1 (car $\forall x \in [0;1]$, $\frac{1}{1+x^n} \leqslant 1$, donc $\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}dx \leqslant \int_0^1 1dx = 1$), donc convergente. Mais ces arguments ne prouvent en aucun cas que sa limite est 1. Le calcul de la limite est d'ailleurs loin d'être simple (nous reverrons des exemples de ce genre dans le chapitre sur l'intégration).

5.1.2 Limites infinies

Bien qu'étant divergentes, certaines suites ont un comportement plus intéressant que d'autres quand n tend vers $+\infty$. Ce sont celles qui deviennent « très grandes » ou « très négatives ». Encore une fois, un peu de formalisation sera nécessaire pour obtenir une définition maniable, mais c'est plutôt plus facile que dans le cas des limites finies.

Définition 45. Une suite réelle (u_n) **diverge vers** $+\infty$ si $\forall A \in \mathbb{R}$, $\exists n_0 \in \mathbb{R}$, $\forall n \geqslant n_0$, $u_n > A$. On le note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$. De même, une suite réelle (u_n) **diverge vers** $-\infty$ si $\forall A \in \mathbb{R}$, $\exists n_0 \in \mathbb{R}$, $\forall n \geqslant n_0$, $u_n < A$. On le note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Exemple : Considérons la suite définie par $u_n = n^2$ et montrons à l'aide de cette définition que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$. Comme pour le cas d'une limite finie, on commence pour cela par fixer la valeur de A. Constatons ensuite que $u_n > A \Leftrightarrow n > \sqrt{A}$ (si $A \geqslant 0$; mais si $A < 0$, il n'y a pas vraiment de souci puisque dans ce cas u_n est toujours supérieur à A). On peut donc choisir $n_0 = Ent(\sqrt{A}) + 1$, et on a bien $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Proposition 27. Une suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$. Une suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.

Démonstration. Soit (u_n) une suite croissante et non majorée. Cette dernière hypothèse signifie que $\forall A \in \mathbb{R}$, $\exists n_0 \in \mathbb{R}$, $u_{n_0} > A$. Mais la suite étant croissante, on a en fait $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant u_{n_0} > A$, ce qui prouve exactement la divergence vers $+\infty$. Inutile de refaire quoi que ce soit pour le deuxième cas : si (v_n) est décroissante non minorée, alors $(-v_n)$ est croissante non majorée, et on se ramène au cas précédent. □

5.2 Propriétés principales

5.2.1 Limites de suites usuelles

Proposition 28. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Si $r > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$. Si $r < 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$. Si $r = 0$, la suite (u_n) est constante égale à u_0 et converge donc vers u_0.

Démonstration. Supposons $r > 0$ et considérons $A \in \mathbb{R}$, alors $u_n > A \Leftrightarrow u_0 + nr > A \Leftrightarrow n > \dfrac{A - u_0}{r}$. On peut donc prendre $n_0 = Ent\left(\dfrac{A - u_0}{r}\right)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$. Si $r < 0$, le calcul est le même, si ce n'est que le signe de l'inégalité change quand on divise par r, d'où le fait que $u_n < A \Leftrightarrow n > \dfrac{u_0 - A}{r}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$. □

Proposition 29. Limites des suites géométriques.
Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 \neq 0$.

- si $q > 1$, la suite diverge vers $+\infty$ si $u_0 > 0$, vers $-\infty$ si $u_0 < 0$.
- si $q = 1$, la suite (u_n) est constante et converge vers u_0.
- si $-1 < q < 1$, la suite (u_n) converge vers 0.
- si $q \leqslant -1$, la suite (u_n) est divergente.

Démonstration.

- Si $q > 1$, on peut noter $q = 1 + \alpha$, avec $\alpha > 0$. Prouvons alors par récurrence la propriété P_n : $q^n \geqslant 1 + n\alpha$. Pour $n = 0$, les deux membres sont égaux à 1, donc P_0 est vraie. Supposons désormais P_n vraie, alors $q^{n+1} = (1+\alpha)^{n+1} = (1+\alpha)^n(1+\alpha) \geqslant (1+n\alpha)(1+\alpha) = 1 + (n+1)\alpha + n\alpha^2 \geqslant 1 + (n+1)\alpha$. La propriété P_{n+1} est donc vérifiée, et d'après le principe de récurrence, P_n est vraie pour tout entier n.
  On peut désormais prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$. Supposons $u_0 > 0$ (l'autre cas est exactement symétrique) et posons $A > 0$, alors pour avoir $u_n \geqslant A$, il suffit d'avoir $u_0 \times (1 + n\alpha) \geqslant A$, soit $n \geqslant \dfrac{\frac{A}{u_0} - 1}{\alpha}$, ce qui permet de conclure.
- Sautons allègrement le cas $q = 1$ qui ne pose aucun problème, et considérons maintenant le cas où $|q| < 1$. Dans ce cas, on constate que $\dfrac{1}{|q|} > 1$. Posons $\varepsilon > 0$ et notons $A = \dfrac{|u_0|}{\varepsilon}$, d'après la démonstration précédente, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n_0$, $\dfrac{1}{|q|^n} > A$. Mais cela revient au même que $|q|^n < \dfrac{\varepsilon}{|u_0|}$, soit $|u_n| < \varepsilon$, ce qui prouve exactement que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- Si $q = -1$, la suite oscille entre deux valeurs distinctes et n'a pas de limite. Si $q < -1$, $|u_n|$ diverge vers $+\infty$ (puisque c'est une suite géométrique de premier terme positif et de raison plus grande que 1), donc (u_n) n'est pas bornée et ne peut converger. Il est également facile de prouver qu'elle ne peut avoir une limite infinie puisque ses termes sont de signe alterné.

□

5.2.2 Opérations et limites

Comme on ne se contentera pas de travailler avec des suites aussi simples que les suites arithmétiques et géométriques, mais que celles-ci constituent tout de même les éléments de base de la construction d'un certain nombre de suites (à commencer par les suites arithmético-géométriques ou récurrentes linéaires), il est nécessaire de savoir calculer des limites de sommes ou de produits de suite. C'est assez intuitif, mais il faut surtout se souvenir des cas où on ne peut pas conclure, les fameuses **formes indéterminées**.

Proposition 30. Soient (u_n) et (v_n) deux suites ayant une limite (finie ou infinie), alors la limite de leur somme $(u_n + v_n)$ est donnée par le tableau suivant (f.i. signifiant forme indéterminée) :

$(u_n)\backslash(v_n)$	l'	$+\infty$	$-\infty$
l	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$f.i.$
$-\infty$	$-\infty$	$f.i.$	$-\infty$

Démonstration. Prouvons par exemple le cas où les deux suites ont une limite finie, notées respectivement l et l'. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe un entier n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \in \left]l - \frac{\varepsilon}{2}; l + \frac{\varepsilon}{2}\right[$ (oui, la division par 2 est volontaire, après tout $\frac{\varepsilon}{2}$ est un réel strictement positif auquel on peut appliquer la définition de la limite) ; et un entier n_0' tel que $\forall n \geqslant n_0'$, $v_n \in \left]l' - \frac{\varepsilon}{2}; l' + \frac{\varepsilon}{2}\right[$. En notant $N = \max(n_0, n_0')$, on obtient alors en ajoutant les deux encadrements $\forall n \geqslant N$, $u_n + v_n \in]l + l' - \varepsilon, l + l' + \varepsilon[$, ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = l + l'$. Les autres cas se démontrent de façon similaire et ne présentent pas de grosse difficulté. □

Exemples : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 - 47 = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2} + 2 = 2$.

Proposition 31. Soit (u_n) une suite réelle et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Alors, si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda u_n = \lambda l$. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda u_n = \pm\infty$ (le signe dépendant du signe de la limite de (u_n) et de celui de λ suivant la règle des signes).

Démonstration. Prouvons le cas où la limite est finie. Soit $\varepsilon > 0$, alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, |u_n - l| < \dfrac{\varepsilon}{|\lambda|}$ (c'est la même astuce que pour la démonstration de la limite d'une somme), donc pour $n \geqslant n_0$, $|\lambda u_n - \lambda l| < \varepsilon$, ce qui prouve bien que $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda u_n = \lambda l$. Le cas des limites infinies est très similaire. □

Exemples : $\lim\limits_{n\to+\infty} -3n = -\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{n} + 2n - 1 = +\infty$.

Proposition 32. Soient (u_n) et (v_n) deux suites ayant une limite (finie ou infinie), alors la limite de leur produit $(u_n v_n)$ est donnée par le tableau suivant :

$(u_n)\backslash(v_n)$	$l' > 0$	$l' < 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$l > 0$	$l.l'$	$l.l'$	0	$+\infty$	$-\infty$
$l < 0$	$l.l'$	$l.l'$	0	$-\infty$	$+\infty$
0	0	0	0	$f.i.$	$f.i.$
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$f.i.$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$f.i.$	$-\infty$	$+\infty$

Démonstration. Commençons par prouver le cas où les deux suites ont pour limite 0, et considérons $\varepsilon > 0$. Il existe deux réels n_0 et n_0' tels que, respectivement, $\forall n \geqslant n_0$, $|u_n| < \sqrt{\varepsilon}$; et $\forall n \geqslant n_0'$, $|v_n| < \sqrt{\varepsilon}$. On en déduit que $\forall n \geqslant \max(n_0, n_0')$, $|u_n v_n| < \varepsilon$, ce qui prouve que $(u_n v_n)$ tend vers 0.
Supposons désormais que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l' \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - l) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - l') = 0$, donc en utlisant ce qu'on vient juste de démontrer $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - l)(v_n - l') = 0$. Or, $(u_n - l)(v_n - l') = u_n v_n - l v_n - l' u_n + l l'$, ou encore $u_n v_n = (u_n - l)(v_n - l') + l v_n + l' u_n - l l'$. D'après les propositions démontrées auparavant (limite d'une somme et d'un produit par un réel), on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 0 + l l' + l' l - l l' = l l'$.
Un dernier cas pour la route, celui où les deux suites tendent vers $+\infty$. Considérons alors $A > 1$ (c'est suffisant : si on arrive à trouver un n_0 à partir duquel $u_n > A > 1$, certainement ce même n_0 conviendra pour toutes les valeurs de A inférieures ou égales à 1). Il existe deux réels n_0 et n_0' à partir desquels $u_n > A$ et $v_n > A$ respectivement. Pour $n \geqslant \max(n_0, n_0')$, on a alors $u_n v_n > A^2 > A$, d'où la divergence de $(u_n v_n)$ vers $+\infty$. □

Remarque 33. Dans les cas où on tombe sur une forme indéterminée avec une somme de suites, il est souvent efficace de transformer la somme en produit en factorisant par un terme « le plus gros possible ». Notamment, dans le cas d'un polynôme, on factorise par le terme de plus haut degré : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 - 3n + 2 = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 \left(1 - \dfrac{3}{n} + \dfrac{2}{n^2}\right) = +\infty$.

Définition 46. On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0^+$ lorsque la suite (u_n) tend vers 0 en étant positive à partir d'un certain rang. De même, on notera $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0^-$ si (u_n) est négative à partir d'un certain rang.

Proposition 33. Soit (u_n) une suite réelle qui ne s'annule plus à partir d'un certain rang, et ayant une limite, alors la limite de $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ est donnée par le tableau suivant :

(u_n)	$l \neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$	$\dfrac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-

Démonstration. Prouvons par exemple le cas où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0^+$. Soit $A > 0$, alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n_0$, $|u_n| < \dfrac{1}{A}$. Quitte à changer la valeur de n_0 pour atteindre le rang à partir duquel (u_n) est positive et ne s'annule plus, on a même $0 < u_n < \dfrac{1}{A}$, d'où $\dfrac{1}{u_n} > A$, ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = +\infty$. □

Remarque 34. Pas besoin de donner des règles pour le quotient de deux suites, puisqu'un quotient n'est rien d'autre que le produit par un inverse. Dans les cas où on tombe sur un quotient coriace, la méthode la plus efficace reste la plupart du temps de factoriser numérateur et dénominateur par leur terme « le plus fort ». Nous verrons un peu plus loin dans le cours une façon plus élégante de rédiger ce genre de calcul à l'aide de la notion d'équivalent.

Exemple : $u_n = \dfrac{\ln n + n^2 + 2}{e^n + \sqrt{n}} = \dfrac{n^2}{e^n} \times \dfrac{1 + \frac{2}{n^2} + \frac{\ln n}{n^2}}{1 + \frac{\sqrt{n}}{e^n}}$. En utilisant nos connaissances sur les croissances comparées, il est facile de constater que le premier quotient tend vers 0 et le deuxième vers 1, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

5.2.3 Théorèmes de comparaison

Proposition 34. Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergeant repectivement vers l et l' et telles que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang. Alors $l \leqslant l'$.

Démonstration. Petit raisonnement par l'absurde : supposons $l > l'$ et posons $\varepsilon = \dfrac{l - l'}{3}$, alors à partir d'un certain rang on aura $u_n \in \left]l - \dfrac{\varepsilon}{3}, l + \dfrac{\varepsilon}{3}\right[$ et $v_n \in \left]l' - \dfrac{\varepsilon}{3}, l' + \dfrac{\varepsilon}{3}\right[$. Mais comme $l' + \dfrac{\varepsilon}{3} < l - \dfrac{\varepsilon}{3}$ (par construction de ε), ceci est incompatible avec le fait que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang. L'hypothèse est donc absurde et $l \leqslant l'$. □

Remarque 35. Cette proposition est souvent utilisée sous la forme plus simple où l'une des deux suites est constante. Ainsi, si (u_n) converge et que $u_n \leqslant A$ à partir d'un certain rang, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant A$. Notamment, la limite d'une suite de signe constant est de même signe que la suite.

Remarque 36. L'inégalité sur la limite est toujours large, même si on a une inégalité stricte entre u_n et v_n. Par exemple, $\forall n \geqslant 1$, $1 + \dfrac{1}{n} > 1 + \dfrac{1}{n^2}$, mais ces deux suites ont la même limite.

Théorème 4. Théorème des gendarmes (ou théorème d'encadrement si vous voulez faire plus sérieux).
Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites vérifiant $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang, et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ (ces limites ont le droit d'être infinies).

Démonstration. Occupons-nous du cas où la limite commune de (u_n) et (w_n) est un réel l, et choisissons $\varepsilon > 0$. Alors à partir d'un certain rang, on aura $|u_n - l| < \varepsilon$ et $|v_n - l| < \varepsilon$. Autrement dit, u_n et v_n appartiennent tous deux à l'intervalle $]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$. Mais alors v_n, qui se situe entre les deux, appartient lui aussi à cet intervalle, et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$. Le cas des limites infinies est tout aussi simple (une seule des deux suites encadrantes suffit même). □

Exemple : Considérons la suite définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{k=2n} \frac{1}{k^2}$. Très pénible à étudier avec sa somme à nombre de termes variable, mais si on ne veut que la limite, c'est beaucoup plus facile. Chacun des termes de la somme est compris entre le plus petit, en l'occurence $\dfrac{1}{(2n)^2}$, et le plus grand, à savoir $\dfrac{1}{n^2}$, donc $\dfrac{n+1}{(2n)^2} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n+1}{n^2}$ (il y a $n+1$ dans la somme définissant u_n). Chacune des deux suites encadrant u_n ayant pour limite 0, le théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

5.2.4 Suites adjacentes

Définition 47. Deux suites (u_n) et (v_n) sont **adjacentes** si elles vérifient les deux propriétés suivantes :

- l'une est croissante et l'autre décroissante.
- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - v_n = 0$.

Théorème 5. Deux suites adjacentes convergent et ont la même limite.

Démonstration. Supposons par exemple (u_n) croissante et (v_n) décroissance, et commençons par constater que la suite $(u_n - v_n)$ est croissante et a pour limite 0. Cela implique que cette suite est à termes négatifs : en effet, si on avait, pour un rang n_0, $u_{n_0} - v_{n_0} = \alpha > 0$, $(u_n - v_n)$ serait supérieure à $\alpha > 0$ à partir d'un certain rang, donc ne pourrait pas converger vers 0. Conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$.
Mais alors, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$. Autrement dit, (u_n) est croissante et majorée donc convergente. De même, (v_n) est décroissante et minorée par u_0, donc converge également. Si on note l et l' leurs limites respectives, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - v_n = l - l' = 0$, donc $l = l'$, ce qui achève la démonstration. □

Exemple : Considérons les suites définies par $u_n = \sum\limits_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$ (rappelons au passage que $0! = 1$). Comme $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$, la suite (u_n) est croissante. Par ailleurs, $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} - u_n - \frac{1}{n!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{2-(n+1)}{(n+1)!} = \frac{1-n}{(n+1)!}$, qui est négatif si $n \geqslant 1$. La suite (v_n) est donc décroissante à partir du rang 1. Reste à vérifier que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - v_n = 0$, ce qui n'a rien de difficile puisque $u_n - v_n = -\frac{1}{n!}$. Les deux suites sont donc adjacentes.

5.3 Équivalents et négligeabilité

Dans cette dernière section, nous allons introduire de nouveaux concepts qui nous permettront de retranscrire de façon plus élégante certains résultats déjà vus, et surtout de se simplifier énormément les calculs de limite. Il s'agit de donner une définition précise à la notion d'odre de grandeur. Les résultats de croissance comparée stipulent par exemple que la fonction ln n'est pas du même ordre de grandeur que la fonction carré quand x tend vers $+\infty$, même si ces deux fonctions ont pour limite $+\infty$. Par contre, il paraitrait raisonnable, par exemple, de dire que x^2 et $x^2 + 2$ sont du même ordre de grandeur en $+\infty$ (l'écart entre les deux devenant négligeable).

5.3.1 Définitions

Définition 48. Deux suites (u_n) et (v_n) sont **équivalentes** si on peut écrire $u_n = a_n v_n$, où (a_n) est une suite vérifiant $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 1$. Plus simplement, si les deux suites ne s'annulent plus à partir d'un certain rang, cela revient à dire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$. On le note $u_n \sim v_n$.

Remarque 37. Le fait que la limite du quotient soit égale à 1 transcrit bien la notion de même ordre de grandeur. Une suite équivalente à une constante $l \neq 0$ est tout simplement une suite convergeant vers l.

Exemple : $n^2 + 2n + 3 \sim n^2$; $n + \ln n \sim n$ puisque $\frac{n + \ln n}{n} = 1 + \frac{\ln n}{n}$ a pour limite 1.

Remarque 38. Une suite polynômiale est toujours équivalente à son terme de plus haut degré.

Proposition 35. Deux suites équivalentes ont la même limite (quand elles ont une limite).

Démonstration. Dans le cas où (v_n) a une limite finie l, il suffit de constater que $u_n = v_n \times \frac{u_n}{v_n}$ et utiliser les règles de calcul de la limite d'un produit (le cas où l'une des suites est nulle à partir d'un certain rang n'est pas vraiment gênant puisqu'alors l'autre l'est aussi, et les deux suites convergent manifestement vers 0). Si (v_n) a pour limite $+\infty$, on peut en utilisant la définition de l'équivalence avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$ trouver un entier n_0 à partir duquel $\frac{1}{2} \leqslant \frac{u_n}{v_n} \leqslant \frac{3}{2}$, autrement dit $\frac{v_n}{2} \leqslant u_n \leqslant \frac{3v_n}{2}$. Le théorème des gendarmes permet alors de conclure. □

Définition 49. Une suite (u_n) est négligeable devant une suite (v_n) si on peut écrire $u_n = \varepsilon_n v_n$, où (ε_n) est une suite vérifiant $\lim\limits_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0$. Plus simplement, si les deux suites ne s'annulent plus à partir d'un certain rang, cela revient à dire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$. On le note $u_n = o(v_n)$ (et on le lit « (u_n) est un petit o de (v_n) »).

Remarque 39. Dire que deux suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes revient à dire que $u_n - v_n = o(u_n)$ (réfléchissez-y, c'est logique). De même, $u_n = o(v_n)$ est équivalent à dire que $u_n + v_n \sim v_n$.

Proposition 36. Croissance comparée des fonctions usuelles.
- Si $\alpha < \beta$, $n^\alpha = o(n^\beta)$
- $\forall a > 1$, $\forall b > 0$, $n^b = o(a^n)$
- $\forall b > 0$, $\forall c > 0$, $(\ln n)^c = o(n^b)$

Remarque 40. Ces résultats, combinés à la remarque précédente, permettent d'obtenir très rapidement des équivalents (et donc la limite) de sommes de suites usuelles, par exemple $2^n - 12n^2 - 3\ln n \sim 2^n$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (2^n - 12n^2 - 3\ln n) = +\infty$. En gros, déterminer un équivalent consiste à ne garder que le terme prépondérant et à supprimer tous les termes négligeables devant lui.

Proposition 37. Soient deux suites (u_n) et (v_n) telles que $(u_n) = o(v_n)$. Si (v_n) est convergente alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$. Si $|u_n|$ diverge vers $+\infty$, alors $|v_n|$ aussi.

Démonstration. La première propriété est une nouvelle fois une simple conséquence des formules de limite d'un produit. Quant à la deuxième, la démonstration ressemble à celle déjà vue dans le cas de l'équivalence. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$, on aura certainement $|v_n| > |u_n|$ à partir d'un certain rang (il suffit de prendre $\varepsilon = 1$ dans la définition), donc si $|u_n|$ diverge vers $+\infty$, $|v_n|$ aussi. Sans les valeurs absolues, on a des problèmes de signe, on ne peut donc pas conclure grand chose d'intéressant. □

5.3.2 Propriétés

Proposition 38. Principales propriétés de l'équivalence.
- (symétrie) Si $u_n \sim v_n$, alors $v_n \sim u_n$.
- (transitivité) Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$, alors $u_n \sim w_n$.
- (stabilité par produit) Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim t_n$, alors $u_n w_n \sim v_n t_n$.
- (stabilité par inverse) Si $u_n \sim v_n$ et v_n ne s'annule plus à partir d'un certain rang, alors $\frac{1}{u_n} \sim \frac{1}{v_n}$.
- (stabilité par passage à la valeur absolue) Si $u_n \sim v_n$, alors $|u_n| \sim |v_n|$.

Démonstration. Si les suites ne s'annulent plus à partir d'un certain rang, les propriétés découlent très facilement de la définition de l'équivalence. Par exemple, pour la deuxième, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{v_n}{w_n} = 1$ donc par produit $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} \times \frac{v_n}{w_n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{w_n} = 1$. Dans le cas où une suite est nulle à partir d'un certain rang, c'est aussi le cas de toutes les suites qui lui sont équivalentes, donc on ne travaille qu'avec des suites nulles à partir d'un certain rang, et les résultats sont évidents. □

Exemple : Ces résultats, notamment la stabilité par produit et inverse, sont essentiels, car ils vont nous permettre de calculer notamment des limites de quotient en passant par les équivalents, nous évitant les fastideuses factorisations. Un exemple : $\frac{3n^3 - 5n^2 + 3n - 1}{n^3 + 5\ln n} \sim \frac{3n^3}{n^3} = 3$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3n^3 - 5n^2 + 3n - 1}{n^3 + 5\ln n} = 3$. Une grande majorité des formes indéterminées que nous rencontrerons pourront se résoudre de cette façon.

Remarque 41. **ATTENTION**, on ne peut pas additionner des équivalents, c'est même une source d'horreurs mathématiques hélas très utilisée. Par exemple $n^2 + n \sim n^2$, et $-n^2 - 3 \sim -n^2$, mais la somme nous donnerait $n - 3$ équivalent à 0, ce qui est risible. Plus subtil, les équivalents ne se composent pas non plus en général. Ainsi, on peut avoir $u_n \sim v_n$ mais $e^{u_n} \nsim e^{v_n}$.

Proposition 39. Principales propriétés de la relation de négligeabilité.

- (transitivité) Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$.
- (stabilité par produit) Si $u_n = o(v_n)$, alors $u_n w_n = o(v_n w_n)$.
- (stabilité par produit, bis) Si $u_n = o(v_n)$ et $w_n = o(t_n)$ alors $u_n w_n = o(v_n t_n)$.
- (passage au quotient) Si $u_n = o(v_n)$ et que les suites ne s'annulent plus à partir d'un certain rang, alors $\frac{1}{v_n} = o\left(\frac{1}{u_n}\right)$.

Démonstration. Comme pour les propriétés de l'équivalence, tout cela est extrêmement facile à démontrer à l'aide des propriétés sur les limites. Laissé en exercice au lecteur ! $\square$

Chapitre 6

Dénombrement

Introduction

La combinatoire, science du dénombrement, sert comme son nom l'indique à compter. Il ne s'agit bien entendu pas de revenir au stade du CP et d'apprendre à compter sur ses doigts, mais bien de définir des objets et notations mathématiques permettant de compter le nombre d'éléments d'ensemble bien trop gros et compliqués pour être dénombrés à la main.
Quelques exemples de problèmes faisant intervenir les objets que nous allons étudier dans ce cours :

- Dix personnes assistent à un diner autour d'une table ronde. Combien y a-t-il de façons de disposer les dix convives autour de la table ? Si de plus on impose que deux de ces convives, qui ne s'apprécient guère, ne doivent pas être placée côte à côte, combien reste-t-il de dispositions possibles ?
- Il y a 42 élèves dans la classe. Quelle est la probabilité qu'il y en ait (au moins) deux parmi eux qui soient nés le même jour de l'année ?
- Pour remplir une grille de loto, on coche six numéros parmi les nombres compris entre 1 et 49. De combien de façons peut-on remplir une telle grille ? Question subsidiaire : quelle est la probabilité de gagner au loto ?

6.1 Cardinaux d'ensembles finis

6.1.1 Quelques définitions

Définition 50. Un ensemble E est **fini** s'il est en bijection avec l'ensemble $\{1; 2; \dots; n\}$, pour un entier naturel n. Cet entier n est alors unique. Il est appelé **cardinal** de l'ensemble E, et on le note $card(E)$, ou $|E|$, ou encore $\sharp E$.

Remarque 42. Cela correspond bien à la notion intuitive d'ensemble dont on peut compter les éléments. En effet, une bijection de E vers $\{1; \dots; n\}$ est simplement une façon d'étiquetter les éléments de E avec les numéros 1, 2, …, n.

Proposition 40. Soit E un ensemble fini et F un sous-ensmble de E, alors F est un ensemble fini, et $|F| \leqslant |E|$, avec égalité si et seulement si $E = F$.

Démonstration. Cette propriété, comme souvent en ce qui concerne les ensembles finis, est assez évidente d'un point de vue intuitif, mais pas si simple à démontrer correctement. Nous nous en tiendrons au point de vue intuitif. □

Proposition 41. Soient E et F deux ensembles finis. Si E et F sont en bijection l'un avec l'autre, ils ont même cardinal.

Démonstration. Il existe par hypothèse une bijection f de E vers F. De plus, F étant fini, notons n son cardinal, il existe alors une bijection g de F dans $\{1; \dots; n\}$. L'application $g \circ f : E \to \{1; \dots; n\}$

est une composée d'applications bijectives, donc est bijective, ce qui prouve que E est de cardinal n. □

6.1.2 Cardinaux élémentaires

Proposition 42. Soient A et B deux sous-ensembles d'un même ensemble fini E. Alors $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Démonstration. Commençons par constater que dans le cas où les deux ensembles A et B sont disjoints, on a $|A \cup B| = |A| + |B|$. Vous voulez une démonstration ? Soit f une bijection de A dans $\{1; \dots; n\}$ et g une bijection de B dans $\{1; \dots; p\}$, n et p étant les cardinaux respectifs de A et de B. On peut alors construire une bijection h de $A \cup B$ vers $\{1; \dots; n+p\}$ en posant $\forall x \in A$, $h(x) = f(x)$ et $\forall x \in B$, $h(x) = g(x) + p$. Une fois ce fait admis, constatons que $A \cup B$ est l'union disjointe des trois ensembles $A \backslash B$, $B \backslash A$ et $A \cap B$. On a donc $|A \cup B| = |A \backslash B| + |B \backslash A| + |A \cap B|$. Or, A étant union disjointe de $A \backslash B$ et de $A \cap B$, on a également $|A| = |A \backslash B| + |A \cap B|$, ou encore $|A \backslash B| = |A| - |A \cap B|$. De même, $|B \backslash A| = |B| - |A \cap B|$, donc on obtient $|A \cup B| = |A| - |A \cap B| + |B| - |A \cap B| + |A \cap B|$, ce qui donne bien la formule annoncée. □

Théorème 6. Formule du crible de Poincaré.
Soient A_1, A_2, ..., A_n des sous-ensembles finis d'un même ensemble E, alors

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant n} (-1)^{k+1} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|$$

Proposition 43. La formule de Poincaré étant assez peu lisible, voici ce que ça donne pour $n = 3$ et $n = 4$:

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

$|A \cup B \cup C \cup D| = |A| + |B| + |C| + |D| - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| + |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| - |A \cap B \cap C \cap D|$

Démonstration. La preuve de la formule générale, assez technique, se fait par récurrence. On se contentera de prouver la formule pour $n = 3$ en partant de la proposition précédente : $|A \cup B \cup C| = |(A \cup B) \cup C| = |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| = |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| = |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |A \cap C| - |A \cap B| + |A \cap C \cap B \cap C|$, ce qui donne bien la formule annoncée. □

Exemple : Dans un lycée de 300 élèves, 152 pratiquent le football, 83 le rugby et 51 le tennis. De plus, 24 pratiquent à la fois foot et rugby, 14 font foot et tennis, et 8 rugby et tennis. Enfin, 3 élèves pratiquent les trois sports simultanément. Le nombre d'élèves sportifs est alors de $152 + 83 + 51 - 24 - 14 - 8 + 3 = 237$.

Proposition 44. Soit A un sous-ensemble fini d'un ensemble fini E, alors $|\bar{A}| = |E| - |A|$.

Démonstration. C'est une conséquence de la formule pour une union : E est union disjointe de A et de $\bar{A}$, donc $|E| = |A| + |\bar{A}|$. □

Proposition 45. Soient E et F deux ensembles finis, alors $E \times F$ est fini, et $|E \times F| = |E| \times |F|$.

Démonstration. Pas de preuve rigoureuse pour celui-ci, simplement une idée de la façon dont ça marche. Soit n le cardinal de E, et $e_1, e_2, \dots, e_n$ ses éléments, p le cardinal de F et $f_1, \dots, f_p$ ses éléments. on peut placer les éléments de $E \times F$ dans un tableau de la façon suivante :

	e_1	e_2	$\dots$	e_n
f_1	(e_1, f_1)	(e_2, f_1)	$\dots$	(e_n, f_1)
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
f_p	(e_1, f_p)	(e_2, f_p)	$\dots$	(e_n, f_p)

Il y bien $n \times p$ éléments dans le tableau, donc dans $E \times F$. □

6.2 Listes, arrangements et combinaisons

Définition 51. Soit E un ensemble fini de cardinal n, et $p \in \mathbb{N}$. Une p-**liste** d'éléments de E, ou p-uplet d'éléments de E, est simplement un élément de E^p.

Remarque 43. On peut très bien avoir plusieurs fois le même élément dans une p-liste. Par ailleurs, l'ordre des éléments de la p-liste est important.

Proposition 46. Le nombre de p-listes dans un ensemble de cardinal n vaut n^p.

Démonstration. C'est une conséquence de la formule de cardinal du produit vue un peu plus haut : comme $|E \times F| = |E| \times |F|$, on a $|E^p| = |E|^p$, ce qui prouve bien la propriété. □

Exemple : Dans une urne se trouvent 10 boules numérotées de 1 à 10. On en tire quatre **successivement avec remise**. Un tel tirage revient à choisir une 4-liste dans l'ensemble à 10 éléments constitué des entiers de 1 à 10. Il y a donc $10^4 = 10\ 000$ tirages possibles.

Remarque 44. Le nombre de p-listes d'un ensemble à n éléments est aussi le nombre d'applications de l'ensemble $\{1; \dots; p\}$ vers cet ensemble. En effet, se donner une telle application f revient à se donner les valeurs des images $f(1)$, $f(2)$, …, $f(p)$, c'est-à-dire à se donner une liste de p éléments de E.

Définition 52. Soit E un ensemble à n éléments et $p \in \mathbb{N}$, on appelle **arrangement** de p éléments de E une p-liste d'éléments distincts de E.

Remarque 45. L'ordre des éléments est toujours important, par contre on ne peut plus avoir de répétition d'élément dans un arrangement.

Définition 53. Soient n et p deux entiers tels que $p \leqslant n$, on note $A_{n,p} = \dfrac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)$.

Proposition 47. Le nombre d'arrangements de p éléments dans un ensemble à n éléments vaut $A_{n,p}$.

Démonstration. Idée de démonstration : lorsqu'on construit un arrangement, on a n choix pour le premier élément, $n-1$ pour le deuxième, …, $n-p+1$ pour le $p$ème, soit au total $n(n-1)\times(n-p+1) = \dfrac{n(n-1)\dots(n-p+1)(n-p)\dots 2\times 1}{n(n-1)\dots 2 \times 1} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$. □

Exemple : Si on reprend notre urne avec ses 10 boules et qu'on en tire désormais quatre **successivement sans remise**, on construit des arrangements, et il y a $\dfrac{10!}{6!} = 5040$ tirages possibles.

Remarque 46. Le nombre d'arrangements de p éléments dans un ensemble à n éléments est également le nombre d'applications injectives de $\{1; \dots; p\}$ dans E.

Définition 54. Un arrangement de n éléments dans un ensemble à n éléments est aussi appelé **permutation**. Il y a donc $n!$ permutations dans un ensemble à n éléments.

Exemple : Le nombre de façons d'asseoir 10 personnes autour d'une table (supposée contenir 10 places distingables) est $10! = 3\ 628\ 800$. Si l'on veut que deux personnes spécifiées à l'avance ne soient pas côte à côte (on suppose la table ronde par exemple, c'est-à-dire que chaque personne a 2 voisins), il reste $10 \times 7 \times 8 \times 7 \times \dots 1 = 2\ 822\ 400$ (on place d'abord les deux ennemis : on a dix possibilités pour le premier, mais 7 au lieu de 9 pour le deuxième puisqu'on doit éviter les deux places voisines du premier ; ensuite, tout se déroule comme précédemment).

Exemple : Le nombre d'anagrammes d'un mot peut se calculer à l'aide de permutations. Il faut simplement diviser le nombre total du permutations du mot par $k!$ chaque fois qu'une même lettre apparait k fois dans le mot (ainsi, s'il y a trois E dans le mot, on divise par 3! car les permutations qui se contentent d'échanger les E entre eux ne modifient pas l'anagramme). Par exemple, le nombre d'anagrammes du mot DENOMBREMENT est $\dfrac{12!}{3! \times 2! \times 2!}$.

Remarque 47. Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est le nombre d'applications bijectives de cet ensemble dans lui-même.

Proposition 48. Quelques propriétés des factorielles, plus ou moins utiles :
- Par convention, $0! = 1$
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)! = n! \times (n+1)$
- $\forall a > 1$, $a^n = o(n!)$, mais $n! = o(n^n)$. (Pour les plus curieux, je signale le joli résultat suivant, connu sous le nom de formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$)

Définition 55. Une **combinaison** de k éléments dans un ensemble fini E à n éléments est un sous-ensemble à k éléments de E.

Définition 56. Soient n et k deux entiers tels que $k \leqslant n$, on appelle **coefficient binomial** d'indices n et k le nombre $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Ce nombre est également noté C_n^k, et on le lit « k parmi n » (comme un raccourci signifiant que le nombre de façon de choisir k objets parmi n objets au total).

Remarque 48. On pose souvent $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$.

Proposition 49. Le nombre de sous-ensembles à p éléments d'un ensemble à n éléments est $\binom{n}{p}$.

Démonstration. En effet, une combinaison n'est rien d'autre qu'un arrangement dans lequel on a enlevé l'importance de l'ordre. Autrement dit, chaque combinaison apparait $p!$ fois quand on dénombre les arrangements (puisqu'il y a $p!$ façons d'ordonner un ensemble à p éléments), donc le nombre de combinaisons à p éléments vaut $\frac{A_{n,p}}{p!} = \binom{n}{p}$. □

Exemple : Toujours dans notre urne avec ses dix boules, on tire désormais quatre boules **simultanément**. Il y a maintenant $\binom{10}{4} = 210$ tirages possibles (l'ordre n'est plus important).

Remarque 49. On peut encore une fois interpréter ceci à l'aide d'applications : le nombre de combinaisons à p éléments dans un ensemble à n éléments est le nombre d'applications strictement croissantes de $\{1; \dots ; p\}$ dans E. En effet, se donner une application strictement croissante f est équivalent à se donner le sous-ensemble $\{f(1); f(2), \dots ; f(p)\}$.

Un petit tableau pour résumer les cas d'utilisations de ces trois outils de dénombrement :

	L'ordre n'est pas important	L'ordre est important
Répétitions possibles		Listes $\rightarrow$ puissances
Répétition interdites	Combinaisons $\rightarrow$ coefficients binômiaux	Arrangements $\rightarrow$ quotient de factorielles

6.3 Propriétés des coefficients binomiaux

Proposition 50. Quelques propriétés des coefficients binomiaux, utiles pour les calculs :
- $\binom{n}{0} = 1$; $\binom{n}{1} = n$; $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.
- $\forall k \leqslant n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (propriété de symétrie).
- $\forall 1 \leqslant k \leqslant n$, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.
- $\forall 1 \leqslant k \leqslant n$, $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$ (relation de Pascal).

Démonstration. Pour le premier point, il suffit de reprendre la définition des coefficients binomiaux : $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = 1$; $\binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)!} = n$ et $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$.
La propriété de symétrie est facile aussi : $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$. Il y a également une interprétation combinatoire de ce résultat : choisir un sous-ensemble de k éléments dans un ensemble à n éléments est équivalent à choisir son complémentaire, qui est constitué de $n-k$ éléments, donc il y a autant de sous-ensembles à k éléments et à $n-k$ éléments dans un ensemble à n éléments.
Pour la troisième, $k\binom{n}{k} = \frac{k \times n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$, et $n\binom{n-1}{k-1} = \frac{n \times (n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$, les deux quantités sont bien égales.
Enfin, la formule de Pascal : $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$
$= \frac{(n-k) \times (n-1)! + k \times (n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n \times (n-1)!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$. La encore, il y a une interprétation combinatoire. Soit E un ensemble à n éléments et $x \in E$. Les sous-ensembles de E à k éléments, au nombre de $\binom{n}{k}$, se répartissent en deux catégories : ceux qui contiennent x, qui sont au nombre de $\binom{n-1}{k-1}$ puisqu'il reste $k-1$ éléments à choisir parmi les $n-1$ restants dans E une fois x choisi ; et ceux qui ne contiennent pas x, qui sont au nombre de $\binom{n-1}{k}$ puisqu'il reste cette fois-ci k éléments à choisir parmi les $n-1$ restants (on n'en a encore choisi aucun). D'où la formule. □

Triangle de Pascal : La relation de Pascal permet de calculer les valeurs des coefficients binomiaux par récurrence, en les répartissant sous forme d'un tableau triangulaire :

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$
$n=0$	1								
$n=1$	1	1							
$n=2$	1	2	1						
$n=3$	1	3	3	1					
$n=4$	1	4	6	4	1				
$n=5$	1	5	10	10	5	1			
$n=6$	1	6	15	20	15	6	1		
$n=7$	1	7	21	35	35	21	7	1	
$n=8$	1	8	28	56	56	56	28	7	1

Pour obtenir un coefficient du tableau, on fait la somme de celui qui est au-dessus de lui, et de celui qui est à gauche de celui-ci.

Théorème 7. Formule du binôme de Newton.
Soient a et b deux réels, et $n \in \mathbb{N}$, alors $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Remarque 50. On peut obtenir à partir de cette formule le développement d'une différence : $(b-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k a^k b^{n-k}$. En pratique, il suffit d'alterner les signes.

Exemple : $(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$. L'ordre est inversé par rapport à celui de la formule, mais c'est la façon habituelle d'écrire le développement. Autre exemple : $(1-x)^5 = 1 - 5x + 10x^2 - 10x^3 + 5x^4 - x^5$.

Démonstration. On va procéder par récurrence sur l'entier n. Pour $n = 0$, la formule du binome dit simplement que $(a+b)^0 = \binom{0}{0} a^0 b^0$, ce qui est vrai (on a 1 de chaque côté). Supposons la formule vraie au rang n, on a alors $(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$ par hypothèse de récurrence, donc en développant le $a+b$ et en le faisant rentrer dans la somme, on obtient $(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}$. Effectuons un changement d'indice en remplaçant k par $k+1$ dans la première somme (on ne touche à rien dans la deuxième) : $(a+b)^{n+1} = \sum k = 1^{n+1}\binom{n}{k-1}a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k} = \binom{n}{n}a^{n+1}b^0 + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{0}a^0 b^{n+1}$ (on a isolé un terme dans chaque somme pour pouvoir regrouper les sommes). Maintenant, on reconnait la formule de Pascal dans la somme, donc $(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k} + b^{n+1}$. Il ne reste plus qu'à remettre les deux termes isolés dans la somme pour obtenir la formule au rang $n+1$, ce qu'on peut faire puisqu'ils sont justement égaux aux termes manquants pour $k = 0$ et $k = n+1$. □

Proposition 51. Soit E un ensemble fini de cardinal n. Alors $\mathcal{P}(E)$ est fini, de cardinal 2^n.

Démonstration. Le cardinal de $\mathcal{P}(E)$ est le nombre de sous-ensembles de E. Or, on sait que, pour tout entier k, il y a $\binom{n}{k}$ sous-ensembles de E à k éléments, ce qui fait au total $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ sous-ensembles. Cette somme n'est rien d'autre qu'un cas particulier de formule du binôme, pour $a = b = 1$, donc elle vaut $(1+1)^n = 2^n$.
Une façon plus combinatoire de voir les choses : à chaque sous-ensemble A de E, on peut associer une application de E dans $\{0;1\}$ appelée application caractéristique de A, et habituellement notée χ_A, définie comme suit : si $x \in A$, $\chi_A(x) = 1$ et sinon $\chi_A(x) = 0$. Cette application caractérise effectivement le sous-ensemble, et toute application de E dans $\{0;1\}$ est une application caractéristique d'un sous-ensemble de E. Comme il y a 2^n applications de E dans $\{0;1\}$ (cf la remarque après la définition des p-listes), il y a aussi 2^n sous-ensembles de E. □

Proposition 52. Formule de Vandermonde.
Soient a, b et n trois entiers tels que $n \leqslant a+b$, alors $\binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$.

Démonstration. On va passer par une interprétation combinatoire. Considérons un groupe constitué de a hommes et b femmes, parmi lesquels on veut choisir n personnes. On sait déjà qu'il y a $\binom{a+b}{n}$ possibilités de faire ce choix (ce qui correspond au membre de gauche de notre inégalité). Mais on peut également classer les groupes de n personnes en catégories selon le nombre d'hommes qu'ils contiennent : soit 0 homme et n femmes (il y a $\binom{a}{0}\binom{b}{n}$ tels groupes), soit 1 homme et $n-1$ femmes (il y a $\binom{a}{1}\binom{b}{n-1}$ tels groupes), etc, jusqu'à la possibilité d'avoir n hommes et 0 femme (il y a $\binom{a}{n}\binom{b}{0}$ tels groupes). Le nombre total de groupes possibles vaut donc aussi $\sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$. □

Chapitre 7

Limites, continuité

7.1 Limites

7.1.1 Définitions

Définition 57. Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[a; +\infty[$, et $l \in \mathbb{R}$. La fonction f admet pour limite l quand x tend vers $+\infty$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists M \in \mathbb{R}$, $x \geqslant M \Rightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon$. On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.

Remarque 51. Cette définition est très similaire à celle de la limite d'une suite. De même, f admet pour limite l quand x tend vers $-\infty$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists M \in \mathbb{R}$, $x \leqslant M \Rightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon$.

Exemple : Montrons à l'aide de cette définition que la fonction inverse converge vers 0 en $+\infty$. Soit $\varepsilon > 0$, on a $\left|\frac{1}{x} - 0\right| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow |x| \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$, donc en prenant $M = \frac{1}{\varepsilon}$, on aura bien $x \geqslant M \Rightarrow \left|\frac{1}{x}\right| \leqslant \varepsilon$.

Exemple : Montrons à l'aide de cette définition que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x+3}{x-5} = 2$. Soit $\varepsilon > 0$, alors $\left|\frac{2x+3}{x-5} - 2\right| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{2x+3-2x+10}{x-5}\right| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{13}{x-5}\right| \leqslant \varepsilon$. Comme on s'intéresse à la limite en $+\infty$, on va se placer sur $]5; +\infty[$, intervalle sur lequel l'expression dans la valeur absolue est positive. On obtient donc $\frac{13}{x-5} \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow x - 5 \geqslant \frac{13}{\varepsilon} \Leftrightarrow x \geqslant \frac{13}{\varepsilon} + 5$. En prenant $M = \frac{13}{\varepsilon} + 5$, on a bien $x \geqslant M \Rightarrow |f(x) - 2| \leqslant \varepsilon$.

Définition 58. Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[a; +\infty[$. La fonction f admet pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si $\forall M \in \mathbb{R}$, $\exists A \in \mathbb{R}$, $x \geqslant A \Rightarrow f(x) \geqslant M$. On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Remarque 52. On définit de même une limite égale à $-\infty$, ou des limites infinies quand x tend vers $-\infty$. Par exemple, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, x \leqslant A \Rightarrow f(x) \geqslant M$.

Exemple : Montrons à l'aide de cette définition que $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$. Soit $M \in \mathbb{R}$. Si $M < 0$, on aura toujours $\sqrt{x} \geqslant M$, donc on peut oublier ce cas. Sinon, $\sqrt{x} \geqslant M \Leftrightarrow x \geqslant M^2$. On peut donc prendre $A = M^2$ et la définition de la limite infinie est donc vérifiée.

Définition 59. Soit f une fonction définie sur un intervalle I, $a \in I$ et $l \in \mathbb{R}$, alors la fonction f admet pour limite l quand x tend vers a si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$, $|x - a| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$. On le note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

Remarque 53. Si on y regarde de plus près, cette définition ne fait que retranscrire formellement la notion intuitive de limite : on peut se rapprocher autant que possible de l quitte à se rapprocher suffisamment de a.

Exemple : Prouvons à l'aide de cette définition que $\lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1$. Soit $\varepsilon > 0$, on cherche une valeur de η telle que $|x-1| \leqslant \eta \Rightarrow |x^2-1| < \varepsilon$. Or, $|x^2-1| = |x-1| \times |x+1|$ et, si $x \in [1-\eta; 1+\eta]$, on a $|x+1| \leqslant 2+\eta$, donc $|x^2-1| \leqslant \eta(2+\eta) \leqslant 3\eta$ en prenant $\eta \leqslant 1$, ce qu'on peut toujours supposer puisqu'on ne cherche qu'une valeur qui fonctionne. Il suffit alors de poser $\eta = \dfrac{\varepsilon}{3}$ pour satisfaire à la définition d'une limite finie.

Définition 60. On dit que f admet l pour limite à gauche en a si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$, $x \in [a-\eta; a[\Rightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon$. On le note $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = l$. De même, on peut définir une limite à droite en a égale à l.

Exemple : La fonction partie entière admet en chaque entier une limite à gauche et une limite à droite différentes. Par exemple, $\lim\limits_{x \to 2^-} Ent(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to 2^+} Ent(x) = 2$.

Définition 61. Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \backslash \{a\}$. La fonction f admet pour limite $+\infty$ quand x tend vers a si $\forall M \in \mathbb{R}$, $\exists \eta > 0$, $0 < |x-a| < \eta \Rightarrow f(x) \geqslant M$.

Remarque 54. La présence de l'inégalité $0 < |x-a|$ est nécessaire puisque la fonction, dans le cas où elle serait définie en a, ne pourrait y admettre un limite infinie. On définit de même une limite égale à $-\infty$ en a en changeant le sens de la dernière inégalité. On peut prolonger la notion de limite à gauche et à droite au cas de limites infinies.

7.1.2 Opérations et limites

Les résultats étant exactement les mêmes que ceux déjà vus dans le cas des suites. Le fait que la limite soit prise en $+\infty$, en $-\infty$ ou en a ne change absolument rien aux contenus des tableaux, que nous ne reproduirons donc pas ici.

Exemple : On cherche la limite de $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-1}$ quand x tend vers 1. Comme $\lim\limits_{x \to 1} x^2 + 3 = 4$ et $\underset{x \to 1}{x} - 1 = 0^+$, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$.

Remarque 55. Le signe étant particulièrement important lors du calcul de ce genre de limites, on aura souvent besoin de recourir à des tableaux de signe pour déterminer par exemple si un dénominateur a pour limite 0^+ ou 0^-.

7.1.3 Asymptotes, branches infinies

Par définition, une asymptote est une droite dont la courbe représentative d'une fonction se rapproche « à l'infini » (éventuellement en la coupant, contrairement à une croyance très répandue). Il en existe de trois types, auxquelles nous allons ajouter la notion de branche infinie.

Définition 62. La courbe représentative d'une fonction f admet pour **asymptote verticale** la droite d'équation $x = a$ si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$.

Remarque 56. Cela suppose que la fonction f n'est pas définie en a (cas le plus fréquent), ou y admet une discontinuité violente.

Exemple : La courbe de la fonction $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-4}$ admet les deux droites d'équation $x = 2$ et $x = -2$ comme asymptotes verticales.

Définition 63. La courbe représentative d'une fonction f admet pour **asymptote horizontale** la droite d'équation $y = a$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$ ou si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = a$.

Exemple : La courbe de la fonction $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-5}$ admet la droite d'équation $y = 1$ comme asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$.

Définition 64. La courbe représentative d'une fonction f admet comme **asymptote oblique** la droite d'équation $y = ax+b$ (avec $a \neq 0$) si $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(ax+b)) = 0$ ou $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(ax+b)) = 0$. Une autre façon de voir les choses est de dire que $f(x) = ax + b + \varepsilon(x)$, avec $\lim_{x\to\pm\infty}\varepsilon(x) = 0$.

Exemple : La courbe de la fonction $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+2}$ a pour asymptote oblique la droite d'équation $y = x - 2$ en $+\infty$ et en $-\infty$ (voir plus loin pour le détail d'un calcul du même genre).

Définition 65. La courbe représentative d'une fonction f admet en $+\infty$ une **branche parabolique de direction** (Ox) si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$, mais $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = 0$ (on a une définition similaire en $-\infty$).

Exemples : Les fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ ou $x \mapsto \ln x$ admettent une branche parabolique de direction (Ox).

Définition 66. La courbe représentative d'une fonction f admet en $+\infty$ une **branche parabolique de direction** (Oy) si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$, et $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$ (on a une définition similaire en $-\infty$).

Exemple : La fonction $x \mapsto x^2$ admet une branche parabolique de direction (Oy) (d'où le nom de branche parabolique, d'ailleurs), ainsi que la fonction $x \mapsto e^x$ en $+\infty$.

Définition 67. La courbe représentative d'une fonction f admet en $+\infty$ une **branche parabolique de direction la droite d'équation** $y = ax$ ($a \neq 0$) si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = a$, mais $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - ax) = \pm\infty$ (on a une définition similaire en $-\infty$).

Remarque 57. Comme dans le cas des autres branches paraboliques, cela signifie que la courbe a une direction qui se rapproche de celle de la droite considérée, mais tout en s'éloignant de toute droite parallèle à celle-ci (sinon il y aurait une asymptote oblique).

Exemple : La fonction $f(x) = x + \ln x$ a une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = x$ en $+\infty$.

Plan d'étude des branches infinies :

Quand on cherche à étudier les branches infinies d'une fonction, on procède dans l'ordre suivant :

- On calcule la limite de f. Si elle est finie, on a une asymptote horizontale, si elle est infinie on continue.
- On calcule la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$. Si elle est nulle ou infinie, on a une branche parabolique de direction (Ox) ou (Oy). S'il y a une limite finie non nulle a, on continue.
- On calcule la limite de $f(x) - ax$. Soit elle est finie égale à b et on a une asymptote oblique d'équation $y = ax+b$, soit elle est infinie, et il y a une branche parabolique de direction $y = ax$.

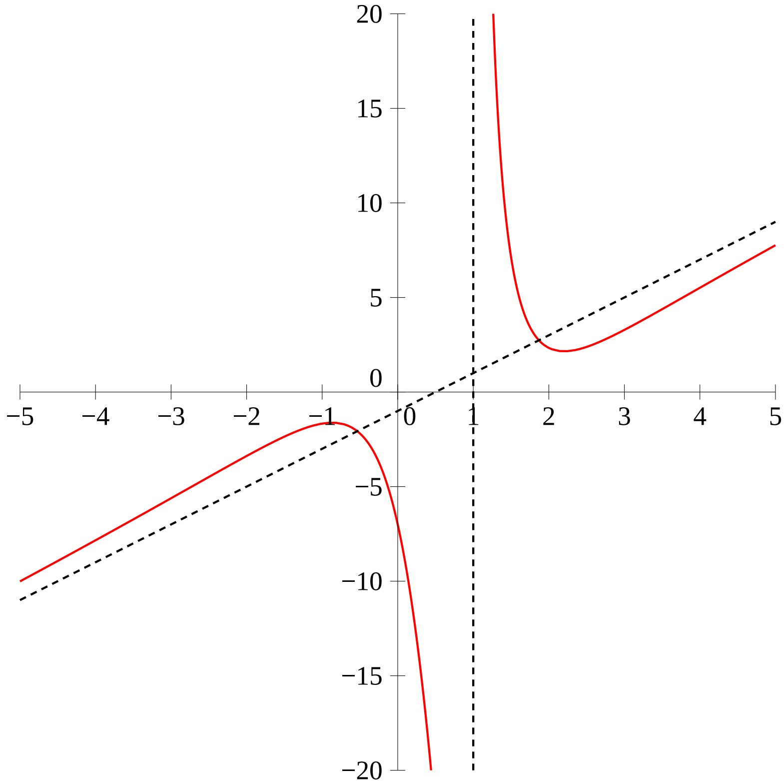
Étude des branches infinies de $f(x) = \dfrac{2x^4 - 5x^3 + 4x + 7}{x^3 - 2x^2 + 2x - 1}$ **:**

Commençons par déterminer le domaine de définition : $x^3 - 2x^2 + 2x - 1$ a pour racine évidente $x = 1$, et se factorise en $(x-1)(x^2 - x + 1)$ (je vous passe les détails de la factorisation). Le trinome $x^2 - x + 1$ a pour discriminant $\Delta = -3$, il ne s'annule donc jamais (il est toujours positif). On a donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

Pour déterminer l'existence d'une éventuelle asymptote verticale, inutile de se fatiguer et de préciser les signes : $\lim_{x\to1} x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$ et $\lim_{x\to1} 2x^4 - 5x^3 + 4x + 7 = 8$, donc $\lim_{x\to1} f(x) = \pm\infty$, ce qui nous suffit à connaitre l'existence d'une symptote verticale d'équation $x = 1$.

De plus, $f(x) \underset{\pm\infty}{\sim} \dfrac{2x^4}{x^3} = 2x$ (la définition des équivalents, utilisés ici pour ne pas surcharger les calculs, est donnée un peu plus loin dans le cours), donc $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$. De même, $\dfrac{f(x)}{x} \underset{\pm\infty}{\sim} 2$, donc $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$. Reste à calculer $f(x) - 2x = \frac{2x^4 - 5x^3 + 4x + 7 - 2x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 2x}{x^3 - 2x^2 + 2x - 1} = \frac{-x^3 - 4x^2 + 6x + 7}{x^3 - 2x^2 + 2x - 1}$, qui a pour limite -1 en $\pm\infty$ (même méthode qu'au-dessus). Conclusion : la droite d'équation $y = 2x - 1$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

Voici l'allure de la courbe :

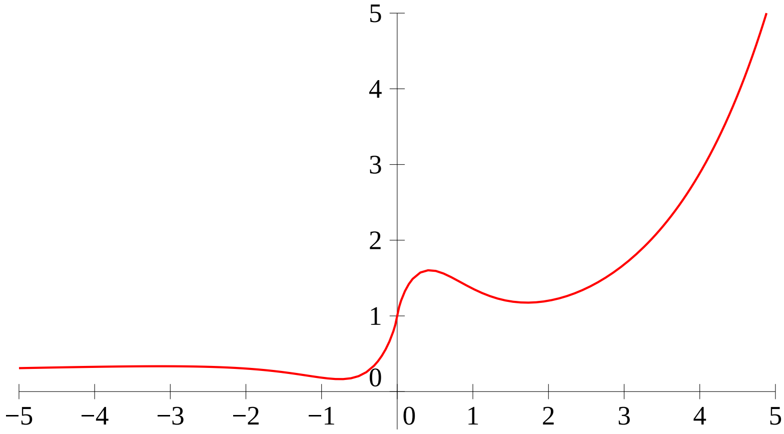


Étude des branches infinies de $g(x) = \frac{e^x - x\ln|x|}{x^2+1}$

Le dénominateur ne s'annulant jamais, g est définie sur $\mathbb{R}^*$ (il faut tout de même avoir $|x| > 0$). Quand x tend vers 0, numérateur et dénominateur convergent vers 1, puisque $\lim_{x\to 0} x\ln|x| = 0$, donc il n'y a pas d'asymptote verticale.

Comme on a par ailleurs, en utilisant croissances comparées et équivalents, $\underset{x\to+\infty}{f}(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^x}{x^2}$, on a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty$. Il y a donc en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Oy). En $-\infty$, c'est bien sûr différent, l'exponentielle tendant vers 0. On a cette fois $f(x) \underset{-\infty}{\sim} \frac{x\ln(-x)}{x^2} = \frac{\ln(-x)}{x}$, qui tend vers 0 par croissance comparée. Il y a donc une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$.

L'allure de la courbe :



7.1.4 Propriétés supplémentaires

Comme dans le cas des suites, on a des propriétés intéressantes à partir de comparaisons entre fonctions :

Proposition 53. Soit I un intervalle f, g et h trois fonctions définies sur I, f et g admettant pour limites l et l' en x_0 (x_0 étant un élément de I, une borne de I, ou un infi) , alors :

- si $\forall x \in I,\ f(x) \leqslant g(x),\ l \leqslant l'$.
- si $\forall x \in I,\ f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$ et $l = l'$, alors h admet pour limite l en x_0 (théorème des gendarmes).

Ces résultats restent valables avec des limites infinies.

Exemple : On cherche la limite en $+\infty$ de $f(x) = \dfrac{2\,Ent(x)+5}{Ent(x)-2}$. Partons du fait que $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \leqslant Ent(x) \leqslant x+1$. On a donc $2x+5 \leqslant 2\,Ent(x)+5 \leqslant 2x+7$, et $x-2 \leqslant Ent(x)-2 \leqslant x-1$, donc $\forall x > 2$ (dans ce cas, tout est positif), $\dfrac{1}{x-1} \leqslant \dfrac{1}{Ent(x)-2} \leqslant \dfrac{1}{x-2}$, et en faisant le produit des inagalités (tout est positif si $x > 2$), on a $\dfrac{2x+5}{x-1} \leqslant \dfrac{2\,Ent(x)+5}{Ent(x)-2} \leqslant \dfrac{2x+7}{x-2}$. Chacun des deux termes encadrant la fonction ayant pour limite 2, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

Proposition 54. Soit f et g deux fonctions telles que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et $\underset{x \to b}{g}(x) = l$, alors $\underset{x \to a}{g \circ f}(x) = l$ (résultat également valable avec des limites infinies).

7.1.5 Limites classiques

Ces résultats (croissance comparée notamment) ont été donnés en début d'année lors du premier chapitre sur les fonctions. Nous ne chercherons pas à les démontrer rigoureusement.

7.1.6 Négligeabilité, équivalence

Les notions de négligeabilité et d'équivalence pour les fonctions sont très proches de ce qu'on a pu voir sur les suites. La différence est que, pour une fonction, il est indispensable de préciser à quel endroit l'équivalence ou la négligeabilité est valable. Un équivalent valable quand x tend vers $+\infty$ ne l'est en général pas quand x tend vers 0.

Définition 68. Soient f et g deux fonctions définies et ne s'annulant pas au voisinage de a (qui peut être égal à $+\infty$ ou à $-\infty$), alors f et g sont équivalentes en a si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, ce que l'on note $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$. La fonction f est négligeable devant la fonction g si $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, ce qu'on note $f(x) \underset{a}{=} o(g(x))$.

Exemples : On peut réinterpréter les limites classiques en termes d'équivalents et de négligeabilité : par exemple, $\forall a > 0$, $x^a \underset{+\infty}{=} o(e^x)$, ou $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$.
Les propriétés et utilisations habituelles des équivalents sont les mêmes que pour les suites :

- Deux fonction équivalentes en a y ont le même comportement (et notamment y admettent la même limite quand elle en ont une) d'où l'intérêt des équivalents pour les calculs de limites et de branches infinies.
- On peut multiplier, diviser, inverser, élever à une puissance quelconque (mais constante) un équivalent.
- On ne peut toujours pas additionner ni composer des équivalents en général.

7.2 Continuité

7.2.1 Définitions

Définition 69. Une fonction f définie sur I est **continue en** $a \in I$ si $\lim_{x \in a} f(x) = f(a)$.

Définition 70. La fonction f est **continue à gauche** en a si $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$, et **continue à droite** en a si $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$. Elle est continue en a si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en a.

Exemple : On a $\lim_{x \to 2^-} Ent(x) = 1$ et $\lim_{x \to 2^+} Ent(x) = 2$. La fonction partie entière n'est donc pas continue en 2, elle n'y est continue qu'à droite.

Définition 71. Une fonction f est **continue sur un intervalle** I si elle est continue en tout point de I.

Théorème 8. Les fonctions usuelles suivantes : polynomes, logarithmes, exponentielles, puissances, valeur absolue sont continues sur leur ensemble de définition.

Proposition 55. Soient f et g deux fonction continues en a, alors les fonctions $f + g$ et fg sont aussi continues en a. Si de plus $g(a) \neq 0$, $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues en a.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate des propriétés d'opérations sur les limites. De même pour la propriété qui suit, qui découle des compositions de limites. □

Proposition 56. Soit f une fonction continue en a et g une fonction continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a.

Remarque 58. Ces résultats restent bien entendu vrais sur un intervalle. On dira souvent sans plus de détail qu'une fonction obtenue par ces opérations à partir de fonctions usuelles est continue sur son ensemble de définition « par théorèmes généraux ».

Proposition 57. Soit f une fonction définie sur $I \backslash \{a\}$ admettant une limite finie l quand x tend vers a, alors on peut prolonger f de manière unique en une fonction continue sur I en posant $f(a) = l$ (on garde habituellement la même notation pour la fonction prolongée). On parle de prolongement par continuité de f en a.

Exemple : La fonction $f : 2x \mapsto x \ln x$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ mais prolongeable par continuité à $\mathbb{R}_+$ en posant $f(0) = 0$.

7.2.2 Théorème des valeurs intermédiaires et applications

Théorème 9. Soit f une fonction continue sur un segment $[a;b]$ et c compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe $x \in [a;b]$ tel quel $f(x) = c$.

Corollaire 1. Soit f une fonction continue sur un segment $[a;b]$, alors $f([a;b])$ est un segment. En notant $m = \min\limits_{[a;b]} f(x)$ la plus petite valeur prise par f sur $[a;b]$ et $M = \max\limits_{[a;b]} f(x)$ la plus grande valeur prise par f sur $[a;b]$, on a donc $f([a;b]) = [m;M]$.

Remarque 59. Attention, l'hypothèse de continuité est indispensable (par exemple, $Ent([0;5]) = \{0;1;2;3;4;5\}$, seules les valeurs entières sont prises par la fonction), et le fait qu'on soit sur un segment également. La fonction inverse a beau être continue sur $\mathbb{R}_+^*$, elle n'y a ni maximum, ni minimum. De plus, il faut se méfier du fait qu'en général $f([a;b]) \neq [f(a), f(b)]$. Par exemple, si f est la fonction carré, $f([-2;3]) = [0;9]$.

Démonstration. On ne fera pas cette démonstration un peu technique, qui utilise d'ailleurs un peu plus que le simple théorème des valeurs intermédiaires. □

Corollaire 2. Soit f une fonction continue sur un intervalle I, alors $f(I)$ est un intervalle.

Remarque 60. La nature de l'intervalle image n'est pas toujours la même que celle de l'intervalle de départ. Ainsi, si f est la fonction carré, $f(]-2;3[) = [0;9[$.

Méthode de dichotomie

Proposition 58. Soit f une fonction continue sur un segment $[a;b]$, telle que $f(a)f(b) < 0$ (autrement dit, $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe opposé). On construit deux suites récurrentes (a_n) et (b_n) en posant $a_0 = a$ et $b_0 = b$ puis en procédant ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, si $f(a_n)f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$; dans le cas contraire on pose $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$. Les deux suites (a_n) et (b_n) sont alors adjacentes, et elles convergent vers une limite commune α vérifiant $f(\alpha) = 0$. De plus, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$, ce qui majore l'erreur commise en approchant α par a_n ou b_n.

Démonstration. Commençons par prouver par récurrence la propriété P_n : $a_n \leqslant b_n$ et $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$. Pour $n = 0$, on a $a_0 = a \leqslant b_0 = b$ et $b_0 - a_0 = b - a$, donc P_0 est vraie. Supposons P_n vraie, on a alors deux cas possibles pour la définition de a_{n+1} et b_{n+1}. Dans le premier, on a $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{1}{2}\frac{b-a}{2^n}$ par hypothèse de récurrence donc $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b-a}{2^{n+1}}$. Comme $a \leqslant b$, on a prouvé par la même occasion que $a_{n+1} \leqslant b_{n+1}$. Dans le deuxième cas, $b_{n+1} - a_{n+1} = b_n - \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{b_n - a_n}{2}$ et on conclut de la même façon. La propriété est donc vraie pour tout entier par principe de récurrence.
La suite $(b_n - a_n)$ étant géométrique de raison $\frac{1}{2}$, elle converge vers 0. De plus, (a_n) est une suite croissante (en effet, soit $a_{n+1} = a_n$, soit $a_{n+1} - a_n = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} \geqslant 0$), et (b_n) est décroissante (soit $b_{n+1} = b_n$, soit $b_{n+1} - b_n = \frac{a_n + b_n}{2} - b_n = \frac{a_n - b_n}{2} \geqslant 0$). Finalement, les deux suites sont adjacentes et convergent vers une même limite α.
Reste à prouver que $f(\alpha) = 0$, ce que nous ne ferons pas complètement : on prouve que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(a_n)$ est du signe de $f(a)$ (la construction est faite pour cela) et $f(b_n)$ du signe de $f(b)$ (une petite récurrence supplémentaire pour ces propriétés), donc $f(a_n)$ et $f(b_n)$ sont toujours de signe contraire. Or, ces deux suites convergent vers $f(\alpha)$ car f est continue. Le réel $f(\alpha)$ doit donc être à la fois positif et négatif, il est nécessairement nul. □

Exemple d'utilisation : On cherche à étudier les variations de la fonction $f(x) = x^4 + 4x^2 + 4x - 5$. Cette fonction est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = 4x^3 + 8x + 4x = 4g(x)$, avec $g(x) = x^3 + 2x + 1$. Cette fonction g est elle-même dérivable et $g'(x) = 3x^2 + 2 > 0$. La fonction g est strictement croissante, elle s'annule en un unique réel α, et f est donc décroissante sur $]-\infty; \alpha]$ et croissante sur $[\alpha; +\infty[$.
On aimerait déterminer une valeur approchée de α. Ayons pour cela recours à la dichotomie, mais il faut commencer par trouver un premier encadrement de α. On constate que $g(0) = 1$ et $g(-1) = -2$, donc la racine de g se trouve dans l'intervalle $[-1; 0]$. On calcule ensuite $g(-0.5)$, qui se trouve être négatif, donc $\alpha \in [-0.5; 0]$. Puis on calcule $g(0.25)$, qui est positif, donc $g(\alpha) \in [-0.5; -0.25]$. On sait donc déjà que $\alpha \simeq -0.375$, à 0.125 près. On aura naturellement recours à la calculatrice ou à l'ordinateur pour effectuer ce genre d'algorithmes de façon plus poussée. Remarquons que pour obtenir une valeur approchée à $\varepsilon > 0$ près, il suffit de choisir n tel que $\dfrac{b-a}{2^n} < \varepsilon$.

7.2.3 Compléments sur les bijections

Proposition 59. Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I. Alors f est bijective de I vers $J = f(I)$ et sa réciproque g est continue et strictement monotone (de même monotonie que f) sur J.

Démonstration. Supposons f croissante (l'autre cas est très similaire). On sait déjà que $f(I)$ est un intervalle, et de plus f est injective car strictement monotone, donc bijective sur son image. La fonction g est donc bien définie sur J. De plus, si y et y' sont deux élément de J tels que $y < y'$, on a $y = f(x)$ et $y' = f(x')$, avec $x < x'$, donc $g(y) = x < x' = g(y')$ et g est strictement croissante. Enfin, soit $y \in J$, $x = g(y)$ et $\varepsilon > 0$ (et tel que $[x-\varepsilon; x+\varepsilon] \subset I$, sinon il n'y a pas de problème). Notons $y_1 = g(x-\varepsilon)$, $y_2 = f(x+\varepsilon)$. Posons $\eta = \min(y - y_1; y_2 - y)$. On a alors $[y-\eta; y+\eta] \subset [y_1; y_2]$, donc par croissance de g, $g([y-\eta; y+\eta]) \subset [x-\varepsilon; x+\varepsilon]$. Ceci prouve la continuité de g en y. □

Exemple : Considérons la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \ln x + 3x + e^x$. Cette fonction est continue et strictement croissante (c'est une somme de fonctions croissantes), donc bijective vers $f(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$. Sa fonction réciproque g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et vérifie $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

Application : On définit la suite (x_n) de la façon suivante : $\forall n \geqslant 3$, x_n est la plus petite solution de l'équation $e^x = nx$. Cette définition est correcte car la fonction $f_n : x \mapsto e^x - nx$ est continue dérivable sur $\mathbb{R}_+$, de dérivée $f_n'(x) = e^x - n$, donc admet un minimum global en $\ln n$, de valeur $e^{\ln n} - n \ln n = n(1 - \ln n) < 0$ pour $n \geqslant 3$. L'équation admet donc une solution $x_n \leqslant \ln n$ (et accessoirement une deuxième solution supérieure à $\ln n$).
Pour prouver par exemple que $\forall n \geqslant 3$, $u_n > 0$, on constate que $f_n(0) = e^0 - n \times 0 = 1 > 0$. Or, par définition, $f_n(u_n) = 0 < f_n(0)$. En utilisant le théorème de la bijection (et en fait la partie de la conclusion qui stipule que f_n^{-1}, qui est définie sur $[n(1 - \ln n); +\infty[$, à valeurs dans $[-\infty; \ln n[$, est de même monotonie que f_n), on peut en déduire que $u_n > 0$.
On peut prouver de même que la suite (u_n) est décroissante : $f_{n+1}(u_n) = e^{u_n} - (n+1)u_n = e^{u_n} - nu_n - u_n = -nu_n < 0$ (on a utilisé le fait que $f_n(u_n) = 0$, et que $u_n > 0$). On a donc $f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$, d'où $u_n > u_{n+1}$ (c'est encore la décroissance de la réciproque qui est utilisée).

Pour conclure ce chapitre, un petit tableau récapitulatif des méthodes utilisées pour étudier les suites **implicites** (du type de celle étudiée ci-dessus) et les suites **récurrentes**, que nous croiserons abondamment lors du chapitre consacré à la dérivation, et qu'il ne faut surtout pas confondre avec les précédentes.

	Suites implicites	Suites récurrentes
Définition	$f_n(u_n) = 0$ ou $f(u_n) = n$	$u_{n+1} = f(u_n)$
Majoration/ minoration	On calcule $f_n(m)$ ou $f_n(M)$ et on utilise la monotonie de f_n.	On cherche un intervalle stable par la fonction f.
Monotonie	Signe de $f_{n+1}(u_n)$	Signe de $f(x) - x$
Limite	On repart de $f_n(u_n) = 0$ et on essaye de passer à la limite.	On résout $f(l) = l$.

Chapitre 8

Séries

Introduction

Revenons pour introduire ce chapitre quelques siècles en arrière, au temps de Zénon d'Élée, philosophe grec du cinquième siècle avant J-C. Celui-ci est resté célèbre par sa position très sceptique vis-à-vis de certaines théories scientifiques développées à l'époque (notamment par Platon) concernant la divisibilité du temps et des mouvements, et les quelques paradoxes qu'il nous a laissés à méditer à ce sujet. Le plus connu d'entre eux est peut-être celui de la course entre Achille et la tortue. Pour fixer les idées, supposons qu'Achille courre à 10 mètres par seconde (à peu de choses près la vitesse d'un record du monde de 100 mètres), et la tortue (un peu génétiquement modifiée) à 1 mètre par seconde. Achille s'élance avec cent mètres de retard. Quand va-t-il rejoindre la tortue ? La réponse un peu surprenante de Zénon est : « jamais ». Voici son raisonnement : le temps qu'Achille parcoure ses cent mètres, la tortue en a franchi dix. Mais le temps qu'Achille parcourre ces dix nouveaux mètres, la tortue en a fait un de plus etc. On aura beau multiplier les étapes, Achille sera toujours derrière. Comment résoudre le paradoxe ? Regardons les choses d'un point de vue temporel : Achille met 10 secondes pour franchir les cent premiers mètres, puis une seconde supplémentaire pour les dix mètres suivants, $\dfrac{1}{10}$ seconde pour le mètre suivant etc. Au total, Achille met donc $10+1+\dfrac{1}{100}=\dots$ secondes avant de rejoindre la tortue. L'astuce est toute simple : cette somme, bien que composée d'un nombre infini de réels, est finie. Ainsi, même s'il faut un nombre infini d'étapes à Achille pour rejoindre la tortue, celles-ci vont toutes se dérouler dans un laps de temps fini.
C'est là l'idée d'une série (convergente) en mathématiques : une somme d'un nombre infini de termes qui donne pourtant un résultat fini.

8.1 Définitions

Définition 72. Soit (u_n) une suite réelle. La **série de terme général** u_n est la suite S_n définie par $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}u_k$. On la note $\sum u_n$.

Remarque 61. On peut construire des séries à partir de suites qui ne sont pas définies à partir de $n=0$. Dans ce cas, on changera naturellement la valeur de départ dans la somme : si (u_n) est définie pour $n\geqslant n_0$, on pose $\forall n\geqslant n_0$, $S_n=\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n}u_k$.

Exemple La série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ (pour $n\geqslant 1$) est définie par $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k^2}$. Attention à ne pas confondre u_n et S_n : les premiers termes de la suite (u_n) sont $u_1=1$; $u_2=\dfrac{1}{4}$; $u_3=\dfrac{1}{9}$. Ceux de la série (S_n) sont $S_1 = 1$; $S_2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$; $S_3 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{49}{36}$.

Définition 73. La série $\sum u_n$ est **convergente** si la suite (S_n) a une limite finie. Dans ce cas, la limite de la suite (S_n) est appelée **somme de la série**, et notée $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$. Dans le cas contraire, la série est dite divergente. Déterminer la nature d'une série revient à déterminer si elle est convergente.

Remarque 62. Attention, la convergence de la suite (u_n) et celle de la série $\sum u_n$ ne sont pas du tout la même chose ! La convergence d'une série revient à celle des sommes partielles de la suite (u_n).

Exemple : Reprenons l'exemple de l'introduction. Si on pose $u_n = \frac{1}{10^{n-1}}$, on se rend compte que le temps mis par Achille pour rejoindre la tortue peut s'exprimer comme la somme de la série $\sum u_n$. Vérifions sa convergence : on a $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{10^{n-1}}$. C'est une somme géométrique, que l'on sait calculer : $S_n = \frac{10 - \frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10}}$. Lorsque n tend vers $+\infty$, on a bien convergence de S_n vers $\frac{10}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{100}{9}$. On en déduit la convergence de la série, dont la somme vaut $\frac{100}{9}$ (ce qui représente le temps mis par Achille pour rejoindre la tortue).

Exemple : Il peut arriver qu'on puisse démontrer la convergence d'une série sans pour autant savoir calculer sa somme. Ainsi la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ (définie pour $n \geqslant 1$), qui a fait l'objet d'un exercice faisant intervenir des suites adjacentes il y a quelques semaines, est convergente, mais on ne dispose pas de moyen simple de déterminer sa somme, qui vaut en l'occurence $\frac{\pi^2}{6}$.

Exemple : Un petit dernier avec alternance de signes dans le terme général : $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ (pour $n \geqslant 1$). Plutôt que d'étudier directement S_n, on va séparer l'étude des termes d'indices pairs et impairs. La suite (S_{2n}) des termes d'indices pairs est croissante puisque $S_{2n+2} - S_{2n} = \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} = -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} > 0$. De même on montre facilement que la suite (S_{2n+1}) des termes impairs est décroissante. Comme de plus, leur différence $S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1}$ tend vers 0, les deux suites sont adjacentes, et convergent donc vers une limite commute, qui est également limite de la suite (S_n). On peut montrer par d'autres méthodes que $\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{\ln 2}{2}$.

Définition 74. Si la série $\sum u_n$ converge, le **reste d'indice** n de la série est le réel $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k - S_n$.

Proposition 60. La suite (R_n) converge vers 0.

Démonstration. En effet, comme les sommes partielles convergent vers la somme de la série, l'écart entre les deux tend vers 0. □

Définition 75. La série $\sum u_n$ est dite absolument convergente si la série $\sum |u_n|$ converge.

Proposition 61. Une série absolument convergente est convergente.

Démonstration. Pas pour l'instant ! Vous reverrez en deuxième année des critères de convergence permettant de démontrer cette propriété. □

Remarque 63. Attention, la réciproque n'est pas vraie. Par exemple la série de terme général $\frac{(-1)^{n+1}}{n}$, dont on a vu qu'elle était convergente, n'est pas absolument convergente (cf dernière partie du cours, divergence de la série harmonique). On dit que c'est une série semi-convergente.

8.2 Propriétés

Proposition 62. Si la série $\sum u_n$ est convergente, alors le terme général u_n converge vers 0.

Démonstration. En effet, si la série converge, S_n converge vers une limite finie l. Mais alors, S_{n+1} tend aussi vers l. Or, on a $u_n = S_{n+1} - S_n$, qui converge donc vers 0. □

Remarque 64. Attention, cette condition est nécessaire mais PAS suffisante. Encore une fois, la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge, et pourtant, la limite de $\frac{1}{n}$ vaut bien 0.

Exemple : Ce critère s'utilise surtout via sa contraposée : si le terme général ne tend pas vers 0, alors la série est divergente. Par exemple, la série de terme général $(-1)^n$ ne converge pas.

Proposition 63. Si deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes, alors leur somme $\sum(u_n + v_n)$ est convergente, et $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \sum_{k=0}^{+\infty} v_k = \sum_{k=0}^{+\infty}(u_k + v_k)$. De même, si λ est un réel quelconque, $\sum \lambda u_n$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda u_k = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

Démonstration. C'est une application directe des propriétés de la limite. Montrons par exemple la première partie. Notons S_n, T_n et U_n les sommes partielles respectives des séries de terme général u_n, v_n et $u_n + v_n$. On a manifestement $U_n = S_n + T_n$. Si les deux suites S_n et T_n convergent, ce sera donc aussi le cas de U_n et sa limite est bien la somme des limites de S_n et de T_n. □

Proposition 64. Si le terme général u_n de la série est positif, la série converge si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée.

Démonstration. En effet, la suite (S_n) est alors croissante. Elle est donc soit majorée et convergente, soit non majorée, auquel cas elle tend vers $+\infty$. □

Corollaire 3. Soient deux séries de termes généraux u_n et v_n vérifiant $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang. Si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge également. Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge aussi.

Démonstration. En effet, dans le premier cas on aura, en notant n_0 le rang à partir duquel les inégalités sont vérifiées, $\forall n \geqslant n_0$, $S_n = \sum_{k=n_0}^{k=n} u_k \leqslant \sum_{k=n_0}^{k=n} v_k \leqslant \sum_{k=n_0}^{+\infty} v_k$, donc les sommes partielles de terme général u_n sont majorées et la série correspondante converge. La deuxième propriété est similaire, en utilisant cette fois-ci que la série de terme général v_n est supérieure à une suite divergant vers $+\infty$, donc diverge elle aussi vers $+\infty$. □

8.3 Séries classiques

Définition 76. Soit $q \in \mathbb{R}$, la série de terme général q^n est appelée **série géométrique** de raison q. Les séries de terme général nq^{n-1} et $n(n-1)q^{n-2}$ sont appelées respectivement **séries géométriques dérivée et dérivée seconde** de raison q.

Remarque 65. On peut naturellement définir des séries géométriques dérivées k-ièmes pour des valeurs de k supérieures à 2.

Proposition 65. Les séries géométriques de raison q sont convergentes si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas, on a $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$; $\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$ et $\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$.

Démonstration. Le critère de convergence pour la série géométrique n'est pas nouveau, on a de plus $S_n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$, dont il suffit de prendre la limite quand n tend vers $+\infty$ pour obtenir la première somme. Pour les séries dérivées, commençons par constater qu'elles ne peuvent pas converger si $|q| \geqslant 1$ puisque le terme général ne tend pas vers 0. Dans le cas contraire, remarquons que, en posant $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$, les sommes partielles des trois séries géométriques de raison q ne sont autre que $f(q)$, $f'(q)$ et $f"(q)$. Or on peut mettre $f(q)$ sous la forme $\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$, donc $f'(q) = \dfrac{nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1}{(1-q)^2}$ et $f"(q) = \dfrac{-n(n-1)q^{n+1} + 2(n^2-1)q^n - n(n+1)q^{n-1} + 2}{(1-q)^3}$. Il ne reste plus qu'à faire tendre n vers $+\infty$, en utilisant le fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} nq^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2q^n = 0$ (par croissance comparée) pour obtenir la convergence des sommes partielles vers les valeurs indiquées. □

Remarque 66. On peut déduire du résultat précédent les valeurs d'autres sommes de séries. Par exemple, si $|q| < 1$, la série de terme général nq^n converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} kq^k = \dfrac{q}{(1-q)^2}$. En effet, on a $S_n = \sum_{k=0}^{n} kq^k = q \times \sum_{k=1}^{n} kq^{k-1}$, et on est ramené au cas de la série géométrique dérivée.

Exemple : $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{k}{2^k} = 2$.

Proposition 66. La série de terme général $\dfrac{x^n}{n!}$ converge pour tout réel x, et $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{x^k}{k!} = e^x$. Pour cette raison, cette série est souvent appelée **série exponentielle**.

Démonstration. On manque d'une définition suffisamment claire de l'exponentielle pour prouver ceci. □

Exemple : Quand on choisit $x = 1$, on obtient $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{k!} = e$.

Définition 77. La série de terme général $\dfrac{1}{n}$ est appelée **série harmonique**.

Proposition 67. La série harmonique est divergente. Plus précisément, la somme partielle de cette série est équivalente à $\ln n$.

Démonstration. Cf votre devoir maison n°4 (ou l'exercice 7 de la feuille d'exercices n°10 pour une simple preuve de la divergence). □

Remarque 67. Plus généralement, les séries de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$ sont appelées séries de Riemann. Elles convergent pour toutes les valeurs de $\alpha > 1$.

Chapitre 9

Systèmes linéaires

9.1 Vocabulaire

Définition 78. Une **équation linéaire** à n inconnues x_1, x_2, ..., x_n est une équation du type $a_1x_1 + \dots a_nx_n = b$, avec $(a_1, \dots, a_n, b) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Définition 79. Un **système** de p équations linéaires à n inconnues est constitué de p équations du type précédent. On le note habituellement de la façon suivante :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{p1}x_1 & + & a_{p2}x_2 & + & \dots & a_{pn}x_n & = & b_p \end{array}\right.$$

Autrement dit, on note a_{ij} le coefficient de l'inconnue x_j dans la i-ème équation.

Définition 80. **Résoudre** un système de p équations à n inconnues revient à déterminer tous les n-uplets de réels $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ vérifiant simultanément les p équations du système.

Remarque 68. Quand on donne les solutions d'un système, il est très important de donner le n-uplet dans le « bon ordre ». Par exemple, pour le système $\left\{\begin{array}{ccccc} 2x & - & 3y & = & 1 \\ x & + & 2y & = 4 \end{array}\right.$, le couple $(2; 1)$ est solution, mais pas le couple $(1; 2)$. On a en fait $\mathcal{S} = \{(2; 1)\}$ (les parenthèses sont indispensables, il y a une seule solution qui est un couple de réels).

Définition 81. Un système est **incompatible** s'il n'admet aucune solution. Un système est appelé **système de Cramer** s'il admet exactement une solution.

Exemples : Le système suivant est un système incompatible :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & 3z & = & 7 \\ 2x & - & 5y & + & z & = & -4 \\ 3x & - & 3y & - & 2z & = & 1 \end{array}\right.$$

En effet, si l'on effectue la somme des deux premières lignes et que l'on soustrait la troisième, on obtient $0 = 2$, ce qui est impossible.

Le système vu lors de la remarque précédente est un système de Cramer. Il existe également des systèmes admettant une infinité de solution, par exemple :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 2x & - & y & = & 2 \\ -4x & + & 2y & = & -4 \end{array}\right.$$

En effet, les deux équations sont proportionnelles, donc équivalentes. On peut simplement exprimer y en fonction de x (ou le contraire) : $y = 2x - 1$, donc $\mathcal{S} = \{(x; 2x - 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Définition 82. Un système linéaire est **homogène** si tous les coefficients apparaissant dans son second membre sont nuls. Le système homogène associé à un système d'équation linéaires est le système obtenu en remplaçant chaque second membre par 0.

Théorème 10. Un système linéaire est de Cramer si et seulement si son système homogène associé est de Cramer.

Remarque 69. Autrement dit, le fait qu'un système ait une solution unique ou non ne dépend que des coefficients de chaque équation, mais pas de son second membre. Ainsi, si l'on reprend le dernier exemple étudié, un système de la forme

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 2x & - & y & = & a \\ -4x & + & 2y & = & b \end{array}\right.$$

aura une infinité de solutions si $b = -2a$, et aucune si $b \neq -2a$, mais ne sera jamais de Cramer.

Démonstration. On attendra de revoir les systèmes linéaires sous l'angle matriciel pour prouver ce résultat. □

Définition 83. Un système linéaire est **carré** s'il possède autant d'équations que d'inconnues, c'est-à-dire si $p = n$.

Définition 84. Un système linéaire est **triangulaire** si $\forall j < i$, $a_{ij} = 0$ (en reprenant les notations de la définition des systèmes linéaires).

Remarque 70. Autrement dit, le premier coefficient de la deuxième ligne, les deux premiers de la troisième ligne, et ainsi de suite, sont nuls. Le système ressemble donc à ceci :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & \ddots & & & & & & \vdots \\ & & & & a_{pp}x_p & \dots & + & a_{pn}x_n & = & b_p \end{array}\right.$$

Remarque 71. La forme du système triangulaire dépend en fait des valeurs de p et n, mais dans tous les cas, un système triangulaire est un système facile à résoudre. Examinons un exemple dans le cas où $p = n$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 3z & = & -5 \\ & & 5y & + & z & = & 8 \\ & & & & -2z & = & 4 \end{array}\right.$$

Il suffit de remonter le système pour obtenir les valeurs des inconnues l'une après l'autre : $z = -2$, donc $5y = 8 - z = 10$, d'où $y = 2$, puis $2x = -5 + y - 3z = -6$, donc $x = -3$. On obtient une solution unique $\mathcal{S} = \{(-3; 5; -2)\}$. Notons que dans le cas d'un système triangulaire carré, on aura la plupart du temps un système de Cramer.

Si $p > n$, c'est encore plus simple puisque les dernières équations ont un membre de gauche nul. Soit le membre de droite y est également nul et on peut les oublier, soit ce n'est pas le cas et le système est incompatible, par exemple :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 3z & = & -5 \\ & & 5y & + & z & = & 8 \\ & & & & -2z & = & 4 \\ & & & & 0 & = & 1 \end{array}\right.$$

Enfin, dans le cas où $p < n$, le système triangulaire aura nécessairement une infinité de solutions, qu'on va pourvoir exprimer en fonction des dernières inconnues en remontant le système comme dans les autres cas :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & -2 \\ & & y & + & 2z & = & 4 \end{array}\right.$$

À l'aide de la deuxième équation, on obtient $y = 4 - 2z$, puis $x = -2 + 2y - z = 6 - 5z$, soit $\mathcal{S} = \{(6 - 5z; 4 - 2z; z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

9.2 Méthode de résolution

Définition 85. Deux systèmes linéaires sont **équivalents** s'ils ont les mêmes solutions.

Définition 86. Les **opérations élémentaires** sur les lignes d'un système linéaire sont de trois types :

- échange des lignes i et j, noté $L_i \leftrightarrow L_j$
- multiplication d'une ligne par un réel non nul, noté $L_i \leftarrow aL_i$ $(a \neq 0)$
- combinaison des lignes i et j, noté $L_i \leftarrow L_i + bL_j$ $(b \in \mathbb{R})$

Remarque 72. On combine souvent les deux derniers types d'opérations élémentaires pour faire des opérations du type $L_i \leftarrow aL_i + bL_j$, avec $a \neq 0$. On peut également ajouter à ces opérations les permutations de colonnes, qui peuvent simplifier la résolution d'un système.

Proposition 68. Les opérations élémentaires sur les lignes transforment un système linéaire en un système équivalent.

Théorème 11. Algorithme du pivot de Gauss

On peut transformer un système linéaire linéaire quelconque en système triangulaire en procédant de la façon suivante :

- Si besoin est, on échange la ligne L_1 avec une ligne L_i sur laquelle le coefficient a_{i1} est non nul.
- À l'aide de combinaisons du type $L_i \leftarrow aL_i + bL_1$, on annule tous les coefficients a_{i1}, pour $i \geqslant 2$ (on peut le faire car a_{11} est désormais non nul).
- On reprend l'algorithme sur le sous-système formé des $p - 1$ dernières lignes (et ne contenant donc plus que $n - 1$ inconnues).

Exemple : nous allons résoudre un système à 4 équations et 4 inconnues en suivant scrupuleusement l'algorithme décrit :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & + & y & - & 3z & + & 2t & = & 7 \\ x & - & 2y & + & z & - & t & = & -9 \\ 2x & - & 3y & - & 2z & + & t & = & -4 \\ -x & & & + & 5z & - & 3t & = & -11 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{c} \\ L_2 \leftarrow L_1 - 3L_2 \\ L_3 \leftarrow 2L_1 - 3L_3 \\ L_4 \leftarrow L_1 + 3L_4 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & + & y & - & 3z & + & 2t & = & 7 \\ & & 7y & - & 6z & + & 5t & = & 34 \\ & & 11y & & & + & t & = & 26 \\ & & y & + & 12z & - & 7t & = & -26 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{c} \\ \\ L_3 \leftarrow 11L_2 - 7L_3 \\ L_4 \leftarrow L_2 - 7L_4 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & + & y & - & 3z & + & 2t & = & 7 \\ & & 7y & - & 6z & + & 5t & = & 34 \\ & & & & -66z & + & 48t & = & 192 \\ & & & & -90z & + & 54t & = & 216 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{c} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow 90L_3 - 66L_4 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & + & y & - & 3z & + & 2t & = & 7 \\ & & 7y & - & 6z & + & 5t & = & 34 \\ & & & & -66z & + & 48t & = & 192 \\ & & & & & & 756t & = & 3024 \end{array}\right.$$

En remontant le système, on obtient $t = 4$, puis $-66z = 192-48t = 0$, donc $z = 0$; $7y = 34+6z-5t = 14$, donc $y = 2$, et enfin $3x = 7 - y + 3z - 2t = -3$, donc $x = -1$. Le système a donc une unique solution : $\mathcal{S} = \{(-1; 2; 0; 4)\}$.
On ne peut qu'être un peu frustré d'avoir fait des calculs si compliqués pour une solution aussi simple. On peut en fait les réduire grandement en utilisant le pivot de façon plus subtile, c'est-à-dire en choisissant un bon pivot à chaque étape. Par exemple :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & + & y & - & 3z & + & 2t & = & 7 \\ x & - & 2y & + & z & - & t & = & -9 \\ 2x & - & 3y & - & 2z & + & t & = & -4 \\ -x & & & + & 5z & - & 3t & = & -11 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 2y & + & z & - & t & = & -9 \\ 3x & + & y & - & 3z & + & 2t & = & 7 \\ 2x & - & 3y & - & 2z & + & t & = & -4 \\ -x & & & + & 5z & - & 3t & = & -11 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow 3L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow 2L_1 - L_3 \\ L_4 \leftarrow L_1 + L_4 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 2y & + & z & - & t & = & -9 \\ & & -7y & + & 6z & - & 5t & = & -34 \\ & & -y & + & 4z & - & 3t & = & -14 \\ & & -2y & + & 6z & - & 4t & = & -20 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftrightarrow L_3 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 2y & + & z & - & t & = & -9 \\ & & -y & + & 4z & - & 3t & = & -14 \\ & & -7y & + & 6z & - & 5t & = & -34 \\ & & -2y & + & 6z & - & 4t & = & -20 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow 7L_2 - L_3 \\ L_4 \leftarrow 2L_2 - L_4 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 2y & + & z & - & t & = & -9 \\ & & -y & + & 4z & - & 3t & = & -14 \\ & & & & 22z & - & 16t & = & -64 \\ & & & & 2z & - & 2t & = & -8 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_3 - 11L_4 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 2y & + & z & - & t & = & -9 \\ & & -y & + & 4z & - & 3t & = & -14 \\ & & & & 22z & - & 16t & = & -64 \\ & & & & & & 6t & = & 24 \end{array}\right.$$

On retrouve bien évidemment la même solution que tout à l'heure.

Exemple : pour conclure ce court chapitre, un exemple de résolution de système faisant intervenir un paramètre $m \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{ccccc} (4-m)x & + & 3y & = & 0 \\ 2x & + & (1+m)y & = & 0 \end{array}\right.$$

Pour le résoudre, on effectue la combinaison $L_1 \leftarrow -2L_1 + (4-m)L_2$ et on obtient :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} & & ((1+m)(4-m)-6)y = 0 & = & 0 \\ 2x & + & (1+m)y & = & 0 \end{array}\right.$$

Dans le cas général, c'est-à-dire si $(1+m)(4-m) - 6 \neq 0$, le système a une solution unique qui est le couple $(0; 0)$. Les valeurs de m posant problème sont celle pour lesquelles $4 + 4m - m - m^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 = 0$, soit $(m-1)(m-2) = 0$. En effet, si $m = 1$, le système se réduit à :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 3x & + & 3y & = & 0 \\ 2x & + & 3y & = & 0 \end{array}\right.$$

et on a $\mathcal{S} = \{(x; -x) \mid x \in \mathbb{R}\}$; et si $m = 2$, on a :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 2x & + & 3y & = & 0 \\ 2x & + & 3y & = & 0 \end{array}\right.$$

donc $\mathcal{S} = \{(x; -\frac{2}{3}x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Chapitre 10

Fonctions à deux variables

10.1 Aspect graphique

Définition 87. Une **fonction de deux variables** est une application $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, où $\mathcal{D}$ est une sous-ensemble du plan $\mathbb{R}^2$ appelé domaine de définition de la fonction f.

Exemples : La fonction $f : (x, y) \mapsto x^3 + 2x^2y + xy^3 - 4y^2$ est une fonction de deux variables définie sur $\mathbb{R}^2$ tout entier. La fonction $g : (x, y) \mapsto \ln(x + y - 1)$ est une fonction définie sur l'ensemble des couples (x, y) vérifiant $x + y - 1 > 0$, qui se trouve être le demi-plan supérieur ouvert délimité par la droite d'équation $y = 1 - x$.

Proposition 69. Tout sous-ensemble de la forme $\{(x, y) \mid ax + by + c = 0\}$, où a, b et c sont trois réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$ est une droite.

Démonstration. Si $b \neq 0$, on peut mettre l'équation sous la forme $y = \dfrac{-c - ax}{b}$, qui est bien une équation de droite. Et si $b = 0$, on a par hypothèse $a \neq 0$, donc on obtient $x = \dfrac{-c}{a}$, qui est également une droite, en l'occurence parallèle à l'axe des ordonnées. □

Exemple : La fonction $h : (x, y) \mapsto \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ est définie à l'intérieur du cercle de centre O et de rayon 2.

Proposition 70. Le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par l'équation $x^2 + y^2 = R$, avec $R \geqslant 0$, est le cercle de centre 0 et de rayon $\sqrt{R}$ (si $R < 0$, l'ensemble est vide).

Démonstration. Dans le plan $\mathbb{R}^2$ (muni d'un repère orthonormal, mais ce sera toujours le cas pour nous), le point M de coordonnées (x, y) est situé à une distance $\sqrt{x^2 + y^2}$ de l'origine O du repère (c'est une application du théorème de Pythagore), donc $x^2 + y^2 = R \Leftrightarrow OM^2 = r^2 \Leftrightarrow OM = r$. l'ensemble des points à distance r de O est bien le cercle de centre O et de rayon r. □

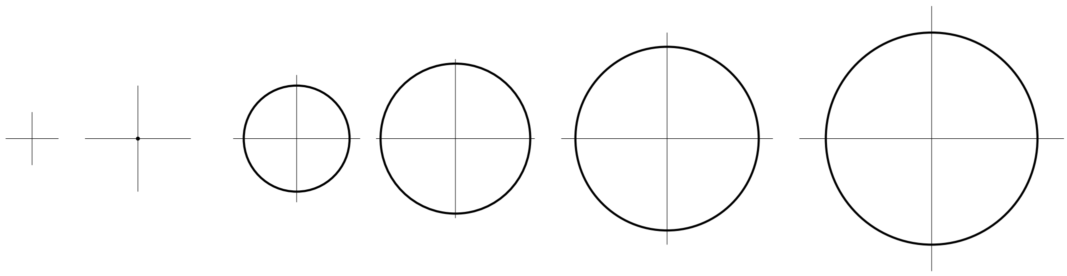
Définition 88. La **représentation graphique** d'une fonction de deux variables dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ vérifiant $z = f(x, y)$.

Remarque 73. Une fonction de deux variables est donc représentée non pas par une courbe, mais par une surface dans l'espace. Il est très difficile en général de visualiser ce genre de représentations graphiques, c'est pourquoi on en est souvent réduit à étudier les coupes par des plans que représentent les lignes de niveau et les applications partielles.

Définition 89. Soit k un réel et f une fonction de deux variables, la **ligne de niveau** k de la fonction f est l'ensemble des couples (x, y) vérifiant $f(x, y) = k$.

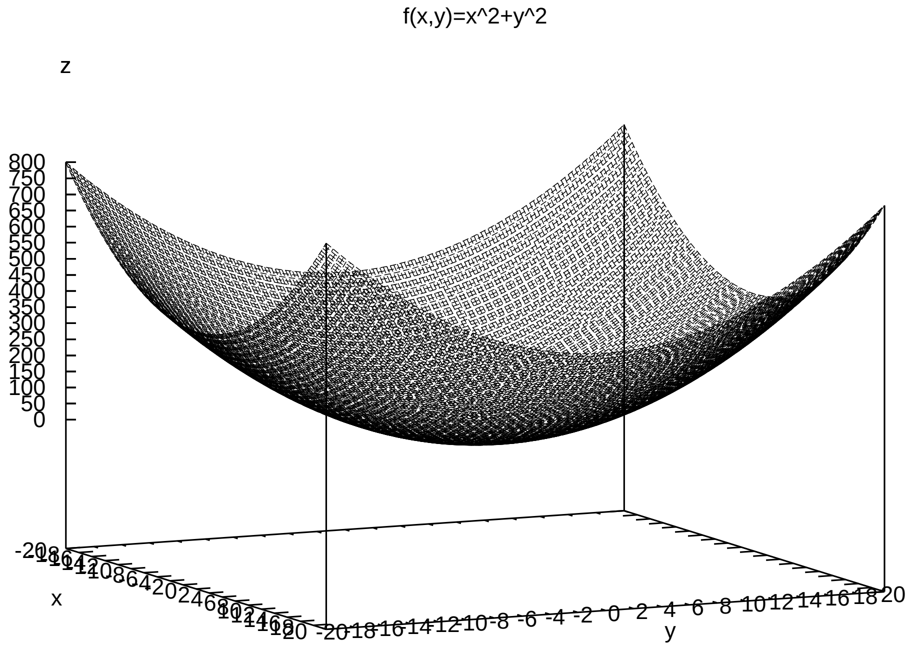
Remarque 74. Il s'agit donc de la coupe de la surface représentative de f par le plan « horizontal » d'équation $z = k$. La plupart du temps, une ligne de niveau n'est pas la courbe représentative d'une fonction à une variable.

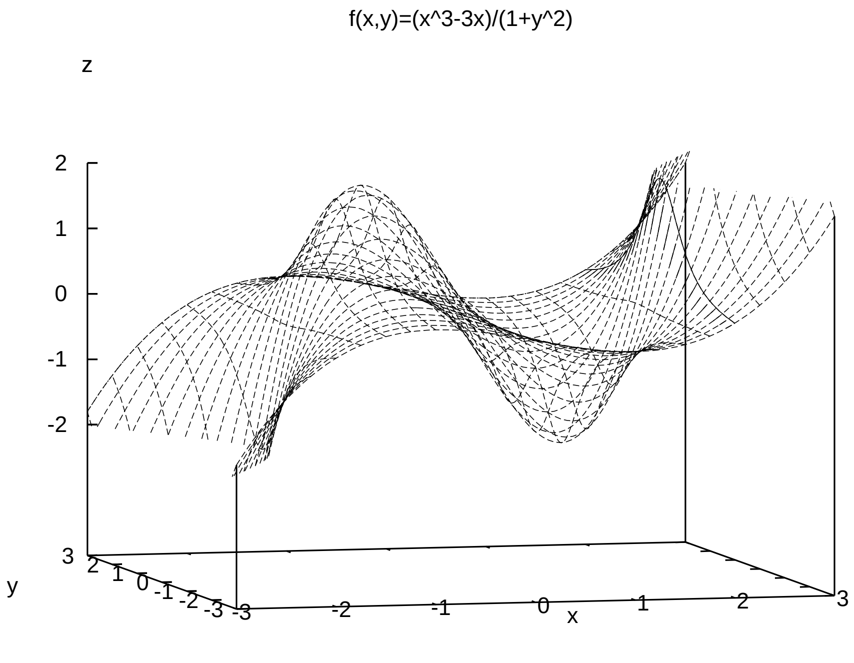
Exemple : Considérons la fonction $f(x,y) = x^2 + y^2$, sa ligne de niveau k est définie par l'équation $x^2 + y^2 = k$. il s'agit donc du cercle de centre O et de rayon $\sqrt{k}$ quand k est positif, la ligne de niveau est vide sinon. Voici une représentation des lignes de niveau pour k entier compris entre -1 et 4. il ne reste plus qu'à les relier mentalement pour imaginer l'allure de la surface représentative de f.



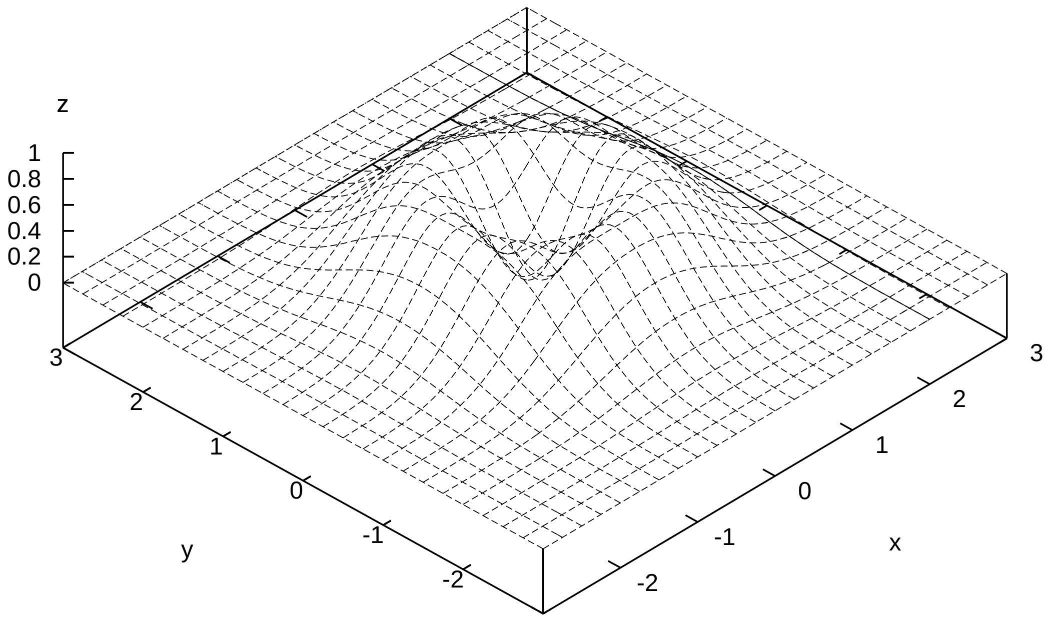
10.2 Exemple de surfaces

Juste quelques surfaces tracées à l'ordinateur pour avoir une idée de ce à quoi ça peut ressembler.

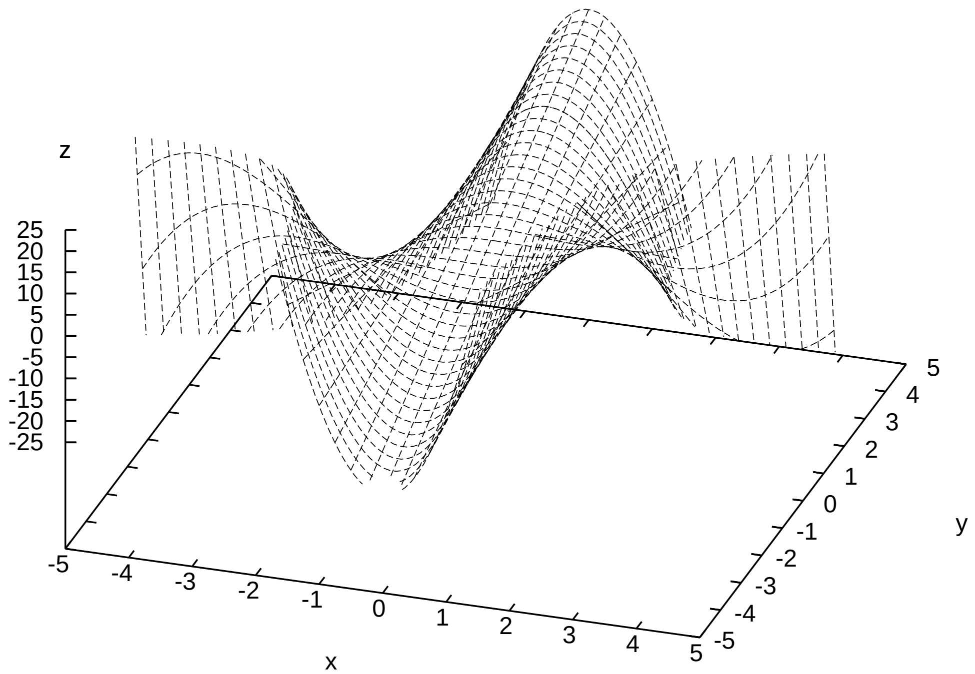




f(x,y)=2(x^2+y^2)e^(-x^2-y^2)



f(x,y)=x^3-4x^2y+5y-2



10.3 Dérivées partielles

On ne peut pas étudier les variations d'une fonction de deux variables comme on le fait pour une fonction à une variable, puisque la simple notion de fonction croissante ou décroissante n'a pas d'équivalent quand on passe à deux variables. Il est cependant intéressant de calculer un analogue de la dérivée dans ce cadre, qui permet notamment de trouver les minima ou maxima de la fonction, comme c'est le cas pour une fonction à une variable.

Définition 90. Soit $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ à deux variables, les **applications partielles** associées sont les deux fonctions à une variable $f_x : x \mapsto f(x, y)$ et $f_y : y \mapsto f(x, y)$.

Remarque 75. Les applications partielles sont donc données par la même équation que la fonction f elle-même, seul le statut de x et de y change : au lieu d'avoir deux variables, l'une d'elles est désormais fixée, même si on ne connait pas sa valeur. Pour rendre les choses plus concrètes, on peut assigner une valeur à la varible fixée. Par exemple, si $f(x, y) = x^2 - 3xy + y^3$, on dira que l'application partielle obtenue en fixant $y = 1$ est la fonction d'une variable $x \mapsto x^2 - 3x + 1$ (on a posé $y = 1$ dans l'équation de f), ou que l'application partielle obtenue en fixant $x = 2$ est la fonction $y \mapsto 4 - 6y + y^3$. Tracer les représentations graphiques de ces applications partielles revient à tracer la coupe de la surface représentative de f par les plans d'équation respective $y = 1$ et $x = 2$ (plans « verticaux » si on oriente le repère de façon habituelle).

Définition 91. Les **dérivées partielles** d'une fonction à deux variables sont les dérivées de ses application partielles. On note $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ la dérivée de f_x et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ celle de f_y.

Remarque 76. Pour calculer ces dérivées partielles, on dérive en considérant l'une des deux variables comme une constante (on dit qu'on dérive la fonction f par rapport à x ou y respectivement), mais chacune des deux dérivées partielles reste une fonction à deux variables.

Remarque 77. On se contentera de calculer ces dérivées partielles sans se préocupper de justifier leur existence, ce qui est un problème plus complexe que dans le cas d'une fonction à une variable.

Définition 92. Les quatres dérivées partielles des fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ (deux pour chaque fonction) sont appelées **dérivées partielles secondes** de la fonction f. On note $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ les dérivées partielles par rapport à x et y de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ les dérivées partielles de $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Exemples : Reprenons l'exemple de la fonction $f : (x, y) \mapsto x^3 + 2x^2y + xy^3 - 4y^2$. On a donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + 4xy + y^3$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^2 + 3xy^2 - 8y$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x + 4y$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 4x + 3y^2$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 4x + 3y^2$ et enfin $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6xy - 8$.

De même, la fonction $g : (x, y) \mapsto \ln(x + y - 1)$ a pour dérivées partielles $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \dfrac{1}{x + y - 1}$; $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \dfrac{1}{x + y - 1}$; $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) = \dfrac{1}{(x + y - 1)^2}$, et les trois autres dérivées secondes sont les mêmes que la première.

Enfin, la fonction $h : (x, y) \mapsto \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ vérifie $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x, y) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2 - y^2}} = -\dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$; $\dfrac{\partial h}{\partial y}(x, y) = -\dfrac{y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$; $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, y) = \dfrac{-\sqrt{4 - x^2 - y^2} - x \times \frac{x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}}{4 - x^2 + y^2} = \dfrac{y^2 - 4}{(4 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}}$;

$\dfrac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{-y \times \frac{-2x}{-2}}{(4-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{-xy}{(4-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}$; $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{-xy}{(4-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}$ et enfin $\dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \dfrac{x^2-4}{(4-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Définition 93. Un **point critique** pour une fonction f à deux variables est un couple (x,y) vérifiant $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$.

Exemple : Les points critiques de la fonction f définie plus haut sont les solutions du système suivant (qu'on est bien incapable de résoudre) :

$$\begin{cases} 3x^2 + 4xy + y^3 & = & 0 \\ 2x^2 + 3xy^2 - 8y & = & 0 \end{cases}$$

Théorème 12. Si une fonction f admet un minimum ou un maximum local en un point (x,y), alors ce point est un point critique.

Remarque 78. Attention, comme dans le cas des fonctions à une variable, la réciproque n'est pas toujours vraie.

Définition 94. La **différentielle** au point (x,y) d'une application à deux variables f est l'expression $df_{x,y} = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy$.

Les dx, dy et df de l'expression ci-dessous représentent de « petits accroissements » de la fonction et de chacune des variables respectivement. En fait, une bonne définition mathématique de ces objets est de les voir comme des applications de $\mathbb{R}^2$ dans l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Mais comme vous ne savez pas encore ce qu'est une application linéaire, vous vous contenterez du blabla ci-dessous pour tenter de comprendre ce que ça recouvre.

Interprétation géométrique : Comme dans le cas d'une fonction à une variable, on peut tenter d'interpréter géométriquement les notions définies plus haut. Vous savez que, pour une fonction f à une variable, le nombre dérivé $f'(x)$ représente le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction f en son point d'abscisse x. Autrement dit, la tangente étant la droite la plus proche de la courbe, on peut écrire au voisinage de x l'approximation affine suivante : $f(t) \simeq f'(x)(t-x) + f(x)$ (équation de la tangente), ou encore en changeant les notations $f(x+h) \simeq hf'(x) + f(x)$, approximation valable pour des « petites » valeurs de h. En utilisant la notation différentielle, on écrirait ceci ainsi : $df_x(h) = hdx$, c'est-à-dire que l'accroissement de la fonction f (qui correspond à $f(x+h) - f(x)$) est proportionnel à l'accroissement de la variable (qui correspond à h), avec pour coefficient de proportionnalité $f'(x)$.

Dans le cas d'une fonction à deux variables, les dérivées partielles en un point (x,y) représentent également des coefficients directeurs de tangents, en l'occurence des deux tangentes à la surface représentative de f incluses dans les plans verticaus contenant les axes (Ox) et (Oy). La surface admet bien d'autres tangentes (une infinité), mais la connaissance de deux d'entre elle suffit à déterminer le plan tangent à la surface représentative de f, et donc à donner une approximation de $f(x+h; y+k)$ pour des petites valeurs de h et k. C'est ce que fait la différentielle à l'aide de la formule suivante : $f(x+h; y+k) \simeq \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)h + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)k$. Autrement dit (et pour parler en termes plus « économiques »), la différentielle exprime l'accroissement marginal de la fonction f au point (x,y) en fonction des accroissements marginaux de chacune des variables.

Exemple : Un type de fonction à deux variables souvent utilisé en économie est la fonction de Cobb-Douglas, qui modélise la production P en fonction du capital K et du travail L via la formule

$P(K,L) = cK^\alpha L^\beta$. Pour plus de simpliciter, on prend souvent $c = 1$, et $\beta = 1 - \alpha$ (avec $\alpha \in [0;1]$), donc $P(K,L) = K^\alpha L^{1-\alpha}$. Ceci a également pour avantage de rendre la fonction homogène, c'est-à-dire que $P(aK, aL) = aP(K,L)$ (autrement dit, si vous multipliez le capital et le travail simultanément par un même facteur, la production subira la même augmentation).

Les dérivées partielles de cette fonction sont appelés en économie rendements marginaux. En utilisant la notation différentielle, ces rendements marginaux donnent les coefficients d'augmentation marginale de la production quand on augmente marginalement le travail ou le capital. Ainsi, si $\dfrac{\partial P}{\partial K}(K_0, L_0) = 3$, cela signifie qu'en augmentant de 1% le capital en partant d'une situation où le capital était de K_0 et le travail de L_0, la production augmentera d'environ 3%. Avec l'équation donnée plus haut, on constate que $\dfrac{\partial P}{\partial K}(K,L) = \alpha K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} = \alpha \left(\dfrac{L}{K}\right)^{1-\alpha}$, et $\dfrac{\partial P}{\partial L}(K,L) = (1-\alpha)K^\alpha L^{-\alpha} = (1-\alpha)\left(\dfrac{K}{L}\right)^\alpha$. Si on calcule désormais les dérivées secondes, on obtient notamment $\dfrac{\partial^2 P}{\partial K^2}(K,L) = \alpha(\alpha-1)K^{\alpha-2}L^{1-\alpha}$; $\dfrac{\partial^2 P}{\partial L^2}(K,L) = -\alpha(1-\alpha)K^\alpha L^{-\alpha-1}$. Ces deux expressions sont négatives, c'est un résultat qu'on connait en économie sous le nom de principe des rendements décroissants : plus la production augmente, plus les rendements marginaux sont faibles.

Dernière notion utile en économie et abordée un peu plus haut d'un point de vue mathématique : les lignes de niveau de la fonction P sont appelés isoquants de la fonction de production. Ils représentent des lignes sur lesquelles la production ne varie pas, et on peut donc affirmer que, sur un isoquant, la différentielle dP s'annule. Autrement dit, on a alors $\dfrac{\partial P}{\partial K}(K,L) + \dfrac{\partial P}{\partial L}(K,L) = 0$. Les rapports entre les deux dérivées partielles en un point d'un isoquant sont appelés coefficients d'elasticité : ils représentent la facilité à échanger du capital contre du travail (ou vice-versa) pour garder une production constante. Ainsi, si on a $\dfrac{\partial P}{\partial L}(K_0, L_0) = -3\dfrac{\partial P}{\partial K}(K_0, L_0)$, cela signifie que, si on diminue le capital de 1% en partant de la situation (K_0, L_0), il faudra augmenter le travail de 3% pour garder le même niveau de production.

Chapitre 11

Dérivation

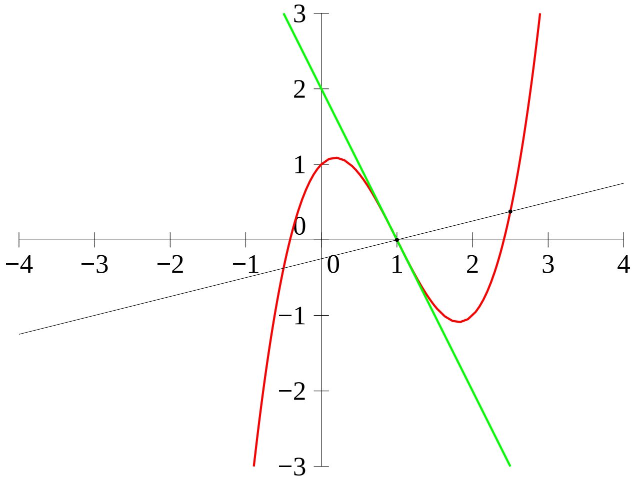
11.1 Définitions et formulaire

11.1.1 Aspect graphique

L'idée cachée derrière le calcul de dérivées, que vous utilisez déjà depuis plusieurs années pour étudier les variations de fonctions, est en gros le suivant : les seules fonctions dont le sens de variation est réellement facile à déterminer sont les fonctions affines, pour lesquelles il est simplement donné par le signe du coefficient directeur de la droite représentant la fonction affine. Pour des fonctions plus complexes, on va donc chercher à se ramener au cas d'une droite en cherchant, pour chaque point de la courbe, la droite « la plus proche » de la courbe autour de ce point. C'est ainsi qu'est née la notion de tangente, à laquelle celle de dérivée est intimement liée. Plus précisément :

Définition 95. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x \in I$, le **taux d'accroissement de f en x** est la fonction définie par $\tau_x(h) = \dfrac{f(x+h) - f(a)}{x}$.

Remarque 79. Le taux d'accroissement n'est pas défini en 0. Pour $h \neq 0$, $\tau_x(h)$ représente le coefficient directeur de la droite passant par les points d'abscisse x et $x + h$ de la courbe représentative de f (droite noire dans le graphique ci-dessous, où $a = 1$ et $h = 1.5$).



Définition 96. Une fonction f est **dérivable** en x si son taux d'accroissement en x admet une limite quand h tend vers 0. On appelle alors nombre dérivée de f en x cette limite et on la note $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Remarque 80. En reprenant l'interprétation géométrique précédente, la droite tracée se rapproche quand h tend vers 0 de la tangente à la courbe représentative de f au point de la courbe d'abscisse a. Le nombre dérivé de f en x est donc le coefficient directeur de cette tangente, tracée en vert sur le graphique.

Remarque 81. Pour des raisons pratiques, on aura parfois besoin pour certains calculs d'une définition légèrement différente du nombre dérivé : $f'(x) = \lim\limits_{y \to x} \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$, qui est équivalente à la précédénte (en posant $h = y - x$, on se ramène en effet à notre première définition).

Exemples : Considérons $f(x) = x^2$ et calculons à l'aide de cette définition la dérivée (ou plutôt pour l'instant le nombre dérivé au point d'abscisse x) de f. Le taux d'accroissement de la fonction carré en x vaut $\tau_x(h) = \dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \dfrac{x^2 + 2hx + h^2 - 1}{h} = 2x + h$. Ce taux d'accroissement a une limite égale à $2x$ quand h tend vers 0, donc f est dérivable en x et $f'(x) = 2x$ (ce qui correspond bien à la formule que vous connaissez).

Considérons à présent $g(x) = \sqrt{x}$, le taux d'accroissement de g en x vaut $\tau_x(h) = \dfrac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \dfrac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \dfrac{x + h - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \dfrac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$. Si $x \neq 0$, ce taux d'accroissement a pour limite $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, ce qui correspond une nouvelle fois à une formule bien connue. Par contre, $\lim\limits_{h \to 0} \tau_0(h) = +\infty$, ce qui prouve que la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0. On a tout de même une interprétation graphique intéressante dans ce cas : la courbe représentative de la fonction racine carrée admet en son point d'abscisse 0 une tangente verticale.

Proposition 71. Soit f une fonction dérivable en a, alors l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en a est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Démonstration. La tangente est une droite de coefficient directeur $f'(a)$ donc son équation peut se mettre sous la forme $y = f'(a)x + b$, avec $b \in \mathbb{R}$. Pour déterminer b, il suffit de constater que le point $(a; f(a))$ appartient à la tangente (qui coupe $\mathcal{C}_f$ en ce point), donc on doit avoir $f(a) = af'(a) + b$, soit $b = f(a) - af'(a)$. L'équation est donc $y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a = f'(a)(x - a) + f(a)$. $\square$

Proposition 72. Si une fonction f est dérivable en x, alors f est continue en x.

Remarque 82. La réciproque est fausse ! Par exemple la fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ mais pas dérivable en 0 (cf plus loin).

Proposition 73. Si f est dérivable en x, on sait que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(a)$. Autrement dit, $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \underset{0}{=} f'(x) + o(1)$. En multipliant tout par h, on obtient $f(x+h) - f(x) = hf'(x) + o(h)$. Comme $\lim\limits_{h \to 0} f(x) + hf'(x) + o(h) = f(x)$, on a donc $\lim\limits_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$, ce qui prouve que f est continue en a.

Définition 97. On appelle **développement limité à l'ordre** 1 de f en a l'égalité $f(x+h) \underset{0}{=} f(x) + hf'(x) + o(h)$.

Remarque 83. Cette égalité signifie simplement que, lorsque h est proche de 0, $f(x+h)$ peut être approché par $f(x) + hf'(a)$, qui n'est autre que la valeur prise par la tangente au point d'abscisse $x + h$. On parle d'ordre 1 car on approche f par une fonction qui est un polynome de degré 1. On peut généraliser cette notion en approchant la fonction f par un polynome de degré 2, 3 ou plus (mais il faut alors que f soit deux, trois fois dérivable, etc). On parle alors de développement limité à l'ordre 2, 3, etc., notion que vous étudierez plus intensivement l'an prochain.

Définition 98. La fonction f est **dérivable à gauche** en x si son taux d'accroissement admet une limite quand h tend vers 0^-. On note alors $f'_g(x) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. De même, f est **dérivable à droite** en x si $\tau_x(h)$ admet une limite en 0^+ et on note $f'_d(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Remarque 84. La fonction f est dérivable en x si et seulement si elle y est dérivable à gauche et à droite et que $f'_d(x) = f'_g(x)$.

Définition 99. Dans le cas où $f'_g(x) \neq f'_d(x)$ (ou si une seule des deux limites existe) on dit que la courbe de f admet une (ou deux) **demi-tangente à droite ou à gauche**. Si $\tau_x(h)$ admet une limite infinie en 0^+ ou en 0^-, on dit que la courbe de f admet une tangente verticale au point d'abscisse x.

Exemples : Considérons $f(x) = |x|$ et $x = 0$. On a donc $\tau_0(h) = \frac{|h|}{h}$. Si $h > 0$, $\tau_0(h) = \frac{h}{h} = 1$, donc $f'd(0) = 1$; mais si $h < 0$, $\tau_0(h) = \frac{-h}{h} = -1$, donc $f'g(h) = -1$. La fonction valeur absolue n'est donc pas dérivable en 0, mais y admet à gauche une demi-tangente d'équation $y = -x$, et à droite une demi-tangente d'équation $y = x$ (qui sont d'ailleurs confondues avec la courbe).

Définition 100. Une fonction f est **dérivable sur un intervalle** I si elle est dérivable en tout point de I. On appelle alors **fonction dérivée** de f la fonction $f : x \mapsto f'(x)$.

11.1.2 Opérations

Proposition 74. Soient f et g deux fonctions dérivables en x. Alors $f + g$ est dérivable en x et $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Démonstration. En effet, le taux d'accroissement de $f + g$ en x vaut $\tau_x(h) = \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$. Autrement dit, c'est la somme des taux d'accroissements de f et de g en x. Sa limite existe donc et est égale à la somme des limites de ces taux d'accroissement, c'est-à-dire que $\lim_{h \to 0} \tau_x(h) = f'(x) + g'(x)$, d'où la formule. □

Proposition 75. Soient f et g deux fonction dérivables en x, alors fg est dérivable en x et $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

Démonstration. Calculons le taux d'accroissement de la fonction fg en x :
$\tau_x(h) = \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = g(x+h)\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h}$. Le premier terme a pour limite $g(x)f'(x)$ quand h tend vers 0 (la fonction g étant dérivable donc continue, $g(x+h)$ tend vers $g(x)$ et le reste est le taux d'accroissement de f en x), et le second a pour limite $f(x)g'(x)$ puisqu'on reconnait le taux d'accroissement de g. On obtient donc bien la formule attendue. □

Exemple : La fonction $x \mapsto x \ln x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et a pour dérivée $\ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$. Ce résultat nous sera surtout utile dans l'autre sens : on en déduit qu'une primitive de la fonction ln est la fonction $x \mapsto x \ln x - x$.

Proposition 76. Soit g une fonction dérivable en x, et ne s'annulant pas en x, alors $\frac{1}{g}$ est dérivable en x et $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$. Si f est une autre fonction dérivable en x, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en x et $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$.

Démonstration. Le taux d'accroissement de $\frac{1}{g}$ en x vaut $\tau_a(x) = \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h}$. Il n'est défini que si $g(x+h) \neq 0$, mais on admettra que, si $g(x) \neq 0$ (c'est une des hypothèses de la proposition) et g est continue, alors g ne s'annule pas au voisinage de x. On peut alors réduire au même dénominateur : $\tau_x(h) = \frac{1}{g(x+h)g(x)\frac{g(x)-g(x+h)}{h}}$. On reconnait à droite l'opposé du taux d'accroissement de g, qui tend donc vers $-g'(a)$, et le dénominateur à gauche tend vers $g(x)^2$ car g est dérivable donc continue en a.

La deuxième formule s'obtient en appliquant simplement la formule de dérivation d'un produit à f et $\frac{1}{g}$: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = f'(x) \times \frac{1}{g(x)} - f(x) \times \frac{g'(x)}{g(x)^2} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$. □

Exemple : La formule de dérivation du quotient est notamment très utile pour dériver les fonctions rationnelles, par exemple $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+1}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$f'(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x(2x+3)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2 - 6x + 2}{(x^2+1)^2}.$$

Proposition 77. Soit f une fonction dérivable et bijective sur un intervalle I, à valeurs dans J. Alors f^{-1} est dérivable en tout point $y \in J$ tel que $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$, et dans ce cas $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

Remarque 85. Les images des valeurs où la dérivée de f s'annule, qui sont donc les points où la fonction réciproque n'est pas dérivable, correspondant en fait à des endroits où la courbe de f^{-1} admet des tangentes verticales (ce qui se comprend graphiquement puisqu'une tangente horizontale pour f devient après symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$ une tangente verticale pour f^{-1}).

Démonstration. Soit $y \in J$ et $x = f^{-1}(y)$. La taux d'accroissement de f^{-1} en y est $\tau_y(h) = \frac{f^{-1}(y+h) - f^{-1}(y)}{h} = \frac{f^{-1}(y+h) - x}{h}$. La fonction f étant bijective de I sur J, $y+h$ admet un unique antécédent b sur I. On a donc $f(b) = y+h$ et par ailleurs $f(x) = y$, donc $h = (y+h) - y = f(b) - f(x)$ et $\tau_y(h) = \frac{b-x}{f(b) - f(x)}$. En posant $h' = b - x$, on a $\tau_y(h) = \frac{h'}{f(x+h') - f(x)}$, avec h' qui tend vers 0 quand h tend vers 0 car la fonction f^{-1} est continue, donc $b = f^{-1}(y+h)$ tend vers $f^{-1}(y) = x$. On reconnait donc la limite quand h tend vers 0 de l'inverse du taux d'accroissement de f en x. Si $f'(x) \neq 0$, on a donc $\lim\limits_{h \to 0} \tau_y(h) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$. Si $f'(x) = 0$, la limite de $\tau_y(h)$ est infinie, on a donc une tangente verticale. □

Proposition 78. Soient f et g deux fonction dérivables respectivement en x et en $f(x)$, alors la composée $g \circ f$ est dérivable en x et $(g \circ f)'(x) = f'(x).(g'(f(x))$.

Démonstration. L'idée est de séparer le taux d'accroissement de $g \circ f$ pour faire apparaitre ceux de g et de f de la façon suivante : $\frac{g \circ f(y) - g \circ f(x)}{y - x} \frac{g \circ f(y) - g \circ f(x)}{f(y) - f(x)} \times \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$. Le premier quotient est le taux d'accroissement de g en $f(x)$, il converge donc vers $g'(f(x))$. Le second est le taux d'accroissement de f en x, qui converge vers x. On en déduit la formule.

Il y a en fait un (gros) problème, c'est que le dénominateur à gauche peut très bien s'annuler (quand $f(y) = f(x)$) et (contrairement à ce qui se passait pour l'inverse) cela peut se produire aussi près de x que voulu. Une autre façon (correcte, celle-ci) de prouver cette propriété est de passer par les développements limités à l'ordre 1. On sait que $f(x+h) \underset{0}{=} f(x) + hf'(x) + o(h)$, et que $g(y+k) \underset{0}{=} g(y) + kg'(y) + o(k)$. On en déduit que $g \circ f(x+h) = g(f(x) + hf'(x) + o(h))$. En prenant $y = f(x)$ et $k = hf'(x) + o(h)$ (ce qui tend bien vers 0 quand h tend vers 0), on a donc $g \circ f(x+h) = g(f(x)) + (hf'(x) + o(h))g'(f(x)) + o(hf'(x) + o(h)) = g \circ f(x) + hf'(x)g' \circ f(x) + o(h)$

(tout les termes restants sont effectivement négligeables devant h). Comme on sait par ailleurs que $g \circ f(x+h) = g \circ f(x) + h(g \circ f)'(x) + o(h)$, une simple identification donne $(g \circ f)'(x) = f'(x)g' \circ f(x)$. □

Exemples : La fonction $x \mapsto (2x+3)^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée $2 \times 3(2x+3)^2 = 6 \times (2x+3)^2$.
La fonction $x \mapsto e^{x^2+2x-4}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée $2(x+1)e^{x^2+2x-4}$.

Remarque 86. Les dérivées de composées que nous utiliserons le plus souvent sont les suivantes (u étant une fonction dérivable quelconque) :

- $(e^u)' = u'e^u$.
- $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$
- $(u^n)' = nu'u^{n-1}$
- $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

11.1.3 Dérivées de fonctions usuelles

Les quelques dérivées classiques sur lesquelles il ne faut vraiment pas hésiter :

fonction	dérivée	$\mathcal{D}_f$	condition
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$ **ou** $\mathbb{R}^*$	$n \in \mathbb{Z}^*$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	
e^x	e^x	$\mathbb{R}$	
x^a	ax^{a-1}	$\mathbb{R}_+^*$	$a \in \mathbb{R}$

Pour la première ligne, le domaine de définition et de dérivabilité est $\mathbb{R}$ si $n < 0$, et $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$.

Démonstration. Commençons par traiter par récurrence le cas des puissances entières positives. Notons $f_n(x) = x^n$, et prouvons par récurrence la propriété P_n : f_n est dérivable et $f_n'(x) = nx^{n-1}$. Pour $n = 1$, $f_1(x) = x$, le taux d'accroissement de f en x est $\tau_x(h) = \dfrac{x+h-x}{h} = 1$, donc f est dérivable en tout point et $f'(x) = 1$, ce qui correspond bien à la formule et prouve P_1. Supposons désormais P_n vraie, on remarque alors que $f_{n+1} = f_1 \times f_n$, donc f_{n+1} est dérivable comme produit de fonctions dérivables, et en utilisant la formule de dérivation du produit et l'hypothèse de récurrence, $f_{n+1}'(x) = f_n(x) + f_1(x)f_n'(x) = x^n + x \times nx^{n-1} = x^n + nx^n = (n+1)x^n$, ce qui prouve P_{n+1} et achève la récurrence.

On en déduit ensuite les dérivées des puissances entières négatives en utilisant la formule de dérivation d'un inverse. Soit $p < 0$ et $f_p(x) = x^p = \dfrac{1}{x^{-p}}$, avec $-p > 0$. On a donc $f_p'(x) = \dfrac{-(-p)x^{-p-1}}{(x^{-p})^2} = px^{p-1}$, ce qui est bien la formule annoncée. Un petit exemple pour la route : la dérivée de $\dfrac{1}{x^4}$ est $\dfrac{-4}{x^5}$.

Pour les dérivées de l'exponentielle et du logarithme, nous manquons d'une définition réellement rigoureuse de ces deux fonctions. On pourrait calculer la dérivée de l'une en fonction de celle de l'autre en utilisant la formule de dérivation d'une réciproque, mais nous nous contenterons de les admettre.

Enfin, pour les puissances quelconques, constatons que $x^a = e^{a \ln x}$, dont la dérivée vaut $\dfrac{a}{x}e^{a \ln x} = \dfrac{a}{x}x^a = ax^{a-1}$. □

11.2 Dérivées successives ; convexité

11.2.1 Fonctions de classe C^k et D^k

Définition 101. Une fonction est **de classe** D^n sur un intervalle I si elle est n fois dérivable sur I. On note alors $f^{(n)}$ sa dérivée n-ème (et on continue bien sûr à noter f', f'' et f''' pour les premières dérivées). Elle est **de classe** C^n sur I si de plus $f^{(n)}$ est continue sur I. On dit plus simplement que f est D^n ou C^n sur I.

Remarque 87. Une fonction $\mathcal{D}^n$ sur I est forcément $\mathcal{C}^{n-1}$ sur I puisqu'une fonction dérivable est nécessairement continue. Une fonction C^n est bien entendu D^n. On a donc les implications suivantes : $C^n \Rightarrow D^n \Rightarrow C^{n-1} \Rightarrow D^{n-1} \Rightarrow \cdots \Rightarrow C^1 \Rightarrow D^1 \Rightarrow C^0$.

Définition 102. Une fonction est **de classe** $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle I si elle y est dérivable n fois pour tout entier n.

Remarque 88. Toutes ses dérivées sont alors continues (puisqu'on peut toujours dériver une fois de plus), ce qui justifie qu'on ne distingue pas D^∞ et C^∞.

Proposition 79. La somme, le produit ou la composée de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, $\mathcal{D}^k$ ou $\mathcal{C}^\infty$ (sur les bons intervalles dans le cas de la composée) sont respectivement $\mathcal{C}^k$, $\mathcal{D}^k$ et $\mathcal{C}^\infty$.

Démonstration. Pour la somme, c'est une conséquence du fait que $\forall n \leqslant k$, $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$, ce qui se prouve par une récurrence facile (c'est vrai pour la première dérivée, et si c'est vrai au rang n il suffit de dériver une fois de plus pour obtenir le rang $n+1$).Pour le produit, cf le résultats suivant.

Pour la composée, on procède par récurrence : on sait que le résultat est vrai pour $k = 1$. Supposons le résultat vrai pour un entier n, et prenons deux fonctions g et f de classe $\mathcal{D}^{\backslash+\infty}$. On a $(g \circ f)' = f'.g' \circ f$, or les fonctions f' et g' (et également f) sont de classe $\mathcal{D}^n$, donc en appliquant l'hypothèse de récurrence pour la composée et le résultat précédent pour le produit, $(g \circ f)'$ est de classe $\mathcal{D}^n$, donc $g \circ f$ de classe D^{n+1}, ce qui achève la récurrence. □

Théorème 13. Formule de Leibniz.

Soient f et g deux fonctions D^n sur un intervalle I, alors $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$.

Démonstration. Vous aurez bien sûr reconnu dans cette formule une grande similitude avec la formule du binôme de Newton. La formule de Leibniz se démontre de la même façon, c'est-à-dire par récurrence en utilisant la formule de Pascal. Comme nous n'avons pas démontré Newton en cours, nous passerons également sur Leibniz. □

Exemple : Pour $n = 4$, nous obtenons par exemple $(fg)^{(4)} = f^{(4)} + 4f'''g' + 6f''g'' + 4fg''' + g^{(4)}$.

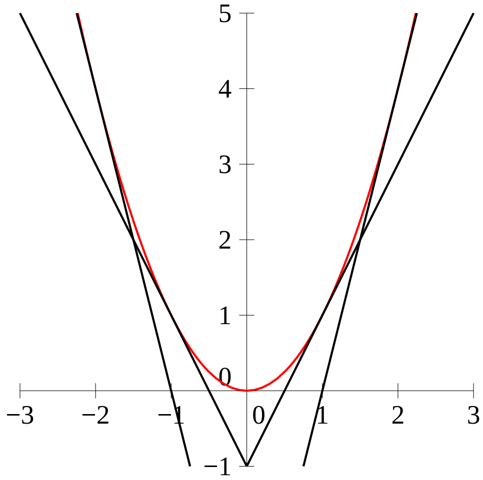
Théorème 14. Toutes les fonctions usuelles sont de classe C^∞ sur leur ensemble de dérivabilité (c'est-à-dire sur leur ensemble de définition, sauf pour la racine carrée qui ne sera C^∞ que sur $\mathbb{R}_+^*$).

11.2.2 Convexité

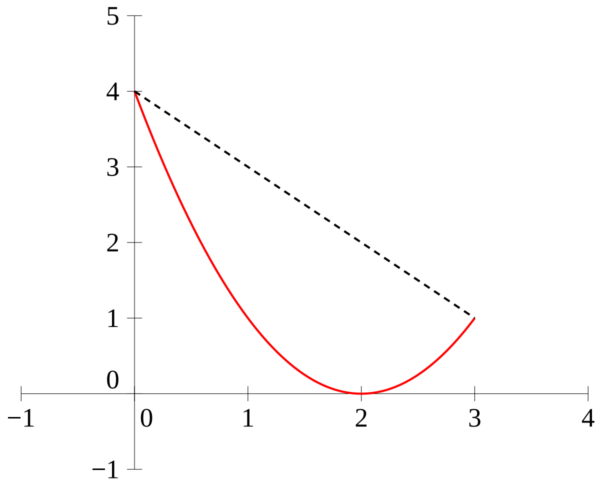
La convexité est une notion permet d'affiner nos représentations géométriques de courbes en ayant une information supplémentaire sur leur forme générale. Elle s'étudie de façon similaire aux variations, mais nécessite en général un calcul de dérivée seconde.

Définition 103. Une fonction f définie sur un intervalle I est **convexe sur I** si sa courbe est située au-dessus de toutes ses tangentes sur cet intervalle. Elle est **concave** sur I si sa courbe est située en-dessous de toutes ses tangentes.

Exemple : La fonction carré est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$.



Remarque 89. Cette définition géométrique n'est en fait pas la « bonne » définition de la convexité, mais cette dernière est un peu technique. Je vous la donne en guise de complément : f est convexe sur I si $\forall(x,y) \in I^2$, $\forall t \in [0;1]$, $f(tx+(1-t)y) \leqslant tf(x)+(1-t)f(y)$. De même, f est concave sur I si $\forall(x,y) \in I^2$, $\forall t \in [0;1]$, $f(tx+(1-t)y) \geqslant tf(x)+(1-t)f(y)$. Que signifie tout ceci ? En fait, lorsque $t \in [0;1]$, $tx+(1-t)y$ prend toutes les valeurs comprises entre x et y. De même $tf(x)+(1-t)f(y)$ prend toutes les valeurs comprises entre $f(x)$ et $f(y)$. L'inégalité de la définition signifie que tout point de la courbe situé entre les abscisses x et y est en-dessous (ou au-dessus dans le cas de la concavité) du point situé à la même abscisse sur la droite rejoignant les points $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$. Autrement dit, la courbe d'une fonction convexe est située en-dessous de toutes ses cordes. Celle d'une fonction concave est située au-dessus de ses cordes. Voici une illustration dans le cas convexe (la courbe rouge est en-dessous de la corde noire en pointillés) :



Proposition 80. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, alors f est convexe sur I si et seulement si son taux d'accroissement en tout point de I est une fonction croissante de h.

Démonstration. Supposons la fonction convexe sur I, et $a \in I$. Soient $0 < h < h'$ (les autres cas sont similaires), on a alors $a+h = ta+(1-t)(a+h')$ pour un certain $t \in [0;1]$, donc $f(a+h) \leqslant tf(a)+(1-t)f(a+h')$, d'où $f(a+h)-f(a) \leqslant tf(a)+(1-t)f(a+h')-f(a)$, soit $f(a+h)-f(a) \leqslant (1-t)(f(a+h')-f(a))$. Or, par définition, $(1-t)a+h = (1-t)(a+h')$, donc $1-t = \dfrac{h}{a+h'-a} = \dfrac{h}{h'}$. On obtient alors l'inégalité $f(a+h)-f(a) \leqslant \dfrac{h(f(a+h')-f(a))}{h'}$, soit en divisant par h, $\tau_a(h) \leqslant \tau_a(h')$, donc le taux d'accroissement en a est bien une fonction croissante. La réciproque se montre en utilisant le même type de calcul. □

Corollaire 4. Une fonction dérivable sur un intervalle I est convexe si et seulement si sa dérivée sur I est une fonction croissante. Elle y est convexe si et seulement si sa dérivée est décroissante sur I.

Démonstration. En effet, soient x et y deux réels appartenant à I. Posons $h = y - x$, on a $\tau_x(h) = \dfrac{f(y) - f(x)}{h} \geqslant f'(x)$ d'après la proposition précédente ; par ailleurs, $\tau_y(-h) = \dfrac{f(x) - f(y)}{-h} \leqslant f'(y)$. En combinant les deux inégalités, on obtient $f'(x) \leqslant f'(y)$. □

Corollaire 5. Soit f une fonction $\mathcal{D}^2$ sur un intervalle I, alors f est convexe si et seulement si f'' est positive sur I. De même, f est concave sur f si et seulement si f'' est négative sur I.

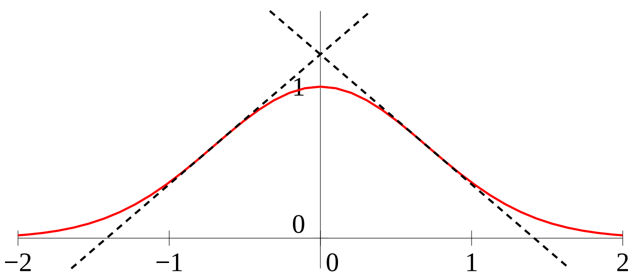
Démonstration. En effet, f' est croissante si f'' est positive. □

Définition 104. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I, un **point d'inflexion** pour f est un réel pour lequel f'' change de signe.

Remarque 90. On a en particulier $f''(x) = 0$ en tout point d'inflexion, et c'est naturellement ainsi que l'on détermine les points d'inflexion. Il arrive toutefois qu'un réel vérifiant $f''(x) = 0$ ne soit pas point d'inflexion, tout comme un réel vérifiant $f'(x) = 0$ ne correspond pas toujours à un extremum.

Remarque 91. La fonction f change donc de concavité en chaque point d'inflexion. Une autre façon de voir les choses est que la tangente au point d'inflexion traverse la courbe représentative de f, particularité rare qui explique que le calcul des points d'inflexion améliore la précision du tracé de courbe. On tracera systématiquement les tangentes aux points d'inflexion à chaque fois que l'on étudiera la convexité d'une fonction.

Exemple : On cherche à tracer une courbe représentative la plus précise possible de la fonction $f : x \mapsto e^{-x^2}$. La fonction f est définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Elle a des limites nulles en $\pm\infty$. Sa dérivée est $f'(x) = -2xe^{-x^2}$, donc f est croissante sur $]-\infty; 0]$ et décroissante sur $[0; +\infty[$. De plus, sa dérivée seconde est $f''(x) = (-2 + 4x^2)e^{-x^2}$. La fonction f a donc deux points d'inflexion en $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et en $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. La fonction f est convexe entre ces deux points et concave le reste du temps, et les pentes des tangentes en ces deux points sont données par $f'\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} \simeq -0.86$ et $f'\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} \simeq 0.86$. La courbe représentative de f ressemble à ceci (les tangentes aux points d'inflexion sont aussi tracées) :



11.3 Inégalité des accroissements finis et applications

Le théorème des accroissements finis et l'inégalité du même nom (que je me permettrai d'abréger la plupart du temps par IAF) sont des outils fondamentaux en analyse, dont on verra deux des principales applications dans ce paragraphe.

11.3.1 Énoncés

Théorème 15. Théorème de Rolle.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a;b]$, et telle que $f(a) = f(b)$, alors $\exists c \in]a;b[$, $f'(c) = 0$.

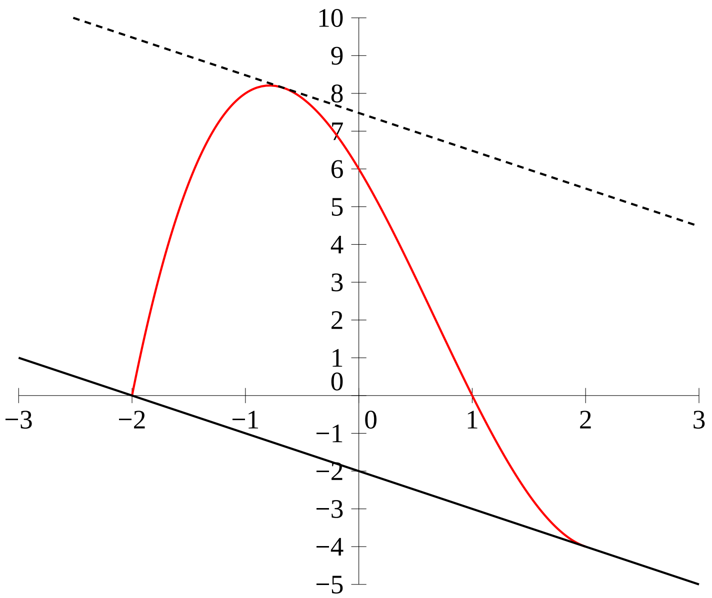
Démonstration. Commençons par éliminer le cas où la fonction f est constante sur $[a;b]$ puisque dans ce cas la dérivée de f est nulle, donc le théorème est manifestement vérifié.

La fonction f étant dérivable, elle est continue sur $[a;b]$, donc y atteint un maximum M et un minimum m. Si on suppose f non constante, l'un des deux, par exemple M (dans l'autre cas, la démonstration est similaire), est distinct de $f(a) = f(b)$, donc atteint en un réel $c \in]a;b[$. Montrons que ce réel vérifie $f'(c) = 0$. Le taux d'accroissement de f en c vaut $\tau_c(h) = \dfrac{f(c+h) - f(c)}{h}$. On a toujours $f(c+h) \leqslant f(c)$ puisque $f(c)$ est le maximum de f sur $[a;b]$. On en déduit que $\forall h < 0$, $\tau_c(h) \geqslant 0$, donc $f'(c) = \lim\limits_{h \to 0^-} \tau_c(h) \geqslant 0$. Mais de même $\forall h > 0$, $\tau_c(h) \leqslant 0$, donc $f'(c) = \lim\limits_{h \to 0^-} \tau_c(h) \leqslant 0$. Finalement, on a nécessairement $f'(c) = 0$. □

Remarque 92. Nous avons au passage démontré que tout maximum local d'une fonction dérivable annulait la dérivée de la fonction.

Théorème 16. Théorème des accroissements finis.
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a;b]$, alors $\exists c \in]a;b[$, $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Remarque 93. Autrement dit, il existe un point où la tangente est parallèle à la droite passant par les points $(a; f(a))$ et $(b; f(b))$.



Démonstration. Le principe est de se ramener au théorème précédent. Définissons une deuxième fonction g par $g(x) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} x - f(x)$. Cette fonction est dérivable sur $[a;b]$ puisque f l'est et vérifie $g(b) - g(a) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} b - f(b) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} a + f(a) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) - f(b) + f(a) = 0$, c'est-à-dire que $g(b) = g(a)$. on peut donc appliquer le théorème de Rolle à la fonction g : $\exists c \in]a;b[$, $g'(c) = 0$. Or, $g'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} - f'(c)$, donc on a $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, ce qu'on cherchait à prouver. □

Ce théorème peut paraitre assez curieux et peu utile au premier abord, et de fait sert peu en tant que tel. Mais il permet de démontrer les très importantes inégalités suivantes :

Corollaire 6. Inégalité des accroissements finis, première version.
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a;b]$, et telle que $\forall x \in [a;b]$, $m \leqslant f'(x) \leqslant M$ (où $(m, M) \in \mathbb{R}^2$), alors $\forall (y,z) \in [a;b]^2$ tels que $y < z$, $m(z-y) \leqslant f(z) - f(y) \leqslant M(z-y)$.

Démonstration. La fonction f étant dérivable sur $[y;z]$, on peut lui appliquer le théorème précédent : $\exists x \in]y;z[$, $f'(x) = \dfrac{f(z)-f(y)}{z-y}$. Or, $m \leqslant f'(x) \leqslant M$ par hypothèse, donc $m \leqslant \dfrac{f(z)-f(y)}{z-y} \leqslant M$. Il ne reste plus qu'à multiplier les inégalités par $z-y$. □

Corollaire 7. Inégalité des accroissements finis, deuxième version.
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a;b]$, et telle que $\forall x \in [a;b]$, $|f'(x)| \leqslant k$ (où $k \in \mathbb{R}$), alors $\forall (y,z) \in [a;b]^2$, $|f(z) - f(y)| \leqslant k|z-y|$.

Démonstration. La preuve est essentiellement la même que pour le corollaire précédent. □

11.3.2 Application à l'étude des variations

Théorème 17. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, alors f est croissante sur I si et seulement si f' est positive sur I, et f est décroissante sur I si et seulement si f' est négative sur I.

Démonstration. Supposons f croissante sur I, et soit $a \in I$, considérons le taux d'accroissement de f en a : $\tau_a(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Ce taux d'accroissement est toujours positif, puisque numérateur et dénominateur sont négatifs quand h est négatif, et positifs sinon ; donc par passage à la limite $f'(a) \geqslant 0$. Réciproquement, si $f'(x) \geqslant 0$ sur I, on a d'après l'IAF $y < z \Rightarrow 0 \times (z-y) \leqslant f(z) - f(y)$, ce qui prouve que f est croissante sur I. La preuve dans le cas de la décroissance est très similaire. □

Théorème 18. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, alors si f' est strictement positive sur I, sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, la fonction f est strictement croissante sur I. De même, si f' est strictement négative sur I, sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, f est strictement décroissante sur I.

Ce deuxième résultat, plus subtil que le précédent, ne sera pas prouvé. Remarquons qu'il n'y a ici qu'une seule implication, une fonction peut être strictement monotone mais avoir une dérivée qui s'annule une infinité de fois (la condition exacte pour l'équivalente est très technique).

Remarque 94. Ces théorèmes seront bien entendus utilisés sans être cités lors de l'étude des variations de fonctions, comme vous en avez déjà l'habitude. Mais vous avez désormais une preuve complète de ces résultats très classiques.

11.3.3 Application à l'étude de suites récurrentes

Une application extrêmement importante de l'IAF est l'étude de suites récurrentes. Très peu de résultats sont vraiment à connaitre par coeur, mais comme les méthodes utilisées sont toujours les mêmes, il est fortement souhaitable d'avoir une bonne connaissance des techniques les plus fréquentes. Nous allons donc énoncer les principaux résultats, puis étudier en détail un exemple.

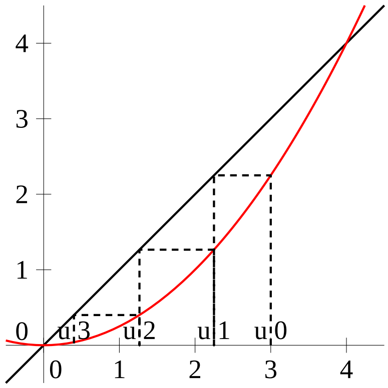
Définition 105. Une **suite récurrente** est une suite vérifiant une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

Proposition 81. Les principaux résultats utilisés lors d'exercices sur les suites récurrentes sont les suivants. La plupart d'entre eux devront être redémontrés à chaque fois :

- Si (u_n) est une suite récurrente convergeant vers une limite finie l, alors $f(l) = l$.

- Si $u_0 \in I$ et I est un **intervalle stable** par f (c'est-à-dire que $f(I) \subset I$), alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$. Ce résultat est à redémontrer par récurrence dans les exercices. Cela marche aussi bien si c'est u_1 (ou n'importe quelle autre valeur de la suite) qui appartient à I.
- La monotonie de la suite (u_n) s'obtient en étudiant le signe de $f(x) - x$.
- Si les valeurs de la suite appartiennent à un intervalle I tel que $\forall x \in I$, $|f'(x)| \leqslant M$, et si l est un point fixe de f appartenant à I alors on aura $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - l| \leqslant M|u_n - l|$ (ce résultat est une conséquence de l'IAF), puis $|u_n - l| \leqslant M^n|u_0 - l|$ (résultat se prouvant par récurrence à partir du précédent), méthode très souvent utilisée pour prouver la convergence de la suite (u_n) vers l (ça marche très bien dès que $M < 1$).

On peut également représenter graphiquement une suite récurrente de la façon suivante, ce qui permet de conjecturer assez facilement le comportement de la suite : on trace dans un même repère la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f et la droite (D) d'équation $y = x$, on place u_0 sur l'axe des abscisses, puis on trace la verticale passant par u_0 jusqu'à couper $\mathcal{C}_f$, on continue horizontalement jusqu'à croiser la droite (D), et l'abscisse du point obtenu est alors u_1, auquel on peut appliquer le même procédé. Ainsi :



Exemple :
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \geqslant 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n - 2}$. Commençons par étudier la fonction f définie sur $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right[$ par $f(x) = \sqrt{3x - 2}$. Cette fonction est continue sur son ensemble de définition, dérivable sur $\left]\frac{2}{3}; +\infty\right[$, de dérivée $f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x-2}}$. La fonction f est donc strictement croissante. Tant que nous y sommes, cherchons les points fixes et le signe de $f(x) - x$ (les deux vont ensemble, habituellement...). On a $f(x) - x = \sqrt{3x-2} - x = \dfrac{3x - 2 - x^2}{\sqrt{3x-2} + x}$. Le trinome au numérateur a pour discriminant $\Delta = 9 - 8 = 1$, et admet deux racines $x_1 = \dfrac{-3-1}{-2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{-3+1}{-2} = 1$. La courbe représentative de f est située au-dessus de la droite d'équation $y = x$ entre 1 et 2, et en-dessous le reste du temps (donc entre $\frac{2}{3}$ et 1, et entre 2 et $+\infty$). À ce stade, un joli dessin devrait suffire à se convaincre qu'en prenant $u_0 = 2$, la suite (u_n) prendra toutes ses valeurs dans l'intervalle $[2; +\infty[$, sera décroissante et convergera vers 2. Prouvons tout cela correctement :

Premier point : l'intervalle $[2; +\infty[$ étant stable par f, on va réussir à prouver par récurrence la propriété suivante : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2$. C'est vrai par hypothèse pour u_0, et si on suppose $u_n \geqslant 2$, on a alors $f(u_n) \geqslant f(2) = 2$, donc $u_{n+1} \geqslant 2$, ce qui prouve l'hérédité. Le principe de récurrence permet de conclure.

Deuxième point (facultatif) : la monotonie. Comme on a $\forall x \geqslant 2$, $f(x) - x \leqslant 0$, et que $u_n \geqslant 2$, on en déduit que $f(u_n) - u_n \leqslant 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$. La suite (u_n) est donc décroissante. À ce stade de l'exercice, on peut en fait déjà déterminer la nature de (u_n) : la suite est décroissante, minorée par 2, donc converge vers une limite $l \geqslant 2$. Comme les seuls points fixes de f sont 1 et 2, on en déduit qu'on a nécessairement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$. On peut toutefois obtenir beaucoup mieux avec l'IAF.

Troisième point : majoration de l'erreur via l'IAF : on commence par majorer la dérivée (ou plutôt sa valeur absolue) sur l'intervalle où se trouvent les valeurs de la suite. Ici, on a $\forall x \geqslant 2$, $\sqrt{3x-2} \geqslant 2$, donc $|f'(x)| \leqslant \dfrac{3}{4}$ (valeur absolue ici superflue, f' étant toujours positive). On peut alors en déduire, par l'IAF, que $\forall (y,z) \in [2;+\infty[^2$, $|f(z) - f(y)| \leqslant \dfrac{3}{4}|z-y|$. Appliquons ce résultat à $y = 2$ et $z = u_n$ (qui appartient toujours à l'intervalle), on obtient $|f(u_n) - f(2)| \leqslant |u_n - 2|$. Or, $f(u_n) = u_{n+1}$, et $f(2) = 2$ (d'où l'intérêt d'avoir un point fixe !), donc $|u_{n+1} - 2| \leqslant |u_n - 2|$.

Il reste à effectuer la petite récurrence (toujours la même) pour prouver que $|u_n - 2| \leqslant \left(\dfrac{3}{4}\right)^n |u_0 - 2|$. Pour $n = 0$, c'est évident, et si on suppose le résultat vérifié pour u_n, on a alors $|u_{n+1} - 2| \leqslant \dfrac{3}{4}|u_n - 2|$ (d'après l'application de l'IAF) $\leqslant \dfrac{3}{4} \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n |u_0 - 2|$ (par hypothèse de récurrence) $\leqslant \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1} |u_0 - 2|$, ce qui prouve l'hérédité. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$ (il est ici essentiel que le réel majorant la dérivée de f soit strictement inférieur à 1 pour que cette suite géométrique converge effectivement vers 0), on en déduit par le théorème des gendarmes que $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - 2| = 0$, c'est-à-dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

Ce genre de calcul permet de déterminer assez facilement, par exemple, un entier n à partir duquel $|u_n - 2| \leqslant \varepsilon$, ε étant un réel positif quelconque. Autrement dit, on obtient facilement une majoration de la distance entre u_n et la limite de la suite. C'est assez peu intéressant ici puisqu'on connait la valeur de la limite, mais ça le sera beaucoup plus dans certains cas où on peut prouver que la suite converge vers un point fixe de la fonction f sans être capable de résoudre l'équation de point fixe. Un petit programme Pascal (par exemple !) permettra alors d'obtenir des valeurs approchées de la limite en en maitrisant l'erreur.

Chapitre 12

Probabilités, généralités

Introduction via quelques exemples

Le concept de probabilité est a priori relativement intuitif : rien de suprenant à ce qu'un dé à six faces normalement constitué tombe en moyenne une fois sur six sur chacune de ses faces (il s'agit toutefois d'un résultat statistique, qui ne garantit par exemple en aucun cas qu'au bout de six lancers on aura obtenu chacun des six résultats possibles). Les probabilités étudiées au lycée restent la plupart du temps dans ce cadre : nombre fini de possibilités, probabilité égale pour chacun des cas possibles, mais en fait, l'étude des probabilités en mathématiques peut se faire dans un cadre beaucoup plus large.

Premier exemple

Reprenons un exemple qui s'inscrit bien dans le cadre vu au lycée : on lance simultanément deux dés à six faces et on note la somme des deux résultats obtenus. Il est assez facile de se convaincre que tous les résultats possibles (en l'occurence les entiers compris entre 2 et 12) n'apparaitront pas avec la même fréquence, car il existe par exemple 4 façons d'obtenir une somme égale à 5 ($1+4$; $2+3$; $3+2$ et $4+1$), mais une seule d'obtenir 2 (les deux dés doivent tomber sur 1). Pour préciser cel, on peut considérer les choses de la façon suivante : il y a 6 résultats possibles pour le premier dé, autant pour le second, soit un total de 36 possibilités. On obtiendra donc une somme égale à 2 en moyenne une fois sur 36, mais une somme égale à 5 quatre fois sur 36, soit une fois sur 9. Cet exemple illustre bien la nécessité de bien définir quel est l'ensemble de résultats sur lequel on veut travailler, et surtout de vérifier si ces résultats sont équiprobables ou non.

Deuxième exemple

On lance une pièce équilibrée (une chance sur deux de tomber de chaque côté) à Pile ou Face un certain nombre de fois, jusqu'à obtenir Pile. La situation est beaucoup plus compliquée puisqu'il y a ici une infinité de résultats possibles, qui sont les suites de lancers P ; FP ; FFP ; $FFFP$ etc. Déterminer la probabilité de chaque résultat reste assez élémentaire, mais on peut se poser des questions plus complexes à propos de cette expérience : est-il possible de ne jamais obtenir Pile, même après une infinité de lancers ? La réponse mathématique est un peu surprenante : oui, c'est possible, mais la probabilité que ça arrive est nulle ! Autre question intéressante : combien de lancers faudra-t-il en moyenne pour obtenir notre Pile ? Dans le cas d'un nombre fini de résultats possibles, une moyenne se calcule en faisant la moyenne des résultats possibles pondérés par leurs probabilités respectives. Ici, bien que l'ensemble des résultats soit infini, le même calcul reste possible, il va simplement s'agir désormais d'un calcul de somme de série. Pour les curieux, on constate que la probabilté d'obtenir notre premier Pile au tirage numéro k vaut $\dfrac{1}{2^k}$, et la moyenne se calcule via

$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=+\infty} \frac{k}{2^{k-1}} = \frac{1}{2} \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 2$. Il faut donc en moyenne deux lancers avant d'obtenir un Pile.

Troisième exemple

Une cible de jeu de fléchettes est constituée de trois disques concentriques de rayons respectifs 1, 2 et 3. Un joueur lance une fléchette dans la cible. On suppose (ce n'est pas très réaliste) que la fléchette atteint toujours la cible et que le point atteint dans la cible est aléatoire (avec une probabilité uniforme). On sort manifestement du cadre habituel : le nombre de résultats possibles n'est pas fini, loin s'en faut. On peut tout de même attribuer de manière assez intuitive des probabilités à certains événements : par exemple, il parait naturel de dire que la probabilité de tomber dans le disque central vaut un neuvième (rapport entre l'aire du disque central et celle de la cible). Mais que dire de l'événement « La fléchette tombe sur un point qui est à une distance rationnelle du centre »(oui, certes, personne ne se pose ce genre de question) ? Pas moyen de calculer facilement l'aire d'une telle chose. On admettra en fait que, dans ce genre de cas, on ne peut calculer les probabilités de tout et n'importe quoi, et qu'il faudra donc choisir quels sont les évènements autorisés (cela nous mènera au concept de tribu).

Quatrième exemple

On cherche à étudier une file d'attente (à la Poste, par exemple). À tout moment, il existe une certaine probabilité qu'unz personne vienne s'ajouter à la file existente, et chaque personne passe au guichet un temps aléatoire. Ce temps est en pratique borné, mais peut prendre à peu près n'importe quelle valeur positive dans les limites du raisonnable. On pourrait naturellement décider de découper le temps en une multitude de petits intervalles (d'une seconde chacun, par exemple) et se ramener à des probabilités sur un ensemble fini, mais les calculs seraient affreusement lourds. Il est en fait plus logique d'accepter de faire des probabilités sur l'ensemble $\mathbb{R}_+$ (même si, comme dans le cas précédent, on ne pourra calculer la probabilité de n'importe quoi), et de développer une théorie qui englobera également le cas des probabilités finies. Nous allons nous y atteler de ce pas. Dans ce dernier cas, on rentre dans un domaine des probabilités (les probabilités continues), que vous étudierez plus intensivement l'an prochain, et qui fait intervenir beaucoup de calcul intégral (eh oui...).

12.1 Vocabulaire

12.1.1 Expérience aléatoire

Définition 106. Une **expérience aléatoire** est un phénomène ayant des résultats numériques dépendant du hasard.

Exemple : Nous reprendrons tout au long de ce chapitre un exemple particulier pour illustrer les diverses définitions, celui consistant à tirer simultanément cinq cartes au hasard dans un jeu de 32 cartes.

Remarque 95. Insistons une fois de plus sur le fait qu'une expérience aléatoire est par définition non déterministe. L'étude des probabilités permet de faire des prévisions statistiques, mais en aucun cas de prévoir le résultat d'une expérience précise. Autrement dit, vous aurez beau être très fort en probas, ça ne vous aidera pas à décrocher la cagnotte au Loto.

Définition 107. On appelle **univers**, et on note Ω, l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire.

Exemple : Dans notre exemple, Ω est beaucoup trop gros pour qu'on puisse faire la liste de ses éléments, mais on sait par contre que $|\Omega| = \binom{32}{5}$. Attention toutefois à ne pas confonfre Ω, qui est un ensemble, et son cardinal, qui est un nombre.

12.1.2 Événements

Définition 108. Un **événement** (souvent noté A, B, ...) est un sous-ensemble de l'univers Ω. On dit qu'un événement A est réalisé si le résultat de l'expérience appartient à ce sous-ensemble.

Exemple : En pratique, un évènement est la plupart du temps décrit par une propriété plutôt que comme un sous-ensemble. Par abus de langage on dira ainsi qu'on considère l'évènement A : « on tire les quatre As et le Roi de pique ». Ce qui nous intéressera le plus en pratique sera le cardinal de l'ensemble correspond (ici 1).

Définition 109. Il existe un vocabulaire précis pour certains évènements particuliers :
- L'évènement Ω est appelé **évènement certain**. C'est de fait un évènement qui se produira toujours.
- L'évènement vide est appelé **évènement impossible** et n'est jamais réalisé.
- Un évènement est élémentaire s'il est constitué d'un seul élément de Ω.
- Deux événements sont **incompatibles** si leur intersection est vide (autrement dit, ils ne peuvent pas être réalisés simultanéments).
- Un **système complet d'événements** est un ensemble d'événements deux à deux incompatibles, et dont la réunion vaut Ω (autrement dit, une partition de Ω).

Exemples :
- L'évènement A cité ci-dessus est un évènement élémentaire.
- L'évènement B : « On tire deux piques, deux cœurs et deux trêfles » est un évènements impossible.
- Les évènements C : « On tire au moins un pique et au moins un carreau » et D : « On tire cinq cartes de la même couleur » sont incompatibles.
- Les évènements E_0 : « On ne tire pas d'As » ; E_1 : « On tire exactement un As » ; ... ; E_4 : « On tire quatre As » forment un système complet d'évènements.

12.1.3 Tribus

Définition 110. Soit Ω un univers et $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ un ensemble de sous-ensembles de Ω. On dit que $\mathcal{T}$ est une tribu sur Ω si
- $\Omega \in \mathcal{T}$
- $\mathcal{T}$ est stable par passage au complémentaire (si $A \in \mathcal{T}$ alors $\bar{A} \in \mathcal{T}$) et par union dénombrable (si $\forall i \in \mathbb{N}$, $A_i \in \mathcal{T}$, alors $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{T}$).

Remarque 96. Une tribu est également stable par intersection dénombrable en utilisant la stabilité par passage au complémentaire et les lois de De Morgan.

Remarque 97. La tribu représentera en fait l'ensemble des évènements pour lesquels on saura calculer facilements une probabilité. Comme il est facile de calculer la probabilité d'un complémentaire et d'une union, les conditions imposées sont en fait assez naturelles. Quand Ω est fini, on prendra toujours $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$ car on sait calculer des probabilités pour tous les sous-ensembles. C'est quand Ω est infini que le concept de tribu devient essentiel.

Exemple : Dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^+$), une tribu très fréquemment utilisée est celle des *boréliens*, qui est constituée de toutes les unions dénombrables d'intervalles. En particulier, elle contient tous les intervalles.

12.1.4 Lois de probabilité

Définition 111. On appelle **espace probabilisable** un couple $(\Omega, \mathcal{T})$, où Ω est un univers et $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω.

Définition 112. Une **probabilité** sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{T})$ est une application P : $\mathcal{T} \to [0;1]$ vérifiant :

- $P(\Omega) = 1$
- si $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements deux à deux incompatibles de $\mathcal{T}$, $P(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} P(A_i)$

Remarque 98. La deuxième propriété, appelée σ-additivité, est souvent utilisée pour une union finie plutôt que dénombrable.

Définition 113. Un **espace probabilisé** est un triplet $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, où P est une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{T})$.

Remarque 99. On peut très bien avoir envie de mettre plusieurs probabilités sur un même espace probabilisable. Prenons l'exemple simple d'un lancer de dé. La probabilité « naturelle » consiste à décréter que $P(1) = P(2) = \dots = P(6) = \frac{1}{6}$ (il suffit de définir les probabilités des évènements élémentaires puisqu'on obtient les probabilités des autres évènements par σ-additivité). Mais ce n'est pas la seule ! Par exemple, $P(1) = \frac{1}{21}$; $P(2) = \frac{2}{21}$; ... ; $P(6) = \frac{6}{21}$ définit également une probabilité (la seule chose à vérifier est que $P(\Omega)$ vaut 1, ce qu'on obtient en faisant la somme des probabilités des évènements élémentaires).

12.2 Propriétés

12.2.1 Généralités

Proposition 82. Si P est une loi de probabilité, on a toujours $P(\emptyset) = 0$.

Démonstration. L'événement vide étant incompatible avec lui-même (c'est bien le seul à vérifier cette curieuse propriété !), il doit vérifier $P(\emptyset) + P(\emptyset) = P(\emptyset \cup \emptyset) = P(\emptyset)$, donc $P(\emptyset) = 0$. □

Proposition 83. Pour tout événement $A \in \mathcal{T}$, on a $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Démonstration. Les événements A et $\bar{A}$ sont incompatibles, donc on a $P(A) + P(\bar{A}) = P(A \cup \bar{A}) = P(\Omega) = 1$, ce qui donne bien le résultat voulu. □

Proposition 84. Si $A \subset B \in \mathcal{T}^2$, on a $P(A) \leqslant P(B)$.

Démonstration. On peut écrire, de façon similaire à la démonstration précédente, $P(A) + P(B \backslash A) = P(B)$. Or $P(B \backslash A) \geqslant 0$ (une probabilité est toujours comprise entre 0 et 1), donc on a bien $P(B) \geqslant P(A)$. □

Proposition 85. Soient $(A, B) \in \mathcal{T}^2$, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Plus généralement, la formule de Poincaré est valable : $P(\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} A_i) = \sum_{k=1}^{n} ((-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \dots \cap A_{i_k}))$.

Démonstration. On a par σ-additivité $P(A) = P(A \cap B) + P(A \backslash B)$; $P(B) = P(A \cap B) + P(B \backslash A)$ et $P(A \cup B) = P(A \backslash B) + P(B \backslash A) + P(A \cap B)$. L'égalité souhaitée en découle. Comme dans le cas des ensembles, on se gardera de faire une démonstration complète de la formule de Poincaré (qui se démontre d'ailleurs de la même façon que dans le cas des ensembles). □

Proposition 86. Soient $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un système complet d'évènements, alors $\sum_{i\in\mathbb{N}} P(A_i) = 1$ et $\forall B \in \mathcal{T}$, $P(B) = \sum_{i\in\mathbb{N}} P(B \cap A_i)$.

Démonstration. Cela découle en fait immédiatement de la définition. Comme les A_i sont par définition incompatibles, $P(\underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} A_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} P(A_i)$. Or, la réunion des A_i vaut Ω (par définition également), donc sa probabilité vaut 1. La formule pour $P(B)$ est similaire, il suffit de remarquer que les ensembles $B \cap A_i$ sont disjoints et que leur réunion est égale à B (en fait, ils forment un système complet d'événements pour B). □

Remarque 100. Une formule similaire est valable dans le cas d'un système complet d'évènements fini.

12.2.2 Probabilités sur un univers fini

Remarque 101. Répétons une remarque importante déjà faite dans un précédent paragraphe : dans le cas où Ω est fini, pour déterminer une probabilité, il suffit de connaitre la probabilité de chaque événement élémentaire, avec la seule condition que la somme de ces probabilités soit égale à 1. En effet, tout événement est une union finie disjointe de tels événements élémentaires.

Définition 114. Il y a **équiprobabilité** sur l'espace Ω si tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

Proposition 87. Dans le cas de l'équiprobabilité, on a simplement, $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P(A) = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$.

Démonstration. Posons $n = |\Omega|$. Les événements élémentaires formant un système complet d'événements, la somme de leur probabilités vaut 1. Or, cette somme est constituée de n nombres égaux (par définition de l'équiprobabilité), donc chacune de ces probabilités vaut $\dfrac{1}{n}$. Ensuite, un événement quelconque est union disjointe des évènements élémentaires qui le composent, sa probabilité vaut donc k fois $\dfrac{1}{n}$, où k est le nombre d'éléments dans cet événement. □

Exemple Si nous reprenons notre exemple favori, la probabilité d'avoir une quinte flush (cinq cartes qui se suivent dans la même couleur) est très faible : 4 quintes possibles dans chaque couleur, soit 16 cas favorables, à diviser par $\binom{32}{5}$. Cela donne une proba d'environ 0.000 08.

12.3 Probabilités conditionnelles

Le principe des probabilités conditionnelles est, si on y réfléchit bien, assez simple, et surtout utilisé sans forcément qu'on s'en rende compte dans nombre d'exercices. Comme son nom l'indique, la notion désigne une probabilité soumise à une condition. Prenons un exemple simple : on lance deux dés et on regarde leur somme (vous devez commencer à avoir l'habitude). On a vu dans le chapitre précédent que la probabilité d'obtenir 5 valait $\dfrac{1}{9}$. Supposons qu'on ait maintenant l'information supplémentaire : on sait que le premier dé est est tombé sur la face 2. Ca change tout ! Pour obtenir un total de 10, il faut maintenant (et il suffit) que le deuxième dé tombe sur 3, soit une chance sur 6. On dit que la probabilité d'obtenir 5 sachant que le premier dé a donné 2 vaut $\dfrac{1}{6}$ (naturellement, il sera plus commode de noter ceci à l'aide d'événements).

12.3.1 Notations

Définition 115. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et A, B deux événements tels que $P(A) \neq 0$. La **probabilité conditionnelle** de B sachant A est $P_A(B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

Remarque 102. Si on veut être savant, on peut dire que l'application de $\mathcal{T}$ dans $[0,1]$ définie par $B \mapsto \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$ définit une nouvelle probabilité sur $\mathcal{T}$, appelée probabilité sachant A et notée P_A.

Remarque 103. On rencontre souvent la notation alternative $P(B\backslash A)$ pour la probabilité conditionnelle, mais nous ne l'utiliserons pas dans ce cours.

Exemple : Cela correspond bien à l'idée intuitive. Sachant que A est réalisé, on se place dans un nouvel univers constitué des événements vérifiant A, et dans ce nouvel univers, B est réalisé pour tous les événements de $A \cap B$, ce qui conduit à la formule de la définition. Si on reprend l'exemple introductif, en notant A : « Le premier dé donne 2 » et B : « Le total vaut 5 », on a $P(A) = \frac{1}{6}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{36}$ (il n'y a qu'un cas qui marche, celui où on obtient 2 et 5), donc la probabilité conditionnelle vaut bien $\frac{1}{6}$.

Remarque 104. La probabilité conditionnelle étant une loi de probabilité, elle a les mêmes propriétés que n'importe quelle probabilité.

12.3.2 Théorèmes

Théorème 19. Formule des probabilités composées. Soient $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ des événements tels que $P(\overset{n-1}{\underset{i=1}{\cap}} A_i) \neq 0$, alors $P(\overset{n}{\underset{i=1}{\cap}} A_i) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \cdots \times P_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n)$.

Remarque 105. La condition demandée sert simplement à assurer que toutes les probabilités conditionnelles sont bien définies : en effet, si $P(\overset{n-1}{\underset{i=1}{\cap}} A_i) \neq 0$, on a a fortiori $P(A_1) \neq 0$; $P(A_1 \cap A_2) \neq 0$, etc.

Remarque 106. Si on écrit la formule dans le cas où il n'y a que deux événements, on obtient simplement $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2)$, ce qui est simplement la définition d'une probabilité conditionnelle.

Démonstration. On va procéder par récurrence. D'après la première remarque, toutes les probabilités conditionnelles sont bien définies, et d'après la seconde la formule est vérifiée pour $n = 2$. Supposons-la vraie au rang n, on a alors $P(\overset{n+1}{\underset{i=1}{\cap}} A_i) = P(\overset{n}{\underset{i=1}{\cap}} A_i) \times P_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n}(A_{n+1})$ (on a simplement utilisé la formule dans le cas d'une intersection de deux événements), et via l'hypothèse de récurrence, on obtient immédiatement le résultat. □

Cette formule est utilisée presque systématiquement dans les cas où on a des tirages chronologiques, et correspond simplement à la formalisation de la représentation intuitive sous forme d'arbre. Deux exemples parmi tant d'autres :

Exemple : l'exemple bateau, genre de calcul qu'on fait en permanence sans invoquer les probabilités composées. Dans une urne se trouvent 4 boules blanches et 3 noires. On tire successivement trois boules. La probabilité d'obtenir une noire, puis deux blanches vaut $\frac{3}{7} \times \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{35}$.

Exemple : On dispose de trois enveloppes contenant respectivement 3 pièces d'un euro ; 5 pièces d'un euro et 3 de deux euros ; 4 d'un euro. On choisit une enveloppe au hasard, puis une pièce au hasard dans l'enveloppe. La probabilité d'obtenir une pièce de 2 euros vaut $\frac{1}{3} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{8}$.

Théorème 20. Formule des probabilités totales. Si les événements A_i forment un système complet d'événements et si $\forall i$, $P(A_i) \neq 0$, alors pour tout évènement B, $P(B) = \sum P(A_i) \times P_{A_i}(B)$ (j'ai volontairement omis de préciser dans quel ensemble se baladait l'indice i pour éviter d'avoir plusieurs cas à traiter).

Remarque 107. Dans le cas d'un système complet de deux évènements, on obtient la forme plus simple suivante : $P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$.

Démonstration. Dans le cas particulier, on a vu plus haut que $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$. Or, on sait que $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$, et de même pour la deuxième moitié. Le cas général se fait exactement de la même manière. □

Cette formule est très utile dans les cas où l'expérience aléatoire se déroule en deux (ou plus) étapes avec à la fin de la première étape une partition des possibilités en plusieurs cas disjoints (c'est-à-dire encore une fois quand on fait une représentation sous forme d'arbre).

Exemple : Dans une urne se trouvent 4 boules noires et 6 blanches. On tire successivement trois boules dans l'urne, sachant qu'après chaque tirage on remet la boule tirée, mais qu'on en ajoute une autre de la même couleur. La probabilité d'obtenir une boule noire au premier tirage vaut $\frac{2}{5}$, et celle d'obtenir une boule noire au deuxième tirage vaut $\frac{4}{10} \times \frac{5}{11} + \frac{6}{10} \times \frac{4}{11} = \frac{2}{5}$. Au troisième tirage, elle vaut aussi $\frac{2}{5}$. Pas si évident que ça à justifier sans calcul.

Exemple : Un type de problème très classique en probabilités et faisant intervenir les probabilités totales est la chaine de Markov. Il s'agit d'une situation qui évolue au cours du temps, et pour laquelle la situation à un instant donné ne dépend que de la situation à l'instant précédent (mais de manière aléatoire, tout de même). Par exemple, Homer Simpson mange tous les matins au petit déjeuner soit un beignet, soit un croissant. Au jour numéroté 0, il a mangé un beignet. S'il mange un beignet au jour n, il mangera un croissant au jour $n+1$ avec probabilité $\dfrac{1}{2}$, et à nouveau un beignet avec probabilité $\dfrac{1}{2}$. Par contre, s'il mange un croissant, il passera au beignet le lendemain avec probabilité $\dfrac{2}{3}$ et reprend un croissant avec probabilité $\dfrac{1}{3}$. On cherche à déterminer en fonction de n la probabilité qu'Homer mange un beignet au jour n. Notons donc a_n la probabilité qu'il mange un beignet au jour n et b_n celle qu'il mange un croissant. On a par hypothèse $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$, et ensuite, en utilisant la formule des probabilités totales, les relations de récurrence $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + \dfrac{2}{3}b_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + \dfrac{1}{3}b_n$ (cette deuxième relation ne sert d'ailleurs à rien pour répondre à notre question). Comme on sait par ailleurs que $a_n + b_n = 1$ (Homer ne saute jamais son petit-déjeuner), on obtient $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + \dfrac{2}{3}(1 - a_n) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{6}a_n$. La suite (a_n) est donc une suite arithmético-géométrique, d'équation de point fixe $x = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{6}x$, ce qui donne $x = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{6}{7} = \dfrac{4}{7}$. Posons donc $v_n = a_n - \dfrac{4}{7}$, on a alors $v_{n+1} = a_{n+1} - \dfrac{4}{7} = -\dfrac{1}{6}a_n + \dfrac{2}{3} - \dfrac{4}{7} = -\dfrac{1}{6}a_n + \dfrac{2}{21} = -\dfrac{1}{6}\left(a_n - \dfrac{4}{7}\right) = -\dfrac{1}{6}v_n$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison $-\dfrac{1}{6}$ et de premier terme $v_0 = a_0 - \dfrac{4}{7} = \dfrac{3}{7}$. On en déduit que $a_n = v_n + \dfrac{4}{7} = \dfrac{4}{7} + \dfrac{3}{7}\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n$. Notons au passage que, quand n tend vers $+\infty$, la limite de la suite a_n vaut $\dfrac{4}{7}$. Autrement dit, à long terme, Homer mange des beignets en moyenne quatre jours par semaine.

Théorème 21. Formule de Bayes. Soient A et B deux événements de probabilités non nulles, alors $P_B(A) = \dfrac{P(A) \times P_A(B)}{P(B)}$.

Démonstration. Il n'y presque rien à faire, on sait que $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$, la formule en découle immédiatement. □

Remarque 108. On peut également donner une version de cette formule avec plus de deux événements, mais cela ne présente guère d'intérêt pratique.

Cette formule, qui n'apporte en apparence pas grand chose par rapport aux précédentes, est en fait très utile dans la mesure où elle permet de « remonter le temps » lorsqu'on a une expérience faisant apparaitre des choix chronologiques.

Exemple : On peut reprendre n'importe quel exemple classique, mais en essyant de faire les choses dans le sens inhabituel. On tire deux dés successivement, le total obtenu est 9. Quelle est la probabilité que le premier dé soit tombé sur 4 ? Notons A : « Le premier dé tombe sur 5 » et B : « Le total obtenu est 9 ». On a $P(A) = \dfrac{1}{6}$, $P(B) = \dfrac{1}{9}$ et $P_A(B) = \dfrac{1}{6}$, donc $P_B(A) = \dfrac{1}{4}$.

12.4 Indépendance d'événements

Encore une notion relativement intuitive a priori, mais qui nécessite une définition mathématique précise. On a envie de dire que deux événements sont indépendants si la réalisation de l'un n'influence pas celle de l'autre. Par exemple, en reprenant comme souvent notre lancer de deux dés, l'événement « Le premier dé tombe sur un chiffre pair » devrait logiquement être indépendant de l'événement « Le deuxième dé tombe sur 1 ou 2 ».

Définition 116. Deux événements A et B sont **indépendants** si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Proposition 88. Deux événements de probabilité non nulle sont indépendants si et seulement si $P(B) = P_A(B)$.

Démonstration. Rappelons que sous ces hypothèses $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$. En identifiant les deux formules, on obtient tout de suite le résultat. $\square$

Remarque 109. Dans le cas où l'un des deux événements a une probabilité nulle, les événements sont de toute façon nécessairement indépendants (même si c'est absurde !).

Exemple On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. Les événements « obtenir un Roi » et « obtenir un pique » sont indépendants.

Remarquez que, dans le but de prouver l'indépendance de deux événements, cette formulation n'est pas vraiment plus simple à utiliser que l'autre. Passons au cas de plusieurs événements.

Définition 117. Des événements $(A_1, A_2, \dots A_n)$ sont dits **mutuellement indépendants** si $\forall I \subset \{1, 2, \dots, n\}$, on a $P(\underset{i \in I}{\cap} A_i) = \prod_{i \in I} P(A_i)$.

Remarque 110. Attention, des événements mutuellement indépendants sont indépendants deux à deux mais la réciproque n'est pas vraie ! La condition est beaucoup plus forte que ça.

Proposition 89. Si $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ forment une famille d'événements mutuellement indépendants, on peut remplacer une partie des A_i par leurs complémentaires, la famille reste indépendante.

Remarque 111. Ce résultat est bien sûr valable pour deux événements : si A et B sont indépendants, $\bar{A}$ et B également.

Démonstration. Contentons-nous du cas de deux événements : $P(\bar{A} \cap B) = P(B \backslash A) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) \times P(B) = P(B) \times (1 - P(A)) = P(B) \times P(\bar{A})$. $\square$

Exemple : On fait une série de n lancers de pièces. Les événements A_k : « On obtient Pile au $k$ème lancer » sont mutuellement indépendants.

Exemple : On lance deux dés (si, si, je vous jure, encore une fois), et on considère les événements A : « Le premier dé donne un résultat pair », B : « Le deuxième dé donne un résultat pair » et C : « Les deux dés donnent des résultats de même parité ». Je vous laisse vérifier que $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$ et $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{1}{4}$, donc les événements sont deux à deux indépendants. Pourtant, $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4}$, donc les trois événements ne sont pas mutuellement indépendants.

Chapitre 13

Matrices

Introduction

Pour introduire le concept de matrice, intéressons-nous au problème très concret suivant : dans le village de Trouperdu, le boulanger doit faire face à trois commandes presque simultanées : une pour un mariage, une de la part de l'école pour un goûter de fin d'année, et une du maire pour une réception. Chaque commande est composée d'un certain nombre d'éclairs, de choux et de tartes, ce qui est récapitulé dans le tableau suivant :

	Éclairs	Choux	Tartes
Mariage	30	50	20
École	40	30	15
Mairie	25	20	10

Au niveau de la cuisine, le boulanger et ses deux collègues se répartissent la tâche : une commande chacun. Ils connaissent bien sûr leurs recettes sur le bout des doigts et savent donc les ingrédients dont ils ont besoin pour chaque patisserie (deuxième tableau ci-dessous, chiffres pas forcément réalistes...) :

	Oeufs	Farine	Sucre
Éclair	1	30	20
Chou	1	20	15
Tarte	3	200	200

S'ils veulent faire chacun le bilan de ce dont ils ont besoin avant de se mettre au travail, on peut à nouveau le présenter sous forme de tableau :

	Oeufs	Farine	Sucre
Mariage	140	5900	5350
École	115	4800	4250
Mairie	75	3150	2800

Pour remplir la première case du dernier tableau, par exemple, on fait l'opération $30\times1+50\times1+20\times3$, c'est-à-dire qu'on multiplie les éléments de la première ligne du premier tableau par ceux de la première colonne du second, puis on additionne. Eh bien, nos patissiers viennent de réaliser sans le savoir une multiplication de matrices !

13.1 Définition

Définition 118. Une **matrice** réelle à n lignes et p colonnes (n et p appartenant à $\mathbb{N}^*$) est un tableau rectangulaire (à n lignes et p colonnes) de nombres réels. On note un tel objet $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ ou de façon plus complète

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Autrement dit, a_{ij} est le terme de la matrice A se trouvant à l'intersection de la $i$ème ligne et de la $j$ème colonne.

Définition 119. L'ensemble des matrices réelles à n lignes et p colonnes est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Dans le cas où $n = p$, on dit que la matrice est **carrée** et on note plus simplement l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Remarque 112. Dans le cas où $n = 1$, la matrice se réduit à une ligne, et on parle effectivement de matrice-ligne. De même, lorsque $p = 1$, on parlera de matrice-colonne.

Définition 120. La **matrice nulle** $0_{n,p}$ (ou plus simplement 0 si les dimensions de la matrice sont claires dans le contexte) est la matrice à n lignes et p colonnes dont tous les coefficients sont nuls.

La **matrice identité** dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarque 113. Deux matrices sont égales si elles ont la même taille (même nombre de lignes et de colonnes) et les mêmes coefficients.

13.2 Opérations sur les matrices

Ces matrices sont naturellement destinées à être manipulées donc, comme pour tout objet mathématique qui se respecte, on aimerait pouvoir faire un peu de calcul avec. Les propositions qui ne sont pas démontrées découlent de manière évidente des propriétés des opérations usuelles sur les réels.

13.2.1 Addition de matrices

Définition 121. Soient A et B deux matrices dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, la **somme** de A et de B est la matrice $A + B = M$, où $m_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$. Autrement dit, on fait la somme coefficient par coefficient.

Proposition 90. Propriétés élémentaires de la somme de matrices

- L'addition de matrices est associative : $(A + B) + C = A + (B + C)$.
- L'addition de matrices est commutative : $A + B = B + A$.
- La matrice nulle est un élément neutre pour l'addition des matrices : $0 + A = A + 0 = A$.
- Pour toute matrice A, il existe une matrice B telle que $A + B = B + A = 0$. on note cette matrice $-A$, elle est simplement obtenue en prenant les opposés des coefficients de A.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 3 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 7 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; $A + B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

13.2.2 Produit d'une matrice par un réel

Définition 122. Le **produit d'une matrice** A **par un réel** λ est la matrice, notée λA, obtenue à partir de A en multipliant chacun de ses coefficients par λ.

Proposition 91. Le produit par un réel est distributif par rapport à l'addition de matrices : $(\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B)$. On a également les propriétés suivantes : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad 1.A = A$ et $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$; $-2A = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -4 & -16 \end{pmatrix}$.

13.2.3 Produit de deux matrices

Définition 123. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$, alors le **produit** des deux matrices A et B est la matrice $A \times B = M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ où $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\forall j \in \{1, \dots, p\}$, $m_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}$. Pour s'en souvenir, penser à l'exemple introductif : on multiplie terme à terme la i-ème ligne de A par la j-ème colonne de B. Il faut faire très attention à ce que les tailles des matrices soient compatibles pour que le produit existe !

Proposition 92. Propriétés élémentaires du produit de matrices :

- Le produit de matrices est associatif : $(AB)C = A(BC)$.
- Le produit de matrices est distributif par rapport à l'addition : $A(B + C) = AB + AC$; $(A + B)C = AC + BC$.
- La matrice identité est un élément neutre pour le produit : $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $I_nA = AI_p = A$.
- Le produit d'une matrice par une matrice nulle (de taille compatible), à gauche comme à droite, est toujours nul.

Démonstration. L'associativité est une conséquence de l'associativité des sommes (il suffit d'écrire une jolie formule avec des sommes triples). Les diverses distributivités sont une fois de plus une conséquence des règles de calcul sur les réels, il suffit de les écrire pour s'en convaincre.
Penchons nous plutôt sur la propriété $I_nA = A$ (on notera juste I et pas I_n par souci de lisibilité). Soit m_{ij} le terme d'indice i, j de la matrice produit IA. On a par définition $m_{ij} = \sum_{k=1}^{n} I_{ik}A_{kj}$. Mais le seul terme non nul parmi les I_{ik} est I_{ii}, qui vaut 1. On a donc bien $m_{ij} = A_{ij}$. Pour le produit à droite par I_p, la démonstration est essentiellement la même. Quand au produit par une matrice nulle, vous pouvez y arriver tous seuls. □

Remarque 114.

- Le produit de matrices n'est pas commutatif. En fait, l'existence du produit AB n'implique même pas celle de BA, mais même dans le cas des matrices carrées, par exemple, on a en général $AB \neq BA$. Dans le cas contraire, on dit que A et B commutent.
- Parler de division de matrice n'a en général pas de sens.
- On ne peut en général pas simplifier un produit de matrices : on peut avoir $AB = AC$ mais $B \neq C$ ou encore $AB = 0$ mais $A \neq 0$ et $B \neq 0$.
- On peut écrire les systèmes d'équations linéaires à l'aide de produits de matrices, mais on reviendra là-dessus un peu plus tard.

Exemple 1 : $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; $A \times B = \begin{pmatrix} -4 & 11 \\ 6 & 27 \end{pmatrix}$

Exemple 2 : $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$; $A \times B = 0$

13.2.4 Transposition

Définition 124. La **transposée** d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est la matrice $M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, où $m_{ij} = a_{ji}$. On la note ${}^tA$. Autrement dit, les lignes de A sont les colonnes de ${}^tA$ et vice-versa.

Proposition 93. La transposition vérifie les propriétés suivantes : $\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$,
- ${}^t({}^tA) = A$
- ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$
- ${}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA$
- $\forall C \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{R})$, ${}^t(AC) = {}^tC\ {}^tA$.

Démonstration. Les trois premières propriétés ne posent aucun problème, mais la dernière est nettement plus complexe. Écrivons ce que vaut le terme d'indice ij à gauche et à droite de l'égalité. Pour ${}^t(AC)$, il est égal au terme d'indice ji de AC, c'est-à-dire à $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} A_{jk}C_{ki}$. À droite, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} ({}^tC)_{ik}({}^tA)_{kj} = \sum_{k=1}^{p} C_{ki}A_{jk}$. Les deux quantités sont bien égales. □

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$; ${}^tA = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

Définition 125. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **symétrique** si $A = {}^tA$, c'est-à-dire si $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$, $a_{ij} = a_{ji}$. Une matrice symétrique est nécessairement carrée.

13.3 Matrices carrées, puissances de matrices

13.3.1 Vocabulaire

Définition 126. Une matrice carrée est **diagonale** si seuls ses coefficients a_{ii} sont (éventuellement) non nuls (on les appelle d'ailleurs coefficients diagonaux de A), ou encore $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Définition 127. Une matrice carrée est **triangulaire supérieure** si seuls les termes « au-dessus » de sa diagonale sont non nuls, c'est-à-dire $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$, ou encore si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$. On définit de même des matrices triangulaires inférieures.

Proposition 94. Le produit de deux matrices carrées est une matrice carrée. Le produit de deux matrices diagonales est une matrice diagonale. Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.

Démonstration. Pour les matrices carrées, cela découle directement de la définition.
Pour les matrices diagonales, prenons deux matrices diagonales (de taille n) A et B. Le terme d'indice ij de AB vaut $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$. Parmi tous les termes intervenant dans cette somme, seul un des termes de gauche est non nul, quand $k = i$, et seul un des termes de droite est non nul, quand $k = j$. Si $i \neq j$, on n'a donc que des produits nuls, ce qui prouve bien que les seuls termes qui peuvent être non nuls pour AB sont les termes diagonaux.

C'est un peu le même principe pour les matrices triangulaires supérieures. Prenons deux telles matrices A et B et supposons $i > j$. Le terme d'indice ij de AB vaut $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} 0 \times b_{kj} + \sum_{k=i}^{n} a_{ik} \times 0 = 0$. La matrice AB est donc triangulaire supérieure. □

Remarque 115. La transposée d'une matrice triangulaire supérieure est triangulaire inférieure.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A \times B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -6 \\ 0 & 18 & -15 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Remarquez au passage que les termes diagonaux de $A \times B$ sont obtenus comme le produit de ceux de A par ceux de B.

13.3.2 Puissances d'une matrice carrée

Définition 128. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit les **puissances** de A de la façon suivante : $A^0 = I_n$, et $\forall k \geqslant 1, \quad A^k = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k \text{ fois}}$.

Proposition 95. On a $A^{k+m} = A^k A^m$ et $(A^k)^m = A^{km}$ pour tous entiers n et m. Pour tout réel λ, on a également $(\lambda A)^k = \lambda^k A^k$.

Démonstration. Tout cela se montre sans difficulté par récurrence. □

Remarque 116. En général, $(AB)^k \neq A^k B^k$, sauf dans le cas où les deux matrices A et B commutent. En conséquence, les identités remarquables sont fausses sur les matrices, donc attention quand on développe !

Définition 129. Une matrice carrée A est dite **nilpotente** s'il existe un entier n tel que $A^n = 0$.

Théorème 22. (formule du binôme de Newton) Si A et B sont deux matrices qui commutent dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(A+B)^k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} A^i B^{k-i}$.

Démonstration. Exactement la même preuve que dans le cas des réels, mais notons qu'il est absolument nécessaire que les matrices commutent pour que la preuve fonctionne. □

Exemple 1 : (matrice diagonale) Si $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$, alors $A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}$.

Exemple 2 : (matrice nilpotente) $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\forall k \geqslant 3, \quad B^k = 0$.

Exemple 3 : $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On remarque que $C = 2I_3 + B$, et que I_3 et B sont deux matrices qui commutent (tout le monde commute avec l'identité). On peut donc appliquer la formule du binôme : $A^k = (2I_3 + B)^k = (2I_3)^k + k \times (2I_3)^{k-1}B + \dfrac{k(k-1)}{2} \times (2I_k)^{k-2}B^2 = 2^k I_3 + k2^{k-1}B + \dfrac{k(k-1)}{2}2^{k-2}B^2$. Par exemple, $C^4 = 16I_3 + 32B + 24B^2 = \begin{pmatrix} 16 & 64 & 48 \\ 0 & 16 & -32 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$.

Exemple 4 : Il est également fréquent de calculer les puissances successives d'une matrice par récurrence. $D = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. On calcule $D^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -4 & 9 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$, et on constate que $D^2 = -2D + 3I$.
Prouvons alors par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists (u_k, v_k) \in \mathbb{R}^2$, $D^k = u_k D + v_k I$. C'est vrai pour $k = 2$ comme on vient de le voir, mais aussi pour $k = 1$ puisque $D = 1D + 0I$ (on pose donc $u_1 = 1$ et $v_1 = 0$) et pour $k = 0$ puisque $D^0 = 0D + 1I$ (donc $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$). Supposons le résultat vrai au rang k, on a alors $D^{k+1} = D \times D^k = D(u_k D + v_k I) = u_k D^2 + v_k D = u_k(-2D + 3I) + v_k D = (v_k - 2u_k)D + 3u_k I$. En posant $u_{k+1} = -2u_k + v_k$ et $v_{k+1} = 3u_k$, on a bien la forme demandée au rang $n+1$, d'où l'existence des coefficients u_k et v_k.
Nous avons de plus obtenu des relations de récurrence qui permettent de faire le calcul suivant : $u_{k+2} = -2u_{k+1} + v_{k+1} = -2u_{k+1} + 3u_k$. La suite (u_k) est donc récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique est $x^2 + 2x - 3 = 0$, elle a pour discriminant $\Delta = 4 + 12 = 16$, et admet donc deux racines $r = \dfrac{-2-4}{2} = -3$, et $x_2 = \dfrac{-2+4}{2} = 1$. On en déduit que $u_k = \alpha(-3)^k + \beta$, avec $\alpha + \beta = 0$ et $-3\alpha + \beta = 1$, dont on tire $\alpha = -\dfrac{1}{4}$ en faisant la différence des deux équations, puis $\beta = \dfrac{1}{4}$. On a donc $u_k = \dfrac{1}{4}(1 - (-3)^k)$ et $v_k = \dfrac{3}{4}(1 - (-3)^{k-1})$.
On peut alors écrire explicitement les coefficients de la matrice D^k (ce qui n'a pas grand intérêt en soi...).

Exemple 5 : Le retour des chaines de Markov, mais à l'aide de matrices.
Un jeune étudiant en classe préparatoire travaille ou non ses mathématiques chaque soir en procédant de la façon suivante : il peut soit travailler son cours, soit faire des exercices, soit ne rien faire du tout. S'il effectue une certaine activité (ou non-activité) un soir, il y a une chance sur cinq qu'il refasse la même chose le lendemain, et deux chances sur cinq qu'il passe à chacune des deux autres activités. On suppose qu'on démarre notre étude au jour numéro 0, où notre étudiant n'a rien fait. Notons donc R_n : « L'étudiant ne fait rien le jour n » ; C_n : « L'étudiant travaille son cours au jour n » et E_n : « L'étudiant fait des exercices au jour n ». Notons également r_n, c_n et e_n les proabilités respectives de ces évènements. L'énoncé nous donne $r_0 = 1$, et toutes les probabilités conditionnelles suivantes : $P_{R_n}(R_{n+1}) = \dfrac{1}{5}$; $P_{R_n}(C_{n+1}) = \dfrac{2}{5}$; $P_{R_n}(E_{n+1}) = \dfrac{2}{5}$, etc. Comme toujours dans ce genre de problème, les évènements R_n, C_n et E_n forment un système complet et la formule des probabilités totales nous donne des relations de récurrence du type $r_{n+1} = \dfrac{1}{5}r_n + \dfrac{2}{5}c_n + \dfrac{2}{5}e_n$ (et symétriquement pour les deux autres probabilités). Comme nous aurons du mal à expliciter les suites à partir de ces relations, nous allons avoir recours à un point de vue matriciel.

Notons donc M la matrice des probabilités conditionnelles : $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$, et posons $X_n = \begin{pmatrix} r_n \\ c_n \\ e_n \end{pmatrix}$, suite de matrice-colonnes représentant nos trois suites inconnues. Constatons alors qu'on peut interpréter nos trois relations de récurrence sous la forme d'une seule égalité matricielle : $MX_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}r_n + \frac{2}{5}c_n + \frac{2}{5}e_n \\ \frac{2}{5}r_n + \frac{1}{5}c_n + \frac{2}{5}e_n \\ \frac{2}{5}r_n + \frac{2}{5}c_n + \frac{1}{5}e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{n+1} \\ c_{n+1} \\ e_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$. La relation $X_{n+1} = MX_n$ doit vous faire penser à une suite géométrique, et de fait ça se comporte pareil puisqu'on peut prouver par récurrence (il faudra refaire la démonstration à chaque fois dans ce genre d'exercices) que $X_n = M^n X_0$. En effet, c'est vrai pour $n = 1$ puisque $X_1 = MX_0$ d'après le calcul précédent, et en supposant que $X_n = M^n X_0$, on obtient $X_{n+1} = MX_n$ (calcul précédent) $= M(M^n X_0) = M^{n+1} X_0$. Comme nous connaissons la matrice X_0, il ne reste plus qu'à déterminer les puissances de M pour résoudre le problème.

Il existe plusieurs façon d'effectuer ce calcul, par exemple en constatant que $M = \frac{2}{5}J - \frac{1}{5}I$, où on a posé $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Un petit calcul permet de constater que $J^2 = 3J$, relation à partir de laquelle on prouve facilement par récurrence que $J^n = 3^{n-1}J$. Comme les matrices I et J commutent, on peut appliquer la formule du binome de Newton : $\left(\frac{2}{5}J - \frac{1}{5}I\right)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} \left(\frac{2}{5}J\right)^k \left(-\frac{1}{5}I\right)^{n-k} =$
$\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} \frac{2^k}{5^k} J^k \times \frac{(-1)^{n-k}}{5^{n-k}} = \frac{1}{5^n}\left((-1)^n I + \sum_{k=1}^{k=n} \binom{n}{k} 2^k \times 3^{k-1}(-1)^{n-k} J\right)$

$$= \frac{(-1)^n}{5^n} I + \frac{1}{3 \times 5^n} \sum_{k=1}^{k=n} \binom{n}{k} 6^k (-1)^{n-k} J = \frac{(-1)^n}{5^n} I + \frac{1}{3 \times 5^n}(5^n - (-1)^n)J = \frac{1}{3}J + \left(-\frac{1}{5}\right)^n \left(I - \frac{1}{3}J\right).$$

Ouf ! Ce n'est pas très beau, mais on peut expliciter la matrice M^n puis la valeur de r_n, c_n et e_n. Comme $X_n = M^n \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, il suffit en fait de connaitre les éléments de la première colonne de M^n. On obtient $r_n = (M^n)_{11} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{5}\right)^n$, et $c_n = e_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{5}\right)^n$. Notons que ces trois probabilités tendent vers $\frac{1}{3}$ quand n tend vers $+\infty$.

Chapitre 14

Polynômes

Le but de cet assez court chapitre est de mettre par écrit quelques notations et propriétés classiques des polynômes que nous avons en fait déjà pour la plupart utilisées plus tôt dans l'année (le principe d'identification notamment). On en profitera également pour insérer, de manière assez exceptionnelle, un peu d'algorithmique dans ce chapitre, qui sera surtout réutilisée lors de nos TD de Pascal.

14.1 Définitions, notations

Définition 130. Un **polynôme** P est un objet formel de la forme $P = \sum_{k=0}^{k=n} a_k X^k$, où $n \in \mathbb{N}$, et $a_k \in \mathbb{R}$, avec de plus $a_n \neq 0$.

Remarque 117. Le X utilisé dans cette définition est souvent appelé **indéterminée** du polynôme P. Il peut être remplacé par n'importe quel objet mathématique pour lequel calculer des puissances a un sens, par exemple une matrice, une fonction ou bien entendu un réel. On aura toutefois souvent tendance à identifier le polynôme P et la **fonction polynômiale** réelle $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{k=n} a_k x^k$.

Définition 131. L'entier n est le **degré** du polynôme P. Les réels a_k sont appelés **coefficients** du polynôme P, le réel a_n est le **coefficient dominant** de P.

Définition 132. On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels. pour tout entier naturel n, on note $\mathbb{R}_n[X]$ les polynômes de degré inférieur ou égal à n. On notera également $d^\circ(P)$ le degré d'un polynôme P.

Remarque 118. On peut définir sur $\mathbb{R}[X]$ des opérations de somme et de produit qui vérifient toutes les propriétés usuelles (associativité, commutativité, distributivité). L'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par somme (la somme de deux polynômes de degré inférieur ou égal à n est toujours de degré inférieur ou égal à n), ce qui ne serait pas vrai avec l'sensemble des polynômes de degré n. Nous reviendrons plus en détail sur ce type de propriétés en fin d'année lorsque nous étudierons la notion d'espace vectoriel.

Proposition 96. Soient P et Q deux polynômes, alors $d^\circ(PQ) = d)(P) + d^\circ(Q)$; et $d^\circ(P+Q) \leqslant max(d^\circ(P); d^\circ(Q))$.

Exemple : Dans le cas de la somme, il n'y aura pas égalité dans le cas où P et Q sont de même degré et ont des coefficients dominants opposés. Par exemple, si $P = X^2 - 3X + 2$ et $Q = -X^2 - 5$, on aura $P + Q = -3X - 3$, qui est de degré strictement inférieur au plus grand des degrés de P et Q.

Théorème 23. Un polynôme à coefficients réels correspond à une fonction polynômiale nulle si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

Corollaire 8. Principe d'identification des coefficients.
Deux polynômes P et Q sont égaux (en tant que fonctions polynômiales) si et seulement si tous leurs coefficients sont égaux.

Exemple : C'est un principe qu'on a déjà utilisé de nombreuses fois depuis le début de l'année. Un cas classique d'utilisation de ce résultat est la « décomposition en éléments simples » : on cherche trois réels a, b et c tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{2x^2+3x-3}{x^3+x^2-6x} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-2} + \dfrac{c}{x+3}$. Pour cela, on part du membre de droite et on réduit tout au même dénominateur : $\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-2} + \dfrac{c}{x+3} = \dfrac{a(x-2)(x+3)+bx(x+3)+cx(x-2)}{x(x-2)(x+3)} = \dfrac{ax^2+ax-6a+bx^2+3bx+cx^2-2cx}{x^3+x^2-6x} = \dfrac{(a+b+c)x^2+(a+3b-2c)x-6a}{x^3+x^2-6x}$. Par identification des coefficients sur les deux numérateurs, on obtient les conditions $a+b+c=2$; $a+3b-2c=3$ et $-6a=-3$, d'où $a=\dfrac{1}{2}$, puis $b+c=\dfrac{3}{2}$ et $3b-2c=\dfrac{5}{2}$. En multipliant par deux la première équation et en ajoutant à la deuxième, on a $5b=\dfrac{11}{2}$, donc $b=\dfrac{11}{10}$, puis $c=2-a-b=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$. Finalement, on conclut que $\dfrac{2x^2+3x-3}{x^3+x^2-6x} = \dfrac{1}{2x} + \dfrac{11}{10(x-2)} + \dfrac{2}{5(x+3)}$.

14.2 Algorithme de Hörner

Ce paragraphe, de contenu assez original pour un cours de mathématiques, est à mettre en relation avec le TD de Pascal consacré à la complexité. Il vise à présenter un algorithme permettant de calculer l'image d'un réel par une fonction polynômiale de façon plus efficace que la méthode naïve qui est la première à venir à l'esprit.

14.2.1 Algorithme naïf

Soient donc un polynôme $P = \sum_{k=0}^{k=n} a_k X^k$, et un réel x. On cherche à calculer le plus efficacement possible la valeur de $P(x)$. La méthode « bête » consiste à calculer toutes les puissances de x jusqu'à x^n, puis à multiplier chaque puissance par le coefficient de P correspondant, et enfin à faire la somme de tous les nombres ainsi obtenus. Cette méthode nécessite d'effectuer $2n$ multiplications ($n-1$ pour obtenir les puissances de x allant de x^2 à x^n, puis $n+1$ pour multiplier chacune des puissances par un coefficient), et n additions. Une implémentation possible en Pascal, à l'aide de tableaux, est donnée par le programme suivant :

```
PROGRAM naif;
USES wincrt;
VAR p,q : ARRAY[0..99] OF real; n,i : integer; a,x : real;
BEGIN
WriteLn('Quel est le degré de votre polynôme ?');
ReadLn(n);
FOR i := 0 TO n DO
BEGIN
WriteLn('Coefficient du terme de degré ',i,' ?');
ReadLn(p[i]);
```

```
END;
q[0] := 1;
WriteLn('Quelle est la valeur de x ?');
ReadLn(x);
q[1] := x;
FOR i := 2 TO n DO q[i] := x*q[i-1];
FOR i := 0 TO n DO q[i] := p[i]*q[i];
a := q[0];
FOR i := 1 TO n DO a := a+q[i];
WriteLn('P(',x,')=',a);
END.
```

14.2.2 Algorithme de Hörner

La deuxième que nous allons maintenant présenter consiste simplement à faire les calculs dans un ordre subtilement différent, qui permet d'économiser une partie des multiplications. Elle est fondée sur le résultat suivant :

Proposition 97. Soit $P = \sum_{k=0}^{k=n} a_k X^k$ un polynôme et x un réel, alors $P(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + x(\dots(a_{n-1} + xa_n)))$.

Exemple : Soit $P(x) = 3x^4 - x^3 + 5x^2 - 4x + 6$. On cherche à calculer $P(2)$. La méthode de Hörner consiste à partir de la valeur de a_n, ici 3 puis, à chaque étape, de multiplier la valeur précédente par x et d'ajouter le coefficient qui suit dans l'écriture de P par puissances descendantes. Ainsi, on calculera ici successivement $3 \times 2 - 1 = 5$; $5 \times 2 + 5 = 15$; $15 \times 2 - 4 = 26$; $26 \times 2 + 6 = 58$. On en conclut que $P(2) = 58$.

Cet algorithme est effectivement plus efficace que l'algorithme naïf puisqu'on effectue seulement n multiplications et n additions (une multiplication et une addition à chaque étape). Il est par ailleurs plus facile à programmer en Pascal, et c'est l'algorithme utilisé par toutes les machines qui ont besoin de calculer des images par des fonctions polynômiales.

```
PROGRAM Horner;
USES wincrt;
VAR p : ARRAY[0..99] OF real; a,x : real; i,n : integer;
BEGIN
WriteLn('Quel est le degré de votre polynôme ?');
ReadLn(n);
FOR i := 0 TO n DO
BEGIN
WriteLn('Coefficient du terme de degré ',i,' ?');
ReadLn(p[i]);
END;
WriteLn('Quelle est la valeur de x ?');
ReadLn(x);
a := p[n];
FOR i := n-1 DOWNTO 0 DO a := a*x+p[i];
WriteLn('P(',x,')=',a);
END.
```

14.3 Factorisation

Définition 133. Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]^2$. On dit que P est **divisible** par Q (ou que Q **divise** P) s'il existe un polynôme $R \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = QR$.

Théorème 24. Division euclidienne sur les polynômes.
Soient $A, B \in \mathbb{R}[X]^2$, alors il existe un unique couple de polynômes $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2$ tels que $A = BQ + R$, et $d^\circ(R) < d^\circ(B)$.

Définition 134. Le polynôme Q est appelé **quotient** de la division euclidienne de A par B. Le polynôme R est le **reste** de cette même division euclidienne.

Exemple : Une division euclidienne de polynômes peut se présenter sous le même forme que la division euclidienne d'entiers que vous avez apprise à l'école primaire. On cherche le terme dominant du quotient, on le multiplie par le diviseur puis on soustrait le résultat obtenu du dividende, et on recommence jusqu'à obtenir le terme de degré 0 du quotient. Ainsi, pour effectuer la division euclidienne de $X^4 - 3X^3 + 5X^2 + X - 3$ par $X^2 - 2X + 1$, on peut présenter le calcul sous la forme suivante :

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr|l}
 & X^4 & - & 3X^3 & + & 5X^2 & + & X & - & 3 & X^2-2X+1 \\ \cline{11-11}
- & (X^4 & - & 2X^3 & + & X^2) & & & & & X^2-X+2 \\
 & & - & X^3 & + & 4X^2 & + & X & - & 3 & \\
 & & - & (-X^3 & + & 2X^2 & - & X) & & & \\
 & & & & & 2X^2 & + & 2X & - & 3 & \\
 & & & & - & (2X^2 & - & 4X & + & 2) & \\
 & & & & & & & 6X & - & 5 &
\end{array}$$

Conclusion : $X^4 - 3X^3 + 5X^2 + X - 3 = (X^2 - X + 2)(X^2 - 2X + 1) + 6X - 5$.

Définition 135. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $x \in \mathbb{R}$. On dit que x est une **racine** du polynôme P si $P(x) = 0$.

Proposition 98. Un réel a est racine du polynôme P si et seulement si $X - a$ divise P.

Démonstration. C'est une conséquence de la division euclidienne. Si on effectue la division de P par $X - a$, on sait que le reste sera de degré strictement inférieur à celui de $X - a$, donc sera une constante. Autrement dit, $\exists k \in \mathbb{R}$, $P = Q(X - a) + k$. On a donc $P(a) = 0 \Leftrightarrow Q(a)(a - a) + k = 0 \Leftrightarrow k = 0$. Autrement dit, a est une racine de P lorsque le reste de la division de P par $X - a$ est nul, donc quand P est divisible par $X - a$. □

Exemple : on a déjà fréquemment utilisé cette propriété pour factoriser des polynômes de degré 3 possédant une récine « évidente ». Soit par exemple $P = 2X^3 - 3X^2 + 5X - 4$. On constate que 1 est racine évidente de P : $P(1) = 2 - 3 + 5 - 4 = 0$, donc P est factorisable par $X - 1$: $P = (X - 1)(aX^2 + bX + c) = aX^3 + (b - a)X^2 + (c - b)X - c$. Par identification, on obtient $a = 2$; $b - a = -3$; $c - b = 5$ et $-c = -4$, donc $a = 2$; $b = -1$ et $c = 4$, soit $P = (X - 1)(2X^2 - X + 4)$. Ce dernier facteur ayant un discriminant négatif, P n'admet pas d'autre racine que 1.

Définition 136. Soit P un polynôme et a une racine de P. On dit que a est une racine **d'ordre de multiplicité** $k \in \mathbb{N}^*$ si $(X - a)^k$ divise P.

Proposition 99. Une racine a est d'ordre de multiplicité k pour P si et seulement si $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(k-1)}(a) = 0$.

Remarque 119. La notation de dérivée pour un polynôme réel correspond à la dérivée de la fonction polynômiale associée. On peut en fait définir formellement le polynôme dérivé d'un polynôme sans passer par une interprétation en terme de fonctions. On notera également qu'on emploie souvent plus simplement le terme d'ordre ou celui de multiplicité à la place d'ordre de multiplicité.

Exemple : Considérons le polynôme $P = X^4 - 2X^3 - 19X^2 + 68X - 60$ et constatons ensemble que 2 est une racine double de P. En effet, on a $P(2) = 16 - 2\times 8 - 19\times 4 + 68\times 2 - 60 = 16 - 16 - 76 + 136 - 60 = 0$; de plus, $P' = 4X^3 - 6X^2 - 38X + 68$, donc $P'(2) = 4\times 8 - 6\times 4 - 38\times 2 + 68 = 32 - 24 - 76 + 68 = 0$. on peut en déduire, via la proposition précédente, que P est factorisable par $(X-2)^2$. Effectuons une petite division euclidienne pour obtenir cette factorisation :

$$
\begin{array}{ccccccccccc|l}
 & X^4 & - & 2X^3 & - & 19X^2 & + & 68X & - & 60 & & \underline{X^2 - 4X + 4} \\
- & (X^4 & - & 4X^3 & + & 4X^2) & & & & & & X^2 + 2X - 15 \\
 & & & 2X^3 & - & 23X^2 & + & 68X & - & 60 & & \\
 & & - & (2X^3 & - & 8X^2 & + & 8X) & & & & \\
 & & & & - & 15X^2 & + & 60X & - & 60 & & \\
 & & & & - & (-15X^2 & + & 60X & - & 60) & & \\
 & & & & & & & & & 0 & &
\end{array}
$$

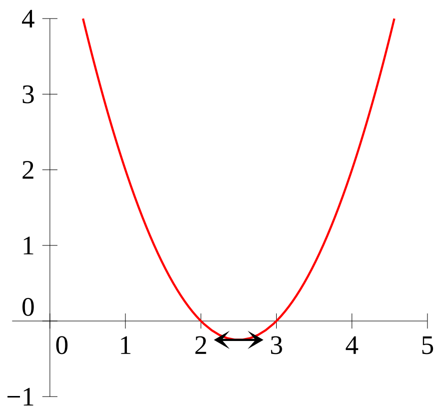
On a donc $P(X) = (X-2)^2(X^2 + 2X - 15)$. Le deuxième facteur a pour discriminant $\Delta = 4 + 60 = 64$, et admet deux racines réelles $x_1 = \dfrac{-2-8}{2} = -5$ et $x_2 = \dfrac{-2+8}{2} = 3$. On peut donc factoriser P sous la forme $P(X) = (X-2)^2(X-3)(X+5)$. On ne risque pas de factoriser plus puisqu'il ne reste que des facteurs de degré 1. En général, on a le résultat suivant :

Théorème 25. Un polynôme de degré n admet au plus n racines réelles. Plus précisément, la somme des multiplictés de ses racines est au plus égale à n.

14.4 Représentation graphique de fonctions polynômiales

14.4.1 Rappels sur les polynômes du second degré

La courbe représentative d'une fonction polynômiale de degré 2, donnée par une équation du type $P(x) = ax^2 + bx + c$, est une parabole dont la concavité est donnée par le signe de a (convexe si $a > 0$, concave si $a < 0$), et de sommet atteint pour $x = -\dfrac{b}{2a}$. Si $b^2 - 4ac > 0$, la courbe coupe l'axe des abscisses en deux points symétriques par rapport au sommet de la parabole. Un exemple de courbe, pour la fonction $f(x) = x^2 - 5x + 6$ (sommet atteint pour $x = \dfrac{5}{2}$) :



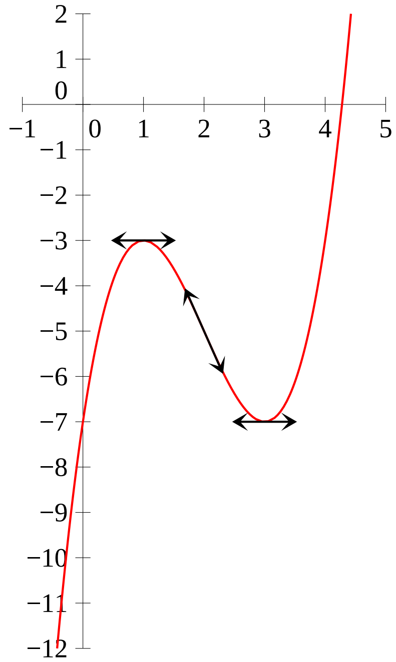
14.4.2 Exemple d'étude de fonction polynômiale de degré 3

Une fonction f polynômiale de degré 3 a pour dérivée f' une fonction polynômiale de degré 2. L'allure de la courbe représentative de f sera liée au signe du discriminant de f'. Si ce discriminant est positif ou nul, la fonction est strictement monotone (la seule différence dans le cas du discriminant nul est qu'on aura une tangente horizontale au point d'inflexion de la courbe), ressemblant à celle de la fonction cube. Si le discriminant est négatif, la fonction changera deux fois de sens de variation, et admettra accessoirement un unique point d'inflexion situé exactement entre ses deux extrema.

Prenons ainsi $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 7$. On a $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3)$. Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4$ et admet deux racines $x_1 = \dfrac{4-2}{2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{4+2}{2} = 3$. On peut s'amuser à vérifier que la dérivée seconde $f''(x) = 6x - 12$ s'annule pour $x = 2$, donc entre les deux racines de f' comme prévu (on peut également calculer $f'(2) = -3$ pour tracer la tangente correspondante sur la courbe). De plus, $f(1) = -3$ et $f(3) = 27 - 54 + 27 - 7 = -7$, d'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-7	$\nearrow$	$+\infty$

Et la petite courbe qui va avec :



14.4.3 Exemple d'étude de fonction polynômiale de degré 4

On peut assez aisément généraliser les résultats du paragraphe précédent en utilisant la borne sur le nombre de racines d'un polynôme en fonction de son degré :

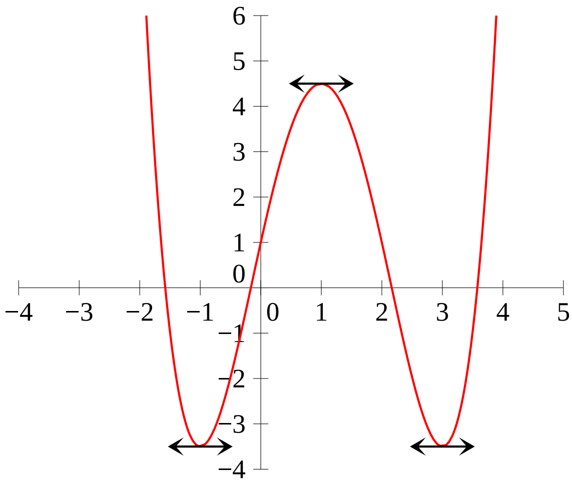
Proposition 100. Une fonction polynômiale de degré n change de variations au plus $n-1$ fois. Elle admet au plus $n-2$ points d'inflexion.

Il est par contre difficile en général d'étudier des fonctions polynômiales de degré supérieur ou égal à 4 puisque l'étude du signe de la dérivée ne sera pas faisable de façon exacte en général. Donnons tout de même un dernier exemple où la dérivée a le bon goût d'admettre une racine évidente : soit $f(x) = \dfrac{x^4}{2} - 2x^3 - x^2 + 6x + 1$. La dérivée de f est $f'(x) = 2x^3 - 6x^2 - 2x + 6 = 2(x^3 - 3x^2 - x + 3)$. Cette dérivée a pour racine évidente 1, on peut donc écrire $f'(x) = 2(x-1)(ax^2 + bx + c) = 2(ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c)$. Par identification, on obtient $a = 1$; $b - a = -3$; $c - b = -1$

et $-c = 3$, donc $a = 1$; $b = -2$ et $c = -3$. On a donc $f'(x) = 2(x-1)(x^2 - 2x - 3)$. Ce dernier facteur a pour discriminant $\Delta = 4 + 12 = 16$, et a pour racines $x_1 = \dfrac{2-4}{2} = -1$ et $x_2 = \dfrac{2+4}{2} = 3$. Finalement, $f'(x) = 2(x-1)(x+1)(x-3)$. Comme $f(1) = \dfrac{9}{2}$; $f(-1) = -\dfrac{7}{2}$ et $f(3) = -\dfrac{7}{2}$, on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\dfrac{7}{2}$	$\nearrow$	$\dfrac{9}{2}$	$\searrow$	$-\dfrac{7}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Avec un peu de courage, on peut rechercher les points d'inflexion : $f''(x) = 6x^2 - 12x - 2 = 2(3x^2 - 6x - 1)$. Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 36 + 12 = 48$ et admet donc deux racines pas suffisamment simples pour qu'on aie envie de pousser les calculs plus loin. Ici, les deux points d'inflexion seront symétriques par rapport au minimum de la courbe, mais en général ce ne sera pas le cas pour une fonction de degré 4. Pour terminer, voici la courbe :



Chapitre 15

Variables aléatoires finies

Introduction

Pour introduire cette nouvelle notion, absolument fondamentale en probabilités (tellement d'ailleurs que vous n'entendrez plus parler que de ça jusqu'à la fin de l'année, à peu de choses près), reprenons un exemple extrêmement classique : le lancer de deux dés. On lance donc deux dés, on observe la somme des deux chiffres obtenus et on essaie de déterminer les probabilités de certains événements en relation avec cette somme. Autrement dit, au lieu de travailler directement sur les résultats de l'expérience (sur l'univers Ω pour reprendre le vocabulaire consacré, qui serait ici constitué de tous les couples d'entiers compris entre 1 et 6 et aurait pour cardinal 36), on commence par associer à chaque résultat un nombre (ici la somme des deux dés, mais on pourrait prendre le produit, ou s'amuser à faire des choses plus compliquées), et on travaille avec ces nombres. Eh bien, une variable aléatoire, c'est exactement ça : une application qui, à chaque élément de Ω, associe un nombre réel.

15.1 Variables aléatoires finies

15.1.1 Définition, notations

Définition 137. Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable. Une **variable aléatoire** (réelle) X sur Ω est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\{\omega \in \Omega | X(\omega) \leqslant x\} \in \mathcal{T}$.

Remarque 120. On note $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X (qui est bien l'image de l'ensemble Ω par l'application X).

Exemple : L'application qui à chaque français associe sa taille est une variable aléatoire sur l'ensemble de la population française. On a ici $X(\Omega) \subset [0; 3]$ (j'ai pris large).
Exemple : Dans une urne contenant 15 boules noires et 12 blanches, on en tire 4. Si on note X le nombre de boules noires obtenues lors de ces quatre tirages, X est une variable aléatoire, et $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3; 4\}$.

La définition que je viens de donner étant très générale, nous allons très rapidement nous restreindre à un cas particulier : **pour la suite du chapitre, on supposera que l'univers Ω est fini**. Dans ce cas, une variable aléatoire sera simplement une application de Ω dans $\mathbb{R}$ (et même le plus souvent dans $\mathbb{N}$), qui prendra donc nécessairement un nombre fini de valeurs (et on peut oublier la condition technique de la définition générale).

Définition 138. Soit X une variable aléatoire sur un univers Ω. On note habituellement $X = x$, l'événement $\{\omega \in \Omega | X(\omega) = x\}$. On utilisera de même la notation $X \leqslant x$ pour l'événement $\{\omega \in \Omega | X(\omega) \leqslant x\}$ (et $X \geqslant x$; $X < x$ et $X > x$ pour des évèvements similaires).

Exemple : Ainsi, si on reprend l'exemple du lancer de deux dés, avec comme variable aléatoire X la somme des deux dés, on pourra écrire $P(X = 4) = \dfrac{1}{12}$ (il y a trois cas sur les 36 possibles pour lesquels la somme des deux dés donne 4), ou encore $P(X \geqslant 10) = \frac{1}{6}$ (six cas valables sur 36).

Proposition 101. Soient X et Y deux variables aléatoires sur un même univers Ω, alors $X+Y$, XY, λX (où λ est un réel quelconque), $\max(X,Y)$ et $\min(X,Y)$ sont également des variables aléatoires.

Pas de démonstration, c'est évident, ce sont aussi des applications de Ω dans $\mathbb{R}$.

Proposition 102. Soit X une variable aléatoire sur Ω et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, alors $g(X) : \omega \mapsto g(X(\omega))$ est aussi une variable aléatoire (notée $g(X)$).

Exemple : Dans un cinéma, on observe le nombre de spectateurs assistant à chacune des quatre séances quotidiennes pendant 20 jours de suite. On note X_1 le nombre de spectateurs de la première séance (l'ensemble Ω étant ici celui constitué des 20 jours que dure l'étude), X_2, X_3 et X_4 les nombres de specteurs des séances suivantes. La variable $X = \max(X_1, X_2, X_3, X_4)$ associera à chaque jour d'étude le nombre de spectateurs de la séance la plus remplie du jour.

15.1.2 Loi d'une variable aléatoire

L'intérêt des variables aléatoires est bien entendu d'étudier la probabilité d'apparition de chacun des résultats possibles :

Définition 139. Soit X une variable aléatoire, la **loi de probabilité** de X est la donnée des probabilités $P(X = k)$, pour toutes les valeurs k prises par X (c'est-à-dire pour $k \in X(\Omega)$).

Remarque 121. Pour calculer la loi d'une variable aléatoire, il suffit donc de déterminer toutes les valeurs qu'elle peut prendre, puis calculer la probabilité de chaque résultat.

Exemple : Reprenons notre exemple de la somme de deux dés. On peut présenter la loi de X sous la forme d'un tableau :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

Proposition 103. Les événements $(X = k)_{k \in X(\Omega)}$ forment un système complet d'événements. On a donc $\sum_{k \in X(\Omega)} P(X = k) = 1$.

Démonstration. Ces événements sont incompatibles (on ne peut pas avoir à la fois $X(\omega) = k$ et $X(\omega) = k'$ pour des valeurs différentes de k et k'). Leur réunion est bien Ω tout entier puisque chaque élément ω de Ω a une image par X. □

Exemple : On lance six fois de suite une pièce de monnaie équilibrée et on note X le nombre de Piles onbtenus. Dans ce cas, $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, et le nombre de tirages (sur les 64 possibles) contenant k Piles vaut $\binom{6}{k}$ (il suffit de choisir la position des k Piles parmi les 6 lancers), d'où la loi suivante :

k	0	1	2	3	4	5	6
$P(X = k)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{20}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{1}{64}$

Exemple : Dans une urne se trouvent cinq jetons numérotés de 1 à 5. On en tire 3 simultanément et on note X le plus petit des trois numéros tirés. On a ici $X(\Omega) = \{1; 2; 3\}$ (si on tire trois jetons, le plus petit ne peut pas être plus grand que 3). Pour déterminer la loi, le plus simple est de dénombrer tous les cas possibles (il n'y en a que 10), même si on peut exprimer les probabilités à l'aide de coefficients binomiaux (par exmple, pour avoir $X = 1$, il faut tirer le jeton 1 puis deux autres parmi les 4 restants, soit $\binom{4}{2}$ tirages favorables sur les $\binom{5}{3}$). on obtient en tout cas :

k	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

Exemple : On lance deux fois de suite un dé à quatre faces (si, si, ça existe). On note X la variable aléatoire égale à la différence (en valeur absolue) des résultats deux lancers. On a ici $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$, et la loi de X est la suivante :

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

15.1.3 Fonction de répartition

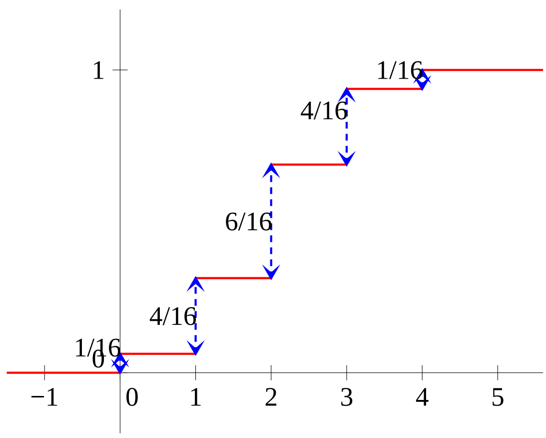
La fonction de répartition est simplement une autre façon de représenter la loi d'une variable aléatoire. Dans le cas des lois finies, elle n'apporte absolument aucune information supplémentaire, et son utilité est donc limitée. Mais vous verrez (surtout l'an prochain) que c'est une notion essentielle dans le cadre des variables aléatoires continues, où la représentation de la loi sous forme de tableau n'a plus de sens.

Définition 140. La **fonction de répartition** d'une variable aléatoire X est la fonction $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F_X(x) = P(X \leqslant x)$.

Exemple : Reprenons une suite de lancers de pièce équilibrée, et limitons-nous à quatre lancers. On veut tracer la courbe de la fonction de répartition de la variable X donnant le nombre de Piles obtenus lors de ces quatre lancers. La loi de X est donnée par le tableau suivant :

k	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

La courbe de F_X ressemble à ceci (à chaque fois qu'on atteint une des valeurs appartenant à $X(\Omega)$, on fait un bond dont la hauteur est la probabilité correspondante) :



Proposition 104. Si X est une variable aléatoire finie, la fonction F_X est une fonction en escalier (c'est-à-dire qu'on peut découper $\mathbb{R}$ en un nombre fini d'intervalles sur lesquels la fonction est constante), dont les sauts se produisent pour les valeurs k appartenant à $X(\Omega)$ et ont pour hauteur $P(X = k)$. Dans le cas général, une fonction de répartition vérifie toujours les propriétés suivantes :

- La fonction F_x est croissante.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$.
- La fonction F_x est continue à droite en tout réel.

Proposition 105. Lien entre loi et fonction de répartition.
Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F_X. Alors

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \sum\limits_{k\in X(\Omega)|k\leqslant x} P(X = k)$
- dans l'autre sens, $\forall k \in X(\Omega)$, $P(X = k) = F_X(k) - \lim\limits_{x\to k^-} F_X(x)$

On a plus généralement, pour tous réels x et y, $P(x < X \leqslant y) = F_X(y) - F_X(x)$.

Exemple : Pour mieux comprendre l'intérêt de cette notion, prenons un exemple continu (sans l'étudier en détail). On note X la variable aléatoire donnant le temps d'attente (en heures) d'un client aléatoire à un guichet de la Poste. On supposer pour fixer les idées que $X(\Omega) = [0; 4]$ (au bout de 4 heures, le client en aura vraiment assez d'attendre). Pour ce genre de variable aléatoire, la fonction F_X ne sera plus une fonction en escalier mais simplement une fonction croissante « ordinaire » (elle a par exemple toutes les chances de ne pas comporter de sauts comme dans le cas d'une variable finie, mais plutôt d'être continue). Déterminer la probabilité d'attendre entre 1 et 2 heures au guichet revient d'après la dernière formule donnée dans la propriété précédente à calculer $F_X(2) - F_X(1)$.

15.1.4 Moments d'une variable aléatoire

Lorsqu'on s'intéresse à une variable aléatoire pouvant prendre un grand nombre de valeurs (et même dans les autres cas !), il peut être intéressant de donner, en plus de la loi de la variable qui ne sera pas toujours une donnée très lisible, des caractéristiques d'ensemble de cette loi, comme la moyenne des valeurs prises (pondérées par leur probabilité d'apparition). Ces paramètres sont les mêmes que ceux qu'on étudie en statistiques, nous allons plus particulièrement nous intéresser à l'espérance (qui n'est autre que la moyenne évoquée plus haut, c'est un paramètre de position) et à l'écart-type (paramètre de dispersion, qui mesure la répartition des valeurs autour de l'espérance).

Espérance

Exemple : En colles avec M.Conduché, un élève estime avoir :

- une chance sur 4 d'avoir un exercice qu'il maitrise et d'obtenir une note de 15.
- une chance sur 4 d'avoir un exercice incompréhensible mais d'attendrir le colleur et avoir 13.
- une chance sur 2 d'avoir un exercice incompréhensible et de sauver un 10 grâce à sa connaissance parfaite du cours.

La note moyenne que peut espérer avoir cet élève à sa colle est de $\frac{1}{4} \times 15 + \frac{1}{4} \times 13 + \frac{1}{2} \times 10 = 12$. Ce calcul est un calcul d'espérance mathématique, celle de la variable aléatoire donnant la note de l'élève à sa colle.

Définition 141. L'**espérance** d'une variable aléatoire X est définie par la formule

$$E(X) = \sum_{k\in X(\Omega)} kP(X = k)$$

Remarque 122. Il s'agit bel et bien d'un calcul de moyenne avec coefficients égaux à $P(X = k)$, la somme des coefficients valant ici 1.

Exemple : Reprenons l'exemple de six lancers consécutifs de pièce, où X était le nombre de Pile obtenu. On aura $E(X) = 0 \times \frac{1}{64} + 1 \times \frac{3}{32} + 2 \times \frac{15}{64} + 3 \times \frac{5}{16} + 4 \times \frac{15}{64} + 5 \times \frac{3}{32} + 6 \times \frac{1}{64} = 3$. Le résultat est bien conforme à l'intuition qu'on a de la moyenne de la variable aléatoire X.
Exemple : Lors d'une tombola, 1000 personnes ont misé 2 euros. Il y a 100 personnes qui gagnent un lot d'une valeur de 5 euro, 10 gagnent un lot d'une valeur de 10 euros, 3 personnes gagnent un lot d'une valeur de 100 euros et enfin une personne gagne le gros lot, d'une valeur de 600 euros. Naturellement, les 886 personnes restantes ne gagnent rien. On note X la variable aléatoire correspondant au gain. On a $E(X) = 0 \times \frac{886}{1000} + 5 \times \frac{100}{1000} + 10 \times \frac{10}{1000} + 100 \times \frac{3}{1000} + 600\frac{1}{1000} = 1.5$. Autrement dit, chaque participant gagnera en moyenne 1.5 euro, ou plutôt en perdra 0.5 sur les deux qu'il avait misés. On comprend mieux sur cet exemple l'origine du terme espérance, et accessoirement la façon dont la Française des Jeux se remplit les poches.

Définition 142. Soit A un évènement inclus dans notre univers Ω. On appelle **variable indicatrice de l'évènement** A, et on note $\mathbf{1}_A$, la variable aléatoire définie par $\mathbf{1}_A(\omega) = 1$ si $\omega \in A$, et $\mathbf{1}_A(\omega) = 0$ sinon.

Proposition 106. La variable aléatoire constante $X : \omega \mapsto a$, $a \in \mathbb{R}$, a une espérance $E(X) = a$. L'espérance d'une variable aléatoire indicatrice $\mathbf{1}_A$ vaut $P(A)$.

Démonstration. C'est bien parce que je suis consciencieux que je fais une preuve. Dans le premier cas, la loi de X est simple : a avec probabilité 1. On a donc $E(X) = 1 \times a = a$ en appliquant la définition de l'espérance. Dans le second, la loi de $\mathbf{1}_A$ est à peine plus compliquée, 1 si $\omega \in A$ c'est-à-dire avec probabilité $P(A)$ et 0 sinon, donc avec probabilité $1 - P(A)$. L'espérance vaut bien $P(A)$. □

Proposition 107. Linéarité de l'espérance.
Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même univers Ω, et a, b deux réls, on a $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$. En particulier, on aura toujours $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$; $E(aX) = aE(X)$, ou encore en utilisant l'espérance d'une variable constante calculée plus haut, $E(X + b) = E(X) + b$.

Démonstration. La preuve est un peu formelle et sera esquivée cette année. □

Exemple : Cette propriété très simple est mine de rien bien utile (c'est même la propriété fondamentale à maitriser sur l'espérance). On lance par exemple successivement 90 dés. On note X le nombre de 6 obtenus. Calculer l'espérance directement demande un certain courage (la loi de X est une horreur absolue), mais on peut ruser ! Notons A_i l'évènement « On tire un 6 au lancer numéro i » et $\mathbf{1}_{A_i}$ la variable indicatrice correspondante. On peut constater que $X = \mathbf{1}_{A_1} + \mathbf{1}_{A_2} + \cdots + \mathbf{1}_{A_{90}}$ (en effet, additionner les variables indicatrices revient à ajouter 1 à chaque fois qu'un 6 sort, et 0 sinon, ce qui revient exactement à compter le nombre de 6). O a donc $E(X) = E(\mathbf{1}_{A_1}) + E(\mathbf{1}_{A_2}) + \cdots + E(\mathbf{1}_{A_{90}}) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_{90}) = \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{6} = \frac{90}{6} = 15$ (résultat intuitivement évident, soit dit en passant).

Définition 143. Une variable aléatoire X est dite **centrée** si $E(X) = 0$.

Proposition 108. Si X est une variable aléatoire d'espérance m, la variable aléatoire $X - m$ est centrée. On l'appelle **variable aléatoire centrée associée à** X.

Démonstration. Par linéarité, $E(X - m) = E(X) - E(m) = m - m = 0$. □

Proposition 109. Si X est une variable aléatoire positive (c'est-à-dire que $X(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$), on a $E(X) \geqslant 0$. Si X, Y sont deux variables aléatoires telles que $X \leqslant Y$ (c'est-à-dire que $\forall \omega \in \Omega$, $X(\omega) \leqslant Y(\omega)$), alors $E(X) \leqslant E(Y)$.

Démonstration. C'est une fois de plus évident. Tous les termes intervenant dans le calcul de l'espérance de X étant positifs, la somme sera nécessairement positive. Pour la deuxième propriété, on peut utiliser une ruse classique : si $X \leqslant Y$, la variable aléatoire $Y - X$ est positive, donc $E(Y - X) \geqslant 0$. Or, $E(Y - X) = E(Y) - E(X)$, ce qui nous donne l'inégalité voulue. □

Théorème 26. (théorème du transfert) Soit X une variable aléatoire et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, alors on a $E(g(X)) = \sum_{k \in X(\Omega)} g(k)P(X = k)$.

Démonstration. On admettra ce résultat qui est un peu technique à prouver. C'est évident dans le cas où les images par g des valeurs k sont distinctes, mais un peu plus pénible à rédiger dans le cas général. □

Moments d'ordre supérieur

Définition 144. Soit X une variable aléatoire et r un entier strictement positif, le **moment d'ordre** r de X, noté $m_r(X)$, est l'espérance de la variable aléatoire X^r. Autrement dit (en utilisant le théorème du transfert) $m_r(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k^r P(X = k)$.

Remarque 123. Le moment d'ordre 1 de X n'est autre que l'espérance de X.

Définition 145. La **variance** $V(X)$ d'une variable aléatoire X est le moment d'ordre 2 de la variable aléatoire centrée associée à X. Autrement dit, $V(X) = E((X - E(X))^2)$. L'écart-type σ de la variable aléatoire X est défini par $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Que représente cette variance ? Il s'agit, techniquement, d'une moyenne de carrés d'écarts à la moyenne. Pourquoi prendre le carré ? Tout simplement car la moyenne des écarts à la moyenne est nulle. Pour réellement mesurer ces écarts, il faut « les rendre positifs », ce qui se fait bien en les élevant au carré. On pourrait également penser à prendre leur valeur absolue, mais cela aurait moins de propriétés intéressantes pour le calcul. Par contre, pour « effacer »la mise au carré, on reprend ensuite la racine carrée du résultat obtenu pour définir l'écart-type. L'écart-type représente donc (comme son nom l'indique) un écart moyen entre les valeurs prises par X et la moyenne de X (plus il est grand, plus les valeurs prises par X sont étalées).

Proposition 110. La variance d'une variable aléatoire est toujours positive.
On a la formule $V(aX + b) = a^2V(X)$.

Démonstration. La première propriété découle immédiatement de la définition du moment d'ordre 2, qui est une somme de termes positifs. Pour la deuxième, c'est du calcul un peu formel. Il faut calculer l'espérance de $(aX + b - E(aX + b))^2$. Or, par linéarité de l'espérance, $E(aX + b) = aE(X) + b$ dont l'expression précédente vaut $(aX + b - aE(X) - b)^2 = a^2(X - E(X))^2$, dont l'espérance vaut $a^2E((X - E(X))^2) = a^2V(X)$. □

Remarque 124. Une variable aléatoire a une variance (et un écart-type) nulle si et seulement si elle est constante.

Théorème 27. Théorème de König-Huygens : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

Démonstration. C'est à nouveau un calcul très formel : $(X - E(X))^2 = X^2 - 2E(X)X + (E(X))^2$, donc, par linéarité de l'espérance, $V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(E(X))^2 = E(X^2) - 2E(X)^2 + (E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$. □

Remarque 125. En pratique, c'est à peu près systématiquement via la formule de König-Huygens que nous effectuerons nos calculs de variance.

Définition 146. Une variable aléatoire est dite **réduite** si son écart-type (et donc sa variance) vaut 1.

Proposition 111. Si X est une variable aléatoire, la **variable aléatoire centrée réduite associée à** X est $X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ (qui est, vous vous en seriez doutés, centrée et réduite).

Démonstration. On a déjà vu plus haut que $X - E(X)$ était centrée, la diviser par l'écart-type ne va pas changer cela. De plus, $V\left(\dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}\right) = \left(\dfrac{1}{\sigma(X)}\right)^2 V(X) = 1$ □

Exemple : il me manquait trop, je n'ai pas pu résister au plaisir de vous remettre une dernière fois le désormais célèbre exemple du lancer de deux dés, où la variable aléatoire X est égale à la somme des deux dés. On a $E(X) = 7$ (logique) donc $V(X) = \sum\limits_{2 \leqslant i \leqslant 12} (i-7)^2 P(X = i) = \dfrac{35}{6}$ (calcul peu passionnant). L'écart-type vaut donc $\sigma(X) \simeq \sqrt{\dfrac{35}{6}} \simeq 2.415$.

15.2 Lois usuelles finies

Certaines lois de probabilité interviennent suffisamment régulièrement lorsqu'on étudie des variables aléatoires dans des cas classiques (lancers de dés ou de pièces, tirages de boules dans des urnes, bref toutes les bêtises qu'on aime bien vous infliger dans les exercices de probas) pour qu'il soit intéressant de les étudier une bonne fois pour toutes (et accessoirement de leur donner un nom) et d'en retenir les caractéristiques (espérance et variance notamment). Nous en étudierons quatre dans ce chapitre, et deux autres quand nous aurons étudié de façon plus approfondie les variables aléatoires infinies.

15.2.1 Loi uniforme

Définition 147. On dit que la variable aléatoire X suit une **loi uniforme sur** $\{1; \dots ; n\}$, et on note $X \sim \mathcal{U}(\{1; \dots ; n\})$, si $X(\Omega) = \{1; \dots ; n\}$ et $\forall k \in \{1; \dots ; n\}$, $P(X = k) = \dfrac{1}{n}$.

Exemple fondamental : On tire un dé équilibré à n faces et on note X le nombre tiré.

Proposition 112. Si $X \sim \mathcal{U}(\{1; \dots ; n\})$, on a $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$ et $V(X) = \dfrac{n^2 - 1}{12}$.

Démonstration. Pour l'espérance, on a $E(X) = \sum\limits_{k=1}^{k=n} k \times \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{k=n} k = \dfrac{1}{n} \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n+1}{2}$.
Pour la variance, on va utiliser la formule de König-Huygens. On a $E(X^2) = \sum\limits_{k=1}^{k=n} k^2 \times \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6}$ donc $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6} - \dfrac{(n+1)^2}{4} = \dfrac{2(n+1)(2n+1) - 3(n+1)^2}{12} = \dfrac{4n^2 + 6n + 2 - 3n^2 - 6n - 3}{12} = \dfrac{n^2 - 1}{12}$. □

Remarque 126. À partir d'une loi uniforme prenant ses valeurs entre 1 et n, on construit facilement une loi dont la probabilité est uniforme entre deux entiers m et p (il suffit d'ajouter une constante). La loi ainsi construite a une espérance égale à $\dfrac{a+b}{2}$ et une variance égale à $\dfrac{(b-a+1)^2 - 1}{12}$.

15.2.2 Loi de Bernoulli

Définition 148. On dit que la variable aléatoire X suit une **loi de Bernoulli de paramètre** p (avec $p \in [0; 1]$) si $X(\Omega) = \{0; 1\}$; $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$. On le note $X \sim \mathcal{B}(1, p)$.

Exemple fondamental : On lance une pièce mal équilibrée pour laquelle la probabilité d'obtenir Pile vaut p et on note X la variable aléatoire valant 1 si on tombe sur Pile et 0 si on tombe sur face.

Remarque 127. Cette loi est aussi appelée loi indicatrice de paramètre p, puisqu'elle apparait essentiellement dans le cas où X est la variable aléatoire indicatrice d'un événement.

Proposition 113. Si $X \sim \mathcal{B}(1,p)$, alors $E(X) = p$ et $V(X) = p(1-p)$.

Démonstration. Pour l'espérance, on a déjà fait le calcul un peu plus haut. On a par ailleurs de la même façon $E(X^2) = p$, donc $V(X) = p - p^2 = p(1-p)$. □

Remarque 128. On utilise surtout en pratique des sommes de variables aléatoires suivant des lois de Bernoulli, comme on a déjà pu le faire dans le cas du lancer successif de 90 dés.

15.2.3 Loi binômiale

Définition 149. On dit qu'une variable aléatoire X suit une **loi binomiale de paramètre** (n,p) (avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0;1]$) si $X(\Omega) = \{0;\dots;n\}$ et $\forall k \in \{0;\dots;n\}$, $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. On le note $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.

Exemple fondamental : Une urne contient des boules blanches et noires, avec une proportion p de boules blanches. On tire n boules **avec remise** dans l'urne et on note X le nombre de boules blanches obtenues.

Remarque 129. Si $n = 1$, la loi binomiale de paramètre $(1,p)$ n'est autre que la loi de Bernoulli de paramètre p, ce qui justifie l'emploi de la même notation.

Remarque 130. Une autre façon de voir une loi binômiale est de considérer que la variable aléatoire correspondante compte le nombre de réussites quand on tente n fois de suite (de façon indépendante) un tirage ayant une probabilité p de réussir.

Proposition 114. Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, alors $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$ (on note parfois $q = 1-p$, auquel cas on a $V(X) = npq$).

Démonstration. On a $E(X) = \sum_{k=1}^{k=n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. On aimerait bien appliquer le binome de Newton, mais il faut pour cela faire disparaitre le k, ce qui est par exemple possible grace à la formule $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ On a donc $E(X) = \sum_{k=1}^{k=n} n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} = n \sum_{j=0}^{j=n-1} p^{j+1}(1-p)^{n-1-j} = np(p+1-p)^{n-1} = np$.
Pour la variance, on ne va pas calculer $E(X^2)$ directement, mais passer par $E(X(X-1))$, ce qui va permettre d'utiliser la formule $k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$ (obtenue en appliquant deux fois de suite la formule utilisée dans le calcul précédent). Un calcul extrêmement similaire au précédent donne alors $E(X(X-1)) = n(n-1)p^2$, donc $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X(X-1)+X) - E(X)^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np - np^2 = np(1-p)$ □

Remarque 131. Une somme de n variables aléatoires indépendantes (je vous donnerai la définition au prochain chapitre, mais vous pouvez deviner tous seuls de quoi il s'agit) suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre p suit une loi binomiale de paramètre (n,p). Notez qu'on peut utiliser cette remarque pour calculer l'espérance d'une loi binomiale très rapidement (c'est exactement ce qu'on a fait quand on a calculé plus haut l'esérance du nombre de 6 lors de 90 lancers de dés).

15.2.4 Loi hypergéométrique

Définition 150. On dit qu'une variable aléatoire X suit une **loi hypergéométrique de paramètre** (N, n, p) (avec $N \in \mathbb{N}^*$, $1 \leqslant n \leqslant N$ et $p \in [0;1]$) si $X(\Omega) = \{max(0, n - Nq); \dots ; min(n, Np)\}$ (où on a noté $q = 1 - p$) et $\forall k \in \{max(0, n - Nq); \dots ; min(n, Np)\}$, $P(X = k) = \dfrac{\dbinom{Np}{k}\dbinom{Nq}{n-k}}{\dbinom{N}{n}}$. On le note $X \sim \mathcal{H}(N, n, p)$.

Exemple fondamental : Dans une urne se trouvent N boules blanches et noires, avec une proportion p de boules blanches. On tire n boules dans l'urne **sans remise** (ou simultanément) et on note X le nombre de boules blanches obtenues.

Proposition 115. Si $X \sim \mathcal{H}(N, n, p)$, alors $E(X) = np$ et $V(X) = npq\dfrac{N-n}{N-1}$.

Démonstration. Pour simplifier les notations, tous les coefficients binomiaux faisant intervenir des entiers négatifs seront considérés comme nuls. On utilise le même type d'astuce que pour la loi binomiale :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k\frac{\dbinom{Np}{k}\dbinom{Nq}{n-k}}{\dbinom{N}{n}} = \frac{Np}{\dbinom{N}{n}}\sum_{k=1}^{n}\binom{Np-1}{k-1}\binom{Nq}{n-k} = \frac{Np}{\dbinom{N}{n}}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{Np-1}{j}\binom{Nq}{n-1-j}$$

On peut maintenant appliquer la formule de Vandermonde à notre somme et on obtient

$$E(X) = Np\frac{\dbinom{Np+Nq-1}{n-1}}{\dbinom{N}{n}} = Np\frac{\dbinom{N-1}{n-1}}{\dbinom{N}{n}} = NP \times \frac{(N-1)!}{(n-1)!(N-n)!} \times \frac{(N-n)!}{N!n!} = Np\frac{n}{N} = np$$

Pour la variance, on utilise à nouveau les mêmes astuces. On commence par calculer

$$E(X(X-1)) = Np(Np-1)\frac{\dbinom{N-2}{n-2}}{\dbinom{N}{n}} = Np(Np-1)\times\frac{(N-2)!}{(n-2)!(N-n)!}\times\frac{n!(N-n)!}{N!} = \frac{p(Np-1)n(n-1)}{N-1}$$

comme ci-dessus, puis

$$V(X) = E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2 = \frac{p(Np-1)n(n-1)}{N-1} + np - n^2p^2$$

$$= np\frac{(Np-1)(n-1) + N - 1 - np(N-1)}{N-1} = np\frac{nNp - Np - n + 1 + N - 1 - nNp + np}{N-1}$$

$$= np\frac{N - n - Np + np}{N-1} = np\frac{(1-p)(N-n)}{N-1} = npq\frac{N-n}{N-1}$$

□

Chapitre 16

Intégration

Introduction

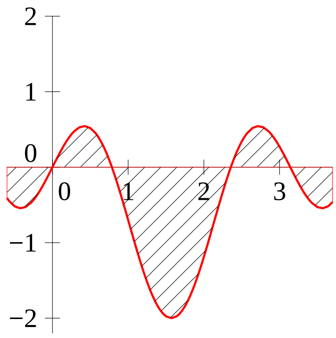
Nous aurons cet année un objectif assez simple en ce qui concerne l'intégration : apprendre à faire du calcul ! Ceci dit, l'intégration est loin de se résumer à un simple outil brutal (mais relativement efficace), il s'agit en fait d'une théorie complète dont le but est tout simplement de calculer des aires. Tout cela est donc très géométrique et visuel, même si en pratique on se contente souvent de passer par le biais des primitives que vous avez déjà du croiser l'an dernier. Nous allons essayer dans ce cours d'aborder les choses par le biais de ces calculs d'aire, et nous reviendrons sur cette notion en fin de chapitre pour expliquer la notation utilisée quand on fait du calcul intégral.

16.1 Construction

Dans tout le chapitre, nous nous placerons dans le cadre suivant : la fonction f que l'on cherche à intégrer est toujours **continue** (éventuellement continue par morceaux, mais le cas ne sera pas spécifiquement traité dans le cours, et simplement déduit du cas précédent en cas de besoin pour les exercices). De plus, on ne s'intéressera qu'à l'intégration sur un segment $[a;b]$ (l'an prochain, vous compliquerez un peu tout ça). Le principe de base est le suivant : les seules aires que l'on sait calculer facilement, ce sont des aires de rectangle (longueur fois largeur, ça va). Toute autre forme géométrique, même élémentaire, a une aire complexe (pensez à la forme pour un disque, qui fait sortir d'on ne sait trop où la fameuse constante π).

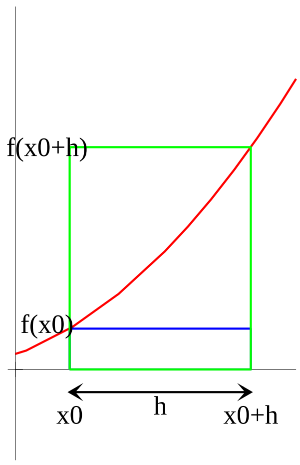
16.1.1 Aire sous une courbe

Soit donc f une fonction définie et continue sur un segment $[a;b]$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. On s'intéresse à la fonction $\mathcal{A}$ définie sur $[a;b]$ de la façon suivante : $\mathcal{A}(x_0)$ est l'aire de la portion de plan délimitée par les droites d'équation $x = a$; $x = x_0$; $y = 0$ et par la courbe $\mathcal{C}_f$. L'aire sera comptée positivement lorsque $\mathcal{C}_f$ se trouve au-dessus de l'axe des abscisses, négativement dans le cas contraire.



Proposition 116. La fonction $\mathcal{A}$ est dérivable sur $[a;b]$ et a pour dérivée la fonction f.

Démonstration. Calculons le taux d'accroissement de $\mathcal{A}$ entre x_0 et x_0+h (où h est un réel positif). Par définition, la quantité $\mathcal{A}(x_0+h)-\mathcal{A}(x)$ est l'aire comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=x_0$ et $x=x_0+h$. Supposons pour la clarté du raisonnement la fonction croissante aux alentours de x_0 (le cas général n'est pas vraiment plus compliqué), on a donc une figure qui ressemble à ceci :



On peut encadrer l'aire qui nous intéresse par celle des deux rectangles de largeur h dessinés sur la figure, l'un ayant pour hauteur $f(x_0)$ et l'autre $f(x_0+h)$. On a donc $hf(x_0)\leqslant\mathcal{A}(x_0+h)-\mathcal{A}(x_0)\leqslant hf(x_0+h)$, ou encore $f(x_0)\leqslant\dfrac{\mathcal{A}(x_0+h)-\mathcal{A}(x_0)}{h}\leqslant f(x_0+h)$. Mais on obtient alors, en faisant tendre h vers 0 et en utilisant le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{\mathcal{A}(x_0+h)-\mathcal{A}(x_0)}{h}=f(x_0)$ (notez qu'on a besoin pour cela de la continuité de la fonction f). En procédant de la même manière pour $h<0$, on montre la dérivabilité de la fonction $\mathcal{A}$, et on a bien $\mathcal{A}'(x_0)=f(x_0)$. □

16.1.2 Primitives

Le calcul du paragraphe précédent conduit naturellement à l'étude de la notion suivante :

Définition 151. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que F est une **primitive** de f sur I si la fonction F est dérivable sur I et vérifie $F'=f$.

Exemple : Sur n'importe quel intervalle, la fonction $x\mapsto 1$ a pour primitive $x\mapsto x$, mais aussi $x\mapsto x+2$; $x\mapsto x-\sqrt{127}$ etc. Sur l'intervalle $\mathbb{R}^{+*}$, la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ a pour primitive $x\mapsto\ln(x)$.

Théorème 28. Toute fonction continue sur un segment y admet une primitive.

En effet, la fonction « aire sous la courbe » définie au paragraphe précédent est une primitive de f. Mais attention, cette primitive n'est pas la seule, loin de là !

Proposition 117. Si F est une primitive de f sur l'intervalle I, la fonction $x \mapsto F(x) + k$ ($k \in \mathbb{R}$) est également une primitive de f. Réciproquement, si G est une primitive de f, la fonction $G - F$ est constante (autrement dit, il existe une constante k pour laquelle $G = F + k$).

Démonstration. C'est essentiellement évident : si $F' = f$, alors $(F + k)' = f$ donc $F + k$ est une primitive de f. Et si F et G sont deux primitives de f, on a $(G - F)' = f - f = 0$, donc $G - F$ est une fonction constante. □

Proposition 118. Soit f continue sur I, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$ alors il existe une unique primitive F_0 de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

Démonstration. Puisque nous savons qu'il en existe une, notons F une primitive de f sur I et posons $k = y_0 - F(x_0)$. on a alors $(F + k)(x_0) = y_0$, donc $F_0 = F + k$ est une primitive qui convient. De plus, elle est unique, car une autre solution différerait de F_0 par une constante nécessairement nulle puisque les deux fonctions prendraient la même valeur en x_0. □

Exemple : La fonction ln a été historiquement définie comme étant **la** primitive de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$ s'annulant pour $x = 1$.
La primitive de $x \mapsto 2x$ valant -3 en $x = 2$ est la fonction $x \mapsto x^2 - 7$.

Remarque 132. Si l'on reprend l'interprétation géométrique du premier paragraphe, on peut obtenir d'autres primitives de f en décalant l'origine du calcul d'aire, mais on n'obtiendra pas nécessairement toutes les primitives ainsi.

Pour finir ce paragraphe, voici l'indispensable tableau récapitulatif des primitives usuelles à connaitre par coeur (et qui va fortement vous rappeler un autre tableau, celui des dérivées usuelles). Attention, toutes les primitives sont données **à une constante près**, en cohérence avec les remarques faites plus haut. Pas plus de commentaires ou de preuve pour ce tableau, il suffit de retourner le tableau des dérivées usuelles :

Fonction	*Primitive*	*Intervalle*	*Fonction*	*Primitive*
$a(constante)$	ax	$\mathbb{R}$	af	aF
$x^n (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$	$f + g$	$F + G$
$x^a (a \neq -1)$	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$	$\mathbb{R}^{+*}$	$u'f(u)$	$F(u)$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	$\mathbb{R}^{+*}$	$f'f$	$\frac{f^2}{2}$
$\ln(x)$	$x\ln(x) - x$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\frac{f'}{f}$	$\ln\|f\|$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$	$f'e^f$	e^f

Exemple : Une primitive de $x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ est $x \mapsto \dfrac{x^2}{2} + \ln(x)$. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$ est $\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$.

16.1.3 Définition de l'intégrale

Définition 152. Soit f une fonction continue sur un segment $[a; b]$, alors le nombre $F(b) - F(a)$ ne dépend pas du choix de la primitive F de f. On le note $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$, et il s'appelle **intégrale de a à b de la fonction f**.

Démonstration. On a vu que deux primitives F et G de f différaient d'une constante k. Mais si $G = F + k$, on a $G(b) - G(a) = F(b) + k - F(a) - k = F(b) - F(a)$, donc la définition ne dépend effectivement pas de la primitive choisie. □

Remarque 133. On verra dans les compléments une façon géométrique d'obtenir la définition de l'intégrale qui justifie la notation.

Remarque 134. La variable t apparaissant à l'intérieur de l'intégrale est une variable muette (comme le k pour une somme par exemple). On peut très bien la remplacer par toute autre variable, à condition de remplacer également de dt, que nous voyons pour l'instant comme une façon d'indiquer la variable dans l'intégrale : $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(\mu)d\mu$.

Définition 153. On utilisera la notation suivante : pour toute fonction F définie sur un intervalle $[a; b]$, on note $[F]_a^b = F(b) - F(a)$.

Exemple : Ainsi, on notera par exemple $\int_{-2}^3 tdt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_{-2}^3 = \frac{9}{2} - \frac{4}{2} = \frac{5}{2}$.

Proposition 119. Soit f une fonction continue sur un segment $[a; b]$, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f s'annulant en a.

Démonstration. En effet, soit F une primitive quelconque de f, on a $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$. La fonction qu'on vient de définir diffère de F par une constante, c'est donc également une primitive de f. De plus sa valeur en a est $F(a) - F(a) = 0$. Notons au passage qu'on a donc $\int_a^a f(t)dt = 0$. □

16.2 Propriétés de l'intégrale

16.2.1 Propriétés élémentaires

Proposition 120. (relation de Chasles) Soient $a < b < c$ trois réels et f une fonction continue sur $[a; c]$, alors $\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$.

Démonstration. Soit F une primitive quelconque de f, on a $\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a) = \int_a^c f(t)dt$. □

Exemple : Pour calculer certaines intégrales faisant intervenir une valeur absolue, un découpage peut être utile : $\int_0^4 |x-2| \ dx = \int_0^2 2 - x \ dx + \int_2^4 x - 2 \ dx = \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_0^2 + \left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]_2^4 = 2 - 0 + 0 - (-2) = 4$.

Proposition 121. (linéarité de l'intégrale) Soient f et g deux fonctions continues sur un segment $[a; b]$, et α, β deux réels, alors $\int_a^b \alpha f(t) + \beta g(t) \ dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t) \ dt$.

Démonstration. C'est une conséquence évidente de la linéarité de la « primitivisation ». □

16.2.2 Intégration et inégalité

Proposition 122. Soit f une fonction continue et positive sur un segment $[a;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$.

Démonstration. La fonction f étant positive, $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$, qui en est une primitive, est une fonction croissante. Comme $F(a) = 0$, on a donc $F(b) \geqslant 0$, et $\displaystyle\int_a^b f(t) = F(b) - F(a) = F(b) \geqslant 0$. □

Remarque 135. On est toutefois parfaitement autorisé à écrire une intégrale dont les bornes sont dans le « mauvais sens ». Auquel cas le signe en est changé : $\displaystyle\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$. La proposition précédente ne s'applique donc que si $a \leqslant b$ (ce qui est le cas quand on parle du segment $[a;b]$, mais on a vite fait d'oublier cette condition).

Remarque 136. On peut affiner le résultat en remarquant, que si f est continue et positive sur $[a;b]$, on a $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

Proposition 123. Si f et g sont deux fonctions continues sur un même segment $[a;b]$ et $f \leqslant g$ sur $[a;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$.

Démonstration. Si $f \leqslant g$, la fonction $g - f$ est positive, donc $\displaystyle\int_a^b g(t) - f(t)\ dt \geqslant 0$, ce qui donne le résultat en utilisant la linéarité de l'intégrale. □

Exemple : un cas particulier extrêmement fréquent est l'utilisation d'une fonction constante pour majorer (ou minorer) une intégrale. Si on a $m \leqslant f \leqslant M$ sur un segment $[a;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b mdt \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b Mdt$, soit $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant M(b-a)$.

Exemple : Un exemple classique d'utilisation d'encadrement est la détermination de limites de suites d'intégrales. Posons ainsi $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^4}dt$ et cherchons calculer la limite de la suite (I_n). On ne cherche surtout pas à calculer la valeur de I_n (on aurait bien du mal à y parvenir, de toute façon), mais on commence par remarquer que, pour toute valeur de n, la fonction qu'on intègre est positive, donc la suite (I_n) est positive. De plus, en remarquant que $\forall t \in [0;1]$, on a $\dfrac{1}{1+t^4} \leqslant 1$, on en déduit que $I_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 t^n\ dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$, donc par le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Définition 154. Soit f une fonction continue sur un segment $[a;b]$. On appelle **valeur moyenne de** f la quantité $\dfrac{\displaystyle\int_a^b f(t)dt}{b-a}$.

Proposition 124. Soit f une fonction continue sur un segment $[a;b]$, alors on a $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \displaystyle\int_a^b |f(t)|\,dt$.

Démonstration. On a $f \leqslant |f|$ donc en utilisant la proposition précédente $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt$. Mais de même $-f \leqslant |f|$ donc $-\displaystyle\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt$, donc on a bien l'égalité voulue (si $x \leqslant y$ et $-x \leqslant y$, alors $|x| \leqslant y$). □

16.3 Méthodes de calcul

16.3.1 Intégration directe

La méthode la plus basique mais la plus efficace quand la fonction a le bon goût de ne pas être trop compliquée est d'en trouver une primitive, il ne reste plus ensuite qu'à calculer.

Exemple : Si f est un polynome, on s'en sort toujours sans difficulté : $\int_{-1}^{3} x^2 - 2x + 3\ dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right]_{-1}^{3} = 9 - 9 + 9 - (-\frac{1}{3} - 1 - 3) = \frac{14}{3}$.

Exemple : Notre tableau de primitives usuelles est évidemment d'une grande utilité. Par exemple $\int_0^1 \frac{1}{x+3} = [\ln(x+3)]_0^1 = \ln 4 - \ln 3 = \ln\frac{4}{3}$.

16.3.2 Intégration par parties

Le principe est très simple : utiliser la formule de dérivation d'un produit de façon légèrement détournée. On sait bien entendu que, si u et v sont deux fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $[a;b]$, la dérivée du produit uv est $u'v + uv'$. On a donc, en utilisant les résultats vus à la partie précédente, $\int_a^b u'(t)v(t) + u(t)v'(t)\ dt = [uv(t)]_a^b$. On utilise ce résultat sous une forme légèrement différente :

Proposition 125. Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a;b]$, alors $\int_a^b u(t)v'(t) = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)$.

Démonstration. La démonstration a été, une fois n'est pas coutume, faite avant d'énoncer le théorème. □

Remarque 137. Cette méthode de calcul est très utile pour calculer des intégrales faisant intervenir des produits de fonctions usuelles, dont on a souvent du mal à déterminer directement une primitive. Une difficulté peut provenir du choix, parmi les deux fonctions présentes, de celle qui jouera le rôle de u et de celle qui jouera le rôle de v'. Pensez que le but est de faire apparaitre dans le membre de droite une intégrale plus facile à calculer que celle d'origine (sinon on n'a pas vraiment avancé), et que dans ce membre de droite, on dérive u et on « primitive » v'. On choisira quand c'est possible une fonction v' facile à intégrer (le cas idéal étant l'exponentielle ou le logarithme) et pour u une fonction qui se simplifie quand on la dérive, souvent une puissance de t. Première exemple super classique : $\int_0^5 te^t\ dt$. Le t gêne et le e^t s'intègre bien, on va donc faire une intégration par parties en posant $u(t) = t$ et $v'(t) = e^t$. On a donc $\int_0^5 te^t\ dt = [te^t]_0^5 - \int_0^5 e^t\ dt = 5e^5 - [e^t]_0^5 = 5e^5 - e^5 + 1 = 4e^5 + 1$. Dans un premier temps, je vous conseille de bien poser tous vos calculs, en précisant ce que valent les fonctions u, v', u' et v, puis avec un peu d'habitude vous pourrez rédiger plus rapidement.

Remarque 138. Il peut être astucieux de recourir à une intégration par parties dans le cas où il n'y a pas de produit visible en prenant 1 comme deuxième facteur du produit. C'est ainsi que l'on trouve le plus naturellement la formule de la primitive de ln qui s'annule en 1. On sait que cette primitive peut s'exprimer comme $\int_1^x \ln(t)\ dt$. Pour calculer cette intégrale, on va faire une intégration par parties en posant $v'(t) = 1$ et $u(t) = \ln t$. On a donc $v(t) = t$ et $u'(t) = \frac{1}{t}$, donc $\int_1^x \ln(t)\ dt = [t\ln(t)]_1^x - \int_1^x 1\ dt = x\ln x - x + 1$.

Remarque 139. Il est souvent utile de procéder à plusieurs intégrations par parties successives, notamment quand on cherche à faire baisser le degré d'une puissance de t dans l'intégrale, et on est même parfois amené à raisonner par récurrence.

Exemple : On cherche à calculer $I_n = \int_1^e t^n \ln t \, dt$. On peut calculer directement $I_0 = \int_1^e \ln t \, dt = [t \ln t - t]_1^e = e - e - 0 + 1 = 1$. Pour le cas général, on s'en sort en fait par une simple intégration par parties : $I_n = \int_1^e t^n \ln t \, dt = [\frac{t^{n+1}}{n+1} \ln t]_1^e - \int_1^e \frac{t^n}{n+1} \, dt = \frac{e^{n+1}}{n+1} - [\frac{1}{(n+1)^2} t^{n+1}]_1^e = \frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{e^{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{ne^{n+1}+1}{(n+1)^2}$.

16.3.3 Changement de variable

L'idée est cette fois-ci d'utiliser la formule de dérivation d'une fonction composée : $(F \circ u)' = u' \times f \circ u$ (où F désigne une primitive de la fonction f). Le théorème suivant découle facilement de cette formule :

Théorème 29. (changement de variable) Soit u une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a;b]$ et f une fonction continue sur le segment $[u(a);u(b)]$, alors on a $\int_a^b u'(t)f(u(t)) \, dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(v) \, dv$.

Démonstration. En effet, une primitive de $u'f(u)$ est $F(u)$, où F est une primitive de f. Le membre de gauche vaut donc $F(u(b)) - F(u(a))$, ce qui est bien égal au membre de droite. □

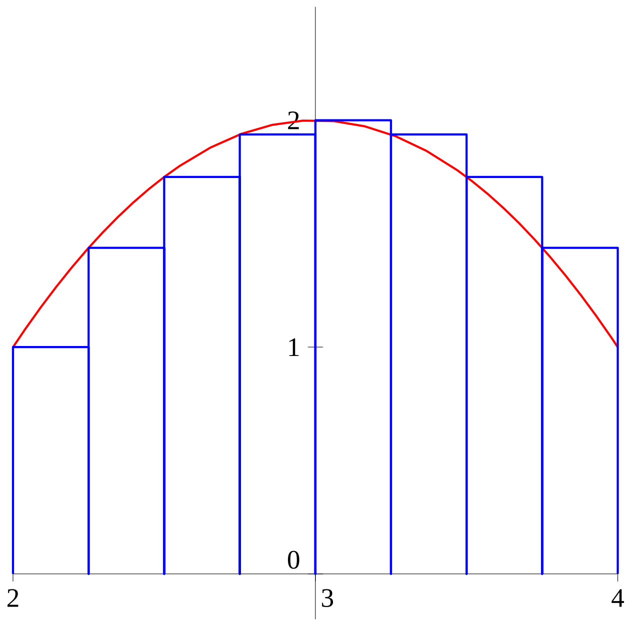
Cette formule est naturellement utilisée quand on a sous l'intégrale une fonction qui peut sous la forme de la dérivée d'une composée. Mais même dans d'autres cas, on peut tenter de l'utiliser pour simplifier l'intégrale, comme dans le cas d'une intégration par parties. En pratique, pas vraiment besoin de retenir la formule, il faut savoir l'appliquer, et surtout comprendre tout ce qu'il y a à modifier quand on fait un changement de variable. Il faut bien sûr changer la variable, mais aussi les bornes de l'intégrale, et surtout le fameux dt, en suivant la règle suivante : $d(u(t)) = u'(t) \, dt$. Nous n'avons pas les moyens de bien comprendre cette manipulation, mais cela correspond bien à la formule donnée ci-dessus ($f(u(t))$ est changé en $f(v)$ et $u'(t) \, dt$ en dv).
Prenons un exemple avec $I = \int_1^e \frac{1}{t(\ln t + 1)} \, dt$. On va faire le changement de variable $u = \ln t$. On a alors $du = \frac{1}{t} \, dt$, ce qui permet de se débarasser du t au dénominateur en le faisant passer dans le du. Il reste encore à changer les bornes, qui deviennent 0 et 1, et on obtient $I = \int_0^1 \frac{1}{u+1} \, du = [\ln(u+1)]_0^1 = \ln 2$.

Exemple : On cherche à calculer $\int_1^2 t\sqrt{2t-1} \, dt$. Le terme $\sqrt{2t-1}$ n'étant pas pratique à manipuler, on va faire le changement de variable $v = 2t - 1$, autrement dit $v = u(t)$, où u est la fonction $t \mapsto 2t - 1$. Il faut alors changer également le dt en calculant $dv = u'(t)dt = 2dt$, donc $dt = \frac{dv}{2}$. Il faudra aussi faire quelque chose du t qui traine à côté de la racine : comme $u = 2t - 1$, on a $t = \frac{u+1}{2}$. Enfin, il faut changer les bornes de l'intégrale par $u(1) = 1$ et $u(2) = 3$. On obtient donc $\int_1^2 t\sqrt{2t-1} \, dt = \int_1^3 \frac{u+1}{4}\sqrt{u} \, du = \frac{1}{4}\int_1^3 u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}} \, du = \frac{1}{4}\left[\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_1^3 = \frac{1}{10}(3^{\frac{5}{2}} - 1) + \frac{1}{6}(3^{\frac{3}{2}} - 1)$.

16.4 Compléments

16.4.1 Sommes de Riemann

Le concept de somme de Riemann fait partie d'une construction de l'intégrale légèrement différente de celle que nous avons adoptée (mais qui permet accessoirement de définir l'intégrale de fonctions qui ne sont pas forcément continues). Nous avons défini le concept de primitive pour construire nos intégrales, la primitive pouvant être vue comme une façon de calculer l'aire sous la courbe représentative de f (cf introduction). On peut également pousser plus loin les calculs d'aire en essayant d'approcher le plus possible l'aire de la courbe à l'aide de rectangles. Pour cela, le plus simple est de découper le segment $[a;b]$ en n segments de même largeur, en posant $h = \dfrac{b-a}{n}$, obtenant ainsi n segments de largeur h. Sur chacun de ces segments, on va approcher l'aire sous la courbe $\mathcal{C}_f$ par celle d'un rectangle. Pour la hauteur du rectangle, on fait le choix arbitraire de prendre la valeur de f au point le plus à gauche du segment, autrement dit $f(a)$ pour le premier segment, $f(a+h)$ pour le deuxième, jusqu'à $f(a+(n-1)h)$ pour le dernier (sachant que $b = a + nh$). Cela correspond à la figure suivante :



La somme de Riemann n'est autre que la somme des aires de ces rectangles (qui dépend bien sûr de n).

Définition 155. On appelle $n$ème somme de Riemann associée à une fonction f continue sur un segment $[a;b]$ le réel

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)$$

Le résultat fondamental sur les sommes de Riemann, que nous nous garderons bien de démontrer, est le suivant :

Théorème 30. Si f est continue sur $[a;b]$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(f) = \int_a^b f(t)\, dt$.

Autrement dit, les sommes de Riemann sont une bonne façon d'approcher l'aire sous la courbe. On peut même majorer l'écart entre la n-ème somme de Riemann et l'intégrale de f. C'est d'ailleurs la méthode utilisée pour faire du calcul numérique (et donc approché) d'intégrales, dans votre calculatrice par exemple. Il suffit de prendre n assez grand pour avoir une très bonne valeur approchée de l'intégrale.

Remarque 140. Cette façon de voir l'intégrale explique plus ou moins la notation utilisée : l'intégrale est la limite des sommes de Riemann, autrement dit (avec un peu d'imagination), une somme infinie d'aires de rectangles de hauteur $f(t)$ (pour t parcourant $[a;b]$) et de largeur infiniment petite notée dt. Le symbole $\int$ n'étant autre qu'un S comme somme, on voit bien l'origine de la notation.

Exemple : Appliquons la définition et le théorème à la fonction carré sur l'intervalle $[0;1]$. L'expression de la somme de Riemann se simplifie notablement puisque dans ce cas $\dfrac{b-a}{n} = \dfrac{1}{n}$ et $a = 0$. On a donc $S_n(f) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{k^2}{n^2} = \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{k=n-1} k^2$. Le théorème nous permet d'affirmer que $S_n(f)$ converge vers $\displaystyle\int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3}$. Autrement dit, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} k^2 \sim \frac{n^3}{3}$. Ce n'est pas une grande découverte puisqu'on sait calculer exactement cette somme. Par contre, si on fait exactement la même manipulation avec la fonction $x \mapsto x^7$ (par exemple), toujours sur le segment $[0;1]$, on obtient le résultat plus intéressant $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} k^7 \sim \frac{n^8}{8}$.

Remarque 141. On peut également utiliser les sommes de Riemann « dans l'autre sens », c'est-à-dire reconnaitre lors de l'étude d'une suite une somme de Riemann pour en déduire sa limite. dans ce cas, la somme de Riemann sera toujours sur l'intervalle $[0;1]$, c'est-à-dire qu'il faut reconnaitre quelque chose du type $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$, pour une certaine fonction continue f.

16.4.2 Fonctions définies par une intégrale

On en a déjà vu un exemple sans le dire quand on a calculé la primitive du logarithme un peu plus haut : la primitive de f s'annulant en a est bien une fonction définie par une intégrale $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$. Dans le cas du logarithme, on peut en fait expliciter la fonction sous une forme traditionnelle, mais il peut très bien arriver en général qu'on n'ait pas de formule plus simple. Il faut alors étudier la fonction en utilisant les propriétés de l'intégrale. Mais un bon exemple vaudra mieux que de longs discours :

On veut étudier la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} e^{t^2}\,dt$. Il est illusoire de chercher à expliciter la fonction f, mais on peut calculer sa dérivée en utilisant les propriétés vues plus haut sur les primitives. On peut écrire $f(x) = g(x^2) - g(x)$, où g est une primitive (quelconque) de la fonction $t \mapsto e^{t^2}$. On peut donc dériver f (en utilisant la dérivation des fonctions composées pour dériver $g(x^2)$) et on obtient $f'(x) = 2xe^{x^4} - e^{x^2}$.
L'étude de la dérivée n'est pas totalement aisée. On peut commencer par remarquer que f' est négative sur $\mathbb{R}^-$, et passer au logarithme quand $x > 0$: $2xe^{x^4} \geqslant e^{x^2} \Leftrightarrow \ln 2 + \ln x + x^4 \geqslant x^2$. On définit sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction h par $h(x) = \ln 2 + \ln x + x^4 - x^2$; cette fonction est dérivable de dérivée $h'(x) = \dfrac{1 + 3x^4 - 2x^2}{x}$. Le numérateur peut s'écrire sous la forme $3X^4 - X + 1$ en posant $X = x^2$, et on constate que ce numérateur est toujours positif (son discriminant est strictement négatif). La fonction h est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme ses limites respectives en 0 et en $+\infty$ sont $-\infty$ et $+\infty$, elle s'annule pour un seul réel $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Il en est de même pour f', et on en déduit donc que f est décroissante sur $]-\infty;\alpha]$ et croissante sur $[\alpha;+\infty[$. Notons au passage qu'on a manifestement $f(0) = f(1) = 0$ (puisque pour ces deux valeurs on calcule une intégrale sur un intervalle réduit à une seule valeur), ce qui permet d'affirmer que $\alpha \in]0;1[$. La fonction f prend d'ailleurs des valeurs négatives sur $]0;1[$, puisque les bornes de l'intégrale sont alors ødans le mauvais sens ».
Pour compléter le tableau de variations, on peut calculer les limites en $\pm\infty$ sans grande difficulté, à l'aide d'une minoration pas très subtile de la fonction à intégrer : pour tout réel t, on a $e^{t^2} \geqslant 1$,

donc $\forall x \notin [0;1]$, $f(x) \geqslant \displaystyle\int_x^{x^2} 1 \; dt \geqslant x^2 - x$, ce qui permet d'affirmer que $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$. Voici le tableau complet obtenu :

x	$-\infty$		0		α		1		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Chapitre 17

Variables aléatoires infinies

Introduction

Ce chapitre est destiné à généraliser les résultats obtenus sur les variables aléatoires au cas où celles-ci prennent une infinité de valeurs. Un exemple extrêmement classique et déjà aperçu plusieurs fois : on lance une pièce jusqu'à obtenir Pile et on note X le nombre d'essais nécessaires. La variable X peut prendre comme valeur n'importe quel entier, et il se peut même que X ne prenne pas de valeur du tout (si on ne tombe jamais sur Pile, événement possible bien que de probabilité nulle) ! En fait, les définitions vues pour les variables finies ne vont être que très légèrement modifiées. La principale différence proviendra lors du calcul des paramètres comme l'espérance, qui feront intervenir non plus une somme finie, mais une série.

17.1 Compléments de probabilités

17.1.1 Suites monotones d'événements

Définition 156. Soit (A_n) une suite d'événements dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, la suite est dite **croissante** si $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$, et **décroissante** si $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} \subset A_n$.

Proposition 126. Théorème de la limite monotone.
Pour toute suite croissante d'événements A_n, on a $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$.
Pour toute suite décroissante d'événements A_n, on a $P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$.

Exemple : On lance une infinité de fois un dé équilibré et on note A l'événement « On obtient au moins une fois la valeur 6 ». Notons A_k l'événement « On obtient aucun 6 lors des k premiers lancers ». La suite d'événements A_k est décroissante, et on a $P(A_k) = \left(\dfrac{5}{6}\right)^k$. La proposition précédente nous permet alors de dire que $P\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = 0$. Or, cette intersection n'est autre que l'événement $\bar{A}$ (on n'obtient jamais de 6). On a donc $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1$. L'événement A se produit donc avec probabilité 1.

17.1.2 Evénements négligeables et presque sûrs

Définition 157. Un événement est **négligeable** si sa probabilité est nulle. Un évènement est **presque sûr** si sa probabilité vaut 1.

Remarque 142. Un événement peut très bien être presque sûr sans être l'événement certain. Prenons l'exemple d'une infinité de Pile ou Face ; l'événement A : « on tire au moins un Pile » n'est pas l'événement certain (il existe exactement un élément de Ω, celui composé d'une infinité de Face, qui n'appartient pas à A), mais est presque sûr. Pire, l'exemple de la section précédente nous donnait un événement presque sûr, alors qu'il existe une infinité de tirages qui ne sont pas dans A !

17.2 Variables infinies

17.2.1 Définition, opérations

Définition 158. Une **variable aléatoire infinie** (discrète) X sur un espace probabilisé Ω est une application $X : \Omega \to \mathbb{Z}$.

Remarque 143. L'ensemble $X(\Omega)$ (toujours défini comme l'ensemble des valeurs prises par X) sera la plupart du temps $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$. Notons aussi qu'en fait, la variable aléatoire peut ne pas prendre de valeur sur un sous-ensemble de Ω à condition que celui-ci soit négligeable (X n'est donc pas tout à fait une application, mais plutôt une fonction définie presque sûrement). On peut également décider d'assigner la valeur 0 à un sous-ensemble négligeable de Ω sur lequel la définition naturelle de X ne donne pas de valeur.

Remarque 144. On peut définir sans difficulté supplémentaire des variables aléatoires prenant une infinité de valeurs qui ne sont pas nécessairement entières, tant que celles-ci peuvent être mises sous forme d'une suite de réels.

Exemple 1 : Dans notre exemple du lancer de dé, on note X le nombre de lancers nécessaires avant d'obtenir le premier 6. On décide de poser $X = 0$ (ou de ne pas définir X) si aucun n'apparait lors de la suite de lancers.
Exemple 2 : Une urne contient une boule blanche, une noire et une verte. On tire dans l'urne avec remise jusqu'à tirer pour la deuxième fois la boule blanche. On note X le nombre de tirages nécessaires. On a ici $X(\Omega) = \{2; 3; \dots\}$.

Remarque 145. On continuera naturellement à utiliser les notations $X = i$ ou $X \geqslant i$ pour les mêmes événements que dans le cas fini.

Proposition 127. Soient X et Y deux variables infinies sur un même univers Ω, alors $X + Y$, XY, $\max(X, Y)$ et $\min(X, Y)$ sont également des variables aléatoires.

Proposition 128. Soit X une variable aléatoire infinie sur Ω et $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ une fonction, alors $g(X) : \omega \mapsto g(X(\omega))$ est aussi une variable aléatoire (notée $g(X)$).

17.2.2 Loi

Définition 159. Soit X une variable aléatoire infinie, la **loi de probabilité** de X est la donnée des probabilités $P(X = k)$, pour toutes les valeurs de k appartenant à $X(\Omega)$.

Remarque 146. Il n'est évidemment plus possible de présenter la loi d'une variable infinie sous la forme d'un tableau. On devra se contenter d'une formule.

Exemple 1 : On calcule sans difficulté $P(X = k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6}$.
Exemple 2 : Pour les trois boules dans l'urne, on aura $X = k$ si on tire une boule blanche au tirage k (probabilité $\frac{1}{3}$) et exactement une boule blanche sur les $k-1$ premiers tirages, ce qui a pour probabilité (en tenant compte du choix de la position de la première boule blanche) $(k-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} \times \frac{1}{3}$, donc $P(X = k) = (k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}$.

Proposition 129. On a toujours $\sum\limits_{k\in X(\Omega)} P(X=k)=1$.

Exemple 1 : Un peu de révision sur les séries : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{k}=\frac{1}{6}\times\frac{1}{1-\frac{5}{6}}=1$.

Exemple 2 : C'est une série géométrique dérivée qui va être utile cette fois-ci. En effet, $\sum\limits_{k=2}^{+\infty}(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}=\frac{1}{9}\sum\limits_{k=1}^{+\infty}k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}=\frac{1}{9}\times\frac{1}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2}=1$.

17.2.3 Fonction de répartition

Définition 160. La **fonction de répartition** d'une variable aléatoire X est toujours la fonction $F_X:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $F_X(x)=P(X\leqslant x)$.

Proposition 130. Les propriétés vues dans le cas d'une variable aléatoire finie restent toutes valables. La seule différence est que la courbe représentative de F_X n'est plus en escalier (car il y a une infinité de « marches »).

17.2.4 Moments d'une variable aléatoire infinie

Définition 161. On dit que la variable infinie X **admet une espérance** si la série de terme général $kP(X=k)$ est absolument convergente. L'**espérance** de X est alors la somme de la série : $E(X)=\sum\limits_{k\in X(\Omega)} kP(X=k)$.

Exemple 1 : On verra dans le paragraphe consacré aux lois géométriques que l'espérance du nombre de boules tirées vaut 6.

Exemple 2 : Ici, pas de loi usuelle, il faut faire le calcul, qui fait intervenir une série géométrique dérivée seconde : $E(X)=\sum\limits_{k=2}^{+\infty}k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}=\frac{1}{9}\times\frac{2}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^3}=\frac{1}{9}\times 54=6$.

Proposition 131. Si X et Y sont deux variables aléatoires infinies admettant une espérance et définies sur le même univers Ω, $X+Y$ admet aussi une espérance et $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$.

Proposition 132. Si X est une variable aléatoire positive et qu'elle admet une espérance, on a $E(X)\geqslant 0$. Si X, Y sont deux variables aléatoires admettant une espérance et telles que $X\leqslant Y$, alors $E(X)\leqslant E(Y)$.

Théorème 31. (théorème du transfert) Soit X une variable aléatoire et $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction, alors si $g(X)$ admet une espérance, $E(g(X))=\sum\limits_{k\in X(\Omega)} g(k)P(X=k)$.

Définition 162. Soit X une variable aléatoire et r un entier positif, X admet un **moment d'ordre** r si X^r admet une espérance. Dans ce cas, on note toujours $m_r(X)=E(X^r)$.

Définition 163. La variable aléatoire infinie X **admet une variance** si elle admet une espérance m et si la variable $(X-m)^2$ admet une espérance. On a alors $V(X)=E((X-m)^2)$.

Théorème 32. La variable X admet une variance si et seulement si X et X^2 admettent une espérance et la formule de König-Huygens reste valable.

17.3 Lois usuelles infinies

17.3.1 Loi géométrique

Définition 164. On dit que la variable aléatoire X suit une **loi géométrique de paramètre** $p \in [0;1]$ si $X(\Omega) = \mathcal{N}$ et $\forall k \in \mathcal{N}^*$, $P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$. On le note $X \sim \mathcal{G}(p)$.

Exemple : Vous aurez reconnu la loi apparaissant dans notre exemple des lancers de dé. Les cas de la position d'apparition du premier Pile dans une série de Pile ou Face serait également une variable géométrique. En général, le temps d'attente d'un évènement lors d'un processus sans mémoire (c'est-à-dire que l'apparition de l'évènement au n-ième tirage ne dépend pas des résultats des tirages précédents) suit toujours une loi géométrique.

Proposition 133. Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, X admet une espérance et une variance et $E(X) = \dfrac{1}{p}$ et $V(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$.

Démonstration. La série pour l'espérance est (à un facteur près) une série geométrique dérivée, elle est donc convergente, et $E(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} pk(1-p)^{k-1} = p \times \frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$. On a donc $E(X)^2 = \dfrac{1}{p^2}$. De plus, $X(X-1)$ admet une espérance (on a une série de type géométrique dérivée seconde) qui vaut $E(X(X-1)) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} pk(k-1)(1-p)^{k-1} = p(1-p)\frac{2}{(1-(1-p))^3} = \frac{2(1-p)}{p^2}$, donc $V(X) = E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2 = \dfrac{2(1-p)}{p^2} + \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p^2} = \dfrac{2(1-p)+p-1}{p^2} = \dfrac{1-p}{p^2}$. □

Proposition 134. La loi géométrique est une loi sans mémoire : si $X \sim \mathcal{G}(p)$, $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^{*2}$, $P_{X>n}(X > n+m) = P(X > m)$.

Démonstration. Cf exercice 2 de la feuille d'exercices 23. Le terme « sans mémoire »s'explique ainsi : si l'événement dont X représente le temps d'attente ne s'est pas produit après n tentatives, la probabilité d'attendre m tentatives supplménetaires est la même que si on n'avait pas effectué les n premières tentatives. □

17.3.2 Loi de Poisson

Définition 165. On dit que la variable aléatoire X suit une **loi de Poisson de paramètre** $\lambda \in \mathbb{R}_+$ si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$. On le note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Remarque 147. D'après les résultats vus au chapitre précédent sur la série exponentielle, la somme de ces probabilités vaut bien 1. Par ailleurs, la suite $P(X = k)$ converge très vite vers 0 quand k tend vers $+\infty$.

Exemple : La loi de Poisson sert en fait de modélisation à beaucoup de situation concrètes. Elle est par exemple utilisée pour le nombre d'appels reçus (en un temps donné) par un standard téléphonique. On l'appelle parfois également loi des événements rares.

Proposition 135. Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, X admet une espérance et une variance, et $E(X) = V(X) = \lambda$.

Démonstration. $E(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda$, et de même $E(X(X-1)) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda^2\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} = \lambda^2$. On a donc $V(X) = E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$. □

Remarque 148. Mais d'où vient donc cette envie de modéliser certains phénomènes par une loi faisant intervenir des exponentielles et des factorielles qui semblent tout droit sorties du chapeau d'un mathématicien fou ? En fait, il existe une façon presque simple de vois les choses : la loi de Poisson représente une sorte de limites de lois binômiales d'espérance constante, mais pour lesquelles on augmente la valeur du paramètre n (et on diminue donc proportionnellement la valeur de p), comme l'explique le résultat suivant :

Proposition 136. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et (X_n) une suite de variables aléatoires telles que $X_n \sim \mathcal{B}\left(n, \dfrac{\lambda}{n}\right)$. Alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.

Démonstration. C'est un calcul de limite un peu laborieux mais assez joli. Fixons donc un entier $k \in \mathbb{N}$; si $X_n \sim \mathcal{B}\left(n, \dfrac{\lambda}{n}\right)$, on aura donc (pour $n \geqslant k$, puisqu'avant les probabilités seront nulles) $P(X_n = k) = \dbinom{n}{k}\left(\dfrac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \dfrac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$. Cherchons des équivalents de tout ce qui apparait dans ce produit. Pour le terme du milieu, $\dfrac{\lambda^k}{n^k}$, on ne touche à rien. Pour celui de gauche, on « développe » le coefficient binômial, ce qui donne $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$. Le numérateur de cette fraction est un polynôme (en la variable n, bien entendu, puisque k est fixé pour tout ce calcul) de degré n, et de coefficient dominant n^k. Il est donc équivalent à n^k, et $\dbinom{n}{k} \sim \dfrac{n^k}{k!}$. Enfin, pour le dernier terme, on passe par la forme exponentielle : $\left(1 - \dfrac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = e^{(n-k)\ln(1-\frac{\lambda}{n})}$. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\lambda}{n} = 0$, on a $\ln\left(1 - \dfrac{\lambda}{n}\right) \sim -\dfrac{\lambda}{n}$, donc $(n-k)\ln\left(1 - \dfrac{\lambda}{n}\right) \sim \dfrac{n-k}{n}(-\lambda) \underset{n \to +\infty}{\to} -\lambda$. On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \dfrac{\lambda}{n}\right) = e^{-\lambda}$, puis en recollant les morceaux $P(X_n = k) \sim \dfrac{n^k}{k!} \times \dfrac{\lambda^k}{n^k} \times e^{-\lambda} \sim e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$, ce qui achève la démonstration. □

Chapitre 18

Inversion de matrices

Dans notre premier chapitre consacré aux matrices, nous avons notamment étudié assez longuement une opération à priori assez élémentaire : le produit. Nous avons ainsi constaté que celui-ci ne possédait pas vraiment toutes les propriétés auxquelles on serait en droit de s'attendre, en particulier il n'est pas commutatif. Un autre point qu'on soulève souvent quand on étudie une opération sur un ensemble (on reviendra sur ce sujet dans les derniers chapitres de l'année, consacrés aux espaces vectoriels), est de savoir si on peut effectuer l'opération inverse de l'opération en question. Pour la somme de matrices, par exemple, pas de problème, on peut faire des soustractions, car toute matrice admet une matrice opposée. pour le produit, ça marche encore une fois nettement moins bien : il n'existe pas de division sur les matrices, et cela est du en partie à l'absence de commutativité, mais aussi au fait que la notion d'inverse fonctionne moins bien sur les matrices que sur les réels. Pour ces derniers, seul le nombre 0 n'est pas inversible, et c'est la cause de l'impossibilité de la division par 0. Pour les matrices, la matrice nulle est loin d'être la seule à poser problème.

18.1 Inversion de matrices

Définition 166. Une matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **inversible** s'il existe une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $MN = NM = I_n$. La matrice N est alors notée M^{-1} et on l'appelle **matrice inverse** de la matrice M.

Remarque 149. La notion n'a pas de sens dans le cas des matrices qui ne sont pas carrées.

Remarque 150. L'inverse d'une matrice, quand il existe, est unique. En effet, supposons qu'il existe deux matrices N et N' vérifiant $MN = NM = I$ et $MN' = N'M = I$. On a alors $NMN' = (NM)N' = N'$ d'une part et $NMN' = N(MN') = N$ d'autre part, donc $N = N'$.

Exemple : L'inverse de la matrice I_n est bien sûr I_n elle-même. La matrice nulle n'est pas inversible.

Exemple : La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible et a pour inverse $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Exemple : La matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas nulle, mais elle n'est pas inversible pour autant : on peut la multiplier à droite par ce qu'on veut, la première ligne du résultat sera toujours constituée de 3 zéros, et la matrice produit ne peut donc pas être égale à I_3.

Proposition 137. Une matrice diagonale est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. On a alors, si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}^{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn}^{-1} \end{pmatrix}$.

Remarque 151. Nous verrons un peu plus loin que cette caractérisation s'étend en fait aux matrices triangulaires.

Proposition 138. Principales propriétés calculatoires de l'inversion de matrices.

1. Si M est inversible, alors M^{-1} aussi et $(M^{-1})^{-1} = M$.
2. Si $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ sont deux matrices inversibles, le produit MN est inversible et $(MN)^{-1} = N^{-1}M^{-1}$.
3. Si M est une matrice inversible, M^k est inversible pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, et $(M^k)^{-1} = (M^{-1})^k$.
4. Si $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifient $MN = I$, alors M et N sont inversibles et inverses l'une de l'autre.

Démonstration. La première proposition est évidente : par définition, $MM^{-1} = M^{-1}M = I$, donc M est l'inverse de M^{-1}. La deuxième ne pose pas vraiment de problème non plus : on a $(N^{-1}M^{-1})(MN) = N^{-1}(M^{-1}M)N = N^{-1}IN = N^{-1}N = I$, et de même $(MN)(N^{-1}M^{-1}) = I$, donc $N^{-1}M^{-1}$ est bien l'inverse de MN. La troisième propriété ne pose guère de problème non plus, il suffit de vérifer que $M^k(M^{-1})^k = (M^{-1})^kM^k = I$, ce qui est essentiellement immédiat (on peut utiliser que M et M^{-1} commutent pour éviter de recourir à une récurrence). La dernière proposition dit qu'on n'a en fait pas besoin de vérifier que le produit à gauche et à droite est égal à I pour trouver l'inverse d'une matrice, l'un des deux est suffisant. On ne démontrera pas ce résultat beaucoup moins facile qu'il n'en a l'air. $\square$

Remarque 152. Un des principaux intérêts de travailler avec des matrices inversibles est qu'on peut simplifier un peu plus naturellement certains calculs, notammant : si M est une matrice inversible et $MA = MB$, alors $A = B$ (il suffit de multiplier l'égalité à gauche par M^{-1} pour obtenir le résultat). Autre remarque utile : si A et B sont deux matrices non nulles telles que $AB = 0$, alors aucune des deux matrices n'est inversible (sinon, par l'absurde, en multipliant à gauche par l'inverse de A ou à droite par l'inverse de B, on constaterait que l'autre matrice est nulle).

Exemple : Le calcul d'inverse de matrices peut faire intevrenir de petites astuces comme celle-ci : soit $M = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Un petit calcul permet d'obtenir $M^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et de constater que $M^2 = 2I - M$, ce qu'on peut écrire $M + M^2 = 2I$, ou encore $\dfrac{1}{2}M(M+I) = I$. Ceci suffit à montrer que M est inversible et que son inverse est $\dfrac{1}{2}(M+I)$. Autrement dit, $M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

18.2 Lien entre matrices et systèmes linéaires

Venons-en à un résultat annoncé depuis un certain temps, l'équivalence entre systèmes linéaires et équations matricielles. C'est en fait tout simple :

Théorème 33. Soit (S) le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & a_{2p}x_p & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & a_{np}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

En posant $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$; $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $B = (b_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, le système (S) est équivalent à l'équation matricielle $AX = B$.

Démonstration. Le produit des matrices A et X est une matrice-colonne à n termes, le $i$ème terme valant $\sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j$. En identifiant coefficient par coefficient, on a donc $AX = B \Leftrightarrow \forall 1 \leqslant i \leqslant n$, $\sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j = b_j$, ce qui est exactement le système (S). □

Exemple : Soit (S) le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 3y & + & z & = & 5 \\ -5x & + & 4y & - & z & = & -1 \\ x & + & y & - & 3z & = & -6 \end{array}\right.$

Il est équivalent à l'équation matricielle $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -5 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Théorème 34. Le système (S) est un système de Cramer si et seulement si la matrice associée est une matrice inversible.

Démonstration. Il y a un sens très facile : si A est inversible, l'équation $AX = B$ est équivalente à $X = A^{-1}B$, ce qui montre que le système (S) a une unique solution. Dans l'autre sens, c'est malheureusement plus difficile, nous nous contenterons de donner un algorithme permettant de calculer l'inverse de A dans ce cas au paragraphe suivant. □

Ce théorème nous donne une grande motivation à l'introduction de la notion d'inverse de matrice, mais ne nous dit toujours pas comment le calculer. Remarquons tout de même le cas particulier suivant :

Proposition 139. Un système triangulaire a pour matrice associée une matrice triangulaire supérieure. Le système est de Cramer (et donc la matrice triangulaire inversible) si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.

18.3 Pivot de Gauss sur les matrices

Nous allons enfin donner une méthode systématique d'inversion des matrices, qui est en fait l'équivalent matriciel de la résolution des systèmes linéaires par le pivot de Gauss. Commençons par préciser qu'on ne parlera plus dans ce paragraphe que de matrices carrées, les autres n'étant de toute façon pas inversibles. Comme dans le cas des systèmes, le but est tout d'abord de se ramener à un système triangulaire, donc ici à une matrice triangulaire supérieure. Dans le cas où on a un système de Cramer (c'est-à-dire une matrice triangulaire n'ayant pas de 0 sur la diagonale), la matrice sera inversible, et il ne restera qu'à compléter la résolution du système en « remontant » le triangle. Dans le cas contraire, la matrice n'est pas inversible.
Toute l'idée est en fait de faire une correspondance entre les opérations élémentaires sur les lignes et colonnes que l'on effectue pour résoudre les systèmes linéaires et les produits par certaines matrices particulières. Lorsqu'on résout un système linéaire, si on note $(L_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ les lignes du système (on suppose dans tout ce paragraphe que le système, et donc la matrice associée, est carré), on effectue les opérations suivantes : échange de lignes $L_i \leftrightarrow L_j$; produit d'une ligne par un réel non nul $L_i \leftarrow \alpha L_i$; combinaison linéaire de deux lignes $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$. La correspondante est sur la page suivante car elle ne tenait pas sur le reste de celle-ci. Le principe est ensuite simple :

- On effectue sur la matrice A les opérations du pivot de Gauss (comme si on résolvait le système linéaire associé) jusqu'à obtenir une matrice triangulaire supérieure. Ces opérations correspondent à des produits $B_k \times \cdots \times B_1$ par des matrices inversibles (k étant le nombre d'étapes nécessaires pour atteindre une matrice triangulaire), produits que l'on effectue en parallèle en partant de la matrice I.
- Si la matrice triangulaire obtenue a un coefficient diagonal nul, elle n'est pas inversible, et la matrice A non plus.

- Si tous les coefficients diagonaux sont non nuls, le système associé est résoluble en « remontant » le striangle. On fait de même avec notre matrice : on la rend diagonale en commençant par annuler les termes non diagonaux sur la dernière colonne. Ces nouvelles opérations correspondent à de nouveaux produits, et on finit par transformer A en I via un produit de matrices inversibles $B_{k'} \times \cdots \times B_1$. Ce produit n'est autre que l'inverse de la matrice A, qu'on a donc sous les yeux si on a pris soin de l'effectuer en parallèle à partir de la matrice I.

Deux exemples sont donnés après le gros tableau.

Opération sur les lignes du système	Produit de la matrice A par :
Échange $L_i \leftrightarrow L_j$	$\begin{array}{c} \\ \\ \\ (L_i) \\ \\ \\ \\ (L_j) \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & 1 & & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & & 1 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Produit par un réel $L_i \leftarrow \alpha L_i$	$\begin{array}{c} \\ \\ \\ (L_i) \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \alpha & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Combinaison linéaire $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$	$\begin{array}{c} \\ \\ (L_i) \\ (L_j) \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \cdots & \alpha & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Nous allons calculer l'inverse de la matrice suivante en utilisant le pivot de Gauss : à gauche, les opérations sur la matrice A, à droite les mêmes opérations à partir de I pour obtenir l'inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow -L_2$$

Conclusion de ce long calcul : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

18.4 Diagonalisation de matrices

Une constatation pas si bête qu'elle n'en a l'air quand on travaille avec des matrices, c'est qu'on s'en sort toujours plus facilement avec des matrices diagonales (pour les calculs de puissances notamment). Le principe de la diagonalisation est très simple, il s'agit de « transformer » une matrice A en matrice diagonale.

Définition 167. Une matrice A est dite diagonalisable s'il existe une matrice inversible P telle que le produit $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale.

Cette propriété permet effectivement de calculer très facilement les puissances de la matrice A, car si on a $D = P^{-1}AP$, alors pour tout entier n, $D^n = P^{-1}A^nP$ (ce qui se prouve à l'aide d'une petite récurrence). Malheureusement, l'étude des conditions assurant la diagonalisabilité d'une matrice est loi d'être simple, et c'est un sujet que nous n'aborderons pas cette année. Nous nous conterons d'un exemple montrant l'utilité de la notion.

Exemple : Considérons les matrices $A = \begin{pmatrix} 10 & -6 & -3 \\ -4 & 12 & 2 \\ -4 & -4 & 6 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On montre en utilisant le pivot de Gauss que P est inversible et que $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$, puis par le calcul que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$, dont on déduit $A^n = P^{-1} \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 8^n & 0 \\ 0 & 0 & 16^n \end{pmatrix} P$ (qu'on peut chercher à expliciter ou non selon son courage).

Exemple 2 : Le retour des chaines de Markov.
Doudou le hamster partage sa passionnante existence entre trois activités : manger, dormir, et faire de l'exercice sur sa roue. En l'observant toutes les minutes pendant un moment, on constate les choses suivantes :

- si Doudou fait de l'exercice à une certaine minute, il y aura une chance sur deux qu'il dorme et une chance sur deux qu'il mange à la minute suivante.
- si Doudou mange à une certaine minute, il y a une chance sur deux qu'il retourne dormir et une chance sur deux qu'il tente de faire de l'exercice à la minute suivante.
- enfin, s'il dort, une chance sur quatre (seulement) qu'il parte faire de l'exercice, une chance sur quatre qu'il mange, et une chance sur deux qu'il continue sa sieste.

Au moment du début de l'observation, Doudou est en train de manger et, vous l'aurez sûrement deviné, le but est d'étudier son comportement après n minutes et notamment rechercher des limites éventuelles aux probabilités de chaque activité. Notons donc A_n : « Doudou dort après n minutes », B_n : « Doudou mange après n minutes » et C_n : « Doudou fait de l'exercice après n minutes », ainsi que a_n, b_n et c_n les probabilités correspondantes. Une application (ou plutôt trois) de la formule des probabilités totales au système complet d'évènements formé par A_n, B_n et C_n permet d'obtenir le système de relations suivant :

$$\left\{\begin{array}{rclcccc} a_{n+1} & = & \frac{1}{2}a_n & + & \frac{1}{2}b_n & + & \frac{1}{2}c_n \\ b_{n+1} & = & \frac{1}{4}d_n & & & + & \frac{1}{2}c_n \\ c_{n+1} & = & \frac{1}{4}a_n & + & \frac{1}{2}b_n & & \end{array}\right.$$

Nous allons plutôt exploiter la forme matricielle : en notant $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, le système précédent s'écrit $X_{n+1} = AX_n$. Par une petite récurrence désormais classique, on en déduit que $X_n = A^n X_0$, ne reste plus que le délicat problème du calcul de A^n. On peut en fait constater qu'en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale D (de coefficients diagonaux 1, $-\frac{1}{2}$ et 0). Naturellement, à notre niveau, nous n'avons pas vraiment de moyen de deviner à quoi va ressembler la matrice P sans connaitre D (ou vice-versa), l'une des deux sera donc toujours donnée dans l'énoncé. Une fois cette matrice diagonale obtenue, une petite récurrence permet de prouver que $A^n = PD^nP^{-1}$ (en effet, c'est vrai au rang 1 d'après les calculs précédents, et si on le suppose vrai pour A^n, alors $A^{n+1} = A \times A^n = (PDP^{-1})(PD^nP^{-1}) = PD^{n+1}P^{-1}$). On en déduit que

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} & \frac{1}{4} + \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} + \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} & \frac{1}{4} + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \end{pmatrix}, \text{ donc } X_n = A^n X_0 = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \\ \frac{1}{4} + \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} \end{pmatrix}$$

. En particulier, les suites (a_n), (b_n) et (c_n) ont pour limites respectives $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{4}$.

Chapitre 19

Couples de variables aléatoires

Dans ce dernier chapitre de probabilités de l'année, nous allons introduire l'étude de couples de variables aléatoires, c'est-à-dire l'étude simultanée de deux variables aléatoires. Rien de très nouveau au niveau des techniques utilisées, le but est de présenter un peu de vocabulaire et faire quelques calculs sur trois exemples détaillés.

19.1 Loi d'un couple de variables aléatoires

Définition 168. Un couple de variables aléatoires (X, Y) est la donnée de deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé Ω. Une façon plus technique de voir les choses est de dire qu'un couple est une application $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$.

Exemple 1 : On lance simultanément deux dés (ça faisait longtemps), et on note X le plus grand des deux chiffres obtenus et Y le plus petit (au sens large).

Exemple 2 : Une urne contient 3 boules blanches, 4 boules vertes et 5 boules bleues. On tire 3 boules dans l'urne et on note X le nombre de boules blanches obtenues et Y le nombre de boules vertes.

Exemple 3 : On effectue une suite de lancers avec une pièce non équilibrée pour laquelle la probabilité do'btenir Pile vaut $\frac{3}{4}$ (et celle d'obtenir face vaut donc $\frac{1}{4}$). On note X la longueurde la première chaîne obtenue, c'est-à-dire le nombre de tirages initiaux donnant le même résultat que le premier tirage. On note Y la longueur de la deuxième chaîne. Ainsi, si les premiers tirages donnent $PPPPFFP$ (peu importe la suite), on aura $X = 4$ et $Y = 2$.

Définition 169. La **loi** d'un couple de variables aléatoires (X, Y) est la donnée des probabilités $P((X = i) \cap (Y = j))$, pour $i \in X(\Omega)$ et $j \in Y(\Omega)$. Cette loi est aussi appelée loi conjointe du couple (X, Y).

Remarque 153. Certaines des probabilités $P((X = i) \cap (Y = j))$ peuvent être nulles, même si $P(X = i)$ et $P(Y = j)$ sont toutes les deux non nulles.

Remarque 154. Cette loi est souvent présentée sous forme d'un tableau à double entrée, les valeurs prises par X apparaissant par exemple en ligne et celles prises par Y en colonne.

Exemple 1 : On a $X(\Omega) = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$; $Y(\Omega) = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, et la loi conjointe se calcule sans difficulté : $P((X = i) \cap (Y = j)) = 0$ si $i < j$ (le plus grand nombre ne peut pas être inférieur au plus petit), $P((X = i) \cap (Y = y_j)) = \frac{1}{36}$ si $i = j$ (le seul tirage favorable sur les 36 possibles est le tirage (i, i), et $P((X = i) \cap (Y = y_j)) = \frac{1}{18}$ si $i > j$ (les deux tirages (i, j) et (j, i) sont possibles), ce qu'on peut résumer par le tableau suivant (X en ligne, Y en colonne) :

	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
2	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
3	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
4	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
5	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$

Exemple 2 : On a ici $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$ et $Y(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$. On ne peut bien sûr avoir $X+Y > 3$ puisqu'on ne tire que trois boules. Lorsque cela a un sens, on a $P((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{\binom{3}{i}\binom{4}{j}\binom{5}{3-i-j}}{\binom{12}{3}}$, ce qui donne le tableau suivant :

	0	1	2	3
0	$\frac{1}{22}$	$\frac{3}{22}$	$\frac{3}{44}$	$\frac{1}{220}$
1	$\frac{4}{22}$	$\frac{6}{22}$	$\frac{3}{55}$	0
2	$\frac{3}{22}$	$\frac{9}{110}$	0	0
3	$\frac{1}{55}$	0	0	0

Remarque 155. On note parfois l'évenement $(X = i) \cap (Y = j)$ sous la forme $(X, Y) = (i, j)$.

Proposition 140. Les événements $(X = i) \cap (Y = j)$ pour i parcourant $X(\Omega)$ et j parcourant $Y(\Omega)$ forment un système complet d'événements. On a donc $\displaystyle\sum_{i \in X(\Omega); j \in Y(\Omega)} P((X = i) \cap (Y = j)) = 1$.

Démonstration. La preuve est la même que dans le cas où on n'a qu'une variable aléatoire. Les événements sont manifestement disjoints, et leur union vaut Ω. □

Définition 170. Si (X, Y) est un couple de variables aléatoires, les lois de X et de Y sont appelées **lois marginales** du couple.

Proposition 141. Si (X, Y) est un couple de variables aléatoires discrètes, on peut obtenir les lois marginales à partir de la loi conjointe : $\forall i \in X(\Omega)$, $P(X = i) = \displaystyle\sum_{j \in Y(\Omega)} P((X = i) \cap (Y = j))$ (et symétriquement pour la loi de Y).

Démonstration. Cela découle immédiatement du fait que les événements $Y = j$ forment un système complet d'événements. □

Exemple 1 : Pour connaitre les lois marginales à partir du tableau précédemment établi, c'est très simple, il suffit de faire les sommes des lignes du tableau (pour la loi Y) ou des colonnes (pour celle X) :

	1	2	3	4	5	6	$P(Y=j)$
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{11}{36}$
2	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{9}{36}$
3	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{7}{36}$
4	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{5}{36}$
5	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{3}{36}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
$P(X=i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	

Exemple 2 : De façon tout à fait similaire, on va retrouver des lois hypergéométriques pour X et Y :

	0	1	2	3	$P(Y=j)$
0	$\frac{1}{22}$	$\frac{3}{22}$	$\frac{3}{44}$	$\frac{1}{220}$	$\frac{14}{55}$
1	$\frac{4}{22}$	$\frac{6}{22}$	$\frac{3}{55}$	0	$\frac{28}{55}$
2	$\frac{3}{22}$	$\frac{9}{110}$	0	0	$\frac{12}{55}$
3	$\frac{1}{55}$	0	0	0	$\frac{1}{55}$
$P(X=i)$	$\frac{21}{55}$	$\frac{27}{55}$	$\frac{27}{220}$	$\frac{1}{220}$	

Remarque 156. On vient de voir qu'on pouvait déduire les lois marginales de la loi conjointe. Le contraire n'est pas possible en général.

Définition 171. La **loi conditionnelle de** X **sachant** $Y=j$ est la loi de la variable Z définie par $\forall i \in X(\Omega)$, $P(Z=i) = P_{Y=j}(X=i)$. On définit de même les lois conditionnelle de Y sachant $X=i$.

Exemple 3 : Dans le cas de variables infinies, on ne peut naturellement plus écrire la loi sous forme de tableau, et les calculs de lois marginales ou conditionnelles sont un peu plus formels. La loi de X se calcule assez aisément : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et on aura $X=k$ si la suite de lancers commence par k Pile suivi d'une face ou par k face suivis d'un Pile, cas incompatibles qui donnent $P(X=k) = \left(\frac{3}{4}\right)^k \times \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^k \times \frac{3}{4} = \frac{3^k+3}{4^{k+1}}$.

Pour déterminer la loi de Y, le plus simple est de passer par la loi de couple : on aura $(X,Y) = (i,j)$ si on débute par i Pile, puis j Face et à nouveau un Pile, ou bien i Face, j Pile et un Face, soit une probabilité de $P((X=i)\cap(Y=j)) = \left(\frac{3}{4}\right)^i \left(\frac{1}{4}\right)^j \times \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^i \left(\frac{3}{4}\right)^j \times \frac{1}{4} = \frac{3^{i+1}+3^j}{4^{i+j+1}}$. On utilise ensuite la formule des probabilités totales pour obtenir la loi de Y, avec le système complet d'évènements $(X=i)_{i\geqslant 1}$: $P(Y=j) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(X=i) \times P_{X=i}(Y=j) = \sum_{i=1}^{+\infty} P((X=i)\cap(Y=j)) =$ $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{3^{i+1}+3^j}{4^{i+j+1}} = \frac{1}{4^j} \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{i+1} + \left(\frac{3}{4}\right)^j \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{4^{i+1}} = \frac{1}{4^j}\left(\frac{3}{4}\right)^2 \frac{1}{1-\frac{3}{4}} + \left(\frac{3}{4}\right)^j \frac{1}{4^2}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{3^2+3^{j-1}}{4^{j+1}}$.

On constate que la loi de Y n'est pas la même que celle de X (ce qui n'était pas vraiment évident a priori).

Si on souhaite voir à quoi ressemblent les lois conditionnelles, on a par exemple comme loi conditionnelle à $Y = j$ fixé : $P_{Y=i}(X = i) = \dfrac{P((X = i) \cap (Y = j)}{P(Y = j)} = \dfrac{3^{i+1} + 3^j}{4^{i+j+1}} \times \dfrac{4^{j+1}}{3^2 + 3^{j-1}} = \dfrac{3^{i+1} + 3^j}{4^i(3^2 + 3^{j-1})}$.

19.2 Indépendance de variables aléatoires

Définition 172. Deux variables aléatoires sont dites **indépendantes** si tous les couples d'événements $X = i$, $Y = j$ sont indépendants. Autrement dit, $\forall i \in X(\Omega)$, $\forall j \in Y(\Omega)$, $P((X = i) \cap (Y = j)) = P(X = i)P(Y = j)$.

Exemple : Un exemple idiot pour illustrer. Si on tire deux dés simultanément et qu'on note X le résultat du premier dé et Y celui du deuxième dé, X et Y sont des variables aléatoires indépendantes. On a $P((X = i) \cap (Y = j)) = \dfrac{1}{36}$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant 6$ et $1 \leqslant j \leqslant 6$.

Exemple : Par contre, toujours dans le cas de l'inépuisable lancer de deux dés, si on prend pour X la somme des deux dés et pour Y leur produit, les deux variables ne sont pas indépendantes. On a par exemple $P(X = 8) = \dfrac{5}{36}$; $P(Y = 15) = \dfrac{1}{18}$, et $P((X = 8) \cap (Y = 15)) = \dfrac{1}{18}$.

Remarque 157. Deux variables aléatoires sont indépendantes si et seulement si toutes les lois conditionnelles de X sachant $Y = j$ sont identiques à la loi de X.

Remarque 158. Dans le cas où X et Y sont des variables aléatoires indépendantes, on peut obtenir la loi conjointe du couple (X, Y) à partir des deux lois marginales.

Exemples : Dans nos deux premiers exemples, on constate sans difficulté et sans surprise que les variables X et Y ne sont pas indépendantes (le fait qu'on ait des 0 dans la tableau de la loi conjointe suffit à imposer qu'il n'y ait pas indépendance).
Le troisième exemple est moins intuitif. Le calcul des lois conditionnelles, qui sont distinctes de la loi marginale de X, prouve qu'il n'y a pas non plus indépendance. Une autre façon de voir les choses est de trouver un contre-exemple à l'indépendance des évènements $X = i$ et $Y = j$. On peut ici calculer simplement $P(X = 1) = \dfrac{3+3}{4^2} = \dfrac{3}{8}$; $P(Y = 1) = \dfrac{3^2+1}{4^2} = \dfrac{5}{8}$; et $P((X = 1) \cap (Y = 1)) = \dfrac{3^2+3}{4^3} = \dfrac{3}{16} \neq \dfrac{3}{8} \times \dfrac{5}{8}$. Les courageux vérifieront qu'en effectuant la même expérience avec une piève équilibrée, on obtiendrait deux variables aléatoires indépendantes.
Un autre calcul intéressant sur cette expérience (quoique ne faisant pas vraiment intervenir le fait qu'on travaille sur un couple) est celui des espérances de X et de Y : on a (sous réserve d'existence) $E(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k \times \frac{3^k + 3}{4^{k+1}} = \frac{3}{4^2} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} + \frac{3}{4^2} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} = \frac{3}{4^2} \left(\frac{1}{(1-\frac{3}{4})^2} + \frac{1}{(1-\frac{1}{4})^2} \right) = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$.
Pour Y, on a $E(Y) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k \times \frac{3^2 + 3^{k-1}}{4^{k+1}} = \frac{3^2}{4^2} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} + \frac{1}{4^2} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} = \frac{3^2}{4^2} \times \frac{1}{(1-\frac{1}{4})^2} + \frac{1}{4^2} \times \frac{1}{(1-\frac{3}{4})^2} = 1 + 1 = 2$. Encore une fois, les courageux pourront faire le calcul avec une pièce équilibrée et constater que dans ce cas les deux variables ont pour espérance 2.

Proposition 142. Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, on a $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

Remarque 159. On peut calculer facilement la variance d'une loi binomiale à partir de la proposition précédente. En effet une loi binomiale de paramètre (n, p) est la somme de n variables aléatoires indépendantes de paramètre p, qui ont chacune pour variance $p(1-p)$. La variance de la binomiale vaut donc $np(1-p)$. Pour l'hypergéométrique, c'est plus compliqué, puisque la loi pour chaque tirage dépend des résultats des tirages précédents.

19.3 Opérations et variables aléatoires

Profitons de ce petit chapitre pour rappeler quelques cas particuliers de fonctions de deux variables aléatoires pour lesquelles on sait calculer facilement la loi. Commençons par le cas de la somme de deux variables :

Proposition 143. Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, la loi de leur somme $X+Y$ est donné par $P(X+Y=k)=\sum P(X=i)P(Y=k-i)$ (la somme portant sur les valeurs de i pour lesquelles $P(X=i)$ et $P(Y=k-i)$ sont toutes deux non nulles).

Démonstration. On a via la formule des probabilités totales $P(X+Y=k)=\sum P(X=i)_{i\in X(\Omega)}P_{X=i}(X+Y=k)$. Or, $P_{X=i}(X+Y=k)=P_{X=i}(Y=k-i)$ donc $P(X+Y=k)=\sum P_{i\in X(\Omega)}((X=i)\cap(Y=k-i))$. □

Exemple : Deux variables aléatoires X et Y suivant des lois uniformes respectivement sur $\{1;2;\dots;6\}$ et sur $\{1;2;3;4\}$ (par exemple les résultats d'un lancer de dés à six faces et à quatre faces). La loi de $X+Y$ se calcule aisément :

i	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X+Y=i)$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$

Proposition 144. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois binomiales $\mathcal{B}_{m,p}$ et $\mathcal{B}_{n,p}$ alors $X+Y$ suit une loi binomiale de paramètre $\mathcal{B}_{m+n,p}$.

Démonstration. D'après la propriété précédente, on a $P(X+Y=k)=\sum_{i=0}^{i=k}P(X=i)P(Y=k-i)=\sum_{i=0}^{i=k}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}\binom{m}{k-i}p^{k-i}(1-p)^{m-k+i}=p^k(1-p)^{n+m-k}\sum_{i=0}^{i=k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}=\binom{n+m}{k}p^k(1-p)^{n+m-k}$ en utilisant la formule de Vandermonde. On reconnait bien une loi binomiale de paramètre $(n+m,p)$. □

Proposition 145. Soient X et Y deux variables indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ, alors $X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.

Démonstration. C'est encore un calcul de somme : $P(X+Y=k)=\sum_{i=0}^{i=k}P(X=i)P(Y=k-i)=\sum_{i=0}^{i=k}\frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}\times\frac{e^{-\mu}\mu^{k-i}}{(k-i)!}=e^{-(\lambda+\mu)}\sum_{i=0}^{i=k}\frac{1}{i!(k-i)!}\lambda^i\mu^{k-i}=\frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!}\sum_{i=0}^{i=k}\binom{k}{i}\lambda^i\mu^{k-i}=\frac{e^{-(\lambda+\mu)}(\lambda+\mu)^k}{k!}$ via la formule du binôme de Newton. On reconnait bien une loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$. □

Autre exemple où on sait calculer la loi, le cas du minimum (ou du maximum) de deux variables aléatoires, où il est plus facile de passer par la fonction de répartition :

Proposition 146. Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes de fonctions de répartitions respectives F_X et F_Y, alors la fonction de répartition de la variablé aléatoire $Z=\max(X,Y)$ est donnée par $F_Z=F_XF_Y$.

Démonstration. Par définition $F_Z(x) = P(Z \geqslant x)$. Mais dire que $\max(X,Y) \leqslant x$ est équivalent à dire que $X \leqslant x$ et que $Y \leqslant x$, donc $F_Z(x) = P((X \leqslant x) \cap (Y \leqslant x)) = P(X \leqslant x) \times P(Y \leqslant x) = F_X(x)F_Y(x)$. □

Exemple : Reprenons une nouvelle fois le lancer de deux dés. On note X le résultat du premier dé et Y celui du deuxième dé. Les deux fonctions de répartition sont F_X et F_Y sont les mêmes : sur $[-\infty;1[$, $F_X(x) = 0$; sur $[1;2[$, $F_X(x) = \frac{1}{6}$, sur $[2;3[$, $F_X(x) = \frac{2}{6}$ etc. Soit $Z = \max(X,Y)$. La fonction de répartition de Z est donc donnée par : $[1;2[$, $F_Z(x) = \frac{1}{36}$; $[2;3[$, $F_Z(x) = \frac{4}{36}$ etc. On peut ainsi retrouver la loi du minimum par une méthode différente de celle vue un peu plus haut dans ce même chapitre (rappelons au cas où que pour passer de la fonction de répartition à la loi, on utilise la formule $P(Z = i) = F_Z(i) - F_Z(i-1)$:

i	1	2	3	4	5	6
$P(Z = i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

Remarque 160. Une fois connu le maximum de deux variables aléatoires, on peut en déduire le minimum en utilisant le fait que $X + Y = \min(X+Y) + \max(X+Y)$. On peut aussi utiliser le fait que si on pose $G_X(x) = 1 - F_X(x) = P(X > x)$ (une sorte d'anti-fonction de répartition), alors, si $U = \min(X,Y)$, on a $G_U(x) = G_X(x)G_Y(x)$ (ce qui se démontre de façon très similaire à ce qu'on vient de faire).

Chapitre 20

Espaces vectoriels

Introduction

Les deux derniers chapitres du cours (on approche de la fin) vont nous servir à introduire et commencer à étudier des notions que vous reverrez beaucoup plus en détail l'an prochain. En gros, l'idée pour nous est surtout de voir les matrices sous un autre angle, comme une façon de caractériser certaines applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. Pour cela, nous allons introduire l'outil extrêmement utile mais assez formel que représentent les espaces vectoriels. Pas grand chose à voir avec les vecteurs tels que vous pouvez en avoir vu dans votre jeunesse, il s'agit en gros de généraliser le calcul sur les coordonnées (que vous avez déjà abordé dans le cadre des vecteurs du plan ou, pour ceux qui ont fait la spécialité maths, de l'espace) à des ensembles très généraux, les fameux espaces vectoriels.

20.1 Espaces et sous-espaces vectoriels

20.1.1 Définition et exemples

Définition 173. Un ensemble E est un **espace vectoriel réel** s'il est muni d'une addition $+ : E \times E \to E$ et d'un produit par les réels $. : \mathbb{R} \times E \to E$ vérifiant les conditions suivantes :

- L'addition est associative ($\forall x, y, z \in E^3$, $(x+y)+z = x+(y+z)$) et commutative ($\forall x, y \in E^2$, $x + y = y + x$).
- Il existe un élément neutre pour l'addition, c'est-à-dire un élément de E noté 0 tel que $\forall x \in E$, $0 + x = x + 0 = 0$.
- Tout élément x de E possède un opposé dans E, c'est-à-dire un élément y tel que $x + y = y + x = 0$ (on note alors $y = -x$).
- Le produit est compatible avec le produit des réels : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}^2$, $\forall x \in E$, $\lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x$.
- Le réel 1 est un élément neutre pour le produit : $\forall x \in E$, $1.x = x$.
- Le produit est doublement distributif par rapport à l'addition : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}^2$, $\forall x \in E$, $(\lambda+\mu).x = \lambda.x + \mu.x$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x, y \in E^2$, $\lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$.

Les éléments de E sont alors appelés **vecteurs**, et les éléments de $\mathbb{R}$ par lesquels on peut les multiplier sont appelés **scalaires**.

Remarque 161. Ces conditions peuvent paraitre complexes, mais on ne les vérifie jamais en pratique, et on peut en fait les résumer simplement par le fait qu'il y a deux opérations sur notre ensemble E : une addition (qui prend deux éléments de E et sort un troisième élément de E), et un produit **par des réels** (et non pas cette fois un produit d'éléments de E) qui vérifient des conditions assez naturelles.

Exemples :

- L'ensemble des suites réelles est un espace vectoriel réel, la somme de deux suites (u_n) et (v_n) étant la suite $(u_n + v_n)$, et le produit d'une suite (u_n) par un réel λ étant la suite (λu_n). De même, l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel.

- L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ des matrices à n lignes et p colonnes est un espace vectoriel (on a prouvé toutes les propriétés de la définition précédente dans le cas des matrices lors de notre premier chapitre consacré au calcul matriciel). Attention toutefois, l'ensemble de toutes les matrices (sans spécification de taille) n'est pas un espace vectoriel (on ne peut pas additionner deux matrices de taille différente).
- L'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égalà n est un espace vectoriel. L'ensemble $\mathbb{R}[X]$ de tous les polynômes à coefficients réels est aussi un espace vectoriel.
- L'espace vectoriel des matrices lignes (ou colonnes) à n lignes sera souvent identifié à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ constitué de l'ensemble des n-uplets de réels (muni de l'addition et du produit extérieur coordonnée par coordonnée).
- L'ensemble des vecteurs dans le plan (ou dans l'espace) est un espace vectoriel. On sait faire la somme de deux vecteurs (via la relation de Chasles ou la règle du parallélogramme), et faire le produit d'un vecteur par un réel. Comme vous avez appris à le faire au lycée, on peut identifier ces vecteurs à des couples de réels (dans le cas du plan) ou des triplets de réels (dans l'espace) grâce à l'introduction de coordonnées une fois un repère choisi.

20.1.2 Sous-espaces vectoriels

Définition 174. Soit E un espace vectoriel réel. Un sous-ensemble F de E est un **sous-espace vectoriel** s'il est lui-même un espace vectoriel (muni de l'addition et de la multiplication définies sur E).

Proposition 147. *F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si*
- $0 \in F$
- $\forall x, y \in F,\ x + y \in F$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in F,\ \lambda.x \in F.$

Remarque 162. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E s'il est non vide et stable par addition et par multiplication par un réel. La proposition est évidente. On peut d'ailleur remplacer les deux dernières conditions par la suivante : $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (x, y) \in F^2,\ \lambda x + y \in F$.

Exemples : L'ensemble des matrices diagonales dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel. En effet, la somme de deux matrices diagonales est diagonale, et le produit d'une matrice diagonale par un réel est diagonale.
Dans $\mathbb{R}^3$, l'ensemble $F = \{(x\ y\ z) \mid x+y+z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel mais $G = \{(x\ y\ z) \mid x + y + z = 1\}$ n'en est pas un (il ne contient pas 0, et n'est stable ni par somme ni par produit par un réel !).
L'ensemble des polynomes de degré inférieur ou égal à n est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des polynomes, mais l'ensemble des polynomes de degré n n'est pas un sous-espace vectoriel (la somme de deux polynomes de degré n peut avoir un degré strictement inférieur à n).
Exercice Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Parmi tous les sous-ensembles suivants, déterminer lesquels sont des sous-espaces vectoriels de E.

1. Les fonctions constantes.
2. Les fonctions croissantes (au sens large).
3. Les fonctions monotones.
4. Les fonctions vérifiant $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.
5. Les fonctions vérifiant $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
6. Les fonctions ayant une limite finie en $+\infty$.
7. Les fonctions admettant une asymptote oblique en $+\infty$.
8. Les fonctions de période 2.
9. Les fonctions périodiques.

10. Les fonctions de classe C^2 vérifiant $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) + 3f'(x) - 2f(x) = 0$.
11. Les fonctions dérivables sur $]-\infty; 0]$.

Corrigé de l'exercice

1. C'est un sous-ev (contient la fonction nulle, stable par somme et produit par un réel).
2. Ce n'est pas un sous-ev, le produit d'une fonction croissante (et non constante) par -1 étant rarement une fonction croissante.
3. Ce n'est pas un sous-ev non plus, car la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante n'est pas toujours monotone.
4. Ce n'est pas un sous-ev, la fonction nulle n'appartient pas à l'ensemble.
5. C'est un sous-ev (règles de calcul usuelles sur les limites).
6. C'est aussi un sous-ev (toujours les règles classiques).
7. C'est également un sous-ev (en admettant les asymptotes horizontales comme cas particuliers d'asymptotes obliques) : si $f(x) \underset{+\infty}{=} ax+b+o(1)$ et $g(x) \underset{+\infty}{=} cx+d+o(1)$, alors $\lambda f(x)+g(x) \underset{+\infty}{=} (\lambda a + c)x + (b + d) + o(1)$, donc $\lambda f + g$ admet aussi une asymptote oblique.
8. C'est assez clairement un sous-ev.
9. C'est plus compliqué, mais ce n'est pas un sous-ev, la somme d'une fonction périodique de période 1 et d'une fonction périodique de période $\sqrt{2}$ n'étant par exemple pas périodique en général.
10. C'est un sous-ev (à cause de la linéarité de la dérivation).
11. C'est un sous-ev (propriété classiques de la dérivation).

Exemple très important : L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène de k équations à n inconnues est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathbb{R}^n$. On peut d'ailleurs toujours décrire un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ à l'aide d'un tel système d'équations.

Exemple : L'ensemble des solutions su système $\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & - & 3y & + & 5z & = & 0 \end{array}\right.$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. On sait qu'on peut écrire les solutions d'un tel système (qui ne peut pas être de Cramer puisqu'il a plus d'inconnues que d'équations) en fonctions d'une ou plusieurs de ses inconnues. C'est la motivation de l'introduction de l'autre façon de décrire un sous-espace vectoriel, que nous allons étudier pour cette fin de paragraphe.

Définition 175. Une **famille de vecteurs** dans un espace vectoriel E est un k-uplet $(e_1, \dots, e_k)$ d'éléments de E.

Remarque 163. Attention bien sûr à ne pas confondre une famille de vecteurs de E, et un vecteur qui est souvent lui-même un n-uplet de réels.

Définition 176. Une combinaison linéaire d'une famille $(e_1, \dots, e_k)$ de vecteurs de E est un vecteur $x \in E$ qui peut s'écrire sous la forme $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=k} \lambda_i e_i$, pour une k-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ de réels.

Exemples : Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, le vecteur $(2\ 5\ -3)$ est combinaison linéaire des vecteurs $(1\ -2\ 6)$ et $(-1\ 11\ -21)$, puisque $3(1\ -2\ 6) + (-1\ 11\ -21) = (2\ 5\ -3)$. Par contre, le vecteur $(0\ 9\ 2)$ n'est pas combinaison linéaire de ces deux même vecteurs.

Dans l'espace vectoriel des matrices à 3 lignes et 3 colonnes $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 12 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \\ -6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire des matrices $B = \begin{pmatrix} 0 & 24 & -2 \\ -6 & 2 & 0 \\ -12 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ et I puisque $A = \dfrac{1}{2}B + I$.

Définition 177. Soit $(e_1, \dots, e_k)$ une famille de vecteurs. L'ensemble des combinaisons linéaires de cette famille est noté $Vect(e_1, \dots, e_k)$.

Proposition 148. Soit $(e_1, \dots, e_k)$ une famille de vecteurs de E, alors $Vect(e_1, \dots, e_k)$ est un sous-espace vectoriel de E. C'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant e_1, e_2, …, e_k. On l'appelle sous-espace vectoriel engendré par la famille.

Démonstration. Une somme de deux combinaisons linéaires est bien une combinaison linéaire : $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^{k} \mu_i e_i = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i + \mu_i) e_i$, et de même pour un produit par un réel : $\rho \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{k} (\rho \lambda_i) e_i$, donc $Vect(e_1, \dots, e_k)$ est un sous-espace vectoriel de E. De plus, un sous-espace contenant les éléments de la famille contient aussi ses combinaisons linéaires puisqu'un sous-espace est stable par combinaisons linéaires, donc il contient forcément $Vect(e_1, \dots, e_k)$. □

Exemple : L'ensemble des éléments de $\mathbb{R}^3$ de la forme $(2x + y \;\; 3x - 2y \;\; -x)$, x et y étant deux réels, est un sous-espace vectoriel. Il s'agit en fait du sous-espace vectoriel engendré par les deux vecteurs $(2 \; 3 \; -1)$ et $(1 \; -2 \; 0)$, puisque $(2x + y \;\; 3x - 2y \;\; -x) = x(2 \; 3 \; -1) + y(1 \; -2 \; 0)$ s'écrit bien comme combinaison linéaire de ces deux vecteurs.

Proposition 149. L'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.

Exemple : Dans $\mathbb{R}^3$, on définit F comme l'ensemble des solutions de l'équation $x - y + 2z = 0$, et $G = Vect((1 \; 0 \; -1), (-2 \; 1 \; 1))$. Ces deux ensembles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, leur intersection en est donc aussi un. Pour la décrire le plus simplement possible, le mieux est d'écrire les vecteurs de G comme combinaison linaires, et de leur faire vérifier l'équation définissant F : $x \in G \Leftrightarrow x = (\lambda - 2\mu \;\; \mu \;\; \mu - \lambda)$, pour un certain couple de réels (λ, μ). Le vecteur x appartient aussi à F si $\lambda - 2\mu - \mu + 2\mu - 2\lambda = 0$, soit $-\lambda - \mu = 0$, donc $\mu = -\lambda$. On a alors $x = (3\lambda \;\; -\lambda - 2\lambda)$, dont on déduit que $F \cap G = Vect((3 \; -1 \; -2))$.

20.2 Familles de vecteurs

20.2.1 Familles génératrices

Définition 178. Une famille $(e_1, \dots, e_k)$ est dite **génératrice** tout élément de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de la famille $(e_1, \dots, e_k)$: $\forall x \in E$, $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k$, $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i$. Autrement dit, $Vect(e_1, \dots, e_k) = E$.

Remarque 164. Pour prouver qu'une famille est génératrice, il faut prouver que l'équation $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i$, qui peut s'écrire comme un système linéaire dont les inconnues sont les coefficients λ_i, admet toujours une solution.

Exemple : Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $((0 \; 2 \; 0), (2 \; -1 \; 2), (1 \; -3 \; 0), (1 \; -2 \; 3))$ est génératrice car le système $\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x & = & & & 2b & + & c & + & d \\ y & = & 2a & - & b & - & 3c & - & 2d \\ z & = & & & 2b & & & + & 3d \end{array} \right.$ admet par exemple comme solution $\left(\frac{3x}{2} + \frac{y}{2} - \frac{5z}{4}, \frac{z}{2}, x - z, 0 \right)$. Pour la résolution, on a tout bêtement imposé $d = 0$ pour se ramener à un système triangulaire aisé à résoudre. Cela signifie que la famille est toujours génératrice si on en supprime le dernier vecteur !

20.2.2 Familles libres

Une famille génératrice était une famille permettant de reconstituer tout l'espace E, mais contenant éventuellement « trop » de vecteurs. Une famille libre est en quelque sorte le contraire : on ne peut pas supprimer de vecteurs, mais il se peut qu'on en ait pas assez.

Définition 179. Une famille de vecteurs $(e_1, \dots, e_k)$ est **libre** si aucun de ses éléments n'est combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille (on dit que ses vecteurs sont linéairement indépendants). Autrement dit, si $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i = 0$, alors $\forall i \in \{1, \dots, k\}$, $\lambda_i = 0$. Dans le cas contraire, on dit que la famille de vecteurs est liée.

Remarque 165. Pour prouver qu'une famille est libre, il faut vérifier que le système linéaire homogène obtenu en écrivant l'égalité $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i = 0$ est de Cramer.

Exemple : Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $((2\ 1\ 0), (1\ -1\ -1), (0\ 3\ -1))$ est libre car le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & & & = & 0 \\ x & - & y & - & z & = & 0 \\ & & 3y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$ a pour unique solution $(0, 0, 0)$.

20.2.3 Bases et dimension

Après avoir défini des familles de vecteurs ayant trop ou pas assez de vecteurs, nous allons maintenant passer à la notion la plus intéressante, celle de famille ayant juste le bon nombre de vecteurs.

Définition 180. Une famille de vecteurs est une **base** d'un espace vectoriel E si elle est à la fois libre et génératrice. Autrement dit, tout élément de E peut s'écrire de façon unique comme combinaison linéaire d'élements de la famille.

Exemple : Considérons dans $\mathbb{R}^3$ l'ensemble F des vecteurs (x, y, z) vérifiant $3x - 2y = z$. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, il est constitué de tous les vecteurs de la forme $(x, y, 3x - 2y) = x(1, 0, 3) + y(0, 1, -2)$. La famille $((1, 0, 3); (0, 1, -2))$ est donc génératrice de F. Comme de plus elle est libre (les deux vecteurs n'étant pas proportionnels), c'est donc une base de F.

Définition 181. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in E$. Les réels λ_i sont appelés **coordonnées** de x dans la base $(e_1, \dots, e_n)$, et les vecteurs $\lambda_i e_i$ **composantes** de x dans cette même base.

Proposition 150. La famille $((1, 0, \dots, 0); (0, 1, 0, \dots, 0); \dots; (0, \dots, 0, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^n$ appelée base canonique.

Démonstration. Si on note $e_i = (0; \dots; 0; 1; 0; \dots; 0)$, tout vecteur $x = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ s'écrit sous la forme $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, donc la famille est génératrice. De plus, si on avait $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i$, on aurait donc $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (\mu_1, \dots, \mu_n)$, soit en décomposant suivant chaque coordonnée $\lambda_i = \mu_i$, donc chaque décomposition est unique. La famille est donc également libre. □

Définition 182. Un espace vectoriel E est **de dimension finie** s'il admet une base (une base étant toujours une famille finie). Dans ce cas, toutes les bases de E comportent le même nombre d'éléments, qui est appelé **dimension** de E.

Exemple : L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est sans surprise de dimension n.

Théorème 35. (théorème de la base incomplète) Soit $(e_1, \dots, e_k)$ une famille libre dans un espace E de dimension n. Alors $k \leqslant n$ et il existe des vecteurs $e_{k+1}, \dots, e_n$ tels que $(e_1, \dots, e_n)$ soit une base de E (on peut donc compléter une famille libre en une base).

Démonstration. Ce théorème, comme l'affirmation contenue dans la définition précédente, ne seront pas démontrés cette année. □

Proposition 151. Dans un espace vectoriel de dimension n, toute famille libre possède au plus n éléments, et toute famille libre de n éléments est une base. Toute famille génératrice possède au moins n éléments, et toute famille génératrice de n éléments est une base.

Proposition 152. Soit F un sous-epace vectoriel d'un espace vectoriel E de dimension finie n. Alors F est de dimension finie $p \leqslant n$.

Démonstration. Encore un résultat plus technique qu'il n'en a l'air, que nous admettrons. □

Exemple : Nous avons montré un peu plus haut que l'ensemble des triplets (x, y, z) de réels vérifiant $3x - 2y = z$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$.

20.2.4 Exemples détaillés : matrices, polynomes, suites

En dehors des espaces $\mathbb{R}^n$, qui sont très intéressants mais un peu élémentaires, nous étudierons de temps à autre d'autres espaces vectoriels, qui sont constitués d'objets mathématiques d'usage courant. Voici quelques résultats sur les matrices et les polynomes.

Proposition 153. L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension np. Une base (souvent appelée base canonique) est constituée des matrices $E_{i,j}$ (pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$) ayant pour seul coefficient non nul le coefficient d'indice ij, qui vaut 1 : $E_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \dots & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Démonstration. Le fait que les ensembles de matrices soient des espaces vectoriels découle des propriétés de l'addition de matrices et du produit de matrices par un réel vues il y a maintenant quelques chapitres. De plus, la famille $E_{i,j}$ est bien génératrice puisque, si $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on a $M = \displaystyle\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} m_{i,j} E_{i,j}$. Enfin, prouvons que la famille est libre. Supposons qu'une combinaison linéaire des vecteurs de la famille soit nulle : $\displaystyle\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \lambda_{i,j} E_{i,j} = 0$. La somme de gauche étant simplement la matrice dont le coefficient d'indice i, j vaut $\lambda_{i,j}$, elle est nulle seulement si tous les $\lambda_{i,j}$ sont nuls, la famille est donc bien libre. Comme il y a np éléments dans cette base, cela prouve que $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est de dimension np. □

Proposition 154. L'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ des polynomes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n est un espace vectoriel de degré $n + 1$. Une base (souvent appelée base canonique) de $\mathbb{R}_n[X]$ est constituée des polynomes $1, X, X^2, \dots, X^n$.

Démonstration. Le fait que ce soit un espace vectoriel est pénible mais facile à montrer. Ensuite, par définition, tout polynome de degré inférieur ou égal à n est une combinaison linéaire de 1, X, …, X^n. Et si une combinaison linéaire de ces éléments est nulle, c'est qu'il s'agit du polynome dont tous les coefficients sont nuls (rappelons que cela découle du fait que le polynôme admet alors une grosse infinité de racines, ce qui n'est guère possible pour un polynôme dedegré n autre que le polynôme nul), donc la famille est libre. Comme elle est constituée de $n + 1$ éléments, cela prouve que $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n + 1$. □

Proposition 155. Dans $\mathbb{R}_n[X]$, toute famille constituée de $n + 1$ polynomes de degré respectifs $n + 1$, n, …, 1 est une base.

Démonstration. Considérons une telle famille P_n, P_{n-1}, ..., P_0 (avec P_i de degré i). La famille étant constituée de $n+1$ vecteurs, il suffit de vérifier qu'elle est libre. Supposons qu'une combinaison linéaire s'annule : $Q = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i = 0$. Un polynome est nul si tous ses coefficients sont nuls. Mais le coefficient de degré n de Q vaut λ_n fois celui de P_n puisque les autres éléments de la famille sont de degré inférieur. On doit donc avoir $\lambda_n = 0$. Mais du coup, le coefficient de degré $n-1$ de Q vaut λ_{n-1} fois celui de P_{n-1}, donc $\lambda_{n-1} = 0$, et ainsi de suite (une petite récurrence pour les courageux). Finalement, tous les λ_i sont nuls, donc la famille est libre, donc est une base. □

Proposition 156. L'ensemble S des suites vérifiant une récurrence linéaire d'ordre 2 est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de l'ensemble des suites réelles. Dans le cas où son équation caractéristique admet deux solutions distinctes r_1 et r_2, les deux suites géométriques définies par $u_n = r_1^n$ et $v_n = r_2^n$ forment une base de S. Si l'équation caractéristique a une solution double r, les suites $u_n = r^n$ et $v_n = nr^n$ forment une base de S.

Démonstration. Commençons par prouver que S est un espace vectoriel de dimension 2 : S est l'ensemble des suites vérifiant une certaine relation $x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n$ (pour $n \geqslant 2$). Si on prend deux suites y_n et z_n vérifiant cette relation, leur somme $y_n + z_n$ la vérifiera aussi, et de même pour λy_n. L'ensemble S est donc un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles.
Notons à présent x la suite vérifiant $x_0 = 1$, $x_1 = 0$ et qui appartient à S (donc qui vérifie la récurrence pour $n \geqslant 2$) et y la suite de S vérifiant $y_0 = 0$ et $y_1 = 1$. La famille (x, y) est libre (en effet, les deux suites ne sont pas proportionnelles), mais également génératrice de S. En effet, soit z un élément de S, $a = z_0$ et $b = z_1$, on a en fait $z = ax + by$: cela est vrai pour les deux premiers termes de la suite, et ensuite cela le reste par récurrence. On en déduit que S est de dimension 2 et que (x, y) en est une base.
Maintenant qu'on connait la dimension de S, il suffit de vérifier que (u_n) et (v_n) appartiennent à S et forment une famille libre pour constituer une base de S. Dans le cas où on a deux racines, vérifions que $(u_n) \in S$: $au_{n+1} + bu_n = ar_1^{n+1} + br_1^n = r_1^n(ar + b) = r_1^n \times r_1^2 = r_1^{n+2} = u_{n+2}$ (en effet, on a $r_1^2 = ar_1 + b$ par définition de r_1). De même, $(v_n) \in S$, et les deux suites ne sont pas proportionnelles (en effet $u_0 = v_0 = 1$, mais $u_1 \neq v_1$). La famille (u_n, v_n) est donc une base de S.
De même, dans le cas où on a une racine double, la famille (r^n, nr^n) est libre car $r^1 = 1r^1$, mais $r^0 \neq 0$. De plus, r^n vérifie bien la récurrence pour la même raison que tout à l'heure et nr^n aussi : $a(n+1)r^{n+1} + bnr^n = nr^n(ar+b) + ar^{n+1} = nr^{n+2} + ar^{n+1} = r^{n+2}\left(n + \frac{a}{r}\right) = r^{n+2}(n+2) = v_{n+2}$, car, si l'équation $x^2 - ax - b = 0$ admet une racine double, celle-ci vaut $\frac{a}{2}$, donc $\frac{a}{r} = 2$. □

Chapitre 21

Applications linéaires

21.1 Aspect vectoriel

21.1.1 Définition et exemples

Définition 183. Soient E et F deux espace vectoriels, une **application linéaire** de E dans F est une application $u : E \to F$ vérifiant les conditions suivantes :

- $\forall (x, y) \in E^2$, $u(x + y) = u(x) + u(y)$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$, $u(\lambda x) = \lambda u(x)$

Remarque 166. Une application $u : E \to F$ est linéaire si et seulement si $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\forall (x, y) \in E^2$, $u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y)$. Autrement dit, une application est linéaire si elle est compatible avec les combinaisons linéaires. On a d'ailleurs plus généralement, pour une application linéaire, $u\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u(e_i)$.

Exemples : Bien que les conditions définissant une application linéaire soient assez restrictives, on peut trouver des exemples extrêmement variés dans les différents espaces vectoriels que nous avons étudiés au chapitre précédent.

- L'application $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $u(x, y) = (2x - 3y, 4x + y, -x + 2y)$ est une application linéaire.
- L'application $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $u(x, y) = (2x-3, 4+y, -x+2y)$ n'est pas une application linéaire (on peut constater par exemple qu'en général $u(2x, 2y) \neq 2u(x, y)$).
- L'application $u : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $u(M) = AM$ est une application linéaire, quelle que soit la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- L'application $u : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $u(M) = M^2$ n'est pas une application linéaire (en général, $(M + N)^2 \neq M^2 + N^2$).
- Soit E l'ensemble des suites réelles. L'application $f : E \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(u_n) = (u_0, u_8, u_{35})$ est une application linéaire.
- Soit E l'ensemble des fonctions C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. L'application $u : E \to E$ définie par $u(f) = f'$ est une application linéaire.
- Soit E l'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle $[0; 1]$. L'application $u : E \to \mathbb{R}$ définie par $u(f) = \int_0^1 f(t)dt$ est une application linéaire.

Définition 184. Une application linéaire $u : E \to F$ est aussi appelée **morphisme** de E dans F. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble de toutes les applications linéaires de l'espace vectoriel E vers l'espace vectoriel F.
Une application linéaire $u : E \to E$ est appelée **endomorphisme** de l'espace vectoriel. On note plus simplement $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
Une application linéaire bijective est appelée **automorphisme**. L'ensemble des automorphismes d'un ev E dans lui-même est parfois noté $GL(E)$.

21.1.2 Noyau, image d'une application linéaire

Définition 185. Le **noyau** d'une application linéaire $u : E \to F$ est l'ensemble $Ker(u) = \{x \in E \mid u(x) = 0\}$.

Remarque 167. Les lettres Ker sont les premières du mot allemand Kernel qui signifie, comme vous auriez pu le deviner, noyau.

Proposition 157. Si $u : E \to F$ est une application linéaire, alors $Ker(u)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. En effet, si $(x, y) \in Ker(u)^2$, on a $u(x) = u(y) = 0$, donc $u(x+y) = u(x)+u(y) = 0$, d'où $x + y \in Ker(u)$. De même, si $x \in Ker(u)$, $u(\lambda x) = \lambda u(x) = 0$ donc $\lambda x \in Ker(u)$. De plus, le vecteur nul appartient toujours au noyau de u. En effet, soit $x \in E$, on a $u(x) = u(x+0) = u(x)+u(0)$, donc $u(0) = u(x) - u(x) = 0$. □

Remarque 168. Pour déterminer le noyau d'une application linéaire, on est en fait amené à déterminer les solutions d'un système d'équations linéaires homogènes (on verra plus loin qu'une application linéaire s'écrit toujours sous forme de combinaisons linéaires des coordonnées).

Exemple : Déterminons le noyau de l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ défini par $(x, y, z) \mapsto (x-y+z, 3x-2y+5z, -x-3z)$. Les éléments du noyau sont les triplets de réels (x, y, z) solutions du système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 0 \\ 3x & - & 2y & + & 5z & = & 0 \\ -x & & & - & 3z & = & 0 \end{array}\right.$. Le système n'est pas de Cramer ($2L_1 - L_2 = L_3$), les solutions sont les triplets de la forme $(-3z, -2z, z)$, avec $z \in \mathbb{R}$. Autrement dit, le noyau de u est un sous-espace vectoriel de dimension 1 de $\mathbb{R}^3$, dont une base est constituée du vecteur $(-3, -2, 1)$.

Proposition 158. Une application linéaire est injective si et seulement si $Ker(u) = \{0\}$.

Démonstration. Supposons d'abord le noyau réduit au vecteur nul et montrons que u est injective : soient $(x, y) \in E^2$ tels que $u(x) = u(y)$, alors $u(x-y) = u(x)-u(y) = 0$, donc $x-y \in Ker(u)$, donc $x-y = 0$, c'est-à-dire $x = y$, ce qui prouve bien l'injectivité. Réciproquement, supposons u injective, alors 0 a un seul antécédent par u. Or, le vecteur nul, on l'a vu, est toujours un antécédent de 0 par une application linéaire. Ceci prouve bien qu'il est le seul élément de E à appartenir à $Ker(u)$. □

Définition 186. L'**image** d'une application linéaire $u : E \to F$ est $Im(u) = \{y \in F \mid \exists x \in E, u(x) = y\}$.

Proposition 159. Soit $u : E \to F$ une application linéaire, alors u est surjective si et seulement si $Im(u) = F$.

Démonstration. Pas de démonstration, puisque c'est la définition d'une application surjective. □

Proposition 160. L'image d'une application linéaire est un sous-espace vectoriel de F.

Démonstration. Rien de bien difficile. L'image contient le vecteur nul, puisque $u(0) = 0$. Si $y \in Im(u)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $y = u(x)$, donc $u(\lambda x) = \lambda u(x) = \lambda y$, donc $\lambda y \in Im(u)$. De même, si y et y' sont dans l'image de u, $y = u(x)$ et $y' = u(x')$, donc $u(x + x') = y + y'$, qui est donc dans l'image. □

Proposition 161. Soit $u : E \to F$ une application linéaire de E dans F et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E, alors $Im(u) = Vect(u(e_1), \dots, u(e_n))$.

Démonstration. Comme les vecteurs $u(e_1), \dots, u(e_n)$ appartiennent à $Im(u)$, on a nécessairement $Vect(u(e_1), \dots, u(e_n)) \subset Im(u)$. De plus, soit $y \in Im(u)$, on a $y = u(x)$, et comme $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, on peut écrire $x = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i e_i$. On a alors $y = u(x) = u\left(\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i u(e_i)$, donc $y \in Vect(e_1, \dots, e_n)$, et les deux ensembles sont bien égaux. □

Remarque 169. Attention, en général, $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ n'est pas une base de $Im(u)$, mais seulement une famille génératrice.

Exemple 1 : La méthode élémentaire pour calculer une image est d'utilser la définition. Prenons par exemple l'applicaton linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $u(x, y) = (2x - y, x + 2y, -2x + y)$. Un triplet (a, b, c) appartient à $Im(u)$ si et seulement si le système

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} 2x & - & y & = & a \\ x & + & 2y & = & b \\ -2x & + & y & = & c \end{array} \right.$$

admet une solution. Les membres de gauche des deux équations extrêmes étant opposés, il faut nécessairement avoir $a = -c$, et on vérifie facilement que cette condition est suffisante. On a donc $Im(u) = \{(a, b, -a) \mid a, b \in \mathbb{R}^2\} = Vect((1, 0, -1); (0, 1, 0))$.

Exemple 2 : En pratique, on utilisera plutôt notre dernière proposition, car c'est beaucoup plus rapide ! Reprenons le même exemple. La base canonique de $\mathbb{R}^2$ est constituée des deux vecteurs $(1, 0)$ et $(0, 1)$, donc l'image est engendrée par $u(1, 0) = (2, 1, -2)$ et $u(0, 1) = (-1, 2, 1)$. On a donc $Im(u) = Vect((2, 1, -2); (-1, 2, 1))$ (ce ne sont pas les mêmes vecteurs que tout à l'heure mais on peut vérifier qu'ils engendrent le même espace vectoriel).

21.2 Aspect matriciel

Dans la mesure où la donnée des images des vecteurs d'une base suffit à déterminer complètement une application linéaire, il peut être tentant et pratique de représenter celles-ci par une matrice, via le petit calcul suivant : soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base l'ev E (supposé de dimension n), et $(f_1, f_2, \dots, f_p)$ une base de F, supposé donc de dimension p. Si $u : E \to F$ est une application linéaire, on peut écrire, pour tout x de E, $u(x) = u\left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i e_i\right)$, où les réels x_i sont les coordonnées de x dans la base choisie, puis $u(x) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i u(e_i) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i \sum_{j=1}^{j=p} a_{i,j} e_j = \sum_{j=1}^{j=p} \left(\sum_{i=1}^{i=n} a_{i,j} x_i\right) e_j$, où le coefficient $a_{i,j}$ représente la i-ème coordonnée du vecteur e_j dans la base $(f_1, \dots, f_p)$. Cette dernière expression fait fortement penser à un produit de matrices (mais si, je vous assure), ce qui amène les définitions suivantes :

Définition 187. Soit $u : E \to F$ une application linéaire entre espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_p)$ une base de F. La **matrice représentant u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$** est la matrice $M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ dont la i ème colonne est composée des coordonnées de $u(e_i)$ dans la base $\mathcal{B}'$. Autrement dit, si $u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$, alors $M_{i,j} = \lambda_i$.

Exemple : Soit $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $u(x, y, z) = (4x - 3x + z, -2x + y - 5z)$, la matrice de u dans les bases canoniques est $M = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$.

Définition 188. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E et $\mathcal{B}$ une base de E. On note souvent $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ (c'est-à-dire que la base de départ est la base $\mathcal{B}$ et celle d'arrivée également).

Proposition 162. En gardant les notations précédentes, si on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ la matrice-colonne des coordonnées dans $\mathcal{B}$ d'un élément $x \in E$ et $u(X) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ celle des coordonnées de son image dans $\mathcal{B}'$, alors $u(X) = MX$, où M est la matrice représentant u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

Démonstration. En effet, on a $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i$, et par définition de la matrice M, on a $u(e_i) = \sum_{j=1}^{n} M_{ji} f_j$. On a donc $u(X) = \sum_{i=1}^{p} x_i \sum_{j=1}^{n} M_{ji} f_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{p} x_i M_{ji} \right) f_j$. Or, l'unique terme de la j ème ligne de la matrice colonne MX vaut précisément $\sum_{i=1}^{p} x_i M_{ji}$, donc l'égalité demandée est bien vérifiée. □

Proposition 163. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, et M la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, alors la matrice de λu dans ces mêmes bases est λM.
De même, si $(u, v) \in \mathcal{L}(E, F)^2$, et M, N leurs matrices respectives, la matrice de $u + v$ est $M + N$.
Plus intéressant, si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$, et M, N leurs matrices respectives, alors la matrice de $v \circ u$ est NM.

Démonstration. En effet, si $u(X) = MX$ et $v(X) = NX$, $\lambda u(X) = \lambda MX$; $u(X) + v(X) = MX + NX = (M + N)X$ et, lorsque cela a un sens, $v \circ u(X) = v(MX) = NMX$. □

Exemple : Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ définie par $(x, y, z) \mapsto (x - y, 2x + z)$, et $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ définie par $(x, y) \mapsto (x + y, 3x - y, -x + 2y)$. Les matrices respectives de ces deux applications linéaires dans les bases canoniques sont $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Comme $NM = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, on peut en déduire que $v \circ u(x, y, z) = (3x - y + z, x - 3y - z, 3x + y + 2z)$.

Proposition 164. Un endomorphisme est bijectif (on dit aussi inversible) si et seulement si sa matrice M dans les bases canoniques l'est. Dans ce cas, u^{-1} est également une application linéaire, et sa matrice est M^{-1}.

Démonstration. En effet, si u est bijective, u^{-1} est bien défini et $\forall X \in E$, $u^{-1}(u(X)) = X$. L'application u^{-1} est alors linéaire : si Y_1 et Y_2 sont deux éléments de E, ils ont des antécédents X_1 et X_2 par u, et $X_1 + X_2$ est alors un antécédent de $Y_1 + Y_2$ donc $u^{-1}(Y_1 + Y_2) = X_1 + Y_2$. Le cas du produit par un réel se montre de façon très similaire. Soit alors N la matrice de u^{-1} dans la base canonique, comme $u^{-1} \circ u = u \circ u^{-1} = id$ (on parle ici de l'application identité et pas de la matrice du même nom), on a en utilisant la proposition précédente $NM = MN = I$ (la matrice de l'identité dans les bases canoniques est I), donc $N = M^{-1}$. □

Pour conclure cet ultime chapitre de l'année, quelques mots sur des notions que vous reverrez nettement plus en détail l'an prochain, puisque l'algèbre linéaire sera une part importante de votre programme, et la diagonalisation la notion centrale de ce chapitre.

Définition 189. Soit $u : E \to F$ une application linéaire. Un réel λ est une **valeur propre** de u s'il existe un vecteur non nul $x \in E$ tel que $u(x) = \lambda x$. Tous les vecteurs vérifiant cette équation sont appelés **vecteurs propres** de u associés à la valeur propre λ.

Exemple : Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $u(x, y) = (2x + y, -3x - 2y)$. Dans la base canonique, u a pour matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$. On peut constater que 1 est valeur propre de u, avec comme vecteur propre asssocié (par exemple) $(1, -1)$; -1 est également valeur propre de u avec comme vecteur propre associé $(1, -3)$ puisque $u(1, -3) = (-1, 3) = -(1, -3)$. La famille constituée des deux vecteurs propres $((1,-1);(1,-3))$ est une base de $\mathbb{R}^2$ (les vecteurs ne sont pas proportionnels). L'intérêt de ce calcul de vecteurs propres vient du fait que la matrice de u dans cette nouvelle base devient nettement plus simple. En effet, elle s'écrit $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Vous verrez l'an prochain que des vecteurs propres correspondants à des valeurs propres distinctes forment toujours une famille libre, et que la matrice de u dans une base formée de vecteurs propres est toujours diagonale (comme dans cet exemple). Nous allons d'ailleurs achever le chapitre en indiquant le lien entre la diagonalisation des endormorphismes et celle des matrices vue dans un chapitre précédent.

Définition 190. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est **diagonalisable** s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est diagonale. Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si on peut trouver une base de E constituée de vecteurs propres pour u.

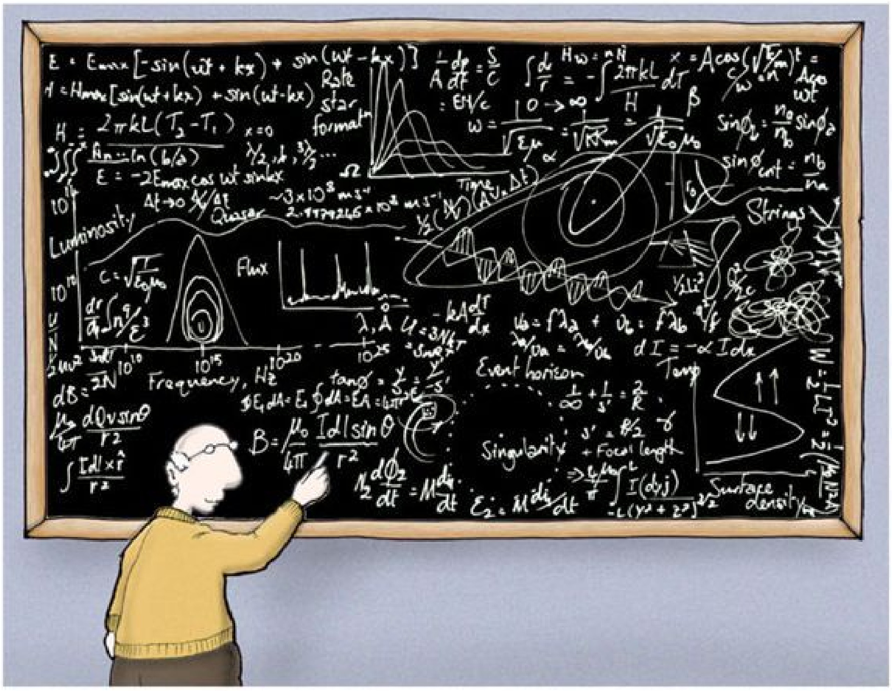
Définition 191. Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_n)$ deux bases d'un même espace vectoriel E. La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est la matrice $P = (p_{i,j})$, où le coefficient $p_{i,j}$ correspond à la i-ème coordonnée de f_j dans la base $\mathcal{B}$.

Proposition 165. Une matrice de passage est toujours inversible. De plus, si $u \in \mathcal{L}(E)$, en notant A et A' ses matrices respectivement dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, on a la relation $A' = P^{-1}AP$.

Exemple : Reprenons l'exemple précédent. La matrice de passage de la base canonique à la base $((1,-1);(1,-3))$ est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$. On calcule aisément $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, et $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, comme prévu. Vous savez donc maintenant d'où viennent ces drôles de calcul à base de PMP^{-1} qu'on effectue depuis des semaines sur les matrices. La suite ... en septembre, mais ce ne sera plus avec moi !

Deuxième partie

Exercices


Rate
star
format
Luminosity
Quasar
Flux
Frequency, Hz
Event horizon
Singularity
+ Focal length
Strings
Surface density

Feuille d'exercices n°1 : Logique et calcul

ECE3 Lycée Carnot

4 septembre 2009

Exercice 1

Exprimer les propriétés suivantes à l'aide de quantificateurs (f étant une fonction réelle) :

- f est constante
- tout réel a un antécédent par f
- tout réel a (au moins) deux antécédents par f
- f ne prend jamais deux fois la même valeur
- f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- f ne prend pas de valeur négative

Exercice 2

Déterminer pour chacune des affirmations suivantes si elle est vraie ou fausse (donner un contre-exemple si la proposition est fausse, et justifier si elle est vraie) :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 > 0$
2. $\exists x \in \mathbb{R},\ 2x - 1 = 12$
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists p \in \mathbb{N},\ n = 2p$
4. $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists p \in \mathbb{N},\ p = 3n$
5. $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists p \in \mathbb{N},\ n(n+1) = 2p$
6. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x \geqslant y^2$
7. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x < y^2$
8. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x > y^2$
9. $\forall x > 0,\ \exists y > 0,\ y < x$
10. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \exists z \in \mathbb{R},\ e^y = xz^2$

Exercice 3

Énoncer la négation de chacune des propositions de l'exercice 2 (avec des quantificateurs, bien entendu).

Exercice 4

Simplifier les expressions suivantes :

1. $\dfrac{2^5 \times 25 \times 3^{-4} \times 36}{3^8 \times 15 \times 100}$
2. $\ln(96)$

3. $\dfrac{e^{x^2}}{e^{3x}}$
4. $\dfrac{3\sqrt{72}}{2\sqrt{162}}$
5. $e^{-\ln(10)}$

Exercice 5

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $x^2 - 5x + 6 = 0$
2. $2x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 0$
3. $x = \sqrt{x} + 2$
4. $(\ln x)^2 - 5\ln(x) = 12$
5. $e^x + e^{-x} = 2$
6. $\ln(x+3) + \ln(x-2) = 2\ln 2$
7. $x^3 + 5x^2 \leqslant 6x$
8. $\dfrac{2x-3}{x^2-4} < 1$
9. $\ln(2x-3) \leqslant \ln 5$
10. $3 \times 2^{3x-4} \geqslant 7^8$

Exercice 6

Soient x, y et z trois réels vérifiant $x \in [1;4]$; $2 \leqslant y \leqslant 5$ et $|z| < 3$. Déterminer un encadrement le plus précis possibles des expressions suivantes :

- $2x - 3y + 1$
- $\dfrac{z}{2}$
- $\dfrac{1}{z-2}$
- $\dfrac{x(z-4)}{y-1}$
- $x(y-3)$
- $\dfrac{3x}{y+1}$
- $x^2 - 4x + 4$
- $\sqrt{xy} - 3e^{2-z}$

Corrigé de la feuille d'exercices n°1

Exercice 1

- f est constante se traduit par exemple par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x) = f(y)$; ou par $\exists a \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a$. Notez que $\exists x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(y)$ marche aussi (alors que ça semble moins fort que la première proposition).
- f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y > x$, $f(x) < f(y)$.
- tout réel a (au moins) un antécédent par f si $\forall a \in \mathbb{R}$, $\exists x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a$.
- f ne prend pas de valeur négative si $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$ (ça, c'est assez facile !).
- tout réel a (au moins) deux antécédents par f si $\forall a \in \mathbb{R}$, $\exists x \in \mathbb{R}$, $\exists y \neq x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(y) = a$ (il est essentiel que x et y soient distincts).
- f ne prend jamais deux fois la même valeur : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \neq x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq f(y)$. On peut également proposer $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

Exercice 2

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 > 0$: FAUX, x^2 est toujours positif, mais pas toujours strictement positif, $x = 0$ est un contre-exemple.
2. $\exists x \in \mathbb{R}$, $2x - 1 = 12$: VRAI, il suffit de prendre $x = \dfrac{13}{2}$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists p \in \mathbb{N}$, $n = 2p$: FAUX, ce n'est vrai que si n est pair.
4. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists p \in \mathbb{N}$, $p = 3n$: VRAI, on ne voit pas bien ce qui pourrait nous empêcher de multiplier un entier naturel par 3, et le résultat sera toujours un entier naturel.
5. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists p \in \mathbb{N}$, $n(n+1) = 2p$: VRAI, cela revient à dire que $n(n+1)$ est toujours pair. En effet, parmi n et $n+1$, l'un des deux nombres est pair et l'autre impair, on obtient donc un nombre pair en faisant leur produit.
6. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathbb{R}$, $x \geqslant y^2$: FAUX, si x est strictement négatif, il n'est supérieur à aucun carré.
7. $\exists x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $x < y^2$: VRAI, pour le coup, tous les x strictement négatifs sont des exemples.
8. $\exists x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $x > y^2$: FAUX, on a par exemple toujours $x < (x+1)^2$
9. $\forall x > 0$, $\exists y > 0$, $y < x$: VRAI, il suffit de prendre par exemple $y = \dfrac{x}{2}$.
10. $\exists x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $\exists z \in \mathbb{R}$, $e^y = xz^2$: VRAI, ça parait un peu alambiqué, mais il suffit en fait de prendre $x = 1$, et, quelle que soit la valeur de y, de poser $z = \sqrt{e^y}$.

Exercice 3

C'est très facile si on a compris qu'une négation transformait un quantificateur universel en quantificateur existentiel et vice-versa.

1. $\exists x \in \mathbb{R}$, $x^2 \leqslant 0$
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $2x - 1 \neq 12$
3. $\exists n \in \mathbb{N}$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $n \neq 2p$
4. $\exists n \in \mathbb{N}$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $p \neq 3n$
5. $\exists n \in \mathbb{N}$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $n(n+1) \neq 2p$
6. $\exists x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $x < y^2$
7. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathbb{R}$, $x \geqslant y^2$
8. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathbb{R}$, $x \leqslant y^2$
9. $\exists x > 0$, $\forall y > 0$, $y \geqslant x$
10. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathbb{R}$, $\forall z \in \mathbb{R}$, $e^y \neq xz^2$

Exercice 4

1. $\dfrac{2^5 \times 25 \times 3^{-4} \times 36}{3^8 \times 15 \times 100} = \dfrac{2^5 \times 5^2 \times 3^{-4} \times 2^2 \times 3^2}{3^8 \times 3 \times 5 \times 2^2 \times 5^2} = \dfrac{2^5}{3^{11} \times 5}$
2. $\ln(96) = \ln(2^5 \times 3) = 5\ln 2 + \ln 3$
3. $\dfrac{e^{x^2}}{e^{3x}} = e^{x^2-3x} = e^{x(x-3)}$
4. $\dfrac{3\sqrt{72}}{2\sqrt{162}} = \dfrac{3\sqrt{2^3 \times 3^2}}{2\sqrt{2 \times 3^4}} = \dfrac{2 \times 3^2 \times \sqrt{2}}{2 \times 3^2\sqrt{2}} = 1$
5. $e^{-\ln(10)} = \dfrac{1}{e^{\ln 10}} = \dfrac{1}{10}$

Exercice 5

1. Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 25 - 4 \times 6 = 1$, donc admet deux racines réelles $x_1 = \dfrac{5+1}{2} = 3$, et $x_2 = \dfrac{5-1}{2} = 2$, donc $\mathcal{S} = \{2; 3\}$.
2. On constate que 1 est racine de ce polynome puisque $2-4+3-1 = 0$. On peut donc factoriser par $x-1$: $(2x^3 - 4x^2 + 3x - 1) = (x-1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$. Par identification, on obtient $a = 2$, $b = -2$ et $c = 1$, donc $2x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = (x-1)(2x^2 - 2x + 1)$. Cherchons les racines de ce dernier trinome, qui a pour discriminant $\Delta = 4 - 8 = -4$. Il n'y a donc pas de racines réelles, et concernant l'équation initiale, $\mathcal{S} = \{1\}$.
3. Posons $X = \sqrt{x}$ (en notant au passage que l'équation ne peut avoir de sens que si $x \geqslant 0$ et $X \geqslant 0$). L'équation devient alors $X^2 = X + 2$, soit $X^2 - X - 2 = 0$. Ce trinome a pour discriminant $\Delta = 1 - 4 \times (-2) = 9$, et admet donc deux racines réelles $X_1 = \dfrac{1+3}{2} = 2$ et $X_2 = \dfrac{1-3}{2} = -1$. Cette dernière solution est à exclure. Comme on a, par définition de X, $x = X^2$, on obtient donc $\mathcal{S} = \{4\}$.
4. Encore un petit changement de variable : on pose $X = \ln x$ (x doit donc être positif) et on se ramène à l'équation $X^2 - 5X - 12 = 0$, de discriminant $\Delta = 25 + 4 \times 12 = 73$, ayant donc deux racines réelles $X_1 = \dfrac{5+\sqrt{73}}{2}$ et $X_2 = \dfrac{5-\sqrt{73}}{2}$. Ensuite, on utilise $x = e^X$, donc $\mathcal{S} = \{e^{\frac{5-\sqrt{73}}{2}}; e^{\frac{5+\sqrt{73}}{2}}\}$.
5. Réécrivons l'équation en multipliant les deux membres par e^x (qui est toujours strictement positif, donc ça ne pose pas de problème) : $(e^x)^2 + 1 = 2e^x$, soit en posant $X = e^x$ (X sera donc toujours positif) $X^2 - 2X + 1 = 0$. On reconnait une identité remarquable : $(X-1)^2 = 0$, qui a pour unique solution $X = 1$. Puisque $x = \ln X$, l'équation initiale a donc pour solution $\mathcal{S} = \{0\}$.
6. Un petit travail de réécriture s'impose à nouveau : $\ln((x+3)(x-2)) = \ln(4)$, donc (par exemple en prenant l'exponentielle de chaque membre) $(x+3)(x-2) = 4$, soit $x^2 + x - 10 = 0$. Ce trinome a pour discriminant $\Delta = 1 + 4 \times 10 = 41$, donc deux racines réelles $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{41}}{2}$, et $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{41}}{2}$. Deux solutions donc ? Pas si vite ! Pour que l'équation initiale ait un sens, il faut absolument avoir $x + 3 > 0$ et $x - 2 > 0$, c'est-à-dire $x > 2$. La première solution trouvée étant inférieure à 2, on a en fait $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{-1+\sqrt{41}}{2}\right\}$.
7. $x^3 + 5x^2 \leqslant 6x \Leftrightarrow x(x^2 + 5x - 6) \leqslant 0$. Dans le but de faire un tableau de signe, cherchons les racines de la parenthèse, qui a pour discriminant $\Delta = 25 + 4 \times 6 = 49$, donc admet deux racines réelles $x_1 + \dfrac{-5-7}{2} = -6$ et $x_2 = \dfrac{-5+7}{2} = 1$. On en déduit le tableau de signes suivant :

x		-6		0		1	
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
x^2+5x-6	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
x^3+5x^2-6	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

On en conclut que $\mathcal{S} = [-6; 0] \cup [1; +\infty[$

8. $\dfrac{2x-3}{x^2-4} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{2x-3-(x^2-4)}{x^2-4} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-2x-1}{x^2-4} > 0$. Le dénominateur a pour racines -2 et 2. Quant au numérateur, il a pour discriminant $\Delta = 4+4 = 8$, et admet deux racines réelles $x_1 = \dfrac{2-\sqrt{8}}{2} = 1-\sqrt{2}$ et $x_2 = \dfrac{2+\sqrt{8}}{2} = 1+\sqrt{2}$. D'où le tableau de signes suivant :

x		-2		$1-\sqrt{2}$		2		$1+\sqrt{2}$	
x^2-2x-1	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
x^2-4	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$\frac{x^2-2x-1}{x^2-4}$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$

Conclusion : $\mathcal{S} =]-\infty; -2[\cup]1-\sqrt{2}; 2[\cup]1+\sqrt{2}; +\infty[$

9. Commençons pas signaler que l'inéquation n'a de sens que si $2x-3>0$, soit $x > \dfrac{3}{2}$. Ensuite c'est très simple : puisque la fonction ln est strictement croissante, $\ln(2x-3) \leqslant \ln 5 \Leftrightarrow 2x-3 \leqslant 5 \Leftrightarrow x \leqslant 4$, donc $\mathcal{S} = \left]\dfrac{3}{2}; 4\right[$.

10. Les puissances quelconques n'étant définies que sur $\mathbb{R}_+$, on ne travaille qu'avec des nombres positifs, et on peut passer au ln : $3 \times 2^{3x-4} \geqslant 7^8 \Leftrightarrow \ln 3 + (3x-4)\ln 2 \geqslant 8\ln 7$, soit $3x-4 \geqslant \dfrac{8\ln 7 - \ln 3}{\ln 2}$, donc $x \geqslant \dfrac{8\ln 7 - \ln 3}{3\ln 2} + \dfrac{4}{3}$, soit $\mathcal{S} = \left[\dfrac{8\ln 7 - \ln 3}{3\ln 2} + \dfrac{4}{3}; +\infty\right[$.

Exercice 6

- Comme $2 \leqslant 2x \leqslant 8$ et $-15 \leqslant -3y \leqslant -6$, on obtient $-12 \leqslant 2x-3y+1 \leqslant 3$.
- Comme $1 \leqslant x \leqslant 4$ et $-1 \leqslant y-3 \leqslant 2$, on obtient $-4 \leqslant x(y-3) \leqslant 8$ (séparez les cas suivant le signe de y si vous n'êtes pas sûrs de vous pour ce genre de cas). On aurait aussi pu dire que $x(y-3) = xy-3x$, or $2 \leqslant xy \leqslant 20$ et $-12 \leqslant -3x \leqslant -4$, mais on obtient alors $-10 \leqslant x(y-3) \leqslant 16$, ce qui est un encadrement nettement moins précis que le précédent.
- Comme $-3 < z < 3$; $-\dfrac{3}{2} < \dfrac{z}{2} < \dfrac{3}{2}$.
- Comme $3 \leqslant 3x \leqslant 12$ et $\dfrac{1}{6} \leqslant \dfrac{1}{y+1} \leqslant \dfrac{1}{3}$, on obtient $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{3x}{y+1} \leqslant 4$.
- Comme $-5 < z-2 < 1$, on obtient $\dfrac{1}{z-2} < -\dfrac{1}{5}$ ou $\dfrac{1}{z-2} > 1$ (on est obligés de distinguer deux cas suivant le signe de z).
- On peut bien sûr encadrer x^2-4x+4 terme par terme (ce qui donne finalement $-11 \leqslant x^2-4x+4 \leqslant 16$), mais il est beaucoup plus efficace de constater que $x^2-4x+4 = (x-2)^2$. Comme $-1 \leqslant x-2 \leqslant 2$, on a alors $0 \leqslant x^2-4x+4 \leqslant 4$.
- Comme $\dfrac{1}{4} \leqslant \dfrac{1}{y-1} \leqslant 1$ et $-7 < z-4 < -1 \Rightarrow -28 < x(z-1) < -1$, on obtient $-28 < \dfrac{x(z-4)}{y-1} < -\dfrac{1}{4}$.
- On a $2 \leqslant xy \leqslant 20$, donc $\sqrt{2} \leqslant \sqrt{xy} \leqslant 2\sqrt{5}$, et $-1 < 2-z < 5$, donc $-3e^5 < -3e^{2-z} < -\dfrac{3}{e}$, d'où finalement $\sqrt{2} - 3e^5 < \sqrt{xy} - 3e^{2-z} < 2\sqrt{5} - \dfrac{3}{e}$.

Feuille d'exercices n°2 : Fonctions usuelles

ECE3 Lycée Carnot

10 septembre 2009

Exercice 1

Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$
2. $f(x) = e^x \ln(2x + 3)$
3. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x(x+1)}}{x^2 - 1}$
4. $f(x) = \ln(x^5 + 1)$

Exercice 2

Déterminer la parité des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x + 1$
2. $f(x) = \ln|x|$
3. $f(x) = \dfrac{1}{(x^3 - 2x)^2} \times \dfrac{x^4}{\sqrt{x^2 + 2}}$
4. $f(x) = |2x^2 - e^{x^4} + \ln(x^2 - 1)|$
5. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

Exercice 3

Calculez la dérivée de chacune des fonctions suivantes, ainsi que l'équation de la tangente en 1 à leurs courbes représentatives :

1. $f(x) = 1 + \ln(1 + x)$
2. $f(x) = \dfrac{1+x}{1+e^x} - x$
3. $f(x) = \ln\left(2x - \dfrac{3}{x}\right)$
4. $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{x^2 - 1}$
5. $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$

Exercice 4

Résoudre les équations, inéquations et systèmes suivants :

1. $2\ln(x+1)+\ln(3x+5)+\ln 2=\ln(6x+1)+2\ln(x-2)$
2. $5^x-5^{x+1}+2^{3x-1}=0$
3. $x^{\sqrt{x}}=(\sqrt{x})^x$
4. $x^{\frac{1}{4}}+2x^{\frac{5}{3}}-3=0$
5. $e^{-6x}+3e^{-4x}-e^{-2x}-3=0$
6. $8^{6x}-3\times 8^{3x}\leqslant 4$
7. $\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 520 \\ \log x & + & \log y & = & 4 \end{array}\right.$

Exercice 5

Déterminer **sans calculer leur dérivée** les variations des fonctions suivantes :

1. $f(x)=\dfrac{-5}{2e^{-2x+3}}$
2. $f(x)=(e^x+2)^2-3$
3. $f(x)=(e^x-3)^2+2$
4. $f(x)=\ln(e^{-x}-1)$
5. $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

Exercice 6

Étudier les variations et tracer la représentation graphique des fonctions suivantes :

1. $f(x)=e^x-\dfrac{x^2}{2}$
2. $f(x)=x^x$
3. $f(x)=\ln(1+x+x^2)$
4. $f(x)=e^{x^2-x-1}$
5. $f(x)=\ln\left(\dfrac{x^2-4x}{x^2-4x+3}\right)$
6. $f(x)=x^{x^2}$

Exercice 7

Montrer que $\forall x>0,\ \ln x\leqslant x-1$.
Montrer que $\forall x\geqslant 0,\ (1+x)^{\frac{1}{4}}\geqslant 1+\dfrac{x}{4}-\dfrac{3x^2}{32}$.

Exercice 8

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $|x-3|\geqslant 5$
2. $|2x-4|=|3x+2|$
3. $|x^2-8x+11|=4$

4. $|x+3|+|3x-1|<-2$
5. $|x-2| \geqslant |4x+2|$
6. $|2x-3|+|3-x|-|x-7|=2$
7. $|e^x-3|<1$
8. $\sqrt{|x^2-1|}=x-5$

Exercice 9

Écrire sans valeur absolue (en distinguant selon la valeur de x) les expressions suivantes :

1. $|x-2|+|x+5|$
2. $|3x^2-5x+2|$
3. $\ln(|x^2-4|)$
4. $|2-3x|-\sqrt{2x^2-8x+8}$
5. $\dfrac{e^{|x+1|}}{|e^{x+1}|}$

Exercice 10

Quelques propriétés faisant intervenir les parties entières :

1. Montrer que, si $n \in \mathbb{N}$, $Ent(x+n)=Ent(x)+n$
2. Montrer que, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $Ent(x)+Ent(y) \leqslant Ent(x+y)$. L'inégalité peut-elle être stricte ?
3. Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $Ent\left(\dfrac{x}{2}\right)+Ent\left(\dfrac{x+1}{2}\right)=Ent(x)$.
4. Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $Ent\left(\dfrac{Ent(nx)}{n}\right)=E(x)$

Exercice 11

Représenter graphiquement les fonctions suivantes :

1. $f(x)=|2x-1|-4$
2. $f(x)=Ent\left(\dfrac{x}{3}-2\right)$
3. $f(x)=|x^2-3x+2|$
4. $f(x)=(x-Ent(x))^2$
5. $f(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{3}\sqrt{|x^2-9|}$
6. $f(x)=x\,Ent\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Corrigé de la feuille d'exercices n°2

Exercice 1

1. Il faut résoudre l'inéquation $x^2 - x - 2 \geqslant 0$. Le trinome correspondant a pour discriminant $\Delta = 1 + 8 = 9$, donc admet deux racines réelles $x_1 = \frac{1+3}{2} = 2$ et $x_2 = \frac{1-3}{2} = -1$. Le trinome étant positif en-dehors des racines, $\mathcal{D}_f =]-\infty; -1] \cup [2; +\infty[$.
2. L'exponentielle est là pour faire joli, ce qui est important c'est d'avoir $2x+3 > 0$, soit $x > -\frac{3}{2}$, donc $\mathcal{D}_f = \left]-\frac{3}{2}; +\infty\right[$.
3. Le dénominateur interdit les valeurs -1 et 1. Reste à vérifier quand le numérateur est positif. C'est le cas en-dehors de ses racines 0 et -1, donc $\mathcal{D}_f =]-\infty; -1[\cup[0; +\infty[$.
4. Il faut déterminer quand $x^5 + 1 > 0$, autrement dit quand $x^5 > -1$. Or, on sait que $x \mapsto x^5$ est une fonction strictement croissante, et que $(-1)^5 = -1$, donc $x^5 > -1 \Leftrightarrow x > -1$ et $\mathcal{D}_f =]-1; +\infty[$.

Exercice 2

1. La fonction f n'est ni paire ni impaire (à cause du $+1$). Pour le prouver de façon rigoureuse, le plus simple est de trouver une valeur de x pour laquelle on n'a ni $f(-x) = f(x)$, ni $f(-x) = -f(-x)$. Ici, par exemple, $f(2) = 61$ et $f(-2) = -59$, ce qui est incompatible avec le fait que f soit paire ou impaire.
2. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et paire puisque $\forall x \neq 0$, $f(-x) = \ln(|-x|) = \ln(|x|) = f(x)$.
3. Cette fonction très laide est paire : elle est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-\sqrt{2}; 0; \sqrt{2}\}$ (ce qui est sous la racine est toujours strictement positif ; par contre les trois valeurs enlevées annulent le premier dénominateur) et $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = \frac{1}{((-x)^3 - 2 \times (-x))^2} \times \frac{(-x)^4}{\sqrt{(-x)^2+2}} = \frac{1}{(2x - x^3)^2} \times \frac{x^4}{\sqrt{x^2+2}} = f(x)$ car $(2x - x^3)^2 = (x^3 - 2x)^2$ (prendre la carré d'un nombre ou de son opposé donne toujours le même résultat).
4. Cette fonction est définie sur $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$, et elle est paire : $f(-x) = |2(-x)^2 - e^{(-x)^4} + \ln((-x)^2 - 1)| = |2x^2 - e^{x^4} + \ln(x^2 - 1)| = f(x)$.
5. Cette dernière fonction est définie sur $]-1; 1[$, et elle est impaire : $f(-x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = -\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -f(x)$ (on a simplement utilisé le fait que $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$).

Exercice 3

1. $f'(x) = \frac{1}{1+x}$; on a donc $f(1) = 1 + \ln 2$ et $f'(1) = \frac{1}{2}$, et l'équation de la tangente recherchée est $y = \frac{1}{2}(x-1) + 1 + \ln 2 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + \ln 2$.
2. $f'(x) = \frac{1 + e^x - e^x(1+x)}{(1+e^x)^2} - 1 = \frac{1 - xe^x}{(1+e^x)^2} - 1$ (inutile de s'embêter à mettre au même dénominateur si on n'a pas l'intention d'étudier ensuite les variations de la fonction). On a donc $f(1) = \frac{2}{1+e} - 1 = \frac{1-e}{1+e}$ et $f'(1) = \frac{1-e}{(1+e)^2} - 1 = -\frac{e(e+3)}{(1+e)^2}$, donc l'équation de

la tangente est $y = -\dfrac{e(e+3)}{(1+e)^2}(x-1) + \dfrac{1-e}{1+e} = -\dfrac{e(e+3)}{(1+e)^2}x + \dfrac{e(e+3)+(1-e)(1+e)}{(1+e)^2} = -\dfrac{e(e+3)}{(1+e)^2}x + \dfrac{3e+1}{(1+e)^2}$.

3. $f'(x) = \dfrac{2+\frac{3}{x^2}}{2x-\frac{3}{x}} = \dfrac{2x^2+3}{x(2x^2-3)}$. La fonction n'étant pas définie en 1, on ne peut pas calculer l'équation d'une tangente qui n'existe pas !
4. $f'(x) = \dfrac{2e^{2x}(x^2-1)-2xe^{2x}}{(x^2-1)^2} = \dfrac{2(1-x)e^{2x}}{(x^2-1)^2}$. Cette fonction n'étant même pas définie en 1, elle ne risque pas d'y admettre une tangente, donc on peut arrêter là pour les calculs.
5. On a $f(x) = e^{\frac{1}{x}\ln x}$, donc $f'(x) = \left(-\dfrac{1}{x^2}\ln x + \dfrac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}\ln x} = \dfrac{1-\ln x}{x^2}x^{\frac{1}{x}}$. On a donc $f(1)=1$ et $f'(1)=0$, la tangente est donc horizontale d'équation $y=1$.

Exercice 4

1. Le plus efficace est de tout regrouper sous un seul ln de chaque côté, même si les calculs sont assez moches (on se souciera exceptionnellement du domaine de définition après le calcul) :

$$\begin{array}{rcl} \ln((x+1)^2)+\ln(3x+5)+\ln 2 & = & \ln(6x+1)+\ln((x-2)^2) \\ \ln(2(x^2+2x+1)(3x+5)) & = & \ln((6x-1)(x^2-4x+4)) \\ 6x^3+22x^2+26x+10 & = & 6x^3-25x^2+28x-4 \\ 47x^2-2x+14 & = & 0 \end{array}$$

Le discriminant de l'équation du second degré que nous obtenons étant très négatif, il n'y a pas de solution réelle, donc $\mathcal{S}=\emptyset$.

2. En faisant passer quelques termes à droite, on obtient $2^{3x-1} = 5^{x+1}-5^x = 5^x(5-1) = 4\times 5^x$, soit en prenant le ln des deux côtés $(3x-1)\ln 2 = \ln 4 + x\ln 5$, donc $x(3\ln 2-\ln 5) = 3\ln 2$, et $x = \dfrac{3\ln 2}{3\ln 2-\ln 5}$, donc $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{3\ln 2}{3\ln 2-\ln 5}\right\}$.
3. Cette équation n'a de sens que si $x>0$ (on peut éventuellement extrapoler que 0 va aussi être solution de l'équation, si on arrive à donner un sens à 0^0). En prenant les ln, on obtient alors $\sqrt{x}\ln x = x\ln(\sqrt{x}) = x\dfrac{\ln x}{2}$, donc $\ln x\left(\sqrt{x}-\dfrac{x}{2}\right)=0$. On en déduit que soit $\ln x = 0$, c'est-à-dire $x=1$, soit $\sqrt{x} = \dfrac{x}{2}$, auquel cas on obtient en élevant au carré (on peut, tout est positif) $x = \dfrac{x^2}{4}$, soit $x(x-4)=0$, donc $x=4$ (0 ayant été exclu dès le départ). Conclusion : $\mathcal{S}=\{1;4\}$.
4. Celle-ci est un piège assez vicieux. On ne sait pas vraiment résoudre ce genre d'équation, mais on peut constater que $x\mapsto x^{\frac{1}{4}}+2x^{\frac{5}{3}}-3$ est une fonction strictement croissante sur son domaine de définition $[0;+\infty[$, et qu'elle prend pour valeur 0 en 0 (ou du moins a pour limite 0 si la définition de la fonction en 0 pose problème). Elle est donc strictement positive sur $]0;+\infty[$ et $\mathcal{S}=\{0\}$.
5. Ca doit presque être un réflexe pour ce genre d'équations : on pose $X=e^{-2x}$ et on obtient $X^3+3X^2-X-3=0$. On constate (comme d'habitude) que 1 est racine évidente de l'équation, et on peut donc écrire $(X^3+3X^2-X-3) = (X-1)(aX^2+bX+c) = aX^3+(b-a)X^2+(c-b)X-c$, soit après identification $a=1$; $b=4$ et $c=3$. Reste à résoudre $X^2+4X+3=0$, équation ayant pour discriminant $\Delta = 16-12=4$ et pour racines réelles $X_1 = \dfrac{-4+2}{2} = -1$ et $X_2 = \dfrac{-4-2}{2} = -3$. Ces deux dernières valeurs n'étant pas très compatibles avec le changement de variable effectué, la seule possibilité restante est $e^{-2x}=1$, ce qui donne $x=0$, donc $\mathcal{S}=\{0\}$.

6. Posons $X = 8^{3x}$, on cherche alors à résoudre $X^2 - 3X - 4 \leqslant 0$, inéquation ayant pour discriminant $\Delta = 9 + 16 = 25$, soit deux racines réelles $X_1 = \frac{3-5}{2} = -1$ et $X_2 = \frac{3+5}{2} = 4$. On doit donc avoir $-1 \leqslant 8^{3x} \leqslant 4$. La première inégalité est toujours vérifiée, puisque la puissance est nécessairement positive. Quant à la deuxième, elle devient, en passant au ln, $3x \ln 8 \leqslant \ln 4$, soit $x \leqslant \frac{\ln 8}{3 \ln 4}$, donc $\mathcal{S} = \left]-\infty; \frac{\ln 8}{3 \ln 4}\right]$.
7. La deuxième équation du système peut se traduire par $\log(xy) = 4$, soit, en passant à l'exponentielle de base 10, $xy = 10^4 = 10\ 000$. Les réels x et y sont alors solutions de l'équation $x^2 - 520x + 10\ 000 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 520^2 - 40\ 000 = 230\ 400$, et admet deux racines réelles $x_1 = \frac{520 - 480}{2} = 20$ et $x_2 = \frac{520 + 480}{2} = 500$ (notez qu'on peut facilement vérifier que ces deux nombres sont solutions du problème posé). On a donc $\mathcal{S} = \{(20; 500); (500; 20)\}$.

Exercice 5

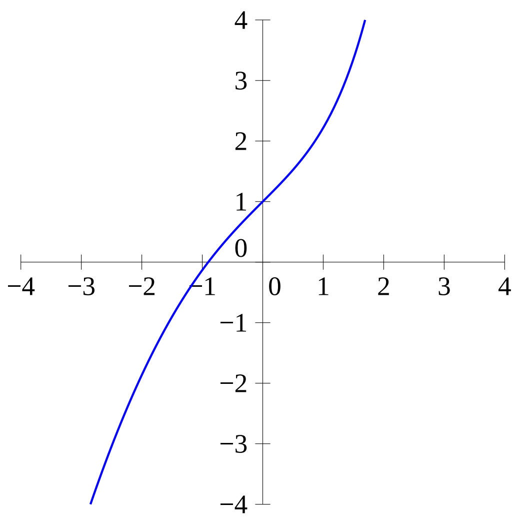
1. La fonction $x \mapsto -2x + 3$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, et l'exponentielle est strictement croissante, donc la composée $x \mapsto e^{-2x+3}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. De plus, elle est à valeurs dans $]0; +\infty[$ (une exponentielle est toujours positive), intervalle sur lequel la fonction inverse est décroissante. Conclusion : $x \mapsto \frac{1}{e^{-2x+3}}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme on multiplie ceci par $-\frac{5}{2}$, le sens de variation change encore une fois, et f est finalement décroissante sur $\mathbb{R}$.
2. Soustraire 3 à la fin ne changera pas le sens de variation, concentrons-nous donc sur le carré. La fonction $x \mapsto e^x + 2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, à valeurs strictement positives, et la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. Cette fois-ci c'est différent, car $e^x - 3$ ne prend pas toujours des valeurs positives. Plus précisément $e^x - 3 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant \ln 3$. Sur $]-\infty; \ln 3]$, $x \mapsto e^x - 3$ est donc croissante et à valeurs dans $]-\infty; 0]$, intervalle sur lequel la fonction carré est décroissante. La fonction f est donc strictement décroissante sur $]-\infty; \ln 3]$. Sur $[\ln 3; +\infty[$, $x \mapsto e^x - 3$ est croissante et à valeurs positives, et cette fois f sera strictement croissante.
4. Commençons par constater que f n'est pas définie partout : $e^{-x} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{-x} > 1 \Leftrightarrow x < e$. Ensuite, la fonction $x \mapsto -x$ étant strictement décroissante sur $]e; +\infty[$, et les fonctions exponentielle et ln strictement croissantes sur leurs ensembles de définition, on en déuit facilement que f est strictement décroissante sur $]e; +\infty[$
5. Notre dernière fonction est définie si $\frac{x+1}{x-1} > 0$, soit $\mathcal{D}_f =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ (un petit tableau de signe pour le vérifier). Pour obtenir son sens de variations, il peut être utile de faire la petite modification suivante : $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \ln\left(\frac{x-1+2}{x-1}\right) = \ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right)$. La fonction $x \mapsto \frac{2}{x-1}$ étant strictement décroissante sur $]-\infty; -1[$ et sur $]1; +\infty[$, et le logarithme népérien étant strictement croissant sur son ensemble de définition, la fonction f est donc strictement décroissante sur $]-\infty; -1[$, ainsi que sur $]1; +\infty[$.

Exercice 6

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = e^x - x$ et de dérivée seconde $f''(x) = e^x - 1$. La fonction f'' s'annule en 0, donc on obtient pour f' le tableau de variations suivant :

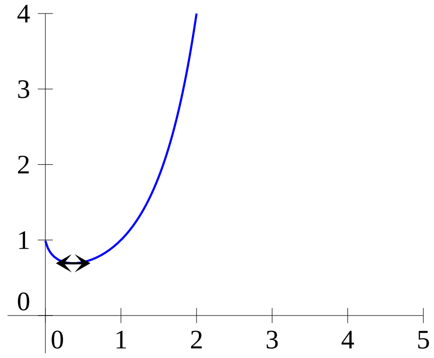
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

(les limites ne posent pas de difficulté de calcul). Comme $1 > 0$, f' est toujours strictement positive, et f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Les limites de f se calculent elles aussi assez facilement : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ (pas de forme indéterminée ici), et en $+\infty$, on peut écrire $f(x) = e^x \left(1 - \dfrac{x^2}{2e^x}\right)$, où la parenthèse a pour limite 1 par croissance comparée, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Pour tracer à la main une courbe représentative correcte, il faudrait calculer quelques points car on manque cruellement d'informations. On peut toujours constater que $f(0) = 1$. En tout cas, la courbe ressemble à ceci :



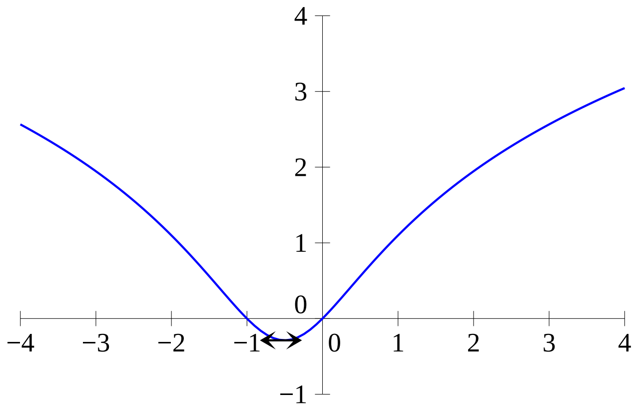
2. La fonction f est définie sur $]0; +\infty[$, et on peut l'écrire sous forme exponentielle $f(x) = e^{x \ln x}$. Elle a donc pour dérivée $f'(x) = (\ln x + 1)e^{x \ln x}$. Cette dérivée s'annule lorsque $\ln x = -1$, c'est-à-dire pour $x = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$, et f est donc décroissante sur $\left]0; \dfrac{1}{e}\right]$ et croissante sur $\left[\dfrac{1}{e}; +\infty\right[$. On peut calculer les limites de f : $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$ (croissance comparée), donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (pas de problème pour celle-là). Après avoir calculé $f\left(\dfrac{1}{e}\right) = e^{\frac{1}{e} \ln \frac{1}{e}} = e^{-\frac{1}{e}}$, on obtient le tableau de variations et la courbe suivants :

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
f	1	$\searrow$	$e^{-\frac{1}{e}}$	$\nearrow$	$+\infty$



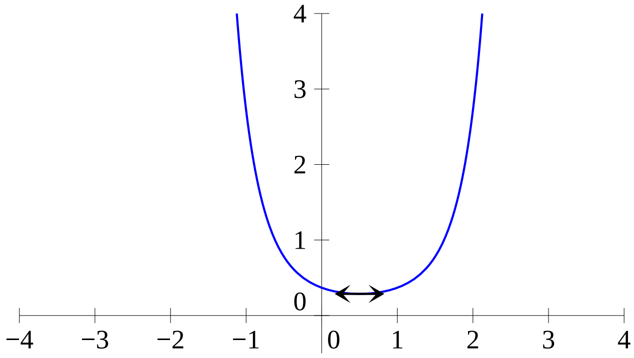
3. Intéressons-nous pour commencer au domaine de définition de f, et cherchons pour cela les racines du trinome $1+x+x^2$. Il a pour discriminant $\Delta = 1-4 = -3$, donc est toujours du signe de 1, à savoir positif. La fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}$. Elle a pour dérivée $f'(x) = \dfrac{1+2x}{(1+x+x^2)^2}$, qui s'annule pour $x = -\dfrac{1}{2}$. Comme $\lim\limits_{x\to\pm\infty} 1+x+x^2 = +\infty$, on a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, et de plus $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \ln\dfrac{3}{4} = \ln 3 - \ln 4$, d'où le tableau et la courbe suivants :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
f	$+\infty$ $\searrow$	$\ln 3 - \ln 4$	$\nearrow$ $+\infty$



4. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = (2x-1)e^{x^2-x-1}$, qui s'annule pour $x = \dfrac{1}{2}$. Comme $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2-x-1 = +\infty$, on a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$. De plus $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = e^{-\frac{5}{4}}$, d'où le tableau et la courbe suivants :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
f	$+\infty$ $\searrow$	$e^{-\frac{5}{4}}$	$\nearrow$ $+\infty$



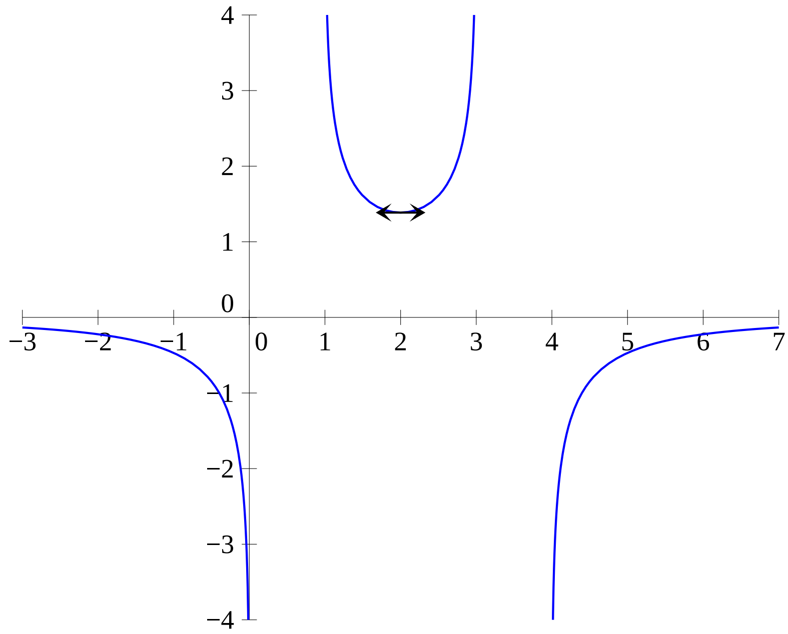
5. Il faut commencer par déterminer le domaine de définition de f, et pour cela faire un joli tableau de signes. Le dénominateur a pour discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4$, et admet donc deux racines réelles $x_1 = \dfrac{4+2}{2} = 3$ et $x_2 = \dfrac{4-2}{2} = 1$. D'où le tableau :

x		0		1		3		4	
$x^2 - 4x$	$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x^2 - 4x + 3$	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{x^2-4x}{x^2-4x+3}$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$

On a donc $\mathcal{D}_f =]-\infty; 0[\cup]1; 3[\cup]4; +\infty[$. Sur cet ensemble, f a pour dérivée $f'(x) = \dfrac{(2x-4)(x^2-4x+3) - (2x-4)(x^2-4x)}{(x^2-4x+3)^2} \times \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-4x} = \dfrac{3(2x-4)}{(x^2-4x+3)^2} \times \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-4x} = \dfrac{6(x-2)}{(x^2-4x)(x^2-4x+3)}$. Le dénominateur étant strictement positif sur $\mathcal{D}_f$ (c'est un produit au lieu d'un quotient, mais le tableau de signes est exactement celui qu'on a fait ci-dessus), f' est du signe de $x - 2$. Par ailleurs, $f(2) = \ln \dfrac{-4}{-1} = 2\ln 2$

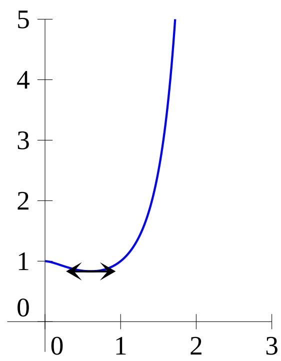
Restent quelques limites un peu pénibles à calculer. Les plus faciles sont les limites en 0 et en 4 : quand le numérateur s'annule, le quotient à l'intérieur du ln tend vers 0, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = -\infty$. En 1 et 3, c'est à peine plus compliqué : le dénominateur s'annule donc le quotient tend vers $+\infty$ (ça ne peut pas être $-\infty$ puisque f ne serait pas définie si le quotient prenait des valeurs négatives), et on en déduit que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = +\infty$. Enfin, vos souvenirs sur le calculs de limites de Terminale devraient vous permettre de vérifier que la limite du quotient en $\pm\infty$ vaut 1 (on factorise par x^2 en haut et en bas), d'où $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Ce qui nous donne un tableau et une courbe ressemblant à ceci :

x	$-\infty$		0		1		2		3		4		$+\infty$
f	0	$\searrow$	$-\infty \Vert$		$\Vert +\infty$	$\searrow$	$2\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty \Vert$		$\Vert -\infty$	$\nearrow$	0



6. Cette fonction est définie sur $]0;+\infty[$, et s'écrit sous forme exponentielle $f(x) = e^{x^2 \ln x}$. Elle a pour dérivée $f'(x) = (2x \ln x + x)e^{x^2 \ln x} = x(2 \ln x + 1)e^{x^2 \ln x}$. Le facteur x est toujours strictement positif sur $\mathcal{D}_f$, seul compte donc le signe de $2 \ln x + 1$. Ceci s'annule pour $x = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$. Le calcul des limites est extrêmement similaire à celui de la deuxième fonction de l'exercice, au point d'ailleurs que les limites sont les mêmes, on a $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = e^{-\frac{1}{2e}}$ et on obtient tableau et courbe :

x	0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$		$+\infty$
f	1	$\searrow$	$e^{-\frac{1}{2e}}$	$\nearrow$	$+\infty$



Exercice 7

Le plus simple pour montrer ce genre d'inégalité, c'est en fait une étude de fonction. Posons donc $f(x) = \ln x - x + 1$, fonction définie sur $]0;+\infty[$, et essayons de montrer que f est toujours positive.

Pour cela, petite étude de variations : $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$. La fonction f est donc strictement décroissante sur $]0;1]$ et strictement croissante sur $[1;+\infty[$, elle admet un minimum global en 1 de valeur $f(1) = 0 - 1 + 1 = 0$, donc elle est effectivement à valeurs positives, ce qui prouve l'inégalité demandée.

Même principe dans le deuxième cas : on pose $g(x) = (1+x)^{\frac{1}{4}} - 1 - \frac{x}{4} + \frac{3x^2}{32}$, définie sur $[0;+\infty[$. On a $g'(x) = \frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{4}} - \frac{1}{4} + \frac{3x}{16}$, puis $g''(x) = -\frac{3}{16}(1+x)^{-\frac{7}{4}} + \frac{3}{16} = \frac{3}{16}\left(1 - (1+x)^{-\frac{7}{4}}\right)$. Comme x est supposé positif, $1 + x \geqslant 1$, donc $(1+x)^{-\frac{7}{4}} \leqslant 1$ sur $\mathcal{D}_g$ et g'' est toujours positive. Autrement dit, g' est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme par ailleurs $g'(0) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 0 = 0$, la fonction g' est elle-même positive sur $\mathbb{R}_+$, et g est donc croissante. Reste à vérifier que $g(0)$ est positif : $g(0) = 1 - 1 - 0 + 0 = 0$. La fonction g est donc à valeurs positives, ce qui prouve l'inégalité demandée.

Exercice 8

1. $|x-3| \geqslant 5$ signifie que $x - 3 \geqslant 5$ ou $x - 3 \leqslant -5$, d'où $\mathcal{S} =]-\infty;-2] \cup [8;+\infty[$.
2. $|2x-4| = |3x+2| \leftrightarrow 2x - 4 = 3x + 2$ ou $2x - 4 = -3x - 2$ soit $-x = 6$ ou $5x = 2$, et $\mathcal{S} = \left\{-6; \frac{2}{5}\right\}$
3. $|x^2 - 8x + 11| = 4$ revient à dire que $x^2 - 8x + 11 = 4$ ou $x^2 - 8x + 11 = -4$. Il ne reste plus qu'à résoudre ces deux équations du second degré. La première a pour discriminant $\Delta = 64 - 4 \times 7 = 36$, et admet deux racines réelles $x_1 = \frac{8-6}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{8+6}{2} = 7$. La deuxième a pour discriminant $\Delta = 64 - 4 \times 15 = 4$, et admet deux racines réelles $x_3 = \frac{8-2}{2} = 3$ et $x_4 = \frac{8+2}{2} = 5$. Finalement, $\mathcal{S} = \{1;3;5;7\}$.
4. Pas besoin de se fatiguer pour celle-là, le membre de gauche étant manifestement positif (c'et une somme de deux valeurs absolues), il ne sera jamais strictement inférieur à -2, donc $\mathcal{S} = \emptyset$.
5. Il n'y a pas de méthodes fiables pour s'en sortir par le calcul, le mieux est donc d'écrire l'inéquation sous la forme $|x-2| - |4x+2| \geqslant 0$, et de faire un « tableau de signes »pour simplifier le membre de gauche :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
$\|x-2\|$	$-x+2$	$-x+2$	0	$x-2$
$\|4x+2\|$	$-4x-2$	0 $4x+2$		$4x+2$
$\|x-2\| - \|4x+2\|$	$3x+4$	$-5x$		$-3x-4$

Comme $3x + 4 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -\frac{4}{3}$, les réels de l'intervalle $\left[-\frac{4}{3}; -\frac{1}{2}\right]$ sont solutions de l'équation initiale (on ne garde bien sûr que les valeurs de x appartenant à l'intervalle sur lequel l'expression $3x + 4$ est valide). De même, on a $-5x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 0$, donc l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}; 0\right]$ est aussi solution. Enfin, $-3x - 4 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant -\frac{4}{3}$, ce qui n'ajoute pas de solutions. En regroupant le tout, on obtient donc $\mathcal{S} = \left[-\frac{4}{3}; 0\right]$.

6. Ici, difficile d'être tenté de faire quoi que ce soit d'autre qu'un tableau :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		3		7		$+\infty$
$\lvert 2x-3\rvert$		$-2x+3$	0	$2x-3$		$2x-3$		$2x-3$	
$\lvert 3-x\rvert$		$3-x$		$3-x$	0	$-3+x$		$-3+x$	
$\lvert x-7\rvert$		$-x+7$		$-x+7$		$-x+7$	0	$x-7$	
$\lvert 2x-3\rvert+\lvert 3-x\rvert-\lvert x-7\rvert$		$-2x-1$		$2x-7$		$4x-13$		$2x+1$	

Ne restent plus qu'à résoudre pas moins de quatre équations, et à vérifier si les solutions obtenus appartiennent au bon intervalle à chaque fois : $-2x-1=2 \Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}$, solution acceptable ; $2x-7=2 \Leftrightarrow x=\frac{9}{2}$, solution rejetée ; $4x-13=2 \Leftrightarrow x=\frac{15}{4}$, solution acceptable ; $2x+1=2 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$, solution rejetée. Bilan : $\mathcal{S}=\left\{-\frac{3}{2};\frac{15}{4}\right\}$.

7. $|e^x-3|<1 \Leftrightarrow -1<e^x-3<1 \Leftrightarrow 2<e^x<4 \Leftrightarrow \ln 2<x<\ln 4$, donc $\mathcal{S}=]\ln 2;\ln 4[$.
8. On peut commencer par constater que le second membre doit être positif pour que l'équation puisse avoir une solution, et donc résoudre uniquement sur $[5;+\infty[$. On a alors, en élevant au carré (tout est positif) $|x^2-1|=(x-5)^2$, soit $x^2-1=x^2-10x+25$ (la valeur absolue à gauche est superflue, ce qui est à l'intérieur est positif sur notre intervalle d'étude). Reste la très simple équation $10x=26$, et $\mathcal{S}=\left\{\frac{26}{10}\right\}$.

Exercice 9

1. Un petit tableau permet de régler cette question très vite :

x	$-\infty$		-5		2		$+\infty$
$\lvert x-2\rvert$		$-x+2$		$-x+2$	0	$x-2$	
$\lvert x+5\rvert$		$-x-5$	0	$x+5$		$x+5$	
$\lvert x-2\rvert+\lvert x+5\rvert$		$-2x-3$		7		$2x+3$	

On a donc $|x-2|+|x+5|=\begin{cases} -2x-3 & \text{si} \quad x\leqslant -5 \\ 7 & \text{si} \quad -5\leqslant x\leqslant 2 \\ 2x+3 & \text{si} \quad x\geqslant 2 \end{cases}$.

2. Cette fois-ci, il suffit d'étudier le signe du trinome à l'intérieur de la valeur absolue. Celui-ci a pour discriminant $\Delta=25-24=1$ et admet deux racines réelles $x_1=\frac{5+1}{6}=1$ et $x_2=\frac{5-1}{6}=\frac{2}{3}$, donc $|3x^2-5x+2|=3x^2-5x+2$ si $x\in\left]-\infty;\frac{2}{3}\right]\cup[1;+\infty[$, et $|3x^2-5x+2|=-3x^2+5x-2$ si $x\in\left[\frac{2}{3};1\right]$.
3. Il n'y a même pas besoin de calculs ici : $\ln(|x^2-4|)=\ln(x^2-4)$ si $x\in]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$, et $\ln(|x^2-4|)=\ln(-x^2+4)$ si $x\in]-2;2[$ (et si $x=2$ ou $x=-2$, l'expression n'est pas définie).
4. Constatons que $\sqrt{2x^2-8x+8}=\sqrt{2(x-2)^2}=|\sqrt{2}(x-2)|$. reste à faire un petit tableau :

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		2		$+\infty$
$\lvert 2-3x\rvert$		$2-3x$	0	$-2+3x$		$-2+3x$	
$\lvert\sqrt{2}(x-2)\rvert$		$-\sqrt{2}(x-2)$		$-\sqrt{2}(x-2)$	0	$\sqrt{2}(x-2)$	
$\lvert 2-3x\rvert+\lvert\sqrt{2}(x-2)\rvert$		$(-3+\sqrt{2})x+2-2\sqrt{2}$		$(3+\sqrt{2})x-2-2\sqrt{2}$		$(3-\sqrt{2})x-2+2\sqrt{2}$	

Je suis certain que vous serez capable de faire une jolie phrase de conclusion tous seuls si vous le souhaitez.

5. La valeur absolue du dénominateur est totalement superflue puisque celui-ci est toujours strictement positif. On a donc $\dfrac{e^{|x+1|}}{|e^{x+1}|} = \dfrac{e^{-x-1}}{e^{x+1}} = e^{-2x-2}$ si $x \leqslant -1$; et $\dfrac{e^{|x+1|}}{|e^{x+1}|} = 1$ si $x \geqslant -1$.

Exercice 10

1. Une façon de caractériser la partie entière est de dire qu'il s'agit de l'unique entier vérifiant $Ent(x) \leqslant x < Ent(x)+1$. Mais alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $Ent(x)+n \leqslant x+n < Ent(x)+n+1$. Le nombre $Ent(x)+n$ étant un entier (c'est la somme de deux entiers !) et vérifiant la caractérisation de $Ent(x+n)$, on a bien $Ent(x+n) = Ent(x)+n$.

2. Comme $Ent(x) \leqslant x$ et $Ent(y) \leqslant y$, on a $Ent(x) + Ent(y) \leqslant x + y$. Un entier inférieur à un réel est nécessairement inférieur à sa partie entière, donc $Ent(x) + Ent(y) \leqslant Ent(x + y)$. Par contre, il n'y a pas toujours égalité : prenons par exemple $x = 1,7$ et $y = 2,9$, alors $Ent(x) + Ent(y) = 1 + 2 = 3$, mais $Ent(x + y) = Ent(4,6) = 4$.

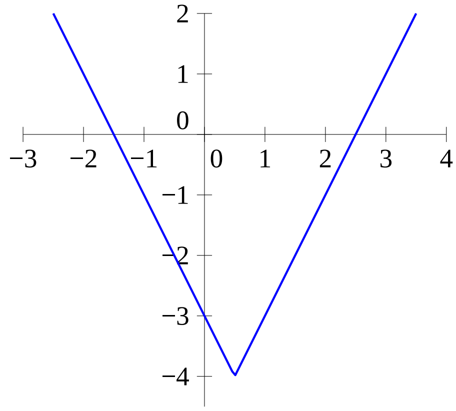
3. Notons pour simplifier $p = Ent(x)$. On a donc $p \leqslant x \leqslant p+1$, d'où $\dfrac{p}{2} \leqslant \dfrac{x}{2} \leqslant \dfrac{p+1}{2}$, et $\dfrac{p+1}{2} \leqslant \dfrac{x+1}{2} \leqslant \dfrac{p+2}{2}$. Si p est un entier pair, alors $\dfrac{p}{2}$ et $\dfrac{p+2}{2}$ sont deux entiers consécutifs, et $Ent\left(\dfrac{x}{2}\right) = Ent\left(\dfrac{x+1}{2}\right) = \dfrac{p}{2}$ et leur somme vaut bien p. Si p est impair, par contre, $\dfrac{p+1}{2}$ est un entier, et l'entier qui lui est juste inférieur est $\dfrac{p-1}{2}$. On a alors $Ent\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{p-1}{2}$, et $Ent\left(\dfrac{x+1}{2}\right) = \dfrac{p+1}{2}$, mais la somme de ces deux nombres vaut toujours p ! Dans les deux cas, l'égalité est donc vérifiée.

4. Notons encore une fois p la partie entière de x, et q celle de nx. Comme $p \leqslant x < p+1$, on a $np \leqslant nx < n(p+1)$, donc $np \leqslant q < n(p+1)$. Il en résulte que $p \leqslant \dfrac{q}{n} < p+1$, ce qui prouve exactement que $Ent\left(\dfrac{Ent(nx)}{n}\right) = p$.

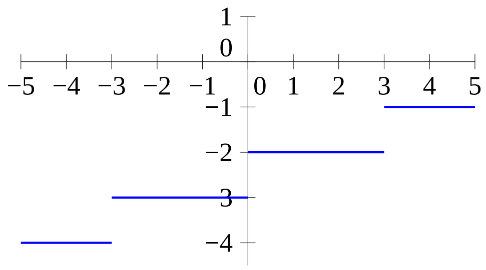
Exercice 11

1. La fonction $x \mapsto 2x-1$ est toujours croissante, et s'annule en $\dfrac{1}{2}$. De là, il est aisé d'obtenir le tableau de variations de f, ainsi que sa courbe :

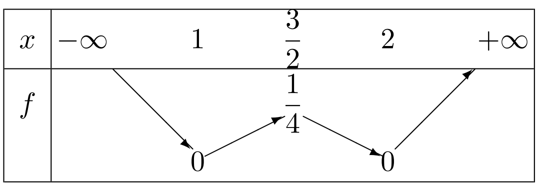
x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f		$\searrow$	-4	$\nearrow$	

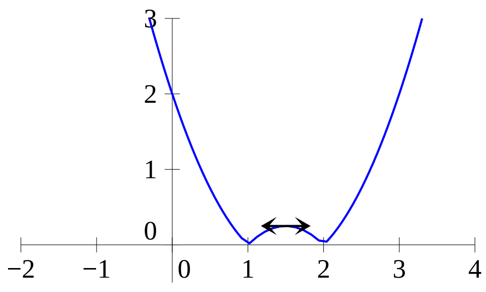


2. Soit $p \in \mathbb{N}$, les réels antécédents de p par f sont les solutions de l'encadrement $p \leqslant \dfrac{x}{3} - 2 < p+1$, ce qui revient à $3p + 6 \leqslant x < 3p + 9$. La fonction f prend donc la valeur p sur les intervalles de la forme $[3p + 6; 3p + 9[$: elle est nulle sur $[6; 9[$, vaut 1 sur $[9; 12[$ etc. Voici sa courbe représentative :



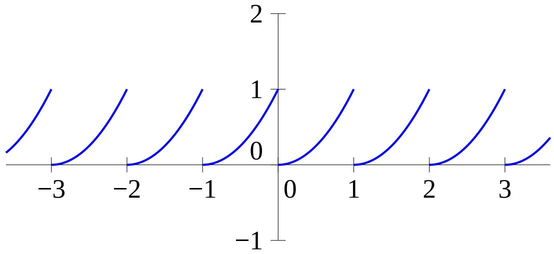
3. On commence par étudier variations et signe de ce qui se trouve à l'intérieur de la valeur absolue. Le trinome a pour discriminant $\Delta = 9 - 8 = 1$, et admet deux racines réelles $x_1 = \dfrac{3+1}{2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{3-1}{2} = 1$. De plus, $x^2 - 3x + 2$ a pour dérivée $2x - 3$, et admet donc un minimum en $x = \dfrac{3}{2}$, de valeur $\dfrac{9}{4} - \dfrac{9}{2} + 2 = -\dfrac{1}{4}$. On en déduit le tableau et la courbe :





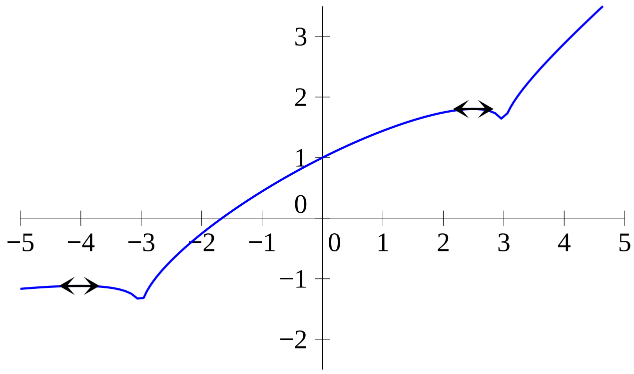
4. Si on connait bien son cours, on doit se rappeler y avoir vu que la fonction partie fractionnaire était périodique de période 1. Or la fonction f n'est autre que le carré de la partie fractionnaire,

elle est donc également périodique de période 1, et on peut donc se contenter de l'étudier sur l'intervalle $[0;1[$. Sur cet intervalle, on a $Ent(x) = 0$, donc f n'est autre que la fonction carré. Finalement, la courbe de f est donc une répétition de morceaux de parabole :

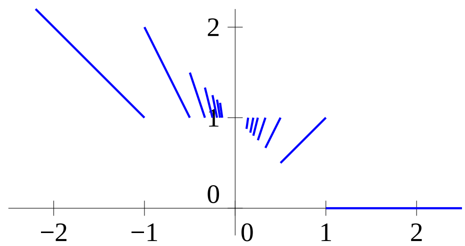


5. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, mais il vaut mieux essayer de l'exprimer de différentes façons selon la valeur de x. Si $x \geqslant 3$, on a $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\sqrt{x^2 - 9}$, et la fonction est croissante sur $[3; +\infty[$ en tant que somme de deux fonction croissantes. Sur les deux autres intervalles à étudier, les calculs vont être un tout petit peu plus pénibles... Començons par exemple par $[-3; 3]$, intervalle sur lequel $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\sqrt{9 - x^2}$. On a sur cet intervalle $f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\frac{-2x}{2\sqrt{9 - x^2}} = \frac{3\sqrt{9 - x^2} - 2x}{6\sqrt{9 - x^2}}$. Cette dérivée est positive sur $[-3; 0]$, mais s'annule lorsque $x > 0$ et $3\sqrt{9 - x^2} = 2x$, soit (en passant tout au carré) $9(9 - x^2) = 4x^2$, ou encore $81 = 13x^2$. La fonction f est donc croissante sur $\left[-3; \sqrt{\frac{81}{13}}\right]$, et décroissante sur $\left[\sqrt{\frac{81}{13}}; 3\right]$ (pour information, la valeur un peu bizarre vaut environ $2,5$). Ne reste plus qu'à s'occuper de l'intervalle $]-\infty; -3]$, où la fonction est égale à $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\sqrt{x^2 - 9}$. Un calcul extrêmement similaire au précédent montre que la dérivée s'annule lorsque $3\sqrt{x^2 - 9} = -2x$, soit $9(x^2 - 9) = 4x^2$. On obtient donc un autre minimum local pour $x = -\sqrt{\frac{81}{5}}$ (un peu avant -4). On peut même, avec un peu de motivation, calculer les valeurs de nos maxima locaux : $f\left(-\frac{9}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{9}{2\sqrt{5}} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{81}{5}} = -\frac{9}{2\sqrt{5}} + \frac{6}{3\sqrt{5}} = -\frac{5}{2\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{2} \simeq -1,12$. De même, on obtient $f\left(\frac{9}{\sqrt{13}}\right) = \frac{\sqrt{13}}{2} \simeq 1,8$ Voici donc le magnifique tableau de variations et la non moins superbe courbe représentative de la fonction f :

x	$-\infty$		$-\frac{9}{\sqrt{5}}$		-3		$\frac{9}{\sqrt{13}}$		3		$+\infty$
f		↗	$-\frac{\sqrt{5}}{2}$	↘	$-\frac{3}{2}$	↗	$\frac{\sqrt{13}}{2}$	↘	$\frac{3}{2}$	↗	



6. Ici, le plus simple est de découper $\mathcal{R}_+^*$ et $\mathcal{R}_-^*$ (la fonction n'est pas définie en 0) selon les valeurs de $Ent\left(\frac{1}{x}\right)$. Si $x > 1$, $0 < \frac{1}{x} < 1$, donc $f(x) = 0$. Si $\frac{1}{2} < x \leqslant 1$, $1 \leqslant \frac{1}{x} < 1$, donc $f(x) = x$. De même, si $x \in \left]\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]$, $f(x) = 2x$ etc. Visuellement, on a quand on se rapproche de 0 des segments de droite de pente de plus en plus forte mais sur une longueur de plus en plus réduite. Du côté négatif, c'est un peu similaire, mais f n'est jamais nulle : $f(x) = -x$ sur $]-\infty; -1[$, puis $f(x) = -2x$ sur $\left[-1; -\frac{1}{2}\right[$ etc. Difficile de tracer entièrement la courbe, mais ça ressemble à ceci :



Feuille d'exercices n°3 : Sommes, produits, récurrences

ECE3 Lycée Carnot

18 septembre 2009

Exercice 1

Exprimer à l'aide du symbole Σ les expressions suivantes :

1. $S_1 = 3^2 + 3^3 + 3^4 + \cdots + 3^{15}$
2. $S_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{4} + \dfrac{3}{8} + \dfrac{4}{16} + \cdots + \dfrac{10}{1\ 024}$
3. $S_3 = a + \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{a^3}{3} + \cdots + \dfrac{a^n}{n}$
4. $S_4 = 2 - 4 + 6 - 8 + \cdots + 50$

Exercice 2

Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}(2k+1)$
2. $\displaystyle\sum_{k=945}^{k=2009} 3$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}(6k^2+4k+1)$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^k$
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}k(2k^2-1)$
6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=18}\frac{1}{3^k}$
7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}3^{2k}$
8. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}2^k + k^2 + 2$
9. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}\frac{2^k}{3^{k+1}}$

Exercice 3

Déterminer trois réels a, b et c tels que $\forall k \geqslant 2$, $\dfrac{k-5}{k(k^2-1)} = \dfrac{a}{k-1} + \dfrac{b}{k} + \dfrac{c}{k+1}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=2}^{k=n}\frac{k-5}{k(k^2-1)}$.

Exercice 4

Il s'agit d'une méthode alternative à celle du cours pour calculer la sommes des carrés d'entiers.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}(k+1)^3 - \sum_{k=1}^{k=n}k^3$.
2. En développant $(k+1)^3$, exprimer $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}(k+1)^3$ à l'aide de sommes classiques.

3. En comparant les deux calculs précédents, retrouver la valeur de $\sum_{k=1}^{k=n} k^2$.

Exercice 5

Calculer les sommes doubles suivantes :
$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij$; $\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij$; $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \frac{i}{j}$; $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |i-j|$ et $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} i2^j$

Exercice 6

Calculer les produits suivants :
1. $\prod_{k=2}^{k=n}\left(1-\frac{1}{k}\right)$ 2. $\prod_{k=2}^{k=n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$ 3. $\prod_{k=1}^{k=n}(6k-3)$

Exercice 7

Montrer par récurrence les propriétés suivantes :

1. $\forall n \geqslant 4,\ 2^n \leqslant n!$
2. $\forall n \geqslant 1,\ n(2n+1)(7n+1)$ est divisible par 6.
3. $\forall n \geqslant 1,\ \sum_{k=1}^{k=n} k \times k! = (n+1)! - 1$
4. $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=1}^{k=2^n} \frac{1}{k} \geqslant 1 + \frac{n}{2}$

Exercice 8

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$. Calculer les premiers termes de la suite, émettre une conjecture sur la valeur de u_n, puis la prouver par récurrence.

Exercice 9

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 4n + 6)$. Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2n + \frac{1}{3^n}$.

Exercice 10

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = u_1 = 0$, $u_2 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$. Calculer les premiers termes de la suite, émettre une conjecture sur la valeur de u_n, puis la prouver par récurrence.

Exercice 11

On va prouver par récurrence sur n la propriété P_n : n crayons placés dans une trousse sont nécessairement tous de la même couleur. Pour $n = 1$, c'est vrai (s'il y a un seul crayon, tous les crayons sont bien de la même couleur), donc P_1 est vérifiée. Supposons désormais P_n vérifiée, c'est-à-dire que n crayons sont toujours de la même couleur, et essayons de prouver P_{n+1}. Prenons donc

$n+1$ crayons (par exemple numérotés), et enlevons le dernier. Par hypothèse de récurrence, les n crayons restants sont de la même couleur. Remettons alors le dernier, et enlevons-en un autre, le premier par exemple. Toujours par hypothèse de récurrence, tous les crayons restants sont de la même couleur, donc le dernier crayon est en fait de la même couleur que tous les autres et P_{n+1} est prouvée. Conclusion : par principe de récurrence, quel que soit l'entier n, n crayons sont toujours de la même couleur.

Où est l'erreur ?

Corrigé de la feuille d'exercices n°3

Exercice 1

1. $S_1 = \sum_{k=2}^{k=15} 3^k$
2. $S_2 = \sum_{i=1}^{i=10} \frac{i}{2^i}$
3. $S_3 = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{a^k}{k}$
4. $S_4 = \sum_{i=1}^{i=25} -2i(-1)^i$

Exercice 2

1. $\sum_{k=1}^{k=n}(2k+1) = 2\sum_{k=1}^{k=n} k + \sum_{k=1}^{k=n} 1 = n(n+1) + n = n(n+2)$
2. $\sum_{k=945}^{k=2009} 3 = 3 \times 1\ 065 = 3\ 195$
3. $\sum_{k=1}^{k=n}(6k^2+4k+1) = 6\sum_{k=1}^{k=n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{k=n} k + \sum_{k=1}^{k=n} 1 = n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + n$
   $= n((n+1)(2n+1) + 2(n+1) + 1) = n(2n^2+5n+4)$
4. $\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^k = \sum_{k=0}^{k=n-1}(-1)^{k+1} = -\frac{1-(-1)^n}{1-(-1)} = \frac{(-1)^n - 1}{2}$
5. $\sum_{k=1}^{k=n} k(2k^2-1) = 2\sum_{k=1}^{k=n} k^3 - \sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n^2(n+1)^2}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n(n+1)-1)}{2}$
   $= \frac{n(n+1)(n^2+n-1)}{2}$
6. $\sum_{k=1}^{k=18} \frac{1}{3^k} = \sum_{k=1}^{k=18}\left(\frac{1}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{k=18}\left(\frac{1}{3}\right)^k - 1 = \frac{1-\frac{1}{3^{19}}}{1-\frac{1}{3}} - 1 = \frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^{19}}\right) - 1 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^{18}}\right)$
7. $\sum_{k=1}^{k=n} 3^{2k} = \sum_{k=1}^{k=n} 9^k = \sum_{k=0}^{k=n} 9^k - 1 = \frac{1-9^{n+1}}{1-9} - 1 = \frac{9^{n+1}-1}{8} - 1 = \frac{9^{n+1}-9}{8}$
8. $\sum_{k=1}^{k=n} 2^k + k^2 + 2 = \sum_{k=1}^{k=n} 2^k + \sum_{k=1}^{k=n} k^2 + \sum_{k=1}^{k=n} 2 = \sum_{k=0}^{k=n} 2^k - 1 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2n$
   $= 2^{n+1} - 2 + 2n + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 2(2^n + n - 1) + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
9. $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{2^k}{3^{k+1}} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{2}{9}\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{2}{9}\sum_{k=0}^{k=n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{2}{9}\frac{1-(\frac{2}{3})^n}{1-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$

Exercice 3

Pour déterminer les réels, le mieux est de partir du résultat, tout mettre au même dénominateur puis identifier : $\dfrac{a}{k-1}+\dfrac{b}{k}+\dfrac{c}{k+1}=\dfrac{ak(k+1)+b(k-1)(k+1)+ck(k+1)}{(k-1)k(k+1)}$ $=\dfrac{ak^2+ak+bk^2-b+ck^2+ck}{k(k^2-1)}$. En identifiant, on obtient les conditions $a+b+c=0$; $a+c=1$ et $-b=-5$, soit $b=5$ puis $a=-2$ et $c=-3$ en résolvant le petit système.

On en déduit que $\displaystyle\sum_{k=2}^{k=n}\frac{k-5}{k(k^2-1)}=\sum_{k=2}^{k=n}\frac{-2}{k-1}+\frac{5}{k}+\frac{-3}{k+1}=-2\sum_{k=2}^{k=n}\frac{1}{k-1}+5\sum_{k=2}^{k=n}\frac{1}{k}-3\sum_{k=2}^{k=n}\frac{1}{k+1}=$ $\displaystyle -2\sum_{k=1}^{k=n-1}\frac{1}{k}+5\sum_{k=2}^{k=n}\frac{1}{k}-3\sum_{k=3}^{k=n+1}\frac{1}{k}=-2\sum_{k=3}^{k=n-1}\frac{1}{k}-2-1+5\sum_{k=3}^{k=n-1}\frac{1}{k}+\frac{5}{2}+\frac{5}{n}-3\sum_{k=3}^{k=n-1}\frac{1}{k}-\frac{3}{n}-\frac{3}{n+1}=$ $\displaystyle -\frac{1}{2}+\frac{2}{n}-\frac{3}{n+1}$.

Exercice 4

1. C'est une somme télescopique : $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}(k+1)^3-\sum_{k=1}^{k=n}k^3=\sum_{k=2}^{k=n+1}k^3-\sum_{k=1}^{k=n}k^3=(n+1)^3-1$.
2. Comme $(k+1)^3=k^3+3k^2+3k+1$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}(k+1)^3=\sum_{k=1}^{k=n}k^3+3\sum_{k=1}^{k=n}k^2\sum_{k=1}^{k=n}k+\sum_{k=1}^{k=n}1$.
3. Reprenons le calcul de la question précédente : on a en écrivant les choses légèrement différemment $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}(k+1)^3-\sum_{k=1}^{k=n}k^3=3\sum_{k=1}^{k=n}k^2+3\sum_{k=1}^{k=n}k+\sum_{k=1}^{k=n}1$, soit en utilisant le résultat de la première question $\displaystyle 3\sum_{k=1}^{k=n}k^2+3\sum_{k=1}^{k=n}k+\sum_{k=1}^{k=n}1=(n+1)^3-1$, ou encore $\displaystyle 3\sum_{k=1}^{k=n}k^2+3\frac{n(n+1)}{2}+n=$ $(n+1)^3-1=n^3+3n^2+3n$. Faisons passer tout ce qu'on peut à droite : $\displaystyle 3\sum_{k=1}^{k=n}k^2=$ $\displaystyle n^3+3n^2+3n-\frac{3}{2}n^2-\frac{3}{2}n-n=n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n=\frac{n(2n^2+3n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$.
   On retrouve donc la formule $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 5

- $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}ij=\sum_{i=1}^{i=n}i\sum_{j=1}^{j=n}j=\sum_{i=1}^{i=n}i\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$
- $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}ij=\sum_{j=1}^{j=n}j\sum_{i=1}^{i=j}i=\sum_{j=1}^{j=n}j\frac{j(j+1)}{2}=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{j=n}j^3+j^2=\frac{n^2(n+1)^2}{8}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$ (on peut factoriser si on le souhaite le résultat obtenu...).
- $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\frac{i}{j}=\sum_{j=1}^{j=n}\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{i=n}i=\frac{n(n+1)}{2}\sum_{j=1}^{j=n}\frac{1}{j}$ et comme on ne sait pas calculer cette dernière somme, on est bloqués. En fait, il est plus intéressant de calculer $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\frac{i}{j}$ qui pour le coup donne quelque chose de complètement calculable.

- $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}|i-j| = \sum_{j=1}^{j=n}(\sum_{i=1}^{i=j}(j-i)+\sum_{i=j+1}^{i=n}(i-j)) = \sum_{j=1}^{j=n}(j^2-\frac{j(j+1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}-\frac{j(j+1)}{2}-(n-j)j) = \sum_{j=1}^{j=n}\left(j^2-(n+1)j+\frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)^2}{2}+\frac{n^2(n+1)}{2}$
$\displaystyle = \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{2n+1}{3}-(n+1)+n\right) = \frac{n(n+1)(2n-2)}{6} = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$
- $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} i2^j = \sum_{i=1}^{i=n} i\sum_{j=1}^{j=n}2^j = \frac{n(n+1)}{2}\times(\sum_{j=0}^{j=n}2^j-1) = \frac{n(n+1)}{2}\times(2^{n+1}-1-1) = n(n+1)(2^n-1)$

Exercice 6

1. $\displaystyle\prod_{k=2}^{k=n}\left(1-\frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^{k=n}\frac{k-1}{k} = \frac{\prod_{k=2}^{k=n}k-1}{\prod_{k=2}^{k=n}k} = \frac{\prod_{k=1}^{k=n-1}k}{\prod_{k=2}^{k=n}k} = \frac{1}{n}$

2. $\displaystyle\prod_{k=2}^{k=n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{k=n}\frac{k^2-1}{k^2} = \prod_{k=2}^{k=n}\frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{\prod_{k=2}^{k=n}(k-1)\prod_{k=2}^{k=n}(k+1)}{\left(\prod_{k=2}^{k=n}\right)^2} = \frac{\prod_{k=1}^{k=n-1}k}{\prod_{k=2}^{k=n}k}\times\frac{\prod_{k=3}^{k=n+1}k}{\prod_{k=2}^{k=n}k} = \frac{1}{n}\times\frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}$

3. $\displaystyle\prod_{k=1}^{k=n}(6k-3) = \prod_{k=1}^{k=n}3(2k-1) = 3^n\prod_{k=1}^{k=n}(2k-1) = 3^n\frac{\prod_{k=1}^{k=2n}k}{\prod_{k=1}^{k=n}2k} = 3^n\frac{(2n)!}{2^n\times n!} = \left(\frac{3}{2}\right)^n\frac{(2n)!}{n!}$

Exercice 7

1. Prouvons par récurrence la propriété P_n : $2^n \leqslant n!$. Puisque l'énoncé nous indique que n doit être plus grand que 4, in itialisons pour $n=4$: on a alors $2^4=16$ et $4!=24$, donc l'inégalité est vraie. Supposons désormais P_n vérifiée, c'est-à-dire que $2^n\leqslant n!$. On peut alors en déduire que $2^{n+1}\leqslant 2n!\leqslant(n+1)n!=(n+1)!$ puisque 2 est certainement inférieur à $n+1$ quand n est plus grand que 4. La propriété P_{n+1} est donc vraie, et par principe de récurrence, P_n est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à 4.
2. Prouvons par récurrence la propriété P_n : $n(2n+1)(7n+1)$ est divisible par 6. Pour $n=1$, on a $1\times(2+1)\times(7+1)=24$, qui est bien divisible par 6, donc P_1 est vraie. Supposons désormais P_n vérifiée et notons pour simplifier les calculs $a_n=n(2n+1)(7n+1)$. On a alors $a_{n+1}-a_n=(n+1)(2n+3)(7n+8)-n(2n+1)(7n+1)=(2n^2+5n+3)(7n+8)-(2n^2+n)(7n+1)=14n^3+16n^2+35n^2+40n+21n+24-14n^3-2n^2-7n^2-n=42n^2+60n+24=6(7n^2+10n+4)$, donc $a_{n+1}-a_n$ est divisible par 6. or, par hypothèse de récurrence, a_n est aussi divisible par 6, donc a_{n+1} est une somme de deux nombres divisibles par 6, et il est donc lui-même divisible

par 6. La propriété P_{n+1} est donc vérifiée, et par principe de récurrence, P_n est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

3. Prouvons par récurrence la propriété P_n : $\sum_{k=1}^{k=n} k \times k! = (n+1)! - 1$. Pour $n = 1$, $\sum_{k=1}^{k=1} k \times k! = 1 \times 1! = 1$ et $2! - 1 = 2 - 1 = 1$, donc P_1 est vraie. Supposons désormais P_n vraie pour un certain entier n, on a alors $\sum_{k=1}^{k=n+1} k \times k! = \sum_{k=1}^{k=n} k \times k! + (n+1)(n+1)! = (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! = (n+1)!(1+n+1) - 1 = (n+2)! - 1$, donc P_{n+1} est vérifiée et par principe de récurrence, P_n est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

4. Prouvons par récurrence la propriété P_n : $\sum_{k=1}^{k=2^n} \frac{1}{k} \geqslant 1 + \frac{n}{2}$. Pour $n = 0$, le membre de gauche se réduit à 1, et celui de droite vaut également 1, donc l'inégalité est vraie. Supposons désormais P_n vraie, on a alors $\sum_{k=1}^{k=2^{n+1}} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{k=2^n} \frac{1}{k} + \sum_{k=2^n+1}^{k=2^{n+1}} \frac{1}{k} \geqslant 1 + \frac{n}{2} + \sum_{k=2^n+1}^{k=2^{n+1}} \frac{1}{k}$ par hypothèse de récurrence. Reste à minorer la deuxième somme : elle est constituée de 2^n termes dont le plus petit vaut $\frac{1}{2^{n+1}}$, elle est donc supérieure ou égale à $2^n \times \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$, donc la somme totale est plus grande que $1 + \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n+1}{2}$, ce qui prouve $P_n + 1$. Par principe de récurrence, P_n est donc vraie pour tout entier n.

Exercice 8

On calcule $u_1 = 1$, $u_2 = 3$, $u_3 = 7$, $u_4 = 15$, et ça devrait suffire à conjecturer que $u_n = 2^n - 1$. Prouvons donc par récurrence la propriété P_n : $u_n = 2^n - 1$. C'est vrai pour $n = 0$, et si on le suppose vérifié au rang n, alors $u_{n+1} = 2u_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$, ce qui prouve P_{n+1}. Par principe de récurrence, on a, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n - 1$.

Exercice 9

Prouvons donc par récurrence la propriété P_n : $u_n = 2n + \frac{1}{3^n}$. Pour $n = 0$, $2 \times 0 + \frac{1}{3^0} = 1 = u_0$, donc P_0 est vraie. Supposons désormais P_n vérifiée, on a alors $u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 4n + 6) = \frac{1}{3}(2n + \frac{1}{3^n} + 4n + 6) = \frac{1}{3^{n+1}} + 2n + 2 = \frac{1}{3^{n+1}} + 2(n+1)$, ce qui prouve P_{n+1}, et par principe de récurrence, P_n est vraie pout tout entier n.

Exercice 10

On calcule $u_3 = 3 \times 2 - 3 \times 0 + 0 = 6$, $u_4 = 3 \times 6 - 3 \times 2 + 0 = 12$, $u_5 = 3 \times 12 - 3 \times 6 + 2 = 20$, $u_6 = 3 \times 20 - 3 \times 12 + 6 = 30$, et même avec un peu de motivation $u_7 = 3 \times 30 - 3 \times 20 + 12 = 42$. Si on est suffisamment réveillés, on arrive à conjecturer que $u_n = n(n-1)$ (chaque terme est le produit de l'indice par l'entier le précédent). Prouvons donc par récurrence **triple** la propriété P_n : $u_n = n(n-1)$. Il faut initialiser en vérifiant P_0, P_1 et P_2, ce qui ne pose aucun problème puisqu'on a de quoi vérifier jusqu'à P_7 grâce aux calculs précédents. Supposons désormais P_n, P_{n+1} et P_{n+2} vérifiées, on a alors $u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n = 3(n+2)(n+1) - 3(n+1)n + (n-1)n = 3(n^2+3n+2) - 3(n^2+n) + n^2 - n = 3n^2 + 9n + 6 - 3n^2 - 3n + n^2 - n = n^2 + 5n + 6 = (n+3)(n+2)$, ce qui prouve P_{n+3}, et par principe de récurrence triple, P_n est vraie pour tout entier n.

Exercice 11

L'erreur se situe dans la preuve de l'hérédité, qui ne fonctionne pas quand n est égal à 1. En effet, dans ce cas, quand on rajoute le crayon $n + 1$ et qu'on enlève le premier crayon, le dernier crayon n'est de la même couleur d'aucun autre crayon que lui-même, et les deux crayons n'ont donc aucune raison d'être de la même couleur !

Feuille d'exercices n°4 : Suites particulières

ECE3 Lycée Carnot

25 septembre 2009

Exercice 1

Un classique du rire : la comparaison entre suite arithmétique et suite géométrique.

Un épargnant décide de placer 1 000 euros à la banque. On lui propose deux types de placement : le placement A est un placement à intérêts simples rémunéré à 5% par an ; le placement B est un placement à intérêts composés rémunéré à 3% par an. On note (u_n) et (v_n) les suites donnant la somme épargnée au bout de n années. Déterminer la nature de (u_n) et de (v_n), donner la valeur de u_n et v_n en fonction de n, puis déterminer au bout de combien d'années le placement B devient plus intéressant que le placement A (vous avez les moyens de faire une résolution exacte). Déterminer pour chacun des deux placements au bout de combien d'années la somme de départ sera doublée.

Exercice 2

Trois réels a, b et c (avec $a \neq 0$) vérifient les drôles de conditions suivantes :

- a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q.
- a, $2b$ et $3c$ sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison q (la même que ci-dessus, donc).

Déterminer les valeurs possibles de a, b, c et q.

Exercice 3

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -2u_n + n^2 - 2$. Déterminer trois réels a, b et c tels que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n + an^2 + bn + c$ soit une suite géométrique. En déduire la valeur de u_n.

Exercice 4

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 3^n$. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{u_n}{3^n}$ est une suite arithmético-géométrique. En déduire les valeurs de v_n puis de u_n.

Exercice 5

On considère deux suites (u_n) et (v_n) vérifiant $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(2u_n + v_n)$ et $v_{n+1} = \dfrac{1}{3}(u_n + 2v_n)$. Construire à partir de (u_n) et de (v_n) deux nouvelles suites de type bien connu, calculer la valeur de ces deux suites et en déduire celle de u_n et de v_n.

Exercice 6

Un type de placement un peu plus rigolo que ceux de l'exercice 1 :

Un épargnant place une somme de 3 000 euros sur un compte rémunéré à 3% par an à intérêts composés. Qui plus est, ce même épargnant rajoute chaque année un placement ponctuel de 1 000 euros supplémentaires sur ce même compte. On note u_n la somme épargnée au bout de n années. Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite (u_n), en déduire de quel type de suite il s'agit, puis déterminer la valeur de u_n en fonction de n. Au bout de combien de temps notre épargnant disposera-t-il de 30 000 euros ? Combien aura-t-il alors déposé au total sur ce compte ?

Exercice 7

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n}$. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = \ln u_n$ est bien définie et d'un type bien connu. Calculer v_n et en déduire la valeur de u_n (ne vous inquiétez pas si c'est assez moche !).

Exercice 8

Déterminer pour chacune des suites récurrentes linéaires suivantes la valeur de u_n en fonction de n :

1. $u_0 = 0$; $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_{n+1} - 2u_n$
2. $u_0 = 0$; $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 6u_{n+1} - 9u_n$
3. $u_0 = 1$; $u_1 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $2u_{n+1} = 3u_{n+1} - u_n$

Exercice 9

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n - 2} + 2$.

1. Montrer que (u_n) est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2$.
2. On considère désormais la suite (v_n) définie par $v_n = \ln(u_n - 2)$. Expliquer pourquoi (v_n) est bien définie.
3. Déterminer la nature de la suite (v_n).
4. En déduire la valeur de u_n.

Exercice 10

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1} + 2u_{n-2} + \cdots + 2u_0$. Déterminer la valeur de u_n (mais si, regardez mieux, c'est une suite d'un type qu'on maitrise, il y a juste une petite modification à faire).

Exercice 11

On cherche à déterminer toutes les suites (u_n) vérifiant la récurrence non linéaire $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 3$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que la suite (v_n) définie par $v_n = an + b$ vérifie la relation ci-dessus.
2. Montrer que la suite (z_n) définie par $z_n = u_n - v_n$ est alors d'un type bien connu, et en déduire la valeur de z_n puis celle de u_n (en fonction des premières valeurs de la suite).

Corrigé de la feuille d'exercices n°4

Exercice 1

La suite (u_n) vérifie d'après l'énoncé la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + \frac{5}{100} \times 1\ 000 = u_n + 50$, c'est donc une suite arithmétique de raison 50 et de premier terme $u_0 = 1\ 000$. On sait alors que $u_n = 1\ 000 + 50n$. De même, la suite (v_n) vérifie la relation de récurrence $v_{n+1} = v_n + \frac{3}{100}v_n = v_n \times 1,03$, donc (v_n) est une suite géométrique de raison $1,03$ et de premier terme $v_0 = 1\ 000$. Toujours d'après le cours, on a donc $v_n = 1\ 000 \times 1,03^n$.

Si l'épargnant choisit le placement A, il aura doublé son capital lorsque $1\ 000 + 50n = 2\ 000$, soit $50n = 1\ 000$, donc $n = 20$. S'il choisit le placement B, il aura doublé son capital lorsque $1\ 000 \times 1,03^n = 2\ 000$, soit $1,03^n = 2$, donc en passant au ln on obtient $n \ln 1,03 = \ln 2$, soit $n = \frac{\ln 2}{\ln 1,03} \simeq 23,4$. Il devra donc attendre 20 ans pour doubler son capital avec le placement A et 24 ans avec le placement B.

Exercice 2

Les deux conditions peuvent se traduire de la façon suivante : $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = q$, et $2b - a = 3c - 2b = q$. La première relation revient à dire que $b = aq$ et $c = bq = aq^2$, d'où en remplaçant dans la deuxième donne $2aq - a = 3aq^2 - 2aq (= q)$, d'où $3aq^2 - 4aq + a = 0$, soit en factorisant par a qui est supposé non nul $3q^2 - 4q + 1 = 0$. Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4$, et admet deux racines réelles $q_1 = \frac{4+2}{6} = 1$, et $q_2 = \frac{4-2}{6} = \frac{1}{3}$. Si $q = 1$, la condition $2aq - a = q$ donne $a = 1$, puis $b = aq = 1$ et $c = bq = 1$; et si $q = \frac{1}{2}$, on obtient $\frac{2}{3}a - a = \frac{1}{2}$, soit $a = -\frac{3}{2}$, puis $b = \frac{1}{3}a = -\frac{1}{2}$ et $c = \frac{1}{3}b = -\frac{1}{6}$. Les deux seules possibilités sont donc d'avoir $a = b = c = q = 1$ (auquel cas les trois termes consécutifs de la suite géométrique sont 1, 1 et 1, et les trois termes consécutifs de la suite arithmétique sont 1, 2 et 3) ; ou $q = \frac{1}{3}$, donc $a = -\frac{3}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$ et $c = -\frac{1}{6}$ (auquel cas les trois termes consécutifs de la suite géométrique sont $-\frac{3}{2}$, $-\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{6}$, et les trois termes consécutifs de la suite arithmétique sont $-\frac{3}{2}$, -1 et $-\frac{1}{2}$).

Exercice 3

Notons donc $v_n = u_n + an^2 + bn + c$, alors $v_{n+1} = u_{n+1} + a(n+1)^2 + b(n+1) + c = -2u_n + n^2 - 2 + an^2 + 2an + a + bn + b + c = -2u_n + (1+a)n^2 + (2a+b)n + a + b + c - 2$. Pour que (v_n) soit géométrique, on doit avoir $v_{n+1} = qv_n = qu_n + aqn^2 + bqn + cq$. Il est nécessaire d'avoir $q = -2$, et en identifiant ensuite les coefficients des deux formules obtenues, on a $1 + a = -2a$, $2a + b = -2b$ et $a + b + c - 2 = -2c$, ce qui donne successivement $a = -\frac{1}{3}$, puis $b = -\frac{2}{3}a = \frac{2}{9}$, et enfin $c = -\frac{1}{3}(a + b - 2) = \frac{19}{27}$. Avec ces valeurs, la suite (v_n) est géométrique de raison -2 et de premier terme $v_0 = u_0 + a \times 0^2 + b \times 0 + c = 2 + \frac{19}{27} = \frac{73}{27}$. Conclusion de ces magnifiques calculs : $v_n = \frac{73}{27}(-2)^n$, puis $u_n = v_n - an^2 - bn - c = \frac{73}{27}(-2)^n + \frac{1}{3}n^2 - \frac{2}{9}n - \frac{19}{27}$ (oui, je sais, beurk...).

Exercice 4

Vérifions donc que (v_n) est arithmético-géométrique : $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{2u_n + 3^n}{3^{n+1}} = \frac{2u_n}{3 \times 3^n} + \frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}$. La suite est donc arithmético-géométrique, il ne reste plus qu'à calculer son terme général. L'équation de point fixe associée est $x = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$, qui a pour solution $x = 1$. On introduit donc la suite auxiliaire $w_n = v_n - 1$. Verifions que cette troisième suite est géométrique : $w_{n+1} = v_{n+1} - 1 = \frac{2}{3}v_n + \frac{1}{3} - 1 = \frac{2}{3}v_n - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(v_n - 1) = \frac{2}{3}w_n$. La suite (w_n) est donc géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme $w_0 = v_0 - 1 = \frac{u_0}{3^0} - 1 = -1$. Conclusion de nos calculs : $w_n = -\left(\frac{2}{3}\right)^n$, puis $v_n = w_n + 1 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$, et enfin $u_n = 3^n v_n = 3^n\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = 3^n - 2^n$.

Exercice 5

Un peu d'observation (et peut-être d'habitude de manipuler ce genre de suites) conduit à s'intéresser aux deux suites suivantes : $u_{n+1} + v_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + v_n) + \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}v_n + \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}v_n = u_n + v_n$, donc la suite $(u_n + v_n)$ (on peut lui donner un nom si on le souhaite) est constante, égale à son premier terme $u_0 + v_0 = 3$. De même, on remarque que $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}v_n - \frac{1}{3}u_n - \frac{2}{3}v_n = \frac{1}{3}u_n - \frac{1}{3}v_n = \frac{1}{3}(u_n - v_n)$, donc la suite $(u_n - v_n)$ est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $u_0 - v_0 = 1 - 2 = -1$. Conclusion, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n - v_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n = -\frac{1}{3^n}$, soit $u_n = v_n + \frac{1}{3^n}$. Comme on sait par ailleurs que $u_n + v_n = 3$, on peut remplacer u_n pour obtenir $2v_n + \frac{1}{3^n} = 3$, soit $v_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$, puis $u_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3^n}\right)$.

Exercice 6

L'énoncé se traduit par la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + \frac{3}{100}u_n + 1\,000 = 1,03u_n + 1\,000$ donc la suite (u_n) est arithmético-géométrique. Son équation de point fixe est $x = 1,03x + 1\,000$, ce qui donne $x = -\frac{10\,000}{3}$, qu'on notera simplement α pour alléger les calculs. En posant $v_n = u_n - \alpha$, on a donc $v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha = 1,03u_n + 1\,000 - \alpha = 1,03(u_n - \alpha)$, puisque par définition $1\,000 - \alpha = -1,03\alpha$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison $1,03$ et de premier terme $v_0 = u_0 - \alpha = 3\,000 - \alpha$. On en déduit que $v_n = (3\,000 - \alpha) \times 1,03^n$, puis $u_n = (3\,000 - \alpha) \times 1,03^n + \alpha$.

Notre épargnant dispose de 30 000 euros quand $(3\,000 - \alpha) \times 1,03^n + \alpha = 30\,000$, soit $1,03^n = \frac{30\,000 - \alpha}{3\,000 - \alpha}$, ou encore après passage au ln (comme à la fin de l'exercice 1), $n = \frac{\ln\left(\frac{30\,000 - \alpha}{3\,000 - \alpha}\right)}{\ln 1,03} \simeq 18,9$. L'épargnant aura donc décuplé sa mise initiale au bout de 19 ans, en ayant déposé sur cette période $19 \times 1\,000 + 3\,000 = 22\,000$ euros.

Exercice 7

La suite (v_n) est bien définie si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, ce que nous allons prouver par récurrence. Posons donc $P_n : u_n > 0$. La propriété P_0 est manifestement vraie puisque $4 > 0$. Supposons désormais P_n vraie, c'est-à-dire que $u_n > 0$. On a alors également $\sqrt{u_n} > 0$, donc $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} > 0$, ce qui prouve P_{n+1}. La suite (v_n) est donc bien définie.

Cherchons désormais à calculer v_{n+1} : $v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln(2\sqrt{n}) = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln u_n = \ln 2 + \frac{1}{2}v_n$. La suite (v_n) est donc arithmético-géométrique. Son équation de point fixe est $x = \ln 2 + \frac{1}{2}x$, ce qui donne $x = 2\ln 2$. Posons donc une suite auxiliaire $w_n = v_n - 2\ln 2$, et vérifions que (w_n) est géométrique : $w_{n+1} = v_{n+1} - 2\ln 2 = \ln 2 + \frac{1}{2}v_n - 2\ln 2 = \frac{1}{2}v_n - \ln 2 = \frac{1}{2}(v_n - 2\ln 2) = \frac{1}{2}w_n$. La suite (w_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $w_0 = v_0 - 2\ln 2 = \ln(u_0) - 2\ln 2 = \ln(4) - 2\ln 2 = 0$. Finalement, la suite w_n est simplement la suite nulle, donc $v_n = w_n + 2\ln 2 = 2\ln 2$, puis $u_n = e^{v_n} = e^{2\ln 2} = 2^2 = 4$. La suite initiale était donc simplement constante, mais cette technique marche très bien en changeant la valeur initiale de u_0 en n'importe quoi d'autre de plus pénible.

Exercice 8

1. L'équation caractéristique de la suite est $x^2 - 3x + 2 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 9 - 8 = 1$, et admet deux racines réelles $r = \frac{3+1}{2} = 2$ et $s = \frac{3-1}{2} = 1$. La suite (u_n) a donc un terme général de la forme $u_n = \alpha 2^n + \beta$, avec, en utilisant les valeurs initiales, $\alpha + \beta = 0$ et $2\alpha + \beta = 1$. En soustrayant les deux équations on obtient $\alpha = 1$, puis $\beta = -\alpha = -1$, donc $u_n = 2^n - 1$.
2. L'équation caractéristique de la suite est $x^2 - 6x + 9 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 36 - 36 = 0$, et admet une racine double $r = \frac{6}{2} = 3$. La suite (u_n) a donc un terme général de la forme $u_n = (\alpha + \beta n)3^n$, avec, en utilisant les valeurs initiales, $\alpha \times 3^0 = 0$ et $(\alpha + \beta) \times 3^1 = 1$. La première équation donne $\alpha = 0$, puis la deuxième donne $\beta = \frac{1}{3}$, d'où $u_n = \frac{1}{3}n3^n = n3^{n-1}$ (formule valable seulement si $n \geqslant 1$).
3. L'équation caractéristique de la suite est $2x^2 - 3x + 1 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 9 - 8 = 1$, et admet deux racines réelles $r = \frac{3+1}{4} = 1$ et $s = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$. La suite (u_n) a donc un terme général de la forme $u_n = \alpha + \frac{\beta}{2^n}$, avec, en utilisant les valeurs initiales, $\alpha + \beta = 1$ et $\alpha + \frac{\beta}{2} = -1$. En soustrayant les deux équations on obtient $\frac{\beta}{2} = 2$, soit $\beta = 4$, puis la première équation donne $\alpha = -3$, d'où $u_n = \frac{4}{2^n} - 3$.

Exercice 9

1. Prouvons par récurrence la propriété P_n : $u_n > 2$ (ce qui prouvera au passage que (u_n) est bien définie puisqu'on aura alors toujours $u_n \neq 2$). La propriété P_0 est manifestement vraie. Supposons maintenant P_n vraie, c'est-à-dire que $u_n > 2$. On a alors $u_n - 2 > 0$, donc $\frac{1}{u_n - 2} > 0$, puis $\frac{1}{u_n - 2} + 2 > 2$, ce qui prouve P_{n+1}. Par principe de récurrence, P_n est vérifiée pour tout entier n.
2. D'après la question précédente, on a toujours $u_n - 2 > 0$, ce qui prouve la bonne définition de v_n.
3. Calculons donc $v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 2) = \ln\left(\frac{1}{u_n - 2} + 2 - 2\right) = \ln\left(\frac{1}{u_n - 2}\right) = -\ln(u_n - 2) = -v_n$. La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison -1 et de premier terme $v_0 = \ln(u_0 - 2) = \ln 2$, d'où $v_n = (-1)^n \ln 2$, puis $u_n = e^{v_n} + 2 = e^{(-1)^n \ln 2} + 2$. En fait, on aura $u_n = 2 + 2 = 4$ pour toutes les valeurs paires de n, et $u_n = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$ pour toutes les valeurs impaires de n (on parle de suite périodique, comme pour les fonctions, pour une suite reprenant ainsi toujours les mêmes valeurs).

Exercice 10

Remarquons que, en décalant la relation de récurrence, $u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2} + \cdots + 2u_0$. En soustrayant cette relation à celle donnée dans l'énoncé, on obtient $u_{n+1} - u_n = u_n + u_{n-1}$, soit $u_{n+1} = 2u_n + u_{n-1}$. C'est une relation de récurrence linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - 2x - 1 = 0$. Son discriminant vaut $\Delta = 4 + 4 = 8$, elle admet donc deux racines réelles $r = \dfrac{2+\sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2}$, et $s = \dfrac{1-\sqrt{8}}{2} = 1 - \sqrt{2}$. Le terme général de la suite (u_n) est donc de la forme $u_n = \alpha(1+\sqrt{2})^n + \beta(1-\sqrt{2})^n$, avec en utilisant les deux premiers termes, $\alpha + \beta = u_0 = 1$, et $\alpha(1+\sqrt{2}) + \beta(1-\sqrt{2}) = u_1 = u_0 = 1$. En soustrayant les deux équations on obtient $\alpha\sqrt{2} - \beta\sqrt{2} = 0$, donc $\alpha = \beta$, ce qui en reprenant la première équation mène à $\alpha = \beta = \dfrac{1}{2}$. Conclusion : $u_n = \dfrac{1}{2}(1+\sqrt{2})^n + \dfrac{1}{2}(1-\sqrt{2})^n$ (ce n'est pas évident au premier abord, mais tous les termes de cette suite sont bel et bien entiers, malgré la présence de ces $\sqrt{2}$ dans la formule du terme général).

Exercice 11

1. Posons donc $v_n = an+b$, on a alors $v_{n+2} - 3v_{n+1} + 2v_n = a(n+2) + b - 3a(n+1) - 3b + 2an + 2b = an + 2a + b - 3an - 3a - 3b + 2an + 2b = -a$. Si on veut avoir $v_{n+2} - 3v_{n+1} + 2v_n = 3$, il suffit donc de prendre $a = -3$ (et, b pouvant être égal à n'importe quoi, autant prendre simplement $b = 0$). La suite définie par $v_n = -3n$ convient donc.
2. Si $z_n = u_n - v_n$, on a $z_{n+2} - 3z_{n+1} + 2z_n = u_{n+2} - v_{n+2} - 3u_{n+1} + 3v_{n+1} + 2u_n - 2v_n = u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n - (v_{n+2} - 3v_{n+1} + 2v_n) = 3 - 3 = 0$ puisque les deux suites (u_n) et (v_n) satisfont la récurrence initiale. La suite (z_n) est donc récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - 3x + 2 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 9 - 8 = 1$, et admet deux racines réelles $r = \dfrac{3-1}{2} = 1$ et $s = \dfrac{3+1}{2} = 2$. On en déduit que $z_n = \alpha + \beta 2^n$, avec $\alpha + \beta = z_0$, et $\alpha + 2\beta = z_1$. En soustrayant les deux équations, on obtient $\beta = z_1 - z_0$, puis $\alpha = z_0 - \beta = 2z_0 - z_1$. Notons que $z_0 = u_0 - v_0 = u_0$, et $z_1 = u_1 - v_1 = u_1 + 3$. On a donc $z_n = 2u_0 - u_1 - 3 + (u_1 + 3 - u_0)2^n$, puis $u_n = z_n + v_n = 2u_0 - u_1 - 3 + (u_1 + 3 - u_0)2^n - 3n$.

Feuille d'exercices n°5 : Ensembles et applications

ECE3 Lycée Carnot

9 octobre 2009

Exercice 1 (*)

Dans l'ensemble des entiers naturels, on considère les trois sous-ensembles $A = \{1.3; 5; 7; 9\}$; $B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ et $C = \{5; 6; 7; 8; 9; 10\}$. Déterminer les ensembles suivants : $\overline{A}$; $B \backslash A$; $A \cup B \cup C$; $\overline{C} \cap \overline{B}$; $A \cup (B \cap C)$.

Exercice 2 (* à **)

On se place dans $\mathbb{R}$ et on considère les ensembles $A = [4; 12]$; $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leqslant 5\}$, et $C = \mathbb{N}$. Donner l'expression la plus simple possible pour chacun des ensembles suivants : $A \cup B$; $A \cap C$; $\mathbb{R} \backslash B$; $A \cap \overline{C}$; $(A \cup B) \cap C$; $A \cup (B \cap C)$; $\overline{A} \cap (\overline{B} \cup C)$.

Exercice 3 (* si vous n'avez pas tout oublié sur les quadrilatères)

Cet exercice vous rappelera de (bons ?) souvenirs de géométrie du collège. On note Q l'ensemble du quadrilatère du plan, A l'ensemble des quadrilatères ayant un angle droit, P l'ensemble des parallélogrammes, T l'ensemble des trapèzes, C l'ensemble des carrées, R l'ensemble des rectangles, et L l'ensemble des losanges.

Parmi tous ces ensembles, déterminer qui est inclus dans qui, puis déterminer ce que valent les ensembles $A \cap L$, $A \cap P$ et $L \cap R$.

Exercice 4 (**)

Soient A et B deux sous-ensembles d'un même ensemble E. Montrer que $A = B \Leftrightarrow A \cap B = A \cup B$.

Exercice 5 (***)

Montrer que, si A, B et C sont trois sous-ensembles d'un même ensemble E, $(A \backslash B) \cup (B \backslash C) \cup (C \backslash A) = (A \cup B \cup C) \backslash (A \cap B \cap C)$.

Exercice 6 (***)

Soient A et B deux sous-ensembles d'un même ensemble E. On définit une nouvelle opération $\star$ de la façon suivante : $A \star B = \overline{A \cap B}$. Exprimer le plus simplement possible les ensembles suivants : $A \star A$; $(A \star A) \star (B \star B)$; $(A \star B) \star (A \star B)$.

Exercice 7 (**)

L'application $x \mapsto 2x$ est-elle injective, surjective, bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? Et de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$? Et de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}$?

Exercice 8 (**)

Déterminer pour chacune des applications suivantes si elle est injective, surjective ou bijective (ou rien du tout !) de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$:

- $f_1(n) = n + 5$
- $f_2(n) = n^2$
- $f_3(n) = n + 1$ si n est pair, et $f_3(n) = n - 1$ si n est impair
- $f_4(n) = Ent\left(\frac{n}{3}\right)$
- $f_5(n) = |n - 10|$

Exercice 9 (* pour la première moitié, ** pour la deuxième)

Soit f la fonction inverse. Déterminer $f([2;4])$; $f(]0;2])$; $f([-1;5])$, ainsi que les images réciproques de ces trois intervalles par f.

Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^2-4}$. Déterminer son ensemble de définition et étudier rapidement g (vous avez le droit de dériver...). Déterminer $g([-1;1])$; $g([-6;-3[)$; $g^{-1}(]-\infty;1])$; $g^{-1}([0;1])$.

Exercice 10 (**)

Démontrer qu'une fonction strictement croissante est nécessairement injective. Déterminer les solutions de l'équation $x + e^x = 1$.

Exercice 11 (***)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

1. Soit $y \in \mathbb{R}$. Déterminer en fonction de y le nombre d'antécédents de y et leur valeur quand il y en a.
2. L'application f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?
3. Montrer que $\forall x \in [-1;1]$, $f(x) \in [-1;1]$. La restriction de $f : [-1;1] \to [-1;1]$ est-elle bijective ?

Exercice 12 (**)

On définit sur $\mathbb{R}$ une application f par $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. Déterminer si d est injective, surjective, bijective.

Exercice 13 (**)

Soit $f : E \to E$ une application telle que $f \circ f \circ f = id_E$. Montrer que f est bijective et déterminer sa réciproque.

Exercice 14 (****)

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application injective telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) \leqslant n$. Montrer qu'on a en fait $f = id_{\mathbb{N}}$.

Corrigé de la feuille d'exercices n°5

Exercice 1

On a $\overline{A} = \mathbb{N}\backslash\{1;3;5;7\}$ (non, pas la peine d'insister, on ne peut pas l'écrire plus simplement) ; $B\backslash A = \{2;4;6\}$; $A \cup B \cup C = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$; $\overline{C} \cap \overline{B} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant 11\}$ et $A \cup (B \cap C) = \{1;3;5;6;7;9\}$.

Exercice 2

On a $A \cup B = [4;12] \cup [-5;5] = [-5;12]$; $A \cap C = \{4;5;6;7;8;9;10;11;12\}$;
$\mathbb{R}\backslash B = \mathbb{R}\backslash[-5;5] =]-\infty;-5[\cup]5;+\infty[$; $A \cap \overline{C} = [4;5[\cup]5;6[\cup]6;7[\cup]7;8[\cup]8;9[\cup]9;10[\cup]10;11[\cup]11;12]$;
$(A \cup B) \cap C = \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12\}$;
$A \cup (B \cap C) = [4;12] \cup \{0;1;2;3\}$ et $\overline{A} \cap (\overline{B} \cup C) =]-\infty;-5] \cup \{0;1;2;3\} \cup [12;+\infty[$.

Exercice 3

On a $C \subset R \subset A \subset Q$, mais aussi $C \subset L \subset P \subset T \subset Q$, et enfin $R \subset P$. Par contre, pas d'inclusion entre P ou T et A, ni entre L et R.

On a $A \cap L = C$, $A \cap P = R$ et $L \cap R = C$.

Exercice 4

Il faut montrer séparément chacune des deux équivalences. Dans un sens c'est simple : si $A = B$ alors $A \cup B = A \cup A = A$ et $A \cap B = A \cap A = A$, donc on a bien $A \cup B = A \cap B$. Dans l'autre sens, suppossons que $A \cup B = A \cap B$ et montrons par double inclusion que $A = B$. Soit $x \in A$, on a a fortiori $x \in A \cup B$, donc en utilisant notre hypothèse $x \in A \cap B$, mais alors $x \in B$, donc $A \subset B$. La deuxième inclusion se démontre exactement de la même manière, on en conclut que $A = B$.

Exercice 5

Considérons un élément x appartenant à $(A \cup B \cup C)\backslash(A \cap B \cap C)$. Cela signifie que x appartient à au moins un des trois ensembles A, B et C (puisqu'il appartient à leur union), mais pas aux trois à la fois (puisqu'il n'appartient pas à l'intersection). Autrement dit, x appartient à exactement un ou deux ensembles parmi les trois. S'il appartient à un seul, par exemple A (les trois ensembles jouent un rôle symétrique), alors il appartient à $A\backslash B$, donc à l'ensemble de gauche. S'il appartient à deux des ensembles, par exemple A et B, alors il appartient à $B\backslash C$, et encore une fois à l'ensemble de gauche. Dans tous les cas, $x \in (A\backslash B) \cup (B\backslash C) \cup (C\backslash A)$.

Dans l'autre sens, si x appartient à l'union de gauche, il appartient à (au moins) l'un des trois ensembles $A\backslash B$, $B\backslash C$ et $C\backslash A$, donc à l'un des trois ensembles A, B et C. Ceci prouve que $x \in A \cup B \cup C$. mais le fait que x soit dans l'ensemble de gauche signifie aussi qu'il y a un des trois ensembles A, B et C auquel x n'appartient pas, donc $x \notin A \cap B \cap C$, ce qui prouve qu'il appartient à l'ensemble de droite. Les deux ensembles sont donc bien égaux.

Exercice 6

On constate d'abord que $(A \star A) = \overline{A \cap A} = \overline{A}$, puis en utilisant ce résultat $(A \star A) \star (B \star B) = \overline{A} \star \overline{B} = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}} = \overline{\overline{A}} \cup \overline{\overline{B}} = A \cup B$ (n utilisant les lois de Morgan pour l'avant-dernière inégalité. De même, $(A \star B) \star (A \star B) = (\overline{A \cap B}) \cap (\overline{A \cap B}) = \overline{(\overline{A \cap B}) \cap (\overline{A \cap B})} = \overline{\overline{A \cap B}} = A \cap B$. La conclusion de l'exercice c'est qu'on peut exprimer à l'aide d'une seule opération certes un peu étrange (l'opération $\star$) toutes les opérations usuelles (complémentaire, union et intersection).

Exercice 7

L'application $x \mapsto 2x$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (si $2x = 2x'$ alors $x = x'$, donc l'application est injective ; et si $y \in \mathbb{R}$, $\frac{y}{2}$ est un antécédent de y, donc elle est surjective), mais pas de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ car les entiers impairs n'ont alors pas d'antécédent. Par contre, elle également bijective de $\mathbb{Q}$ dans lui-même, les mêmes arguments s'appliquant que pour $\mathbb{R}$.

Exercice 8

- L'application f_1 est injective puisque $n + 5 = n' + 5 \Rightarrow n = n'$, mais pas surjective car 0 par exemple n'a pas d'antécédent par f_1.
- L'application f_2 est injective : en effet, $n^2 = n'2 \Rightarrow n = n'$ quand n et n' sont positifs. Par contre, elle n'est pas surjective, 2 par exemple n'ayant pas d'antécédent par f_2.
- L'application f_3 est un peu plus pénible à étudier que les autres mais elle est en fait bijective. Les entiers pairs sont envoyés sur les entiers impairs donc un entier pair ne peut pas avoir la même image qu'un entier impair. Comme la restriction de f aux entiers pairs, et celle aux entiers impairs, sont manifestement injectives, f_3 est injective. Elle est également surjective car si p est pair, $p + 1$ est un antécédent de p, et si p est impair, c'est $p - 1$ qui marche.
- L'application f_4 n'est pas surjective car 1 et 2 ont par exemple la même image. Par contre, elle est surjective, $3p$ étant toujours un antécédent de p (il n'est pas très compliqué de constater que chaque entier a en fait trois antécédents par f_4).
- Cette dernière application n'est pas injective, 3 et 17 ayant par exemple la même image. Par contre, elle est surjective car $p + 10$ est toujours un antécédent de p.

Exercice 9

Si f est la fonction inverse, $f([2;4]) = \left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$; $f(]0;2]) = \left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ et $f([-1;5]) =]-\infty;-1] \cup \left[\frac{1}{5};+\infty\right[$. Les images réciproques sont exactement les mêmes que les images directes (c'est du au fait que la fonction inverse est sa propre réciproque).

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2;2\}$, et a pour dérivée $f'(x) = \dfrac{4x(x^2-4) - 2x(2x^2+1)}{(x^2-4)^2} = \dfrac{-18x}{(x^2-4)^2}$. On obtient le tableau de variations suivant :

$$\begin{array}{|c|ccc||ccccc||ccc|}
\hline
x & -\infty & & -2 & & & 0 & & & 2 & & +\infty \\
\hline
f(x) & 2 & \nearrow & +\infty & -\infty & \nearrow & -\frac{1}{4} & \searrow & -\infty & +\infty & \searrow & 2 \\
\hline
\end{array}$$

Je vous épargne le détail du calcul des limites, qui ne sont pas franchement insurmontables. À partir du tableau, et à l'aide de quelques calculs d'images, on peut en tout cas lire $g([-1;1]) = \left[-1;-\frac{1}{4}\right]$ (après avoir constaté que $g(-1) = g(1) = -1$) ; $g([-6;-3[) = \left[\frac{73}{32};\frac{19}{5}\right[$; $g^{-1}(]-\infty;1]) =]-2;2[$ et $g^{-1}([0;1]) = \emptyset$.

Exercice 10

Il est plus simple de démontrer la contraposée : supposons qu'une fonction f n'est pas injective. Il existe alors deux réels distincts x_1 et x_2 tels que $f(x_1) = f(x_2)$. On peut supposer que $x_1 < x_2$ par exemple, ceci contredit alors le fait que f soit strictement croissante.

La fonction $f : x \mapsto x + e^x$ étant strictement croissante, elle est d'après ce qui précède injective. En particulier, 1 ne peut avoir plus d'un antécédent par f, donc l'équation $x + e^x = 1$ a au plus une solution. Or, on connait une solution de cette équation, $x = 0$, qui est donc la seule.

Exercice 11

1. Les antécédents de y sont les réels x vérifiant $\dfrac{2x}{1+x^2} = y$, soit $2x = y + yx^2$ ou encore $yx^2 - 2x - y = 0$. Si $y = 0$, on obtient comme seul antécédent $x = 0$. Sinon, on a une équation du second degré, dont le discriminant vaut $4 - 4y^2 = 4(1 - y^2)$. Si $y < -1$ ou $y > 1$, le discriminant est négatif, et y n'a pas d'antécédent. Si $y = -1$, il y a une seule solution (donc un antécédent) qui est $x = -1$, et si $y = 1$, on a aussi un seul antécédent qui est $x = 1$. Enfin, si $-1 < y < 1$ (avec $y \neq 0$), on a deux antécédents qui valent $\dfrac{2 \pm \sqrt{4(1-y^2}}{2y} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-y^2}}{y}$.
2. L'application f n'est ni injective ni surjective (et donc pas bijective) puisque certains réels n'ont pas d'antécédent et que d'autres en ont plusieurs.
3. On a en fait $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \in [-1; 1]$. En effet, $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x+1)^2 \geqslant 0$, donc $x^2+2x+1 \geqslant 0$, ou encore $-2x \leqslant x^2 + 1$. Il suffit de diviser par $x^2 + 1$, qui est toujours positif, pour obtenir $f(x) \geqslant -1$. De même, $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1 \geqslant 0$, donc $2x \leqslant x^2 + 1$, ce qui donne $f(x) \leqslant 1$. De plus, sur $[-1; 1]$, la fonction f est strictement croissante (sa dérivée vaut $\dfrac{2 + 2x^2 - 4x^2}{(1 + x^2)^2} = \dfrac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2}$, qui est toujours positive sur $[-1; 1]$). Elle est donc injective, et prend toutes les valeurs entre -1 et 1, puisque $f(-1) = -1$ et $f(1) = 1$. On en conclut que f réalise une bijection de $[-1; 1]$ sur lui-même.

Exercice 12

Pas vraiment d'autre moyen que d'étudier les variations de f : $f'(x) = \dfrac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \dfrac{e^{2x} + e^{-2x} + 2e^x - e^{2x} - e^{-2x} + 2e^x}{(e^x + e^{-x})^2} = \dfrac{4e^x}{(e^x + e^{-x})^2}$. Une exponentielle étant toujours positive, cette dérivée est toujours positive, et la fonction f strictement croissante. Elle est donc injective. Pour savoir si elle est surjective, il suffit de calculer ses limites à l'infini. Comme $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-2x})} = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$. Les deux termes tendent vers 1 en $+\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$. De même, en factorisant par e^{-x}, on obtient $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$. La fonction f n'est donc pas surjective sur $\mathbb{R}$. Par contre, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1; 1[$.

Exercice 13

Ca se fait en une ligne si on pense à appliquer le bon résultat du cours : $f \circ (f \circ f) = (f \circ f) \circ f = id_E$, donc les applications f et $f \circ f$ sont réciproques l'une de l'autre. Autrement dit, f est bijective, de réciproque $f^{-1} = f \circ f$.

Exercice 14

Bon, si le prof a mis quatre étoiles, c'est que l'exo doit être super dur, non ? En fait, la grosse difficulté, c'est qu'il faut passer par une récurrence forte pour s'en sortir. Notons donc P_n : $\forall k \leqslant n$, $f(k) = k$ (autrement dit, la restriction de f aux n premiers entiers est l'identité). Pour $n = 0$, la propriété nous dit simplement que $f(0) = 0$, ce qui est vrai puisque par hypothèse $f(0) \leqslant 0$, et $f(0) \in \mathbb{N}$. Supposons donc P_n vérifiée, et cherchons à prouver P_{n+1}. On sait déjà par hypothèse de récurrence que $f(k) = k$ pour tous les entiers kjusqu'à n inclus. Il ne reste donc en fait qu'à prouver que $f(n+1) = n+1$. L'énoncé nous indique que $f(n+1) = n+1$, et par ailleurs, f étant injective, $f(n+1)$ doit être différent de toutes les valeurs prises par f sur les entiers compris entre 0 et n. Or, ces valeurs sont par hypothèse de récurrence tous les entiers compris entre 0 et n. Il ne reste donc plus qu'une possibilité pour $f(n+1)$: être égal à $n+1$. Ceci prouve la propriété P_{n+1} et achève la récurrence. La propriété P_n est donc vérifiée quel que soit l'entier n, ce qui prouve entre autres que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) = n$, c'est-à-dire que $f = id_{\mathbb{N}}$.

Feuille d'exercices de révision pour le DS2

ECE3 Lycée Carnot

16 octobre 2009

Exercice 1

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $e^{3x} + 3e^{2x} - 2e^x = 2$
2. $\ln(2x-3) - \ln(x+1) \leqslant \ln(3)$
3. $Ent(x^2 + x - 4) = 2$
4. $|4x-1| - |3x^2 + 2x - 1| = 3$

Exercice 2

On considère la fonction f définie par $f(x) = x + 1 + \dfrac{x - 1 + \ln x}{x^2}$, et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. On définit également les fonctions auxilaires $g(x) = x^3 - x + 3 - 2\ln x$ et $h(x) = 3x^3 - x - 2$.

1. Vérifier que 1 est racine du polynome h.
2. Déterminer trois réels a, b et c tels que $h(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$.
3. Étudier le signe de h à l'aide des question précedentes.
4. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g et calculer sa dérivée g'.
5. À l'aide des questions précédentes, dresser le tableau de variations de la fonction g, puis en déduire que $g(x) > 0$ sur $\mathcal{D}_g$.
6. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
7. Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$.
8. Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$, et en déduire le tableau de variations de f.
9. Étudier la position relative de la courbe représentative de f et de la droite d'équation $y = x+1$.
10. Tracer dans un même repère cette courbe et cette droite.

Exercice 3

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{u_n + 1}$.

1. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$.
2. Montrer que la suite (u_n) est monotone.
3. En déduire que la suite converge, et déterminer sa limite (on utilisera le fait que, si u_{n+1} est de la forme $f(u_n)$, avec f continue, alors la limite de la suite vérifie nécessairement $f(l) = l$).

Exercice 4

On considère la suite $(S_n)_{n\geqslant 2}$ définie par $S_n = \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k^2}$.

1. Montrer que, si $k \geqslant 2$, alors $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.
2. Calculer $\sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, et en déduire un encadrement de S_n.
3. Montrer que, $\forall n \geqslant 2$, $S_n \leqslant 1$.
4. Montrer que (S_n) est une suite croissante, et en déduire que (S_n) est convergente.

Exercice 5

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, où $f(x) = \frac{1+x}{2\sqrt{x}}$.

1. Étudier les variations de f sur son ensemble de définition, et tracer une allure de sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$.
2. On note D la droite d'équation $y = x$. Déterminer la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de D.
3. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et que, $\forall n \geqslant 1$, $u_n \geqslant 1$.
4. Montrer que la suite est décroissante à partir de $n = 1$ (vous pouvez utiliser le résultat de la question 2).
5. En déduire que la suite converge, puis déterminer sa limite l, en utilisant le fait que celle-ci vérifie $f(l) = l$.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{x^2+x+1}$, et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Étudier les variations de f et calculer ses limites aux bornes de son ensemble de définition.
3. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 0.
4. Étudier la position relative et les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de T.
5. Construire dans un même repère la courbe $\mathcal{C}$ et la droite T.
   On considère désormais la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
6. Soit $p \in \mathbb{N}$, prouver que $f\left(\frac{1}{p}\right) \leqslant \frac{1}{p+1}$.
7. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.
8. Déterminer la limite de la suite (u_n).
9. Vérifier que $\frac{1}{u_{n+1}} = u_n + 1 + \frac{1}{u_n}$.
10. En déduire, à l'aide du résultat de la question 7, que $\forall n \geqslant 1$, $\frac{1}{u_n} \leqslant n + 1 + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$.
11. En admettant que $\forall n \geqslant 2$, $\sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k} \leqslant \ln n$, déterminer la limite de nu_n.

Corrigé de la feuille de révision n°1

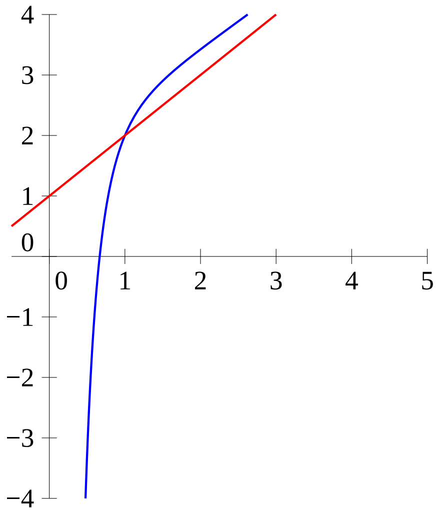
Exercice 1

1. En posant $X = e^x$, on se ramène à l'équation du troisième degré $X^3+3X^2-2X-2=0$, qui a pour racine évidente 1 et se factorise en $(X-1)(X^2+4X+2)=0$. Ne reste plus qu'à trouver les racines de la deuxième parenthèse, on obtient $\Delta = 8$, puis $x_1 = -2-\sqrt{2}$ et $x_2 = -2+\sqrt{2}$. L'équation initiale a donc trois solutions.
2. L'inéquation est bien définie si $x > \dfrac{3}{2}$ et devient après simplification $\dfrac{2x-3}{x+1} \leqslant 3$, soit $\dfrac{-x-6}{x+1} \leqslant 0$, d'où $x \in]-\infty;-6] \cup]-1;+\infty[$. Vu le domaine de définition, on obtient en fait $\mathcal{S} = \left]\dfrac{3}{2};+\infty\right[$.
3. On cherche en fait les réels x vérifiant $2 \leqslant x^2+x-4 < 3$, ce qui revient à résoudre deux inéquations du second degré. L'inégalité de droite donne $x \in]-\infty;-3] \cup [2;+\infty[$, et la deuxième $x \in \left]\dfrac{-1-\sqrt{29}}{2};\dfrac{-1+\sqrt{29}}{2}\right[$, soit finalement $\mathcal{S} = \left]\dfrac{-1-\sqrt{29}}{2};-3\right] \cup \left[2;\dfrac{1+\sqrt{29}}{2}\right[$.
4. Après avoir un joli tableau, on obtient en fait quatre équations du decond degré à résoudre : si $x \leqslant -1$, $(1-4x)-(3x^2+2x-1)=3$ donne deux solutions $x_1 = \dfrac{6+\sqrt{24}}{-6} = -1-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ (valable) et $x_2 = \dfrac{\sqrt{6}}{3}-1$ (pas valable) ; si $-1 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{4}$, $(1-4x)+(3x^2+2x-1)=3$ donne deux solutions $x_3 = \dfrac{2+\sqrt{40}}{6} = \dfrac{1}{3}+\dfrac{\sqrt{10}}{3}$ (pas valable) et $x_2 = \dfrac{1}{3}-\dfrac{\sqrt{10}}{3}$ (valable) ; si $\dfrac{1}{4} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{3}$, $(4x-1)+(3x^2+2x-1)=3$ donne deux solutions $x_5 = \dfrac{-6+\sqrt{24}}{6} = -1+\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ (pas valable) et $x_6 = -1-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ (pas valable) ; enfin, si $x \geqslant \dfrac{1}{3}$, $(4x-1)-(3x^2+2x-1)=3$ n'a pas de solution (discriminant négatif). Il y a donc deux solutions à l"'équation proposée.

Exercice 2

1. Je pense que vous arriverez à le faire tous seuls.
2. On obtient par identification $h(x) = (x-1)(3x^2+3x+2)$.
3. Le trinôme $3x^2+3x+2$ a un discriminant négatif, il est toujours positif, donc h est du signe de $x-1$, c'est-à-dire positif sur $[1;+\infty[$ et négatif sur $]-\infty;1]$.
4. Sans problème, $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}_+^*$, puis $g'(x) = 3x^2-1-\dfrac{2}{x} = \dfrac{h(x)}{x}$.
5. La fonction g est donc décroissante sur $]-\infty;1]$ et croissante ensuite, avec pour minimum $g(1)=3$, donc elle est toujours strictement positive.
6. Tout comme g, f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
7. Il n'y a pas de forme indéterminée en 0 : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$. En $+\infty$, c'est à peine plus compliqué, le quotient tend vers 0 (un petit coup de croissance comparée), mais il reste $x+1$ qui fait que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
8. On a $f'(x) = 1 + \dfrac{(1+\frac{1}{x})x^2 - 2x(x-1+\ln x)}{x^4} = \dfrac{x^4+x^2+x-2x^2+2x-2x\ln x}{x^4}$ $= \dfrac{x^4-x^2+3x-2x\ln x}{x^4} = \dfrac{g(x)}{x^3}$. La fonction f est donc strictement croissante.
9. $f(x)-(x+1) = \dfrac{x-1+\ln x}{x^2}$, qui est du signe de $x-1+\ln x$. Comme $x-1$ et $\ln x$ sont tous deux négatifs entre 0 et 1 et positifs ensuite, on en déduit que la courbe est sous la droite sur $]0;1]$, et au-dessus sur $[1;+\infty[$.

10. Et voilà les courbes demandées :



Exercice 3

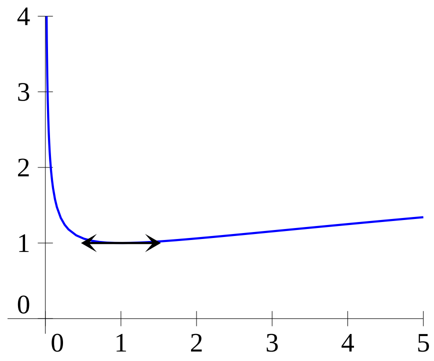
1. La suite étant définie dès que $u_n \neq -1$, prouver par récurrence que $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$ suffit. C'est vrai pour u_0, et si on le suppose vrai pour u_n, alors $\frac{3}{2} \leqslant u_n + 1 \leqslant 2$, donc $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{u_n+1} \leqslant \frac{2}{3}$. Or $u_{n+1} = \frac{2u_n + 2 - 2}{u_n + 1} = 2 - \frac{2}{u_n+1}$. On a donc $\frac{4}{3} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$, ce qui achève la démonstration.
2. Calculons $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n}{u_n+1} - u_n = \frac{2u_n - u_n^2 - u_n}{u_n+1} = \frac{u_n(1-u_n)}{u_n+1}$, qui est positif en utilisant ce qui précède. La suite est donc croissante.
3. La suite (u_n) étant croissante et majorée par 1, elle converge. Sa limite l vérifie $l = \frac{2l}{l+1}$, soit $l^2 + l = 2l$, donc $l(l-1) = 0$. La limite ne pouvant être égale à 0 pour une suite dont les valeurs sont supérieures à $\frac{1}{2}$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

Exercice 4

1. En effet $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k^2+k} \leqslant \frac{1}{k^2}$, puisque $k^2 \leqslant k^2 + k$. L'autre inégalité est similaire.
2. C'est une somme télescopique, qui vaut $1 - \frac{1}{n}$. En faisant la somme des inéagalités obtenues à la question précédente, on obtient donc $\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \leqslant S_n \leqslant 1 - \frac{1}{n}$
3. C'est une conséquence immédiate de la question précédente.
4. Comme $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2}$, la suite est croissante. Étant majorée par 1, elle converge donc.

Exercice 5

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $f'(x) = \frac{2\sqrt{x} - \frac{1+x}{\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x})^2} = \frac{2x - (1+x)}{\sqrt{x}(2\sqrt{x})^2} = \frac{x-1}{4x\sqrt{x}}$. La fonction est donc décroissante sur $]0;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$. Son minimum vaut $f(1) = \frac{2}{2\sqrt{1}} = 1$ et sa courbe ressemble à ceci :



2. Calculons $f(x) - x = \dfrac{1 + x - 2x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$, qui est du signe de $1 + x - 2x\sqrt{x}$. Notons $X = \sqrt{x}$, on a alors $1 + x - 2x\sqrt{x} = 1 + X^2 - 2X^3 = (1 - X)(1 + X + 2X^2)$. La deuxième parenthèse est toujours positive sur $\mathcal{D}_f$, la position relative dépend du signe de $1 - \sqrt{x}$, qui est positif quand $x \leqslant 1$. La courbe est donc au-dessus de la droite sur $]0; 1]$ et en-dessous ensuite.

3. La suite est bien définie si toutes les valeurs de la suite sont strictement positives, donc il est largement suffisant de prouver que $u_n \geqslant 1$. Pour une fois, même pas besoin de récurrence, puisque $\forall n \geqslant 1$, $u_n = f(u_{n-1}) \geqslant 1$ puisque la fonction f ne prend pas de valeurs plus petites que 1.

4. En effet, $\forall n \geqslant 1$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$. Or, on a vu à la question 3 que $u_n \geqslant 1$, et à la question 2 que si $x \geqslant 1$, $f(x) - x \leqslant 0$. Conclusion, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ et la suite est bien décroissante.

5. La suite est décroissante et minorée par 1, elle converge donc. Sa limite l vérifie $l = \dfrac{1 + l}{2\sqrt{l}}$, ce qui n'arrive d'après le calcul de la question 2 que pour $l = 1$, donc la suite tend vers 1.

Exercice 6

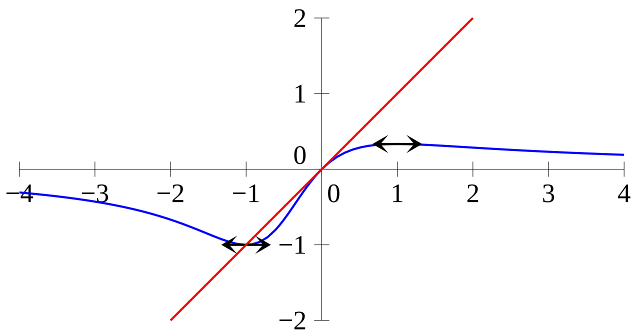
1. La fonction f est définie si $x^2 + x + 1 > 0$, ce qui est en fait toujours le cas (ce trinome a undiscriminant négatif), donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

2. Dérivons donc : $f'(x) = \dfrac{x^2 + x + 1 - x(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} = \dfrac{-x^2 + 1}{(x^2 + x + 1)^2} = \dfrac{(1 + x)(1 - x)}{(x^2 + x + 1)^2}$. La fonction f est donc croissante sur $[-1; 1]$, et décroissante sur $]-\infty; -1]$ et sur $[1; +\infty[$. Les seules limites à calculer sont celles en $\pm\infty$. En utilisant la factorisation par les termes de plus haut degré, on obtient facilement que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$. Tant qu'on y est, constatons que $f(-1) = -1$, et $f(1) = \dfrac{1}{3}$.

3. On a $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$, donc la tangente en 0 a pour équation $y = x$.

4. On a $f(x) - x = \dfrac{x - (x^3 + x^2 + x)}{x^2 + x + 1} = \dfrac{-x^3 - x^2}{x^2 + x + 1} = \dfrac{-x^2(x + 1)}{x^2 + x + 1}$. Cette fraction est du signe de $x + 1$, donc $\mathcal{C}$ est en-dessous de T sur $]-\infty; -1]$, et au-dessus sur $[1; +\infty[$.

5. Voici un joli graphique :



6. On a $f\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{\frac{1}{p}}{\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p}+1} = \frac{p}{1+p+p^2} \leqslant \frac{p}{p+p^2} = \frac{1}{p+1}$.
7. Pour $n = 0$, on a bien $0 < 1 \leqslant \frac{1}{0+1}$. Supposons donc $0 < u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$. D'après la question précédente, on a alors $f(u_n) \leqslant \frac{1}{n+2}$, donc $u_{n+1} \leqslant \frac{1}{n+2}$. Par ailleurs, $\forall x > 0$, $f(x) > 0$ (regarder le tableau de variations et utiliser que $f(0) = 0$) donc $u_n > 0 \Rightarrow u_{n+1} > 0$, ce qui achève la récurrence.
8. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, le théorème des gendarmes permet de conclure que (u_n) tend vers 0.
9. Par définition $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n^2+u_n+1}$, donc $\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{u_n^2+u_n+1}{u_n} = u_n + 1 + \frac{1}{u_n}$.
10. Une petite récurrence semble s'imposer : pour $n = 1$, la proposition prétend que $\frac{1}{u_1} \leqslant 2+1 = 3$, ce qui est vrai puisque $u_1 = f(1) = \frac{1}{3}$. Supposons la propriété vraie au rang n, et utilisons la question précédente : $\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + 1 + u_n \leqslant n + 1 + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} + 1 + u_n$. Il ne reste plus qu'à utiliser la majoration de la question 7 pour obtenir exactement la formule voulue pour achever la récurrence.
11. On a donc $\frac{1}{u_n} \leqslant n + 2 + \ln n$, ou encore $1 \leqslant nu_n - 2u_n + u_n \ln n$, soit $nu_n \geqslant 1 + 2u_n - u_n \ln n$. Comme $u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$, la limite de $u_n \ln n$ vaut 0, donc nu_n est plus grand qu'une suite tendant vers 1. Or on a aussi $nu_n \leqslant \frac{n}{n+1}$, avec le terme de droite qui tend vers 1. Conclusion via le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 1$.

Feuille d'exercices n°6 : Convergence de suites

ECE3 Lycée Carnot

20 octobre 2009

Exercice 1 (**)

Vrai ou faux ?

1. Une suite croissante à partir d'un certain rang est minorée.
2. Une suite convergente est nécessairement monotone à partir d'un certain rang.
3. Une suite divergeant vers $+\infty$ est nécessairement croissante à partir d'un certain rang.
4. Si (u_n) est croissante, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant v_n$, alors (v_n) est croissante.
5. Si $(|u_n|)$ converge, alors (u_n) aussi.
6. Si $(|u_n|)$ converge vers 0, alors (u_n) aussi.

Exercice 2 (* à **)

Étudier la convergence et déterminer la limite éventuelle de chacune des suites suivantes :

- $u_n = 2^n - 3^n + 4^n$
- $u_n = (-n+2)e^{-n}$
- $u_n = 2^n - e^{2n} + 1$
- $u_n = \dfrac{n^2 - 3n + 2}{2n^2 + 5n - 34}$
- $u_n = \ln n + e^{-3n}$
- $u_n = \dfrac{2\sqrt{n} + 3\ln n - 5}{\ln(n^3) - 3n + 2}$
- $u_n = \sqrt{n^2 - 1} - n$
- $u_n = \dfrac{(n+2)!}{(n^2+1) \times n!}$
- $u_n = e^{-\frac{1}{2n}} + \ln\left(\dfrac{n}{n+2}\right)$

Exercice 3 (**)

On considère une suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$.

1. Montrer que tous les termes de la suite sont strictement positifs.
2. Déterminer la monotonie de la suite (u_n).
3. Montrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n^2 \geqslant 2n + u_0^2$. En déduire la limite de la suite.

Exercice 4 (***)

On définit une suite (u_n) par $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} k!$ (je rappelle que par convention $0! = 1$). Montrer à l'aide d'un encadrement que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{n!} = 1$.

Exercice 5 (***)

On considère une suite (u_n) définie par $u_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$, avec $a \in \mathbb{R}_+$.

1. Montrer que la suite est croissante.
2. Montrer que, $\forall x \geqslant 0$, $\frac{t}{1+t} \leqslant \ln(1+t) \leqslant t$.
3. En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{na}{n+a} \leqslant \ln u_n \leqslant a$.
4. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
5. Quel résultat obtient-on en prenant $a = 1$?

Exercice 6 (*)

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $0 < u_n \leqslant 1$, puis prouver que $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$.

Exercice 7 (**)

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies de la façon suivante : $u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$, et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$. Montrer que ces deux suites sont adjacentes (les curieux seront contents d'apprendre que leur limite commune vaut $\frac{\pi^2}{6}$).

Exercice 8 (**)

On considère la suite (u_n) définie pour $n \geqslant 1$ par $u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{n}{n^2+k}$.

1. Montrer que $\frac{n^2}{n^2+n} \leqslant u_n \leqslant \frac{n^2}{n^2+1}$.
2. Déduire de l'encadrement précédent que la suite est convergente, et préciser sa limite.

Exercice 9 (***)

Soient a et b deux réels vérifiant $0 < a < b$. On définit deux suites de la façon suivante : $u_0 = a$; $v_0 = b$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$.

1. Vérifier que ces deux suites sont bien définies.
2. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$ (pour une fois, pas besoin de récurrence).
3. Déterminer la monotonie de chacune des deux suites.
4. En déduire que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.
5. Écrire un programme Pascal permettant de calculer une valeur approchée de cette limite à ε près (ε étant choisi par l'utilisation). On utilisera une boucle WHILE ou REPEAT.

Exercice 10 (***)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a \neq 1$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 1}{u_n - 1}$.

1. Montrer que la suite est bien définie.
2. Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}$.
3. Étudier également le signe de $f(x) - x$.
4. On suppose $a > 1$. À l'aide des questions précédentes, montrer que $\forall n \geqslant 1$, $u_n \geqslant 2(1 + \sqrt{2})$, puis que la suite est croissante. En déduire sa limite éventuelle.
5. Étudier de même la convergence de la suite quand $a < 1$.

Corrigé de la feuille d'exercices n°6

Exercice 1 (**)

1. Vrai, elle minorée par le plus petit des termes précédant le rang à partir duquel elle est croissante.
2. Faux, par exemple $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge vers 0 mais $u_{n+1} - u_n$ change de signe en permanence.
3. C'est également faux, on peut par exemple prendre $u_n = n^2$ si n est pair, et $u_n = (n-1)^2 - 1$ si n est impair. La suite n'est pas croissante à partir d'un certain rang puisque chaque terme d'indice impair est plus petit que le terme pair qui le précède, et pourtant elle dinverge vers $+\infty$.
4. L'énoncé n'était pas vraiment celui que je voulais mettre, mais c'est faux de toute façon.
5. Faux, par exemple $(-1)^n$ ne converge pas alors que sa valeur absolue est constante égale à 1 (et donc convergente).
6. Vrai, dire que $|u_n - 0| < \varepsilon$ est la même chose que $|u_n| - 0 < \varepsilon$.

Exercice 2 (* à **)

La correction de cet exercice est rédigée à l'aide d'équivalents, qui n'avaient pas encore été vus au moment où nous fait cet exercice en classe, mais c'est de toute façon une bonne idée de le reprendre avec le formalisme des équivalents.

- $2^n - 3^n + 4^n \sim 4^n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n - 3^n + 4^n = +\infty$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (-n+2)e^{-n} = 0$ par croissance comparée.
- $2^n - e^{2n} + 1 \sim -e^{2n}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n - e^{2n} + 1 = -\infty$.
- $\dfrac{n^2 - 3n + 2}{2n^2 + 5n - 34} \sim \dfrac{n^2}{2n^2} = \dfrac{1}{2}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2 - 3n + 2}{2n^2 + 5n - 34} = \dfrac{1}{2}$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln n + e^{-3n} = +\infty$ (il n'y a même pas de forme indeterminée ici).
- $\dfrac{2\sqrt{n} + 3\ln n - 5}{\ln(n^3) - 3n + 2} \sim \dfrac{2\sqrt{n}}{-3n} \sim -\dfrac{2}{3\sqrt{n}}$, donc la limite vaut 0.
- $\sqrt{n^2 - 1} - n = \dfrac{n^2 - 1 - n^2}{\sqrt{n^2 - 1} + n} = -\dfrac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2 - 1} - n = 0$.
- $\dfrac{(n+2)!}{(n^2+1) \times n!} = \dfrac{(n+1)(n+2)n!}{(n^2+1)n!} = \dfrac{n^2 + 3n + 2}{n^2 + 1} \sim \dfrac{n^2}{n^2} = 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n+2)!}{(n^2+1) \times n!} = 1$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-\frac{1}{2n}} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\dfrac{n}{n+2}\right) = 0$, donc la limite recherchée est nulle.

Exercice 3 (**)

1. C'est une récurrence facile : $u_0 > 0$ par hypothèse, et si $u_n > 0$, alors $\dfrac{1}{u_n} > 0$, et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$ est également strictement positif (et bien défini puisque u_n n'est pas nul).
2. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{u_n} > 0$ donc la suite est strictement croissante.
3. Notons P_n la propriété $u_n^2 \geqslant 2n + u_0^2$. pour $n = 0$, elle se réduit à $u_0^2 \geqslant u_0^2$, ce qui est manifestement vrai. Supposons donc, pour un certain entier n, que P_n est vrai. On a alors $u_{n+1}^2 = \left(u_n + \dfrac{1}{u_n}\right)^2 = u_n^2 + 2u_n \times \dfrac{1}{u_n} + \dfrac{1}{u_n^2} = u_n^2 + 2 + \dfrac{1}{u_n^2}$. En utilisant l'hypothèse de récurrence et le fait que $\dfrac{1}{u_n^2} > 0$, on obtient $u_{n+1}^2 > 2n + u_0^2 + 2 = 2(n+1) + u_0^2$, ce qui prouve

exactement la propriété P_{n+1}. D'après le principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout entier n.

La suite (u_n^2) étant minorée par une suite arithmétique de limite $+\infty$, elle diverge vers $+\infty$. Et u_n étant toujours positif, on peut en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 4 (***)

Il est facile de minorer u_n par $n!$ (puisque u_n est constitué d'une somme de termes tous positifs dont l'un vaut $n!$), mais pour la majoration, il ne suffit pas de se contenter de majorer par $n+1$ fois le plus grand terme. Il vaut mieux isoler ce plus grand terme (donc $n!$), et même le deuxième, et majorer le reste : $u_n = n! + (n-1)! + \sum\limits_{k=0}^{k=n-2} k! \leqslant n! + (n-1)! + (n-1)(n-2)!$ (puisqu'il reste $n-1$ termes dont le plus grand vaut $(n-2)!$). On obtient donc $\dfrac{n!}{n!} \leqslant \dfrac{u_n}{n!} \leqslant \dfrac{n!}{n!} + \dfrac{(n-1)!}{n!} + \dfrac{(n-1)(n-2)!}{n!}$, soit $1 \leqslant \dfrac{u_n}{n!} \leqslant 1 + \dfrac{2}{n}$ (les deux derniers termes à droite sont en fait égaux). Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{2}{n} = 1$, on peut conclure à l'aide du théorème des gendarmes que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n!} = 1$. Autrement dit, on a en fait $\sum\limits_{k=0}^{k=n} k! \sim n!$.

Exercice 5 (***)

1. Mea culpa, cette question est beaucoup plus difficile que je ne le pensais au premier abord. On veut montrer, en passant à l'exponentielle, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)\ln\left(1+\dfrac{a}{n+1}\right) \geqslant n\ln\left(1+\dfrac{a}{n}\right)$, ce qui découle du fait que la fonction $f : x \mapsto x\ln\left(1+\dfrac{a}{x}\right)$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. On a $f(x) = x\ln\dfrac{x+a}{x} = x\ln(x+a) - x\ln x$, donc $f'(x) = \ln(x+a) + \dfrac{x}{x+a} - \ln x - 1$, et $f''(x) = \dfrac{1}{x+a} + \dfrac{x+a-x}{(x+a)^2} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x(x+a)+ax-(x+a)^2}{x(x+a)^2} = \dfrac{-a^2}{x(x+a)^2} < 0$. La fonction f' est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Or, $f'(x) = \ln\left(1+\dfrac{a}{x}\right) + \dfrac{x}{x+a} - 1$ a pour limite 0 en $+\infty$. La fonction f' est donc toujours positive, ce dont on déduit que f est bien croissante (ouf...).
2. Le plus simple est de faire deux petites études de fonction : posons sur $g(t) = t - \ln(1+t)$. La fonction g est définie sur $\mathbb{R}_+$ (elle est même définie entre -1 et 0, mais pour ce qu'on noue demande, pas la peine de s'y intéresser), de dérivée $g'(t) = 1 - \dfrac{1}{1+t} = \dfrac{t}{1+t} \geqslant 0$. La fonction g est donc croissante, et comme $g(0) = 0$, elle est toujours positive, ce qui prouve que $\ln(1+t) \leqslant t$ sur $\mathbb{R}_+$.

   De même, on pose $h(t) = \ln(1+t) - \dfrac{t}{1+t}$, fonction dont la dérivée vaut $\dfrac{1}{1+t} - \dfrac{1+t-t}{(1+t)^2} = \dfrac{1+t-1}{(1+t)^2} = \dfrac{t}{(1+t)^2} \geqslant 0$. Cette fonction est donc également croissante, et vérifie aussi $h(0) = 0$, d'où sa positivité sur $\mathbb{R}_+$ et l'encadrement souhaité.
3. On a $\ln u_n = n\ln\left(1+\dfrac{a}{n}\right)$, donc en posant $t = \dfrac{a}{n}$ et en appliquant l'encadrement de la question précédente, $n \times \dfrac{\frac{a}{n}}{1+\frac{a}{n}} \leqslant \ln u_n \leqslant n \times \dfrac{a}{n}$, qu'il suffit de simplifier pour obtenir le résultat demandé.

4. Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{na}{n+a} = a$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que la suite $\ln(u_n)$ converge vers a. La suite (u_n) a donc pour limite e^a.

5. Pour $a = 1$, on obtient le résultat classique suivant : $\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e$.

Exercice 6 (*)

Le fait que u_n soit strictement positif pour $n \geqslant 1$ (légère coquille dans l'énoncé) est absolument évident. De plus, $u_n - 1 = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} - 1 = \frac{n^2 + 2n - (n+1)^2}{(n+1)^2} = \frac{-1}{(n+1)^2} < 0$, donc $u_n < 1$. Le calcul de limite n'utilise absolument pas cet encadrement mais ne pose aucun problème : $u_n = \frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1} \sim \frac{n^2}{n^2} = 1$, donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Exercice 7 (**)

Il y a deux points sur les trois qui sont très faciles à prouver :

- $v_n - u_n = \frac{1}{n}$, donc $\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$.
- $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$, donc la suite (u_n) est croissante.

Ne reste plus qu'à prouver que (v_n) est décroissante : $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - u_n - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2} = \frac{2n + n^2 - n^2 - 2n - 1}{n(n+1)^2} = \frac{-1}{(n+1)^2} < 0$. La suite (v_n) est donc bien décroissante, et les deux suites étant adjacentes, elles convergent donc vers une limite commune.

Exercice 8 (**)

1. Le terme d'indice n de la suite est constitué d'une somme de n réels dont le plus petit est $\frac{n}{n^2+n}$ et le plus gros $\frac{n}{n^2+1}$. On en déduit que $n \times \frac{n}{n^2+n} \leqslant u_n \leqslant n \times \frac{n}{n^2+1}$, d'où l'encadrement demandé.

2. Les deux suites extrêmes ayant pour limite 1, une simple application du théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Exercice 9 (***)

1. Il suffit pour cela de prouver par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$. C'est vrai au rang 0 par hypothèse, et si u_n et v_n sont tous deux strictement positifs, ce sera aussi le cas de $u_n + v_n$ et de $u_n v_n$, donc de u_{n+1} et v_{n+1}. Ainsi, les deux suites sont bien définies.

2. Supposons $n \geqslant 1$ (pour $n = 0$ l'inégalité est vraie par hypothèse). On a $v_n - u_n = \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2} - \sqrt{u_{n-1}v_{n-1}} = \frac{u_{n-1} + v_{n-1} - 2\sqrt{u_{n-1}}\sqrt{v_{n-1}}}{2} = \frac{(\sqrt{u_{n-1}} - \sqrt{v_{n-1}})^2}{2} > 0$, donc $u_n \leqslant v_n$.

3. C'est désormais facile en utilisant le résultat de la question précédente : $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n v_n} - u_n = \sqrt{u_n}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}) > 0$ puisque $v_n > u_n$, donc (u_n) est strictement croissante. De même, $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + v_n}{2} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} < 0$, donc (v_n) est décroissante.

4. On ne peut pas affirmer que les suites sont adjacentes car on ne sait pas si $(u_n - v_n)$ tend vers 0. Par contre, (u_n) étant croissante et majorée par exemple par v_0 (car $u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$ puisque la suite (v_n) est decroissante), le théorème de convergence monotone permet d'affirmer qu'elle est convergente vers une certaine limite l. De même, (v_n) est décroissante et minorée (encore plus simplement, par 0), donc converge vers une limite l'. La suite (v_{n+1}) converge aussi vers l', mais comme $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$, on a donc $l' = \dfrac{l + l'}{2}$, d'où $\dfrac{l'}{2} = \dfrac{l}{2}$, soit $l = l'$. Finalement, les deux suites ont bien la même limite (appelée moyenne arithmético-géométrique des deux réels a et b).
5. Évidemment, sans avoir vu les boucles WHILE et REPEAT, il est plus difficile de répondre à cette question. Vous pourrez revenir dessus très bientôt, voici en tout cas un programme qui effectue ce calcul :

```
PROGRAM arithmeticogeometrique ;
USES wincrt ;
VAR e,a,b,u,v,w : real ;
BEGIN
WriteLn('Choisissez les reels a et b') ;
ReadLn(a,b) ;
WriteLn('Choisissez la precision de la valeur approchee') ;
ReadLn(e) ;
u := a ; v := b ;
WHILE (v-u > e) DO
BEGIN
w := (u+v)/2 ;
u := sqrt(u*v) ;
v := w ;
END ;
WriteLn('La moyenne arithmético-géométrique de ',a,' et ',b,' vaut ',u,' à ',e,' près.') ;
END.
```

Exercice 10 (***)

1. Pour que la suite soit bien définie, il faut que u_n ne soit jamais égal à 1. C'est le cas pour u_0, mais il n'est pas facile de s'en sortir par récurrence ensuite. Constatons que $u_{n+1} = 1 \Leftrightarrow u_n^2 + 1 = u_n - 1 \Leftrightarrow u_n^2 - u_n + 2 = 0$, équation qui a un discriminant négatif et n'admet donc pas de solution. Autrement dit, on ne peut jamais tomber sur la valeur 1 avec cette relation de récurrence, et la suite est donc bien définie.
2. La fonction f admet pour dérivée $f'(x) = \dfrac{2x(x-1) - (x^2+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$. Le numérateur a pour discriminant $\Delta = 8$ et admet deux racines $x_1 = \dfrac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$, et $x_2 = 1 + \sqrt{2}$. La fonction f est strictement croissante sur $]-\infty; 1-\sqrt{2}]$ et sur $[1+\sqrt{2}; +\infty[$, et décroissante sur $[1-\sqrt{2}; 1[$ et sur $]1; 1+\sqrt{2}]$. Elle admet un maximum local en $1-\sqrt{2}$ qui vaut $\dfrac{(1-\sqrt{2})^2+1}{1-\sqrt{2}-1} = \dfrac{4-2\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = 2 - 2\sqrt{2}$; et un minimum local en $1+\sqrt{2}$ qui vaut $\dfrac{(1+\sqrt{2})^2+1}{1+\sqrt{2}-1} = \dfrac{4+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} + 2$.
3. On a $f(x) - x = \dfrac{x^2 - x + 2}{x - 1}$, et on a vu plus haut que le numérateur ne s'annulait jamais, ce dont on déduit qu'il est toujours positif. Si $x < 1$, $f(x)$ est donc inférieur à x, et $f(x) > x$ si $x > 1$.

4. Une récurrence facile permet de prouver que $u_n \geqslant 2\sqrt{2}+2$ dès que $n \geqslant 1$. C'est vrai pour u_1 car $u_1 = f(u_0)$ et que la plus petite valeur prise par f sur l'intervalle $]1; +\infty[$ est $2\sqrt{2}+2$ (question 2). Si on suppose désormais $u_n \geqslant 2\sqrt{2}+2$, on a a fortiori $u_n > 1$, donc $u_{n+1} = f(u_n) \geqslant 2\sqrt{2}+2$, ce qui achève la récurrence. Comme on a toujours $f(x) > x$ quand $x > 1$, on en déduit que $u_{n+1} > u_n$ pour tout entier n, et donc que la suite est strictement croissante. Si elle était convergente, sa limite l vérifierait $f(l) = l$, ce qui n'est pas possible puisque cette équation n'a pas de solution. La suite ne peut donc pas converger ; comme elle est croissante, cela signifie que (u_n) n'est pas majorée et diverge vers $+\infty$.
5. Le principe est exactement le même : on prouve par récurrence que $\forall n \geqslant 1$, $u_n \leqslant 2 - 2\sqrt{2}$ (qui est négatif, donc très inférieur à 1), on en déduit que la suite est décroissante puisque $f(x) < x$ sur l'intervalle où se situent les valeurs de la suite, et enfin que la suite ne peut pas converger, donc diverge vers $-\infty$.

Feuille d'exercices n°7 : Convergence de suites, spécial vacances

ECE3 Lycée Carnot

23 octobre 2009

Exercice 1 (*)

Donner un équivalent, le plus simple possible, de chacune des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{5n - n^2 + 2n^7}{n^8 - 3n + 12}$
2. $u_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n}$
3. $u_n = \dfrac{n^2}{\sqrt{n^2 + n + 1}}$
4. $u_n = e^{-n} + e^{-2n}$
5. $u_n = \dfrac{2\sqrt{n} + e^{3n} - 5\ln n}{n^2 - 3\ln(2n^4)}$
6. $u_n = \dfrac{1}{n^2} + e^{-3n}$
7. $u_n = \ln\left(1 - \dfrac{2}{n^2} + \dfrac{1}{n}\right)$
8. $u_n = \ln(1 + n^3)$
9. $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^n$

Exercice 2 (**)

On considère la suite (S_n) définie pour $n \geqslant 1$ par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
2. À l'aide de la question précédente, déterminer la limite de la suite (S_n).
3. On pose désormais $u_n = S_n - 2\sqrt{n}$. Démontrer à l'aide du théorème de convergence monotone que (u_n) converge.
4. En déduire un équivalent simple de S_n.

Exercice 3 (**)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2^n u_n$. On définit également la suite auxiliaire $v_n = \dfrac{u_n}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}$. Étudier la convergence de la suite (v_n), puis en déduire une équivalent de la suite (u_n).

Exercice 4 (**)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x + \ln x$.

1. Montrer que f est bijective.
2. En déduire que l'équation $f(x) = n$a une unique solution, notée x_n, pour tout entier n (ne cherchez pas à la calculer, vous n'y arriverez pas).
3. Expliquer pourquoi la suite (x_n) est croissante, et quelle est sa limite.
4. Déterminer un équivalent simple de x_n.

Exercice 5 (d'après EML) (**)

On considère la fonction $f : x \mapsto x^2 + 4x + 2$ et une suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ (u_0 étant un réel quelconque).

1. Étudier les variations de la fonction f, et déterminer le nombre d'antécédents par f d'un réel m en fonction des valeurs de m. Résoudre en particulier $f(x) = -1$.
2. Montrer qu'il existe trois valeurs de u_0 pour lesquelles la suite (u_n) est stationnaire (c'est-à-dire qu'elle est constante à partir d'un certain rang).
3. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} + 2 = (u_n + 2)^2$. En déduire la nature de la suite (u_n) selon la valeur de u_0.

Exercice 6 (d'après EDHEC) (***)

On considère, pour tout entier naturel n, la fonction f_n définie par $f_n(x) = x^5 + nx - 1$.

1. Étudier les variations de f_n.
2. Montrer que, $\forall n \geqslant 1$, il existe un unique réel u_n tel que $f_n(u_n) = 0$.
3. Montrer que $u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$ et en déduire la convergence de la suite (u_n).
4. Montrer que $u_n \sim \dfrac{1}{n}$.
5. Déterminer un équivalent simple de $\dfrac{1}{n} - u_n$.

Exercice 7 (***)

Soit (u_n) une suite bornée. On introduit alors deux suites auxiliaires définies par $a_n = \max(u_0, u_1, \dots, u_n)$ et $b_n = \min(u_0, u_1, \dots, u_n)$.

1. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes.
2. Que peut-on dire de la suite (u_n) si elles ont la même limite ?
3. On pose désormais $c_n = \max(u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, \dots, u_{2n})$. Cette suite est-elle nécessairement convergente ?

Exercice 8 (****)

Soit (u_n) une suite convergeant vers une limite finie l. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} u_k$ (autrement dit, v_n est la moyenne des n premiers termes de la suite (u_n)) converge également vers l (commencez par le cas plus facile où $l = 0$, et revenez à la définition de la limite).

Et pour finir en beauté, deux (extraits de) sujets de concours, à peine retouchés (une ou deux questions que vous ne pouvez pas faire ont été supprimées).

EMLyon 1991, Exercice 2 (**)

Soit $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - 1 \end{array}$

I. Etude de f.

1. Former le tableau de variation de f
2. (a) Résoudre l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

   (b) Résoudre l'équation $f(x) \leqslant x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$
3. Tracer la courbe représentative (C) de f dans un repère orthonormé d'unité 5cm, et préciser la position relative de (C) et de la première bissectrice (on ne cherchera pas d'éventuels points d'inflexion)

II. Etude d'une suite récurrente.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = f(u_n)$

1. Que dire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $u_0 = -1$ ou $u_0 = 0$?
2. On suppose ici $u_0 < -1$.

   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n < -1$

   (b) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

   (c) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel que l'on déterminera.
3. On suppose ici $-1 < u_0 < 0$.
   Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
4. On suppose ici $u_0 > 0$.
   Sans en donner de démonstration, quel résultat obtiendrait-on concernant la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans ce cas ?

Maths III HEC/ESCP 2002, Parties A et B du problème (***)

Pour toutes suites numériques $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on définit la suite $u \times v = w$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{n-k}$$

Partie A : Exemples

1. **Premiers exemples**
   Pour tout entier naturel n, calculer w_n en fonction de n dans chacun des cas suivants :

   (a) pour tout entier naturel n, $u_n = 2$ et $v_n = 3$.

   (b) pour tout entier naturel n, $u_n = 2^n$ et $v_n = 3^n$.

2. **Programmation**

   Dans cette question, les suites u et v sont définies par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \ln(n+1)$ et $v_n = \dfrac{1}{n+1}$.
   Écrire un programme en Turbo-Pascal qui demande à l'utilisateur une valeur de l'entier naturel n, qui calcule et affiche les valeurs $w_0,\ w_1,\ \ldots,\ w_n$.

3. **Un résultat de convergence**

   Dans cette question, la suite u est définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et v est une suite de réels positifs, décroissante à partir du rang 1 et de limite nulle.

   (a) Établir, pour tout couple d'entiers naturels (n, m) vérifiant $n < m$, l'inégalité :
   $$\sum_{k=n+1}^{m} u_k \leqslant u_n$$
   (b) Soit n un entier strictement supérieur à 1. Prouver les inégalités :
   $$w_{2n} \leqslant v_0\, u_{2n} + 2v_n + v_1\, u_n \quad \text{et} \quad w_{2n+1} \leqslant v_0\, u_{2n+1} + 2v_{n+1} + v_1\, u_n$$
   (c) En déduire que les deux suites $(w_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0 ainsi que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (d) Soit u' la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u'_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$. À l'aide de la question précédente, montrer que la suite $u' \times v$ est convergente et de limite nulle.

Partie B : Application à l'étude d'un ensemble de suites

Dans cette partie, A désigne l'ensemble des suites $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs vérifiant :
$$\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad a_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1})$$

1. Montrer que toute suite décroissante de réels positifs est élément de A et qu'une suite strictement croissante ne peut appartenir à A.
2. Soit $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}^{\times},\ z_{n+1} = \dfrac{1}{2}(z_n + z_{n-1})$.

   (a) Montrer qu'il existe deux constantes réelles α et β telles que l'on a :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_n = \alpha + \beta\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$
   (b) En déduire qu'il existe des suites appartenant à A et non monotones.

3. Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de A et b la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.

   On définit alors la suite c par : $c_0 = a_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^{\times},\ c_n = a_n + \dfrac{1}{2}a_{n-1}$.

   (a) Montrer que la suite c est décroissante à partir du rang 1 et qu'elle converge vers un nombre ℓ que l'on ne cherchera pas à calculer.

   (b) Pour tout entier naturel n, établir l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n-k} = a_n$.
   Que peut-on en déduire pour les suites $b \times c$ et a ?

   (c) Soit ε la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ \varepsilon_n = c_n - \ell$ et d la suite $b \times \varepsilon$.
   En utilisant le résultat de la question **3**. de la Partie **1**, montrer que la suite d converge vers 0.

   (d) Pour tout entier naturel n, établir l'égalité : $d_n = a_n - \dfrac{2}{3}\ell\left(1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$.
   En déduire que la suite a converge et préciser sa limite.

Corrigé de la feuille d'exercices n°7

Exercice 1 (*)

1. $\dfrac{5n-n^2+2n^7}{n^8-3n+12} \sim \dfrac{2n^7}{n^8} \sim \dfrac{2}{n}$
2. $\sqrt{n+3}-\sqrt{n} = \dfrac{n+3-n}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}} = \dfrac{3}{\sqrt{n}(\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1)} \sim \dfrac{3}{2\sqrt{n}}$
3. $\dfrac{n^2}{\sqrt{n^2+n+1}} \sim \dfrac{n^2}{n} \sim n$
4. $e^{-n}+e^{-2n} \sim e^{-n}$
5. $\dfrac{2\sqrt{n}+e^{3n}-5\ln n}{n^2-3\ln(2n^4)} \sim \dfrac{e^{3n}}{n^2}$
6. $\dfrac{1}{n^2}+e^{-3n} \sim \dfrac{1}{n^2}$
7. $\ln\left(1-\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{1}{n}\right) \sim -\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{1}{n} \sim \dfrac{1}{n}$
8. $\ln(1+n^3) \sim n^3$
9. $\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n = e^{n\ln(1+\frac{1}{n^2})}$. Or $n\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right) \sim n\times\dfrac{1}{n^2} \sim \dfrac{1}{n}$. On ne peut pas passer cet équivalent à l'exponentielle, mais on peut en déduire que la suite (u_n) tend vers 1 (ce qui est dans l'exponentielle tend vers 0), donc $u_n \sim 1$.

Exercice 2 (**)

1. En effet, $2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \dfrac{2(n+1-n)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$. Or, comme $\sqrt{n}+\sqrt{n} \leqslant \sqrt{n}+\sqrt{n+1} \leqslant \sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}$, on a $\dfrac{1}{2\sqrt{n+1}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$, d'où l'encadrement souhaité en multipliant tout par 2.

2. En utilisant l'inégalité de droite de la question précédente, on obtient $2\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) \leqslant S_n$. Or, la somme de gauche est une somme télescopique égale à $2(\sqrt{n+1}-1) = 2\sqrt{n+1}-2$. Cette expression a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, donc par théorème de comparaison, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ (inutile d'utiliser l'inégalité de gauche de la question 1 ici, celle de droite suffit...).

3. Commençons par déterminer la monotonie de la suite (u_n) : $u_{n+1}-u_n = S_{n+1}-S_n-2\sqrt{n+1}+2\sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}-2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$, expression négative d'après la question 1. La suite (u_n) est donc décroissante. On a vu par ailleurs que $S_n \geqslant 2\sqrt{n+1}-2$, donc a fortiori $S_n \geqslant 2\sqrt{n}-2$, donc $u_n \geqslant -2$. La suite (u_n) étant décroissante et minorée, elle est convergente.

4. Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n-2\sqrt{n} = l \in \mathbb{R}$, on en déduit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n-2\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} = 0$, soit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{2\sqrt{n}} = 1$. Autrement dit, on a prouvé que $S_n \sim 2\sqrt{n}$.

Exercice 3 (**)

Cherchons donc à exprimer v_{n+1} en fonction de v_n : $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}}{2^{\frac{n(n+1)}{2}}} = \dfrac{2^n u_n}{2^{\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}}} = \dfrac{u_n}{2^{\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2}}} = \dfrac{u_n}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}} = v_n$. La suite (v_n) est donc tout simplement constante, égale à $v_0 = u_0 = 1$, donc $u_n = v_n \times 2^{\frac{n(n-1)}{2}} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Exercice 4 (**)

1. La fonction f est somme de deux fonctions strictement croissantes, donc elle-même strictement croissante donc injective. De plus, un calcul très simple donne $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, donc f est surjective, donc bijective de $\mathbb{R}^*$ sur $\mathbb{R}$.
2. L'entier n étant un réel comme un autre, il a un unique antécédent par la fonction bijective f, ce qui signifie bien que l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution.
3. Par définition, $f(x_n) = n$ et $f(x_{n+1}) = n + 1$. Or, la fonction f est croissante et on a bien sûr $n < n + 1$. Il s'ensuit que $x_n < x_{n+1}$, et donc que la suite (x_n) est strictement croissante. Pour prouver que la suite tend vers $+\infty$ (ce qui est intuitivement assez clair), on peut constater que $f\left(\dfrac{n}{2}\right) = \dfrac{n}{2} + \ln \dfrac{n}{2} < \dfrac{n}{2} + \dfrac{n}{2} = n = f(x_n)$, donc $\dfrac{n}{2} < x_n$, et le théorème de comparaison donne la limite de la suite.
4. Comme la suite tend vers $+\infty$, on peut dire que $\ln(x_n) = o(x_n)$. Or, on sait que $f(x_n) = x_n + \ln(x_n) = n$, donc $x_n + o(x_n) = n$. Cela signifie que $x_n \sim n$.

Exercice 5 (d'après EML) (**)

1. Étudier une fonction de second degré ne devrait pas poser trop de problème : $f'(x) = 2x + 4$ s'annule en -2, la fonction est donc strictement décroissante sur $]-\infty; -2]$ et strictement croissante sur $[-2; +\infty[$. Comme $f(-2) = -2$, on en déduit que tous les réels strictement supérieurs à -2 ont deux antécédents par f, tous ceux strictement inférieurs à -2 n'ont pas d'antécédent, et -2 a un unique antécédent, à savoir -2. En particulier, $f(x) = -1$ équivaut à $x^2 + 4x + 3 = 0$, équation dont le discriminant vaut $\Delta = 16 - 12 = 4$, et qui admet donc deux solutions $x_1 = \dfrac{-4-2}{2} = -3$ et $x_2 = \dfrac{-4+2}{2} = -1$.
2. Si la suite est stationnaire, c'est qu'il existe une valeur de n à partir de laquelle les termes sont constants, et en particulier pour laquell $u_n = u_{n+1}$, donc $u_n = f(u_n)$. Or, $f(x) = x \Rightarrow x^2 + 3x + 2 = 0$, équation qui a pour discriminant $\Delta = 9 - 8 = 1$, et pour solutions $x_1 = -2$ et $x_2 = -1$ (on savait déjà que ces deux valeurs étaient solutions de l'équation après les calculs de la première question). Conclusion, on a nécessairement $u_n = -2$ ou $u_n = -1$. Mais comme $u_n = f(u_{n-1})$, u_{n-1} doit être un antécédent de -2 ou de -1, c'est-à-dire être égal à -2, -3 ou -1 (toujours d'après la question précédente). Mais alors u_{n-2} doit lui-même être un antécédent de -1 ou de -2 (pour -3 il n'y a pas d'antécédent) donc égal à -1, -2 ou -3 etc ; jusqu'à être remonté à u_0. Pour rédiger ce raisonnement de façon rigoureuse, deux solutions : soit on fait une récurrence descendente (on part de u_n pour revenir à u_0, un peu inhabituel), soit on fait une récurrence classique visant à montrer que, si $u_0 \notin \{-3; -2; -1\}$, alors on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \notin \{-3; -2; -1\}$, ce qui prouve que, si u_0 n'est pas une des trois valeurs en question, la suite n'est pas stationnaire. Autrement dit, on prouve la contraposée de ce qui est demandé dans cette question. La récurrence ne pose pas de problème particulier, et les trois valeurs initiales pour lesquelles la suite stationne sont donc -1 (suite constante égale à -1), -2 (suite constante égale à -2) et -3 (suite stationnaire à -1 à partir du rang 1).

3. C'est un calcul tout bête : $u_{n+1} + 2 = f(u_n) + 2 = u_n^2 + 4u_n + 2 + 2 = (u_n + 2)^2$. Posons $v_n = u_n + 2$ pour plus de clarté, on a donc $v_{n+1} = v_n^2$. La suite (v_n) prend donc des valeurs positives à partir de v_1, et une récurrence simple montre que, si $v_1 > 1$, alors (v_n) ne prend que des valeurs supérieurs à 1 et sera strictement croissante ; au contraire, si $v_1 < 1$, alors v_n sera toujours inférieur à 1 et la suite sera strictement décroissante. Dans ce deuxième cas, (v_n) est décroissante minorée, donc converge vers un réel l vérifiant $l = l^2$, donc égal à 0 ou 1. Comme $v_n \leqslant v_1 < 1$, on en déduit que (v_n) converge vers 0. Par contre, si $v_1 > 1$, la suite ne peut pas converger vers 0 ou 1 ; étant croissante elle diverge donc vers $+\infty$. On aura $v_1 < 1$ si $v_0^2 < 1$, c'est-à-dire si $v_0 \in]-1; 1[$

   Ne reste plus qu'à revenir à $u_n = v_n - 2$. Si $u_0 \in]-3; -1[$, $v_0 \in]-1; 1[$, donc la suite (v_n) converge vers 0, et (u_n) converge vers -2. Si $u_0 = -3$ ou $u_0 = -1$, on a déjà vu que la suite était stationnaire. Enfin, si $u_0 < -3$ ou $u_0 > -1$, on aura $v_1 > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Exercice 6 (d'après EDHEC) (***)

1. Calculons donc la dérivée $f_n'(x) = 5x^4 + n$. Cette dérivée est toujours strictement positive (sauf en 0 pour $n = 0$), la fonction est donc strictement croissante, quel que soit l'entier n.
2. Comme de plus $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, chaque fonction f_n est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Chaque réel a donc un unique antécédent par f_n et en particulier l'équation $f_n(n) = 0$ admet une unique solution.
3. Constatons que $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n^5} + 1 - 1 = \dfrac{1}{n^5} > 0$. Comme la fonction f_n est strictement croissante, et $f_n(u_n) = 0$, on en déduit que $u_n < \dfrac{1}{n}$. Notons par ailleurs que $f_n(0) = -1$, donc par un raisonnement similaire on a toujours $0 < u_n$. Le théorème des gendarmes permet donc d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
4. On sait que $u_n^5 + nu_n - 1 = 0$, donc $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{u_n^5}{n}$. Comme (u_n) tend vers 0, $\dfrac{u_n^5}{n} = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, donc $u_n \sim \dfrac{1}{n}$.
5. Comme on vient de le voir, $\dfrac{1}{n} - u_n = \dfrac{u_n^5}{n} \sim \dfrac{\frac{1}{n^5}}{n} \sim \dfrac{1}{n^6}$.

Exercice 7 (***)

1. La suite (a_n) est croissante (en effet, le plus grand des $n+1$ premiers termes de la suite est nécessairement plus grand que le plus grand des n premiers) et majorée par n'importe quel majorant de (u_n), donc elle converge. De même, (b_n) est décroissante et minorée par les minorants de (u_n) donc converge également.
2. On a assez clairement $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \geqslant b_n$. Si jamais il existe un entier n_0 pour lequel $a_{n_0} > b_{n_0}$, alors on aura $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \geqslant a_{n_0}$ (puisque la suite est croissante), et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n \leqslant b_{n_0}$, donc les deux suites auront des limites distinctes. Autrement dit, pour que les suites aient la même limite, on doit avoir $a_n = b_n$ pour tout entier n, c'est-à-dire que le maximum et le minimum des n premiers termes de la suite (u_n) sont toujours égaux. Ceci n'est possible que si tous ces termes sont égaux entre eux, c'est-à-dire quand (u_n) est une suite constante.
3. La suite (c_n) n'est pas toujours convergente, même lorsque (u_n) est bornée. Prenons par exemple la suite (u_n) qui vaut 1 lorsque n est une puissance de 10 et 0 sinon (autrement dit $u_{10} = u_{100} = u_{1\ 000} = \cdots = 1$ et tous les autres termes sont nuls). Si l'on regarde la suite (c_n), elle est constituée de termes valant tous 0 et 1, mais n'est pas stationnaire (on a par exemple $c_{10^k} = 1$

mais $c_{10^k+1} = 0$ car il n'y a pas de puissance de 10 entre $10^k + 1$ et $2(10^k + 1)$), donc ne peut pas converger.

Exercice 8 (****)

Supposons donc que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, et choisissons un $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite, il existe un entier n_0 à partir duquel on aura $|u_n| < \varepsilon$. Découpons alors v_n en deux parties : ce qui se passe avant n_0 et après n_0 : si $n > n_0$, $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} u_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n_0} u_k + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{k=n} u_k$. La première somme est une constante (on peut modifier n, mais n_0, lui, est fixé), donc, quand on la divise par n, ça va finir par se rapprocher de 0. Autrement dit, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n_1$, $\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{k=n_0} u_k\right| < \varepsilon$. Quand à la deuxième somme, elle est constituée de $n - n_0$ termes qui sont tous inférieurs (en valeur absolue) à ε, donc sa valeur absolue est inférieure à $(n - n_0)\varepsilon$, d'où $\frac{1}{n}\left|\sum_{k=n_0+1}^{k=n} u_k\right| \leqslant \frac{n-n_0}{n}\varepsilon \leqslant \varepsilon$ (puisque $\frac{n-n_0}{n} \leqslant 1$). Conclusion, lorsque $n \geqslant \max(n_0; n_1)$, on a $|v_n| \leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$. Ceci suffit à prouver que la suite (v_n) tend vers 0, et a donc bien la même limite que (u_n).

Passons désormais au cas général (qui va être facile en fait), c'est à dire lorsque $\lim_{n\to+\infty} u_n = l \neq 0$. Posons $w_n = u_n - l$, cette suite auxilaire a pour limite 0, donc on peut lui appliquer ce qu'on vient de démontrer : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} w_k = 0$. Or, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} w_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}(u_k - l) = \frac{1}{n}\left((\sum_{k=1}^{k=n} u_k) - nl\right) = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} u_k\right) - l$. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} u_k = l$, ce qu'on voulait prouver. Note finale : ce résultat est connu sous le nom de théorème de Cesaro, il stipule que la moyenne des n premiers termes d'une suite convergente a la même limite que la suite elle-même.

EMLyon 1991, Exercice 2 (**)

I. Etude de f.

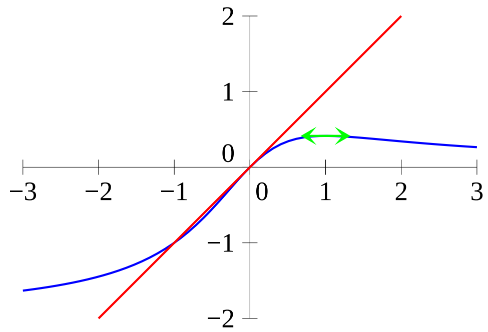
1. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{2x(x+1)}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{x^2+1-x(x+1)}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1-x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$. La fonction f est donc strictement croissante sur $]-\infty; 1]$ et strictement décroissante sur $[1; +\infty[$. Elle admet un minimum global pour $x = 1$, de valeur $f(1) = \frac{2}{\sqrt{2}} - 1 = \sqrt{2} - 1$. De plus, on a $f(x) = \frac{x(1+\frac{1}{x})}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} - 1$, donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 - 1 = 0$, et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1 - 1 = -2$ (rappelons au cas où que $\frac{x}{|x|}$ est égal à 1 si x est positif, et à -1 si x est négatif). D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$	-2	$\nearrow$	$\sqrt{2}-1$	$\searrow$	0

2. (a) Si $f(x) = x$, on peut écrire $\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = x+1$, ou encore $(x+1)(\sqrt{x^2+1}-1) = 0$. on a donc soit $x+1 = 0$, c'est-à-dire $x = -1$, soit $\sqrt{x^2+1} = 1$, ce qu'on peut élever au carré pour obtenir $x^2+1 = 1$, d'où $x^2 = 0$. On a finalement deux solutions à l'équation $f(x) = x$: $\mathcal{S} = \{-1; 0\}$.

   (b) En reprenant le calcul précédent, il faut déterminer le signe de $(x+1)(\sqrt{x^2+1}-1)$. Comme $x^2+1 \geqslant 1$ pour tout réel, $\sqrt{x^2+1}-1 \geqslant 0$, donc seul le signe de $x+1$ importe. On obtient que $f(x) \leqslant x$ sur l'intervalle $[-1; +\infty[$.

3. Voici une allure de la courbe, ainsi que la première bissectrice :



II. Etude d'une suite récurrente.

1. Ces deux valeurs vérifiant $f(x) = x$, la suite sera constante égale à -1 ou 0 respectivement (on peut faire une récurrence très facile si on tient à faire une preuve très rigoureuse).

2. (a) Prouvons par récurrence la propriété P_n : $u_n < -1$. Par hypothèse, P_0 est vraie, et si on suppose P_n vérifiée, on a donc $u_n < -1$, et d'après le tableau de variations de la fonction f, $f(u_n) < f(-1) = -1$, donc $u_{n+1} = f(u_n) < -1$. Ceci prouve P_{n+1} et achève la récurrence.

   (b) On a vu plus haut que $\forall x < -1$, $f(x) > x$, donc $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n > 0$ si $u_n < -1$ comme on vient de le prouver. Conclusion : la suite (u_n) est strictement croissante.

   (c) La suite est croissante et majorée par -1, elle converge donc. Comme nous avons affaire à suite récurrente et que f est continue, sa limite l vérifie $f(l) = l$, donc ne peut être égale qu'à -1 ou 0. Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < -1$, on aura nécessairement $l \leqslant -1$, donc la suite (u_n) converge vers -1.

3. Le raisonnement est très similaire à celui de la question précédente. Commençons par prouver par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 < u_n < 0$. C'est vrai au rang 0 par hypothèse, et si on le suppose vérifié pour u_n, alors (toujours en utilisant le tableau de variations de f), $f(-1) < f(u_n) < f(0)$, c'est-à-dire que $-1 < u_{n+1} < 0$, ce qui achève la récurrence.

   On constate ensuite que, comme $f(x) - x < 0$ sur l'intervalle $]-1; 0[$, la suite (u_n) sera strictement décroissante. Étant minorée par -1, elle converge donc vers une limite l'. Comme la suite est decroissante, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_0$, donc par passage à la limite $l \leqslant u_0 < 0$. La suite (u_n) converge donc vers 1.

4. C'est toujours le même principe : la suite ne prendra que des valeurs strictement positives, et sera décroissante, donc converge, et la limite ne peut être que 0.

Maths III HEC/ESCP 2002, Parties A et B du problème (***)

Partie A : Exemples

1. (a) On a dans ce cas $w_n = \sum_{k=0}^{k=n} 2 \times 3 = 6(n+1)$.

   (b) Dans ce deuxième exemple $w_n = \sum_{k=0}^{k=n} 2^k \times 3^{n-k} = 3^n \sum_{k=0}^{k=n} 2^k \times 3^{-k} = 3^n \sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{2}{3}\right)^k =$ $3^n \frac{1-(\frac{2}{3})^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} = 3^{n+1}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) = 3^{n+1} - 2^{n+1}$.

2.
```
PROGRAM suites;
USES wincrt;
VAR i,j,n : integer; w : real;
BEGIN
WriteLn('Choisissez l'entier n');
readLn(n);
FOR i := 0 TO n DO
BEGIN
w := 0;
FOR j := 0 TO i DO w := w+ln(j+1)/(i-j+1);
END;
END.
```

3. (a) On calcule $\sum_{k=n+1}^{k=m} u_k = \sum_{k=n+1}^{k=m} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{k=m-n-1} \frac{1}{2^{n+1+k}} = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{k=m-n-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1-\frac{1}{2^{m-n}}}{1-\frac{1}{2}} =$ $\frac{1}{2^n}\left(1-\frac{1}{2^{m-n}}\right) = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^m} < \frac{1}{2^n} = u_n$, donc l'inégalité demandée est vraie.

   (b) Il s'agit « simplement » de découper la somme constituant w_{2n} en morceaux et de faire les bonnes majorations : $w_n = \sum_{k=0}^{k=2n} u_k v_{2n-k} = \sum_{k=0}^{k=n} u_k v_{2n-k} + \sum_{k=n+1}^{k=2n-1} u_k v_{2n-k} + u_{2n} v_0$. La première somme est égale à $u_0 v_{2n} + u_1 v_{2n-1} + \cdots + u_n v_n$. Comme la suite (v_n) est supposée décroissante et que tous les termes de (u_n) sont positifs, elle est inférieure ou égale à $(u_0 + u_1 + \cdots + u_n)v_n = u_0 v_n + v_n \sum_{k=1}^{k=n} u_k \leqslant u_0 v_n + u_0 v_n = 2v_n$ (cette dernière inégalité découle de la question précédente). De même, en utlisant la décroissance de (v_n), la deuxième somme est inférieure ou égale à $v_1 \sum_{k=n+1}^{k=2n-1} u_k \leqslant v_1 u_n$ (toujours d'après la question précédent. En additionnant ces majorations, on obtient bien $w_{2n} \leqslant 2v_n + v_1 u_n + v_0 u_{2n}$.

   La deuxième majoration est du même style : $w_{2n+1} = \sum_{k=0}^{k=n} u_k v_{2n+1-k} + \sum_{k=n+1}^{k=2n} u_k v_{2n+1-k} +$ $u_{2n+1} v_0 \leqslant v_{n+1} u_0 + v_{n+1}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) + v_1 \sum_{k=n+1}^{k=2n} u_k + u_{2n+1} v_0 \leqslant 2v_{n+1} + v_1 u_n +$ $v_0 u_{2n+1}$.

   (c) Les deux suites (u_n) et (v_n) ont pour limite 0 (pour (v_n), ça fait partie des hypothèses, et pour (u_n) c'est une conséquence du fait qu'il s'agit d'une suite géométrique de raison

$\frac{1}{2}$). On en déduit aisément que $\lim_{n\to+\infty} v_0u_{2n} + 2v_n + v_1u_n = 0$, et pareil pour $2v_{n+1} + v_1u_n + v_0u_{2n+1}$. Comme de plus tous les termes de la suite (w_n) sont positifs (ils sont constitués d'une somme de réels positifs), le théorème des gendarmes permet de dire que $\lim_{n\to+\infty} w_{2n} = \lim_{n\to+\infty} w_{2n+1} = 0$. Autrement dit, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 à partir duquel tous les termes pairs de la suite sont inférieurs à ε, et un entier n_1 à partir duquel tous les termes impairs aussi. Quand n est plus grand que le plus grand de ces deux entiers, tous les termes de la suite deviennent donc inférieurs à ε, ce qui prouve que $\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$.

(d) D'après l'inégalité triangulaire, on aura $0 \leqslant |(u' \times v)_n| = \left|\sum_{k=0}^{k=n}\left(-\frac{1}{2}\right)^k v_{n-k}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{k=n}\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^k v_{n-k}\right| = \sum_{k=0}^{k=n}\frac{1}{2^k}v_{n-k} = w_n$. Comme on vient de voir que la suite (w_n) convergeait vers 0, le théorème des gendarmes nous donne la convergence de $(|u' \times v|)$, et donc de $(u' \times v)$, vers 0.

Partie B : Application à l'étude d'un ensemble de suites

1. Si (u_n) est une suite décroissante, on a $\frac{1}{2}(u_n + u_{n-1}) \geqslant \frac{1}{2}(a_n + a_n) = a_n \geqslant a_{n+1}$, donc la suite appartient effectivement à A. Au contraire, si (u_n) est strictement croissante, on aura toujours $\frac{1}{2}(u_n + u_{n-1}) < u_n < u_{n+1}$, donc la suite n'appartient pas à A.

2. (a) La suite est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$. Son discriminant vaut $\Delta = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$, donc elle admet deux racines $r = \frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{2} = 1$ et $s = \frac{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{2} = -\frac{1}{2}$. Le terme général de la suite est donc bien de la forme $z_n = \alpha + \beta\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

   (b) La suite définie par $u_n = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$, par exemple, appartient à A (elle vérifie la récurrence linéaire de la question précédente, et on vérifie facilement que ses termes sont tous positifs), mais n'est pas monotone puisque les termes d'indices pairs de la suites sont plus grands que 1 et les termes d'indices impairs plus petits que 1.

3. (a) Calculons donc, pour $n \geqslant 1$, $c_{n+1} - c_n = a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n - a_n - \frac{1}{2}a_{n-1} = a_{n+1} - \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1}) \leqslant 0$ puisque $(a_n) \in A$. La suite (c_n) est donc décroissante. Comme elle est par ailleurs constituée de termes positifs (puisque c'est le cas de (a_n)), elle est minorée, donc elle converge.

   (b) Il semble assez naturel de procéder à une récurrence. Pour $n = 0$, l'égalité stipule que $\left(-\frac{1}{2}\right)^0 c_0 = a_0$, ce qui est effectivement vrai. Supposons désormais l'égalité vérifiée au rang n, alors $\sum_{k=0}^{k=n+1}\left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n+1-k} = c_{n+1} + \sum_{k=0}^{k=n}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1} c_{n-k} = c_{n+1} - \frac{1}{2}a_n = a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{2}a_n = a_{n+1}$. La propriété est donc vérifiée au rang $n+1$, et la récurrence achevée. Ca calcul prouve que les suites $b \times c$ et a sont tout simplement identiques.

   (c) La suite (u_n) convergeant vers l, la suite ε a pour limite 0. De plus, elle est décroissante à partir du rang 1 tout comme (u_n), donc tous ses termes sont positifs (sinon elle ne pourrait pas converger vers 0). Elle vérifie donc les hypothèses faites sur la suite (v_n) dans la partie précédente, et on peut en conclure que $\lim_{n\to+\infty} d_n = 0$.

(d) Ce n'est pas si dur que ça en a l'air : $d_n = \sum_{k=0}^{k=n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k (c_{n-k} - l) = \sum_{k=0}^{k=n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n-k} - l \sum_{k=0}^{k=n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = a_n - l \frac{1 - (-\frac{1}{2})^{n+1}}{1 + \frac{1}{2}} = a_n + \frac{3}{2} l \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$. On peut également écrire que $a_n = d_n + \frac{3}{2} l \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$.

La toute dernière question est un simple calcul de limite : on sait que $\lim_{n \to +\infty} d_n = 0$, et $\lim_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ (suite géométrique), donc $\lim_{n \to +\infty} a_n = \frac{2}{3} l$.

Feuille d'exercices n°8 : Dénombrement

ECE3 Lycée Carnot

6 novembre 2009

Exercice 1 (**)

Une urne contient cinq boules blanches et huit boules noires. On tire successivement et avec remise quatre boules dans l'urne. Quel est le nombre de tirages vérifiant chacune des conditions suivantes :

- au moins une boule blanche a été tirée
- une boule noire au plus a été tirée
- trois boules noires et une boule blanche ont été tirées dans cet ordre
- deux boules noires et deux boules blanches ont été tirées

Exercice 2 (**)

Dans un jeu de tarot, il y a 21 atouts. On en tire (simultanément) cinq au hasard. Combien y a-t-il de tirages pour lesquels :

- au moins un atout est un multiple de cinq ?
- il y a exactement un multiple de cinq et un multiple de trois ?
- on a tiré le 1 ou le 21 ?

Exercice 3 (*)

Une assemblée est constituée de 200 membres. Elle doit élire une commission constituée de trois parlementaires (chaque membre vote donc pour trois personnes). On s'intéresse au nombre de membres ayant voté pour trois candidats qu'on désignera par A, B et C (et qui ne sont pas les seuls candidats). On sait que 112 membres ont voté pour A, 67 pour A et B, 32 pour A et C, 12 pour A, B et C, 5 pour B et C mais pas pour A, 56 pour C mais pas pour A ni B, et 22 pour B mais pas pour A.

1. Combien ont voté pour A mais pas pour B ?
2. Combien ont voté pour C ?
3. Combien n'ont voté pour aucun des trois candidats ?
4. Combien ont voté uniquement pour A ?

Exercice 4 (** à ***)

On tire 5 cartes dans un jeu de 32 cartes usuel. Combien y a-t-il de tirages possibles vérifiant les conditions suivantes :

- Aucune condition.

- Il y a deux Rois parmi les cinq cartes tirées.
- Il y a au moins un pique parmi les cartes tirées.
- Il y a un As et deux carreaux parmi les cartes tirées.
- Il n'y a pas de cartes en-dessous du 9 parmi les cartes tirées.
- Les cinq cartes tirées forment deux paires (mais pas de brelan).
- Les cinq cartes tirées sont de la même couleur.
- Les cinq cartes tirées forment une quinte flush (cinq cartes qui se suivent dans la même couleur).

Exercice 5 (***)

Soit E un ensemble fini comportant 6 éléments. On cherche à déterminer le nombre de couples de parties (A, B) de E vérifiant $A \cup B = E$ (par exemple, si $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $A = \{1; 2; 3; 5\}$ et $B = \{2; 4; 5; 6\}$ constituent un couple possible).

1. Rappeler quel est le nombre de parties de E ayant 2 élements. Si on fixe une telle partie A, combien peut-on trouver de parties B vérifiant $A \cup B = E$?
2. Faire le même raisonnement pour les parties à 0, 1, 3, 4, 5 et 6 éléments de E.
3. En déduire la solution du problème posé.
4. Généraliser au cas où l'ensemble fini E possède n éléments (donner le résultat sous forme d'une somme puis la calculer à l'aide du binôme de Newton).

Exercice 6 (*)

Calculer le nombre d'anagrammes des mots MISSISSIPI et ABRACADABRA.

Exercice 7 (**)

De combien de manières peut-on classer quatre personnes en admettant qu'il puisse y avoir des ex æquo ?

Exercice 8 (**)

On lance n fois de suite un dé à 4 faces et on note p_n la probabilité que chacun des quatre résultats possibles apparaisse au moins une fois lors de ces n lancers.

1. Quel est le nombre de tirages possibles ?
2. Dénombrer les tirages pour lesquels chacun des quatre chiffres apparait au moins une fois, et en déduire p_n (il suffit de diviser le nombre de cas favorables, que vous venez de calculer, par le nombre total de tirages possibles).
3. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$. Que peut-on en déduire ?
4. Déterminer à l'aide de la calculatrice la plus petite valeur de n pour laquelle $p_n \geqslant 0.9$.

Exercice 9 (*)

Développer les expressions suivantes : $(x - 3)^5$; $(2x + 3y)^3$; $(x - 1)^7$.

Exercice 10 (***)

Donner une expression simple des sommes $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k$; $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ et $\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$ (pour les deux dernières, il est fortement conseillé de partir de la formule du binome appliquée à $(1+x)^n$, où x est un réel quelconque).

Exercice 11 (*)

Soient p, q et n trois entiers tels que $p+q+2 \leqslant n$. Montrer que $\binom{n}{2} - \binom{n-p}{2} - \binom{n-q}{2} + \binom{n-p-q}{2} = pq$.

Corrigé de la feuille d'exercices n°8

Exercice 1 (**)

Commençons par remarquer qu'il y a au total $13^4 = 28\ 561$ tirages possibles (ce sont des listes).

- Au moins une boule blanche : on passe par le complémentaire, il y a 8^4 tirages ne comportant que des boules noires, donc $13^4 - 8^4 = 24\ 465$ tirages avec au moins une boule blanche.
- Au plus une boule noire : on sépare en deux cas. Il y a soit zéro boule noire (5^4 cas) soit une boule noire ($5^3 \times 8 \times \binom{4}{1}$, le coefficient binomial étant là pour le choix de la position de la boule noire), donc $5^4 + 5^3 \times 8 \times \binom{4}{1} = 4\ 625$ tirages au total.
- Trois boules noires puis une blanche : $8^3 \times 5 = 2\ 560$ tirages (pas de choix pour l'ordre ici).
- Deux noires et deux blanches : $8^2 \times 5^2 \times \binom{4}{2} = 9\ 600$ tirages possibles (encore une fois, le coefficient binomial correspond au nombre de choix pour les deux boules blanches sur les quatre tirages).

Exercice 2 (**)

Il y a au total $\begin{pmatrix} 21 \\ 5 \end{pmatrix}$ tirages possibles.

- Il y a 17 atouts qui ne sont pas multiples de 5, donc $\begin{pmatrix} 17 \\ 5 \end{pmatrix}$ tirages qui ne contiennent aucun multiple de 5. Par passage au complémentaire, il reste donc $\begin{pmatrix} 21 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 17 \\ 5 \end{pmatrix}$ tirages avec au moins un multiple de 5.
- Un multiple de cinq et un de trois : il faut distinguer le cas où on tire le 15 (qui est le seul multiple de cinq et de trois à la fois) et celui où les deux multiples sont différents. Sachant qu'il y a onze atouts qui ne sont multiples ni de cinq ni de trois, on a $\begin{pmatrix} 11 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix}$ tirages possibles.
- Ni le 1 ni le 21 : par passage au complémentaire, $\begin{pmatrix} 21 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 19 \\ 5 \end{pmatrix}$ tirages.

Exercice 3 (*)

1. On a assez simplement $|A \backslash B| = |A| - |A \cap B| = 112 - 67 = 45$.
2. Il suffit de faire une somme : $|C| = |A \cap C| + |(B \cap C) \backslash A| + |C \backslash (A \cup B)| = 32 + 5 + 56 = 93$.
3. Ceux qui ont voté pour au moins l'un des trois sont au nombre de $|A \cup B \cup C| = |A| + |B \backslash A| + |C \backslash (A \cup B)| = 112 + 22 + 56 = 190$. Il en reste donc 10 qui n'ont voté pour aucun des trois.
4. $A \backslash (B \cup C) = |A| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| = 112 - 67 - 32 + 12 = 25$.

Exercice 4 (** à ***)

- Aucune condition : $\begin{pmatrix} 32 \\ 5 \end{pmatrix} = 201\ 376$ tirages.
- Deux Rois : $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 28 \\ 3 \end{pmatrix} = 19\ 656$ (on choisit deux cartes parmi les quatre Rois et trois parmi les 28 cartes ne sont pas des Rois).
- Au moins un pique : par passage au complémentaire, $\begin{pmatrix} 32 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 24 \\ 5 \end{pmatrix} = 158\ 872$

- Un As et deux carreaux : il faut distinguer le cas de l'As de carreau, ce qui fait $\binom{21}{4}$ (l'As de carreau et quatre cartes parmi les 21 qui ne sont ni des carreaux ni des As) $+\binom{3}{1}\times\binom{7}{1}\times\binom{21}{3}$ (un As qui n'est pas un carreau, un carreau qui n'est pas un As, et trois autres cartes qui ne sont ni des carreaux ni des As), soit 33 915 tirages.
- Pas de carte en-dessous du 9 : $\binom{24}{5} = 42\ 504$ tirages (il y a 24 cartes au-dessus du 9).
- Deux paires : il faut choisir les hauteurs des deux paires (parmi huit possibles), puis les couleurs des deux cartes pour chaque paire, et enfin la dernière carte, soit $\binom{8}{2}\times\binom{4}{2}\times\binom{4}{2}\times\binom{24}{1} =$ 24 192 tirages.
- Cinq cartes de la même couleur : 4 choix pour la couleur, puis 5 cartes à choisir parmi les 8 de la couleur, soit $4\times\binom{8}{5} = 224$ tirages possibles.
- Quinte flush : 16 tirages (là, on peut compter à la main).

Exercice 5 (***)

1. Il y a $\binom{6}{2}$ parties à 2 éléments dans E (c'est la définition d'un coefficient binomial !). Soit A l'une d'entre elles, par exemple $A = \{1;2\}$. Une partie B vérifiant $A\cup B = E$ doit nécessairement contenir 3, 4, 5 et 6 (puisqu'ils ne sont pas dans A, et un sous-ensemble quelconque de $\{1;2\}$. Il y a donc 2^2 telles parties B (pour chaque A possible).

2. De la même façon, si A est une partie à k éléments, B doit nécessairement contenir les éléments qui ne sont pas dans A, et un quelconque sous-ensemble des k éléments de E, ce qui laisse 2^k possibilités pour B (on a, pour chaque élément de A, 2 possibilités : soit on le prend, soit on ne le prend pas). Pour $k = 0$, c'est-à-dire si $A = \emptyset$, on a bien une seule possibilité pour B (E tout entier), pour $k = 1$, il y en a 2 (soit B contient l'unique élement de A, soit non), etc, jusqu'au cas où $k = 6$, c'est-à-dire $A = E$, où on peut prendre pour B n'importe quel sous-ensemble de E, ce qui laisse 2^6 possibilités.

3. Au total, il y a $\binom{6}{0}\times 2^0 + \binom{6}{1}\times 2^1 + \cdots + \binom{6}{6}\times 2^6$ possibilités, soit $\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}2^k = \sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}2^k 1^{n-k}$. On reconnait une formule du binôme, qui vaut $(2+1)^6 = 3^6 = 729$.

4. Exactement de la même façon, on obtiendra $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k$ possibilités, soit 3^n. Une autre façon de trouver ce résultat est de constater que, pour chacun des n éléments, on a trois possibilités : soit il appartient seulement à A, soit seulement à B, soit à $A\cap B$ (il n'a pas le droit de n'appartenir ni à A ni à B si on veut avoir $A\cup B = E$).

Exercice 6 (*)

Application directe de l'exemple vu en cours : il y a $\dfrac{10!}{4!\times 4!} = 6\ 300$ anagrammes pour MISSISSIPI et $\dfrac{11!}{5!\times 2!\times 2!} = 83\ 160$ pour ABRACADABRA.

Exercice 7 (**)

Pas vraiment de méthode générale, on va dénombrer au cas par cas :
– s'il n'y a pas d'ex æquo, $4! = 24$ classements.
– s'il y a quatre ex æquo, 1 classement.
– s'il y a trois ex æquo, $\binom{3}{4} \times 2 = 8$ classements (il faut choisir les trois ex æquo, et leur classement).
– s'il y a deux ex æquo, $\binom{2}{4} \times 3! = 36$ classements.
– enfin, s'il y a deux fois deux ex æquo, $\binom{4}{2} = 6$ classements (il suffit de choisir les deux ex æquo de tête).

Il y a donc au total 75 classements possibles.

Exercice 8 (**)

1. Il y a bien sûr 4^n tirages possibles.
2. C'est une application de la formule de Poincaré. Notons A l'ensemble des tirages qui ne font pas apparaitre le chiffre 1, B ceux où il n'y a pas de 2, C et D ceux sans 3 et sans 4. On a alors $|A \cup B \cup C \cup D| = |A| + |B| + |C| + |D| - |A \cap B| - \cdots - |C \cap D| + |A \cap B \cap C| + \cdots - |A \cap B \cap C \cap D|$. Les cardinaux de A, B, C et D sont 3^n, ceux de chaque intersection de deux d'entre eux valent 2^n, les intersections trois à trois ont pour cardinal 1, et l'intersection des quatre est vide, donc $|A \cup B \cup C \cup D| = 4 \times 3^n - 6 \times 2^n + 4$. L'ensemble dont on cherche le cardinal étant le complémentaire de $A \cup B \cup C \cup D$, il a pour cardinal $4^n - 4 \times 3^n + 6 \times 2^n - 4$. La probabilité correspondante est $p_n = 1 - \frac{4 \times 3^n}{4^n} + \frac{6 \times 2^n}{4^n} - \frac{4}{4^n}$.
3. Chacun des trois derniers termes est une suite géométrique de raison plus petite que 1, donc tend vers 0. On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 1$ (c'est-à-dire que, lorsque n grandit, la probabilité d'obtenir en faisant n lancers au moins une fois chaque face du dé tend à devenir certaine).
4. On vérifie laborieusement que p_n dépasse 0.9 pour $n = 13$.

Exercice 9 (*)

Du calcul brutal utilisant bien entendu la formule du binôme de Newton : $(x-3)^5 = x^5 - 15x^4 + 90x^3 - 270x^2 + 405x - 243$; $(2x+3y)^3 = 8x^3 + 36xy^2 + 54xy^2 + 27y^3$ et $(x-1)^7 = x^7 - 7x^6 + 21x^5 - 35x^4 + 35x^3 - 21x^2 + 7x - 1$.

Exercice 10 (***)

La première est une application directe du binôme : $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k = (1-1)^n = 0$. Pour la deuxième, il est en fait plus facile d'utiliser une des formules vues en cours, sachant qu'on peut oublier $k = 0$ dans la somme puisque le terme est nul : $\sum\limits_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = \sum\limits_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} = n \sum\limits_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = n \times 2^{n-1}$. Enfin, pour la dernière, on utilise la même astuce mais en commençant par calculer une autre somme : $\sum\limits_{k=2}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} = n \sum\limits_{k=2}^{n} (k-1) \binom{n-1}{k-1} = n \sum\limits_{k=1}^{n-1} k \binom{n-1}{k} = n \sum\limits_{k=1}^{n-1} (n-1) \binom{n-2}{k-1} =$

$n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k} = n(n-1)2^{n-2}$. Maintenant, reste à remarquer que $\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}(k(k-1)+k)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}$.

Exercice 11 (*)

C'est un calcul ignoble (on multiplie par 2 pour ne pas avoir de fraction) : $2\left(\binom{n}{2} - \binom{n-p}{2} - \binom{n-q}{2} + \binom{n-p-q}{2}\right) = n(n-1) - (n-p)(n-p-1) - (n-q)(n-q-1) + (n-p-q)(n-p-q-1) = n^2 - n - n^2 + np + n + np - p^2 - p - n^2 + nq + n + nq - q^2 - q + n^2 - np - nq - n - np + p^2 + pq + p - nq + pq + q^2 + q = 2pq$, d'où le résultat.

Feuille d'exercices n°9 : Limites

ECE3 Lycée Carnot

20 novembre 2009

Exercice 1 (* à **)

Calculer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{3x+1}}{(\ln x)^4}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}}{3x^2}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x^2+1) - 2\ln x$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}$
- $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x\ln x}{\sqrt{x}+1}$
- $\lim\limits_{x\to0^+} x^x$
- $\lim\limits_{x\to0^+} (1+x^2)^{\frac{1}{x}}$
- $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{2\sqrt{x}}{\ln(1+x)}$
- $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln(1+4x)}{x}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4e^{-\sqrt{x}}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(1+\frac{1}{x})$
- $\lim\limits_{x\to3^+} \dfrac{2x^2-3x+2}{x^2-9}$
- $\lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x^2-4}$
- $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{3x^2-4x+1}{x^2-1}$

Exercice 2 (** à ***)

Déterminer l'ensemble de définition, puis toutes les asymptotes ou branches infinies des fonctions suivantes :

- $f_1(x) = \dfrac{x^2+x\ln x}{x+1}$
- $f_2(x) = \dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$
- $f_3(x) = \ln(e^x+e^{-x})$
- $f_4(x) = \dfrac{x^3-2x^2+x}{x^2-1}$
- $f_5(x) = -3x+\ln x$
- $f_6(x) = \sqrt{x}+\ln x$
- $f_7(x) = \sqrt{\dfrac{2x+1}{x-1}}$
- $f_8(x) = \ln(x^2-3x+2)$

Exercice 3 (**)

Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $1+x \leqslant e^x \leqslant 1+xe^x$. En déduire la valeur de $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}$.

Montrer que, $\forall x \in]-1;+\infty[$, $\dfrac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$. En déduire la valeur de $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

Exercice 4 (*)

Déterminer des équivalents simples des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{x^2 + \ln x}{xe^{-x} + 2}$ en 0 et en $+\infty$
2. $g(x) = x(\ln(1+x))^4$ en 0 et en $+\infty$
3. $h(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$
4. $k(x) = x\ln(1+x) - (x+1)\ln x$

Exercice 5 (**)

Étudier la continuité des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4x^2+5x-4}{2x+1} & \text{si} \quad x \neq -\dfrac{1}{2} \\ 0 & \text{si} \quad x = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x - e^{\frac{1}{x}}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$
3. $f(x) = \begin{cases} x \ln \dfrac{x^2+1}{x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$
4. $f(x) = \begin{cases} \ln(\sqrt{x}-1) - \ln(x-1) & \text{si} \quad x > 1 \\ 0 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$
5. $f(x) = x + \sqrt{x - Ent(x)}$

Exercice 6 (**)

Peut-on prolonger les fonctions suivantes par continuité aux bornes de leur ensemble de définition ?

- $f(x) = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{3}{(x-1)^2}$
- $g(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{x+1}$
- $h(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{\sqrt{x+1}}$
- $k(x) = \dfrac{x\ln x}{x+1}$

Exercice 7 (**)

On considère la fonction f définie par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x > 0$, et $f(x) = 0$ si $x \leqslant 0$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$. Calculer sa dérivée et montrer qu'elle est aussi continue. Faire de même avec la dérivée seconde. Pour les motivés : prouver que, quel que soit l'entier $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ème de la fonction f est continue (mais là c'est du ****).

Exercice 8 (*)

Montrer que chacune des équations suivantes admet une solution sur l'intervalle I considéré.

1. $x^{2008} - x^{2007} = 1$ sur $I = [-1; 1]$.
2. $\ln x = \dfrac{x^2-5}{x+2}$ sur $I = [1; 10]$.

3. $3x = 1 + \ln(2 + x^2)$ sur $I = [0; 1]$.
4. $e^x = 2 + x$ sur $[\ln 2; 2\ln 2]$.
5. $x^3 - 3x^2 = -1$ sur $I = [-1; 1]$.

Déterminer par dichotomie (et en utilisant la calculatrice !) une valeur approchée à 0.01 d'une solution de chaque équation.

Exercice 9 (***)

On définit, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n par $f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ a une seule solution strictement positive, qu'on notera désormais u_n.
2. Calculer u_1 et u_2 et vérifier que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in \left]0; \dfrac{2}{3}\right[$.
3. Montrer que, $\forall x \in]0; 1[$, $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.
4. Que peut-on en déduire concernant la suite u_n ?
5. Montrer que u_n est convergente vers une limite qu'on notera l.
6. Déterminer la limite de u_n^n et en déduire la valeur de l.

Exercice 10 (***)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x - 2 + \ln x$.

1. Calculez $f(1)$ et $f(3)$. Que peut-on en déduire ?
2. Montrez que l'équation $f(x) = 0$ possède en fait une unique solution α sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. À l'aide de la calculatrice et en procédant par dichotomie (décrivez les étapes), déterminez une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
4. Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$. On note g la réciproque de f, déterminer la continuité, le tableau de variation et les limites de g.
5. Déterminez $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et en déduire $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{f(g(t))}{g(t)}$. En déduire un équivalent de g en $+\infty$.

Exercice 11 (**)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x + x$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à expliciter.
2. Justifier que pour tout entier positif n, l'équation $f(x) = n$ possède une unique solution que l'on notera par la suite x_n.
3. Déterminer la monotonie de la suite x_n.
4. Démontrer que $\forall n \geqslant 1$, $\ln(n - \ln n) \leqslant x_n \leqslant \ln n$.
5. En déduire la limite de la suite (x_n) puis un équivalent simple de x_n.

Corrigé de la feuille d'exercices n°9

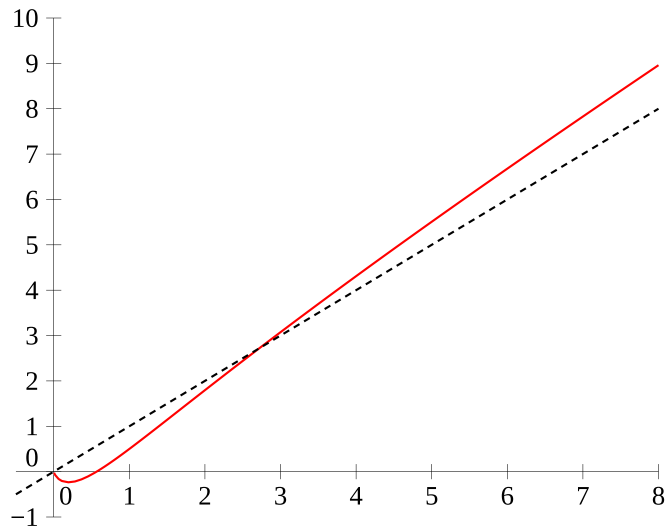
Exercice 1 (* à **)

- $\dfrac{e^{3x+1}}{(\ln x)^4} = e \times \dfrac{e^{3x}}{(\ln x)^4}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{3x}}{(\ln x)^4} = +\infty$ par croissance comparée, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{3x+1}}{(\ln x)^4} = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}}{3x^2} = +\infty$ par croissance comparée.
- $\ln(x^2+1) - 2\ln x = \ln(x^2+1) - \ln(x^2) = \ln \dfrac{x^2+1}{x^2} = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x^2+1) - 2\ln x = 0$.
- $\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} = \dfrac{8}{\sqrt{x+5} + \sqrt{x-3}}$ en multipliant par la quantité conjuguée, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} = 0$.
- $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x\ln x}{\sqrt{x+1}} = 0$ (il n'y avait ici pas vraiment de difficulté, le numérateur tend vers 0 et le dénominateur vers 1).
- $x^x = e^{x\ln x}$. Or, $\lim\limits_{x\to0} x\ln x = 0$, donc $\lim\limits_{x\to0^+} x^x = 1$.
- $(1+x^2)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x^2)}$. Comme $\ln(1+x^2) \underset{0}{\sim} x^2$, on a $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x} = 0$, et $\lim\limits_{x\to0^+} (1+x^2)^{\frac{1}{x}} = 1$.
- Utilisons également les équivalents : $\ln(1+x) \underset{0^+}{\sim} x$, donc $\dfrac{2\sqrt{x}}{\ln(1+x)} \underset{0^+}{\sim} \dfrac{2\sqrt{x}}{x} \underset{0^+}{\sim} 2\sqrt{x}$, donc $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{2\sqrt{x}}{\ln(1+x)} = 0$.
- Comme $4x$ tend vers 0 quand x tend vers 0, on a $\dfrac{\ln(1+4x)}{x} \underset{0}{\sim} \dfrac{4x}{x}$, donc $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln(1+4x)}{x} = 4$.
- En posant $X = \sqrt{x}$, on a $x^4 e^{-\sqrt{x}} = \dfrac{X^8}{e^X}$, avec X tendant vers $+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4 e^{-\sqrt{x}} = 0$.
- En posant $X = \dfrac{1}{x}$, on se ramène exactement à calculer la limite en 0 de $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(1+\frac{1}{x}) = 1$.
- Le numérateur prend pour valeur 11 pour $x = 3$, et $\lim\limits_{x\to3^+} x^2 - 9 = 0^+$, donc $\lim\limits_{x\to3^+} \dfrac{2x^2-3x+2}{x^2-9} = +\infty$.
- Il vaut mieux commencer par mettre au même dénominateur pour éviter de se retrouver face à une forme indéterminée : $\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x^2-4} = \dfrac{x+2-1}{x^2-4} = \dfrac{x+1}{x^2-4}$. Le numérateur ayant pour limite 3 et le dénominateur 0^+, $\lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x^2-4} = +\infty$.
- Le numérateur et le dénominateur s'annulant en $x = 1$, on peut commencer par factoriser : si $x \neq 1$, $\dfrac{3x^2-4x+1}{x^2-1} = \dfrac{(x-1)(3x-1)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{3x-1}{x+1}$. Ce nouveau quotient vaut 2 quand $x = 1$, donc $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{3x^2-4x+1}{x^2-1} = 1$

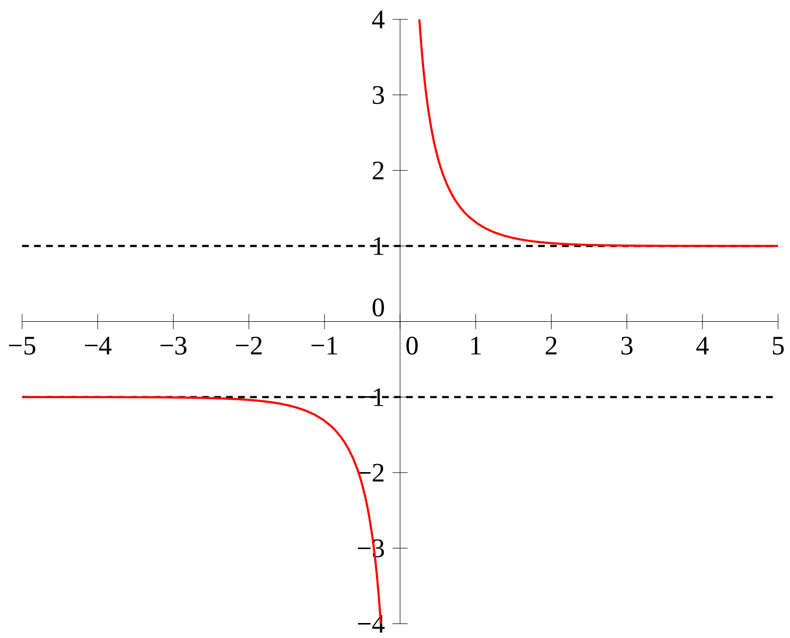
Exercice 2 (** à ***)

- La fonction f_1 et définie sur $\mathbb{R}_+^*$. En 0^+, la limite de f_1 est égale à 0 puisque le numérateur tend vers 0 et le dénominateur vers 1, donc il n'y a pas d'asymptote verticale. Par contre, on peut prolonger f_1 par continuité en 0. Ensuite, $f_1(x) = \dfrac{x+\ln x}{1+\frac{1}{x}}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = +\infty$, et $\dfrac{f_1(x)}{x} = \dfrac{1+\frac{\ln x}{x}}{1+\frac{1}{x}}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$. Il faut donc calculer $f(x) - x = \dfrac{x+\ln x - x - 1}{1+\frac{1}{x}} =$

$\dfrac{\ln x - 1}{1+\frac{1}{x}}$. On a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = +\infty$, la courbe de f admet donc en $+\infty$ une branche parabolique de direction $y = x$. Pour compléter, je rajoute pour chaque fonction l'allure de la courbe :

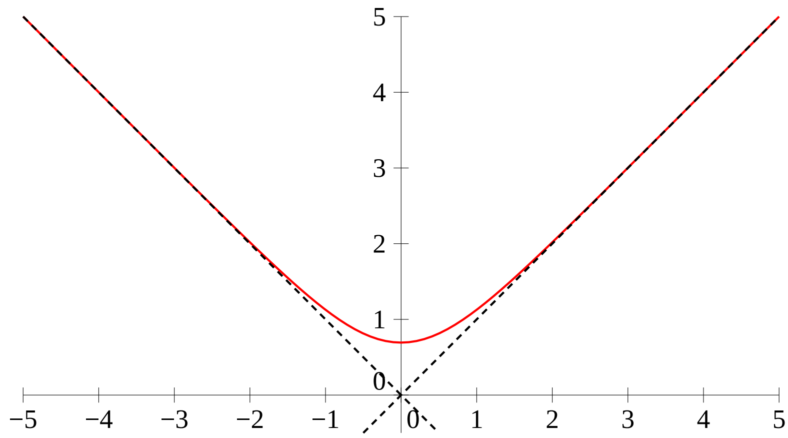


- La fonction n'est pas définie lorsque $e^x - e^{-x} = 0$, soit $e^x = e^{-x}$, ce qui implique $x = -x$, donc $x = 0$, d'où $\mathcal{D}_{f_2} = \mathbb{R}^*$. Les limites de f_2 en 0 sont infinies (le numérateur y tend vers 2 et le dénominateur vers 0), donc la courbe admet pour asymptote verticale l'axe des ordonnées. De plus $f_2(x) = \dfrac{e^x(1+e^{-2x})}{e^x(1-e^{-2x})}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = 1$, et la courbe admet pour asymptote horizontale en $+\infty$ la droite d'équation $y = 1$. De plus, f_2 est une fonction impaire car $f_2(-x) = \dfrac{e^{-x}+e^x}{e^{-x}-e^x} = -f_2(x)$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f_2(x) = -1$, et on a une asymptote horizontale d'équation $y = -1$.

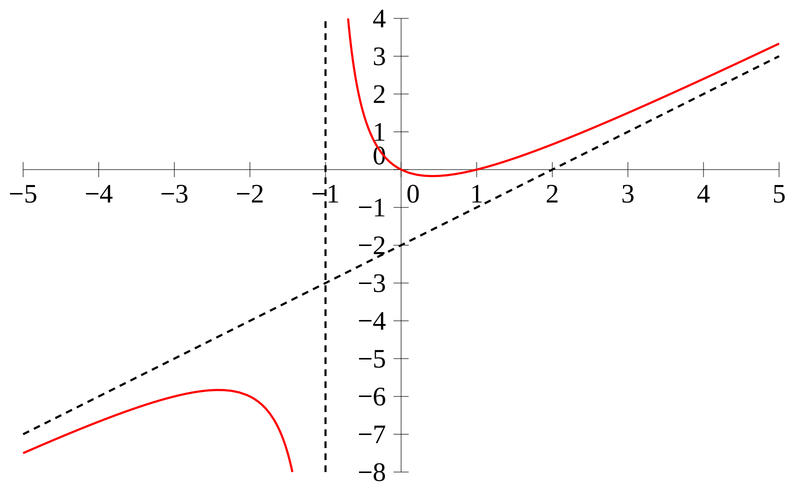


- La fonction f_3 est définie sur $\mathbb{R}$ puisqu'une exponentielle est strictement positive. Il suffit donc de regarder ce qui se passe aux infinis, et on peut commencer par constater que f_3 est paire. La limite en $+\infty$ de f_3 est $+\infty$ et de plus $f_3(x) = \ln(e^x(1+e^{-2x})) = x+\ln(1+e^{-2x})$, donc $\dfrac{f_3(x)}{x} =$

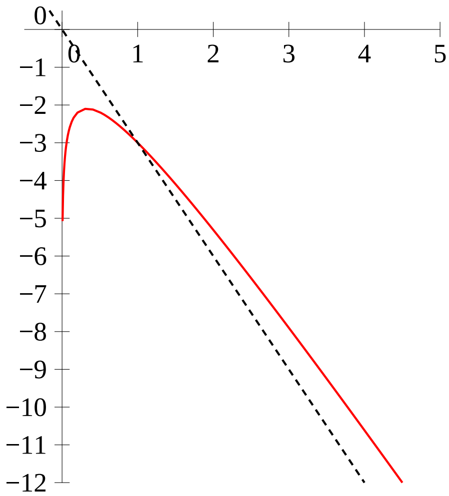
$1 + \dfrac{\ln(1+e^{-2x})}{x}$, qui a pour limite 1 quand x tend vers $+\infty$. Enfin, $f(x) - x = \ln(1+e^{-2x})$, qui tend vers 0, donc la droite d'équation $y = x$ est aymptote oblique à la courbe en $+\infty$. Par symétrie par rapport à l'axe des abscisses, la droite d'équation $y = -x$ est asymptote oblique en $-\infty$.



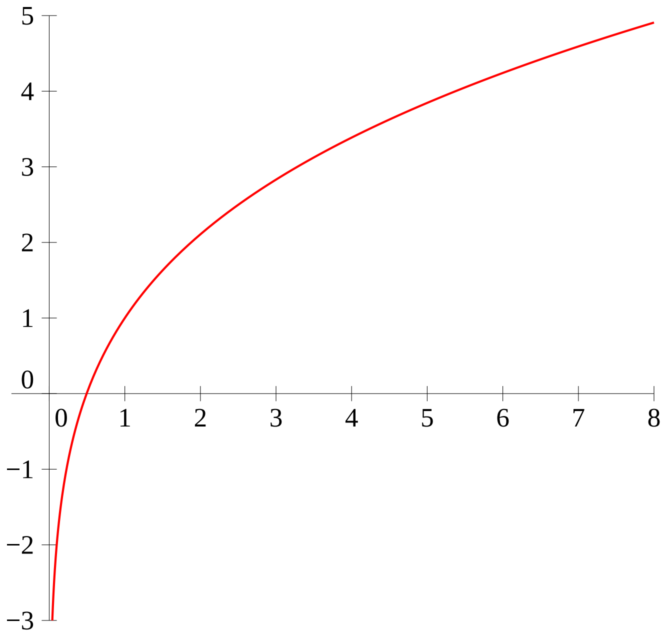
- Un classique : $\mathcal{D}_{f_4} = \mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$. En -1, le numérateur tend vers -4 et le dénominateur vers 0, il y a donc des limites infinies et une asymptote verticale d'équation $x = -1$. Par contre, en 1, numérateur et dénominateur tendent vers 0, on est obligés de factoriser de chaque côté. Pour le numérateur, remarquons que $x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x-1)^2$, donc pour $x \neq 1$, $f_4(x) = \dfrac{x(x-1)}{x+1}$, qui a pour limite 0 en 1. Pas de deuxième asymptote verticale donc. Pour les infinis, utilisons les équivalents pour aller plus vite : $f_4(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x^3}{x^2} = x$, donc les limites sont infinies, et $\dfrac{f_4(x)}{x} \underset{+\infty}{\sim} 1$. Reste à calculer $f(x) - x = \dfrac{x^3 - 2x^2 + x - x^3 + x}{x^2 - 1} = \dfrac{-2x^2 + 2x}{x^2 - 1} \underset{+\infty}{\sim} -2$. Conclusion de tous ces calculs : la droite d'équation $y = x - 2$ est asymptote oblique à la courbe en $+\infty$ et en $-\infty$ (où les équivalents sont les mêmes).



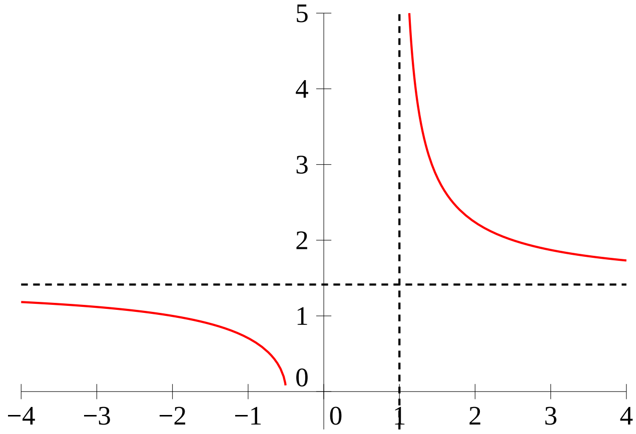
- La fonction f_5 est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, a pour limite $-\infty$ en 0, donc une asymptote verticale, et $+\infty$ en $+\infty$. De plus, $\dfrac{f(x)}{x} = -3 + \dfrac{\ln x}{x}$ a pour limite -3, et $f(x) + 3x = \ln x$ tend vers $+\infty$, donc on a une branche parabolique de direction $y = -3x$.



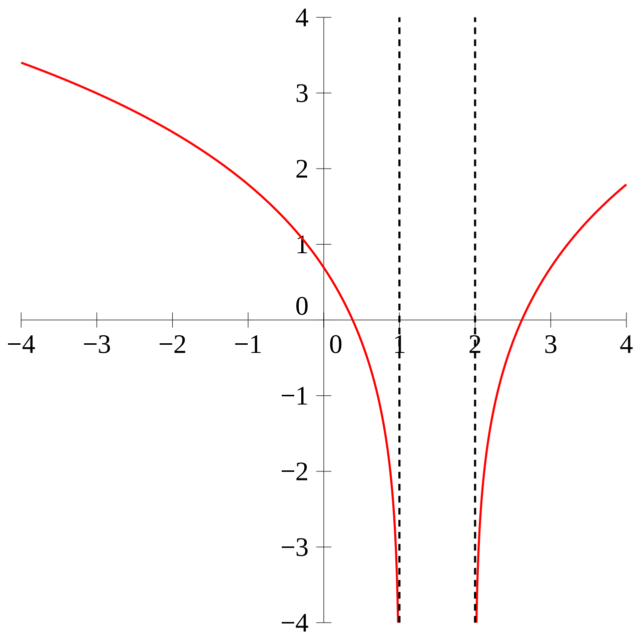
- Comme ci-dessus, le domaine de définition est $\mathbb{R}_+^*$ et il y a une asymptote verticale en 0. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_6(x) = +\infty$ et $\dfrac{f_6(x)}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{\ln x}{x}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_6(x)}{x} = 0$. Il y a donc en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Ox).



- La fonction f_7 est définie quand $\dfrac{2x+1}{x-1} \geqslant 0$, donc (petit tableau de signe) sur $\left]-\infty; -\dfrac{1}{2}\right] \cup]1; +\infty[$. En $-\dfrac{1}{2}$, il n'y a rien à faire, la fonction est définie, il ne peut pas y avoir d'asymptote verticale. Par contre, en 1, il y a bien une limite infinie, donc une asymptote verticale. Enfin, quand $x \to \pm\infty$, $\dfrac{2x+1}{x-1} \to 2$, donc $\underset{x\to\pm\infty_7}{f}(x) = \sqrt{2}$, il y a donc une asymptote horizontale d'équation $y = \sqrt{2}$.



- Enfin, f_8 est définie quand $x^2 - 3x + 2 > 0$, c'est-à-dire en dehors de ses racines évidentes qui sont 1 et 2, donc $\mathcal{D}_{f_8} =]-\infty; 1[\cup]2; +\infty[$. En 1 et 2, la parenthèse tend vers 0 donc la fonction vers $-\infty$, il y a donc deux asymptotes verticales. En $\pm\infty$, la fonction tend vers $+\infty$, et $\dfrac{f_8(x)}{x} = \dfrac{\ln(x^2(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}))}{x} = \dfrac{2\ln x}{x} + \dfrac{1}{x}\ln\left(1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^2}\right)$. Tout ceci tendant vers 0, il y a une branche parabolique de direction (Ox).



Exercice 3 (**)

Pour montrer que $1 + x \geqslant e^x$, il n'y a pas vraiment d'autre choix que d'étudier la fonction $f : x \mapsto e^x - 1 - x$, qui est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = e^x - 1$, donc décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$. Elle atteint donc son maximum pour $x = 0$. Or, $f(0) = 0$, donc on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$, d'où $1 + x \leqslant e^x$.

De même, posons $g(x) = 1 + xe^x - e^x$, la fonction g est définie dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $g'(x) = e^x + xe^x - e^x = xe^x$. La fonction g est donc décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$, et atteint donc un minimum en 0 qui vaut aussi 0, d'où la deuxième inégalité. On a donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \leqslant e^x - 1 \leqslant xe^x$, et $\forall x \neq 0$, $1 \leqslant \dfrac{e^x - 1}{x} \leqslant e^x$. Les deux termes extrêmes tendant vers 1 quand x tend vers 0, on a d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

Similairement, posons $h(x) = x - \ln(1+x)$, h est définie et dérivable sur $]-1;+\infty[$, et $h'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$, donc la fonction h est décroissante sur $]-1;0]$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme d'habitude, elle a un minimum nul en 0, ce dont on déduit que $\ln(1+x) \leqslant x$.

Enfin, posons $k(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$, de dérivée $k'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{1+x-1}{(1+x)^2}$. Grande surprise, la fonction admet un minimum en 0, qui vaut 0, d'où la deuxième inégalité. On a alors $\forall x \in]-1;+\infty[$, $\frac{1}{1+x} \leqslant \frac{\ln(1+x)}{x} \leqslant 1$, donc par théorème des gendarmes $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Exercice 4 (*)

1. $f(x) = \frac{x^2 + \ln x}{xe^{-x} + 2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^2}{2}$ et $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{\ln x}{2}$.
2. $g(x) = x(\ln(1+x))^4 \underset{+\infty}{\sim} x(\ln x)^4$ (on a le droit d'élever un équivalent à une puissance quelconque) et $g(x) \underset{0}{\sim} x \times x^4 \sim x^5$ en utilisant que $\ln(1+x) \sim x$.
3. $h(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}$. L'exposant a pour limite 1 en $+\infty$ et 0 en 0, donc h a des limites finies égales à e et 1 en $+\infty$ et en 0.
4. $k(x) = x\ln(1+x) - (x+1)\ln x = x\ln(x(1+\frac{1}{x})) - x\ln x - \ln x = x\ln(1+\frac{1}{x}) - \ln x$. La limite du premier terme en $+\infty$ est 1 (cf Exercice 1), donc $k(x) \underset{+\infty}{\sim} -\ln x$. En 0, $k(x) \underset{0}{\sim} -\ln x$ (tout le reste tendant vers 0).

Exercice 5 (**)

Le seul problème qui se pose pour la continuité est l'endroit où on change la définition de la fonction.

1. On a $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} 4x^2 + 5x - 4 = -\frac{11}{2}$, donc f ne tend sûrement pas vers 0 quand x tend vers $-\frac{1}{2}$.

   La fonction f est continue seulement sur $\mathbb{R}\backslash\{-\frac{1}{2}\}$.
2. Il est indispensable de distinguer ce qui se passe en 0^+ et en 0^- : en 0^+, $e^{\frac{1}{x}}$ tend vers $+\infty$ et f a donc pour limite 0 en 0^+. Par contre, en 0^-, $e^{\frac{1}{x}}$ tend vers 0, et même beaucoup plus rapidement que x, donc $f(x) \underset{0^-}{\sim} \frac{x^2}{x}$, donc $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$. Finalement, la fonction f est tout de même continue en 0 puisque continue à gauche et à droite, elle est donc continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.
3. On a $f(x) = x\ln(x^2+1) - x\ln x$ si $x > 0$. Chacun des deux termes tend vers 0 en 0^+, donc la fonction est continue sur $\mathbb{R}_+$.
4. Celle-ci est un peu plus difficile : $f(x) = \ln\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \ln\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = -\ln(\sqrt{x}+1)$, donc $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\ln\sqrt{2}$. La fonction n'est donc pas continue en 1.
5. La fonction est définie sur $\mathbb{R}$ ($x - Ent(x)$ est toujours positif, compris entre 0 et 1) et continue sur tous les intervalles de la forme $]n;n+1[$, avec $n \in \mathbb{Z}$ puisque les seuls points de discontinuité de la partie entière sont les entiers. Reste à déterminer ce qui se passe pour n : on a $f(n) = n + \sqrt{n-n} = n$, mais $\lim\limits_{x\to n^-} x - Ent(x) = 1$, donc $\lim\limits_{x\to n^-} f(x) = n + \sqrt{1} = n+1$. La fonction est donc discontinue en tous les entiers.

Exercice 6 (**)

- La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, et $f(x) = \dfrac{x-1-3}{(x-1)^2} = \dfrac{x-4}{(x-1)^2}$. La fonction f a donc des limites infinies quand x tend vers 1, elle n'y est pas prolongeable par continuité.
- La fonction g est définie et continue sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$. De plus, numérateur et dénominateur ont pour limite 0 en -1, on peut donc factoriser par $x+1$: $g(x) = \dfrac{(x+1)(x-3)}{x+1} = x-3$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to-1} g(x) = -4$, et on peut donc prolonger g par continuité en posant $g(-1) = -4$.
- Ca ressemble au précédent ? C'est pourtant différent puisque cette fois h n'est définie que sur $]-1;+\infty[$, et $h(x) = \dfrac{(x+1)(x-3)}{\sqrt{x+1}} = (x-3)\sqrt{x+1}$. Cette fois-ci, la limite en -1 vaut 0, donc on peut prolonger h par continuité en posant $h(-1) = 0$.
- La fonction k est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, et a pour limite 0 en 0, donc est prolongeable par continuité à $\mathbb{R}_+$ en posant $k(0) = 0$.

Exercice 7 (**)

Seul 0 peut poser un problème de continuité à droite. Or, $\lim\limits_{x\to 0^+} -\dfrac{1}{x^2} = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$, et f est bien continue en 0. De plus, $\forall x > 0$, $f'(x) = \dfrac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$. Posons $X = \dfrac{1}{x}$, on a lors $f'(x) = 2X^3e^{-X^2}$, qui par croissance comparée a pour limite 0 en $+\infty$, donc f' est également continue en 0. On fait le même type de calcul pour f'' : $\forall x > 0$, $f''(x) = \left(\dfrac{6}{x^4} + \dfrac{4}{x^6}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$, qui a également pour limite 0 en 0.

Pour les dérivées ultérieures, le principe est le même, mais pour tout traiter d'un seul coup, il est nécessaire d'éeffectuer une récurrence et d'avoir quelques connaissances sur les polynomes. On prouve en fait par récurrence que la n-ième dérivée de la fonction f (sur $]0;+\infty[$) peut s'écrire sous la forme $\dfrac{P_n(x)}{x^{a_n}}e^{-\frac{1}{x^2}}$, où a_n est un entier naturel et P_n est un polynome. C'est vrai pour $n = 1$ et même $n = 2$ d'après les calculs précédents. Supposons désormais que $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{a_n}}e^{-\frac{1}{x^2}}$. On peut dériver cette fonction sur $]0;+\infty[$ et obtenir $\dfrac{x^{a_n}P_n'(x) - a_n n x^{a_n n-1}P_n(x)}{x^{2a_n}}e^{-\frac{1}{x^2}} - \dfrac{2P_n(x)}{x^{a_n+3}}e^{-\frac{1}{x^2}}$. Ceci est bien de la forme voulue, ce qui achève la récurrenc. Or, un quotient de polynomes multiplié par $e^{-\frac{1}{x^2}}$ a toujours pour limite 0 en 0, donc la dérivée n-ième de f est continue en 0.

Exercice 8 (*)

Le principe est le même à chaque fois : la fonction étudiée est continue, et les signes des valeurs prises aux extrémités de l'intervalle sont opposés. Par le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction s'annule sur l'intervalle.

1. Posons $f(x) = x^{2008} - x^{2007} - 1$, $f(-1) = 1 - (-1) - 1 = 1$, et $f(1) = 1 - 1 - 1 = -1$, donc f s'annule sur I. Par dichotomie, on obtient successivement, en notant a la solution cherchée, $f(0) = -1$ donc $a \in [-1;0]$, puis $f(0.5) \simeq -1$ donc $a \in [-1;-0.5]$ etc. Il n'est pas très difficile de se convaincre que la valeur de a est extrêment proche de -1 : $x^{2008} - x^{2007} = x^{2007}(x-1)$, avec $x - 1 \in [-2;-1]$, donc x^{2007} doit être compris entre -0.5 et 1 pour que l'équation puisse être vérifiée, ce qui implique $0.5 \leqslant (-x)^{2007} \leqslant 1$, soit $\ln 0.5 \leqslant 2007\ln(-x) \leqslant 0$, donc $e^{\frac{0.5}{2007}} \leqslant -x \leqslant 1$, soit $-x = 1$ à 0.001 près. On a donc $x \simeq -1$ à 0.01 près.
2. Posons $f(x) = \ln x - \dfrac{x^2-5}{x+2}$, $f(1) = 0 - \dfrac{-4}{3} = \dfrac{4}{3}$, et $f(10) = \ln 10 - \dfrac{95}{12} < 0$ (car par exemple $e^4 > 2^4 > 16$, donc $4 > \ln 10$, et $\dfrac{95}{12} > 4 > \ln 10$), donc f s'annule sur I. Plutôt

que de couper exactement en 2, faisons une dichotomie avec des valeurs pas trop affreuses : $f(5) \simeq -1.24$, donc $a \in [1;5]$, puis $f(3) \simeq 0.30$, donc $a \in [3;5]$; $f(4) \simeq -0.44$ donc $a \in [3;4]$; $f(3.5) \simeq -0.6$ donc $a \in [3;3.5]$; $f(3.25) \simeq 0.12$ donc $a \in [3.25;3.5]$; $f(3.375) \simeq 0.03$ donc $a \in [3.375;3.5]$; $f(3.44) \simeq -0.02$ donc $a \in [3.375;3.44]$; $f(3.41) \simeq 0.001$, donc $a \in [3.41;3.44]$; et enfin $f(3.425) \simeq -0.001$ donc $a \in [3.41;3.425]$. On a donc $a \simeq 3.42$ à 0.01 près.

3. Posons $f(x) = 3x - 1 - \ln(2+x^2)$, $f(0) = 0 - 1 - \ln 2 < 0$ et $f(1) = 3 - 1 - \ln 3 = 2 - \ln 3 > 0$, car $e^2 > 3$, donc $\ln 3 < 2$. La fonction s'annule donc sur I. Toujours le même principe, je vais aller un peu plus vite : on calcule $f(0.5) \simeq -0.31$, puis $f(0.75) \simeq 0.31$; $f(0.625) \simeq 0.003$; $f(0.56) \simeq -0.16$; $f(0.59) \simeq -0.08$ et $f(0.61) \simeq -0.03$, dont on déduit que $a \simeq 0.62$ à 0.01 près. Constatons que quand on tombe au milieu des calculs sur une valeur très proche de 0, on a de bonnes chances d'être très près de la solution cherchée...

4. Posons $f(x) = e^x - 2 - x$, $f(\ln 2) = 2 - 2 - \ln 2 < 0$, et $f(2\ln 2) = 4 - 2 - 2\ln 2 = 2(1 - \ln 2) > 0$, donc f s'annule sur I. Ici, les bornes de l'intervalles sont moyennement pratiques, mais elles valent environ 0.7 et 1.4, ce qui permet de couper en 1 puis de prendre des valeurs plus rondes ensuite : $f(1) \simeq -0.28$; $f(1.2) \simeq 0.12$; $f(1.1) \simeq -0.10$; $f(1.15) \simeq 0.008$; $f(1.125) \simeq -0.04$; $f(1.14) \simeq -0.01$, donc $a \simeq 1.14$ à 0.01 près.

5. Posons $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, $f(-1) = -1 - 3 + 1 = -3$ et $f(1) = 1 - 3 + 1 = -1$. Ca ne marche pas ? Si, car $f(0) = 1$, donc f s'annule en fait au moins deux fois sur I : une fois sur $[-1;0]$ et une autre sur $[0;1]$. Pour la dichotomie, contentons-nous de déterminer une valeur approchée de la solutions se trouvant dans $[0;1]$ (on peut naturellement trouver également une approximation de la deuxième racine dont on connait l'existence) : $f(0.5) = .375$; $f(0.75) \simeq -0.27$; $f(0.625) \simeq 0.07$; $f(0.69) \simeq -0.10$; $f(0.66) \simeq -0.02$; $f(0.64) \simeq 0.03$, donc $a \simeq 0.65$ à 0.01 près (pour les curieux, la racine appartenant à $[-1;0]$ vaut environ -0.53).

Exercice 9 (***)

1. La fonction f_n étant somme de deux fonctions strictement croissantes sur $[0;+\infty[$, elle l'est également. Comme de plus elle est continue, $f(0) = -4$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$, le théorème de la bijection nous permet d'affirmer l'existence d'un unique réel positif u_n tel que $f_n(u_n) = 0$.

2. u_0 est solution positive de l'équation $1 + 9x^2 - 4 = 0$, soit $x^2 = \dfrac{1}{3}$, donc $u_0 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Pour $n = 1$, l'équation devient $9x^2 + x - 4 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 1 + 144 = 145$, et admet deux racines dont une strictement positive (d'après la question précédente) qui ne peut être que $u_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{145}}{18} \simeq 0.61$. De même, u_2 est solution positive de l'équation $10x^2 = 4$, d'où $u_2 = \sqrt{\dfrac{2}{5}} \simeq 0.63$. Pour vérifier que $u_n < \dfrac{2}{3}$, il suffit de constater que $f_n\left(\dfrac{2}{3}\right) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n + 9 \times \dfrac{4}{9} - 4 = \dfrac{2^n}{3^n} > 0$, et d'appliquer la croissance stricte de la fonction f_n à l'inégalité $0 = f_n(u_n) < f_n\left(\dfrac{2}{3}\right)$

3. On a $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1} + 9x^2 - 4 - x^n - 9x^2 + 4 = x^n(1-x)$. Cette expression étant positive si $x < 1$, on en déduit que $\forall x \in]0;1[$, $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.

4. On a notamment, puisque $0 < u_n < \dfrac{2}{3}$, $f_{n+1}(u_n) < f_n(u_n) = 0$. Comme par ailleurs $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$, on a donc $f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$, ce dont on déduit via stricte croissance de f_{n+1} que $u_n < u_{n+1}$. Autrement dit, la suite (u_n) est strictement croissante.

5. La suite étant croissante et majorée par $\dfrac{2}{3}$, elle converge.

6. Comme $0 < u_n < \frac{2}{3}$, $0 < u_n^n \left(\frac{2}{3}\right)^n$, donc via le théorème des gendarmes (et le fait que le membre de droite est une suite géométrique de raison inférieure à 1, $\lim_{n \to +\infty} u_n^n = 0$. Or, on a par définition $u_n^n + 9u_n^2 - 4 = 0$ (puisque $f_n(u_n) = 0$). On en déduit que $\lim_{n \to +\infty} 9u_n^2 - 4 = 0$, soit $\lim_{n \to +\infty} u_n^2 = \frac{4}{9}$. Comme $u_n > 0$, on a donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{2}{3}$.

Exercice 10 (***)

1. On a $f(1) = -1$ et $f(3) = 1 + \ln 3 > 0$, donc par le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction f s'annule sur l'intervalle $[1; 3]$.
2. La fonction étant somme de deux fonctions strictement croissantes sur $\mathbb{R}_+^*$, elle l'est également, donc est injective, et l'équation $f(x) = 0$ ne peut pas avoir plus d'une solution.
3. On calcule $f(2) \simeq 0.69$, puis $f(1.5) \simeq -0.09$; $f(1.75) \simeq 0.31$; $f(1.625) \simeq 0.11$; $f(1.56) \simeq .004$; $f(1.53) \simeq -0.04$ et $f(1.55) \simeq -0.01$, donc la solution de l'équation $f(x) = 0$ vaut 1.56 à 10^{-2} près.
4. On a déjà vu que f était strictement croissante. De plus, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, et $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$ (aucune forme indéterminée), donc f est bien bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Le théorème de la bijection nous permet d'affirmer que g est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$, strictement croissante, et de limites respectives 0 et $+\infty$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
5. Un petit coup de croissance comparée et on constate que $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$. Comme $\lim_{t \to +\infty} g(t) = +\infty$, on peut donc affirmer que $\lim_{t \to +\infty} \frac{f(g(t))}{g(t)} = 1$ (composée de limites), c'est-à-dire que $\lim_{t \to +\infty} \frac{t}{g(t)} = 1$ (puisque par définition de la réciproque $f(g(t)) = t$. Autrement dit, $g(t) \underset{+\infty}{\sim} t$.

Exercice 11 (**)

1. La fonction est somme de deux fonctions strictement croissantes, donc est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, et $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, donc par théorème de la bijection, f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. C'est une conséquence immédiate de la bijectivité de f.
3. Par définition, $f(x_n) < f(x_{n+1})$, donc par stricte croissance de f, $x_n < x_{n+1}$, et la suite (x_n) est strictement croissante.
4. C'est un calcul d'images : $f(\ln n) = e^{\ln n} + \ln n = n + \ln n \geqslant n$ si $n \geqslant 1$, donc on a $f(x_n) \leqslant f(\ln n)$, d'où $x_n \leqslant \ln n$. De même, $f(\ln(n - \ln n)) = e^{\ln(n - \ln n)} + \ln(n - \ln n) = n - \ln n + \ln(n - \ln n) = n - \ln \frac{n}{n - \ln n} < n$ puisque $\frac{n}{n - \ln n} < 1$. On en déduit de même que $\ln(n - \ln n) \leqslant x_n$.
5. Comme $\lim_{n \to +\infty} n - \ln n = +\infty$ (croissance comparée), on a $\lim_{n \to +\infty} \ln(n - \ln n) = +\infty$, d'où par comparaison $\lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty$. De plus, $\frac{\ln(n - \ln n)}{\ln n} \leqslant \frac{x_n}{\ln n} \leqslant 1$, avec $\frac{\ln(n - \ln n)}{\ln n} = \frac{\ln n + \ln(1 - \frac{\ln n}{n})}{\ln n} = 1 + \frac{\ln(1 - \frac{\ln n}{n}}{\ln n}$. La quotient a pour limite 0, donc la suite $(\frac{x_n}{\ln n})$ est encadrée par deux suites de limite 1. Via le théorème des gendarmes, on en déduit que $x_n \sim \ln n$.

Feuille d'exercices de révision pour le DS3

ECE3 Lycée Carnot

26 novembre 2009

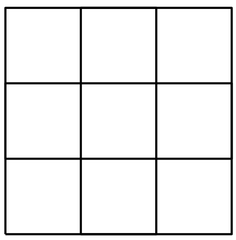
Exercice 1

Lors de la finale du 100 mètres, huit coureurs se disputent les trois places du podium. Parmi eux, trois sont américains.

1. Combien y a-t-il de podiums possibles (il va de soi que l'ordre est important) ?
2. Combien de podiums sont 100% américains ?
3. Combien de podiums contiennent au moins un athlète américain ?
4. Combien de podiums contiennent exactement un athlète américain ?

Exercice 2

On dispose de trois couleurs (par exemple blanc, noir et rouge) pour colorier la grille suivante :



Chaque case est coloriée d'une seule couleur. Chacune des réponses doit être justifiée.

1. Combien y a-t-il de coloriages possibles ?
2. Parmi ceux-ci, combien n'utilisent pas la couleur rouge ?
3. Combien de coloriages utilisent les trois couleurs ?
4. Combien de coloriages avec exactement trois cases noires ?
5. Combien de coloriages avec au plus deux cases blanches ?
6. Combien de coloriages avec deux cases blanches et trois noires (et donc quatre rouges) ?
7. Combien de coloriages pour lesquels chaque ligne est unicolore ?
8. Combien de coloriages avec chaque ligne unicolore et une ligne de chaque couleur ?
9. Combien de coloriages avec une case de chaque couleur dans chaque ligne et dans chaque colonne ?

Exercice 3

Dans une urne se trouvent n boules numérotées de 1 à n. On tire p boules dans l'urne.

1. On suppose tout d'abord que les tirages sont simultanés.
   (a) Quel est le nombre total de tirages possibles ?
   (b) Déterminer le nombre de tirages pour lesquels le plus grand numéro tiré est le numéro k (en supposant $p \leqslant k \leqslant n$).
   (c) En déduire la formule $\sum_{k=p}^{k=n} \binom{k-1}{p-1} = \binom{n}{p}$.
2. On suppose désormais les tirages successifs avec remise.
   (a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?
   (b) Combien de tirages commencent par la boule n°2 ?
   (c) Combien de tirages pour lesquels le premier numéro tiré est strictement inférieur au dernier ?
   (d) Combien de tirages où on a tiré exactement deux numéros différents ?
   (e) Combien de tirages pour lesquels la somme des numéros tirés vaut $p+2$?

Exercice 4

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$ et la suite récurrente (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Étudiez les variations de f et dresser son tableau de variations en précisant les limites éventuelles.
3. Montrer que, $\forall x > 0$, $f(x) - x = \dfrac{\frac{1}{x} - 1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1}$, et en déduire le signe de $f(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
5. Montrer que $\forall x \in \left[\dfrac{1}{2}; 1\right]$, $f(x) \geqslant \sqrt{\dfrac{3}{4}}$, et en déduire que $\forall x \in \left[\dfrac{1}{2}; 1\right]$, $|f(x) - 1| \leqslant \dfrac{|x-1|}{\sqrt{3}}$
6. Montrer que la suite (u_n) prend toutes ses valeurs dans l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}; 1\right]$.
7. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
8. Déterminer la nature et la limite éventuelle de (u_n).
9. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - 1| \leqslant \dfrac{|u_0 - 1|}{\sqrt{3}^n}$.
10. Écrire un programme Pascal calculant une valeur de n pour laquelle $|u_n - 1| < \varepsilon$, où ε est un réel positif choisi par l'utilisateur.

Corrigé de la feuille de révision n°2

Exercice 1

1. Ce sont des arrangements, donc $8 \times 7 \times 6 = 336$ classements possibles.
2. Il y en a $3 \times 2 \times 1 = 6$ (autre façon de voir les choses, ce sont les permutations des trois athlètes américains).
3. Il y a $5 \times 4 \times 3 = 60$ podiums qui ne contiennent pas d'athlètes américains (puisque 5 athlètes ne sont pas américains), donc $336 - 60 = 276$ podiums contenant au moins un américain.
4. Il faut choisir l'américain parmi trois possibles, les deux autres parmi les cinq autres athlètes, et l'ordre, soit $\binom{3}{1} \times \binom{5}{2} \times 3! = 3 \times 10 \times 6 = 180$ podiums avec exactement un américain.

Exercice 2

1. Il y a neuf cases et trois choix pour chaque, donc $3^9 = 19\ 683$ coloriages possibles au total.
2. S'il n'y a pas de rouge, il reste deux possibilités pour chaque case, soit $2^9 = 512$ coloriages sans rouge.
3. Notons A l'ensemble des coloriages sans rouge, B ceux sans blanc et C ceux sans noir. Par la formule de Poincaré, $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$. Or, $|A| = |B| = |C| = 2^9$ (c'est la question précédente !) ; $|A \cap B| = |A \cap C| = |B \cap C| = 1$ (en effet, si on s'interdit deux couleurs sur les trois, il ne reste plus qu'un coloriage, celui où toutes les cases sont de la troisième couleur), et $|A \cap B \cap C| = 0$ (on ne peut pas supprimer les trois couleurs), donc $|A \cup B \cup C| = 3(2^9 - 1)$. Or, l'ensemble $A \cup B \cup C$ est exactement le complémentaire de l'ensemble des coloriages utilisant les trois couleurs, qui sont donc au nombre de $3^9 - 3(2^9 - 1) = 18\ 150$.
4. Il faut choisir quelles sont les trois cases noires parmi les neuf, puis il reste deux choix de couleurs possibles pour chacune des six cases restantes, soit $\binom{9}{3} \times 2^6 = 5\ 376$ coloriages.
5. Il y a soit 0 case blanche (2^9 cas), soit une case blanche ($\binom{9}{1} \times 2^8$ cas), soit deux ($\binom{9}{2} \times 2^7$ cas), donc au total 7 424 possibilités.
6. Il faut choisir les deux cases qui seront noires, puis les trois cases blanches parmi les sept restantes. On n'aura alors plus le choix pour les quatre cases rouges. Il y a donc $\binom{9}{2} \times \binom{7}{3} = 1\ 260$ possibilités.
7. Il y a trois choix possibles pour la couleur de chaque ligne, donc $3^3 = 27$ coloriages possibles.
8. Cela revient à choisir une permutation des couleurs, donc $3! = 6$ possibilités.
9. Il y a $3!$ choix possibles pour la première ligne (il faut une case de chaque couleur), encore deux possibilités pour la première case de la deuxième ligne, mais ensuite tout est imposé (je vous laisse le vérifier), donc il y a seulement $3! \times 2 = 12$ possibilités.

Exercice 3

1. (a) Si les tirages sont simultanées il y en a $\binom{n}{p}$.

   (b) Cela signifie qu'on a tiré la boule numéro k (pas de choix possible pour celle-là), et que les $p-1$ autres boules tirées ont un numéro strictement inférieur à k, donc compris entre 1 et $n-1$. Il y a donc $\binom{k-1}{p-1}$ choix possibles.

(c) Quand on tire p boules dans un lot de n, le plus grand numéro tiré est necessairement compris entre p et n. Si on fait la somme des résultats de la question précédente pour k compris entre p et n, on doit donc trouver le nombre total de tirages possibles, c'est-à-dire que $\displaystyle\sum_{k=p}^{k=n} \binom{k-1}{p-1} = \binom{n}{p}$.

2. (a) Puisqu'il y a remise possible, il y a n^p tirages possibles.

   (b) La première boule étant imposée, il reste n choix pour chacun des $p-1$ tirages restants, soit n^{p-1} tirages.

   (c) Les $p-2$ tirages intermédiaires peuvent donner n'importe quel résultat, soit n^{p-2} possibilités. Quand aux deux boules extrêmes, puisqu'on sait qu'elles ont des numéros différents et que leur ordre est imposé, on les connait dès qu'on a choisi les deux numéros dans la liste de n possibles, il y a donc pour elles $\binom{n}{2}$ possibilités. Cela fait un total de $n^{p-2} \times \binom{n}{2} = \dfrac{n^{p-1}(n-1)}{2}$ tirages possibles.

   (d) Il faut choisir les deux numéros tirés (parmi n possibles), et choisir par exemple quels sont les tirages où on a obtenu le plus petit des deux numéros. Ces tirages forment un sous-ensemble de l'ensemble des p tirages, qui ne doit pas être vide ni être constitué de tous les tirages (sinon on n'a en fait tiré qu'un seul numéro). Il y a $2^p - 2$ tels sous-ensembles de tirages (puisqu'il y a 2^p sous-ensembles de tirages au total, et qu'on en a interdit 2), donc le nombre de tirages cherché est $(2^p-2)\dbinom{n}{2} = (2^{p-1}-1)n(n-1)$.

   (e) Les boules étant numérotées à partir de 1, la somme des numéros tirés vaut au moins p. Si on veut qu'elle soit égale à $p+2$, il n'y a que deux possibilités : on a tiré $p-1$ fois le numéro 1 et une fois le numéro 3 (p possibilités, il suffit de choisir le tirage où on a obtenu le 3) ; ou bien $p-2$ fois le numéro 1 et deux fois le numéro 2 (il faut choisir les deux tirages en question, soit $\dbinom{p}{2}$ possibilités). Il y a donc $p + \dfrac{p(p-1)}{2} = \dfrac{p(p+1)}{2}$ tirages possibles.

Exercice 4

1. Le trinome $x^2 - x + 1$ ayant pour discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3$, il est toujours strictement positif, et la fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

2. La fonction racine carrée étant strictement croissante sur son ensemble de définition, on peut se contenter d'étudier les variations du trinome à l'intérieur de la racine. Sa dérivée est $2x-1$, donc la fonction f est strictement décroissante sur $\left]-\infty; \dfrac{1}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$. elle admet pour minimum $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} + 1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Ses limites en $+\infty$ et $-\infty$ sont de façon immédiate égales à $+\infty$.

3. Calculons donc via multiplication par la quantité conjuguée $f(x) - x = \sqrt{x^2-x+1} - x = \dfrac{x^2-x+1-x^2}{\sqrt{x^2-x+1}+x} = \dfrac{1-x}{\sqrt{x^2-x+1}-x} = \dfrac{\frac{1}{x}-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}$ (on divise tout par x en haut et en bas, ce qui revient à diviser ce qui se trouve dans la racine carrée par x^2). Le dénominateur de cette expression étant positif, elle est du signe de $\dfrac{1}{x} - 1$. Or, si $x > 0$, $\dfrac{1}{x} < 1 \Leftrightarrow x > 1$, donc $f(x) - x > 0$ sur $]0; 1]$, et $f(x) - x < 0$ sur $[1; +\infty[$.

4. La seule solution est manifestement 1.

5. C'est vrai non seulement sur $\left[\dfrac{1}{2}; 1\right]$, mais sur $\mathbb{R}$ tout entier au vu de l'étude des variations de

f. On a donc $|f(x)-1| = |\sqrt{x^2-x+1}-1| = \left|\dfrac{x^2-x+1-1}{\sqrt{x^2-x+1}+1}\right| = \dfrac{|x||x-1|}{|f(x)+1|}$. Or, $|x| \leqslant 1$, et $|f(x)+1| \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}+1 > \sqrt{3}$, donc $|f(x)-1| \leqslant \dfrac{|x-1|}{\sqrt{3}}$.

6. C'est une récurrence toute simple : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ appartient bien à l'intervalle voulu, et si u_n est dans cet intervalle, comme f est croissante sur $\left[\dfrac{1}{2};1\right]$, on aura $f\left(\dfrac{1}{2}\right) \leqslant f(u_n) \leqslant f(1)$, soit $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$. Comme $\dfrac{\sqrt{3}}{2} > \dfrac{1}{2}$, on a bien $u_{n+1} \in \left[\dfrac{1}{2};1\right]$, ce qui achève la récurrence.
7. On a vu plus haut que sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2};1\right]$, on avait $f(x)-x>0$, donc $u_{n+1}-u_n>0$, et la suite (u_n) est croissante.
8. Étant croissante et majorée par 1, la suite converge. Sa limite ne peut être qu'un point fixe de la fonction, qui n'en a qu'un. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
9. Pour $n=0$, on a bien $|u_0-1| \leqslant |u_0-1|$. Supposons le résultat vérifié au rang n, on a alors d'après la question 5 $|u_{n+1}-1| = |f(u_n)-1| \leqslant \dfrac{|u_n-1|}{\sqrt{3}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{3}} \times \dfrac{|u_0-1|}{\sqrt{3}^n} = \dfrac{|u_0-1|}{\sqrt{3}^{n+1}}$, ce qui achève la récurrence.
10. On sait que $|u_n-1|$ sera inférieur à ε dès que $\dfrac{1}{2(\sqrt{3})^n}$ le sera, d'où le programme suivant :

```
PROGRAM youplaboum ;
USES wincrt ;
VAR u,e,z : real ; n : integer ;
BEGIN
WriteLn('Choisissez la valeur de epsilon') ;
ReadLn(e) ;
u :=1/2 ; n :=0 ; z :=1/2 ;
REPEAT
n :=n+1 ;
z :=z/sqrt(3) ;
u :=sqrt(u*u-u+1) ;
UNTIL z < e ;
WriteLn(n) ;
END.
```

Feuille d'exercices n°10 : Séries

ECE3 Lycée Carnot

3 décembre 2009

Exercice 1 (**)

Étudier la nature et calculer la somme éventuelle des séries suivantes (distinguer selon la valeur de x pour les séries faisant intervenir un x) :

- $\sum n^2 x^n$
- $\sum \frac{n-1}{3^n}$
- $\sum \frac{n(n-1)x^n}{n!}$
- $\sum \frac{n^2 8^n}{n!}$
- $\sum \frac{4n^2+5n}{5^n}$
- $\sum \frac{2n^2}{n^3-1}$
- $\sum \frac{(-1)^n n^2}{3^n}$
- $\sum \frac{4(-1)^n}{n!}$
- $\sum \frac{n}{3^{2n+1}}$
- $\sum \frac{n+7}{2^n n!}$
- $\sum \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$
- $\sum \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$

Exercice 2 (**)

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$, puis calculer sa somme après avoir mis u_n sous la forme $\dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{n+2}$.

Exercice 3 (**)

Calculer par une méthode similaire à celle de l'exercice précédent la somme de la série de terme général $\dfrac{1}{4n^2-1}$.

Exercice 4 (*)

On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{e^n + e^{-n}}$. Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $0 \leqslant u_n \leqslant e^{-n}$, en déduire la nature et une majoration de la somme de la série.

Exercice 5 (***)

Soit (a_n) une suite décroissante convergeant vers 0. On note S_n et R_n les sommes partielles et restes de la série de terme général $(-1)^n a_n$.

1. Montrer que les suites (S_{2n}) et S_{2n+1} sont adjacentes.
2. En déduire que la série converge et que $|R_n| \leqslant a_{n+1}$.

Exercice 6 (**)

Soit u_n une suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \geqslant 1$, $u_{n+1} = e^{-u_n} u_n$.

1. Montrer que la suite u_n est convergente et préciser sa limite.
2. En posant $v_n = \ln u_n$, calculer la somme partielle de la série de terme général u_n en fonction de v_0 et de v_{n+1}.
3. En déduire la nature de $\sum u_n$.

Exercice 7 (*)

On note S_n la somme partielle d'indice n de la série harmonique. Montrer que $S_{2n} - S_n \geqslant \dfrac{1}{2}$. En déduire une nouvelle preuve de la divergence de la série harmonique.

Exercice 8 (**)

On considère une suite (u_n) définie par $u_0 \in [0;1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
2. Déterminer la nature de la série de terme général u_n^2 et sa somme éventuelle.
3. Prouver que la série de terme général $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est divergente.

Corrigé de la feuille d'exercices n°10

Exercice 1 (**)

- Une petite transformation est nécessaire pour ramener cette série à un calcul connu, en l'occurence celui de la somme d'une série géométrique dérivée seconde :
$$\sum_{n=0}^{N} n^2x^n = \sum_{n=0}^{N} n(n-1)x^n + \sum_{n=0}^{N} nx^n = x^2\sum_{n=0}^{N} n(n-1)x^{n-2} + x\sum_{n=0}^{N} nx^{n-1}$$
La série est donc convergente si (et seulement si) $|x| < 1$, et sa somme vaut en appliquant les formules du cours
$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2x^n = x^2 \times \frac{2}{(1-x)^3} + x \times \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{2x^2 + x(1-x)}{(1-x)^3} = \frac{x^2+x}{(1-x)^3} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{n-1}{3^n} = \sum_{n=0}^{N} \frac{n}{3^n} - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{N} n \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{3^n}$. La série est donc convergente, de somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-1}{3^n} = \frac{1}{3}\frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2} - \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \times \frac{9}{4} - \frac{3}{2} = \frac{3}{4} - \frac{3}{2} = -\frac{3}{4}$.
- $\displaystyle\sum_{n=2}^{N} \frac{n(n-1)x^n}{n!} = x^2\sum_{n=2}^{N} \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} = x^2\sum_{n=0}^{N-2} \frac{x^n}{n!}$, qui converge vers x^2e^x (note : on a commencé la somme de départ à $n = 2$ car les termes obtenus pour $n = 0$ et $n = 1$ seraient de toute façon nuls).
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{n^2 8^n}{n!} = \sum_{n=0}^{N} \frac{n(n-1)8^n}{n!} + \sum_{n=0}^{N} \frac{n8^n}{n!} = \sum_{n=2}^{N} \frac{8^n}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{N} \frac{8^n}{(n-1)!} = 8^2\sum_{n=2}^{N} \frac{8^{n-2}}{(n-2)!} + 8\sum_{n=1}^{N} \frac{8^{n-1}}{(n-1)!} = 8^2\sum_{n=0}^{N-2} \frac{8^n}{n!} + 8\sum_{n=0}^{N-1} \frac{8^n}{n!}$, qui converge vers $64e^8 + 8e^8 = 72e^8$.
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{4n^2+5n}{5^n} = 4\sum_{n=0}^{N} \frac{n^2}{5^n} + \sum_{n=0}^{N} \frac{n}{5^{n-1}}$ qui converge vers $4 \times \dfrac{\frac{1}{5} \times (\frac{1}{5}+1)}{(1-\frac{1}{5})^3} + \dfrac{1}{(1-\frac{1}{5})^2}$ (en utilisant le résultat du premier calcul de l'exercice pour la première somme) $= \dfrac{24}{25} \times \dfrac{5^3}{4^3} + \dfrac{5^2}{4^2} = \dfrac{30}{16} + \dfrac{25}{16} = \dfrac{55}{16}$.
- En constatant que $\forall n \geqslant 2$, $\dfrac{2n^2}{n^3-1} \geqslant \dfrac{2n^2}{n^3} = \dfrac{2}{n}$, on voit que notre série est une série à terme positifs dont le terme général est minoré par celui d'une série convergente, donc elle diverge.
- On utilise encore une fois le résultat du premier calcul de l'exercice : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n n^2}{3^n} = \frac{-\frac{1}{3} \times (-\frac{1}{3}+1)}{(1+\frac{1}{3})^3} = -\frac{2}{9} \times \frac{3^3}{4^3} = -\frac{6}{64} = -\frac{3}{32}$.
- Ici, on a une série exponentielle, c'est du cours ! $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{n!} = 4e^{-1} = \frac{4}{e}$.
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{n}{3^{2n+1}} = \frac{1}{3^3}\sum_{n=0}^{N} \frac{n}{3^{2n-2}} = \frac{1}{27}\sum_{n=0}^{N} \frac{n}{9^{n-1}}$ On reconnait une série géométrique dérivée, qui converge vers $\dfrac{1}{27}\dfrac{1}{(1-\frac{1}{9})^2} = \dfrac{1}{27} \times \dfrac{81}{64} = \dfrac{3}{64}$.

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{n+7}{2^n n!} = \sum_{n=1}^{N} \frac{n}{2^n n!} + \sum_{n=0}^{N} \frac{7}{2^n n!} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2^n n!} + \sum_{n=0}^{N} \frac{7}{2^n n!}$, qui converge vers $\frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}} + 7e^{\frac{1}{2}} = \frac{15}{2} e^{\frac{1}{2}}$.

- On reconnait une somme télescopique dans la somme partielle : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln k = \ln(n+1) - \ln 1$. Comme cette expression ne converge pas quand n tend vers $+\infty$, la série est divergente.

- Même principe avec un télescopage plus complexe : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}\right) = \sum_{k=1}^{n} 2\ln(k+1) - \ln k - \ln(k+2) = 2\sum_{k=2}^{n+1} \ln k - \sum_{k=1}^{n} \ln k - \sum_{k=3}^{n+2} \ln k = 2\ln 2 + 2\ln(n+1) - \ln 1 - \ln 2 - \ln(n+1) - \ln(n+2) = \ln 2 + \ln(n+1) - \ln(n+2) = \ln 2 + \ln \frac{n+1}{n+2}$. Cette expression converge quand n tend vers $+\infty$, donc la série est convergente, et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right) = \ln 2$.

Exercice 2 (**)

Le plus simple pour déterminer la nature de la série est de chercher à calculer sa somme. Suivant les conseils de l'énoncé, on calcule $\displaystyle\frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+1} = \frac{a(n+1)(n+2) + bn(n+2) + cn(n+1)}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a(n^2+3n+2) + b(n^2+2n) + c(n^2+n)}{n(n+1)(n+2)} = \frac{(a+b+c)n^2 + (3a+2b+c)n + 2a}{n(n+1)(n+2)}$. par identification des coefficients, on doit avoir $a+b+c=0$, $3a+2b+c=0$ et $2a=1$, soit $a=\frac{1}{2}$. Les deux autres équations donnent $b+c=-\frac{1}{2}$, soit $c=-b-\frac{1}{2}$, puis $2b+c=-\frac{3}{2}$, soit $b-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$, dont on déduit $b=-1$, puis $c=\frac{1}{2}$. On a donc finalement $\displaystyle\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)}$.

On peut faire un joli télescopage à partir de ceci : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}$. La somme partielle ayant une limite, la série converge, et on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$.

Exercice 3 (**)

Le principe est le même que dans l'exercice précédent : $\displaystyle\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}$, avec a et b vérifiant $a(2n+1) + b(2n-1) = 1$, soit $n(2a+2b) + a - b = 1$. On obtient facilement $a=-b$, puis $a=\frac{1}{2}$ et $b=-\frac{1}{2}$, d'où $\displaystyle\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2(2n+1)}$. On a donc, en notant $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{2k+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)}$ (c'est une somme télescopique simple). La somme partielle converge, donc la série est convergente, et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$.

Exercice 4 (*)

Comme $e^n + e^{-n} > e^n > 0$, on a bien $u_n \leqslant \dfrac{1}{e^n} = e^{-n}$. On en déduit que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} e^{-k}$. La série de terme général u_n est donc majorée par une série géométrique convergente (car $\dfrac{1}{e}$ est compris entre -1 et 1). La série étant à termes positifs, elle converge vers une somme inférieure à $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} = \frac{1}{1-\frac{1}{e}} = \frac{e}{e-1}$.

Exercice 5 (***)

1. Commençons par remarquer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $(-1)^{2n} a_{2n} = a_{2n} \geqslant 0$ et $(-1)^{2n+1} a_{2n+1} = -a_{2n+1} \leqslant 0$ (une suite qui tend vers 0 en décroissant est forcément constituée de termes positifs). On a donc $S_{2n+2} - S_{2n} = (-1)^{2n+2} a_{2n+2} + (-1)^{n+1} a_{2n+1} = a_{2n+2} - a_{2n+1} < 0$ puisque la suite a_n est décroissante. De même, $S_{2n+3} - S_{2n+1} = -a_{2n+3} + a_{2n+2} > 0$. Les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont donc respectivement décroissante et croissante. Comme de plus, $S_{2n+1} - S_{2n} = -a_{2n+1} \overset{n\to+\infty}{\to} 0$, les suites sont adjacentes, donc convergent vers une même limite.
2. La série de terme général $(-1)^n a_n$ converge donc vers la limite commune de ces deux suites. De plus, on a $R_{2n} = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} a_{2k+2} - a_{2k+1} < 0$, mais également $R_{2n} = -a_{2k+1} + \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} a_{2k+2} - a_{2k+3} \leqslant -a_{k+1}$, donc on a bien $|R_{2n}| \leqslant a_{2n+1}$. On montre de façon très similaire que $R_{2n+1} > 0$ et $R_{2n+1} \leqslant a_{2n+2}$, ce qui achève la démonstration.

Exercice 6 (**)

1. On montre par une récurrence facile que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. En effet, c'est vrai pour u_0, et si on le suppose vrai pour u_n, comme $e^{-u_n} > 0$, on aura bien $u_{n+1} = e^{-u_n} u_n > 0$. De plus, comme $u_n > 0$, on a $e^{-u_n} < 1$, et donc $e^{-u_n} u_n < u_n$. Autrement dit, la suite (u_n) est décroissante. Comme elle est minorée par 0, elle converge. Comme il s'agit d'une suite récurrente, sa limite l est nécessairement solution de l'équation $l = le^{-l}$, ce qui se produit si $l = 0$ ou si $e^{-l} = 1$, ce qui ne laisse que la possibilité $l = 0$. La suite (u_n) converge donc vers 0.
2. On remarque que $v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln(e^{-u_n} u_n) = -u_n + \ln u_n = v_n - u_n$, ce qu'on peut aussi écrire $u_n = v_n - v_{n+1}$. On en déduit que $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (v_k - v_{k+1}) = v_0 - v_{n+1}$ (il y a télescopage).
3. Comme u_n tend vers 0, la suite v_n diverge vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$, et la série (S_n) diverge donc vers $+\infty$.

Exercice 7 (*)

On a $S_{2n} - S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$. Chacun des n termes de cette dernière somme étant plus grand que $\dfrac{1}{2n}$, la somme est plus grande que $n \times \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{2}$. Or, si la série harmonique convergeait vers une certaine somme s, on devrait avoir $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \lim_{n\to+\infty} S_n = s$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_{2n} - S_n = 0$.

Ce n'est manifestement pas le cas, donc la série harmonique ne converge pas (un petit raisonnement par l'absurde).

Exercice 8 (**)

1. On peut commencer par constater assez aisément que la suite (u_n) est décroissante puisque $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leqslant 0$. Cela donne bien envie de tenter de la minorée, par exemple par 0. Prouvons via une petite récurrence que tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $[0;1]$. C'est vrai pour u_0 par hypothèse. Supposons donc $0 \leqslant u_n \leqslant 1$, on a alors également $0 \leqslant 1 - u_n \leqslant 1$, donc $0 \leqslant u_n(1 - u_n) \leqslant 1$. Or, $u_n(1 - u_n) = u_n - u_n^2 = u_{n+1}$. Cette constatation achève la récurrence.

   La suite (u_n) étant décroissante minorée, elle converge. Comme c'est une suite récurrente, sa limite l vérifie $l = l - l^2$, soit $-l^2 = 0$, ce qui n'est possible que si $l = 0$. On peut en déduire que la suite (u_n) converge vers 0.

2. En revenant à la relation de récurrence, on constate que $u_n^2 = u_n - u_{n+1}$, d'où $\sum_{k=0}^{k=n} u_k^2 = \sum_{k=0}^{k=n} u_k - u_{k+1} = u_0 - u_{n+1}$ (par télescopage). D'après la question précédente, $\lim_{n \to +\infty} u_0 - u_{n+1} = u_0$, donc la série de terme général u_n^2 converge vers u_0.

3. La somme partielle va également être télescopique : $\sum_{k=0}^{k=n} \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) = \sum_{k=0}^{k=n} \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_0)$. Or, toujours en utilisant notre connaissance de la limite de (u_n), on a $\lim_{n \to +\infty} \ln(u_{n+1}) = -\infty$, ce qui signifie que la série considérére diverge.

Feuille d'exercices n°11 : Systèmes linéaires

ECE3 Lycée Carnot

9 décembre 2009

Exercice 1 (**)

Résoudre les systèmes suivantes :

1. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 5z & = & 13 \\ 2x & + & 4y & - & 5z & = & -12 \\ 3x & - & 2y & - & z & = & 3 \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} & & 2y & - & z & = & 1 \\ -2x & - & 4y & + & 3z & = & -1 \\ x & + & y & - & 3z & = & -6 \end{array}\right.$

3. $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & t & = & 2 \\ 2x & + & y & + & z & + & t & = & 1 \\ x & + & 2y & + & 2z & & & = & 2 \end{array}\right.$

4. $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & - & 2t & = & 6 \\ 2x & - & y & - & 2z & - & 3t & = & 8 \\ 3x & + & 2y & - & z & + & 2t & = & 4 \\ 2x & - & 3y & + & 2z & + & t & = & -8 \end{array}\right.$

5. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & z & = & 1 \\ -x & - & \frac{1}{2}y & + & \frac{1}{2}z & = & -\frac{1}{2} \end{array}\right.$

6. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & a \\ -2x & - & 3y & + & 3z & = & b \\ x & + & y & - & 2z & = & c \end{array}\right.$

Pour ce dernier système, déterminer le nombre de solutions selon les valeurs de a, b et c, et exprimer en fonction de a, b et c la solution lorsqu'elle est unique.

Exercice 2 (***)

Soit P un polynome de degré 3 vérifiant $P(1) = P(-1) = P'(1) = 1$. Un tel polynome existe-t-il ? est-il unique ?

Même question avec un polynome de degré 4 tel que $P(i) = i$ pour $i = 0$, $i = 1$, $i = 2$, $i = 3$ et $i = 4$.

Exercice 3 (**)

Quelques élèves imaginaires ont obtenu les notes et le total de points suivants à un concours. Retrouver le coefficient de chaque matière :

	Maths	*Langues*	*Français*	*AEHSC*	*Total*
Aristide	0	10	20	10	310
Bernadette	10	10	10	10	300
Célian	0	10	10	20	290
Daphné	0	20	10	10	280
Eusèbe	20	5	5	5	270

Exercice 4 (***)

Résoudre les systèmes suivants, en distinguant des cas selon la valeur du paramètre m :

1. $$\left\{\begin{array}{ccccccc} (1-m)x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ -2x & - & (3+m)y & + & 3z & = & 0 \\ x & + & y & - & (2+m)z & = & 0 \end{array}\right.$$

2. $$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2mx & + & (m-1)y & + & (5-m)z & = & 0 \\ (m-1)x & + & 2my & + & (m+7)z & = & 0 \end{array}\right.$$

3. $$\left\{\begin{array}{ccccccc} mx & + & 2y & + & 3z & = & 3 \\ (m-1)x & + & my & + & z & = & 1 \\ (m+1)x & + & my & + & (m-1)z & = & m-1 \end{array}\right.$$

Exercice 5 (***)

Pour les courageux, résoudre le magnifique système suivant (les valeurs obtenues ne doivent pas être horribles) :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x & - & y & + & 2z & + & 3t & + & w & = & 3 \\ x & + & y & + & 2z & + & 7t & + & 3w & = & 19 \\ -x & + & 4y & - & 5z & + & 12t & - & 4w & = & 33 \\ 2x & - & 4y & + & 5z & + & t & & & = & -12 \\ 4x & - & 3y & + & 4z & + & 11t & + & 9w & = & 15 \end{array}\right.$$

Corrigé de la feuille d'exercices n°11

Exercice 1 (**)

1. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 5z & = & 13 \\ 2x & + & 4y & - & 5z & = & -12 \\ 3x & - & 2y & - & z & = & 3 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow 2L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow 3L_1 - L_3 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 5z & = & 13 \\ & & -8y & + & 15z & = & 38 \\ & & -4y & + & 16z & = & 36 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_2 - 2L_3 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 5z & = & 13 \\ & & -8y & + & 15z & = & 38 \\ & & & - & 17z & = & -34 \end{array}\right.$$

On remonte le système : $z = 2$, puis $-8y = 38 - 15z = 8$, donc $y = -1$, et enfin $x = 13 + 2y - 5z = 1$, donc $\mathcal{S} = \{(1; -1; 2)\}$.

2. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} & & 2y & - & z & = & 1 \\ -2x & - & 4y & + & 3z & = & -1 \\ x & + & y & - & 3z & = & -6 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_3 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & 3z & = & -6 \\ -2x & - & 4y & + & 3z & = & -1 \\ & & 2y & - & z & = & 1 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow 2L_1 + L_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & 3z & = & -6 \\ & & -2y & - & 3z & = & -13 \\ & & 2y & - & z & = & 1 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & 3z & = & -6 \\ & & -2y & - & 3z & = & -13 \\ & & & & -4z & = & -12 \end{array}\right.$$

On remonte le système : $z = 3$, puis $-2y = -13 + 3z = -4$, donc $y = 2$, et enfin $x = -6 - y + 3z = 1$, donc $\mathcal{S} = \{(1; 2; 3)\}$.

Pour le troisième système, on peut tricher un peu et éviter de recourir au pivot : commençons par soustraire les deux premières lignes : on obtient $-x = 1$, donc $x = -1$. La dernière équation devient alors $2y+2z = 3$, soit $y+z = \frac{3}{2}$. En reportant dans la première équation, on a donc $-1+\frac{3}{2}+t = 2$, soit $t = \frac{3}{2}$. La deuxième équation nous donne la même chose, on a donc $\mathcal{S} = \left\{\left(-1; y; \frac{3}{2} - y; \frac{3}{2}\right) \mid y \in \mathbb{R}\right\}$.

$$4. \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & - & 2t & = & 6 \\ 2x & - & y & - & 2z & - & 3t & = & 8 \\ 3x & + & 2y & - & z & + & 2t & = & 4 \\ 2x & - & 3y & + & 2z & + & t & = & -8 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow 2L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow 3L_1 - L_3 \\ L_4 \leftarrow 2L_1 - L_4 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & - & 2t & = & 6 \\ & & 5y & + & 8z & - & t & = & 4 \\ & & 4y & + & 10z & - & 8t & = & 14 \\ & & 7y & + & 4z & - & 5t & = & 20 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow 8L_2 - L_3 \\ L_4 \leftarrow 5L_2 - L_4 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & - & 2t & = & 6 \\ & & 5y & + & 8z & - & t & = & 4 \\ & & 36y & + & 54z & & & = & 18 \\ & & 18y & + & 36z & & & = & 0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_3 - 2L_4 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & - & 2t & = & 6 \\ & & 5y & + & 8z & - & t & = & 4 \\ & & 36y & + & 54z & & & = & 18 \\ & & & - & 18z & & & = & 18 \end{array}\right.$$

Je me suis permis de ne pas triangulariser de façon standard pour avoir des calculs un peu plus simples. On obtient donc $z = -1$, puis $36y = 18 - 54z = 72$, donc $y = 2$; $-t = 4 - 5y - 8z = 2$, donc $t = -2$, et enfin $x = 6 - 2y - 3z + 2t = 1$, donc $\mathcal{S} = \{(1; 2; -1; -2)\}$.

Le cinquième système est constitué de deux équations proportionnelles (on a $L_1 = -2L_2$) donc équivalentes. Tout ce qu'on peut faire est exprimer une inconnue en fonction des deux autres, par exemple $\mathcal{S} = \{(x; y; 2x + y - 1) \mid (x; y) \in \mathbb{R}^2\}$.

$$6. \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & a \\ -2x & - & 3y & + & 3z & = & b \\ x & + & y & - & 2z & = & c \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow 2L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & a \\ & & y & + & z & = & 2a + b \\ & & y & + & z & = & a - c \end{array}\right.$$

Le système ne peut avoir de solution que si $2a+b = a-c$, c'est-à-dire si $a+b+c = 0$. Dans ce cas, on a $y = 2a+b-z$, et $x = a-2y+z = -3a-2b+3z$, donc $\mathcal{S} = \{(-3a-2b+3z; 2a+b-z; z) \mid z \in \mathbb{R}\}$. Dans le cas contraire, $\mathcal{S} = \emptyset$.

Exercice 2 (***)

Soit $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polynome de degré 3. Chacune des conditions imposées se traduit sous forme d'équation linéaire sur les coefficients du polynome : $P(1) = 1 \Leftrightarrow a+b+c+d = 1$; $P(-1) = 1 \Leftrightarrow -a+b-c+d = 1$; et comme $P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, $P'(1) = 1 \Leftrightarrow 3a + 2b + c = 1$. La différence des deux premières équations donne $a + c = 0$, soit $c = -a$, et la dernière équation devient alors $2a + 2b = 1$, soit $b = \dfrac{1}{2} - a$. Enfin, la somme des deux premières équations se traduit par $b + d = 1$, soit $d = 1 - b = a + \dfrac{1}{2}$. On a finalement $\mathcal{S} = \left\{\left(a; \dfrac{1}{2} - a; -a; a + \dfrac{1}{2}\right)\right\}$. Un exemple de polynome solution est obtenu en prenant $a = 1$, on a alors $P(x) = x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 - x + \dfrac{3}{2}$. La solution n'est pas unique, il y a un polynome différent pour chaque valeur possible de a.

Même principe, mais avec un polynome de degré 4, donc de la forme $P(x) = ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$. La première équation donne simplement $e = 0$, et les quatre autres se traduisent sous forme d'un magnifique système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} a & + & b & + & c & + & d & = & 1 \\ 16a & + & 8b & + & 4c & + & 2d & = & 2 \\ 81a & + & 27b & + & 9c & + & 3d & = & 3 \\ 256a & + & 64b & + & 16c & + & 4d & = & 4 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} a & + & b & + & c & + & d & = & 1 \\ 14a & + & 6b & + & 2c & & & = & 0 \\ 78a & + & 24b & + & 6c & & & = & 0 \\ 252a & + & 60b & + & 12c & & & = & 0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow \frac{L_2}{2} \\ L_3 \leftarrow \frac{L_3}{6} \\ L_4 \leftarrow \frac{L_4}{12} \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} a & + & b & + & c & + & d & = & 1 \\ 7a & + & 3b & + & c & & & = & 0 \\ 13a & + & 4b & + & c & & & = & 0 \\ 21a & + & 5b & + & c & & & = & 0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} a & + & b & + & c & + & d & = & 1 \\ 7a & + & 3b & + & c & & & = & 0 \\ 6a & + & b & & & & & = & 0 \\ 14a & + & 2b & & & & & = & 0 \end{array}\right.$$

Les deux dernières équations étant respectivement équivalentes à $b = -6a$ et $b = -7a$, on en déduit que $a = 0$, puis $b = 0$, $c = 0$ et $d = 1$. Il n'y a donc qu'un polynome vérifiant les conditions imposées : $P(x) = x$ (tout ça pour ça...).

Exercice 3 (**)

Notons a, b, c et d les coefficients respectifs des mathématiques, des langues, du français et d'AEHSC. Le tableau de notes se traduit alors (en divisant tout par 10 pour avoir des coefficients plus sympathiques) :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} & & b & + & 2c & + & d & = & 31 \\ a & + & b & + & c & + & d & = & 30 \\ & & b & + & c & + & 2d & = & 29 \\ & & 2b & + & c & + & d & = & 28 \\ 2a & + & \frac{1}{2}b & + & \frac{1}{2}c & + & \frac{1}{2}d & = & 27 \end{array}\right.$$

Pas besoin d'utiliser le pivot pour résoudre un tel système : $L_1 - L_3$ donne $c - d = 2$, soit $d = c - 2$, et $L_1 - L_4$ donne $c - b = 3$, soit $b = c - 3$. En reportant dans la première équation, on a donc $c-3+2c+c-2 = 31$, soit $c = 9$, dont on déduit que $b = 6$ et $d = 7$. Comme $a+b+c+d = 30$, on a donc $a = 8$, et il ne reste plus qu'à vérifier que la dernière équation est bien satisfaite par ces valeurs (ce qui est heureusement le cas). Les coefficients sont donc 8 pour les maths, 6 pour les langues, 9 pour le français et 7 pour l'AEHSC.

Exercice 4 (***)

$$1. \left\{ \begin{array}{ccccccc} (1-m)x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ -2x & - & (3+m)y & + & 3z & = & 0 \\ x & + & y & - & (2+m)z & = & 0 \end{array} \right. \qquad L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & (2+m)z & = & 0 \\ -2x & - & (3+m)y & + & 3z & = & 0 \\ (1-m)x & + & 2y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \qquad \begin{array}{c} \\ L_2 \leftarrow 2L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow (1-m)L_1 - L_3 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} (1-m)x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ & & (-1-m)y & - & (1+2m)z & = & 0 \\ & & (-1-m)y & + & (1-(1-m)(2+m))z & = & 0 \end{array} \right.$$

En soustrayant les deux dernières équations, on obtient $(1-(1-m)(2+m)+1+2m)z = 0$, soit $(1-2-m+2m+m^2+1+2m)z = (m^2+3m)z = 0$. Si $m \neq 0$ et $m \neq -3$, on a donc $z = 0$. Ensuite, on a alors $y = 0$ si $m \neq -1$, puis $x = 0$. Il y a trois cas particuliers.

Pour $m = 0$, en gardant les deux premières équations du système triangulaire obtenu, on a

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ & & -y & - & z & = & 0 \end{array} \right.$$

soit $y = -z$ puis $x = z - 2y = 3z$, donc $\mathcal{S} = \{(3z; -z; z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

Pour $m = -3$, en gardant ces mêmes équations, on a :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} 4x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ & & 2y & + & 5z & = & 0 \end{array} \right.$$

soit $y = -\dfrac{5}{2}z$ puis $x = \dfrac{1}{4}(z - 2y) = \dfrac{3}{2}z$, donc $\mathcal{S} = \{(\frac{3}{2}z; -\frac{5}{2}z; z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

Enfin, quand $m = -1$, on a $z = 0$, c'est cette fois-ci la deuxième équation qui est toujours vérifiée, et la première devient $2x + 2y - z = 0$, soit $x = -y$, donc $\mathcal{S} = \{(-y; y; 0) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

$$2. \left\{ \begin{array}{ccccccc} 2mx & + & (m-1)y & + & (5-m)z & = & 0 \\ (m-1)x & + & 2my & + & (m+7)z & = & 0 \end{array} \right.$$

Additionnons les deux équations, on obtient $(3m-1)x + (3m-1)y + 2z = 0$; soustrayons-les et on a $(m+1)x - (m+1)y - 2(m+1)z = 0$. Si $m \neq -1$, la deuxième équation se simplifie en $x - y - 2z = 0$, donc $2z = x - y$, et en reportant dans la première on a $3mx + (3m-2)y = 0$. Si $m \neq 0$, on en déduit que $x = \dfrac{2-3m}{3m}y$, et $z = \dfrac{x-y}{2} = \dfrac{1-3m}{3m}y$, et $\mathcal{S} = \{(\frac{2-3m}{3m}y; y; \frac{1-3m}{3m}y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

Si $m = -1$, le système se réduit à l'équation $-2x - 2y + 6z = 0$, donc $\mathcal{S} = \{(x; y; \frac{1}{3}(x+y)) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.

Enfin, si $m=0$, les deux équations sont $-y+5z=0$, soit $y=-5z$, et $-x+7z=0$, soit $x=7z$, donc $\mathcal{S}=\{(7z;-5z;z)\mid z\in\mathbb{R}\}$

Pour le troisième, quelques petites astuces de calcul évitent de trop se fatiguer :

$$3.\left\{\begin{array}{ccccccc} mx & + & 2y & + & 3z & = & 3 \\ (m-1)x & + & my & + & z & = & 1 \\ (m+1)x & + & my & + & (m-1)z & = & m-1 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2\leftarrow L_2-L_3 \\ L_3\leftarrow L_2+L_3 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} mx & + & 2y & + & 3z & = & 3 \\ 2x & & & + & (m-2)z & = & m-2 \\ 2mx & + & 2my & + & mz & = & m \end{array}\right.$$

Si $m\neq 0$, on peut simplifier la dernière équation, puis faire $L_1\leftarrow L_1-L_3$:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} (m-2)x & & & + & 2z & = & 2 \\ 2x & & & + & (m-2)z & = & m-2 \\ 2x & + & 2y & + & z & = & 1 \end{array}\right.$$

Reste à faire $L_1\leftarrow(m-2)L_2-2L_1$, ce qui donne $(m-2)^2z-4z=(m-2)^2-4$, soit $m(m-4)z=m(m-4)$. Si $m\neq 4$ (on a déjà retiré la valeur 0), on a $z=1$, d'où on déduit $x=0$, puis $y=0$. La seule solution est alors le triplet $(0;0;1)$.

Dans le cas particulier $m=0$, le système est :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} & & 2y & + & 3z & = & 3 \\ -x & & & + & z & = & 1 \\ x & & & - & z & = & -1 \end{array}\right.$$

Les deux équations extrêmes sont équivalentes et donnent $x=z-1$, puis la première donne $y=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2}z$, donc $\mathcal{S}=\{(z-1;\frac{3}{2}-\frac{3}{2}z;z)\mid z\in\mathbb{R}\}$.

Dans le cas particulier $m=4$, reprenons le système obtenu plus haut :

$$3.\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & & & + & 2z & = & 2 \\ 2x & & & + & 2z & = & 2 \\ 2x & + & 2y & + & z & = & 1 \end{array}\right.$$

On a alors $x=1-z$, et $2y=1-2x-z=-1+z$, donc $\mathcal{S}=\{(1-z;-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}z;z)\mid z\in\mathbb{R}\}$.

Exercice 5 (***)

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x & - & y & + & 2z & + & 3t & + & w & = & 3 \\ x & + & y & + & 2z & + & 7t & + & 3w & = & 19 \\ -x & + & 4y & - & 5z & + & 12t & - & 4w & = & 33 \\ 2x & - & 4y & + & 5z & + & t & & & = & -12 \\ 4x & - & 3y & + & 4z & + & 11t & + & 9w & = & 15 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2\leftarrow L_2-L_1 \\ L_3\leftarrow L_1+L_3 \\ L_4\leftarrow 2L_1-L_4 \\ L_5\leftarrow 4L_1-L_5 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x & - & y & + & 2z & + & 3t & + & w & = & 3 \\ & & 2y & & & + & 4t & + & 2w & = & 16 \\ & & 3y & - & 3z & + & 15t & - & 3w & = & 36 \\ & & 2y & - & z & + & 5t & + & 2w & = & 18 \\ & - & y & + & 4z & + & t & - & 5w & = & -3 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3\leftarrow 3L_4-L_3 \\ \\ L_5\leftarrow 4L_4+L_5 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x & - & y & + & 2z & + & 3t & + & w & = & 3 \\ & & 2y & & & + & 4t & + & 2w & = & 16 \\ & & 3y & & & & & + & 9w & = & 18 \\ & & 2y & - & z & + & 5t & + & 2w & = & 18 \\ & & 7y & & & + & 21t & + & 3w & = & 69 \end{array}\right. \qquad L_2 \leftarrow 21L_2 - 4L_5$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x & - & y & + & 2z & + & 3t & + & w & = & 3 \\ & & 14y & & & & & + & 30w & = & 60 \\ & & 3y & & & & & + & 9w & = & 18 \\ & & 2y & - & z & + & 5t & + & 2w & = & 18 \\ & & 7y & & & + & 21t & + & 3w & = & 69 \end{array}\right.$$

Plutôt que de faire un dernier pivot, constatons que la troisième équation donne $3w = 6 - y$, ce qui, reporté dans la deuxième, permet d'obtenir $14y + 10(6 - y) = 60$, soit $4y = 0$. On a donc $y = 0$, puis $3w = 6$ donc $w = 2$; $21t = 69 - 3 \times 2 - 7 \times 0 = 63$ donc $t = 3$; $z = 2 \times 0 + 5 \times 3 + 2 \times 2 - 18 = 1$ et enfin $x = 3 + 0 - 2 \times 1 - 3 \times 3 - 2 = -10$. Le système admet donc une solution unique : $\mathcal{S} = \{(-10; 0; 1; 3; 2)\}$.

Feuille d'exercices n°12 : Fonctions à deux variables

ECE3 Lycée Carnot

15 décembre 2009

Exercice 1 (* à **)

Après avoir déterminé et représenté le domaine de définition des fonctions suivantes, tracer leur ligne de niveau 4, puis leurs applications partielles pour x fixé égal à 4, puis y fixé égal à 4 :

1. $f_1(x,y) = 2x + 3y$
2. $f_2(x,y) = xy$
3. $f_3(x,y) = \dfrac{x}{y}$
4. $f_4(x,y) = \ln(x^2 + y^2 - 1)$

Exercice 2 (**)

On considère la fonction de deux variables $f(x,y) = \dfrac{xy}{|x| + |y|}$. Déterminer son domaine de définition, et tracer sa ligne de niveau 1.

Exercice 3 (**)

Après avoir déterminé leur domaine de définition, calculer les dérivées partielles (y compris les quatre dérivées secondes) des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
2. $g(x,y) = x^y$
3. $h(x,y) = x^3 + 2xy + 3xy^2 + y^4$
4. $i(x,y) = (x^2 + y^2)e^{-xy}$
5. $j(x,y) = \dfrac{x - y}{x^2 + y}$
6. $k(x,y) = x(\ln y)^2 + y^2$

Exercice 4 (* à **)

Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 des fonctions suivantes, et déterminer si elles admettent des points critiques :

1. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$
2. $g(x,y) = 3xy - x^3 - y^3$
3. $h(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

Exercice 5 (***)

Déterminer les points critiques des fonctions suivantes, et déterminer la nature de ces points critiques en calculant $f(x,y) - f(x_0,y_0)$ dans chacun des cas (x_0, y_0 étant le point critique) et en essayant d'en déterminer le signe.

1. $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 3x - 6y$
2. $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 5$

Pour les exercices 6 et 7, on utilisera le résultat suivant pour déterminer la nature des points critiques : si (x_0,y_0) est un point critique de f, on note $D = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0)\right)^2$, alors (x_0,y_0) n'est pas un extremum si $D < 0$, mais c'en est un si $D > 0$, maximum si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) < 0$, minimum sinon. Si $D = 0$, on ne peut pas conclure.

Exercice 6 (***)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 + 2x + y^2 + 3y$.

1. Calculer les dérivées partielles et dérivées partielles secondes de la fonction f.
2. Montrer que f a un unique point critique, qu'on déterminera.
3. Déterminer la nature de ce point critique.
4. Écrire f sous forme de somme de carrés et déterminer les courbes de niveau de f. Peut-on retrouver la nature du point critique par ce biais ?

Exercice 7 (***)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = 2e^{-x} + 3x^2 - 2xy + y^2$.

1. Calculer les dérivées partielles et dérivées partielles secondes de la fonction f.
2. Montrer que l'équation $2x - e^{-x} = 0$ a une unique solution α (au'on ne cherchera surtout pas à calculer) sur $\mathbb{R}$, et en déduire que f a pour unique point critique (α, α).
3. Montrer que ce point critique correspond à un minimum local de valeur $\alpha(2+\alpha)$.

Exercice 8 (**)

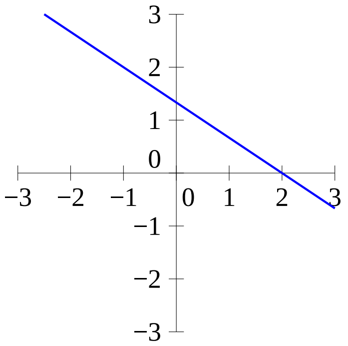
La fonction de production d'une entreprise est donnée par l'équation $P(K,L) = 2K^{\frac{1}{5}}L^{\frac{3}{5}}$, K désignant le capital et L le travail.

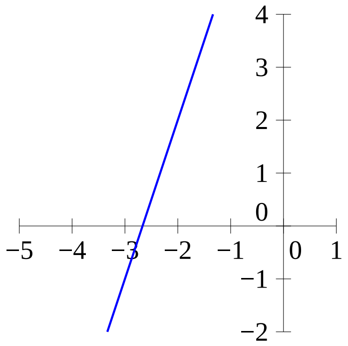
1. Calculer les productivités marginales du capital et du travail.
2. Montrer que ces productivités sont décroissantes.
3. Le rendement d'échelle de la fonction est obtenu en calculant $\frac{P(aK,aL)}{P(K,L)}$. Que vaut-il ici ? Quelle signification peut-on donner à cette valeur ?

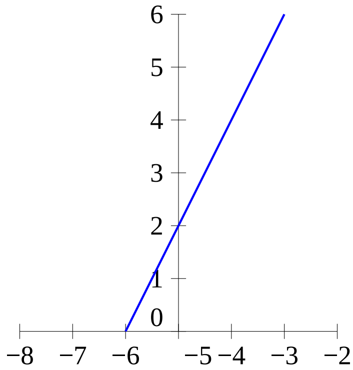
Corrigé de la feuille d'exercices n°12

Exercice 1 (* à **)

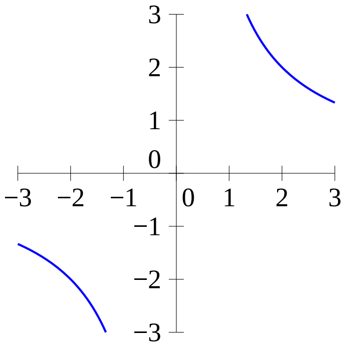
1. La fonction f_1 est évidemment définie sur $\mathbb{R}^2$ tout entier. La ligne de niveau 4 de f_1 est définie comme $\{(x,y) \mid 2x+3y=4\} = \left\{(x,y) \mid y = \dfrac{4}{3} - \dfrac{2}{3}x\right\}$. Cette ligne de niveau est une droite, tout comme d'ailleurs les représentations graphiques des applications partielles obtenues pour $x=4$ et $y=4$, qui ont pour équations respectives $y \mapsto 3y+8$ et $x \mapsto 2x+12$. Il est tout à fait normal qu'on obtienne que des droites ici puisque la surface représentative de f_1 est un plan. Ci-dessous, dans l'ordre, la ligne de niveau 4, la représentation de l'application partielle obtenue pour $x=4$, puis celle obtenue pour $y=4$.

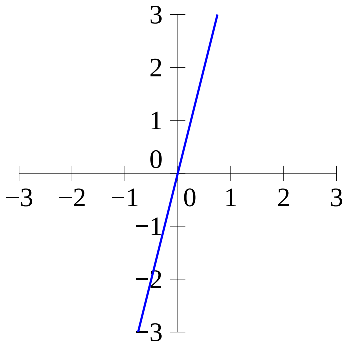


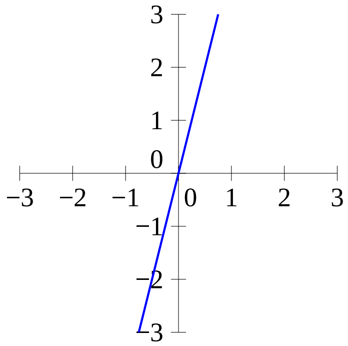




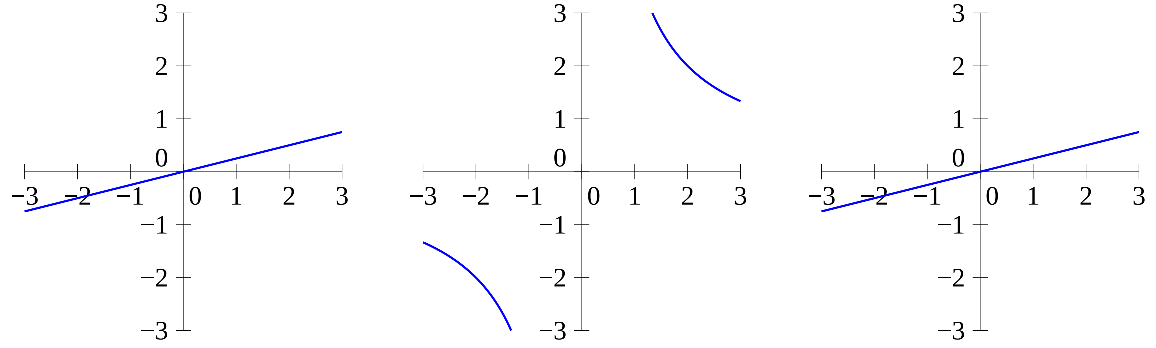
2. La fonction f_2 est également définie sur $\mathbb{R}^2$, sa ligne de niveau 4 a pour équation $xy=4$, c'est-à-dire $y = \dfrac{4}{x}$, qui est une équation d'hyperbole. Les représentations graphiques des deux applications partielles sont par contre des droites, d'équation $y \mapsto 4y$ et $x \mapsto 4x$.



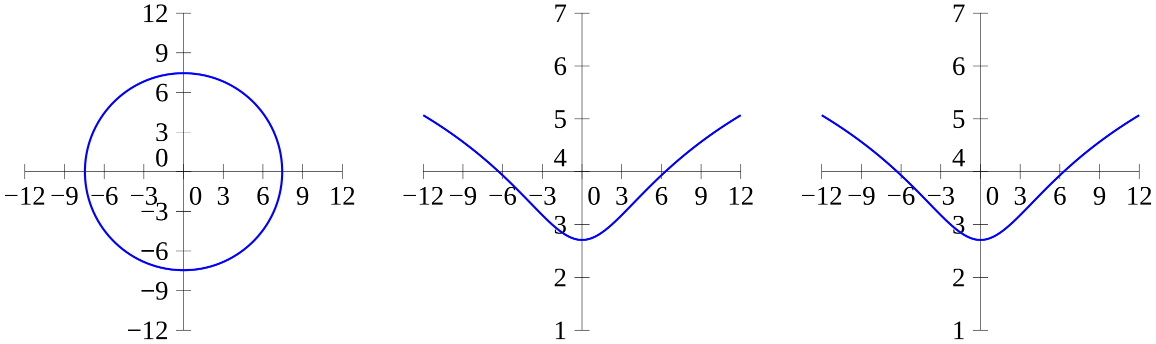




3. La fonction f_3 est définie si $y \neq 0$, donc sur le plan $\mathbb{R}^2$ privé de l'axe des ordonnées (je me suis dispensé des représentations graphiques des domaines de définition, car ce n'est vraiment pas intéressant). La ligne de niveau 4 a pour équation $\dfrac{x}{y} = 4$, soit $y = \dfrac{x}{4}$, c'est-à-dire qu'il s'agit d'une droite, privée toutefois d'un point puisqu'on ne peut pas avoir $y=0$ (ça ne se voit pas sur le graphique). L'application partielle obtenue en fixant $x=4$ a pour équation $y \mapsto \dfrac{4}{y}$, c'est une hyperbole. Par contre, l'application partielle obtenue pour $x=4$ est une droite d'équation $x \mapsto \dfrac{x}{4}$ (même allure que la ligne de niveau 4).

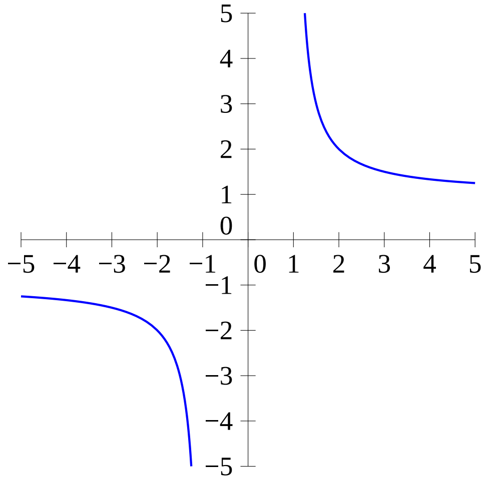


4. La fonction f_4 est définie si $x^2 + y^2 > 1$, c'est-à-dire en dehors du disque de centre 0 et de rayon 1. La ligne de niveau 4 a pour équation $\ln(x^2 + y^2 - 1) = 4$, soit $x^2 + y^2 = e^4 + 1$, il s'agit d'un cercle de centre 0 et de rayon $\sqrt{e^4 + 1}$. Les deux applications partielles ont une représentation graphique similaire, celle de la fonction $x \mapsto \ln(x^2 + y^2 - 1)$, dont on peut faire une étude sommaire si on le souhaite (elle est paire, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, de limite $+\infty$ en $+\infty$ et admettant une branche parabolique de direction (Ox)).



Exercice 2 (**)

La fonction f est définie dès que $|x| + |y| \neq 0$. Or, les deux valeurs absolues étant positives, leur somme ne peut être nulle que si elles sont toutes les deux nulles, c'est-à-dire si $x = y = 0$. On a donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2 \backslash \{0; 0\}$. Quant à la ligne de niveau cherchée, elle a pour équation $xy = |x| + |y|$. Ceci ne peut pas se produire quand x et y sont de signes opposés, car on aurait alors une valeur négative à gauche et une valeur positive à droite. Supposons donc x et y de même signe et même, pour commencer, positifs ou nuls tous les deux. On cherche alors les couples (x, y) tels que $xy = x + y$, soit $y(x - 1) = x$, ou encore $y = \dfrac{x}{x-1}$. Pour que x et y soient tous les deux positifs, il faut se restreindre aux cas où $x > 1$. De même, si x et y sont négatifs tous les deux, on chercher à avoir $xy = -x - y$, soit $y = -\dfrac{x}{x+1}$, ce qui fonctionnera bien si $x < -1$. Chacun de ces deux morceaux de ligne de niveau est une branche d'hyperbole (en effet, on a $\dfrac{x}{x-1} = \dfrac{x-1+1}{x-1} = 1 + \dfrac{1}{x-1}$; et $-\dfrac{x}{x+1} = -\dfrac{x+1-1}{x+1} = -1 + \dfrac{1}{x+1}$). On obtient une courbe de niveau ressemblant à ceci :



Exercice 3 (**)

Pour chaque fonction sauf j (où les calculs sont assez pénibles), seule une des deux dérivées partielles secondes croisées est calculée, l'autre lui étant égale. Cela ne vous dispense naturellement pas de calculer également la dernière dérivée pour vérifier ce fait.

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^2$, et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$;
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2} - x \times \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \dfrac{x^2+y^2-x^2}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2)} = \dfrac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$;
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = -\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$.
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ (même calcul que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$).
2. La fonction $g : (x,y) \mapsto e^{y\ln x}$ est définie si $x > 0$, donc sur le demi-plan situé strictement au-dessus de l'axe des abscisses. De plus, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y}{x}e^{y\ln x}$; $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \ln x\ e^{y\ln x}$;
$\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = -\dfrac{y}{x^2}e^{y\ln x} + \dfrac{y^2}{x^2}e^{y\ln x} = \left(\dfrac{y(y-1)}{x^2}\right)x^y$;
$\dfrac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{1}{x}e^{y\ln x} + \dfrac{y\ln x}{x}e^{y\ln x} = \dfrac{1+y\ln x}{x}x^y$;
$\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = (\ln x)^2 x^y$.
3. La fonction h est définie sur $\mathbb{R}^2$, et $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y) = 3x^2+2y+3y^2$; $\dfrac{\partial h}{\partial y}(x,y) = 2x+6xy+4y^3$;
$\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,y) = 6x$; $\dfrac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(x,y) = 2+6y$; $\dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x,y) = 6x+12y^2$.
4. La fonction i est définie sur $\mathbb{R}^2$ et $\dfrac{\partial i}{\partial x}(x,y) = 2xe^{-xy} - y(x^2+y^2)e^{-xy} = (2x-yx^2-y^3)e^{-xy}$;
de même, $\dfrac{\partial i}{\partial y}(x,y) = (2y-xy^2-x^3)e^{-xy}$;
$\dfrac{\partial^2 i}{\partial x^2}(x,y) = (2-2xy)e^{-xy} - y(2x-yx^2-y^3)e^{-xy} = (2-4xy+y^2x^2+y^4)e^{-xy}$;
$\dfrac{\partial^2 i}{\partial y \partial x}(x,y) = (-x^2-3y^2)e^{-xy} - x(2x-yx^2-y^3)e^{-xy} = (-3x^2-3y^2+yx^3+xy^3)e^{-xy}$

$\dfrac{\partial^2 i}{\partial y^2}(x,y) = (2 - 4xy + x^2y^2 + x^4)e^{-xy}$

5. La fonction j est définie si $y \neq -x^2$, c'est-à-dire sur le plan privé d'une parabole, et $\dfrac{\partial j}{\partial x}(x,y) = \dfrac{x^2 + y - 2x(x-y)}{(x^2+y)^2} = \dfrac{-x^2 + 2xy + y}{(x^2+y)^2}$; $\dfrac{\partial j}{\partial y}(x,y) = \dfrac{-(x^2+y) - (x-y)}{(x^2+y)^2} = \dfrac{-x^2 - x}{(x^2+y)^2}$
$\dfrac{\partial^2 j}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{(-2x+2y)(x^2+y)^2 - 2 \times 2x(x^2+y)(-x^2+2xy+y)}{(x^2+y)^4} =$
$\dfrac{(-2x+2y)(x^2+y) - 4x(-x^2+2xy+y}{(x^2+y)^3} = \dfrac{2x^3 - 6xy - 6x^2y + 2y^2}{(x^2+y)^3}$
$\dfrac{\partial^2 j}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{(2x+1)(x^2+y)^2 - 2(x^2+y)(-x^2+2xy+y}{(x^2+y)^4}$
$= \dfrac{2x^3 + 2xy + x^2 + y + 2x^2 - 4xy - 2y}{(x^2+y)^3} = \dfrac{2x^3 + 3x^2 - 2xy - y}{(x^2+y)^3}$
$\dfrac{\partial^2 j}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{(-2x-1)(x^2+y)^2 - 2 \times 2x(x^2+y)(-x^2-x)}{(x^2+y)^4} = \dfrac{(-2x-1)(x^2+y) - 4x(-x^2-x)}{(x^2+y)^3}$
$= \dfrac{-2x^3 - 2xy - x^2 - y + 4x^3 + 4x^2}{(x^2+y)^3} = \dfrac{2x^3 + 3x^2 - 2xy - y}{(x^2+y)^3}$
$\dfrac{\partial^2 j}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{-2(-x^2-x)}{(x^2+y)^3} = \dfrac{2x^2+2x}{(x^2+y)^3}$

6. La fonction k est définie si $y > 0$, donc sur un demi-plan, et $\dfrac{\partial k}{\partial x}(x,y) = (\ln y)^2$; $\dfrac{\partial k}{\partial y}(x,y) = x \times \dfrac{2}{y}(\ln y) + 2y = \dfrac{2x \ln y}{y} + 2y$;
$\dfrac{\partial^2 k}{\partial x^2}(x,y) = 0$;
$\dfrac{\partial^2 k}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{2 \ln y}{y}$;
$\dfrac{\partial^2 k}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{2x - 2x\ln y}{y^2} + 2 = 2x\dfrac{1 - \ln y}{y} + 2$

Exercice 4 (* à **)

1. On a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + 2y$, donc la recherche de points critiques revient à résoudre le système constitué des deux équations $2x + y = 0$ et $x + 2y = 0$, qui a pour solution unique $(0;0)$.
2. On a $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 3y - 3x^2 = 3(y - x^2)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 3x - 3y^2 = 3(x - y^2)$.Le spoints sont obtenus en recherchant les couples vérifiant $x = y^2$ et $y = x^2$. Par une simple substitution, on obtient $y^4 = y$, soit $y(y^3 - 1) = 0$, équation ayant pour solutions $y = 0$ et $y = 1$. On obtient alors respectivement $x = 0$ et $x = 1$, d'où les deux points critiques $(0;0)$ et $(1;1)$.
3. On a cette fois $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 15$ et $\dfrac{\partial h}{\partial y}(x,y) = 6xy - 12$. On se retrouve donc avec les deux équations $x^2 + y^2 = 5$ et $2xy = 4$ (oui, j'ai volontairement laissé un facteur 2 en trop). En additionnant et en soustrayant ces deux équations, on obtient $x^2 + 2xy + y^2 = 9$ et $x^2 - 2xy + y^2 = 1$, soit $(x+y)^2 = 3$ et $(x-y)^2 = 1$. Il y a pas moins de quatre cas à étudier : si $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 3 \\ x & - & y & = & 1 \end{array}\right.$, alors $x = 2$ et $y = 1$; si $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & -3 \\ x & - & y & = & 1 \end{array}\right.$, alors $x = -1$ et $y = -2$; si $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 3 \\ x & - & y & = & -1 \end{array}\right.$, alors $x = 1$ et $y = 2$; enfin si $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & -3 \\ x & - & y & = & -1 \end{array}\right.$, alors $x = -2$ et $y = 1$. Il y a donc quatre points critiques pour la fonction h : $(-2;1)$; $(-1;-2)$; $(1;2)$ et $(2;1)$.

Exercice 5 (***)

1. Pour la première fonction, on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x+y-3$, et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y+x-6$, le système à résoudre a pour unique solution $x=0$ et $y=3$, qui est donc le seul point critique de la fonction f. Comme $f(0;3) = -9$, on cherche le signe de $f(x,y)-9 = x^2+y^2+xy-3x-6y+9 = \left(y-3+\dfrac{x}{2}\right)^2 + \dfrac{3x^2}{4} \geqslant 0$. On en déduit que le point critique est un minimum global pour f. Pour ceux qui peinent dans le scalculs, rappelons que $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.
2. La deuxième fonction a pour dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x-2y$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y-2x-2$, ce qui donne un système qui se résout aisément : $x=y$, puis $y=1$ et $x=1$. Le point $(1;1)$ est donc le seul point critique pour la fonction f. Comme $f(1;1) = 4$, on cherche le signe de $f(x,y)-4 = x^2+2y^2-2xy-2y+1 = x^2-2xy+y^2+y^2-2y+1 = (x-y)^2+(y-1)^2 \geqslant 0$. Comme précédemment, le point critique est donc un minimum global pour la fonction.

Exercice 6 (***)

1. Calculons donc : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x+2$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y+3$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2$.
2. C'est tout juste s'il y a un système à résoudre ici : $2x+2=0$ donne $x=-1$, et $2y+3=0$ donne $y = -\dfrac{3}{2}$. Le seul point critique est donc le point $\left(-1; -\dfrac{3}{2}\right)$.
3. Utilisons donc le critère donné juste avant l'exercice : la valeur de D est ici $2\times 2 - 0^2 = 4 > 0$, donc le point critique est un extremum, et comme $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-1, -\dfrac{3}{2}\right) > 0$, le point critique est un minimum (local) de la fonction f.
4. Constatons que $f(x) = x^2+2x+1+y^2+3y+\dfrac{9}{4}-\dfrac{13}{4} = (x+1)^2+\left(y+\dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{13}{4}$. On peut en déduire facilement que la fonction admet pour minimum global $-\dfrac{13}{4}$, valeur atteinte pour son point critique. On peut même faire mieux et donner l'allure des courbes de niveau k : si $k < -\dfrac{13}{4}$, la courbe de niveau est vide ; sinon, on obtient l'équation $(x+1)^2+\left(y+\dfrac{3}{2}\right)^2 = k+\dfrac{13}{4}$, qui est l'équation du cercle de centre $\left(-1; -\dfrac{3}{2}\right)$ (le point critique de f) et de rayon $\sqrt{k+\dfrac{13}{4}}$.

Exercice 7 (***)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = 2e^{-x}+3x^2-2xy+y^2$.

1. Calculons à nouveau : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2e^{-x}+6x-2y$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2x+2y$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2e^{-x}+6$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -2$ et enfin $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2$.
2. Appelons g la fonction (à une variable) définie par $g(x) = 2x - e^{-x}$. Cette fonction est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ puisque somme de deux fonctions croissantes (e^{-x} est décroissante, donc $-e^{-x}$ est croissante). De plus, elle a pour limites respectives $-\infty$ et $+\infty$ en $-\infty$ et

en $+\infty$ (pas de problème de calcul, il n'y pas de forme indéterminée). Cette fonction est donc bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et 0 admet donc un unique antécédent par g. Autrement dit, l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution α.

Or, la recherche des points critiques de f se ramène au système $\left\{\begin{array}{rcl} 2e^{-x} + 6x - 2y & = & 0 \\ -2x & = & 2y \end{array}\right. \Leftrightarrow$ $\left\{\begin{array}{rcl} 2e^{-x} + 4x & = & 0 \\ x & = & y \end{array}\right.$. La première équation revient à dire que $2g(x) = 0$, et on en déduit que l'unique point critique de f est le point $(\alpha; \alpha)$.

3. Utilisons le critère de détermination de la nature des points critiques : ici, $D = (2e^{-\alpha} + 6) \times 2 - (-2)^2 = 4e^{-\alpha} + 8 = 8\alpha + 8$ puisque $g(\alpha) = 0$. Comme on a $g(0) = -1$, on peut affirmer que $\alpha > 0$, donc $D > 0$. Le point critique correspond donc à un extrêmum pour f. De plus, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\alpha, \alpha) > 0$, donc il s'agit d'un minimum. Pour déterminer sa valeur, il ne reste plus qu'à calculer $f(\alpha, \alpha) = 2e^{-\alpha} + 3\alpha^2 - 2\alpha^2 + \alpha^2 = 4\alpha + 2\alpha^2 = 2\alpha(2 + \alpha)$.

Exercice 8 (**)

1. C'est un simple calcul de dérivées partielles : $\dfrac{\partial P}{\partial K}(K, L) = \dfrac{2}{5} K^{\frac{1}{5}-1} L^{\frac{3}{5}} = \dfrac{2}{5} \dfrac{L^{\frac{3}{5}}}{K^{\frac{4}{5}}}$; et $\dfrac{\partial P}{\partial L}(K, L) = \dfrac{6}{5} K^{\frac{1}{5}} L^{\frac{3}{5}-1} = \dfrac{6}{5} \dfrac{K^{\frac{1}{5}}}{L^{\frac{2}{5}}}$

2. Il suffit pour cela de calculer les dérivées partielles secondes (et encore, pas toutes) : $\dfrac{\partial^2 P}{\partial K^2}(K, L) = -\dfrac{8}{25} \dfrac{L^{\frac{3}{5}}}{K^{\frac{9}{5}}}$; et $\dfrac{\partial^2 P}{\partial L^2}(K, L) = -\dfrac{12}{25} \dfrac{K^{\frac{1}{5}}}{L^{\frac{7}{5}}}$. Ces deux dérivées étant négatives, les rendements sont bien décroissants.

3. Caculons plutôt $\dfrac{P(aK, aL)}{aP(K, L)} = \dfrac{2(aK)^{\frac{1}{5}}(aL)^{\frac{3}{5}}}{2aK^{\frac{1}{5}} L^{\frac{3}{5}}} = \dfrac{2a^{\frac{4}{5}} K^{\frac{1}{5}} L^{\frac{3}{5}}}{2aK^{\frac{1}{5}} L^{\frac{3}{5}}} = \dfrac{1}{a^{\frac{1}{5}}}$. Ce facteur étant supérieur à 1 si a est lui-même supérieur à 1, cela veut dire qu'en augmentant simultanément le travail et le capital d'un même facteur a, la prodution augmente d'un facteur plus élevé. Autrement dit, on fait des économies d'échelle en augmentant les valeurs de tous les facteurs.

Sujet du Concours Blanc 2005

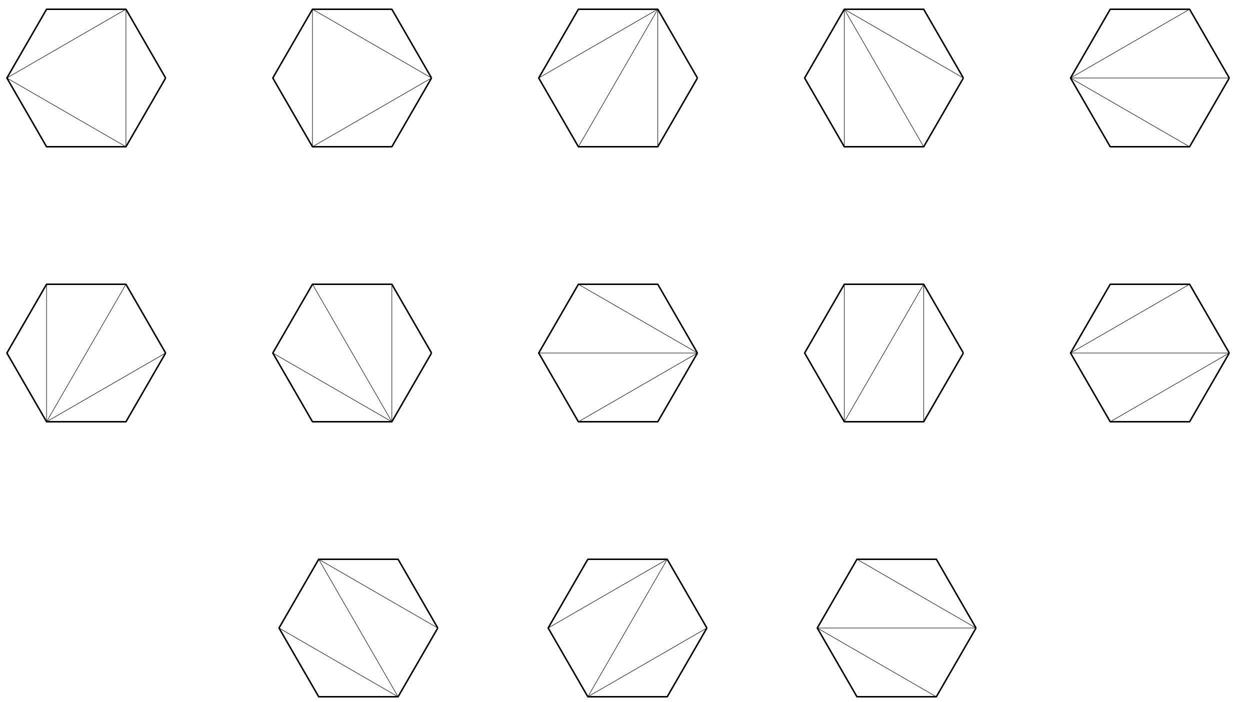
ECE3 Lycée Carnot

20 décembre 2009

Corrigé du Concours Blanc 2005

I. Les triangulations d'Euler

1. Voici les 13 hexagones demandés, les triangulations ayant subi une tentative de classification selon la forme de la figure obtenue :



2. Il n'y a qu'une façon de trianguler un triangle (en ne faisant rien !), donc $c_1 = 1$. Un quadrilatère peut par contre être trianguler de deux façons : il suffit de tracer une diagonale pour le couper en deux triangles et il y a deux diagonales. On en déduit que $c_2 = 2$.

3. Une fois le triangle $A_1A_{k+2}A_{n+3}$ imposé, il reste à découper en triangles les deux polygones qui sont de part et d'autre de ce triangle. Le premier a pour sommets A_1, A_2, …, A_{k+2}, soit $k+2$ sommets, donc peut être triangulé de c_k façons. Le deuxième a pour sommets A_{k+2}, A_{k+3}, …, A_{n+3}, soit $(n+3)-(k+2)+1 = n-k+2$ sommets, donc peut être triangulé de c_{n-k} façons. Les deux triangulations se faisant indépendamment l'une de l'autre, il y a au total c_kc_{n-k} triangulations de notre polygone initial contenant le triangle $A_1A_{k+2}A_{n+3}$.

4. Il y a par définition c_{n+1} triangulations pour le polygone considéré. Chacune de ces triangulations contient exactement un triangle du type $A_1A_{k+2}A_{n+3}$, donc il suffit pour obtenir le nombre total de triangulations du polygone d'additionner les nombres obtenus à la question précédente pour toutes les valeurs possibles de k, c'est-à-dire pour k compris entre 0 et n. Autrement dit, $c_{n+1} = \sum_{k=0}^{k=n} c_kc_{n-k}$.

5. À l'aide de la formule précédente, on calcule $c_5 = \sum_{k=0}^{k=4} c_kc_{n-k} = c_0c_4 + c_1c_3 + c_2^2 + c_3c_1 + c_4c_0 = 14 + 5 + 4 + 5 + 14 = 42$ (les plus courageux pourront tenter de dessiner les 42 triangulations possibles sur un heptagone régulier).

II. Recherche d'une formule close

1. C'est un simple calcul : $\dfrac{C_{k+1}}{C_k} = \dfrac{k+1}{k+2}\dfrac{\binom{2k+2}{k+1}}{\binom{2k}{k}} = \dfrac{k+1}{k+2} \times \dfrac{(2k+2)!}{(k+1)!^2} \times \dfrac{k!^2}{(2k)!} = \dfrac{k+1}{k+2} \times \dfrac{(2k+2)!}{(2k)!} \times \dfrac{k!^2}{(k+1)!^2} = \dfrac{k+1}{k+2} \times \dfrac{(2k+2)(2k+1)}{(k+1)^2} = \dfrac{2(2k+1)}{k+2} = \dfrac{4k+2}{k+2}$.

2. Utilisons donc l'indice généreusement donné par l'énoncé : en posant $i = n - k$, on obtient $T_n = \sum_{k=0}^{k=n} kC_kC_{n-k} = \sum_{i=0}^{i=n}(n-i)C_{n-i}C_i = \sum_{i=0}^{i=n} nC_iC_{n-i} - \sum_{i=0}^{i=n} iC_iC_{n-i} = NS_n - T_n$. On a donc $T_n = nS_n - T_n$, soit $2T_n = S_n$ et donc $T_n = \dfrac{n}{2}S_n$.

3. Partons plutôt du membre de droite, et utilisons le résultat de la question 1 en l'écrivant sous la forme $(4k+2)C_k = (k+2)C_{k+1}$: $4T_n + 3S_n = 4\sum_{k=0}^{k=n} kC_kC_{n-k} + 3\sum_{k=0}^{k=n} C_kC_{n-k} = \sum_{k=0}^{k=n}(4k+3)C_kC_{n-k} = \sum_{k=0}^{k=n}(4k+2)C_kC_{n-k} + \sum_{k=0}^{k=n} C_kC_{n-k} = \sum_{k=0}^{k=n}(k+2)C_{k+1}C_{n-k} + S_n$. Faisons maintenant un petit changement d'indice en posant $i = k+1$ dans la première somme, et on a $4T_n + 3S_n = \sum_{i=1}^{i=n+1}(i+1)C_iC_{n+1-i} + S_n = \sum_{i=0}^{i=n+1}(i+1)C_iC_{n+1-i} - C_0C_{n+1} + S_n$. Or, $C_0 = \dfrac{1}{1}\dbinom{0}{0} = 1$, donc $C_0C_{n+1} = C_{n+1}$ qui, par hypothèse est égal à S_n. Il nous reste donc $4T_n + 3S_n = \sum_{i=0}^{i=n+1}(i+1)C_iC_{n+1-i} = \sum_{i=0}^{i=n+1} iC_iC_{n+1-i} + \sum_{i=0}^{i=n+1} C_iC_{n+1-i} = T_{n+1} + S_{n+1}$, et la formule est démontrée.

4. En combinant les résultats des questions 2 et 3, on a $\dfrac{n+1}{2}S_{n+1} + S_{n+1} = 4 \times \dfrac{n}{2}S_n + 3S_n$, soit (en multipliant tout par 2) $(n+3)S_{n+1} = (4n+6)S_n$. Autrement dit, en utilisant notre hypothèse de récurrence, $S_{n+1} = \dfrac{4n+6}{n+3}C_{n+1}$. Or, on sait en appliquant le résultat de la question 1 pour $k = n+1$ que $\dfrac{C_{n+2}}{C_{n+1}} = \dfrac{4(n+1)+2}{n+1+2} = \dfrac{4n+6}{n+3}$. On en déduit que $S_{n+1} = C_{n+2}$, ce qui prouve $\mathcal{P}(n+1)$ et achève la récurrence.

5. Soient deux suites vérifiant (u_n) et (v_n) vérifiant ces relations. Prouvons par récurrence forte que $u_n = v_n$ en posant $P_n : \forall k \leqslant n,\ u_k = v_k$. La propriété P_0 est vraie, puisqu'elle affirme simplement que $u_0 = v_0$ et que ces deux nombres sont égaux à 1 par hypothèse. Supposons donc P_n vérifiée pour un certain entier n. On a alors $\sum_{k=0}^{k=n} u_ku_{n-k} = \sum_{k=0}^{k=n} v_kv_{n-k}$, puisque les termes apparaissant dans les deux sommes sont les mêmes par hypothèse de récurrence. On en déduit que $u_{n+1} = v_{n+1}$, ce qui prouve P_{n+1} (pour les rangs strictement inférieurs à $n+1$, l'égalité des termes fait partie de l'hypothèse de récurrence) et achève le raisonnement.

6. La suite (c_n) vérifie les hypothèses de la question 5 (cf première partie). La suite (C_n) vérifie également $C_0 = 1$ et $\sum_{k=0}^{k=n} C_kC_{n-k} = S_n = C_{n+1}$ comme on l'a démontré plus haut. D'après la question précédente, les deux suites sont donc égales, et $c_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$.

III. Chemins minimaux

1. Pour caractériser un chemin, il faut simplement choisir la position des p pas vers l'Est (ou des q pas vers le Nord si on préfère) parmi les $p+q$ pas effectués au total. Il y a donc $\binom{p+q}{p}$ (ou $\binom{p+q}{q}$) chemins possibles.

2. Le principe est exactement le même : pour aller de N à M en suivant un chemin minimal, on effectue $p'-p$ pas vers l'Est et $q'-q$ pas vers le Nord, soit $p'+q'-p-q$ pas au total parmi lesquels il faut choisir où on place les pas vers l'Est. Cela fait bien $\binom{p'+q'-p-q}{p'-p}$ chemins possibles.

3. Suivons donc les indications de l'énoncé, et découpons notre chemin en deux morceaux en marquant un point d'arrêt quand on rencontre pour la première fois la bissectrice, en un certain point $Z(k,k)$, avec $1 \leqslant k \leqslant n$. La deuxième partie du chemin, celle qui relie Z à N, mène donc du point (k,k) au point (n,n) en restant toujours sous la bissectrice (mais en ayant tout à fait le droit de la toucher à nouveau), ce qui est équivalent à un chemin menant de $(0,0)$ à $(n-k,n-k)$ et restant sous la bissectrice (il n'y a qu'à se décaler un peu), et laisse donc a_{n-k} possibilités pour cette deuxième moitié de chemin. La première moitié de chemin, celle qui relie O à Z, est également sous la bissectrice, mais n'a pas le droit de la toucher puisque Z est le premier point d'intersection. Autrement dit, elle mène de $(1,0)$ (le premier pas se fait nécessairement vers l'Est) à $(k,k-1)$ (le dernier pas sera forcément vers le Nord) en restant sous la droite d'équation $y=x-1$ (droite parallèle à la bissectrice, mais décalée vers l'Est), en la touchant éventuellement. En décalant tout celà d'un pas vers l'Ouest, cela revient à choisir un chemin menant de $(0,0)$ à $(k-1,k-1)$ et restant sous la bissectrice, ce pour quoi on a par hypothèse a_{k-1} possibilités. Le nombre de chemins possibles à Z fixé est donc $a_{n-k} \times a_{k-1}$, et il ne reste plus qu'à additionner pour toutes les valeurs de k possibles, ce qui donne bien $a_n = \sum_{k=1}^{k=n} a_{k-1}a_{n-k}$.

4. Cf deuxième partie, question 5.

5. La suite (c_n) vérifie toujours les hypothèses de la question précédente. Quant à (a_n), on a $a_0 = 1$ et, via un petit changement d'indice (on pose $i = k-1$) dans la formule de la question 3, $a_{n+1} = \sum_{k=1} k = n+1 a_{k-1}a_{n+1-k} = \sum_{i=0} i = n a_i a_{n-i}$, ce dont on déduit que $a_n = c_n$.

6. C'est une simple application du résultat de la question 2 : le nombre de chemins entre $O'(-1,0)$ et $N(n,n)$ est $\binom{2n}{n-1}$.

7. La construction de la question précédente montre que le nombre de chemins menant de O à N et traversant la bissectrice est $\binom{2n}{n-1}$ (la construction en question étant assez clairement bijective). Le nombre de chemins ne traversant pas la bissectrice est par définition a_n, et le nombre total de chemin $\binom{2n}{n}$. On a donc $a_n + \binom{2n}{n-1} = \binom{2n}{n}$, soit $a_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$. On en déduit alors que $c_n = a_n = \dfrac{(2n)!}{n!n!} - \dfrac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = \dfrac{(n+1)(2n)! - n(2n)!}{n!(n+1)!} = \dfrac{(2n)!}{n!(n+1)!} = \dfrac{1}{n+1}\dfrac{(2n)!}{n!n!} = \dfrac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

IV. Recherche d'un équivalent de $\ln(n!)$

1. Les deux fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}_+$ et s'annulent en 0. Comme $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = \dfrac{1-(1+x)}{1+x} = -\dfrac{x}{1+x} \leqslant 0$, la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, et donc négative. De même, $g'(x) = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1+x-x}{(1+x)^2} = \dfrac{1+x-1}{(1+x)^2} = \dfrac{x}{(1+x)^2} \geqslant 0$, donc la fonction g est croissante et positive sur $\mathbb{R}_+$. On peut ajouter que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ (par croissance comparée) et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ (pas de forme indéterminée ici).

2. D'après la question précédente, on a $\forall x \geqslant 0$, $\dfrac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$. Appliqué à $x = \dfrac{1}{k}$, cet encadrement donne $\dfrac{\frac{1}{k}}{1+\frac{1}{k}} \leqslant \ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right) \leqslant \dfrac{1}{k}$, soit $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right) \leqslant \dfrac{1}{k}$.

3. Prenons l'inégalité de gauche dans l'encadrement qu'on nous demande de prouver : elle est équivalente à $0 \leqslant (k+1)\ln(k+1) - (k+1)\ln k - 1$, soit $1 \leqslant (k+1)\ln\dfrac{k+1}{k}$, ou encore $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right)$, inégalité prouvée à la question précédente. De même, on peut réécrire l'inégalité de droite sous la forme $k\ln(k+1) - k\ln k - 1 \leqslant 0$, soit $k\ln\dfrac{k+1}{k} \leqslant 1$, ce qui se ramène à l'autre inégalité prouvée à la question 2. L'encadrement souhaité est donc vérifié.

4. En reprenant l'inégalité de gauche de l'encadrement précédent et en la sommant pour k variant de 1 à n, on obtient $\sum\limits_{k=1}^{k=n} \ln k \leqslant \sum\limits_{k=1}^{k=n} (k+1)\ln(k+1) - (k+1) - (k\ln k - k)$. La somme de droite est une somme télescopique (mais si, regardez bien) égale à $(n+1)\ln(n+1) - (n+1) - (1\ln 1 - 1) = (n+1)\ln(n+1) - n = (n+1)\ln\left(n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right) - n = (n+1)\ln n - n + (n+1)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$. Or, on a vu plus haut que $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \leqslant \dfrac{1}{n}$, donc $\sum\limits_{k=1}^{k=n} \ln k \leqslant (n+1)\ln n - n + 1 + \dfrac{1}{n}$ (oui, je sais, ce n'est pas la majoration demandée, mais je soupçonne fortement une erreur d'énoncé, car ce qui est demandé ne découle pas simplement de la question précédente). On procède de même avec l'inégalité de droite de la question précédente : $\sum\limits_{k=1}^{k=n} \ln k = \sum\limits_{k=2}^{k=n} \ln k$ (puisque $\ln 1 = 0$) $= \sum\limits_{k=1}^{k=n-1} \ln(k+1) \geqslant \sum\limits_{k=1}^{k=n-1} (k+1)\ln(k+1) - (k+1) - (k\ln k - k) = n\ln n - n - (1\ln 1 - 1) = n\ln n - n + 1$ (cette fois, ça marche sans problème).

5. Commençons par constater que $\ln(n!) = \ln(1\times 2\times\cdots\times n) = \ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n = \sum\limits_{k=1}^{k=n} \ln k$.
   Divisons maintenant l'encadrement de la question précédente par $n\ln n$: $1 - \dfrac{1}{\ln n} + \dfrac{1}{n\ln n} \leqslant \dfrac{\ln(n!)}{n\ln n} \leqslant 1 + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{\ln n} + \dfrac{1}{n\ln n} + \dfrac{1}{n^2\ln n}$ (j'ai repris mon encadrement et non celui de l'énoncé). Les deux termes extrêmes tendant manifestement vers 1, une patite application du théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n!)}{n\ln n} = 1$, soit $\ln(n!) \sim n\ln n$.

6. Reprenons à nouveau l'encadrement de la question 4, en soustrayant $n\ln n$ partout : $1 - n \leqslant \ln(n!) - n\ln n \leqslant \ln n - n + 1 - \dfrac{1}{n}$. À nouveau, en divisant tout par $-n$, on obtiendra des limites égales à 1 pour les deux termes extrêmes et on conclura via le thorème des gendarmes.

V. Formule de Stirling

1. Ce n'est pas si méchant que ça : les deux fonctions sont dérivables sur $[0;1]$ et s'annulent en 0. De plus, $i'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 + x - x^2 + x^3 = \dfrac{1-1-x+x+x^2-x^2-x^3+x^3+x^4}{1+x} = \dfrac{x^4}{1+x} \geqslant 0$, donc la fonction i est croissante et positive sur $[0;1]$. De même, $j'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 + x - x^2 = \dfrac{-x^3}{1+x} \leqslant 0$, donc j est décroissante et négative sur $[0;1]$.
2. C'est effectivement une conséquence immédiate de la question précédente.
3. D'après la question précédente, on a $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + \dfrac{1}{3n^3} - \dfrac{1}{4n^4} \leqslant \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \leqslant \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + \dfrac{1}{3n^3}$. On en déduit que $n^2\left[1 - \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + \dfrac{1}{3n^3} - \dfrac{1}{4n^4}\right)\right] \geqslant n^2\left[1 - \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right] \geqslant n^2\left[1 - \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + \dfrac{1}{3n^3}\right)\right]$. Développons le membre de gauche, cela donne $n^2\left(1 - 1 + \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{3n^2} + \dfrac{1}{4n^3} - \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{4n^2} - \dfrac{1}{6n^3} + \dfrac{1}{8n^4}\right) = n^2\left(\dfrac{1}{4n^2} - \dfrac{1}{3n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$ $= -\dfrac{1}{12} + o(1)$. Autrement dit, le membre de gauche tend vers $-\dfrac{1}{12}$ quand n tend vers $+\infty$. De même, le membre de droite tend vers $-\dfrac{1}{12}$ (quand on supprime le $-\dfrac{1}{4n^4}$ de la parenthèse initiale, seuls les termes à partir de $\dfrac{1}{n^3}$ vont être modifiés), donc via le théorème des gendarmes, on déduit la limite demandée.
4. (a) Calculons donc $u_{n+1} - u_n = \ln(n+1)! - (n+1)\ln(n+1) + n + 1 - \dfrac{1}{2}\ln(n+1) - \ln n! + n\ln n - n + \dfrac{1}{2}\ln n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n+1} \ln k - \left(n+\dfrac{3}{2}\right)\ln(n+1) + 1 - \sum_{k=1}^{k=n} \ln k + \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln n = \ln(n+1) - \left(n+\dfrac{3}{2}\right)\ln(n+1) + 1 + \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln n = 1 - \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln\dfrac{n+1}{n} = 1 - \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.
   Or, cette dernière expression est équivalente à $-\dfrac{1}{12n^2}$ d'après la question 3, donc équivalente au terme général d'une série convergente à termes négatifs. La série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge donc (si on n'a pas à disposition le théorème sur l'équivalence des séries à termes positifs, on se contente de constater qu'à partir d'un certain rang, $u_n - u_{n+1}$ sera plus petit, par exemple, que $\dfrac{1}{2n^2}$, et on conclut par comparaison).

   (b) La somme partielle de la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ est donnée par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} u_{k+1} - u_k = u_{n+1} - u_1$ (c'est une somme télescopique). D'après la question précédente, la suite (S_n) converge, donc $u_{n+1} - u_1$ également, et (u_n) aussi.

   (c) Notons $K = e^l$, on a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^{u_n} = K$, ou si l'on préfère $e^{u_n} \sim K$. Or, $e^{u_n} = \dfrac{e^{\ln(n!)}e^n}{e^{n\ln n}e^{\frac{1}{2}\ln n}} = \dfrac{n! \times e^n}{n^n \times \sqrt{n}}$. On en déduit que $n! \sim \dfrac{Kn^n\sqrt{n}}{e^n}$.
5. Un joli calcul pour terminer :

$$c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{1}{n+1}\frac{K(2n)^{2n}\sqrt{2n}}{e^{2n}} \times \frac{(e^n)^2}{K^2(n^n)^2 n} \sim \frac{1}{n+1}\frac{2^{2n}\sqrt{2n}}{Kn} \sim \frac{2^{2n}}{(n+1)\sqrt{\pi n}}$$

J'ai laissé le $n+1$ pour obtenir une meilleure approximation. Cette formule donne par exemple $c_{10} \simeq 17\ 007$, la valeur exacte étant $c_{10} = 16796$.

Feuille d'exercices n°13 : Dérivation

ECE3 Lycée Carnot

12 janvier 2010

Exercice 1 (*)

Déterminer le domaine de définition et de dérivabilité des fonction suivantes et calculer leurs dérivées :

- $f_1(x) = x\ln x - x$
- $f_2(x) = x\sqrt{1-x}$
- $f_3(x) = x^x$
- $f_4(x) = e^{3x^2+\sqrt{2x}}$
- $f_5(x) = \dfrac{x^4-3x^2+5x-1}{2x^3+x^2-4x+7}$
- $f_6(x) = \dfrac{x\sqrt{x}}{e^x-1}$
- $f_7(x) = \dfrac{x^2+x\ln x}{x+1}$
- $f_8(x) = 3^{4x^2-1}$
- $f_9(x) = e^{x+\frac{1}{x}}$
- $f_{10}(x) = x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$
- $f_{11}(x) = x^2 - |x|$
- $f_{12}(x) = x^2\ln x$ prolongée par $f_{12}(0) = 0$

Exercice 2 (** à ***)

Faire une étude complète des fonctions suivantes (domaine de définition, limites et éventuels prolongements par continuité, asymptotes et branches infinies, dérivée et étude des variations, et enfin une allure de la courbe) :

1. $f(x) = \sqrt{(x+1)}\ln(x+1)$
2. $g(x) = x + \sqrt{x^2-1}$
3. $h(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$
4. $i(x) = \dfrac{x^2-3x+1}{2x^2-5x-3}$
5. $k(x) = x^{\frac{1}{x}}$
6. $l(x) = \dfrac{e^{2x}}{x^2-1}$

Exercice 3 (*)

Calculer les équations des tangentes en 0, 1, -2 et $\sqrt{3}$ de chacune des fonctions suivantes :

- $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$
- $g(x) = \ln(3x-8)$
- $h(x) = \dfrac{2x^2+1}{x-5}$
- $k(x) = e^{3x^2-2x+1}$

Exercice 4 (**)

Soit $f(x) = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3 + 1$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
2. On note g la réciproque de f. Quel est le sens de variations de g ?
3. Quel est le domaine de dérivabilité de g ?
4. Représenter dans un même repère les courbes représentatives de f et de g, en indiquant les tangentes horizontales et verticales.

Exercice 5 (**)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x \ln x$.

1. Étudier les variations de f.
2. En déduire que f est bijective de $\left[\frac{1}{e}; +\infty\right[$ sur un intervalle à préciser.
3. En quels points f^{-1} est-elle dérivable ?
4. Calculer $(f^{-1})'(0)$. Calculer $f(e)$ et $f(e^2)$ et en déduire $(f^{-1})'(e)$ et $(f^{-1})'(2e^2)$.
5. Tracer dans un même repère les courbes représentatives de f et de f^{-1}.

Exercice 6 (***)

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on définit sur $[0; +\infty[$ les fonctions $g_n : x \mapsto (n-x)e^x - n$ et $f_n : x \mapsto \dfrac{x^n}{e^x - 1}$ si $x > 0$, prolongée par $f_n(x) = 0$.

1. Étudier les variations de g_n.
2. Prouver l'existence d'un unique réel a_n tel que $g_n(a_n) = 0$ et montrer que $a_n \in]n-1; n[$.
3. Étudier la continuité de f_n.
4. Étudier la dérivabilité de f_n et préciser, si elle existe, l'équation de sa tangente en 0.
5. Étudier les variations de f_n (cela devrait faire intervenir les résultats de la question 2).
6. Montrer que $f_n(a_n) = (n - a_n)a_n^{n-1}$.
7. Étudier la position relative des courbes représentatives de f_n et f_p lorsque $p > n$.
8. Tracer dans un même repère les courbes représentatives de f_2 et f_3 (en choisissant une échelle adaptée).

Corrigé de la feuille d'exercices n°13

Exercice 1 (*)

- La fonction f_1 est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$, de dérivée $f_1'(x) = \ln x + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln x$. De plus, on peut prolonger f_1 par continuité en 0 en posant $f_1(0) = 0$, puisque $\lim\limits_{x \to 0} f_1(x) = 0$. Comme f_1 est continue sur $\mathbb{R}_+$, C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, et que $\lim\limits_{x \to 0} f_1'(x) = -\infty$, le théorème du prolongement C^1 permet d'affirmer que la courbe admet une tangente verticale en 0.
- La fonction f_2 est définie sur $]-\infty;-1]$ et a priori dérivable sur $]-\infty;-1[$, et $f_2'(x) = \sqrt{1-x} - \dfrac{x}{2\sqrt{1-x}} = \dfrac{2(1-x)-x}{2\sqrt{1-x}} = \dfrac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}$. Comme f_2 est C^1 sur $]-\infty;-1[$ et $\lim\limits_{x \to 1} f_2'(x) = -\infty$, d'après le théorème de prolongement C^1, il y aura une tangente verticale en 1.
- Comme $f_3(x) = e^{x \ln x}$, la fonction f_3 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et $f_3'(x) = (\ln x + 1)e^{x \ln x}$. La fonction est par ailleurs prolongeable par continuité en posant $f_3(0) = 1$ (puisque $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$). Elle est C^1 sur $]0;+\infty[$ et $\lim\limits_{x \to 0} f_3'(x) = -\infty$, donc il y aura une tangente verticale en 0 (théorème de prolongement C^1).
- La fonction f_4 est définie sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable a priori sur $\mathbb{R}_+^*$, et $f_4'(x) = \left(6x + \dfrac{1}{\sqrt{2x}}\right) e^{3x^2+\sqrt{2x}}$. Cette dérivée étant continue sur $]0;+\infty[$ et ayant pour limite $+\infty$ en 0, il y aura (encore une fois, et toujours d'après le théorème de prolongement C^1) une tangente verticale en 0.
- La fonction f_5 est dérivable partout où elle est définie (ici, le domaine de définition est difficile à déterminer) et $f_5'(x) = \dfrac{(4x^3-6x+5)(2x^3+x^2-4x+7)-(6x^2+2x-4)(x^4-3x^2+5x-1)}{(2x^3+x^2-4x+7)^2} = \dfrac{2x^6+2x^5-6x^4+8x^3+7x^2-40x+31}{(2x^3+x^2-4x+7)^2}$ (intéressant, non ?).
- La fonction f_6 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et $f_6'(x) = \dfrac{\frac{3}{2}\sqrt{x}(e^x-1) - x\sqrt{x}e^x}{(e^x-1)^2}$. Comme $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$ (limite classique), on peut affirmer que $f(x) \underset{0}{\sim} \sqrt{x}$, donc f_6 est prolongeable par continuité en posant $f(0) = 0$. De même, on a $f'(x) = \dfrac{3\sqrt{x}}{2(e^x-1)} - \dfrac{x\sqrt{x}e^x}{(e^x-1)^2} = \dfrac{3}{2\sqrt{x}} - \dfrac{e^x}{\sqrt{x}} + o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) \sim \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ (quand on se rapproche de 0, e^x est équivalent à 1). Tout cela tend vers $+\infty$ en 0, il y aura donc une tangente verticale (encore et toujours le théorème du prolongement C^1). Les plus curieux d'entre vous noteront que le fait que $f(x)$ soit équivalent à $\sqrt{x}$ devrait suffire à deviner qu'il y aura une tangente verticale en 0 (puisque c'est le cas pour la racine carrée).
- La fonction f_7 est définie et a priori dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et $f_7'(x) = \dfrac{(2x+\ln x+1)(x+1)-x^2-x\ln x}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2+3x+\ln x+1}{(x+1)^2}$. La fonction f_7 est une fois de plus prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$ (puisque le numérateur tend vers 0 et le dénominateur vers 1). Quant à la dérivée, elle a pour limite $-\infty$ en 0 (même pas de forme indéterminée), on va donc pouvoir conclure à la tangente verticale en 0 grâce au théorème de prolongement C^1.
- On a $f_8(x) = e^{(4x^2-1)\ln 3}$. La fonction f_8 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f_8'(x) = (8x \ln 3)3^{4x^2-1}$. Enfin une fonction où il n'y a rien à prolonger !
- La fonction f_9 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_*$ et $f_9'(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right) e^{x+\frac{1}{x}}$. On a ici une petite curiosité : $\lim\limits_{x \to 0^-} f_9(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f_9(x) = +\infty$, donc f_9 est prolongeable par « continuité à

gauche » en 0. Comme f_9' est continue sur $]-\infty;0[$ et que $\lim\limits_{x\to 0^-} f_9'(x) = 0$ (par croissance comparée, $e^{x+\frac{1}{x}}$ étant équivalent à $e^{\frac{1}{x}}$), le théorème de prolongement C^1 permet d'affirmer que la courbe admet une demi-tangente horizontale à gauche en 0.

- La fonction f_{10} est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et $f_{11}'(x) = 2x\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) + x^2 \times \dfrac{-2}{x^3}\dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 2x\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) - \dfrac{2x}{(x^2+1)}$. De plus, $f(x) \underset{0}{\sim} x^2\ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, qui a pour limite 0 en 0 par croissance comparée. De même, le premier morceau dans la dérivée tend vers 0 (et le deuxième aussi, naturellement) et f_{10}' est continue sur $\mathbb{R}^*$, donc le théorème de prolongement C^1 nous permet d'affirmer que f_{10} est prolongeable en une fonction C^1 sur $\mathbb{R}$, de dérivée nulle en 0 (où on aura donc une tangente horizontale).
- La fonction f_{11} est définie sur $\mathbb{R}$ et a priori dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Si $x > 0$, $f_{11}(x) = x^2 - x$, donx $f_{11}'(x) = 2x - 1$; si $x < 0$, $f_{11}(x) = x^2 + x$ et $f_{11}'(x) = x^2 + 1$. La fonction f_{11} est dérivable à gauche et à droite en 0, mais $f_g'(0) = 1$ et $f_d'(0) = -1$, donc elle admet seulement deux demi-tangentes de pentes distinctes en 0.
- Une fois prolongée, f_{12} est définie sur $[0;+\infty[$ et a priori dérivable sur $]0;+\infty[$, de dérivée $f_{12}'(x) = 2x\ln x + x$. Comme $\lim\limits_{x\to 0} f_{12}'(x) = 0$ et que f_{12}' est bien entendu continue sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction f_{12} est en fait dérivable sur $\mathbb{R}$, avec une tangente horizontale en 0.

Exercice 2 (** à ***)

Étude de la fonction f

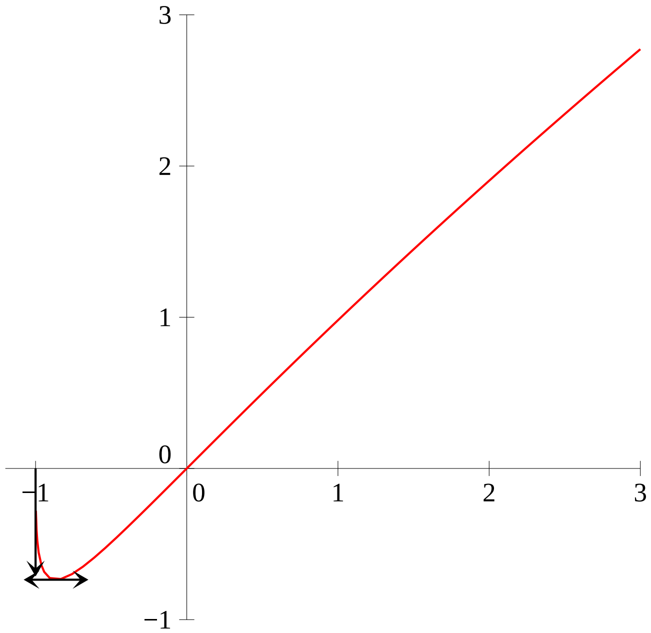
La fonction f est définie si $x+1>0$ donc $\mathcal{D}_f =]-1;+\infty[$. Comme $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}\ln x = 0$ (par croissance comparée), $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 0$. La fonction f est donc prolongeable par continuité en -1 en posant $f(-1) = 0$.

On a bien sûr $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, et $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\sqrt{x+1}\ln(x+1)}{x} = \dfrac{\sqrt{X}\ln X}{X-1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln X}{\sqrt{X}}$ en posant $X = x+1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = 0$, et la courbe représentative de f admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Ox).

La fonction f est dérivable sur $]-1;+\infty[$, de dérivée $f'(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{2\sqrt{x+1}} + \dfrac{\sqrt{x+1}}{x+1} = \dfrac{\ln(x+1)+2}{2\sqrt{x+1}}$. Cette dérivée s'annule quand $\ln(x+1) = -2$, donc quand $x+1 = \dfrac{1}{e^2}$, soit $x = \dfrac{1}{e^2} - 1$. De plus, comme f' est continue sur $]-1;+\infty[$ et que que $\lim\limits_{x\to -1} f'(x) = -\infty$ (pas de forme indéterminée ici, le numérateur tend vers $-\infty$ et le dénominateur vers 0), en appliquant le théorème du prolongement C^1, on obtient une tangente verticale à la courbe en -1. Enfin, $f\left(\dfrac{1}{e^2}-1\right) = \sqrt{e^{-2}}\ln e^{-2} = \dfrac{-2}{e}$, d'où le tableau de variations suivant pour f :

x	-1		$\frac{1}{e^2}-1$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\frac{-2}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

La courbe représentative de f a l'allure suivante :



Étude de la fonction g

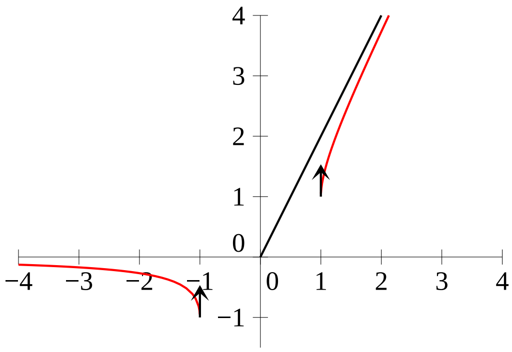
La fonction g est définie si $x^2 - 1 \geqslant 0$, donc $\mathcal{D}_g =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$.

On obtient sans difficulté $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$. Ensuite, $\dfrac{g(x)}{x} = 1 + \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x} = 1 + \dfrac{\sqrt{x^2(1-\frac{1}{x^2})}}{x}$. Si $x \geqslant 1$, on a donc $\dfrac{g(x)}{x} = 1 + \sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}}$, dont la limite vaut 2 en $+\infty$. Il reste donc à calculer $g(x) - 2x = x\left(\sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}} - 1\right) = \dfrac{x\left(1 - \frac{1}{x^2} - 1\right)}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + 1} = -\dfrac{1}{x\left(\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + 1\right)}$. Ce dernier quotient tend vers 0 en $+\infty$, il y a donc une asymptote oblique d'équation $y = 2x$. C'est plus rapide en $-\infty$: $g(x) = \dfrac{x^2 - (x^2-1)}{x + \sqrt{x^2-1}} = \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2-1}}$, quotient qui tend vers 0 en $-\infty$. L'axe des abscisses est donc asymptote à la courbe en $-\infty$.

La fonction g est a priori dérivable sur $]-\infty; -1[$ et sur $]1; +\infty[$, de dérivée $g'(x) = 1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$. Cette dérivée est manifestement positive sur $]1; +\infty[$. De plus, on a $\forall x < -1$, $x^2 \geqslant x^2 - 1 \geqslant 0$, donc $-x \geqslant \sqrt{x^2-1} \geqslant 0$, d'où $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} \leqslant -1$. On en déduit que $g'(x) < 0$ sur $]-\infty; -1[$. Enfin, on constate que les limites de g' en -1 et en 1 sont respectivement égales à $-\infty$ et à $+\infty$, d'où l'existence de deux tangentes verticales en ces points via le théorème de prolongement C^1. Finalement, on a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1	1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-\infty$	$+\infty$	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	1	$\nearrow$	$+\infty$

La courbe qui va avec, avec tangente et asymptote (ou plutôt demi-asymptote pour ne pas surcharger le graphique) en noir :



Étude de la fonction h

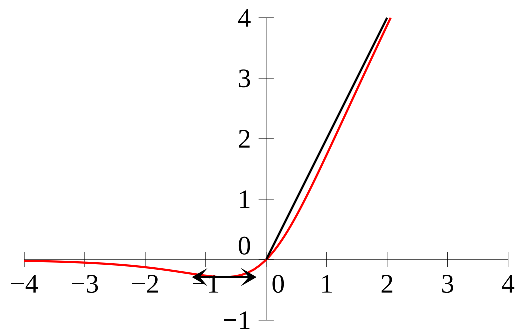
La fonction h est définie si $e^{2x} - e^x + 1 > 0$. Posons donc $P(X) = X^2 - X + 1$. Ce polynôme a pour discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3$, il est donc toujours positif. Conclusion : $\mathcal{D}_h = \mathbb{R}$.

Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} - e^x + 1 = 1$, on a $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 0$, d'où l'existence d'une asymptote horizontale en $-\infty$. De l'autre côté, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} - e^x + 1 = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$. De plus, $\dfrac{h(x)}{x} = \dfrac{\ln(e^{2x}(1 - e^{-x} + e^{-2x}))}{x} = \dfrac{2x + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})}{x} = 2 + \dfrac{\ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})}{x}$. Le quotient tendant vers 0 (son numérateur tend déjà vers 0), on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{h(x)}{x} = 2$. Enfin, en réutilisant le calcul précédent $h(x) - 2x = \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$ tend vers 0, donc il y a en $+\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = 2x$.

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $h'(x) = \dfrac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x + 1} = \dfrac{e^x(2e^x - 1)}{e^{2x} - e^x + 1}$. Tout est positif (cf calcul du domaine de définition pour le dénominateur) sauf $2e^x - 1$ qui change de signe quand $e^x = \dfrac{1}{2}$, donc quand $x = -\ln 2$. Comme $h(-\ln 2) = \ln(e^{-2\ln 2} - e^{-\ln 2} + 1) = \ln\left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} + 1\right) = \ln\dfrac{3}{4}$, on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-\ln(2)$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\ln\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Et la courbe, bien entendu :



Étude de la fonction i

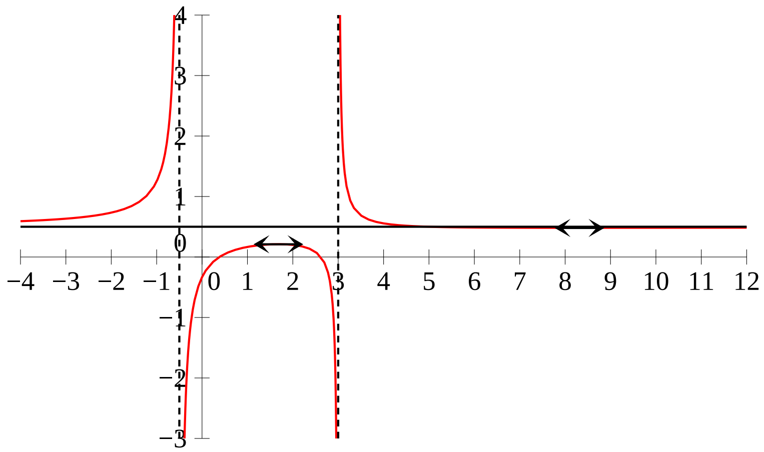
La fonction i est définie quand $2x^2 - 5x - 3 \neq 0$. Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 25 + 24 = 49$, et admet pour racines $x_1 = \dfrac{5-7}{4} = -\dfrac{1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{5+7}{4} = 3$, donc $\mathcal{D}_f = \left]-\infty; -\dfrac{1}{2}\right[\cup \left]-\dfrac{1}{2}; 3\right[\cup]3; +\infty[$.

Un léger accès de paresse nous pousse à ne pas déterminer le signe de toutes les limites en $-\dfrac{1}{2}$ et en 3 : bornons-nous à constater que le dénominateur tend vers 0 et le numérateur respectivement vers $\dfrac{11}{4}$ et 1, donc il y a des limites infinies en $-\dfrac{1}{2}^-$, $-\dfrac{1}{2}^+$, 3^- et 3^+. Nous obtiendrons leur signe à l'aide des variations de i. Pour les branches infinies, pour une fois c'est rapide : $i(x) \underset{\pm\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2}$. Il y a donc une asymptote horizontale en $-\infty$ et en $+\infty$.

Ne reste plus qu'à avoir le courage de calculer la dérivée (définie sur le même ensemble que i) : $i'(x) = \dfrac{(2x-3)(2x^2-5x-3) - (4x-5)(x^2-3x+1)}{2x^2-5x-3)^2}$ $= \dfrac{4x^3 - 10x^2 - 6x - 6x^2 + 15x + 9 - 4x^3 + 12x^2 - 4x + 5x^2 - 15x + 5}{(2x^2-5x-3)^2} = \dfrac{x^2 - 10x + 14}{(2x^2-5x-3)^2}$. Le numérateur a pour discriminant $\Delta = 100 - 56 = 44$, et admet deux racines $x_3 = \dfrac{10 - \sqrt{44}}{2} = 5 - \sqrt{11}$ et $x_4 = 5 + \sqrt{11}$. Il faut bien sûr pour achever le tableau de variations calculer les valeurs de i en x_3 et x_4 : $i(x_3) = \dfrac{(5-\sqrt{11})^2 - 3(5-\sqrt{11}) + 1}{2(5-\sqrt{11})^2 - 5(5-\sqrt{11}) - 3} = \dfrac{36 - 10\sqrt{11} - 15 + 3\sqrt{11} + 1}{72 - 20\sqrt{11} - 25 + 5\sqrt{11} - 3} = \dfrac{22 - 7\sqrt{11}}{44 - 15\sqrt{11}} \simeq 0.21$; et de même $i(x_4) = \dfrac{(5+\sqrt{11})^2 - 3(5+\sqrt{11}) + 1}{2(5+\sqrt{11})^2 - 5(5+\sqrt{11}) - 3} = \dfrac{36 + 10\sqrt{11} - 15 - 3\sqrt{11} + 1}{72 + 20\sqrt{11} - 25 - 5\sqrt{11} - 3} = \dfrac{22 + 7\sqrt{11}}{44 + 15\sqrt{11}} \simeq 0.48$. Cela donc un tableau du genre :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		x_3		3		x_4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$i(x_3)$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$i(x_4)$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$

Et la courbe, bien entendu (le minimum local en x_4 est peu visible car très très proche de l'asymptote, ce dont on pouvait se douter d'ailleurs au vu de sa valeur) :



Étude de la fonction k

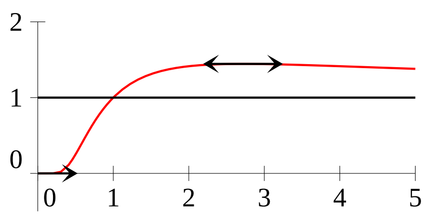
Écrivons plutôt $k(x) = e^{\frac{\ln x}{x}}$. La fonction k est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme de plus $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$ (non, il n'y a pas de forme indéterminée), on a $\lim\limits_{x\to 0^+} k(x) = 0$ et on peut prolonger k par continuité en posant $k(0) = 0$.

Comme $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (croissance comparée), $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = 1$, d'où la présence d'une asymptote horizontale en $+\infty$.

La fonction k est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $k'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} e^{\frac{\ln x}{x}}$. Cette dérivée s'annule lorsque $\ln x = 1$, c'est-à-dire pour $x = e$, valeur où k admet pour maximum $e^{\frac{1}{e}} \sim 1.44$. Ne reste qu'à essayer de calculer la limite de k' en 0, ce qui n'est pas évident : $k'(x) \sim \frac{-\ln x}{x^2} e^{\frac{\ln x}{x}} - \frac{1}{\ln x}\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 e^{\frac{\ln x}{x}}$. Comme $\frac{\ln x}{x}$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers 0, on a par croissance comparée $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 e^{\frac{\ln x}{x}} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} k'(x) = 0$. En appliquant le théorème de prolongement C^1, k est dérivable en 0, et la courbe y admet une tangente horizontale. Le tableau de variations :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$e^{\frac{1}{e}}$	$\searrow$	1

Et une fois de plus, la courbe :



Étude de la fonction l

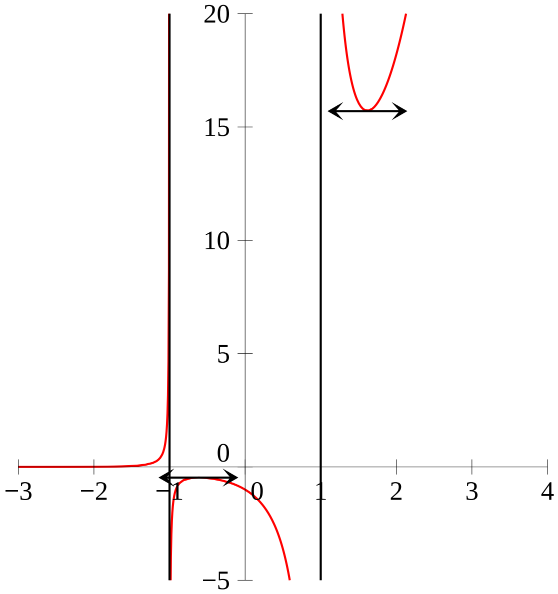
La fonction l est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$.

En $+\infty$, la limite de l comme celle de $\dfrac{l(x)}{x}$ sont égales à $+\infty$ par croissance comparée, il y a donc de ce côté une branche parabolique de direction (Oy). En $-\infty$, toujours par croissance comparée, l tend vers 0, l'axe des abscisses est asymptote horizontale. Enfin, le numérateur de l étant toujours strictement positif, on obtient $\lim\limits_{x\to-1^-} l(x) = \lim\limits_{x\to1^+} l(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} l(x) = \lim\limits_{x\to1^-} l(x) = -\infty$.

La fonction l est dérivable sur son ensemble de définition, et $l'(x) = \dfrac{2e^{2x}(x^2-1) - 2xe^{2x}}{(x^2-1)^2} = \dfrac{2e^{2x}(x^2-x-1)}{(x^2-1)^2}$. Le trinôme au numérateur a pour discriminant $\Delta = 1+4 = 5$, et admet pour racines $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. On calcule péniblement $l(x_1) = \dfrac{4e^{1-\sqrt{5}}}{2-2\sqrt{5}} \simeq -0.47$ et $l(x_2) = \dfrac{4e^{1+\sqrt{5}}}{2+2\sqrt{5}} \simeq 15.7$. Voila le dernier tableau da variations de l'exercice :

x	$-\infty$		-1		x_1		1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty\ \Vert\ -\infty$	$\nearrow$	$l(x_1)$	$\searrow$	$-\infty\ \Vert\ +\infty$	$\searrow$	$l(x_2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Et la dernière courbe (ouf!) :



Exercice 3 (*)

On notera pour chaque fonction $T_{f,a}(x)$ l'équation de la tangente à la courbe de la fonction f au point d'ascisse a.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = 6x^2 - 10x + 4$. On a donc $T_{f,0}(x) = 4x - 1$; $T_{f,1}(x) = 0(x-1) + 0 = 0$; $T_{f,-2}(x) = 48(x+2) - 45 = 48x + 51$; et $T_{f,\sqrt{3}}(x) = (22 - 10\sqrt{3})(x - \sqrt{3}) + 10\sqrt{3} - 16 = (22 - 10\sqrt{3})x - 12\sqrt{3} - 6$.

La fonction g est dérivable sur $\left]\frac{8}{3}; +\infty\right[$, de dérivée $g'(x) = \frac{3}{3x-8}$. Tout cela est d'ailleurs fort académique puisqu'aucune des quatre valeurs proposées n'appartient au domaine de dérivabilité de g, et que nous n'avons donc pas d'équation de tangente à calculer pour cette fonction.

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{5\}$, de dérivée $h'(x) = \frac{4x(x-5) - (2x^2+1)}{(x-5)^2} = \frac{2x^2 - 20x - 1}{(x-5)^2}$. On a donc $T_{h,0}(x) = \frac{1}{25}x - \frac{1}{5}$; $T_{h,1}(x) = -\frac{19}{16}(x-1) - \frac{3}{4} = -\frac{19}{16}x + \frac{5}{8}$; $T_{h,-2}(x) = \frac{47}{49}(x+2) - \frac{9}{7} = \frac{47}{49}x - \frac{16}{49}$; et $T_{h,\sqrt{3}}(x) = \frac{5 - 20\sqrt{3}}{28 - 10\sqrt{3}}(x - \sqrt{3}) + \frac{7}{\sqrt{3} - 5} = \frac{-460 - 510\sqrt{3}}{484}(x - \sqrt{3}) - \frac{7\sqrt{3} + 35}{22} = \left(-\frac{115}{121} - \frac{255\sqrt{3}}{242}\right)x + \frac{190}{121} + \frac{153}{242}\sqrt{3}$.

La fonction k est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $k'(x) = (6x-2)e^{3x^2-2x+1}$, donc $T_{k,0}(x) = -2ex + e$; $T_{k,1}(x) = 4e^2(x-1) + e^2 = 4e^2x - 3e^2$; $T_{k,-2}(x) = -14e^{17}(x+2) + e^{17} = -14e^{17}x - 27e^{17}$; enfin, $T_{k,\sqrt{3}}(x) = (6\sqrt{3} - 2)e^{10-2\sqrt{3}}(x - \sqrt{3}) + e^{10-2\sqrt{3}} = (6\sqrt{3} - 2)e^{10-2\sqrt{3}}x + (-17 + 4\sqrt{3})e^{10-2\sqrt{3}}$.

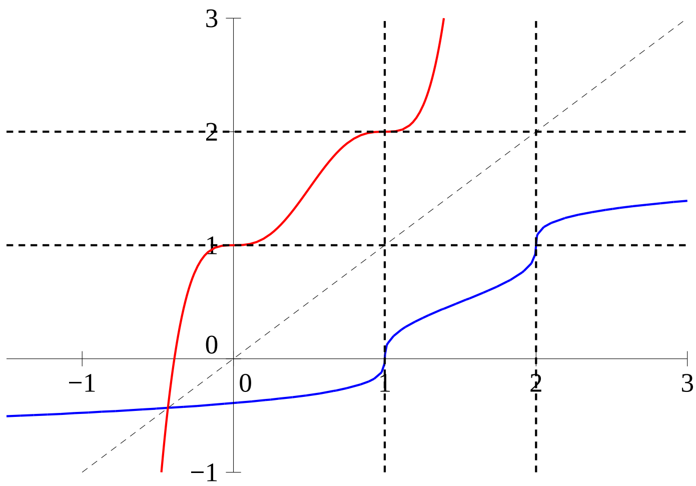
Exercice 4 (**)

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = 30x^4 - 60x^3 + 30x^2 = 30x^2(x^2 - 2x + 1) = 30x^2(x-1)^2$. La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc bijective. Comme de plus $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, la fonction est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2. D'après le théorème de la bijection, la fonction g a même sens de variation que f, elle est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3. La fonction g n'est pas dérivable en y si $f'(f^{-1}(y)) = 0$. Comme f' s'annule en 0 et en 1, et que $f(0) = 1$ et $f(1) = 2$, g est dérivable partout sauf en 1 et en 2.

4. Les tangentes sont en noir épais, et l'axe de symétrie $y = x$ en moins épais, la courbe de f en rouge et celle de g en bleu :

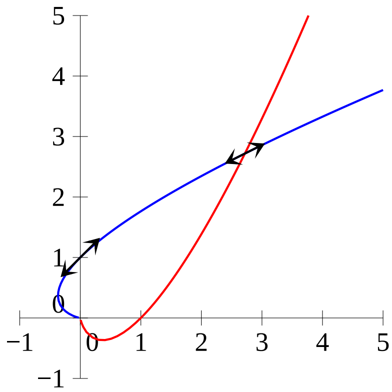


Exercice 5 (**)

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(x) = \ln x + 1$. La dérivée est donc positive si $\ln x \geqslant -1$, c'est-à-dire si $x \geqslant \frac{1}{e}$. On a donc le tableau de variations suivant, avec $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \times (-1) = -\frac{1}{e}$.

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f(x)$	0 ↘	$-\frac{1}{e}$	↗ $+\infty$

2. Comme de plus $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, la fonction f est bijective de $[\frac{1}{e}; +\infty[$ sur $[-\frac{1}{e}; +\infty[$.
3. La fonction f^{-1} est définie et continue sur $[-\frac{1}{e}; +\infty[$, mais dérivable seulement sur $]-\frac{1}{e}; +\infty[$, puisque f' s'annule en $\frac{1}{e}$.
4. Commençons par constater que $f(1) = 0$, donc $f^{-1}(0) = 1$ et $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f'(1)} = 1$. De même, comme $f(e) = e \ln e = e$ et $f(e^2) = e^2 \ln(e^2) = 2e^2$, on a $(f^{-1})'(e) = \frac{1}{f'(f^{-1}(e))} = \frac{1}{f'(e)} = \frac{1}{2}$ et $(f^{-1})'(2e^2) = \frac{1}{f'(f^{-1}(2e^2))} = \frac{1}{f'(e^2)} = \frac{1}{3}$.
5. Voila à quoi ça ressemble, avec la courbe de f en rouge et celle de f^{-1} en bleu (il y a hélas un bout de courbe en trop du côté de l'origine du repère qui fait que la courbe bleue n'est pas la courbe d'une fonction, mais je ne sais pas comment faire mieux avec le logiciel tout pourri que j'utilise pour tracer ces courbes), et les deux premières tangentes calculées pour f^{-1} en noir ($2e^2$ étant trop gros, la dernière n'apparait pas sur ce graphique) :



Exercice 6 (***)

1. La fonction g_n est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $g_n'(x) = ne^x - e^x - xe^x = (n-1-x)e^x$. Cette dérivée s'annule pour $x = n-1$, et la fonction g_n est donc strictement croissante croissante sur $0; n-1]$ et strictement décroissante sur $[n-1; +\infty[$. Elle admet un maximum de valeur $g_n(n-1) = (n-(n-1))e^{n-1} - n = e^{n-1} - n$. De plus, $g_n(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g_n(x) = -\infty$.
2. Bien entendu, l'énoncé a oublié de préciser que a_n doit être strictement positif, 0 étant aussi solution de l'équation. Une simple lecture du tableau de variations permet ensuite de constater que g_n s'annule une fois entre $n-1$ et $+\infty$. Comme $g_n(n-1) > 0$ (g_n est strictement croissante

entre 0 et $n-1$) et $g_n(n) = -n < 0$, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que $a_n \in]n-1; n[$.

3. La fonction f_n est continue sans difficulté sur $]0; +\infty[$, et comme de plus $\dfrac{x^n}{e^x - 1} \underset{0}{\sim} \dfrac{x^n}{x} \sim x^{n-1}$, on a $\lim\limits_{x \to 0} f_n(x) = 0$, ce qui assure la continuité de f_n en 0. La fonction est donc continue sur $[0; +\infty[$.

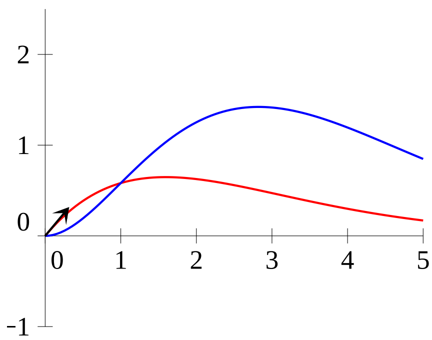
4. Encore une fois, le seul problème se pose en 0. On a $\forall x > 0$, $f_n'(x) = \dfrac{nx^{n-1}(e^x - 1) - x^n e^x}{(e^x - 1)^2} = \dfrac{x^{n-1} g_n(x)}{(e^x - 1)^2}$. Comme $f'(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x^{n-1} g_n(x)}{x^2} \sim x^{n-3} g_n(x)$, on en déduit facilement que, si $n \geqslant 3$, $\lim\limits_{x \to 0} f_n'(x) = 0$. Pour $n = 2$, c'est plus compliqué : on a $e^x \underset{0}{=} x + 1 + o(x)$ (en utilisant l'équivalent classique pour $e^x - 1$), donc $g_2(x) = (2-x)(1+x+o(x)) - 2 = x - x^2 + o(x)$, et $f_2'(x) \sim x^{-1} x = 1$. Finalement, en utilisant le théorème de prolongement C^1, la fonction f_n est toujours dérivable, et $f_2'(0) = 1$, ce qui donne une tangente d'équation $y = x$; $f_n'(0) = 0$ dès que $n \geqslant 3$ (on a alors une tangente horizontale).

5. La dérivée f_n' s'annulant quand g_n s'annule, il y a donc toujours pour f_n un maximum atteint en $x = a_n$. La limite de f_n quand x tend vers $+\infty$ vaut 0 par croissance comparée.

6. Calculons : $f_n(a_n) = \dfrac{a_n^n}{e^{a_n} - 1}$. Or, comme $g_n(a_n) = 0$, $e^{a_n} = \dfrac{n}{n - a_n}$ et $e^{a_n} - 1 = \dfrac{n}{n - a_n} - 1 = \dfrac{a_n}{n - a_n}$. On en déduit que $f_n(a_n) = \dfrac{(n - a_n) a_n^n}{a_n} = (n - a_n) a_n^{n-1}$.

7. On a $f_p(x) - f_n(x) = \dfrac{x^p - x^n}{e^x - 1}$. Si $x > 1$, $x^p > x^n$ et la courbe représentative de f_p est située au-dessus de celle de f_n. Si $x < 1$, c'est le contraire. Les courbes passent toutes par le point de coordonnées $\left(1, \dfrac{1}{e-1}\right)$.

8. Les deux courbes ressemblent à ceci, avec la courbe de f_2 en rouge (et sa tangente initiale en noir) et celle de f_3 en bleu (difficile de placer précisément les maxima à la main puisqu'on ne connait que très approximativement la valeur de a_n) :



Feuille d'exercices n°14 : Dérivées successives, convexité

ECE3 Lycée Carnot

15 janvier 2010

Exercice 1 (** à ***)

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le domaine de dérivabilité et la présence d'éventuelles tangentes verticales aux points posant problème.

- $f(x) = \sqrt{x}e^{-x}$
- $g(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$
- $h(x) = x\sqrt{x+x^2}$
- $i(x) = \dfrac{x\sqrt{x}}{e^x - 1}$ prolongée par $j(0) = 0$

Exercice 2 (**)

Calculer pour tout entier n la dérivée n-ème de chacune des fonctions suivantes :

- $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$
- $g(x) = \dfrac{1}{1+x}$
- $h(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

Exercice 3 (*)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)e^{-x}$.

1. Montrer que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. Calculer les premières dérivées de f et essayer de conjecturer la forme de $f^{(n)}$.
3. Prouver cette conjecture par récurrence.

Exercice 4 (**)

Soit f la fonction définie sur $[0;1[$ par $f(0) = 0$, et pour $x > 0$, $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$.

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $[0;1[$ (0 compris).
2. Déterminer si f est convexe ou concave sur $[0;1[$.
3. Montrer que f possède un unique point d'inflexion sur cet intervalle et déterminer la tangente de f en ce point.
4. Tracer une allure de la courbe représentative de f.

Exercice 5 (** à ***)

Étudier le plus complètement possible chacune des fonctions suivantes, en précisant notamment la convexite et la présence éventuelle de points d'inflexion.

- $f : x \mapsto \ln(1 + x^2)$
- $g : x \mapsto e^{\frac{1}{1-x}} + 2x - 3$
- $h : x \mapsto x\sqrt{1 - x^2}$
- $i : x \mapsto \dfrac{2\ln x + 3}{x}$

Corrigé de la feuille d'exercices n°14

Exercice 1 (** à ***)

1. La fonction f est dérivable sur $\mathcal{R}_+^*$ comme produit de fonctions dérivables, et sa dérivée est $f'(x) = \frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}e^{-x} = \frac{(1-2x)e^{-x}}{2\sqrt{x}}$. Cette fonction étant continue, la fonction f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Reste à se préocupper de ce qui se passe en 0. La dérivée de f ayant pour limite $+\infty$ en 0, on ne peut pas prolonger f' en 0, et le théorème de prolongement C^1 nous permet alors d'affirmer que f n'est pas dérivable en 0, mais la courbe de f y admettra une tangente verticale.

2. La fonction g est dérivable et $\mathcal{C}^1$ sur $]-1;1[$, de dérivée $h'(x) = -\sqrt{1-x^2} - (1-x)\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to 1} g'(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to -1} g'(x) = +\infty$. La fonction g est donc dérivable en 1 (et y admet une tangente horizontale) mais pas en -1 (où il y aura une tangente verticale).

3. La fonction h est définie sur $]-\infty;-1] \cup [0;+\infty[$, dérivable et $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$, et sa dérivée vaut $h'(x) = \sqrt{x+x^2} + x\frac{1+2x}{2\sqrt{x+x^2}} = \frac{2x+2x^2+x+2x^2}{2\sqrt{x+x^2}} = \frac{x(3+4x)}{\sqrt{x(1+x)}} = \frac{(3+4x)\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}$. On constate que $\lim\limits_{x\to -1} h'(x) = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to 0} h'(x) = 0$, donc i est dérivable en 0 (avec une tangente horizontale) mais pas en -1 (où il y a une tangente verticale).

4. Commençons par vérifier que i est continue en 0 : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$, donc $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{e^x-1} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} i(x) = 0$, donc i est bien continue en 0. Comme d'habitude, le seul problème pour la dérivée sera aux bornes de l'intervalle de définition, ici en 0. Ailleurs, i est dérivable et même C^1, de dérivée $i'(x) = \frac{(\sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}})(e^x-1) - x\sqrt{x}e^x}{(e^x-1)^2} = \frac{3\sqrt{x}(e^x-1) - 2x\sqrt{x}e^x}{2(e^x-1)^2} = \frac{x\sqrt{x}}{(e^x-1)^2}\left(\frac{3}{2}\frac{e^x-1}{x} - e^x\right)$. Quand x tend vers 0, la parenthèse a pour limite $\frac{1}{2}$, et le facteur devant la parenthèse est équivalent à $\frac{x\sqrt{x}}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ (car $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$). On en conclut que $\lim\limits_{x\to 0} i'(x) = +\infty$, donc la fonction i n'est pas dérivable en 0 (où il y aura une fois de plus une tangente verticale.

Exercice 2 (**)

1. Commençons par calculer les premières dérivées pour nous donner une idée : $f'(x) = -\frac{-1}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$. Pour la dérivée seconde, on utilise $\left(\frac{1}{u^2}\right)' = \frac{-2u'}{u^3}$, ce qui donne $f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$. De même, on obtient $f^{(3)}(x) = \frac{2\times 3}{(1-x)^4}$, et on conjecture que $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$. Reste à le prouver par récurrence. On a déjà fait l'initialisation. Supposons la formule vraie au rang n, on a alors $f^{(n+1)} = (f^{(n)})' = \frac{n! \times (n+1)}{(1-x)^{n+2}} = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$, ce qui achève la récurrence.

2. C'est exactement le même principe qu'au-dessus, la seule différence étant qu'on récupère un changement de signe à chaque étape. On conjecture et on prouve de même que $g'(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$.

3. L'astuce diabolique consiste à remarquer que $g(x)+f(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} = \frac{1-x+1+x}{(1-x)(1+x)} = \frac{2}{1-x^2} = 2h(x)$, donc $h(x) = \frac{1}{2}(f(x)+g(x))$, d'où $h^{(n)}(x) = \frac{1}{2}(f^{(n)}(x)+g^{(n)}(x))$, c'est-à-dire $h^{(n)}(x) = \frac{n!}{2(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{2(1+x)^{n+1}}$.

Exercice 3 (*)

1. La fonction f est un produit de fonctions $\mathcal{C}^\infty$, donc est $\mathcal{C}^\infty$.

2. On calcule $f'(x) = e^{-x} - (x+1)e^{-x} = -xe^{-x}$, puis $f''(x) = -e^{-x} + xe^{-x} = (x-1)e^{-x}$, $f^{(3)}(x) = (1-(x-1))e^{-x} = (2-x)e^{-x}$, $f^{(4)}(x) = (x-3)e^{-x}$ etc. On conjecture que $f^{(n)} = (-1)^n(x-n+1)e^{-x}$.

3. L'initialisation a déjà été faite, reste à prouver l'hérédité. Supposons donc la formule vérifiée au rang n, on a alors $f^{(n+1)}(x) = (-1)^n e^{-x} - ((-1)^n(x-n+1))e^{-x} = (-1)^{n+1}(-1+x-n+1)e^{-x} = (-1)^{n+1}(x-n)e^{-x}$, ce qui est bien la formule attendue pour le rang $n+1$.

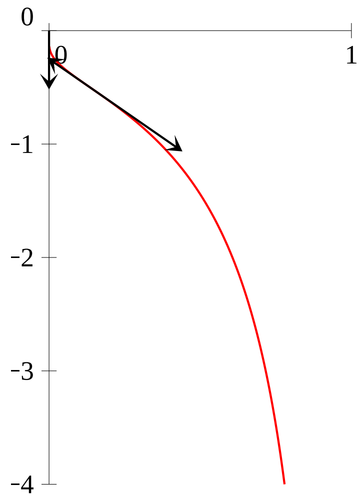
Exercice 4 (**)

1. La fonction f est bien sûr continue et dérivable sur $]0;1[$. De plus, $\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$, donc $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. La fonction f est donc continue en 0. Sa dérivée sur $]0;1[$ vaut $f'(x) = \frac{-1}{x(\ln x)^2}$. Cette dérivée est continue sur $]0;1[$, et a pour limite $-\infty$ en 0 car $\lim_{x\to 0} x(\ln x)^2 = 0$ par croissance comparée. D'après le théorème du prolongement C^1, il y aura donc une tangente verticale en 0. Notons au passage que f' est négative sur $]0;1[$, et que f est donc strictement décroissante sur cet intervalle.

2. Dérivons donc une deuxième fois f sur $]0;1[$: la dérivée de $x(\ln x)^2$ est $(\ln x)^2 + x \times 2\frac{\ln x}{x} = (\ln x)^2 + 2\ln x$, donc $f''(x) = \frac{(\ln x)^2 + 2\ln x}{x^2(\ln x)^4} = \frac{\ln x + 2}{x^2(\ln x)^3}$. Sur $]0;1[$, $\ln x$ est négatif, donc $\frac{1}{x^2(\ln x)^3} < 0$ et f'' est de signe opposé à celui de $\ln x + 2$, qui s'annule quand $\ln x = -2$, c'est-à-dire $x = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$. La fonction f est donc convexe sur $]0, e^{-2}]$ et concave sur $[e^{-2}, 1[$.

3. On vient de voir que f'' s'annulait pour $x = e^{-2}$. Comme $f(e^{-2}) = \frac{1}{\ln(e^{-2})} = -\frac{1}{2}$ et $f'(e^{-2}) = \frac{-1}{e^{-2}(-2)^2} = -\frac{e^2}{4}$, le point d'inflexion a pour coordonnées $\left(e^{-2}; -\frac{1}{2}\right)$, et la tangente à la courbe en ce point a pour équation $y = -\frac{e^2}{4}(x - e^{-2}) - \frac{1}{2} = -\frac{e^2}{4}x - \frac{1}{4}$.

4. Voici une allure de la courbe, avec la tangente calculée ci-dessus tracée en noir :



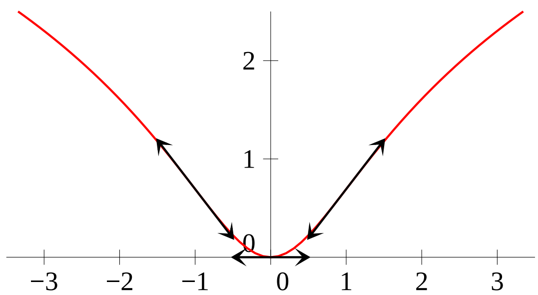
Exercice 5 (***)

Étude de la fonction f

Comme $1 + x^2$ est toujours strictement positif, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et y est $\mathcal{C}^\infty$ par théorèmes généraux. On peut également constater que la fonction est paire.

On a sans difficulté $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, et comme $\dfrac{f(x)}{x} \leqslant \dfrac{\ln(2x^2)}{x}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ par croissance comparée. La courbe représentative de f admet donc une branche parabolique de direction (Ox) en $+\infty$. Même conclusion en $-\infty$ en utilisant la parité ou en effectuant des calculs très similaires.

Étudions désormais les variations : $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, donc f est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$, atteignant en 0 un minimum de valeur $f(0) = \ln(1) = 0$. De plus, $f'(x) = \dfrac{2(x^2+1) - 2x(2x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$. La fonction f a donc deux points d'inflection pour $x = 1$ et $x = -1$, de hauteur $f(1) = f(-1) = \ln(2)$ et dont les tangentes ont pour pentes respectives $f'(1) = \dfrac{2}{2} = 1$ et $f'(-1) = \dfrac{-2}{2} = -1$. La fonction f est convexe sur $[-1; 1]$ (sa dérivée seconde est alors positive), et concave sur $]-\infty; -1]$ et sur $[1; +\infty[$. Voici une allure de la courbe (courbe en rouge, tangentes intéressantes en noir) :



Étude de la fonction g

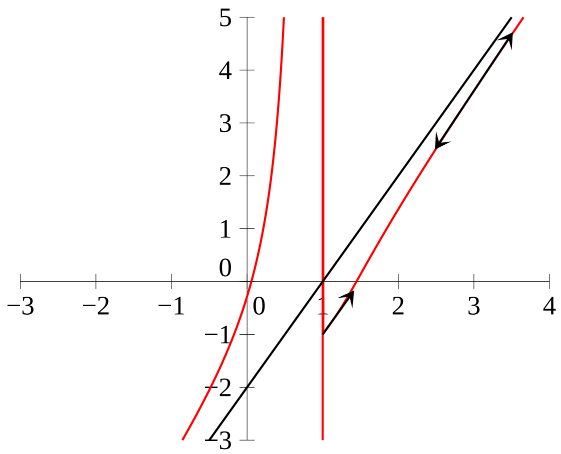
La fonction g est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ et y est $\mathcal{C}^\infty$ par théorèmes généraux.

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{1-x}} = 1$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ puis $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x} = 2$ et enfin $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) - 2x = -2$. Il y a donc en $+\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = 2x - 2$. Cette asymptote est d'ailleurs tout aussi valable en $-\infty$ par des calculs similaires. Pour les plus pressés, signalons d'ailleurs qu'on peut en $+\infty$ comme en $-\infty$ $e^{\frac{1}{1-x}} = 1 + o(1)$, donc $g(x) = 2x - 2 + o(1)$, ce qui règle tout de suite la question de l'asymptote.

Du côté de 1 c'est plus compliqué : $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1-x} = +\infty$, ce dont on déduit $\lim_{x\to 1^-} g(x) = +\infty$. Il y a donc une asymptote verticale d'équation $x = 1$. Mais par ailleurs $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{1-x} = -\infty$, ce dont on déduit cette fois que $\lim_{x\to 1^+} g(x) = 2 - 3 = -1$. La fonction g est donc prolongeable « par continuité » en posant $g(1) = -1$.

Dérivons désormais : $g'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} e^{\frac{1}{1-x}} + 2$, qui a le bon gout de toujours être positif. La fonction est donc croissante sur chacun de ses deux intervalles de définition. De plus, g' a pour limite 2 en -1^+ (on a toujours $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{1-x} = -\infty$ et, par croissance comparée, $\lim_{X\to -\infty} X^2 e^X = 0$, donc la composition des limites nous donne une limite nulle pour le premier morceau). Il y aura donc une demi-tangente à droite de pente 2 en notre point prolongé par continuité à droite.

Enfin, $g''(x) = \left(\frac{2}{(1-x)^3} + \frac{1}{(1-x)^2}\right) e^{\frac{1}{1-x}} = \frac{3-x}{(1-x)^3} e^{\frac{1}{1-x}}$. Il y a donc un point d'inflexion pour $x = 3$, et $g(3) = e^{-\frac{1}{2}} + 3 = \frac{1}{\sqrt{e}} + 3$; $g'(3) = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{4} + 2 = \frac{1}{4\sqrt{e}} + 2$. La fonction f est convexe sur $]-\infty;-1[$ et sur $[3;+\infty[$ et concave sur $[1;3]$ (le dénominateur changeant de signe pour $x = 1$). Avec tout ça, on doit pouvoir tracer une courbe ressemblant à la suivante :



Étude de la fonction h

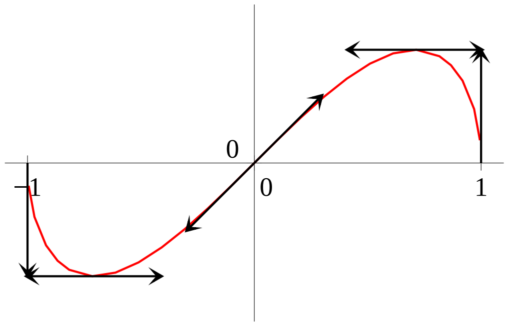
La fonction h est définie sur $[-1;1]$ et $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1;1[$ par théorèmes généraux. De plus, la fonction est paire.

Pas de limites à calculer, bornons-nous à remarquer que $h(-1) = h(1) = 0$.

On a $h'(x) = \sqrt{1-x^2} + x \times \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{2(1-x^2) - 2x^2}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$. Il y a donc deux extrema pour $x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. On calcule $h\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$ et $h\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2}$. Constatons au passage que les limites de h' en -1 et en 1 sont infinies puisque le numérateur de h' tend vers -2 et le dénominateur vers 0. De plus, $h''(x) = \frac{-4x\sqrt{1-x^2} - (1-2x^2) \times \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{-4x(1-x^2) + x(1-2x^2)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2x^3 - 3x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x(2x^2-3)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$. Cette dérivée seconde ne s'annule que pour

$x = 0$ (car h n'est définie que sur $[-1;1]$, intervalle où $2x^2 - 3$ est toujours négatif), point d'inflexion pour lequel on a $h(0) = 0$ et $h'(0) = 1$, et on obtient le tableau de variations complet suivant :

x	-1		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
$h''(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$h'(x)$	$-\infty$	$-$	0	$+$	1	$+$	0	$-$	$-\infty$
h	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0
h	convexe					concave			

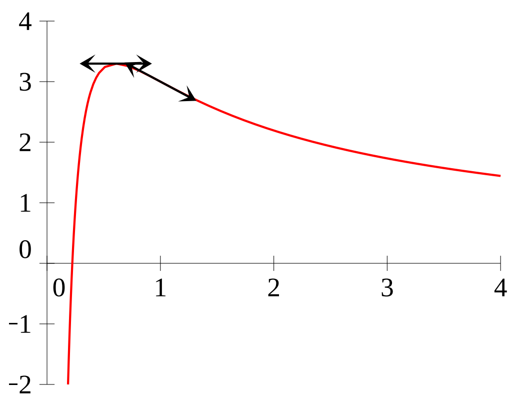


Étude de la fonction i

La fonction i est bien sûr définie sur $]0;+\infty[$, et y est $\mathcal{C}^\infty$ par théorèmes généraux.

La limite de i quand x tend vers 0 est $-\infty$ (non, il n'y a pas de forme indéterminée), il y a donc une asymptote verticale d'équation $x = 0$. Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} i(x) = 0$, donc il y a également une asymptote horizontale (l'axe des abscisses) en $+\infty$.

Comme $i'(x) = \dfrac{2 - (2\ln x + 3)}{x^2} = \dfrac{-1 - 2\ln x}{x^2}$, la fonction i admet un maximum en $x = e^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$, de valeur $i\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right) = (2 \times (-\frac{1}{2}) + 3)\sqrt{e} = 2\sqrt{e}$. De plus, $i''(x) = \dfrac{-2x - 2x(-1 - 2\ln x)}{x^4} = \dfrac{4\ln x}{x^3}$. La fonction admet donc un point d'inflexion pour $x = 1$, et $i(1) = 3$; $i'(1) = -1$. La fonction i est concave sur $]0;1]$ et convexe sur $[1;+\infty[$, avec une courbe ressemblant à ceci :



Feuille d'exercices n°15 : Suites récurrentes

ECE3 Lycée Carnot

20 janvier 2010

Exercice 1 (**)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{4}(2 - u_n^2)$.

1. On note f la fonction définie par $f(x) = x + \dfrac{1}{4}(2 - x^2)$. Étudier les variations de f et déterminer ses points fixes.
2. Montrer que $\forall x \in [1; 2]$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$, et que $f([1; 2]) \subset [1; 2]$.
3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1; 2]$, et que $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|$.
4. Prouver par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \sqrt{2}| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$, et en déduire la limite de la suite (u_n).
5. À partir de quel rang a-t-on $|u_n - \sqrt{2}| \leqslant 10^{-9}$?

Exercice 2 (**)

On considère la fonction f définie sur $]0; \frac{1}{e}[\cup]\frac{1}{e}; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{\ln x + 1}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. La fonction prolongée est-elle dérivable en 0 ?
2. Étudiez les variations de f et tracer l'allure de sa courbe représentative.
3. Déterminer les points fixes de f.
4. On définit une suite (x_n) par $x_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$.
   (a) Étudiez sur $\mathbb{R}_+$ la fonction $g : x \mapsto \dfrac{x}{(x+1)^2}$, en déduire que $\forall x \in]1; +\infty[$, $0 \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{1}{4}$.
   (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_{n+1} - 1| \leqslant \dfrac{1}{4}|x_n - 1|$, puis que $|x_n - 1| \leqslant \dfrac{1}{4^n}$.
   (c) En déduire la limite de la suite (x_n).

Exercice 3 (**)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_-$ par $f(x) = \dfrac{e^x - 3}{2}$. Le but de l'exercice est de calculer une valeur approchée de la solution de l'équation $e^x = 3 + 2x$.

1. Montrer que cette équation admet une unique solution négative, que l'on notera α, et que $f(\alpha) = \alpha$.

2. Montrer que $]-\infty;0]$ est un intervalle stable par la fonction f.
3. Prouver que, $\forall x \in]-\infty;0]$, $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$.
4. On définit désormais une suite (u_n) par $u_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 0$.
5. Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.
6. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}$.
7. Montrer que la suite (u_n) converge vers α.
8. Écrire un programme Pascal déterminant une valeur approchée de α à ε près, où ε est un réel positif choisi par l'utilisateur.

Exercice 4 (d'après ESCL 2001) (***)

On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$ si $x > 0$, et $f(0) = 0$.

1. (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$, et calculer sa dérivée sur cet intervalle.
   (c) Étudier la limite de f' quand x tend vers 0.
   (d) En déduire que f est en fait $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
   (e) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$.
2. (a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0;+\infty[$ et que
   $$f''(x) = \frac{e^x}{(e^x - 1)^3}(xe^x - 2e^x + x + 2)$$
   (b) Étudier les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = xe^x - 2e^x + x + 2$. En déduire le signe de f''.
   (c) En déduire le sens de variation de f, préciser sa limite en $+\infty$, et dresser son tableau de variations.
   (d) Tracer une allure de la courbe représentative de f.
3. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$ et $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.
   (b) Résoudre l'équation $f(x) = x$.
   (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \ln 2| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ln 2|$.
   (d) En déduire que (u_n) converge et préciser sa limite.

Exercice 5 (***)

On considère une suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f : x \mapsto \dfrac{x^3 + 3x}{3x^2 + 1}$. Déterminer la nature de la suite (u_n) en distinguant éventuellement plusieurs cas selon la valeur de u_0.

Corrigé de la feuille d'exercices n°15

Exercice 1 (**)

1. La fonction f est C^∞ sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = 1 - \frac{1}{2}x$. Elle admet donc un maximum en $x = 2$, de valeur $f(2) = 1 + \frac{1}{4}(2-4) = \frac{3}{2}$, et est croissante sur $]-\infty; 2]$ et décroissante sur $[2; +\infty[$. Les points fixes sont déterminée en résolvant l'équation $f(x) = x$, c'est-à-dire $\frac{1}{4}(2 - x^2) = 0$, d'où deux points fixes pour $x = \sqrt{2}$ et $x = -\sqrt{2}$.

2. En effet, si $1 \leqslant x \leqslant 2$, $-1 \leqslant -\frac{1}{2}x \leqslant -\frac{1}{2}$ et $0 \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{2}$, donc $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$. Quant à l'image de $[1; 2]$ par f, comme la fonction est croissante sur cette intervalle, elle vaut $[f(1); f(2)] = \left[\frac{5}{4}; \frac{3}{2}\right] \subset [1; 2]$.

3. C'est une récurrence tout simple : $u_0 = 1 \in [1; 2]$, et si $u_n \in [1; 2]$, on a d'après la question précédente $f(u_n) \in [1; 2]$, soit $u_{n+1} \in [1; 2]$. Comme $u_n \in [1; 2]$ et $\sqrt{2} \in [1; 2]$, et que $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$ sur cet intervalle, on peut appliquer l'IAF entre u_n et $\sqrt{2}$ et obtenir $|f(u_n) - f(\sqrt{2})| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|$. Comme $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ (c'est un point fixe de f) et $f(u_n) = u_{n+1}$ (par définition), on a bien $u_n \in [1; 2]$, et que $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|$.

4. Prouvons par récurrence P_n : $|u_n - \sqrt{2}| \leqslant \frac{1}{2^n}$. Pour $n = 0$, la propriété P_0 stipule que $|1 - \sqrt{2}| \leqslant 1$, ce qui est vrai. Supposons désormais P_n vraie, on a alors d'après la question précédente $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|$, et par ailleurs, par hypothèse de récurrence $|u_n - \sqrt{2}| \leqslant \frac{1}{2^n}$. On peut combiner les deux inégalités pour obtenir $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leqslant \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}$. Cela prouve P_{n+1} et achève la récurrence.
   Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, et $0 \leqslant |u_n - \sqrt{2}| \leqslant \frac{1}{2^n}$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \sqrt{2}| = 0$, soit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{2}$.

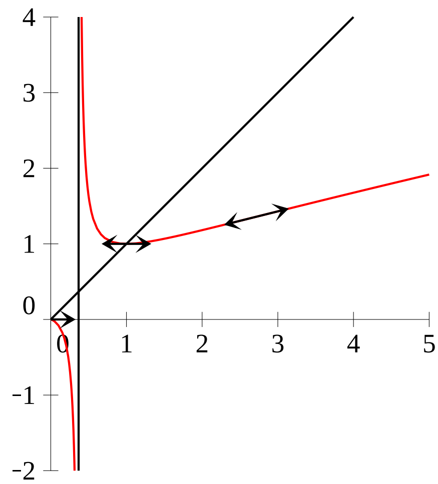
5. On sait que l'inégalité sera vérifiée dès que $\frac{1}{2^n} \leqslant 10^{-9}$, soit en passant au logarithme $-n \ln 2 \leqslant -9 \ln 10$, ou encore $n \geqslant \frac{9 \ln 10}{\ln 2} \simeq 30$. Il faut donc calculer le trentième terme de la suite pour être certain d'avoir une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-9} près. Remarque : en pratique, on constate que le u_{19} est déjà une valeur approchée à 10^{-9} près.

Exercice 2 (**)

1. En effet, on a $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$ (pas de forme indéterminée). De plus, f est dérivable et C^1 sur $\left]0; \frac{1}{e}\right[$, de dérivée $f'(x) = \frac{\ln x + 1 - 1}{(\ln x + 1)^2} = \frac{\ln x}{(\ln x + 1)^2}$, qui a également pour limite 0 en 0 (c'est pas exemple équivalent en 0 à $\frac{1}{\ln x}$). D'après le théorème de prolongement C^1, la fonction f est donc dérivable en 0, et $f'(0) = 0$.

2. On a déjà calculé f', il est donc facile de constater que f est décroissante sur $\left[0; \frac{1}{e}\right[$ et sur $\left]\frac{1}{e}; 1\right]$, et croissante sur $[1; +\infty[$. On a par ailleurs $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (croissance comparée),

et $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, donc il y a une branche parabolique de direction (Ox) en $+\infty$. Par ailleurs, $\lim_{x\to\frac{1}{e}^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to\frac{1}{e}^+} f(x) = +\infty$ (pas de difficulté non plus, il suffit de constater que $\ln x + 1$ est négatif à gauche de $\dfrac{1}{e}$ et positif à droite). Les plus courageux calculeront $f''(x) = \dfrac{1}{x(\ln x+1)^2} - \dfrac{2\ln(x)}{x(\ln x+1)^3} = \dfrac{1-\ln x}{x(\ln x+1)^3}$ (j'ai dérivé le quotient comme le produit de $\ln x$ et de $\dfrac{1}{(\ln x+1)^2}$ car c'est un peu plus facile à écrire), et en déduiront que la courbe admet un point d'inflexion pour $x = e$, de hauteur $f(e) = \dfrac{e}{2}$, et dont la tangente a pour pente $f'(e) = \dfrac{1}{4}$.
On peut ainsi tracer la courbe suivante :



3. Résolvons $f(x) = x$. Si l'on élimine la valeur 0 (qui est effectivement un point fixe de f), on peut simplifier par x et obtenir $\dfrac{1}{\ln x + 1} = 1$, soit $\ln x + 1 = 1$, donc $x = 1$. Il y a donc deux points fixes : 0 et 1.
4. On définit une suite (x_n) par $x_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$.
   (a) La fonction g est C^∞ sur $\mathbb{R}_+$, de dérivée $g'(x) = \dfrac{(x+1)^2 - 2x(x+1)}{(x+1)^4} = \dfrac{1-x}{(x+1)^3}$. Elle admet donc un maximum en 1, de valeur $g(1) = \dfrac{1}{4}$. Comme $g(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$, on en déduit que $\forall x \geqslant 0$, $0 \leqslant g(x) \leqslant \dfrac{1}{4}$. Or, on a $f'(x) = g(\ln x)$. Si $x \geqslant 1$, $\ln x \geqslant 0$, et on peut lui appliquer l'inégalité précédente : $0 \leqslant g(\ln x) \leqslant \dfrac{1}{4}$, c'est-à-dire $0 \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{1}{4}$.
   (b) Pour appliquer l'IAF, il faut d'abord vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [1; +\infty[$. En constatant que l'intervalle $[1; +\infty[$ est stable par f, on peut le prouver par une simple récurrence : $x_0 = 2 \geqslant 1$, et en supposant $x_n \geqslant 1$, on obtient, en utilisant la croissance de f sur $[1; +\infty[$, $f(x_n) \geqslant f(1) = 1$, donc $x_{n+1} \geqslant 1$, ce qui achève la récurrence.
   On a donc $1 \in [1; +\infty[$ et $x_n \in [1; +\infty[$. De plus, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{4}$ sur $[1; +\infty[$. En appliquant l'IAF, on obtient donc $|f(x_n) - f(1)| \leqslant |x_n - 1|$, soit $|x_{n+1} - 1| \leqslant \dfrac{1}{4}|x_n - 1|$.
   Prouvons ensuite par récurrence la propriété P_n : $|x_n - 1| \leqslant \dfrac{1}{4^n}$. Pour $n = 0$, P_0 stipule que $|2-1| \leqslant 1$, ce qui est vrai. Supposons ensuite P_n vraie, on obtient alors $|x_{n+1} - 1| \leqslant \dfrac{1}{4}|x_n - 1|$ (cf plus haut) $\leqslant \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{4^n}$ (hypothèse de récurrence), ce qui prouve P_{n+1} et achève la récurrence.

(c) Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4^n} = 0$, et $0 \leqslant |x_n - 1| \leqslant \frac{1}{4^n}$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim_{n\to+\infty} |x_n - 1| = 0$, soit $\lim_{n\to+\infty} x_n = 1$.

Exercice 3 (**)

1. Posons $g(x) = e^x - 3 - 2x$. Cette fonction est C^∞ sur $\mathbb{R}$, de dérivée $g'(x) = e^x - 2$. La fonction g est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ (et même un peu au-delà). Comme $g(0) = -2$ et $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$, elle est donc bijective de $\mathbb{R}_-$ vers $[-2; +\infty[$. L'équation $g(x) = 0$ admet donc une unique solution négative α. Comme $e^\alpha - 3 = 2\alpha$, on a bien $f(\alpha) = \alpha$.
2. La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $f(0) = -\frac{1}{2}$, donc $\forall x \leqslant 0$, $f(x) \leqslant -\frac{1}{2}$, ce qui prouve la stabilité de laintervalle $]-\infty; 0]$ par f.
3. On a $f'(x) = \frac{e^x}{2}$, donc $0 \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{2}$ quand $x \leqslant 0$, ce qui prouve l'inégalité demandée.
4. C'est vrai pour u_0, et si on le suppose vrai pour u_n, alors $u_{n+1} = f(u_n) \leqslant 0$ d'après la question 2. Par principe de récurrence, tous les termes de la suite sont donc négatifs.
5. Vous devez commencer à avoir l'habitude : $\alpha \leqslant 0$, $u_n \leqslant 0$ et $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$ quand $x \leqslant 0$, donc l'IAF nous donne $|f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$, soit $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.
6. C'est la récurrence classique, on pose $P_n : |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}$. La propriété P_0 prétend que $|-1-\alpha| \leqslant 1$, (pour une fois, ce n'est pas totalement évidemment), soit $\alpha \in [-2; 0]$. On sait déjà que $\alpha \leqslant 0$. Pour prouver l'autre inégalité, revenons à la question 1 et calculons $g(-2) = e^{-2} - 3 + 4 = 1 + e^{-2} > 0$. Comme $g(-2) > g(\alpha)$ (qui vaut 0 par hypothèse), la décroissante de la fonction g nous donne bien $\alpha \geqslant -2$. Supposons désormais P_n vérifiée, on a alors $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n}$, ce qui prouve P_{n+1} (plus de détails sur ce genre de récurrence dans le corrigé de l'exercice 1).
7. Cf exercice 1 : par théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} |u_n - \alpha| = 0$, donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.
8.
```
PROGRAM alpha ;
USES wincrt ;
VAR u,a,e : real ;
BEGIN
WriteLn('Choisissez la précision de la valeur approchée') ;
ReadLn(e) ;
u := -1 ; a := 1 ;
REPEAT
u := (exp(u)-3)/2 ;
a := a/2 ;
UNTIL a<e ;
WriteLn('Une valeur approchée de alpha à ',e,' près est ',u) ;
END.
```
   Pour les curieux, on obtient $\alpha \simeq -1.373$.

Exercice 4 (d'après ESCL 2001) (***)

1. (a) La fonction f est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions usuelles, et de plus on sait que $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, donc $\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x - 1} = 1$. La fonction est donc également continue en 0, donc sur $\mathbb{R}_+$ tout entier.

(b) Pour le caractère C^1, cf la question précédente. De plus, $f'(x) = \dfrac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x-1)^2}$.

(c) On ne peut en fait pas traiter cette question sans avoir recours aux développements limités. Avec nos connaissances actuelles, on peut traiter le dénominateur : $(e^x-1)^2 \underset{0}{\sim} x^2$, en utilisant la limite classique déjà reprise au 1, mais le numérateur ne se simplifie pas vraiment. Pour s'en sortir, on a besoin du résultat suivant (que vous verrez en deuxième année) : $e^x \underset{0}{=} 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$, ce qui donne ensuite $e^x - 1 - xe^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} - 1 - x - x^2 - o(x^2)$ (pour xe^x, on a multiplié le développement limité précédent par x, en supprimant le terme $\dfrac{x^3}{2}$ qui est un $o(x^2)$), soit $e^x - 1 - x^2 = -\dfrac{x^2}{2} + o(x^2) \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$. on a donc $f'(x) \underset{0}{\sim} -\dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire que $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = -\dfrac{1}{2}$.

(d) En appliquant le théorème de prolongement C^1, on peut en déduire que f est dérivable en 0, et que $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$. La fonction f est donc $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ tout entier.

(e) Ca, on peut le faire sans problème ; $f'(x) = \dfrac{e^x - 1 - xe^x}{e^{2x} - 2e^x + 1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{-xe^x}{e^{2x}} \sim -\dfrac{x}{e^x}$, donc par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0^-$.

2. (a) On a déjà prouvé le caractère C^2, et de plus $f' = u \times \dfrac{1}{v^2}$, avec $u(x) = e^x - 1 - xe^x$ et $v(x) = e^x - 1$. En dérivant f' comme un produit, on a donc $f'' = \dfrac{u'}{v^2} - \dfrac{2uv'}{v^3}$, soit $f''(x) = \dfrac{e^x - e^x - xe^x}{(e^x-1)^2} - \dfrac{2(e^x - 1 - xe^x)e^x}{(e^x-1)^3} = \dfrac{-xe^x(e^x-1) - 2e^x(e^x - 1 - xe^x)}{(e^x-1)^3} = \dfrac{e^x(-xe^x + x - 2e^x + 2 + 2xe^x)}{(e^x-1)^3} = \dfrac{e^x(xe^x - 2e^x + x + 2)}{(e^x-1)^3}$.

(b) La fonction g est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$, et $g'(x) = e^x + xe^x - 2e^x + 1 = xe^x - e^x + 1$; $g''(x) = e^x + xe^x - e^x = xe^x$, donc $g'' \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}_+$, d'où le tableau de variations suivant :

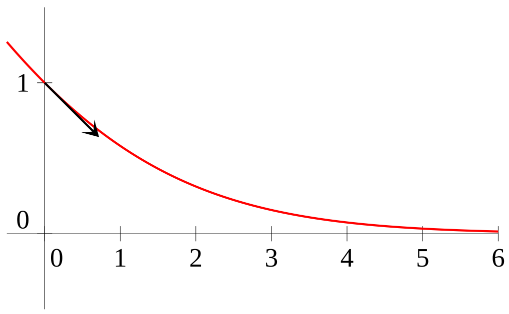
x	0 $\quad$ $+\infty$
$g''(x)$	$+$
$g'(x)$	$0 \nearrow +\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$0 \nearrow +\infty$

La fonction g est donc positive sur $\mathbb{R}_+$. Comme les autres facteurs intervenant dans f'' sont aussi positifs (sur $\mathbb{R}_+$, $e^x \geqslant 1$, donc $(e^x-1)^3 \geqslant 0$), la fonction f'' est positive sur $\mathbb{R}_+$.

(c) D'après la question précédente, la fontion f' est croissante, comme elle tend vers 0^- en $+\infty$, elle est donc négative sur $\mathbb{R}_+$, et f est donc décroissante. De plus, $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x}{e^x}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

x	0	$+\infty$
$f(x)$	1 ↘	0

(d) L'allure de la courbe est la suivante :



3. (a) Il suffit de reprendre la tableau de variations de f' pour constater que $\forall x \geqslant 0$, $0 \geqslant f'(x) \geqslant f'(0) = -\dfrac{1}{2}$, donc $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$, et que $0 \leqslant f(x) \leqslant f(0) = 1$.

(b) L'équation donne $x = x(e^x - 1)$, soit $x(e^x - 2) = 0$, donc $e^x = 2$ (puisque $x = 0$ n'est pas un point fixe), et le seul point fixe de f est donc $x = \ln 2$.

(c) En utilisant les résultats des deux questions précédentes, on peut appliquer l'IAF à f sur $\mathbb{R}_+$ et obtenir que, $\forall (x, y) \geqslant 0$, $|f(x) - f(y)| \leqslant \dfrac{1}{2}|x - y|$. On peut prendre $y = \ln 2$ et $x = u_n$ car u_n est toujours positif (c'est vrai pour u_0, et $u_{n+1} = f(u_n)$ est positif car f ne prend que des valeurs positives), donc, comme $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(\ln 2) = \ln 2$, on a $|u_{n+1} - \ln 2| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \ln 2|$.

(d) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ln 2| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$. C'est vrai pour u_0 car $\ln 2 \leqslant 1$, et en supposant le résultat vrai pour u_n, on a $|u_{n+1} - \ln 2| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \ln 2| \leqslant \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2^n} \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}$, ce qui prouve l'hérédité. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$, on en déduit par le théorème des gendarmes que $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \ln 2| = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ln 2$.

Exercice 5 (***)

Commençons par étudier la fonction f : elle est C^∞, impaire, et $f'(x) = \dfrac{(3x^2+3)(3x^2+1) - 6x(x^3+3x)}{(3x^2+1)^2} = \dfrac{3x^4 - 6x^2 + 3}{(3x^2+1)^2} = \dfrac{3(x^2-1)^2}{(3x^2+1)^2}$. La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Cherchons ses points fixes : $f(x) = x$ se ramène, en simplifiant par x (et en notant au passage que 0 est un point fixe), à $\dfrac{x^2+3}{3x^2+1} = 1$, soit $x^2 + 3 = 3x^2 + 1$, donc $2x^2 = 2$, ce qui se produit pour $x = 1$ et $x = -1$. Il y a donc trois points fixes : $x = -1$, $x = 0$ et $x = 1$. Chacun des quatre intervalles $]-\infty; -1]$; $[-1; 0]$; $[0; 1]$ et $[1; +\infty[$ est donc stable par f. De plus, la courbe représentative de la fonction f est située au-dessus de la droite d'équation $y = x$ sur $]-\infty; -1]$ et sur $[0; 1]$, et en-dessous sur les deux autres intervalles.

On peut alors deviner le comportement de (u_n) selon les valeurs de u_0 :

- si $u_0 < -1$, la suite sera croissante, majorée par -1, donc convergera. Le seul point fixe de l'intervalle étant -1, on aura $\underset{n\to+\infty}{u}_n = -1$.

- si $u_0 = -1$, la suite est constante égale à -1.
- si $-1 < u_0 < 0$, la suite sera décroissante, minorée par -1, et convergera nécessairement vers -1.
- si $u_0 = 0$, la suite est nulle.
- si $0 < u_0 < 1$, la suite sera croissante, majorée par 1, et convergera vers 1.
- si $u_0 = 1$, la suite est constante égale à 1.
- si $u_0 > 1$, la suite est décroissante, minorée par 1, elle converge vers 1.

Prouvons par exemple la convergence dans le cas où $u_0 \in]0;1[$ (les autres sont très similaires). La fonction f étant strictement croissante sur $]0;1[$, on a $\forall x \in]0;1[$, $f(x) \in]f(0);f(1)[=]0;1[$. Une récurrence élémentaire permet alors de prouver que tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $]0;1[$: c'est vrai pour u_0 par hypothèse, et si $u_n \in]0;1[$, $f(u_n) \in]0;1[$, soit $u_{n+1} \in]0;1[$, ce qui achève la récurrence.

Par ailleurs, on a $f(x) = x\dfrac{x^2+3}{3x^2+1}$. Quand $0 < x < 1$, $0 < x^2 < 1$, donc $0 < 2x^2 < 2$ puis en ajoutant x^2+1 de chaque côté, $3x^2+1 < x^2+3$. Tous ces nombres étant par ailleurs positifs, on a alors $\dfrac{x^2+3}{3x^2+1} > 1$, d'où $f(x) > x$. On en déduit que $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n > 0$, donc la suite (u_n) est strictement croissante. Étant majorée par 1, elle converge vers un point fixe de la fonction. Sa limite appartient par ailleurs à l'intervalle $[0;1]$, donc ne peut être égale qu'à 0 ou 1. On peut exclure 0 car, la suite étant croissante, $u_n \geqslant u_0$, donc la limite de la suite est supérieure ou égale à u_0 et ne peut donc être nulle. Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Remarque : ici, appliquer l'IAF est assez peu intéressant...

Feuille d'exercices n°16 : Probabilités

ECE3 Lycée Carnot

27 janvier 2010

Exercice 1 (*)

On lance deux dés simultanément. Décrire de façon ensembliste les événements A : « On obtient deux fois le même résultat » et B : « La somme des deux chiffres est inférieure ou égale à 4 ». Calculer $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$ et $P(A \cap B)$.

Exercice 2 (**)

On lance un dé quatre fois de suite. Calculer les probabilités suivantes :

1. On obtient quatre fois le même chiffre.
2. On obtient quatre chiffres différents.
3. On obtient quatre chiffres qui se suivent.

Exercice 3 (**)

Un coffre contient 10 diamants, 15 emeraudes et 20 rubis. On tire quatre pierres précieuses au hasard dans le coffre. Calculer les probabilités suivantes (valeurs exactes, puis une valeur approchée à 10^{-2} près à l'aide de la calculatrice) :

1. Les quatre pierres sont du même type.
2. On tire deux diamants et deux rubis.
3. On tire autant de diamants que de rubis.

Exercice 4 (**)

On tire simultanément trois dés et on note la somme des trois résultats obtenus. Combien y a-t-il de façons d'obtenir 9 ? Et 10 ? Les probabilités des deux sommes sont-elles égales ?

Exercice 5 (*)

Dans une urne se trouvent 4 boules noires et deux boules blanches. Cinq personnes tirent successivement (sans remise) une boule dans l'urne. Le premier qui tire une boule blanche a gagné, quelle est la probabilité de gain pour chaque personne ?

Exercice 6 (***)

Dans une urne sont placées 15 boules vertes et 10 boules blanches. On tire successivement (sans remise) 5 boules dans l'urne. Calculer les probabilités suivantes :

1. On obtient 5 boules vertes.
2. On obtient une première boule verte, les deux suivantes blanches, les deux dernières vertes.
3. On obtient au plus une boule blanche.
4. On obtient trois boules vertes et deux blanches.

Reprendre l'exercice avec des tirages avec remise.

Exercice 7 (**)

Dans une classe de 38 élèves, 31 étudient l'anglais, 24 l'espagnol, 17 l'allemand ; 12 étudient à la fois anglais et allemand, 9 étudient espagnol et allemand, et 4 etudient les trois langues simultanément. On tire un élève au hasard. Calculer les probabilités suivantes :

1. Il étudie l'anglais et l'espagnol.
2. Il étudie l'anglais ou l'espagnol.
3. Il étudie uniquement l'allemand.

Exercice 8 (***)

Deux personnes A et B jouent au jeu suivant : A lance un pièce, s'il obtient Pile, il a gagné. Sinon, B lance une pièce, s'il obtient Face il a gagné. Sinon, c'est à nouveau à A de jouer ...On note A_k (respectivement B_k) l'événement : « Le joueur A (respectivement B) gagne à son k-ème lancer ». Calculer la probabilité de A_k et de B_k. On suppose désormais que le jeu s'arrêt après 10 lancers (cinq pour chaque joueur). Calculer la probabilité des événements suivants :

1. Le joueur A gagne en lançant moins de trois fois la pièce.
2. Le jouer B gagne.
3. Personne ne gagne.
4. On suppose que quelqu'un a gagné. Quelle est la probabilité que ce soit A ?

Exercice 9 (***)

On range aléatoirement cinq boules distingables dans quatre boites également distingables.

1. Quel est le nombre de rangements différents possibles ?
2. Quelle est la probabilité que toutes les boules soient rangées dans la même boite ?
3. Quelle est la probabilité que deux boites exactement soient vides ?
4. Même question avec une boite vide.
5. En déduire la probabilité qu'aucune boite ne soit vide.
6. Retrouver ce résultat directement à l'aide de la formule de Poincaré.

Exercice 10 (***)

Un tournoi de tennis accueille 64 joueurs, dont 8 sont têtes de séries. Un bug au moment d'effectuer le tirage au sort fait remplir le tableau de façon totalement aléatoire, y compris les têtes de séries.

1. Quelle est la probabilité qu'au moins deux têtes de série se rencontrent dès le premier tour ?
2. Quelle est la probabilité que les têtes de séries ne puissent pas se rencontrer avant les quarts de finale ?

Corrigé de la feuille d'exercices n°16

Exercice 1 (*)

Il existe plusieurs façons raisonnables de décrire l'univers des résultats possibles, mais le plus simple ici est de considérer, bien que les lancers soient simultanés, que les deux dés sont distinguables et donc que $\Omega = \{(1,1);(1,2);\dots;(1,6);(2,1);\dots;(6,6)\}$. Il y a équiprobabilité sur cet univers, ce qui permet de calculer les probabilités à l'aide de quotients de cardinaux. On a alors $A = \{(1,1);(2,2);(3,3);(4,4);(5,5);(6,6)\}$ et $B = \{(1,1);(1,2);(1,3);(2,1);(2,2);(3,1)\}$. On a donc $P(A) = P(B) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$. Pour la probabilité de l'intersection, il suffit de constater qu'il y a deux cas favorables, donc $P(A \cap B) = \dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18}$. Ensuite, on utilise la formule bien connue $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{18} = \dfrac{5}{18} \simeq 0.28$.

Exercice 2 (**)

Cette fois-ci, pas vraiment de choix pour l'univers : $\Omega = \{(1,1,1,1);(1,1,1,2);\dots;(6,6,6,6)\}$. On a $|\Omega| = 6^4 = 1296$.

1. Il y a six cas favorables, soit une probabilité de $\dfrac{6}{6^4} = \dfrac{1}{216} \simeq 0.0046$.
2. Il faut bien entendu faire attention qu fait qu'il ne s'agit pas du complémentaire de la question précédente. Pour avoir quatre chiffres différents, il y a $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$ cas favorables, soit une probabilité de $\dfrac{360}{1296} = \dfrac{5}{18} \simeq 0.28$.
3. On peut interpréter de plusieurs façons la question. Le plus simple est de considérer qu'on obtient une des combinaisons suivantes : $(1,2,3,4);(2,3,4,5);(3,4,5,6);(4,3,2,1);(5,4,3,2);(6,5,4,3)$, ce qui laisse la même probabilité qu'à la première question.

Exercice 3 (**)

Si on numérotes les pierres précieuses $(D_1;\dots;D_{10};E_1;\dots;E_{15};R_1;\dots;R_{20})$, l'univers est constitué de tous les quadruplets de l'ensemble à 45 éléments précédent. On a donc $|\Omega| = \dbinom{45}{4} = 148995$.

1. Il faut séparer l'événement (que j'appelle A) en trois possibilités. Notons A_1 l'évènement « on obtient trois diamants » ; A_2 « on obtient trois émeraudes » et A_3 « on obtient trois rubis ». On a $P(A_1) = \dfrac{\binom{10}{4}}{\binom{45}{4}}$, et de même $P(A_2) = \dfrac{\binom{15}{4}}{\binom{45}{4}}$ et $P(A_3) = \dfrac{\binom{20}{4}}{\binom{45}{4}}$. Comme on a $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, et que les événements A_1, A_2 et A_3 sont manifestement incompatibles, $P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \dfrac{\binom{10}{4} + \binom{15}{4} + \binom{20}{4}}{\binom{45}{4}} \simeq 0.043$.
2. L'ordre n'ayant pas d'importance, il faut choisir deux diamants parmi les 10 et deux rubis parmi les 20. Le nombre de cas favorables est donc de $\dbinom{10}{2} \times \dbinom{20}{2}$. On a donc une probabilité de $\dfrac{\binom{10}{2} \times \binom{20}{2}}{\binom{45}{4}} \simeq 0.057$.
3. Il faut combiner les deux techniques précédentes : on peut avoir soit deux diamants et deux rubis ; soit un diamant, un rubis et donc deux émeraudes ; soit quatre émeraudes, ce qui donne une probabilité de $\dfrac{\binom{10}{2} \times \binom{20}{2} + \binom{10}{1} \times \binom{20}{1} \times \binom{15}{2} + \binom{15}{4}}{\binom{45}{4}} \simeq 0.207$.

Exercice 4 (**)

On peut obtenir 10 de 6 façons : $1+3+6$; $1+4+5$; $2+2+6$; $2+3+5$; $2+4+4$ et $3+3+4$. On peut obtenir 9 de 6 façons également : $1+2+6$; $1+3+5$; $1+4+4$; $2+2+5$; $2+3+4$ et $3+3+3$. On pourrait penser que les deux sommes ont la même probabilité d'apparition, mais il n'en est rien ! Toute la subtilité se situe dans le choix de l'univers : pour être dans un cas d'équiprobabilité, il faut choisir $\Omega = \{(1,1,1);(1,1,2);\ldots,(1,2,1);\ldots;(6,6,6)\}$, autrement dit tenir compte de l'ordre. Du coup, pour le total de 10, le triplet $(1,3,6)$ contribue en fait pour 6 possibilités (on peut permuter les trois chiffres comme on le souhaite), tout comme $(1,4,5)$ et $(2,3,5)$. Chacun des trois autres triplets ne correspond qu'à 3 possibilités car un des chiffres est répété deux fois. Il y a donc au total 27 cas sur $6^3 = 216$ pour lesquels le total donne 10, soit une probabilité de $\dfrac{27}{216} = \dfrac{1}{8} = 0.125$. Pour 9, on obtient de façon similaire 25 cas favorables (trois triplets qui représentent six cas chacun, deux en représentent trois, et le dernier $(3,3,3)$ n'en représente qu'un seul, soit une probabilité de $\dfrac{25}{216} \simeq 0.116$. On a donc plus de chances d'obtenir 10 que 9.

Exercice 5 (*)

Une représentation sous forme ou, pour faire plus savant, la formule des probabilités composées, permet d'obtenir rapidement les valeurs souhaitées. La robabilité que le premier joueur gagne vaut $\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$. Pour le deuxième, il faut que le joueur 1 tire une boule noire, puis que lui-même tire une boule blanche sur les cinq boules restant dans l'urne, soit une probabilité de $\dfrac{4}{6} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{4}{15}$. De même, le troisième joueur gagne avec probabilité $\dfrac{4}{6} \times \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{5}$, le quatrième avec une probabilité $\dfrac{4}{6} \times \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{4} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{15}$. Enfin, le dernier joueur gagne avec une probabilité $\dfrac{4}{6} \times \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{4} \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{2} = \dfrac{1}{15}$. Notons que la somme de ces cinq probabilités vaut $\dfrac{1}{3} + \dfrac{4}{15} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{2}{15} + \dfrac{1}{15} = \dfrac{5+4+3+2+1}{15} = 1$, ce qui est tout à fait normal puisqu'il y a quatre boules noires dans l'urne, ce qui implique qu'avec des tirages sans remise, l'un des cinq joueurs va nécessairement tirer une boule blanche.

Exercice 6 (***)

Il y ici deux univers raisonnables pour les résultats. On peut ne pas tenir compte de l'ordre et prendre pour Ω l'ensemble des sous-ensembles à 5 éléments de l'ensemble des 25 boules de l'urne, soit $|\Omega| = \dbinom{25}{5}$, mais également choisir de travailler avec des arrangements, auquel cas $|\Omega| = 25 \times 24 \times 23 \times 22 \times 21$. Nous choisissons ici le premier univers, constitué de combinaisons.

1. Il y a $\binom{15}{5}$ tirages favorables, soit une probabilité de $\dfrac{\binom{15}{5}}{\binom{25}{5}} \simeq 0.057$.
2. On a introduit un ordre, il faut changer d'univers ou plus simplement calculer la proba boule par boule (autrement dit à l'aide de la formule des probabilités composées), elle vaut $\dfrac{15}{25} \times \dfrac{10}{24} \times \dfrac{9}{23} \times \dfrac{14}{22} \times \dfrac{13}{21} = \dfrac{39}{1012} \simeq 0.039$.
3. On peut revenir à notre premier univers, les tirages favorables sont ceux constituées de cinq boules vertes et ceux constitués de quatre boules vertes et d'une boule blanche (union disjointe), donc la proba vaut $\dfrac{\binom{15}{4} \times \binom{10}{1} + \binom{15}{5}}{\binom{25}{5}} \simeq 0.313$ (on a séparé l'événement en deux cas disjoints).

4. De la même façon que précédemment, la proba vaut $\dfrac{\binom{15}{3}\times\binom{10}{2}}{\binom{25}{5}} \simeq 0.385$. Dans les deux dernières questions, si on a décidé de travailler avec des arrangements, on fera bien attention au fait que l'ordre des tirages n'est pas imposé dans l'énoncé (contrairement à la deuxième question), ce qui laisse plus de cas favorables.

Dans le cas des tirages avec remise, on est de toute façon obligés de travailler avec des listes, donc $|\Omega| = 25^5$.

1. Il y a 15^5 tirages favorables, donc une probabilité de $\dfrac{15^5}{25^5} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^5 \simeq 0.078$.
2. Il y a $15 \times 10 \times 10 \times 15 \times 15$ tirages favorables, soit une probabilité de $\dfrac{15^3 \times 10^2}{25^5} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^3 \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^2 \simeq 0.035$.
3. Soit on obtient cinq vertes (15^5 cas), soit quatre vertes et une blanche, ce qui correspond à $15^4 \times 10 \times 5$ cas (il ne faut pas oublier de multiplier par 5 pour tenir compte du choix de la position de la boule blanche), donc une probabilité de $\dfrac{15^5 + 15^4 \times 10 \times 5}{25^5} \simeq 0.337$.
4. Là encore, la seule difficulté est de ne pas oublier le choix de la position des deux blanches, la probabilité vaut $\dfrac{\binom{5}{2} \times 15^3 \times 10^2}{25^5} \simeq 0.346$.

Exercice 7 (**)

Le plus simple est encore de calculer tous les cardinaux possibles. Notons A l'ensemble des anglicistes, G celui les germanistes et E les hispanisants. On sait que $|A| = 31$; $|E| = 24$; $|G| = 17$; $|A \cap G| = 12$; $|G \cap E| = 9$ et $|A \cap E \cap G| = 4$. On en déduit que $|G \backslash (A \cup B)| =$

Exercice 8 (***)

1. Soit A gagne au premier lancer (une chance sur deux), soit il gagne à son deuxième lancer, ce qui implique que lui-même et B aient perdu au premier lancer, c'est-à-dire que les trois premiers lancers soient FPP, ce qui se produit avec probabilité $\dfrac{1}{8}$; soit il gagne à son troisième lancer, probabilité $\dfrac{1}{32}$ (même raisonnement qu'avant), soit au total une proba de $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{32} = \dfrac{21}{32} \simeq 0.656$ (les trois cas étant bien sûr incompatibles).
2. Par un raisonnement très similaire à la première question, la probabilité de victoire du joueur B vaut $\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{64} + \dfrac{1}{2^8} + \dfrac{1}{2^{10}} \simeq 0.333$ (les tirages faisant gagner le joueur B sont FF ; $FPFF$; $FPFPFF$; $FPFPFPFF$ et $FPFPFPFPFF$).
3. Il reste une proba de $\dfrac{1}{2^{10}} \simeq 0.000098$ que personne n'ait gagné après dix lancers (5 chacun), le seul cas favorable étant $FPFPFPFPFP$.
4. C'est un calcul de probabilité conditionnelle : la probabilité que A gagne vaut $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{32} + \dfrac{1}{128} + \dfrac{1}{512} = \dfrac{341}{512}$; la probabilité que quelqu'un ait gagné est le complémentaire de la probabilité calculée à la question précédente, elle vaut $1 - \dfrac{1}{2^{10}} = \dfrac{1\ 023}{1\ 024}$. La probabilité conditionnelle cherchée est donc de $\dfrac{341}{512} \times \dfrac{1\ 024}{1\ 023} = \dfrac{2}{3}$. Je vous laisse voir pourquoi ce résultat est intuitivement normal.

Exercice 9 (***)

1. Puisque tout est distingable, il y a 4 possibilités de rangement pour chaque boule, soit $4^5 = 1\ 024$ rangements possibles au total. Autrement dit, $|\Omega| = 1\ 024$.
2. Il y a quatre rangements pour lesquels toutes les boules sont dans la même boite (un pour chaque boite), soit une probabilité de $\dfrac{4}{1\ 024} = \dfrac{1}{256} \simeq 0.004$.
3. Commençons par choisir les deux boites non vides, ce qui laisse $\dbinom{4}{2} = 6$ possibilités. Une fois ce choix effectué, il y a 2^5 façons de caser les cinq boules dans nos deux boites, mais il faut en enlever deux si on veut que nos deux boites ne soient pas vides (les deux pour lesquelles une des deux boites recueille toutes les boules). Cela fait donc finalement $6 \times (2^5 - 2)$ cas favorables, soit une probabilité de $\dfrac{6 \times 30}{1\ 024} = \dfrac{45}{256} \simeq 0.178$.
4. On peut répartir les cinq boules comme suit si on veut exactement une boite vide : $3-1-1-0$ ou $2-2-1-0$. Dans le premier cas, il faut choisir la boite contenant trois boules (4 choix), les trois boules en question ($\binom{5}{3} = 10$ choix), la boite contenant la quatrième boule (3 choix) et la boite contenant la dernière boule (2 choix ; si on veut on peut remplacer ces derniers choix par le choix des deux boites non vides puis de la boule allant dans la première boite non vide, ce qui revient au même). Il y a donc $4 \times 10 \times 3 \times 2 = 240$ répartitions $3-1-1-0$. Pour les $2-2-1-0$, il y a 4 choix pour la boite contenant une seule boule, 5 choix pour la boule allant dans cette boite, 3 choix pour la boite vide, et enfin $\dbinom{4}{2} = 6$ choix pour les deux boules allant dans la première des deux boites restantes, soit $4 \times 5 \times 3 \times 6 = 360$ possibilités. Finalement la probabilité d'avoir exactement une boite vide est de $\dfrac{360}{1\ 024} = \dfrac{45}{128} \simeq 0.352$.
5. On a calculé successivement les probabilités d'avoir trois, deux et une boite vide. Comme on ne peut pas avoir quatre boites vides, la probabilité de ne pas avoir de boite vide est complémentaire de la somme des précédentes, elle vaut $\dfrac{1\ 024 - 4 - 180 - 600}{1\ 024} = \dfrac{240}{1\ 024} = \dfrac{15}{64} \simeq 0.234$.
6. Notons A_1 « La première boite est vide » et ainsi de suite jusqu'à A_4. Le nombre de cas favorables à A_1 est $3^5 = 243$ (il faut caser les cinq boules dans trois boites), donc $P(A_1) = \dfrac{243}{1\ 024}$. De même pour A_2, A_3 et A_4. Par un raisonnement similaire, le nombre de cas favorables à $A_1 \cap A_2$ est $2^5 = 32$, donc $P(A_1 \cap A_2) = \dfrac{32}{1\ 024}$, et de même pour les autres intersection de deux évènements. Enfin, $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \dfrac{1}{1\ 024}$, et de même pour les autres intersections de trois évènements. Enfin, $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$ est impossible. On peut appliquer la formule de Poincaré : $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_4) - P(A_2 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_4) - P(A_3 \cap A_4) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + P(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + P(A_2 \cap A_3 \cap A_4) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \dfrac{4 \times 243 - 6 \times 32 + 4 \times 1 - 0}{1\ 024} = \dfrac{784}{1\ 024} = \dfrac{49}{64}$. La probabilité cherchée est le complémentaire de celle que nous venons de calculer, on retrouve $\dfrac{15}{64}$ comme à la question précédente.

Exercice 10 (***)

1. Pour cette question, seul le premier tour nous intéresse. Celui-ci est constituée de 32 matchs faisant s'affronter deux joueurs. Peu importe dans quel ordre ces deux joueurs ont été tirés. Il y a $\dbinom{64}{2}$ possibilités pour le tirage du premier match, $\dbinom{32}{2}$ pour le deuxième etc, jusqu'à $\dbinom{2}{2}$ pour le dernier match. Comme on se fiche de l'ordre des matchs, on peut diviser par 32! (le

nombre d'ordres possibles) pour obtenir un total de possibilités de $\frac{64 \times 63}{2} \times \frac{62 \times 61}{2} \times \cdots \times \frac{2 \times 1}{2} \times \frac{1}{32!} = \frac{64!}{2^{32} \times 32!}$ tirages possibles.
Si on ne veut pas que deux têtes de séries se rencontrent, il y 56 choix possibles pour l'adversaire de la première tête de série (8 joueurs sur 64 sont têtes de série, donc 56 ne le sont pas), 55 pour l'adversaire de la deuxième tête de série, etc jusqu'à 49 pour l'adversaire de la huitième tête de série. Il reste ensuite à répartir les 48 concurrents restants en 24 paires, ce qui se fait de $\frac{48!}{2^{24} \times 24!}$ façons (cf le calcul ci-dessus). La probabilité qu'il n'y ait pas de matchs opposant deux têtes de séries vaut donc $\frac{56!}{48!} \frac{48!}{2^{24} \times 24!} \times \frac{2^{32} \times 32!}{64!} = \frac{2^8 \times 25 \times 26 \times \cdots \times 32}{57 \times 58 \times \cdots \times 64} \simeq 0.608$. La probabilité cherchée est le complémentaire de celle-ci, elle vaut environ 0.392.

2. Cette fois-ci, tout ce qui nous intéresse est que nos huit têtes de série soient dans des huitièmes de tableau différents. Il y a huit huitièmes de tableau constitués chacun de huit joueurs. Si on se fiche de l'ordre à l'intérieur de chaque huitième de tableau et de l'ordre des huitièmes de tableau, il y a $\binom{64}{8} \times \binom{56}{8} \times \cdots \times \binom{8}{8} \times \frac{1}{8!} = \frac{64!}{8! \times 56!} \times \frac{56!}{48! \times 8!} \times \cdots \times \frac{8!}{8! \times 0!} \times \frac{1}{8!} = \frac{64!}{(8!)^9}$ possibilités. Si on impose une tête de série dans chaque huitième de tableau, il reste à répartir les 56 concurrents restants en 8 paquets de 7, ce qui se fait de $\frac{56!}{(7!)^8 \times 8!}$ (calcul très similaire au précédent), et à multiplier par 8! pour distribuer aléatoirement les huit têtes de série dans chacun de ces paquets. La probabilité cherchée vaut $\frac{56!}{(7!)^8} \times \frac{(8!)^9}{64!} = \frac{8^8 \times 8!}{57 \times 58 \times \cdots \times 64} \simeq 0.00379$. Autant dire que c'est très improbable.

Feuille d'exercices n°17 : Conditionnement

ECE3 Lycée Carnot

29 janvier 2010

Exercice 1 (*)

Un classique : une maladie rare touche un individu sur 1 000. On dispose d'un test de dépistage qui est positif pour 95% des personnes malades et pour 0.5% des individus sains. Un individu est testé positif. Quelle est la probabilité qu'il soit effectivement malade ?

Exercice 2 (**)

On tire cinq cartes dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir les quatre As ? Un joueur dévoile deux cartes de son jeu, qui sont des As. Quelle est maintenant la probabilité qu'il détienne quatre As ? Comparer avec la probabilité d'avoir deux As quand on tire 3 cartes simultanément dans un jeu de 32 cartes. Interpréter.

Exercice 3 (*)

Une guerre sévit depuis des années entre deux pays voisins. Les habitants du pays A sont à 60% favorables à la paix et à 16% favorables à la guerre (le reste étant sans opinion) ; par contre dans le pays B, 68% des habitants sont pour la guerre et 12% sont pour la paix. On rencontre un individu sans savoir quel pays il habite (une chance sur deux pour chaque).

1. Calculer la probabilité qu'il soit sans opinion.
2. Il est favorable à la guerre, quelle est la probabilité qu'il habite le pays A ?
3. Même question s'il est favorable à la paix.

Exercice 4 (***)

On dispose de n urnes numérotées de 1 à n. Dans l'urne numéro k se trouvent k boules blanches et $n-k$ rouges. On choisit au hasard une urne puis on tire deux boules dans cette urne. Quelle est la probabilité d'avoir deux boules rouges ? Même question si on tire successivement les deux boules avec remise. Quelles sont les limites de ces probabilités quand n tend vers l'infini ?

Exercice 5 (**)

Dans un lot de 100 dés à 6 faces, 20 sont truqués de la façon suivante : la face 6 est tirée la moitié du temps, et les autres faces apparaissent avec la même probabilité. On choisit un dé au hasard et on le lance.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir un 6 ?

2. On obtient un 6. Quelle est la probabilité que le dé soit truqué ?
3. On obtient un 2. Quelle est la probabilité que le dé ne soit pas truqué ?

Exercice 6 (**)

On dipose de deux urnes, la première contenant 6 boules rouges et trois noires, et la deuxième 6 noires et trois rouges. On choisit une urne au hasard, puis on y tire deux boules, on obtient deux rouges. Quelle est la probabilité qu'on ait choisi la première urne ? Même question si on effectue les deux tirages successivement avec remise.

Exercice 7 (**)

Une compagnie aérienne étudie l'évolution des réservations sur l'un de ses vols. Elle constate que l'état d'une place donnée évolue ainsi : elle est libre au jour 0 (jour d'ouverture des réservations), puis, si elle est libre au jour n, il y a une probabilité $\frac{4}{10}$ que quelqu'un la réserve au jour $n+1$. Par contre, si elle est réservée au jour n, elle reste réservée au jour $n+1$ avec probabilité $\frac{9}{10}$. On note p_n la probabilité que la place soit réservée au jour n. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n et en déduire p_n, puis sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 8 (***)

Une guêpe entre par inadvertance dans un appartement composé de deux pièces A et B. Elle est dans la pièce A à $t=0$, et évolue ainsi : si elle est en A à l'instant n, elle reste en A avec probabilité $\frac{1}{3}$ ou passe en B avec probabilité $\frac{2}{3}$ à l'instant $n+1$; si elle est en B, elle retourne en A avec probabilité $\frac{1}{4}$, reste en B avec probabilité $\frac{1}{2}$ et sort de l'appartement avec probabilité $\frac{1}{4}$. Si elle est dehors, elle y reste. On note A_n : « La guêpe est en A à l'instant n ». Je vous laisse deviner ce que représentent B_n et C_n. Les probabilités respectives de ces événements sont notées a_n, b_n et c_n.

1. Calculer a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 et c_2.
2. Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et de b_n.
3. Montrer que $u_n = \frac{6}{10}a_n - \frac{3}{10}b_n$ est une suite constante.
4. Montrer que $u_n = \frac{4}{10}a_n + \frac{3}{10}b_n$ est une suite géométrique.
5. En déduire les valeurs de a_n et de b_n.
6. Que vaut c_n ?

Exercice 9 (***)

Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On pioche une poignée de jetons qui contient un nombre aléatoire de jetons, et on sait qu'il y a équiprobabilité sur le nombre de jetons tirés (qui peut être égal à 0 ; autrement dit, on eut pioche une poignée vide). Quelle est la probabilité de piocher le jeton numéro 1 dans notre poignée ? Les évènements A : « On a pioché le jeton 1 » et B : « On a pioché le jeton 2 » sont-ils indépendants ? Mêmes questions dans le cas où ce n'est plus le nombre de jeton qui est réparti uniformément, mais où on a équiprobabilité sur toutes les poignées possibles (toujours en comptant la poignée vide) ?

Corrigé de la feuille d'exercices n°17

Exercice 1 (*)

Pour bien comprendre comment ça se passe le mieux est de commencer par retraduire clairement l'énoncé en utilisant les notations ensemblistes vues en cours. Notons ici A l'événement « être malade » et B l'événement « être testé positif ». L'énoncé nous donne les probabilités suivantes : $P(A) = 0.001$; $P_A(B) = 0.95$ et $P_{\bar{A}}(B) = 0.005$. On peut calculer la probabilité de B en utilisant la formule des probabilités totales : $P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B) = 0.001 \times 0.95 + (1 - 0.001) \times 0.005 = 0.005945$. La probabilité qui nous est demandée est $P_B(A)$, qui va être obtenue par la formule de Bayes : $P_B(A) = \dfrac{P(A) \times P_A(B)}{P(B)} = \dfrac{0.95 \times 0.001}{0.005945} \simeq 0.16$. Cette valeur peut sembler faible au premier abord, mais elle est tout à fait normale. Presque tous les malades sont testés positifs, mais pour chaque personne malade il y a à peu près 1 000 personnes saines, dont 5 en moyenne vont être testées positives. Il n'y a donc qu'environ une chance sur six qu'une personne testée positive soit effectivement malade.

Exercice 2 (**)

L'univers est contitué des $\dbinom{32}{5}$ tirages possibles de 5 cartes parmi 32. Notons A l'événement « tirer quatre As ». On a $|A| = 28$ (on tire 4 As parmi les quatre disponibles et une cinquième carte parmi les 28 qui restent) donc $P(A) = \dfrac{28}{\binom{32}{5}} \simeq 0.00014$. Notons maintenant B : « on tire au moins deux As ». La deuxième question nous demande de calculer $P_B(A)$. Il faut donc calculer $P(B)$. On a $|B| = \binom{4}{2} \times \binom{28}{3} + \binom{4}{3} \times \binom{28}{2} + 28$ (on a séparé selon que le joueur tirait exactement deux As, trois As ou les quatre As), donc $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A)}{P(B)} = \dfrac{28}{\binom{4}{2} \times \binom{28}{3} + \binom{4}{3} \times \binom{28}{2} + 28} \simeq 0.0013$. En comparaison, la probabilité d'obtenir deux As en tirant trois cartes dans un jeu de 32 vaut $\dfrac{\binom{4}{2} \times \binom{28}{1}}{\binom{32}{3}} \simeq 0.033$, elle est beaucoup plus élevée ! C'est tout à fait normal, car le joueur qui montre deux As a pu les choisir parmi les cinq cartes de son jeu, ce qui fait que tous les tirages de cinq cartes contenant deux As au moins permettent d'en étaler deux sur la table.

Exercice 3 (*)

Notons S l'évènement « L'individu est sans opinion » ; P : « Il est favorable à la paix » et G : « Il est favorable à la guerre ». On notera également A et B les évènements correspondant à l'appartenance à l'un des deux pays.

1. C'est une simple application de la formule des probabilités totales : $P_A(S) = 1 - P_A(G) - P_A(P) = 1 - 0.16 - 0.6 = 0.24$, et de même $P_B(S) = 0.2$, donc $P(S) = P(A) \times P_A(S) + P(B) \times P_B(S) = 0.5 \times 0.24 + 0.5 \times 0.2 = 0.22$.
2. C'est cette fois-ci la formule de Bayes qui va être utile : $P(G) = P(A) \times P_A(G) + P(B) \times P_B(G) = 0.5 \times 0.16 + 0.5 \times 0.68 = 0.42$, donc $P_G(A) = \dfrac{P(A) \times P_A(G)}{P(G)} = \dfrac{0.5 \times 0.16}{0.42} \simeq 0.19$ (la probabilité de G ayant été calculée comme au-dessus à l'aide des probabilités totales)
3. Même chose qu'au-dessus : $P(P) = 0.5 \times 0.6 + 0.5 \times 0.12 = 0.36$, donc $P_P(A) = \dfrac{P(A) \times P_A(P)}{P(P)} = \dfrac{0.5 \times 0.6}{0.36} \simeq 0.83$.

Exercice 4 (***)

Il faut utiliser la formule des probabilités totales : pour chaque entier k, on a une chance sur n de tirer l'urne numéro k, et une fois cette urne choisie, la probabilité de tirer deux boules rouges à l'intérieur vaut $\frac{\binom{n-k}{2}}{\binom{n}{2}}$ (n boules au total, donc $\binom{n}{2}$ tirages possibles, dont $\binom{n-k}{2}$ où l'on tire deux boules rouges). On a donc une probabilité totale de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \frac{\binom{n-k}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{2}{n^2(n-1)} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-k}{2}$. Or, en faisant le changement de variable $k \to n-k$, $\sum_{k=1}^{n} \binom{n-k}{2} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{k}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} k(k-1) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (k^2 - k) = \frac{(n-1)n(2n-1)}{12} - \frac{(n-1)n}{4}$. La probabilité recherchée vaut donc $\frac{2n-1}{6n} - \frac{1}{2n} = \frac{2n-4}{6n}$. Plus intéressant, la limite quand n tend vers $+\infty$ de cette probabilité vaut $\frac{1}{3}$. Autrement dit, quand n devient grand, on se rapproche d'une situation où obtenir deux boules rouges, deux blanches ou une de chaque couleur est équiprobable.

Si le tirage s'effectue avec remise, la probabilité d'obtenir deux boules rouges lorsqu'on tire dans l'urne numéro k vaut désormais $\left(\frac{n-k}{n}\right)^2$, soit une probabilité totale de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \left(\frac{n-k}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} (n^2 + k^2 - 2nk) = \frac{1}{n^3}\left(n^3 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n^2(n+1)\right) = 1 + \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} - \frac{n+1}{n} = \frac{(n+1)(2n+1) - 6n}{6n^2} = \frac{2n^2 - 3n + 1}{6n^2}$. Cette probabilité a également pour limite $\frac{1}{3}$.

Exercice 5 (**)

Notons T l'évènement « On lance un dé truqué » et N : « On lance un dé normal ». D'après l'énoncé, on a $P(T) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$ et $P(N) = \frac{4}{5}$. De plus, $P_T(6) = \frac{1}{2}$ et $P_T(1) = P_T(2) = P_T(3) = P_T(4) = P_T(5) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$.

1. Probabilités totales : $P(6) = P(N) \times P_N(6) + P(T) \times P_T(6) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{30} \simeq 0.23$.

2. Formule de Bayes : $P_6(T) = \frac{P(T) \times P_T(6)}{P(6)} = \frac{\frac{1}{5} \times \frac{1}{2}}{\frac{7}{30}} = \frac{3}{7} \simeq 0.42$.

3. Probabilités totales puis Bayes : $P(2) = P(N) \times P_N(2) + P(T) \times P_T(2) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{10} = \frac{23}{150}$
   $P_2(N) = \frac{P(N) \times P_N(2)}{P(2)} = \frac{\frac{4}{5} \times \frac{1}{6}}{\frac{23}{150}} = \frac{20}{23} \simeq 0.87$ (pour calculer la probabilité d'obtenir un 2, on a utilisé les probabilités totales).

Exercice 6 (**)

Il s'agit une fois de plus d'une combinaison de probabilités totales et de formule de Bayes. Notons A : « On tire dans la première urne » et B : « On tire deux boules rouges ». On a $P(A) = \frac{1}{2}$;

$P_A(B) = \dfrac{6}{9} \times \dfrac{5}{8} = \dfrac{5}{12}$ et $P_{\bar{A}}(B) = \dfrac{3}{9} \times \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{12}$. On en déduit dans un premier temps $P(B) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{5}{12} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{4}$, puis $P_B(A) = \dfrac{\frac{1}{2} \times \frac{5}{12}}{\frac{1}{4}} = \dfrac{5}{6}$.

Dans le cas où on effectue une remise, le raisonnement est le même mais, en gardant les mêmes notations, $P_B(A) = \dfrac{6}{9} \times \dfrac{6}{9} = \dfrac{4}{9}$ et $P_{\bar{A}}(B) = \dfrac{3}{9} \times \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{9}$. On en déduit dans un premier temps $P(B) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{4}{9} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{9} = \dfrac{5}{18}$, puis $P_B(A) = \dfrac{\frac{1}{2} \times \frac{4}{9}}{\frac{5}{18}} = \dfrac{4}{5}$. La probabilité est légèrement plus faible que dans le cas du tirage avec remise.

Exercice 7 (**)

Commençons par traduire les hypothèses de l'énoncé : au jour 0, la place n'est pas réservée, donc $p_0 = 1$. Ensuite, en notant A_n l'évènement « La place est réservée au jour n », l'énoncé stipule que $P_{A_n}(A_{n+1}) = \dfrac{9}{10}$ et $P_{\bar{A}_n}(A_{n+1}) = \dfrac{4}{10}$. La formule des probabilités totales donne alors la formule de récurrence : $p_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\bar{A}_n) \times P_{\bar{A}_n}(A_{n+1}) = \dfrac{9}{10} \times p_n + \dfrac{4}{10} \times (1 - p_n) = 0.5p_n + 0.4$. La suite (p_n) est donc arithmético-géométrique, d'équation caractéristique $x = 0.5x + 0.4$, ce qui donne $x = 0.8$. On introduit la suite auxiliaire $b_n = p_n - 0.8$, qui vérifie $b_{n+1} = p_{n+1} - 0.8 = 0.5p_n + 0.4 - 0.8 = 0.5(p_n - 0.8) = 0.5b_n$. La suite (b_n) est donc géométrique de raison 0.8 et de premier terme $b_0 = -0.8$, donc $b_n = -0.8 \times (0.5)^n$ et $p_n = b_n + 0.8 = 0.8 \times (1 - 0.5^n)$. On constate que la limite de la suite p_n vaut 0.8 et que la suite est croissante, c'est-à-dire que la proportion de places réservées dans l'avion va augmenter, mais en ne dépassant pas un plafond de 80%.

Exercice 8 (***)

1. Un petit schéma peut aider, mais n'est pas obligatoire. On a bien sûr $a_0 = 1$ et $b_0 = c_0 = 0$ puisque la guêpe se trouve dans la pièce A au départ. Ensuite, on utilise l'énoncé, on a donc $a_1 = \dfrac{1}{3}$, $b_1 = \dfrac{2}{3}$ et $c_1 = 0$. Pour l'étape suivante, il faut utiliser la formule des probabilités totales : $a_2 = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) + P(B_1) \times P_{B_1}(A_2) + P(C_1) \times P_{C_1}(A_2) = \dfrac{1}{3}a_1 + \dfrac{1}{4}b_1 = \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{18}$; de même, $b_2 = \dfrac{2}{3}a_2 + \dfrac{1}{2}b_2 = \dfrac{2}{9} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{9}$; enfin $c_2 = \dfrac{1}{4}b_1 = \dfrac{1}{6}$ (on note que $a_2 + b_2 + c_2 = \dfrac{5}{18} + \dfrac{5}{9} + \dfrac{1}{6} = 1$, ce qui est plutôt rassurant).
2. Il s'agit d'une simple généralisation du cas précédent utilisant toujours les probabilités totales : $a_{n+1} = \dfrac{1}{3}a_n + \dfrac{1}{4}b_n$; $b_{n+1} = \dfrac{1}{3}a_n + \dfrac{1}{2}b_n$ et $c_{n+1} = \dfrac{1}{4}b_n + c_n$.
3. Pour montrer que u_n est constante, le pus simple est de calculer u_{n+1}. On a $u_{n+1} = \dfrac{6}{10}a_{n+1} - \dfrac{3}{10}b_{n+1} = \dfrac{6}{10}\left(\dfrac{1}{3}a_n + \dfrac{1}{4}b_n\right) - \dfrac{3}{10}\left(\dfrac{2}{3}a_n + \dfrac{1}{2}b_n\right) = \dfrac{2}{10}a_n + \dfrac{3}{20}b_n - \dfrac{2}{10}a_n - \dfrac{3}{20}b_n = 0$. La suite u_n est donc nulle (au moins à partir de $n = 1$).
4. Tentons d'exprimer v_{n+1} en fonction de v_n. On a $v_{n+1} = \dfrac{4}{10}a_{n+1} + \dfrac{3}{10}b_{n+1} = \dfrac{4}{10}\left(\dfrac{1}{3}a_n + \dfrac{1}{4}b_n\right) + \dfrac{3}{10}\left(\dfrac{2}{3}a_n + \dfrac{1}{2}b_n\right) = \dfrac{4}{30}a_n + \dfrac{1}{10}b_n + \dfrac{2}{10}a_n + \dfrac{3}{20}b_n = \dfrac{1}{3}a_n + \dfrac{1}{4}b_n = \dfrac{5}{6}\left(\dfrac{4}{10}a_n + \dfrac{3}{10}b_n\right)$. La suite v_n est donc géométrique de raison $\dfrac{5}{6}$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$, donc $v_n = \dfrac{2}{5} \times \left(\dfrac{5}{6}\right)^n$.
5. On constate que $u_n + v_n = a_n$, donc $a_n = \dfrac{2}{5} \times \left(\dfrac{5}{6}\right)^n$ et, comme $u_n = 0$, $b_n = 2a_n = \dfrac{4}{5} \times \left(\dfrac{5}{6}\right)^n$.

6. On a bien entendu $c_n = 1 - a_n - b_n = 1 - 3a_n = 1 - \frac{6}{5} \times \left(\frac{5}{6}\right)^n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$. Cette probabilité tend vers 1 quand n tend vers l'infini.

Exercice 9 (***)

Le nombre de jetons dans la poignée tirée peut varier entre 0 et n. Notons donc, $\forall i \in \{0; 1; \ldots; n\}$, A_i l'évènement « On a tiré une poignée contenant i jetons ». L'énoncé stipule que ces évènements sont équiprobables, autrement dit que $P(A_i) = \frac{1}{n+1}$. On notera par ailleurs simplement 1 l'évènement « On tire le jeton numéro 1 ». On a $P_{A_i}(1) = \frac{i}{n}$ (si on tire une poignée de i jetons et qu'il y en a n au total, on a i chances sur n qu'un jeton précis soit tiré ; si vous n'êtes pas convaincus, on peut aussi dire que $|A_i| = \binom{n}{i}$ et $|A_i \cap B| = \binom{n-1}{i-1}$ puisqu'une fois choisi le jeton 1, il reste $i - 1$ jetons à tirer parmi les $n - 1$ restants dans l'urne, donc $P_{A_i}(1) = \frac{\binom{n-1}{i-1}}{\binom{n}{i}} = \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} \times \frac{i!(n-i)!}{n!} = \frac{i}{n}$). Les évènements A_i formant un système complet d'évènements, on peut appliquer la formule des probabilités totales : $P(1) = \sum_{i=0}^{i=n} P(A_i) \times P_{A_i}(1) = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{1}{n+1} \times \frac{i}{n} = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{i=0}^{i=n} i = \frac{1}{n(n+1)} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}$. Ce résultat est en fait assez prévisible : si tous les nombres de jetons possibles sont équiprobables, on tirera en moyenne la moitié des jetons, et on donc autant de chances de tirer le numéro 1 que de ne pas le tirer.

On a bien sûr de même $P(2) = \frac{1}{2}$. Pour déterminer si le tirage des jetons 1 et 2 est indépendant, le plus simple est de calculer $P(1 \cap 2)$ et de regarder si on obtient la même valeur qu'en faisant $P(1) \times P(2)$. Le calcul de $P(1 \cap 2)$ est très similaire à celui effectué ci-dessus : $|A_i \cap 1 \cap 2| = \binom{n-2}{i-2}$, donc $P_{A_i}(1 \cap 2) = \frac{\binom{n-2}{i-2}}{\binom{n}{i}} = \frac{(n-2)!}{(i-2)!(n-i)!} \times \frac{i!(n-i)!}{n!} = \frac{i(i-1)}{n(n-1)}$. On applique ensuite la formule des probabilités totales pour obtenir $P(1 \cap 2) = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{1}{n+1} \times \frac{i(i-1)}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)(n+1)} \sum_{i=0}^{i=n} i^2 - i = \frac{1}{n(n-1)(n+1)} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right) = \frac{2n+1-3}{6(n-1)} = \frac{1}{3}$. Cette probabilité étant différente de $P(1) \times P(2) = \frac{1}{4}$, les deux évènements ne sont pas indépendents. Autre façon de voir les choses : $P_1(2) = \frac{P(1 \cap 2)}{P(1)} = \frac{2}{3}$. On peut interpréter ce résultat ainsi : si le jeton 1 a été tiré, il est plus probable qu'on ait tiré une grosse poignée qu'une petite poignée, ce qui augmente nettement la probabilité que le jeton 2 ait également été tiré (mais pour être tout à fait honnête, ce résultats n'était pas évident à prévoir).

Dans le cas où ce sont les poignées qui sont équiréparties, comme il existe 2^n poignées (autant que de sous-ensemble de l'ensemble des n jetons placés dans l'urne, chaque poignée a une probabilité 2^n d'être tirée. Comme il existe $\binom{n}{i}$ poignées contenant i jetons, on a donc $P(A_i) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$. On peut alors effectuer le même type de calcul que précédemment à l'aide des probabilités totales (la probabilité conditionnelle $P_{A_i}(1)$ n'a pas de raison d'avoir changé) : $P(1) = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{1}{2^n} \binom{n}{i} \times \frac{i}{n} = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{i=n} \frac{n!}{i!(n-i)!} \times \frac{i}{n} = \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} = \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{i=n} \binom{n-1}{i-1} = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0} i = n - 1 \binom{n-1}{i} = \frac{1}{2^n} \times 2^{n-1} = \frac{1}{2}$. On a utilisé vers la fin de calcul le fait que $\sum_{i=0} i = p\binom{p}{i} = 2^p$, qui est un résultat classique. On retrouve donc la même probabilité que tout à l'heure, ce qui est en fait normal si on se souvient que les coefficients binomiaux ont une propriété de symétrie : on a autant de chances de tirer une poignée à 0 éléments qu'une poignée à n éléments, une poignée à 1 élément qu'une à $n-1$ éléments etc, ce qui donnera toujours en moyenne une chance sur deux de tirer un jeton donné.

Comme tout à l'heure, on aura donc $P(1) \times P(2) = \frac{1}{4}$, et on cherche à calculer $P(1 \cap 2)$, toujours avec les probabilités totales en utilisant le système complet d'évènements A_i : $P(1 \cap 2) = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{1}{2^n}\binom{n}{i}\frac{i(i-1)}{n(n-1)} = \frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{i=n}\frac{n!}{i!(n-i)!} \times \frac{i(i-1)}{n(n-1)} = \frac{1}{2^n}\sum_{i=2}^{i=n}\frac{(n-2)!}{(i-2)!(n-i)} = \frac{1}{2^n}\sum_{i=2}^{i=n}\binom{n-2}{i-2} = \frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{i=n}\binom{n-2}{i} = \frac{2^{n-2}}{2^n} = \frac{1}{4}$. Cette fois-ci, les deux évènements sont indépendants. Comme j'en entends déjà qui se demandent « Mais pourquoi l'argument donné tout l'heure pour justifier que les évènements n'étaient pas indépendants ne serait-il plus valable dans ce cas ? », j'essaie de leur répondre : ici, la probabilité de tirer un certain nombre de jetons est fortement pondéré par le nombre de poignées contenant ce nombre de jetons. Ainsi, si on sait qu'on a tiré le jeton 1, on sait simplement que la poignée choisie fait partie de la moitié des poingées qui contiennent le jeton 1. Mais parmi celles-ci, il y en a exactement la moitié qui contiennent le jeton 2 et la moitié qui ne le contiennent pas ! En effet, parmi les sous-ensembles contenant le jeton 1, il y en a autant qui contiennent le jeton 2 et qui ne le contiennent pas, et contrairement à tout à l'heure on affecte la même probabilité à chacune.

Problème de révision pour le DS5

ECE3 Lycée Carnot

5 février 2010

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$.

1. Étude de f.
   (a) Étudier les variations de f (en particulier ses limites et branches infinies en $\pm\infty$).
   (b) Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = 1 - f(-x)$.
   (c) Calculer la dérivée seconde de f et déterminer ses points d'inflexion.
   (d) Montrer que $\forall x \in [0; +\infty[$, $f'(x) \leqslant \dfrac{1}{4}$.
2. Solutions de l'équation $f(x) = x$.
   (a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ équivaut à $(1-x)e^x - x = 0$
   (b) Etudier les variations de la fontion g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (1-x)e^x - x$ et en déduire que l'équation $f(x) = x$ a une unique solution que l'on notera α et qu'elle appartient à l'intervalle $[0; 1]$.
   (c) Déterminer une valeur approchée à 0.1 près de α (vous avez droit à la calculatrice, mais détaillez les calculs et le raisonnement effectués).
   (d) Tracer la courbe représentative de f en tenant compte de tous les calculs effectués dans la première partie.
3. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   (b) Montrer que la suite converge vers α.
   (c) Ecrire un programme en PASCAL qui demande une valeur n à l'utilisateur et affiche la valeur de u_n.
4. Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = f(v_n)$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est à termes positifs.
   (b) En déduire que pour tout entier n, $|v_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{4}|v_n - \alpha|$, puis que $|v_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{4^n}$, et enfin que la suite (v_n) converge également vers α.
   (c) Soit $\varepsilon > 0$. Déterminer en fonction de ε une valeur de n pour laquelle $|v_n - \alpha| \leqslant \varepsilon$.
   (d) Écrire un programme en PASCAL qui demande une valeur ε à l'utilisateur et affiche une valeur approchée de α à ε près.

Corrigé du problème de révision DS5

1. (a) La fonction f est définie (et C^∞) sur $\mathbb{R}$ car e^x+1 ne s'annule jamais, de dérivée $f'(x) = \dfrac{e^x(1+e^x)-e^{2x}}{(1+e^x)^2} = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$. Cette dérivée est toujours positive, f est donc strictement croissante. De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ (puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$), et $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{e^x}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$. La courbe représentative admet donc deux asymptotes horizontales en $-\infty$ et en $+\infty$, d'équations respectives $y=0$ et $y=1$.

   (b) Calculons $1-f(-x) = 1-\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = 1-\dfrac{1}{e^x+1} = \dfrac{e^x}{e^x+1} = f(x)$. Cette égalité permet en fait de prouver que la courbe représentative de f est symétrique par rapport au point $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ (une propriété proche de l'imparité).

   (c) La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f''(x) = \dfrac{e^x(1+e^x)^2-2e^x(1+e^x)e^x}{(1+e^x)^4} = \dfrac{e^x(1+e^x-2e^x)}{(1+e^x)^3} = \dfrac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$. Cette dérivée s'annule lorsque $e^x=1$, c'est-à-dire pour $x=0$. Le point $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ est donc le seul point d'inflexion de la courbe. La fonction f est convexe sur $\mathbb{R}^-$ et concave sur $\mathbb{R}_+$.

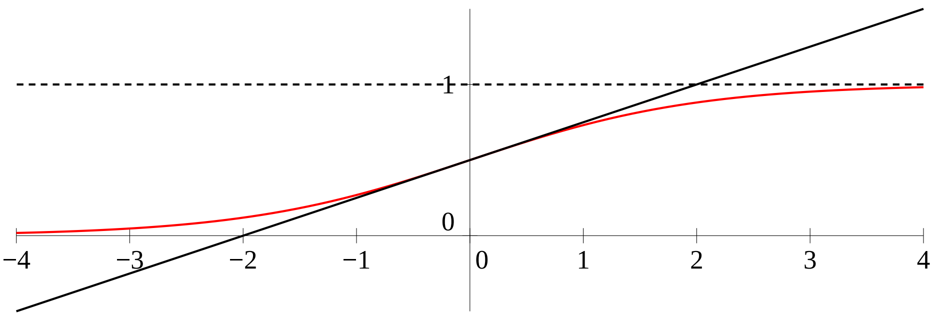
   (d) D'après la question précédente, la fonction f' est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Par ailleurs, on a vu plus haut que f' était toujours positive, donc $\forall x\geqslant 0$, $0\leqslant f'(x)\leqslant f'(0) = \dfrac{1}{4}$.

2. (a) On a $f(x)=x$ si $e^x = x(e^x+1)$, soit $e^x-xe^x-x=0$, ou encore $(1-x)e^x-x=0$.

   (b) La fonction g est C^∞ sur $\mathbb{R}$, et $g'(x) = -e^x+(1-x)e^x-1 = -xe^x-1$; $g''(x) = -e^x-xe^x = -(1+x)e^x$. La fonction g' est donc croissante sur $]-\infty;-1]$ et décroissante sur $[1;+\infty[$. Comme son minimum vaut $g'(-1) = \dfrac{1}{e}-1<0$, on en déduit que g' est toujours négative. La fonction g est donc strictement décroissante donc injective sur $\mathbb{R}$, et l'équation $g(x)=0$ a au plus une solution. Comme par ailleurs $g(0)=1$ et $g(1)=-1$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, cette équation admet bien une solution (unique donc) $\alpha\in[0;1]$. D'après la question précédente, α est aussi le seul point fixe de f.

   (c) On va procédér par dichotomie (pas exacte pour ne pas avoir à manipuler des valeurs pénibles). On sait que $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ et que g est décroissante sur $[0;1]$. De plus, $g\left(\dfrac{1}{2}\right)\simeq 0.32$, donc $\dfrac{1}{2}\leqslant\alpha\leqslant 1$. Ensuite, $g\left(\dfrac{3}{4}\right)\simeq -0.22$, donc $\dfrac{1}{2}\leqslant\alpha\leqslant\dfrac{3}{4}$. Enfin, $g(0.6)\simeq 0.13$, donc $0.6\leqslant\alpha\leqslant\dfrac{3}{4}$. On peut donc affirmer que $\alpha\simeq 0.7$ à 0.1 près.

   (d) Voici la courbe, avec sa tangente au point d'inflexion, qui a pour équation $y = \dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2}$:



3. (a) Comme on ne sait pas bien quel est le signe de $f(x) - x$, il est plus facile d'effectuer une récurrence : $u_0 = 0$ et $u_1 = f(0) = \dfrac{1}{2}$, donc $u_0 \leqslant u_1$. Supposons maintenant que $u_n \leqslant u_{n+1}$. On a alors d'après la croissance de la fonction f, $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leqslant u_{n=2}$. On peut donc conclure que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$, c'est-à-dire que (u_n) est croissante.

   (b) La suite est croissante et de plus on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant 1$, donc $\forall n \geqslant 1$, $u_n = f(u_{n-1}) \leqslant 1$. La suite est donc croissante et majorée, elle converge. Sa limite est un point fixe de la fonction f, qui n'en a qu'un, on peut donc conclure que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$.

   (c)
```
PROGRAM valeur ;
USES wincrt ;
VAR u : real ; i,n : integer ;
BEGIN
WriteLn('Choisissez la valeur de n') ;
ReadLn(n) ;
u := 0 ;
FOR i :=1 TO n DO u := exp(u)/(1+exp(u)) ;
WriteLn('u',n,'=',u) ;
END.
```

4. (a) Inutile de faire une récurrence puisque $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = f(v_n) \geqslant 0$. Le premier terme v_0 étant également positif, tous les termes de la suite sont positifs.

   (b) On peut appliquer l'inégalité des accroissements finis à la fonction f sur $\mathbb{R}_+$ puisque $0 \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{1}{4}$ sur cet intervalle, donc $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{4}$. Comme de plus $v_n \geqslant 0$ et $\alpha \geqslant 0$, on peut l'appliquer à ces deux valeurs, ce qui donne $|f(v_n) - f(\alpha)| \leqslant |v_n - \alpha|$, soit exactement $|v_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{4}|v_n - \alpha|$. Reste à faire notre récurrence habituelle pour obtenir l'inégalité suivante. On a $|1 - \alpha| = 1 - \alpha \in [0; 1]$ d'après la question 2.b, donc $|v_0 - \alpha \leqslant 1|$. Supposons désormais $|v_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{4^n}$, on a alors $|v_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{4}|v_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{4^n} \leqslant \dfrac{1}{4^{n+1}}$. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{4^n} = 0$, on peut en déduire par le théorème des gendarmes que $\lim\limits_{n \to +\infty} |v_n - \alpha| = 0$, c'est-à-dire que la suite v_n converge vers α.

   (c) On sait que $|v_n - \alpha| \leqslant \varepsilon$ dès que $\dfrac{1}{4^n} \leqslant \varepsilon$, soit $4^n \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$, donc $n \ln 4 \geqslant -\ln \varepsilon$, ou encore $n \geqslant -\dfrac{\ln \varepsilon}{\ln 4}$.

   (d)
```
PROGRAM hdfbvyzer ;
VAR e,v : real ; n : integer ;
BEGIN
WriteLn('Choisissez la valeur d'epsilon') ;
ReadLn(e) ;
v :=1 ; n :=0 ;
e := -ln(e)/ln(4) ;
REPEAT v := exp(v)/(exp(v)+1) ; n :=n+1 ;
UNTIL n > e ;
WriteLn('Une valeur approchée de la limite à ',eps,' près est ',v) ;
END.
```

Feuille d'exercices n°18 : Matrices

ECE3 Lycée Carnot

5 février 2010

Exercice 1 (*)

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.
Calculer tous les produits de deux matrices possibles à l'aide de ces matrices.

Exercice 2 (*)

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^p pour toute valeur de $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 (**)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer toutes les matrices dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A.

Exercice 5 (**)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Déterminer toutes les matrices B dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AB = 0$.
2. Déterminer toutes les matrices C dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AC = CA = 0$.

Exercice 6 (**)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ecrire A sous la forme $I_4 + B$, où B est une matrice nilpotente, et en déduire l'expression de A^p.Écrire explicitement la matrice A^{10}.

Exercice 7 (***)

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ($a \in \mathbb{R}$). Montrer que $(A+I)^3 = 0$. En déduire l'expression de A^p.

Exercice 8 (***)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe une suite de réels (a_p) telle que $A^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_p & 1-2a_p & 2a \\ a_p & -a_p & a_p + \end{pmatrix}$
Calculez a_p et en déduire A^p.

Exercice 9 (***)

Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & -4 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^3 = 6A - A^2$.
2. Montrer qu'il existe deux suites a_k et b_k telles que $A^k = a_k A^2 + b_k A$ (pour $k \geqslant 2$).
3. Trouver des relations de récurrence pour a_k et b_k et en déduire leurs valeurs.
4. En déduire l'expression de A^k. Reste-t-elle valable pour $k = 0$ et pour $k = 1$?

Exercice 10 (***)

Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3 et en déduire les puissances de A.
2. On pose $B = 2I + A$. Déterminer les puissances de la matrice B.
3. Soient (a_n), (b_n) et (c_n) les suites définies pour $n \geqslant 1$ par $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} a_{n+1} & = & 2a_n & & & & \\ b_n & = & 2a_n & + & 2b_n & & \\ c_n & = & & & b_n & + & 2c_n \end{array} \right.$.
   Déterminer les valeurs prises par ces suites en fonction de n, a_1, b_1 et c_1 (utilisez les questions précédentes).

Exercice 11 (***)

La trace d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, notée $Tr(A)$ est la somme de ses coefficients diagonaux.

1. Montrer que, $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A)$.
2. Montrer que, si A et B sont des matrices carrées de même taille, $Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$.
3. Sous les mêmes hypothèses, montrer que $Tr(AB) = Tr(BA)$.
4. Montrer qu'il n'existe pas de matrices A et B vérifiant $AB - BA = I$.

Exercice 12 (***)

Soit a un nombre réel et $M_a = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le réel non nul a_0 pour lequel $M_{a_0}^2 = M_{a_0}$.
2. On pose $P = M_{a_0}$ et $Q = I - P$. Montrer qu'il existe un réel α tel que $M_a = P + \alpha Q$.
3. Calculer P^2, Q^2, PQ et QP.
4. Calculer M_a^k.

Corrigé de la feuille d'exercices n°18

Exercice 1 (*)

C'est du simple calcul, on obtient $AB = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 \\ -7 & 3 & 1 \\ -10 & 1 & -3 \end{pmatrix}$; $AD = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -9 & 2 \\ -8 & -1 \end{pmatrix}$; $BA = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$; $BC = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 12 \\ -4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$; $CA = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ -3 & 14 \\ -1 & -7 \end{pmatrix}$; et $DB = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 7 \\ -10 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 (*)

On a $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = I$, puis les puissances de A sont périodiques, égales successivement à A, A^2 et I, ce qu'on peut écrire : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^{3k} = I$; $A^{3k+1} = A$ et $A^{3k+2} = A^2$.

Exercice 3

Puisqu'il n'y a pas d'énoncé d'exerice 3 dans la feuille n°18, ce sera un corrigé vite tapé !

Exercice 4 (**)

Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ une matrice dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on calcule $AM = \begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ 3x+4z & 3y+4t \end{pmatrix}$ et $MA = \begin{pmatrix} x+3y & 2x+4y \\ z+3t & 2z+4t \end{pmatrix}$. Pour que les deux matrices soient égales, il faut que leurs coefficients soient égaux deux à deux, ce qui nous amène à résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2z & = & x & + & 3y \\ y & + & 2t & = & 2x & + & 4y \\ 3x & + & 4z & = & z & + & 3t \\ 3y & + & 4t & = & 2z & + & 4t \end{array} \right.$$

Les deux équations extrêmes sont équivalentes à $z = \frac{3}{2}y$, et les deux du milieu se ramènent alors à la même équation $x+z = t$. Les solutions sont donc tous les quadruplets de la forme $\left\{x, y, \frac{3}{2}y, x + \frac{3}{2}y\right\}$, où x et y sont deux réels quelconques.

Exercice 5 (**)

1. Soit donc une matrice $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. On a alors $AB = \begin{pmatrix} a+2d & b+2e & c+2f \\ 2a+d & 2b+e & 2c+f \\ d & e & f \end{pmatrix}$. Pour que la matrice AB soit nulle, il faut donc avoir $d = e = f = 0$, puis $a = b = c = 0$. Autrement dit, les deux premières lignes de B doivent être nulles, et la troisième est quelconque.
2. D'après la question précédente, C doit être de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Si on effectue le produit

CA pour une telle matrice, on obtient $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ g+2h & 2g+h+i & 0 \end{pmatrix}$. Pour que ce produit soit nul, il faut donc avoir $g = -2h$ et $i = -2g - h = 3h$, soit $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2h & h & 3h \end{pmatrix}$, le réel h étant quelconque.

Exercice 6 (**)

On a $A = I+B$ avec $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Un calcul peu passionnant donne $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis les puissances supérieures de B sont nulles. On a donc, via le binôme de Newton (les matrices B et I commutant bien entendu), $A^k = (B+I)^k = \binom{k}{0} I^k + \binom{k}{1} BI^{k_1} + \binom{k}{2} B^2 I^{k-2} + \binom{k}{3} B^3 I^{k-3} = I + kB + \frac{k(k-1)}{2} B^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{6} B^3$ (les termes suivants étant nuls), soit (attention les yeux) :

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 2k & 3k+2k(k-1) & 4k+6k(k-1)+\frac{4}{3}k(k-1)(k-2) \\ 0 & 1 & 2k & 3k+2k(k-1) \\ 0 & 0 & 1 & 2k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Notamment, $A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 20 & 210 & 1\,540 \\ 0 & 1 & 20 & 210 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 7 (***)

On calcule (pour changer) $A + I = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $(A+I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & a \\ 0 & -a & -a \end{pmatrix}$, et la puissance suivante est bien nulle. Autrement dit, $A = B - I$, où B est une matrice nilpotente. On peut donc utiliser Newton : $A^k = (B-I)^k = (-I)^k + kB(-I)^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2} B^2 (-I)^{k-2} = (-1)^k \left(I - kB + \frac{k(k-1)}{2} B^2 \right)$, soit encore

$$A^k = (-1)^k \begin{pmatrix} 1 & -ka & -ka \\ -k & 1+\frac{k(k-1)}{2}a & \frac{k(k-1)}{2}a \\ k & -\frac{k(k-1)}{2}a & 1-\frac{k(k-1)}{2}a \end{pmatrix}$$

Exercice 8 (***)

On procède naturellement par récurrence. Cherchons donc à prouver la propriété P_k : il existe un réel que l'on notera a_k, tel que la matrice A^k soit de la forme $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_k & 1-2a_k & 2a_k \\ a_k & -a_k & a_k+1 \end{pmatrix}$. Pour $k=1$, en posant $a_1 = 3$, on a bien $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2\times 3 & 1-2\times 3 & 2\times 3 \\ 3 & -3 & 3+1 \end{pmatrix}$, donc la propriété P_1 est vérifiée. Supposons désormais que P_k est vérifiée, alors $A^{k+1} = A \times A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6-4a_k & -5+4a_k & 6-4a_k \\ 3-2a_k & -3+2a_k & 4-2a_k \end{pmatrix}$. Si on appelle a_{k+1} le réel défini par $a_{k+1} = 3-2a_k$, A^{k+1} vérifie bien la propriété demandée puisque $A^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2\times(3-2a_k) & 1-2(3-2a_k) & 2(3-2a_k) \\ 3-2a_k & -(3-2a_k) & 3-2a_k+1 \end{pmatrix}$. La propriété P_{k+1} est donc vérifiée, donc par le principe de récurrence, P_k est vrai pour tout entier $k \geqslant 1$.

Ne reste plus qu'à calculer la valeur de a_k. La suite (a_k) est arithmético-géométrique d'équation caractéristique $x = 3-2x$, dont la solution est $x = 1$. On introduit donc la suite auxiliaire $b_k = a_k - 1$, qui vérifie $b_{k+1} = a_{k+1} - 1 = (3-2a_k) - 1 = 2 - 2a_k = -2(a_k - 1) = -2b_k$. La suite (b_k) est donc une suite géométrique de raison -2. Par ailleurs, son deuxième terme est $b_1 = 2$ puisque $a_1 = 3$, donc $b_k = -(-2)^k$ et $a_k = 1-(-2)^k$. La matrice A^k peu donc s'écrire sous la forme $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2\times(1-(-2)^k) & 1-2\times(1-(-2)^k) & 2\times(1-(-2)^k) \\ 1-(-2)^k & (-2)^k - 1 & 2-(-2)^k \end{pmatrix}$.

Exercice 9 (***)

1. On commence par un peu de calcul : $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -8 & 6 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} -18 & 9 & 9 \\ 44 & -18 & -26 \\ -26 & 9 & 7 \end{pmatrix}$.
Il est désormais facile de vérifier l'égalité demandée.

2. On va bien sûr procéder par récurrence. Notons P_k la propriété « Il existe deux réels a_k et b_k tels que $A^k = a_kA^2 + b_kA$ ». Pour une fois on initialise la récurrence pour $k=2$: P_2 est bien vérifiée en posant $a_2 = 1$ et $b_2 = 0$ (on a bien $A^2 = 1\times A^2 + 0\times A$). Supposons P^k vérifiée, on a alors $A^{k+1} = A\times A^k = A\times(a_kA^2 + b_kA) = a_kA^3 + b_kA^2 = a_k(6A - A^2) + b_kA^2 = (b_k - a_k)A^2 + 6a_kA$, qui est bien de la forme demandée, ce qui achève la récurrence.

3. D'après la question précédente, on a les relations suivantes : $a_{k+1} = b_k - a_k$ et $b_{k+1} = 6a_k$. On a donc $b_k = 6a_{k-1}$ ce qui donne en remplaçant dans la première relation $a_{k+1} = -a_k + 6a_{k-1}$, récurrence linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $x^2 + x - 6 = 0$, dont le discriminant vaut $\Delta = 1 + 24 = 25$, et admet donc deux racines $r = \dfrac{-1+5}{2} = 2$ et $s = \dfrac{-1-5}{2} = -3$. On a donc $a_k = \alpha 2^k + \beta(-3)^k$, avec $a_2 = 4\alpha + 9\beta = 1$ et $a_3 = 8\alpha - 27\beta = -1$. En multipliant la première équation par 2 et en lui retranchant la deuxième, on obtient $45\beta = 3$, soit $\beta = \dfrac{1}{15}$, puis $\alpha = \dfrac{1-9\beta}{4} = \dfrac{1-\frac{3}{5}}{4} = \dfrac{1}{10}$. On a donc $a_k = \dfrac{2^{k-1} - (-3)^{k-1}}{5}$, et $b_k = 6 \times \dfrac{2^{k-2} - (-3)^{k-2}}{5}$.

4. On se contentera d'écrire $A^k = \begin{pmatrix} 6a_k - 2b_k & -3a_k + b_k & -3a_k + b_k \\ -8a_k + 6b_k & 6a_k - 2b_k & 2a_k - 4b_k \\ 2a_k - 4b_k & -3a_k + b_k & a_k + 3b_k \end{pmatrix}$ sans préciser les valeurs. Pour $k = 1$, on obtient avec les formules de la question précédente $a_1 = 0$ et $b_1 = 1$, ce qui donne $A = 0\times A^2 + 1\times A$, ce qui est indiscutablement vrai. Et pour $k = 0$, on obtient

$a_0 = \dfrac{1}{6}$ et $b_0 = \dfrac{1}{6}$, et là ça ne marche plus...

Exercice 10 (***)

1. On obtient aisément $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis $A^3 = 0$.

2. On peut appliquer la formule du binome de Newton, les matrices I et A commutant : $B^n = (A+2I)^n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} A^k (2I)^{n-k} = I(2I)^n + nA(2I)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} A^2 I^{n-2} = 2^n I + n2^{n-1}A + n(n-1)2^{n-3}A^2$. Autrement dit, $B^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ n2^n & 2^n & 0 \\ n(n-1)2^{n-2} & n2^{n-1} & 2^n \end{pmatrix}$.

3. On peut en fait, en notant $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, écrire la relation de récurrence sous la forme $X_{n+1} = BX_n$, dont on déduit facilement (une petite récurrence) que $X_n = B^n X_0$, autrement dit $a_n = 2^n a_0$; $b_n = n2^n a_0 + 2^n b_0$ et $c_n = n(n-1)2^{n-2}a_0 + n2^{n-1}b_0 + 2^n c_0$.

Exercice 11 (***)

1. C'est très simple, mais faisons-le de manière formelle pour nous échauffer avant la suite. En fait, on a $Tr(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Ici, il suffit de constater que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda a_{ii} = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

2. Pas de difficulté non plus, $Tr(A+B) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = Tr(A) + Tr(B)$.

3. Un peu plus rigolo : $Tr(AB) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} AB_{ii}$, avec $AB_{ii} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}$, donc $Tr(AB) = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i,k \leqslant n} a_{ik}b_{ki}$. De la même façon, on a $Tr(BA) = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i,k \leqslant n} b_{ik}a_{ki}$. Je vous laisse vous convaincre que les deux sommes sont égales.

4. Si une telle égalité était vérifiée, on aurait $Tr(AB - BA) = Tr(I) = n$. Mais d'après les questions précédentes, $Tr(AB - BA) = Tr(AB) - Tr(BA) = 0$, ce n'est donc pas possible.

Exercice 12 (***)

1. Calculons $M_a^2 = \begin{pmatrix} 1-4a+6a^2 & 2a-3a^2 & 2a-3a^2 \\ 2a-3a^2 & 1-4a+6a^2 & 2a-3a^2 \\ 2a-3a^2 & 2a-3a^2 & 1-4a+6a^2 \end{pmatrix}$. Le réel a_0 doit donc à la fois vérifier $1 - 4a_0 + 6a_0^2 = 1 - 2a_0$ et $2a_0 - 3a_0^2 = a_0$. La première équation se ramène à $6a_0^2 - 2a_0 = 0$, soit $2a_0(3a_0 - 1) = 0$, et a donc pour solutions 0 et $\dfrac{1}{3}$. La deuxième équation ayant les mêmes solutions, il y a bien une solution non nulle égale à $\dfrac{1}{3}$. Dans ce cas, tous les coefficients de M_{a_0} sont égaux à $\dfrac{1}{3}$.

2. On a donc $Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$. Pour avoir $M_a = P + \alpha Q$, on doit avoir, pour les coefficients de la diagonale, $1 - 2a = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\alpha$, et pour les autres coefficients $a = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\alpha$. Les deux équations donnent $\alpha = 1 - 3a$. On en déduit que $M_a = P + (1 - 3a)Q$.
3. On a déjà vu que $P^2 = P$; on calcule que $Q^2 = Q$, $PQ = 0$ et $QP = 0$.
4. On a $M_a^2 = (P + \alpha Q)^2 = P^2 + \alpha PQ + \alpha QP + \alpha^2 Q^2 = P + \alpha^2 Q$. Par une récurrence facile (ou l'application directe de la formule du binome de Newton), on obtient $M_a^k = P + \alpha^k Q$: c'est donc vrai pour $k = 2$, et en le supposant vrai pour un certain entier k, on aura $M_a^{k+1} = M_A \times M_a^k = (P + \alpha Q)(P + \alpha^k Q) = P^2 + \alpha^k PQ + \alpha QP + \alpha^{k+1} Q^2 = P + \alpha^{k+1} Q$, ce qui achève la récurrence.

Feuille d'exercices n°19 : Polynômes

ECE3 Lycée Carnot

17 février 2010

Exercice 1 (*)

Soit P et Q les deux polynômes définis par $P(X) = 2X^3+5x-1$ et $Q(X) = -X^2+3X$. Déterminer chacun des polynômes suivants : $P+Q$; PQ ; $P^2(X)$; $P(X^2)$; $P \circ Q$; $Q \circ P$; $3P^3Q - Q \circ P^2$.

Exercice 2 (*)

Déterminer le degré et le coefficient dominant de chacun des polynômes suivants : $P(X) = (X+2)^n - (X+3)^n$; $Q(X) = \prod_{k=0}^{k=n}(2X-k)$; $R(X) = \prod_{k=0}^{k=n}(X-2)^k$.

Exercice 3 (* à ***)

Déterminer tous les polynômes réels vérifiant chacune des conditions suivantes :

1. $P(1) = 0$ et $P(2) = 0$
2. $P(1) = 1$ et $P(2) = 2$
3. $XP' = P$
4. $(X^2+1)P'' = 6P$
5. $P(0)0$; $P(1) = 1$; $P'(0) = 2$ et $P'(1) = 3$.

Exercice 4 (**)

Soit $P(X) = X^3 - 2X^2 - 5X + 6$.

1. Déterminer une racine évidente du polynôme P.
2. Factoriser P sous la forme $(X+2)Q(X)$, où Q est un polynôme de degré 2.
3. En déduire le tableau de signe de P sur $\mathbb{R}$.
4. Résoudre les inéquations $(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 - 5\ln x + 6 > 0$ et $e^{2x} - 2e^x \leqslant 5 - 6e^{-x}$

Exercice 5 (**)

Factoriser les polynômes suivants et dresser leur tableau de signe sur $\mathbb{R}$: $P(X) = -X^3 - 3X^2 + 6X + 8$; $Q(X) = X^3 - 6X^2 + 13X - 10$.

Exercice 6 (* à **)

Dans chacun des cas suivants, effectuer la division euclidienne de P par Q.

1. $P(X) = 3X^3 - 5X^2 + X + 2$ et $Q(X) = X - 2$
2. $P(X) = 1 + 6X^2 + 4X^3 - 5X^4$ et $Q(X) = X^2 - 5X + 3$.
3. $P(X) = X^5 - 7X^4 - X^2 - X + 9$ et $Q(X) = X^2 - 5X + 4$.
4. $P(X) = X^{n+2} - 3X^n + 2X + 3$ et $Q(X) = X^2 - 3$.

Exercice 7 (* à ***)

Factoriser le plus possible chacun des polynômes suivants :

1. $P(X) = 2X^4 - 3X^2 - 2$
2. $P(X) = X^8 + X^4 + 1$
3. $P(X) = X^9 + X^6 + X^3 + 1$
4. $P(X) = (1 + X)^3 + 8X^3$

Exercice 8 (**)

Déterminer un polynôme P de degré 3 vérifiant $P(X+1) - P(X) = X^2$. En déduire une nouvelle façon de prouver la formule bien connue pour $\sum_{k=0}^{k=n} k^2$.

En utilisant une méthode similaire, déterminer une jolie formule pour $\sum_{k=0}^{k=n} k^4$ (attention, il y a du calcul en perspective).

Exercice 9 (***)

Déterminer tous les polynômes P de degré 3 tels que $(X - 1)^2$ divise $P - 1$ et $(X + 1)^2$ divise $P + 1$.

Exercice 10 (***)

Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe un unique polynôme P vérifiant $P' - P = X^n$, et exprimer ses coefficients à l'aide de factorielles.

Corrigé de la feuille d'exercices n°19

Exercice 1 (*)

On obtient plus ou moins péniblement :

- $P+Q = 2X^3 - X^2 + 8X - 1$
- $PQ = -2X^5 + 6X^4 - 5X^3 + 16X^2 - 3X$
- $P^2 = (2X^3+5X-1)^2 = 4X^6+25X^2+1+20X^4-4X^3-10X = 4X^6+20X^4-4X^3+25X^2-10X+1$
- $P(X^2) = 2(X^2)^3 + 5(X^2) - 1 = 2X^6 + 5X^2 - 1$
- $P\circ Q = 2(-X^2+3X)^3+5(-X^2+3X)-1 = -2X^6+18X^5-54X^4+54X^3-5X^2+15X-1$
- $Q\circ P = -(2X^3+5X-1)^2+3(2X^3+5X-1) = -(4X^6+20X^4-4X^3+25X^2-10X+1)+6X^3+15X-3 = -4X^6-20X^4+10X^3-25X^2+25X-4$
- $3P^3Q - Q\circ P^2 = 3(2X^3+5X-1)^3(-X^2+3X)+(4X^6+20X^4-4X^3+25X^2-10X+1)^2-3(4X^6+20X^4-4X^3+25X^2-10X+1)$
  $= (8X^9+125X^3-1+60X^7+150X^5-12X^6+6X^3-75X^2+15X-60X^4)(-3X^2+9X)+(16X^{12}+400X^8+16X^6+625X^4+100X^2+1+160X^{10}-32X^9+200X^8-80X^7+8X^6-160X^7+1\,000X^6-400X^5+40X^4-200X^5+80X^4-8X^3-500X^3+50X^2-20X)-12X^6-60X^4+12X^3-75X^2+30X-3$
  $= (8X^9+60X^7-12X^6+150X^5-60X^4+131X^3-75X^2+15X-1)(-3X^2+9X)+16X^{12}+160X^{10}-32X^9+600X^8-240X^7+1\,012X^6-600X^5+685X^4-496X^3+75X^2+10X-2$
  $= (-24X^{11}+72X^{10}-180X^9+540X^8+36X^8-108X^7-450X^7+1\,350X^6+180X^6-540X^5-393X^5+1\,179X^4+225X^4-675X^3-45X^3+135X^2+3X^2-9X)+16X^{12}+160X^{10}-32X^9+600X^8-240X^7+1\,012X^6-600X^5+685X^4-496X^3+75X^2+10X-2$
  $= 16X^{12}-24X^{11}+232X^{10}-212X^9+1\,176X^8-798X^7+2\,542X^6-1\,533X^5+2\,089X^4-1\,216X^3+213X^2+X-2$
  Calcul garanti fait main, et tout de même (j'avoue) vérifié ensuite à la machine, il y avait une toute petite erreur...

Exercice 2 (*)

Si on développe le polynôme P à l'aide de la formule du binôme (mais si, un peu de courage), on obtient $P(X) = \sum_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k}2^{n-k}X^k - \sum_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k}3^{n-k}X^k = \sum_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k}(2^{n-k}-3^{n-k})X^k$. Or, $2^{n-k}-3^{n-k}$ vaut 0 lorsque $k=n$ (mais ne s'annule jamais pour les autres valeurs de k. Le polynôme P est donc en fait de degré $n-1$, et de coefficient dominant $\binom{n}{n-1}(2^{n-1}-3^{n-1}) = n(2^{n-1}-3^{n-1})$.

Le polynôme Q est un produit de $n+1$ polynômes de degré 1, il est donc de degré $n+1$. Son coefficient dominant vaut 2^{n+1} (on l'obtient simplement en faisant le produit des coefficients dominants de tous les facteurs).

Le polynôme R est un produit de $n+1$ polynômes, dont l'un est un polynôme constant (pour $k=0$) et tous les autres sont de degré 1 ; il est donc de degré n. Son coefficient dominant vaut 1.

Exercice 3 (* à ***)

1. Le polynôme P est donc factorisable par $X-1$ et par $X-2$, c'est-à-dire que $P=(X-1)(X-2)Q$, avec $Q\in\mathbb{R}[X]$.
2. Il suffit de constater que les deux conditions données reviennent à dire que $P(X)-X$ vérifie les conditions de la question 1. Autrement dit, on a $P(X)-X=(X-1)(X-2)Q(X)$, soit $P(X)=X+(X-1)(X-2)Q(X)$, avec toujours $Q(X)\in\mathbb{R}[X]$.

3. Si $P(X) = \sum_{k=0}^{k=n} a_k X^k$, on aura $P'(X) = \sum_{k=1}^{k=n} k a_k X^{k-1}$, donc $XP'(X) = \sum_{k=1}^{k=n} k a_k X^k$. Par identification, on aura $XP' = P$ si $a_0 = 0$ et, $\forall k \in \{1; \dots; n\}$, $a_k = k a_k$. Autrement dit, a_1 peut valoir n'importe quoi, mais tous les autres coefficients doivent être nuls. Celà revient à dire que P est de la forme $P = aX$, avec $a \in \mathbb{R}$.
4. Constatons pour commencer que le polynôme nul et solution de l'équation proposée. Intéressons-nous ensuite au degré d'un polynôme P vérifiant la condition demandée : si le terme dominant de P est de la forme $a_n X^n$ (avec $a_n \neq 0$), alors celui de P'' sera $n(n-1)a_n X^{n-2}$, donc celui de $(X^2+1)P''$ sera égal à $n(n-1)a_n X^n$ (tous les autres termes étant de degré inférieur). L'égalité demandée implique donc en particulier que $n(n-1)a_n X^n = 6a_n X^n$, c'est-à-dire que $n(n-1) = 6$, ou encore $n^2 - n - 6 = 0$. Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 1 + 24 = 25$, et admet deux solutions $n_1 = \frac{1-5}{2} = -2$ et $n_2 = \frac{1+5}{2} = 3$. Le degré d'un polynôme pouvant difficilement être égal à -2, notre P est donc de degré 3. Autrement dit, $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, donc $P'' = 6aX + 2b$, et $(X^2+1)P'' = 6aX^3 + 2bX^2 + 6aX + 2b$. Par identification, les coefficients du polynôme P doivent vérifier $6a = 6a$; $6b = 2b$; $6c = 6a$ et $6d = 2b$. On en déduit que $b = d = 0$, et $c = a$, a pouvant valoir n'importe quoi. Autrement dit, $P = a(X^3 + X)$, avec $a \in \mathbb{R}$
5. On peut constater à l'aide des deux premières conditions, de façon similaire à ce que nous avions fait au 2, que $P(X) - X$ admet 0 et 1 pour racines, et peut donc s'écrire sous la forme $X(X-1)Q(X)$. Autrement dit, on a $P(X) = X + X(X-1)Q(X)$. On en déduit que $P'(X) = 1 + (X-1)Q(X) + XQ(X) + X(X-1)Q'(X) = 1 + (2X-1)Q(X) + X(X-1)Q'(X)$. Les deux dernières conditions peuvent alors s'exprimer sous la forme $P'(0) = 1 - Q(0) = 2$, et $P'(1) = 1 + Q(1) = 3$, donc $Q(0) = -1$ et $Q(1) = 2$. Le polynôme $3X - 1$ prenant respectivement les valeurs -1 en 0 et 2 en 1, on peut constater que $Q(X) - (3X-1)$ a pour racines 0 et 1, autrement dit que $Q(X) = 3X - 1 + X(X-1)R(X)$. En reprenant l'expression précédente de P, on obtient donc $P(X) = X + X(X-1)(3X - 1 + X(X-1)R(X)) = X + (X^2 - X)(3X-1) + X^2(X-1)^2R(X) = 2X - 4X^2 + 3X^3 + X^2(X-1)^2R(X)$, avec $R \in \mathbb{R}[X]$. Une autre façon de voir les choses est de dire que les conditions données imposent que le reste de la division euclidienne de P par $X^2(X-1)^2$ soit égal à $2X - 4X^2 + 3X^3$.

Exercice 4 (**)

1. Il y a une racine très évidente qui est 1. On peut aussi constate (par exemple en jetant un oeil à l'énoncé de la question suivante) que -2 est racine de P : $P(-2) = -8 - 2\times 4 - 5\times(-2) + 6 = 0$.
2. On peut donc factoriser P sous la forme $P(X) = (X+2)Q(X) = (X+2)(aX^2 + bX + c) = aX^3 + (2a+b)X^2 + (2b+c)X + 2c$. Par identification, on obtient $a = 1$; $2a + b = -2$; $2b + c = -5$ et $2c = 6$, donc $a = 1$; $b = -4$ et $c = 3$, soit $P(X) = (X+2)(X^2 - 4X + 3)$.
3. Le deuxième facteur a pour discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4$ et pour racines $x_1 = \frac{4-2}{2} = 1$ (tiens, on a retrouvé notre autre racine évidente) et $x_2 = \frac{4+2}{2} = 3$. On a donc $P(X) = (X+1)(X-1)(X-3)$, d'où le tableau de signes suivant :

x		-2		1		3	
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

4. La première inéquation se ramène au tableau de signe précédent en posant $X = \ln x$. On en déduit que $X \in]-2; 1[\cup]3; +\infty[$, donc $\mathcal{S} =]e^{-2}; e[\cup]e^3; +\infty[$. Pour la deuxième, on peut tout multiplier par e^x (qui est toujours strictement positif) et tout passer à gauche pour obtenir $e^{3x} - 2e^{2x} - 5e^x + 6 \leqslant 0$, ce qui se ramène encore une fois au tableau précédent en posant cette fois-ci $X = e^x$ (ce qui suppose donc $X > 0$). On obtient $X \in [1; 3]$ (on peut oublier l'autre intervalle puisque $X \geqslant 0$, soit $\mathcal{S} = [0; \ln 3]$.

Exercice 5 (**)

Le polynôme P a pour racine évidente -1 : $P(-1) = 1 - 3 - 6 + 8 = 0$, donc P est factorisable par $X+1$: $P(X) = (X+1)(aX^2 + bX + c) = aX^3 + (a+b)X^2 + (b+c)X + c$. Par identification, on obtient $a = -1$; $a + b = -3$; $b + c = 6$ et $c = 8$, soit $a = -1$; $b = -2$ et $c = 8$. On a donc $P(X) = (X+1)(-X^2-2X+8)$. Le deuxième facteur a pour discriminant $\Delta = 4+32 = 36$, donc admet deux racines $x_1 = \dfrac{2-6}{-2} = 2$, et $x_2 = \dfrac{2+6}{-2} = -4$. On en déduit que $P(X) = -(X+1)(X-2)(X+4)$, d'où le tableau de signes suivant :

x		-4		-1		2	
$P(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Le polynôme Q a pour racines évidente 2 : $Q(2) = 8 - 24 + 26 - 10 = 0$, donc $Q(2) = (X-2)(aX^2 + bX + c) = aX^3 + (b-2a)X^2 + (c-2b)X - 2c$. Par identification, $a = 1$; $b - 2a = -6$; $c - 2b = 13$ et $-2c = -10$, soit $a = 1$; $b = -4$ et $c = 5$. On a donc $Q(X) = (X-2)(X^2 - 4X + 5)$. le deuxième facteur a pour discriminant $\Delta = 16 - 20 = -4$, donc ledit facteur est toujours positif, et on a le tableau de signes suivant :

x		2	
$P(x)$	$-$	0	$+$

Exercice 6 (* à **)

1.

$$
\begin{array}{rrrrrrrr|l}
 & 3X^3 & - & 5X^2 & + & X & + & 2 & \quad X-2 \\ \cline{9-9}
- & (3X^3 & - & 6X^2) & & & & & \quad 3X^2+X+3 \\
 & & & X^2 & + & X & + & 2 & \\
 & & - & (X^2 & - & 2X) & & & \\
 & & & & & 3X & + & 2 & \\
 & & & & - & (3X & - & 6) & \\
 & & & & & & & 8 & \\
\end{array}
$$

Conclusion : $3X^3 - 5X^2 + X + 2 = (X-2)(3X^2 + X + 3) + 8$.

2.

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrr|l}
- & 5X^4 & + & 4X^3 & + & 6X^2 & & & + & 1 & \quad X^2-5X+3 \\ \cline{11-11}
- & (-5X^4 & + & 25X^3 & - & 15X^2) & & & & & \quad -5X^2-21X-84 \\
 & & - & 21X^3 & + & 21X^2 & & & + & 1 & \\
 & & - & (-21X^3 & + & 105X^2 & - & 63X) & & & \\
 & & & & - & 84X^2 & + & 63X & + & 1 & \\
 & & & & - & (-84X^2 & + & 420X & - & 252) & \\
 & & & & & & - & 357X & + & 253 & \\
\end{array}
$$

Conclusion : $-5X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 1 = (X^2 - 5X + 3)(-5X^2 - 21X - 84) - 357X + 253$ (eh oui, parfois, les résultats sont ignobles).

3.

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrr|l}
 & X^5 & - & 7X^4 & & & - & X^2 & - & X & + & 9 & X^2-5X+4 \\
- & (X^5 & - & 5X^4 & + & 4X^3) & + & X^2) & & & & & X^3-2X^2-14X-63 \\
 & & - & 2X^4 & - & 4X^3 & - & X^2 & - & X & + & 9 & \\
 & & - & (-2X^4 & + & 10X^3 & - & 8X^2) & & & & & \\
 & & & & - & 14X^3 & + & 7X^2 & - & X & + & 9 & \\
 & & & & - & (-14X^3 & + & 70X^2 & - & 56X) & & & \\
 & & & & & & - & 63X^2 & + & 55X & + & 9 & \\
 & & & & & & - & (-63X^2 & + & 315X & - & 252) & \\
 & & & & & & & & - & 260X & + & 261 &
\end{array}
$$

Conclusion : $X^5 - 7X^4 - X^2 - X + 9 = (X^2 - 5X + 4)(X^3 - 2X^2 - 14X - 63) - 260X + 261$

4. C'est évident le piège idiot de la liste : on ne peut pas faire de division euclidienne si on ne connait pas la valeur de n, mais la division est en fait déjà écrite sous nos yeux en factorisant la première moitié de P par X^n : $X^{n+2} - 3X^n + 2X + 3 = X^n(X^2 - 3) + 2X + 3$. Comme le degré de $2X + 3$ est strictement inférieur à celui de $X^2 - 3$, on a bien effectué la division souhaitée.

Exercice 7 (* à ***)

1. En posant $Y = X^2$, on cherche d'abord à factoriser $2Y^2 - 3Y - 2$, trinôme de discriminant $\Delta = 9 + 16 = 25$, admettant pour racines $Y_1 = \dfrac{3-5}{4} = -\dfrac{1}{2}$ et $Y_2 = \dfrac{3+5}{4} = 2$. On en déduit que $2Y^2 - 3Y - 2 = 2\left(Y + \dfrac{1}{2}\right)(Y - 2) = (2Y + 1)(Y - 2)$, et ensuite que $P(X) = (2X^2 + 1)(X^2 - 2) = (2X^2 + 1(X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})$ (le premier facteur ne peut pas se factoriser plus puisqu'il n'a pas de racine).
2. On pourrait avoir envie de poser $Y = X^4$ et procéder comme précédemment, mais un gros souci apparait rapidement : le trinôme obtenu n'a pas de racine. En fait, c'est pire que ça : on sait dès le départ que le polynôme de degré 8 initial n'a pas de racine puisqu'il est toujours strictement positif. Il est néanmoins factorisable (ce n'est pas contradictoire, il ne faut simplement pas s'attendre à obtenir des facteurs de degré 1) en étant un peu (beaucoup ?) astucieux : $P(X) = X^8 + X^4 + 1 = (X^8 + 2X^4 + 1) - X^4 = (X^4 + 1)^2 - (X^2)^2$. On reconnait maintenant une différence de deux carrés, qu'on sait factoriser : $P(X) = (X^4 + X^2 + 1)(X^4 - X^2 + 1)$. Chacun des deux facteurs peut à nouveau se factoriser en utilisant la même technique (encore une fois, pas de méthode plus simple) : $X^4 + X^2 + 1 = (X^2 + 1)^2 - X^2 = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)$; et $X^4 - X^2 + 1 = (X^2 + 1)^2 - 3X^2 = (X^2 + 1)^2 - (\sqrt{3}X)^2 = (X^2 + \sqrt{3}X + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)$. Finalement, on obtient la factorisation suivante pour P : $P(X) = (X^2 + \sqrt{3}X + 1)(X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)$ (comme prévu, aucun de ces quatre trinômes n'admet de racine, on ne peut donc pas factoriser plus).
3. Commençons par poser $Y = X^3$ et cherchons à factoriser $Y^3 + Y^2 + Y + 1$. Il y a une racine évidente qui est -1, on peut donc écrire $Y^3 + Y^2 + Y + 1 = (Y + 1)(aY^2 + bY + c) = aY^3 + (a + b)Y^2 + (b + c)Y + c$. Par identification on a $a = 1$; $a + b = 1$; $b + c = 1$ et $c = 1$, donc $a = c = 1$ et $b = 0$. Autrement dit, $Y^3 + Y^2 + Y + 1 = (Y + 1)(Y^2 + 1)$. Le deuxième facteur ne risque pas de se factoriser plus, on a donc $P(X) = (X^3 + 1)(X^6 + 1)$. Le premier facteur, $Y^3 + 1$, a pour racine évidente -1 (encore une fois), donc se factorise par $X + 1$. Une autre façon de voir les chose est d'utiliser l'identité remarquable vue en cours : $X^3 + 1 = X^3 - (-1)^3 = (X + 1)(X^2 - X + 1)$. Le trinôme $X^2 - X + 1$ a un discriminant négatif, on ne peut pas le factoriser. Reste à s'occuper du facteur $X^6 + 1$, pour lequel on ne risque pas de trouver de racines puisqu'il est toujours positif. On peut utiliser la même astuce que ci-dessus : $X^6 + 1 = (X^2)^3 - (-1)^3 = (X^2 + 1)(X^4 - X^2 + 1)$. Le facteur $X^2 + 1$ n'admet toujours pas

de racine et n'est pas factorisable, et si vous avez suivi les calculs de la question 2 de ce même exercice, vous savez déjà que $X^4-X^2+1=(X^2+\sqrt{3}X+1)(X^2-\sqrt{3}X+1)$. Conclusion de tous ces calculs : $X^9+X^6+X^3+1=(X+1)(X^2-X+1)(X^2+1)(X^2-\sqrt{3}X+1)(X^2+\sqrt{3}X+1)$.

4. Celui-là est rapide si on pense à utiliser l'identité remarquable $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ (on ne vous a pas mis $P(X)$ sous cette forme-là pour rien !) : $P(X)=(1+X)^3+8X^3=(1+X)^3-(-2X)^3=(1+X+2X)((1+X)^2-2X(1+X)+4X^2)=(1+3X)(1+2X+X^2-2X-2X^2+4X^2)=(1+3X)(3X^2+1)$. On ne peut pas factoriser plus que cela.

Exercice 8 (**)

Un polynôme de degré 3 est de la forme $P=aX^3+bX^2+cX+d$, on a donc dans ce cas $P(X+1)-P(X)=a(X+1)^3+b(X+1)^2+c(X+1)+d-(aX^3+bX^2+cX+d)=3aX^2+3aX+a+2bX+b+c$. Par identification, on aura $P(X+1)-P(X)=X^2$ si $3a=1$; $3a+2b=0$ et $a+b+c=0$, soit $a=\frac{1}{3}$; $b=-\frac{3}{2}a=-\frac{1}{2}$ et $c=-a-b=\frac{1}{6}$ (et d peut être pris comme on le souhaite, on posera par exemple $d=0$). Un polynôme satisfaisant est donc $P=\frac{1}{3}X^3-\frac{1}{2}X^2+\frac{1}{6}X$. En exploitant l'égalité $P(k+1)-P(k)=k^2$ (valable pour tout entier k), on peut en déduire que $\sum_{k=0}^{k=n}k^2=\sum_{k=0}^{k=n}P(k+1)-P(k)=P(n+1)-P(0)$ (c'est une somme télescopique. Comme $P(0)=0$ et $P(n+1)=\frac{1}{3}(n+1)^3-\frac{1}{2}(n+1)^2+\frac{1}{6}(n+1)=\frac{(n+1)(2(n+1)^2-3(n+1)+1)}{6}=\frac{(n+1)(2n^2+4n+2-3n-3+1)}{6}=\frac{(n+1)(2n^2+n)}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, on retrouve une formule bien connue depuis quelques mois désormais.

Pour la deuxième partie de l'exercice, le principe est le même, mais en partant d'un polynôme de degré 5 (d'où les calculs un peu plus compliqués). Posons donc $P=aX^5+bX^4+cX^3+dX^2+eX+f$, alors (en révisant au passage notre triangle de Pascal) on a $P(X+1)-P(X)=a(X+1)^5+b(X+1)^4+c(X+1)^3+d(X+1)^2+e(X+1)+f-(aX^5+bX^4+cX^3+dX^2+eX+f)=5aX^4+10aX^3+10aX^2+5aX+a+4bX^3+6bX^2+4bX+b+3cX^2+3cX+1+2dX+d+e=5aX^4+(10a+4b)X^3+(10a+6b+3c)X^2+(5a+4b+3c+2d)X+a+b+c+d+e$. Par identification, tout ceci sera égal à X^4 si $5a=1$; $10a+4b=0$; $10a+6b+3c=0$; $5a+4b+3c+2d=0$ et $a+b+c+d+e=0$ (et on peut prendre par exemple f égal à 0), soit $a=\frac{1}{5}$; $b=-\frac{5}{2}a=-\frac{1}{2}$; $c=-\frac{2}{3}b=\frac{1}{3}$ (puisque $10a+4b=0$, on a $2b+3c=0$) ; $d=-\frac{1}{2}(5a+4b+3c)=-\frac{1}{2}(1-2+1)=0$, et enfin $e=-a-b-c-d=-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{-6+15-10}{30}=-\frac{1}{30}$. On obtient donc $P(X)=\frac{1}{5}X^5-\frac{1}{2}X^4+\frac{1}{3}X^3-\frac{1}{30}X$, puis de manière similaire à ce qu'on a fait dans la première partie de l'exercice $\sum_{k=0}^{k=n}k^4=P(n+1)=\frac{(n+1)^5}{5}-\frac{(n+1)^4}{2}+\frac{(n+1)^3}{3}-\frac{n+1}{30}=\frac{(n+1)(6(n+1)^4-15(n+1)^3+10(n+1)^2-1)}{30}=\frac{(n+1)(6n^4+24n^3+36n^2+24n+6-15n^3-45n^2-45n-15+10n^2+20n+10-1)}{30}=\frac{(n+1)(6n^4+9n^3+n^2-n))}{30}=\frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$. Le dernier gros facteur ne se factorise pas de façon immédiate, mais les plus curieux d'entre vous pourront constater que $-\frac{1}{2}$ en est une racine : $6\left(-\frac{1}{2}\right)^3+9\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}-1=-6\times\frac{1}{8}+\frac{9}{4}-\frac{1}{2}-1=-\frac{3}{4}+\frac{9}{4}-\frac{2}{4}-\frac{4}{4}=0$. On en déduit que $6n^3+9n^2+n-1=\left(n+\frac{1}{2}\right)(an^2+bn+c)=an^3+\left(b+\frac{1}{2}a\right)n^2+\left(c+\frac{1}{2}b\right)n+\frac{1}{2}c$.

Par identification, on obtient $a = 6$; $b + \frac{1}{2}a = 9$; $c + \frac{1}{2}b = 1$ et $\frac{1}{2}c = -1$; soit $a = 6$; $b = 6$ et $c = -2$. On a donc $6n^3 + 9n^2 + n - 1 = \left(n + \frac{1}{2}\right)(6n^2 + 6n - 2) = (2n+1)(3n^2 + 3n - 1)$ (remarquez que le facteur $2n + 1$ déjà présent pour la formule de la somme des carrés refait ici son apparition). Reste encore à factoriser le dernier terme si on le souhaite. Il a pour discriminant $\Delta = 9 + 12 = 21$, et admet donc deux racines $n_1 = \frac{-3 - \sqrt{21}}{3}$ et $n_2 = \frac{-3 + \sqrt{21}}{3}$. ces deux racines étant assez peu sympathiques, on préfèrera garder la formule suivante :

$$\sum_{k=0}^{k=n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)}{30}$$

Exercice 9 (***)

Dire que $(X - 1)^2$ divise $P - 1$ revient à dire que 1 est une racine double de $P - 1$ (c'est du cours), autrement dit que $(P-1)(1) = 0$ et $(P-1)'(1) = 0$. Plus simplement, cela revient à dire que $P(1) = 1$ et $P'(1) = 0$ (la dérivée de $P-1$ étant P'). De même, dire que $(X+1)^2$ divise $P+1$ revient à dire que -1 est racine double de $P+1$, donc $P(-1) = -1$ et $P'(-1) = 0$. Le polynôme P' étant le polynôme dérivé d'un polynôme de degré 3, il est de degré 2. Comme on lui connait deux racines 1 et -1, il est donc nécessairement de la forme $P'(X) = a(X-1)(X+1) = aX^2 - a$, avec $a \in \mathbb{R}$. Un peu d'anticipation sur le chapitre d'intégration permet alors d'affirmer que $P(X) = \frac{a}{3}X^3 - aX + b$, où a et b sont deux réels. Reprenonns maintenant les deux conditions connues sur P : on sait que $P(1) = 1$, donc $\frac{a}{3} - a + b = 1$, et $P(-1) = -1$, donc $-\frac{a}{3} + a + b = -1$. On obtient $b = 0$ en additionnant les deux équations, donc elles se réduisent toutes deux à $\frac{a}{3} - a = 1$, soit $a = -\frac{3}{2}$. Conclusion $P(X) = -\frac{1}{2}X^3 + \frac{3}{2}X$.

Exercice 10 (***)

Commençons par constater qu'un tel polynôme est nécessairement de degré n : en effet, P' est toujours de degré strictement inférieur à P, donc $P' - P$ est toujours de même degré que P. posons alors $P = \sum_{k=0}^{k=n} a_k X^k$. On a donc $P' = \sum_{k=1}^{k=n} k a_k X^{k-1}$, et $P' - P = -a_n X^n + \sum_{k=0}^{k=n-1} ((k+1)a_{k+1} - a_k)X^k$. Pour avoir $P' - P = X^n$, il faut donc avoir $a_n = -1$ et, $\forall k \leqslant n - 1$, $a_k = (k+1)a_{k+1}$, ou encore si on préfère, $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $a_{k-1} = k a_k$. On a donc $a_{n-1} = -n$, puis $a_{n-2} = -n(n-1)$, etc. Plus géralement, on aura $a_k = -n(n-1)\dots(n-k+1) = -\frac{n!}{k!}$, donc $P = -\sum_{k=0}^{k=n} \frac{n!}{k!} X^k$ (naturellement, une petite récurrence pour déterminer la valeur des coefficients ne nuirait pas à la riguer de l'argumentation).

Problème de révision pour le DS6

ECE3 Lycée Carnot

9 mars 2010

Puissances d'une matrice

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3 puis trouver une relation entre A, A^2 et A^3.
2. Prouver, pour tout $n \geqslant 1$, l'existence d'un couple de réels (u_n, v_n) tels que $A^n = u_n A^2 + v_n A$, et déterminer des relations de récurrence vérifiées par ces deux suites.
3. Prouver que la suite $(u_n + v_n)$ est constate et calculer sa valeur.
4. En déduire que (v_n) est une suite arithmético-géométrique, puis déterminer v_n et u_n.
5. En déduire l'expression de A^n en fonction de n.

Une application probabiliste

Un élève de prépa fait un footing tous les soirs pour maintenir un semblant de forme physique. Chaque jour, il choisit de courir une heure, une demi-heure ou pas du tout. On note A_n l'évènement « L'élève court 1 heure au jourd numéro b » ; B_n correspond à une demi-heure de course et C_n à l'absence de footing ; on notera aussi a_n, b_n et c_n les probabilités correspondantes. Au jour numéro 0, l'élève a couru une heure. On sait par ailleurs que s'il court une heure ou s'il ne court pas au jour n, il courra toujours une demi-heure au jourd $n+1$. Par contre, s'il court une demi-heure au jour n, il a une chance sur 4 de passer à une heure le lendemain, une chance sur 2 de rester à une demi-heure, et donc une chance sur 4 de ne pas courrir.

1. On note $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Préciser les valeurs de X_0, X_1 et X_2.
2. À l'aide de la formule des probabilités totales, déterminer des relations de récurrence sur les suites a_n, b_n et c_n, et en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$, où A est la matrice étudiée dans la première partie du problème.
3. En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
4. Déterminer les valeurs de a_n, b_n et c_n, ainsi que leurs limites quand n tend vers $+\infty$.

Corrigé du problème de révision DS6

Puissances d'une matrice

1. On obtient sans grande difficulté $A^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{16} & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{8} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{16} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$. Si on veut trouver une relation du type $A^3 = aA^2 + bA$, les coefficients dans les coins donnent immédiatement $a = \frac{1}{2}$, puis on constate que $A^3 - \frac{1}{2}A^2 = \frac{1}{2}A$, soit $A^3 = \frac{1}{2}(A^2 + A)$.
2. On va bien sûr procéder par récurrence : c'est vrai pour $n = 1$ car $A = 0 \times A^2 + 1 \times A$; supposons la relation vérifiée au rang n, on a alors $A^{n+1} = A \times A^n = A(u_nA^2 + v_nA) = u_nA^3 + v_nA^2 = \frac{u_n}{2}A^2 + \frac{u_n}{2}A + v_nA^2$. La relation est donc également vraie au rang $n+1$ en posant $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + v_n$ et $v_{n+1} = \frac{u_n}{2}$.
3. Constatons en effet que $u_{n+1} + v_{n+1} = \frac{u_n}{2} + v_n + \frac{u_n}{2} = u_n + v_n$, ce qui est assea caractéristique des suites constantes. Comme $u_1 + v_1 = 0 + 1 = 1$, on aura, $\forall n \geqslant 1$, $u_n + v_n = 1$.
4. Comme $u_n = 1 - v_n$, la relation de récurrence pour (v_n) devient $v_{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}v_n$, ce qui est bien une suite arithmético-géométrique, d'équation de point fixe $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x$, ce qui donne $x = \frac{1}{3}$. Posons $w_n = v_n - \frac{1}{3}$, on a alors $w_{n+1} = v_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}v_n - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}v_n = -\frac{1}{2}\left(v_n - \frac{1}{3}\right)$, donc (w_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{2}$ et de premier terme $w_1 = v_1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. On a donc $w_n = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, puis $v_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. On a ensuite $u_n = 1 - v_n = 2\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.
5. On sait que $A^n = u_nA^2 + v_nA$, il n'est guère intéressant d'expliciter tous les coefficients.

Une application probabiliste

1. On a par hypothèse $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On sait alors, d'après l'énoncé, que l'élève courra une demi-heure le jour 1, donc $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Enfin, les trois probabilités pour le jour 2 découlent également de l'énoncé : $X_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.
2. Comme A_n, B_n et C_n forment un système complet d'évènements, on peut appliquer la formule des probabilités totales pour obenir $P(A_{n+1})P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(A_{n+1})$, soit $a_{n+1} = a_n \times 0 + b_n \times \frac{1}{4} + c_n \times 0 = \frac{1}{4}b_n$. De même, on obtient $b_{n+1} = a_n + \frac{1}{4}b_n + c_n$ et $c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n$. Remises sous forme matricielle, ces trois relations donnent

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \times X_0 = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}, \text{ c'est-à-dire } X_{n+1} = AX_n.$$

3. Une petite récurrence : c'est vrai pour $n = 1$ (d'après la question précédente, $X_1 = AX_0$) ou même pour $n = 0$, et si on suppose l'égalité vérifiée pour n, alors d'après la question précédente, $X_{n+1} = AX_n = A \times A^n X_0 = A^{n+1} X_0$, ce qui achève la récurrence.

4. Connaissant X_0 et le fait que $A^n = u_n A^2 + v_n A$, on obtient $a_n = \frac{1}{4} u_n$; $b_n = \frac{1}{2} u_n + v_n$ et $c_n = \frac{1}{4} u_n$. Comme (u_n) et (v_n) ont pour limites respectives $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{3}$ (car $\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ tend vers 0), on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$. De même, $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n = \frac{1}{6}$ (les suites (c_n) et (a_n) sont égales à partir du rang 1). Enfin, $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = \frac{1}{2} \times 23 + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. On constate que la somme des trois limites vaut 1, ce qui est normal.

Feuille d'exercices n°20 : Variables aléatoires finies

ECE3 Lycée Carnot

11 mars 2010

Exercice 1 (*)

On joue au jeu suivant : on parie sur un nombre compris entre 1 et 6, puis on lance trois dés et on gagne 3 euros si le nombre sort 3 fois, 2 euros s'il sort deux fois, 1 euro s'il sort une fois. On perd 1 euro s'il ne sort pas. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de la variable X représentant le gain du joueur.

Exercice 2 (**)

On lance simultanément quatre dés à 6 faces et on note X le plus grand chiffre obtenu. Déterminer la loi de X, ainsi que son espérance et sa variance. Tracer la courbe de la fonction de répartition de X.

Exercice 3 (**)

Une urne contient initialement 4 boules vertes, 2 jaunes et une rouge. On y effectue des tirages successifs sans remise et on note X le nombre de tirages nécessaire pour qu'il ne reste plus que deux couleurs dans l'urne et Y le nombre de tirages nécessaire pour qu'il n'y ait plus qu'une couleur. Déterminer les lois, espérances et variances de X et Y.

Exercice 4 (***)

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue des tirages sans remise dans cette urne jusqu'à ce que le numéro tiré ait un numéro supérieur ou égal au numéro tiré juste avant (ce qui suppose qu'on effectue au moins deux tirages ; par exemple une suite de tirage possible est 7, 4, 2, 5 et on s'arrête après ce quatrième tirage). On note X le nombre de tirages effectués.

1. Quels sont les valeurs prises par la variable X ?
2. Déterminer la loi de X puis son espérance (on pourra commencer par traiter les cas $n = 3$ et $n = 5$).
3. Quelle est la limite de $E(X)$ quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 5 (*)

Au bridge, on joue avec un jeu de 52 cartes et on attribue habituellement 4 points pour un As, 3 pour un Roi, 2 pour une Dame et 1 pour un Valet (et 0 pour tout autre carte). Un joueur pioche 13 cartes dans le jeu de 52, on note X le nombre de points contenu dans son jeu. Quelle est le nombre de points moyen d'une carte tirée au hasard dans le jeu ? En déduire $E(X)$ (sans calculer sa loi).

Exercice 6 (d'après ISCID 91) (***)

On considère une urne de taille $N > 1$ contenant r boules blanches et $N - r$ boules noires ($0 \leqslant r < N$). Dans cette urne, on prélève les boules une à une et sans remise, jusqu'à l'obtention de toutes les boules blanches, et on note X le nombre de tirages qu'il est nécessaire d'effectuer pour cela. Le but de l'exercice est de déterminer la loi de X, ainsi que son espérance et sa variance.

1. (a) Traiter le cas $N = 4$ et $r = 1$.
   (b) Traiter le cas $N = 4$ et $r = 2$.
2. Etude du cas général : $(1 < r < N)$
   (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.
   (b) Soit k l'une de ces valeurs. Déterminer la probabilité pour qu'au cours des $k-1$ premiers tirages soient apparues $r-1$ boules blanches (et donc, $k-r$ boules noires). En déduire la valeur de $P(X = k)$, c'est-à-dire la probabilité pour que la r^{i-eme} (et dernière) boule blanche apparaisse au k^{i-eme} tirage.
   (c) Vérifier, après simplifications, que $P(X = k) = \dfrac{\binom{k-1}{r-1}}{\binom{N}{r}}$. En déduire les valeurs des sommes : $\displaystyle\sum_{k=r}^{N} \binom{k-1}{r-1}$, puis $\displaystyle\sum_{k=r}^{N} \binom{k}{r}$ et $\displaystyle\sum_{k=r}^{N} \binom{k+1}{r+1}$.
   (d) Montrer que $E(X) = \dfrac{r(N+1)}{r+1}$.
   (e) De même, calculer $E(X(X+1))$ et en déduire $V(X)$.

Exercice 7 (d'après Ecricome 2008) (***)

Un joueur lance successivement n boules au hasard dans N cases numérotées de 1 à N (avec $N \geqslant 2$), chaque boule ayant probabilité $\dfrac{1}{N}$ de tomber dans chacune des N cases (et les tirages de boules étant indépendants les uns des autres). On cherche à étudier la variable aléatoire T_n égale au nombre de cases **non** vides après n lancers.

1. Déterminer en fonction de n et de N les valeurs prises par T_n.
2. Donner les lois de T_1 et de T_2.
3. Déterminer, lorsque $n \geqslant 2$, les probabilités $P(T_n = 1)$, $P(T_n = 2)$ et $P(T_n = n)$ (en distingant suivant que $n \leqslant N$ ou $n > N$).
4. À l'aide de la formule des probabilités totales, prouver que si $1 \leqslant k \leqslant n$, alors $P(T_{n+1} = k) = \dfrac{k}{N}P(T_n = k) + \dfrac{N-k+1}{N}P(T_n = k-1)$.
5. On considère dans cette question le polynôme $G_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} P(T_n = k)x^k$.
   (a) Quelle est la valeur de $G_n(1)$?
   (b) Exprimer $E(T_n)$ en fonction de $G_n'(1)$.
   (c) En utilisant la relation démontrée à la question 4, montrer que $G_{n+1}(x) = \dfrac{1}{N}(x - x^2)G_n'(x) + xG_n(x)$.
   (d) Dériver l'expression précédente et en déduire que $E(T_{n+1}) = \left(1 - \dfrac{1}{N}\right) E(T_n) + 1$.
   (e) En déduire la valeur de $E(T_n)$ et déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Corrigé de la feuille d'exercices n°20

Exercice 1 (*)

Le gain du joueur peut être de 1, 2, 3 ou -1 euro. On a donc $X(\Omega) = \{-1; 1; 2; 3\}$. notons par ailleurs que $|\Omega| = 6^3 = 216$ (on lance trois dés à 6 faces). Il ne reste plus qu'à calculer la probabilité de sortir un nombre de 6 donné pour obtenir la loi de X. Pour obtenir trois 6, il n'y a qu'un tirage possible, soit une probabilité de $\frac{1}{216}$. Pour deux 6, on a le choix du dé qui ne donnera pas un 6 (trois possibilités), ainsi que du chiffre obtenu sur ce dé (cinq possibilités), soit une probabilité de $\frac{3 \times 5}{216} = \frac{15}{216}$. De même, pour un 6, trois choix pour le dé qui donne 6, et cinq choix pour le résultat de chacun des deux dés restants, soit une probabilité de $\frac{3 \times 5^2}{216} = \frac{75}{216}$. Enfin, si on n'obtient pas de 6, on a cinq choix pour chaque dé, soit une probabilité de $\frac{5^3}{216} = \frac{125}{216}$. On vérifie que la somme de ces probabilités est bien égale à 1, et on a donc la loi suivante :

k	-1	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

Le reste est du pur calcul : $E(X) = \frac{-1 \times 125 + 1 \times 75 + 2 \times 15 + 3 \times 1}{216} = -\frac{17}{216} \simeq 0.08$. On perdra donc en moyenne huit centimes d'euros par partie. Ensuite, $E(X^2) = \frac{1 \times 125 + 1 \times 75 + 4 \times 15 + 9 \times 1}{216} = \frac{269}{216}$, donc $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{269}{216} - \left(\frac{17}{216}\right)^2 = \frac{69\ 920}{46\ 656} = \frac{2\ 185}{1\ 458} \simeq 1.5$ (soit $\sigma \simeq 1.22$).

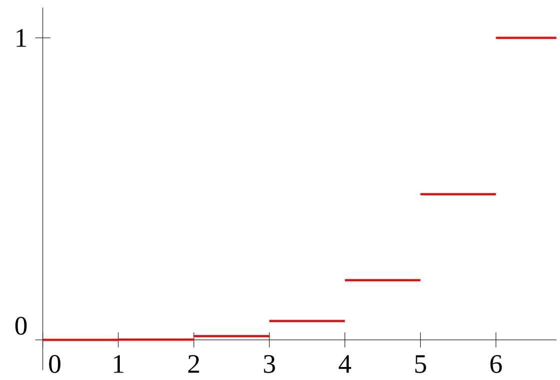
Exercice 2 (**)

On a bien évidemment $X(\Omega) = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ (quand on lance simultanément quatre dés, il est tout à fait possible que le plus grand chiffre obtenu soit 1 puisque les répétitions sont possibles). Notons également que $|\Omega| = 6^4 = 1\ 296$. Plutôt que de calculer directement la loi de X, il est beaucoup plus simple ici de calculer la probabilité des évènement A_i : « Le plus grand chiffre obtenu est inférieur ou égal à i ». En effet, cela revient à dire que chacun des quatre dés a donné un résultat inférieur ou égal à i, ou encore qu'on a i possibilités pour chaque dé. Ainsi, $P(A_6) = \frac{6^4}{6^4} = 1$; $P(A_5) = \frac{5^4}{6^4} = \frac{625}{1\ 296}$; $P(A_4) = \frac{4^4}{6^4} = \frac{256}{1\ 296}$; $P(A_3) = \frac{81}{1\ 296}$; $P(A_2) = \frac{16}{1\ 296}$ et enfin $P(A_1) = \frac{1}{1\ 296}$. Ensuite, remarquons que l'évènement $X = i$ correspond à avoir A_i réalisé (si le maximum vaut i, il est certainement inférieur ou égal à i), mais pas A_{i-1} (sinon, le maximum sera strictement inférieur à i). Chaque évènement A_{i-1} étant inclus dans A_i, on en déduit que $P(X = 6) = P(A_6) - P(A_5) = \frac{1\ 296 - 625}{1\ 296} = \frac{671}{1\ 296}$, $P(X = 5) = P(A_5) - P(A_4) = \frac{369}{1\ 296}$ etc. Soit la loi suivante :

k	1	2	3	4	5	6
$P(X = k)$	$\frac{1}{1\ 296}$	$\frac{15}{1\ 296}$	$\frac{65}{1\ 296}$	$\frac{175}{1\ 296}$	$\frac{369}{1\ 296}$	$\frac{671}{1\ 296}$

On a donc $E(X) = \frac{1 + 30 + 195 + 700 + 1\ 845 + 4\ 026}{1\ 296} = \frac{6\ 797}{1\ 296} \simeq 5.24$; puis $E(X^2) = \frac{1 + 60 + 585 + 2\ 800 + 9\ 225 + 24\ 156}{1\ 296} = \frac{36\ 827}{1\ 296}$, et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 \simeq 0.91$ (soit $\sigma \simeq 0.95$).

Évidemment, tracer la courbe de la fonction de répartition n'est pas extrêmement aisé quand on n'a pas de quoi découper son échelle en 1 296 de façon précise. Ce qui est intéressant ici, c'est que les sauts apparaissant sur cette courbe sont exactement les valeurs des probabilités des évènements A_i calculées un peu plus haut. On verra dans un chapitre ultérieur que, pour calculer la loi d'un maximum, comme ici, il est souvent efficace de passer par la fonction de répartition. Voici tout de même la courbe :



Exercice 3 (**)

C'est un exercice très bête et méchant. Commençons donc par la variable X. Elle peut prendre les valeurs entières comprises entre 1 et 5 (après cinq tirages, il ne reste plus que deux boules dans l'urne, donc il ne peut pas rester plus de deux couleurs !). On aura $X = 1$ uniquement si on tire la boule rouge au premier tirage, soit $P(X = 1) = \frac{1}{7}$. On a ensuite $X = 2$ dans deux cas : tirage des deux boules jaunes aux deux premiers tirages (dans un ordre ou dans l'autre), ou tirage d'une boule autre que la rouge au premier tirage, et de la rouge au deuxième, soit $P(X = 2) = \frac{2}{7 \times 6} + \frac{6}{7} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{21} + \frac{1}{7} = \frac{4}{21}$. Pour $X = 3$, on a les tirages possibles suivants : VVR, VJR, JVR, JVJ, VJJ (ici, faire un arbre commence à devenir intéressant), soit une probailité totale de $\frac{4 \times 3 + 4 \times 2 + 2 \times 4 + 2 \times 4 + 4 \times 2}{7 \times 6 \times 5} = \frac{44}{210} = \frac{22}{105}$. Pour $X = 4$, on a les possibilités $VVVR$, $VVJR$, $VJVR$, $JVVR$, $VVJJ$, $VJVJ$, $JVVJ$ et $VVVV$, ce qui donne une probabilité $P(X = 4) = \frac{4 \times 3 \times 2 + 4 \times 3 \times 2 + 4 \times 2 \times 3 + 2 \times 4 \times 3 + 4 \times 3 \times 2 + 4 \times 2 \times 3 + 2 \times 4 \times 3 + 4 \times 3 \times 2}{7 \times 6 \times 5 \times 4}$ $= \frac{8 \times 24}{7 \times 6 \times 5 \times 4} = \frac{8}{35}$. Enfin, pour avoir $X = 5$, il faut nécessairement tirer trois vertes et une jaune lors des quatre premiers tirages (sinon, on aura épuisé une des trois couleurs avant le cinquième tirage), ce qui laisse $4 \times 3 \times 2 \times 2 \times 4$ possibilités (le deuxième 4 étant pour le choix de la position de la boule jaune), puis on tire n'importe laquelle des trois boules restantes au cinquième tirage, soit $P(X = 5) = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 2 \times 4 \times 3}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3} = \frac{8}{35}$. On a donc finalement la loi suivante :

k	1	2	3	4	5
$P(X = k)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{22}{105}$	$\frac{8}{35}$	$\frac{8}{35}$

On calcule maintenant sans difficulté $E(X) = \frac{1}{7} + \frac{8}{21} + \frac{66}{105} + \frac{32}{35} + \frac{40}{35} = \frac{337}{105} \simeq 3.21$; puis $E(X^2) = \frac{1}{7} + \frac{16}{21} + \frac{198}{105} + \frac{128}{35} + \frac{200}{35} = \frac{1\ 277}{105}$, et $E(X^2) - E(X)^2 \simeq 1.86$ (soit $\sigma \simeq 1.36$).

Pour la variable Y, les calculs sont assez similaires. Elle peut prendre les valeurs 3, 4, 5 et 6 (il faut au moins tirer trois boules pour épuiser deux couleurs, et au bout de six tirages il ne peut rester qu'une couleur dans l'urne). On aura $Y = 3$ si on tire les deux rouges et la jaune lors des trois premiers tirages (peu importe l'ordre), soit $P(Y = 3) = \frac{3!}{7 \times 6 \times 5} = \frac{1}{35}$. Ensuite $Y = 4$ si on tire deux jaunes et une verte lors des trois premiers tirages, puis la rouge au quatrième (peu importe l'ordre pour les trois premiers tirages, mais on a le choix sur la verte, soit $3! \times 4$ tirages) ; ou une de chaque couleur lors des premiers tirages, et la deuxième jaune au quatrième ($3! \times 4 \times 2$ possibilités), donc $P(Y = 4) = \frac{3! \times 4 + 3! \times 4 \times 2}{7 \times 6 \times 5 \times 4} = \frac{3}{35}$. Pour $Y = 5$, on peut avoir deux jaunes et deux vertes (ordre au choix) puis la rouge ($4 \times 3 \times 2 \times \binom{4}{2}$ tirages) ; ou quatre vertes et une rouge (ordre au choix sur les cinq tirages, $5!$ possibilités) ; ou enfin deux vertes, une jaune et la rouge (ordre au choix), puis la deuxième jaune ($4! \times 12$ possibilités), soit $P(Y = 5) = \frac{24 \times 6 + 24 \times 5 + 24 \times 12}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3} = \frac{23}{105}$. Enfin, on aura $Y = 6$ si on tire les quatre vertes et les deux jaunes (peu importe l'ordre, $6!$ choix) ; ou bien 4 vertes, une jaune et la rouge en ne finissant pas par la jaune (5×2 possibilités pour la jaune avec la position, 5 pour la rouge et $4!$ pour les vertes) ; ou 3 vertes et 2 jaunes (ordre aléatoire), puis la rouge (5×4 possibilités pour les positions des jaunes, $4 \times 3 \times 2$ choix pour les vertes) ; ou enfin 3 vertes, une jaune et la rouge, puis la deuxième jaune (5 choix de position pour la rouge, 4×2 pour la jaune, $4 \times 3 \times 2$ pour les vertes), soit au total $P(Y = 6) = \frac{6! + 10 \times 5! + 4 \times 5! + 8 \times 5!}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2} = \frac{28}{42} = \frac{2}{3}$.
Voici donc la loi de Y :

k	3	4	5	6
$P(Y = k)$	$\frac{1}{35}$	$\frac{3}{35}$	$\frac{23}{105}$	$\frac{2}{3}$

On calcule maintenant sans difficulté $E(X) = \frac{3}{35} + \frac{12}{35} + \frac{115}{105} + 4 = \frac{116}{21} \simeq 5.52$; puis $E(X^2) = \frac{9}{35} + \frac{48}{35} + \frac{575}{105} + 24 = \frac{3\ 266}{105}$, et $E(X^2) - E(X)^2 \simeq 0.59$ (soit $\sigma \simeq 0.77$).

Exercice 4 (***)

1. Comme l'énoncé nous l'a signalé, on aura nécessairement $X \geqslant 2$. On peut par ailleurs prendre toutes les valeurs jusqu'à n inclus (un tirage possible où $X = n$ est n ; $n - 1$; … ; 4 ; 3 ; 1 ; 2), donc $X(\Omega) = \{2; \dots ; n\}$.
2. Dans le cas où $n = 3$, il n'y a que $3! = 6$ ordres possibles pour les tirages (on considèrera qu'on mène les tirages jusqu'au bout même une fois qu'on a tiré un numéro supérieur au précédent, c'est plus simple). Parmi ces six, il y en a 3 pour lesquels le deuxième numéro est plus grans que le premier : 123 ; 132 et 231, donc $P(X = 2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; et donc trois pour lesquels $X = 3$ (on n'aura pas nécessairement un troisième numéro plus grand que le deuxième, mais comme on n'a plus de boule à tirer il faut bien s'arrêter), donc $P(X = 3) = \frac{1}{2}$. L'espérance correspondante vaut $\frac{5}{2}$.

   Dans le cas où $n = 5$, il y a $5! = 120$ tirages possibles. On aura $X = 2$ si on débute notre série de tirages par 12, 13, 14, 15, 23, 24, 25, 34, 35 ou 45 (puis on peut tirer les trois derniers nombres dans n'importe quel ordre), soit $P(X = 2) = \frac{10 \times 3!}{120} = \frac{1}{2}$. On aura $X = 3$ si on commence par 21, 31, 41, 51 (puis n'importe quoi), ou 324, 325, 423, 425, 435, 523, 524, 534, soit $P(X = 3) = \frac{4 \times 3! + 8 \times 2!}{120} = \frac{1}{3}$. On aura $X = 4$, si on débute par 321, 431, 421, 541, 531, 521, et pour les tirages 43251, 54231, 53241, soit $P(X=4)=\dfrac{6\times 2!+3}{120}=\dfrac{1}{8}$. Enfin, on aura $X=5$ pour les tirages 43215, 53214, 54213, 54312, et 54321, soit $P(X=5)=\dfrac{5}{120}=\dfrac{1}{24}$. On obtient cette fois-ci une espérance valant $E(X)=2\times\dfrac{1}{2}+3\times\dfrac{1}{3}+4\times\dfrac{1}{8}+5\times\dfrac{1}{24}=\dfrac{65}{24}\simeq 2.71$.

Dans le cas général, il va bien falloir trouver une façon intelligente de faire le calcul. Supposons $X=k$, cela signifie qu'on a tiré k numéros dont les $k-1$ premiers sont apparus en ordre décroissant. Une fois qu'on sait quel est le k-ème numéro tiré, l'ordre du tirage est donc totalement imposé. Or, ce k-ème numéro tiré peut être n'importe lequel des k numéros tirés, sauf le plus petit. Ainsi, si on $X=4$ et qu'on a tiré les numéros 1, 3, 6 et 8, on a pu tirer dans les trois ordres suivants : 8613, 8316 ou 6318. On a donc $\dbinom{n}{k}$ choix pour les numéros tirés, $k-1$ choix pour le numéro qui apparait au tirage k, et $(n-k)!$ choix pour l'ordre des tirages suivant le tirage numéro k. Conclusion $P(X=k)=\dfrac{\dbinom{n}{k}(k-1)(n-k)!}{n!}=\dfrac{k-1}{k!}$. Seule petite exception si $k=n$: il faut ajouter le cas très particulier où on a tiré tous les numéros dans le sens décroissant, ce qui représente un seul cas sur les $n!$ possibles, donc $P(X=n)=\dfrac{\dbinom{n}{n}(n-1)0!+1}{n!}=\dfrac{n}{n!}$. On peut désormais calculer l'espérance de X : $E(X)=\displaystyle\sum_{k=2}^{k=n}\frac{k(k-1)}{k!}+n\times\frac{1}{n!}$ (on a séparé le cas particulier signalé auparavant pour rendre le calcul plus simple), soit $E(X)=\displaystyle\sum_{k=2}^{k=n}\frac{1}{(k-2)!}+\frac{1}{n!}=\sum_{k=0}^{k=n-2}\frac{1}{k!}+\frac{1}{n!}$.

3. On sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n!}=0$, et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!}=e$ (c'est la somme de la série exponentielle), donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}E(X)=e$ (eh oui, c'est étonnant mais c'est comme ça).

Exercice 5 (*)

Si on tire une seule carte, et qu'on note Y sa valeur en points, $Y(\Omega)=\{0;1;2;3;4\}$, et on a $P(Y=i)=\dfrac{4}{52}=\dfrac{1}{13}$, si $i\in\{1;2;3;4\}$, et $P(Y=0)=\dfrac{36}{52}=\dfrac{9}{13}$ (puisqu'il y a quatre As, quatre Rois, quatre Dames, quatre Valets, et 36 cartes sans points dans un jeu de 52). On a donc $E(Y)=\dfrac{4+3+2+1+0\times 9}{13}=\dfrac{10}{13}$. Considérons désormais le nombre de points X obtenus quand on pioche 13 cartes. On a $X=Y_1+Y_2+\cdots+Y_{13}$, où Y_1 désigne le nombre de points de la première carte piochée, Y_2 celui de la deuxième etc. Par linéarité de l'espérance, $E(X)=E(Y_1)+\cdots+E(Y_{13})=13\times E(Y)=10$.

Exercice 6 (d'après ISCID 91) (***)

1. (a) Il y a donc 4 boules dans l'urne : une blanche et trois noires, et on tire jusqu'à obtenir la blanche. On a donc $X(\Omega)=\{1;2;3;4\}$, avec $P(X=1)=\dfrac{1}{4}$; $P(X=2)=\dfrac{3}{4}\times 13=\dfrac{1}{4}$, $P(X=2)=\dfrac{3}{4}\times 23\times 12=\dfrac{1}{4}$ et $P(X=4)=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 1=\dfrac{1}{4}$. En fait, c'est logique : si on tire les boules les unes après les autres, on a une chance sur quatre de vois la boule

blanche apparaitre à chaque position. On a dans ce cas $E(X) = \dfrac{1+2+3+4}{4} = \dfrac{5}{2}$; $E(X^2) = \dfrac{1+4+9+16}{4} = \dfrac{15}{2}$, donc $V(X) = \dfrac{15}{2} - \dfrac{25}{4} = \dfrac{5}{4}$.

(b) Toujours quatre boules, mais deux blanches et deux noires. La variable X ne peut plus prendre que les valeurs 2, 3 et 4 (il faut attendre deux tirages avant de pouvoir tirer les deux boules blanches), et $P(X=2) = \dfrac{2}{4} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$; $P(X=3) = \dfrac{2}{4} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{4} \times 23 \times 12 = \dfrac{1}{3}$; $P(X=4) = 3 \times \dfrac{2}{4} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$. On a cette fois-ci $E(X) = 2 \times \dfrac{1}{6} + 3 \times \dfrac{1}{3} + 4 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{10}{3}$; $E(X^2) = 4 \times \dfrac{1}{6} + 9 \times \dfrac{1}{3} + 16 \times 12 = \dfrac{35}{3}$, donc $V(X) = \dfrac{35}{3} - \dfrac{100}{9} = \dfrac{5}{9}$.

2. (a) Il faut attendre au moins r tirages avant de s'arrêter, et on peut bien sûr aller jusqu'à N tirages, donc $X(\Omega) = \{r; r+1; \dots; N\}$.

(b) On a effectué $k-1$ tirages, donc $\dbinom{N}{k-1}$ possibilités au total si on ne tient pas compte de l'ordre. Parmi ces possibilités il y en a $\dbinom{r}{r-1} \times \dbinom{N-r}{k-r}$. La probabilité de tirer la r-ème boule blanche au tirage suivant sachant qu'il ne reste plus qu'un boule blanche sur les $N-(k-1)$ restant dans l'urne est de $\dfrac{1}{N+1-k}$, donc $P(X) = \dfrac{\dbinom{r}{r-1} \times \dbinom{N-r}{k-r}}{\dbinom{N}{k-1}} \times \dfrac{1}{N+1-k}$.

(c) Simplifions donc : $P(X=k) = r \times \dfrac{(N-r)!}{(k-r)!(N-k)!} \times \dfrac{(k-1)!(N+1-k)!}{N!} \times \dfrac{1}{N+1-k} = r \times \dfrac{(N-r)!(k-1)!}{(k-r)!N!}$; et $\dfrac{\dbinom{k-1}{r-1}}{\dbinom{N}{r}} = \dfrac{(k-1)!}{(r-1)!(k-r)!} \times \dfrac{r!(N-r)!}{N!} = r \times \dfrac{(k-1)!(N-r)!}{(k-r)!N!}$.

Les deux quantités sont bien égales. Comme la somme de toutes ces probabilités doit donner 1, et que le dénominateur ne dépend pas de k, on obtient $\displaystyle\sum_{k=r}^{N} \binom{k-1}{r-1} = \binom{N}{r}$.

Un tout petit changement d'indice donne ensuite $\displaystyle\sum_{k=r-1}^{N-1} \binom{k}{r-1} = \binom{N}{r}$, soit encore $\displaystyle\sum_{k=r}^{N-1} \binom{k}{r} = \binom{N}{r+1}$. On en déduit que $\displaystyle\sum_{k=r}^{N} \binom{k}{r} = \binom{N+1}{r+1}$. De même, $\displaystyle\sum_{k=r}^{N-2} \binom{k+1}{r+1} = \binom{N}{r+2}$, donc $\displaystyle\sum_{k=r}^{N} \binom{k+1}{r+1} = \binom{N+2}{r+2}$.

(d) On a tous les éléments nécessaires :

$$E(X) = \frac{1}{\binom{N}{r}} \sum_{k=r}^{k=N} k \times \binom{k-1}{r-1} = \frac{1}{\binom{N}{r}} \sum_{k=r}^{k=N} \frac{k!}{(r-1)!(k-r)!}$$

$$= \frac{1}{\binom{N}{r}} \sum_{k=r}^{k=N} r \times \binom{k}{r} = \frac{r}{\binom{N}{r}} \times \binom{N+1}{r+1}$$

$$= r \times \frac{(N+1)!}{(r+1)!(N-r)!} \times \frac{r!(N-r)!}{N!} = \frac{r(N+1)}{r+1}.$$

(e) Similairement, $E(X(X+1)) = \dfrac{1}{\binom{N}{r}} \displaystyle\sum_{k=r}^{k=N} k(k+1) \times \binom{k-1}{r-1} = \dfrac{1}{\binom{N}{r}} \sum_{k=r}^{k=N} \dfrac{(k+1)!}{(r-1)!(k-r)!}$

$= \dfrac{1}{\binom{N}{r}} \displaystyle\sum_{k=r}^{k=N} r(r+1) \times \binom{k+1}{r+1} = \dfrac{r(r+1)}{\binom{N}{r}} \times \binom{N+2}{r+2}$

$= r(r+1) \times \dfrac{r!(N-r)!}{N!} \times \dfrac{(N+2)!}{(r+2)!(N-r)!} = \dfrac{r(N+1)(N+2)}{r+2}$.

Il ne reste plus qu'à calculer $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2 = \dfrac{r(N+1)(N+2)}{r+2} + \dfrac{r(N+1)}{r+1} - \dfrac{r^2(N+1)^2}{(r+1)^2} = r(N+1)\left(\dfrac{N+2}{r+2} + \dfrac{1-rN}{(r+1)^2}\right)$.

Exercice 7 (d'après Ecricome 2008) (***)

1. Si $n = 0$, on a bien sûr toujours $T_n = 0$. Dans le cas contraire, il y aura toujours au moins une case non vide, et au plus n après n lancers, sachant toutefois qu'on ne peut dépasser N cases non vides dans le cas où $N < n$ donc $T_n(\Omega) = \{1; 2; \dots; min(n, N)\}$.

2. Après 1 lancer, il y aura toujours exactement une case non vide (celle dans lequel on a lancé la boule), donc $T_1 = 1$ (variable aléatoire constante). Au deuxième lancer, soit on relance dans la même case qu'au premier, et on a alors $T_2 = 1$, soit on lance dans une autre et $T_2 = 2$. La probabilité de lancer dans la même case étant $\dfrac{1}{N}$, on a $P(T_2 = 1) = \dfrac{1}{N}$, et $P(T_2 = 2) = \dfrac{N-1}{N}$.

3. Pour avoir $T_n = 1$, il faut avoir obtenu à chaque lancer à partir du deuxième la même case qu'au premier lancer, ce qui se produit avec probabilité $\dfrac{1}{N}$ à chaque lancer, soit $P(T_n = 1) = \left(\dfrac{1}{N}\right)^{n-1}$.

   Le nombre de tirages donnant $T_n = 2$ est obtenu en choisissant deux cases parmi les N, puis en se laissant deux possibilités à chaque tirage, et en supprimant à la fin les 2 tirages où on a tiré toujours dans la même case, soit $\binom{N}{2} \times 2^n - 2 = 2^{n-1}N(N-1) - 2$. Ceci est à diviser par le nombre total de tirages, qui vaut N^n, donc $P(T_n = 2) = \dfrac{N(N-1)2^n - 2}{N^n}$.

   Si $n \leqslant N$, $T_n = n$ si on tombe dans une nouvelle case à chaque tirage, ce qui correspond à $N(N-1)\dots(N-n+1)$ tirages, soit $P(T_n = n) = \dfrac{N(N-1)\dots(N-n+1)}{N^n} = \dfrac{N!}{(N-n)!N^n}$.
   Si $n > N$, on ne peut pas avoir n cases non vides, donc $P(T_n = n) = 0$.

4. Les évènement $T_n = k$ forment un système complet d'évènements, donc on peut écrire en utilisant la formule des probabilités totales que $P(T_{n+1} = k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} P(T_n = i)P_{T_n=i}(T_{n+1})$.
   Mais parmi les probabilités conditionnelles apparaissant dans cette formule, seules deux sont non nulles : soit on avait déjà k cases non vides après n tirages et on a à nouveau tiré dans une de ces k cases (probabilité $P_{T_n=k}(T_{n+1} = k) = \dfrac{k}{N}$) ; soit on en avait $k-1$ non vides et on a tiré dans une des $N-(k-1)$ cases restantes : $P_{T_n=k-1}(T_{n+1} = k) = \dfrac{N-k+1}{N}$. La formule demandée est donc exacte.

5. (a) On a $G_n(1) = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} P(T_n = k) = 1$.

(b) Calculons : $E(T_n) = \sum_{k=1}^{k=n} kP(T_n = k)$. Or, en dérivant G_n, on obtient $G_n'(x) = \sum_{k=1}^{k=n} kP(T_n = k)x^{k-1}$. En remplaçant par 1, on tombe exactement sur $E(T_n)$, qui est donc égale à $G_n'(1)$.

(c) Notons pour commencer que la formule de la question 4 reste en fait valable pour $k = n+1$, puis sommons ces égalités :

$$G_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{k=n+1} P(T_{n+1} = k)x^k = \sum_{k=1}^{k=n+1} \left(\frac{k}{N}P(T_n = k) + \frac{N-k+1}{N}P(T_n = k-1)\right) x^k$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{k=n+1} kP(T_n = k)x^k + (N-k+1)P(T_n = k-1)x^k$$

$$= \frac{x}{N}\sum_{k=1}^{n} kP(T_n = k)x^{k-1} + \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{k=n}(N-k)P(T_n = k)x^{k+1}$$

$$= \frac{x}{N}G_n'(x) + \frac{x}{N}\sum_{k=1}^{k=n} NP(T_n = k)x^k + \frac{x^2}{N}\sum_{k=1}^{k=n} kP(T_n = k)x^{k-1}$$

$= \frac{x}{N}G_n'(x) + xG_n(x) - \frac{x^2}{N}G'n(x)$, ce qui correspond bien à la formule annoncé (les indices disparaissant dans certaines sommes du calcul correspondent à des termes nuls).

(d) Dérivons donc : $G_{n+1}'(x) = \frac{1}{N}(1-2x)G_n'(x) + \frac{1}{N}(x - x^2)G_n''(x) + G_n(x) + xG_n'(x)$. En prenant $x = 1$ (ce qui a le bon goût d'annuler le terme faisant intervenir la dérivée seconde) et en réutilisant les résultats précédents, on a $E(T_{n+1}) = -\frac{1}{N}E(T_n) + 1 + E(T_n) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)E(T_n) + 1$.

(e) Notons $u_n = E(T_n)$. La suite (u_n) est arithémtico-géométrique, d'équation de point fixe $x = \left(1 - \frac{1}{N}\right)x + 1$, donnant $x = N$. Posons donc $v_n = u_n - N$, alors $v_{n+1} = u_{n+1} - N = \left(1 - \frac{1}{N}\right)u_n + 1 - N = \frac{N-1}{N}u_n - (N-1) = \frac{N-1}{N}(u_n - N) = \frac{N-1}{N}v_n$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{N-1}{N}$ et de premier terme $v_1 = u_1 - N = 1 - N$, donc $v_n = (1-N)\left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-1} = -\frac{(N-1)^n}{N^{n-1}}$. On en déduit que $u_n = N - \frac{(N-1)^n}{N^{n-1}} = \frac{N^n - (N-1)^n}{N^{n-1}} = N\left(1 - \frac{(N-1)^n}{N^n}\right) = N\left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right)$. Lorsque n tend vers $+\infty$, $\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n$ va tendre vers 0, la parenthèse vers 1, et l'espérance de T_n vers N, ce qui est intuitivement normal.

Sujet d'annales : Ecricome 2002

ECE3 Lycée Carnot

19 mars 2010

Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernables au toucher. On y prélève une boule, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne avec c boules de la couleur de la boule tirée. On répète cette épreuve, on réalise ainsi une succession de n tirages ($n \geqslant 2$).

I. Étude du cas $c = 0$.

On effectue donc ici n tirages avec remise de la boule dans l'urne.

On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n tirages et Y la variable aléatoire réelle définie par :

$$\begin{cases} Y = k & \text{si l'on obtient une boule blanche pour la première fois au } k^{\text{ème}} \text{ tirage.} \\ Y = 0 & \text{si les } n \text{ boules tirées sont noires.} \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de X. Donner la valeur de $E(X)$ et de $V(X)$.
2. Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, déterminer la probabilité $P(Y = k)$ de l'événement $(Y = k)$, puis déterminer $P(Y = 0)$.
3. Vérifier que :
$$\sum_{k=0}^{n} P(Y = k) = 1.$$
4. Pour $x \neq 1$ et n entier naturel non nul, montrer que :
$$\sum_{k=1}^{n} kx^k = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}.$$
5. En déduire $E(Y)$.

II. Étude du cas $c \neq 0$.

On considère les variables aléatoires $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ définies par :

$$\begin{cases} X_i = 1 & \text{si on obtient une boule blanche au } i^{\text{ème}} \text{ tirage.} \\ X_i = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On définit alors, pour $2 \leqslant p \leqslant n$, la variable aléatoire Z_p, par :

$$Z_p = \sum_{i=1}^{p} X_i.$$

1. Que représente la variable Z_p ?

2. Donner la loi de X_1 et l'espérance $E(X_1)$ de X_1.
3. Déterminer les probabilités conditionnelles $P_{X_1=0}(X_2 = 0)$; $P_{X_1=0}(X_2 = 1)$; $P_{X_1=1}(X_2 = 0)$ et $P_{X_1=1}(X_2 = 1)$. En déduire la loi de X_2 puis l'espérance $E(X_2)$.
4. Déterminer la loi de probabilité de Z_2.
5. Déterminer l'univers image $Z_p(\Omega)$ de Z_p.
6. Soit $p \leqslant n-1$.
   (a) Déterminer $P(X_{p+1} = 1\,/Z_p = k)$ pour $k \in Z_p(\Omega)$.
   (b) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que :
   $$P(X_{p+1} = 1) = \frac{1 + cE(Z_p)}{2 + pc}.$$
   (c) En déduire que X_p est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
   (On raisonnera par récurrence sur p : les variables X_1, X_2, ..., X_p étant supposées suivre une loi de de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, et on calculera $E(Z_p)$).

Corrigé du sujet Ecricome 2002

I. Étude du cas $c = 0$.

1. On cherche à compter le nombre de boules blanches tirées lors de n tirages avec remise. La variable X suit une loi binômiale de paramètre $\left(n, \frac{1}{2}\right)$.

2. On a $Y = 0$ si on tire n boules noires, donc $P(Y = 0) = \frac{1}{2^n}$. Et on a $Y = k$ si la séquence de tirages commence par $NN \dots NB$, avec $k - 1$ noires au départ, ce qui a une probabilité $\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^k}$.

3. En effet, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(Y = k) = \frac{1}{2^n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2}\frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} + 1 - \frac{1}{2^n} = 1$.

4. Une façon de faire est de prouver par récurrence la propriété P_n : $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} kx^k = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}$.

   Pour $n = 1$, la somme de gauche se réduit à x, et le quotient de droite vaut $\frac{x^3 - 2x^2 + x}{(1-x)^2} = \frac{x(x-1)^2}{(1-x)^2} = x$, donc P_1 est vraie.

   Supposons donc P_n vérifiée, on a alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n+1} kx^k = \sum_{k=1}^{k=n} kx^k + (n+1)x^{n+1} = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2} + (n+1)x^{n+1}$ (on a ici utilisé l'hypothèse de récurrence). Mettons tout cela au même dénominateur pour obtenir $\frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x + (n+1)x^{n+1}(1 - 2x + x^2)}{(1-x)^2}$
   $= \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x + (n+1)x^{n+1} - 2(n+1)x^{n+2} + (n+1)x^{n+3}}{(1-x)^2}$
   $= \frac{x - (n+2)x^{n+2} + (n+1)x^{n+3}}{(1-x)^2}$. Ceci correspond exactement à la formule qu'on doit obtenir pour que P_{n+1} soit vérifiée, et achève donc la récurrence.

5. On applique le résultat précédent. On a $\displaystyle E(Y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = \frac{\frac{n}{2^{n+2}} - \frac{n+1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2}}{(1 - \frac{1}{2})^2}$
   $= \frac{1}{2^n}\left(n - 2(n+1) + 2^{n+1}\right) = 2 - \frac{n+2}{2^n}$

II. Étude du cas $c \neq 0$.

1. Z_p est simplement le nombre de boules blanches tirées après p tirages.

2. Pour X_1, il n'y a que deux boules dans l'urne, on a $P(X_1 = 1) = P(X_1 = 0) = \frac{1}{2}$ et donc $E(X_1) = \frac{1}{2}$.

3. Si on suppose $X_1 = 0$, c'est-à-dire si une boule noire a été tirée au premier tirage, on se retrouve avec 1 boule blanche et $c+1$ boules noires au deuxième tirage, donc $P_{X_1=0}(X_2 = 0) = \frac{c+1}{c+2}$ et $P_{X_1=0}(X_2 = 1) = \frac{1}{c+2}$. De même, on a $P_{X_1=1}(X_2 = 0) = \frac{1}{c+2}$ et $P_{X_1=1}(X_2 = 1) = \frac{c+1}{c+2}$.
   On en déduit via la formule des probabilités totales (les évènements $X_1 = 0$ et $X_1 = 1$ formant un système complet d'évènements) que $P(X_2 = 1) = P(X_1 = 0) \times P_{X_1=0}(X_2 = 1) + P(X_1 = 1) \times P_{X_1=1}(X_2 = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{c+2} + \frac{1}{2} \times \frac{c+1}{c+2} = \frac{1}{2}$. De même, $P(X_2 = 0) = \frac{1}{2}$. La loi de X_2 est donc la même que celle de X_1, et $E(X_2) = \frac{1}{2}$.

4. On a $Z_2(\Omega) = \{0; 1; 2\}$ et $P(Z_2 = 0) = P((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0)) = P(X_1 = 0) \times P_{X_1=0}(X_2 = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{c+1}{c+2} = \frac{c+1}{2(c+2)}$; $P(Z_2 = 1) = P(X_1 = 1) \times P_{X_1=1}(X_2 = 0) + P(X_1 = 0) \times P_{X_1=0}(X_2 = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{c+2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{c+2} = \frac{1}{c+2}$; $P(Z_2 = 2) = \frac{c+1}{2c+4}$.
5. On a bien sûr $Z_p(\Omega) = \{1; 2; \dots; p\}$.
6. (a) Si on fait l'hypothèse que $Z_p = k$, on a donc tiré k boules blanches lors des p premiers tirages, et par conséquent $p-k$ boules noires lors de ces même tirages. On a donc ajouté à k reprises c boules blanches dans l'urne, ce qui nous fait un total de $kc+1$ boules blanches dans l'urne avant le tirage numéro $p+1$ (il y en avait une au départ). De même, on a ajouté $p-k$ fois c boules noires et on se trouve avec $(p-k)c+1$ boules noires. Soit un total de $kc+1+(p-k)c+1 = pc+2$ boules dans l'urne, ce qui est tout à fait normal puisqu'on avait deux boules au départ et qu'on en ajoute p à chaque tirage. La probabilité de tirer une boule blanche au tirage $p+1$ vaut alors $P_{Z_p=k}(X_{p+1} = 1) = \frac{kc+1}{pc+2}$.

   (b) Les évènements $Z_p = 0$; $Z_p = 1$; ...; $Z_p = p$ forment un système complet d'évènements. On peut alors appliquer la formule des probabilités totales puis exploiter le calcul de la question précédente pour écrire : $P(X_{p+1} = 1) = \sum_{k=0}^{k=p} P(Z_p = k) \times P_{Z_p=k}(X_{p+1} = 1) = \sum_{k=0}^{k=p} \frac{kc+1}{pc+2} P(Z_p = k) = \frac{c}{pc+2} \sum_{k=0}^{k=p} kP(Z_p = k) + \frac{1}{pc+2} \sum_{k=0}^{k=p} P(Z_p = k) = \frac{cE(Z_p)}{pc+2} + \frac{1}{pc+2}$ (la dernière somme étant nulle car elle représente la somme des probabilités d'une loi de probabilité).

   (c) Prouvons donc par récurrence la propriété P_n : $P(X_1 = 1) = P(X_2 = 2) = \dots = P(X_n = 1) = \frac{1}{2}$. La propriété est vraie au rang 1 (on l'a constaté en début de problème), supposons la vérifiée au rang n. On en déduit que $E(Z_p) = E(\sum_{k=1}^{k=n} X_k) = \sum_{k=1}^{k=n} E(X_k) = \frac{n}{2}$, puis en utilisant le résultat de la question précédente que $P(X_{n+1} = 1) = \frac{c\frac{n}{2}+1}{nc+2} = \frac{1}{2}$, ce qui achève la récurrence.

Feuille d'exercices n°21 : Lois usuelles finies

ECE3 Lycée Carnot

19 mars 2010

Exercice 1 (*)

On lance des fusées vers Saturne. À chaque lancer, la probabilité de réussite est de 0.7. On effectue dix lancers successifs, quelle est la probabilité d'obtenir k lancers réussis ? Quel est le nombre moyens de lancers réussis ? Combien faudrait-il de lancers pour avoir 98% de chances qu'au moins un lancer ait réussi ?

Exercice 2 (*)

Dans une urne se trouvent 10 boules rouges et 5 vertes.

1. On pioche sans remise six boules dans l'urne et on note R le nombre de boules rouges obtenues et V le nombre de vertes. Donner la loi, l'espérance et la variance de R et de V (pas de calcul !).
2. Même question lorsque les tirages sont effectués avec remise.
3. Dans le cas où les tirages sont effectués sans remise, on note X le nombre de tirages nécessaire avant de piocher une première boule rouge. Déterminer la loi de X.

Exercice 3 (**)

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n,p)$. On définit $Y = \dfrac{1}{1+X}$, donner l'espérance de Y. On suppose ensuite que $p = \dfrac{1}{2}$ et on pose $Z = \dfrac{a^X}{2n}$, calculer $E(Z)$.

Exercice 4 (*)

Les bouteilles de vin du supermarché du coin ont une chance sur 15 d'être bouchonnées et inbuvables (indépendamment les unes des autres). Si on achète un lot de n bouteilles, à partir de quelle valeur de n aura-t-on en moyenne au moins une bouteille bouchonnée ?

Exercice 5 (***)

On désire analyser le sang d'une population de N individus pour détecter la présence d'un virus qui affecte les individus de la population avec une probabilité p. On a pour cela deux possibilités : soit on analyse le sang de chaque personne ; soir on regroupe les personnes en groupes de n, dont on analyse le sang en groupe. Si le test du groupe est positif, on analyse individuellement chaque individu du groupe.

1. On note X le nombre de groupes positifs. Donner la loi de X.

2. On note Y le nombre total d'analyses effectuées avec la seconde méthode. Calculer en fonction de N, n et p l'espérance de Y.
3. Comparez les deux méthodes dans le cas où $N = 1000$, $n = 100$ et $p = 0.01$.

Exercice 6 (**)

Un jeu de 32 cartes est truqué : on remplace une carte autre que l'as de pique par un deuxième As de pique. On tire au hasard dans ce jeu (simultanément) n cartes.

1. Quelle est (en fonction de n), la probabilité de déceler la supercherie ?
2. On suppose $n = 4$ et on tire plusieurs fois de suite 4 cartes au hasard dans le jeu (en remettant à chaque fois les cartes après le tirage). Quel est le nombre minimum de tirages à effectuer avant que la probabilité de découvrir la supercherie n'atteigne 95% ?

Exercice 7 (**)

Une piste rectiligne est divisée en cases numérotées $0; 1; \ldots; k$, de gauche à droite. Une puce se déplace vers la droite de une ou deux cases au hasard à chaque saut. Au départ, elle est sur la case 0. Soit X_n le numéro de la case occupée par la puce après n sauts et Y_n le nombre de fois où la puce a sauté d'une case au cours des n premiers sauts.

1. Donner la loi, l'espérance et la variance de Y_n.
2. En déduire celles de X_n.

Exercice 8 (***)

Une secrétaire effectue n appels pour tenter de joindre n correspondants distincts. Pour chaque appel, elle a une probabilité p d'obtenir son correspondant, et $q = 1 - p$ de ne pas le joindre.

1. On note X le nombre de correspondants obtenus. Quelle est la loi de X ? Donner son espérance et sa variance.
2. La secrétaire tente une deuxième fois de joindre les $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre la première fois. On note Y le nombre de correspondants joints à la deuxième tentative, et $Z = X + Y$. Quelles sont les valeurs que peut prendre Z ?
3. Calculer $P(Z = 0)$ et $P(Z = 1)$ (pour cette dernière probabilité, on doit obtenir $npq^{2n-2}(1+q)$).
4. Démontrer que $P(Z = l) = \displaystyle\sum_{k=0}^{l} P((X = k) \cap (Y = l - k))$.
5. Calculer $P_{X=k}(Y = h)$ pour les valeurs de k et h pour lesquelles cela a un sens, en déduire $P(Z = l)$.
6. Montrer que $\displaystyle\binom{n}{k}\binom{n-k}{l-k} = \binom{n}{l}\binom{l}{k}$. En déduire que $P(Z = l) = \displaystyle\binom{n}{l} p^l (1 + q)^l (q^2)^{n-l}$.
7. En constatant que $p(1 + q) = 1 - q^2$, reconnaitre la loi suivie par Z.

Corrigé de la feuille d'exercices n°21

Exercice 1 (*)

Le nombre X de lancers réussis suit une loi binomiale de paramètre $(n = 10; p = 0.7)$. On a donc $P(X = k) = \binom{10}{k}(0.7)^k(0.3)^{10-k}$ et $E(X) = np = 7$. La probabilité de n'avoir aucun lancer réussi sur q tentatives vaut 0.3^q. Elle passe en-dessous de 2% lorsque $0.3^q \leqslant 0.02$, soit $q \ln 0.3 \leqslant \ln 0.02$, donc $q \geqslant \dfrac{\ln 0.02}{\ln 0.3} \simeq 3.25$. Il suffit donc de quatre lancers pour avoir plus de 98% de chance qu'un lancer au moins réussisse.

Exercice 2 (*)

1. Il s'agit de l'exemple standard de loi hypergéométrique. Ici le paramètre de R est $\left(15; 6; \dfrac{2}{3}\right)$ (nombre total de boules; nombre de tirages; proportion de boules rouges). On a donc (si $1 \leqslant k \leqslant 6$, sinon la probabilité est nulle) $P(R = k) = \dfrac{\binom{10}{k}\binom{5}{6-k}}{\binom{5}{15}}$; $E(R) = 6 \times \dfrac{2}{3} = 4$ et $V(R) = 6 \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{15-6}{15-1} = \dfrac{6}{7}$. Pour V, on utilise par exemple que $V = 6 - R$, donc $P(V = k) = P(R = 6 - k)$; $E(V) = 6 - 4 = 2$ et $V(V) = V(R) = \dfrac{6}{7}$.
2. Cette fois-ci, on a une loi binomiale de paramètre $\left(6; \dfrac{2}{3}\right)$. On a donc
$P(R = k) = \dbinom{6}{k}\left(\dfrac{2}{3}\right)^k \dfrac{1}{3^{n-k}} = \dbinom{6}{k}\dfrac{2^k}{3^n}$; $E(R) = 4$ et $V(R) = 6 \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{3}$.
3. On a $X(\Omega) = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ puisqu'on tirera forcément une boule rouge au sixième tirage si on n'a pas eu avant. Sans difficulté, on calcule à l'aide de la formule des probabilités composées $P(X = 1) = \dfrac{2}{3}$; $P(X = 2) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{10}{14} = \dfrac{5}{21}$; $P(X = 3) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{4}{14} \times \dfrac{10}{13} = \dfrac{20}{273}$; $P(X = 4) = \dfrac{1}{3}\dfrac{4}{14} \times \dfrac{3}{13} \times \dfrac{10}{12} = \dfrac{5}{273}$; $P(X = 5) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{4}{14} \times \dfrac{3}{13} \times \dfrac{2}{12} \times \dfrac{10}{11} = \dfrac{10}{3003}$ et $P(X = 6) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{4}{14} \times \dfrac{3}{13} \times \dfrac{2}{12} \times \dfrac{1}{11} = \dfrac{1}{3003}$ (pour les curiex, cela donne une espérance $E(X) \simeq 1.42$).

Exercice 3 (**)

On a $X(\Omega) = \{0; 1; 2; \dots; n\}$, et $P(X = k) = \dbinom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$. D'après le théorème du transfert, on a donc $E(Y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k}\frac{p^k(1-p)^{n-k}}{1+k}$. On aimerait bien se débarasser du $k+1$ au dénominateur, ça tombe bien puisque $\dfrac{1}{k+1}\dbinom{n}{k} = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{n+1}{k+1}$. On a donc $E(Y) = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n}\binom{n+1}{k+1}p^k(1-p)^{n-k} = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{j=1}^{j=n+1}\binom{n+1}{j}p^{j-1}(1-p)^{n-j+1}$. En multipliant le tout par p, on fait apparaitre un binome de Newton à l'exception du premier terme qui a disparu dans le décalage d'indice ! On a donc $E(Y) = \dfrac{1}{p(n+1)}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\binom{n+1}{j}p^j(1-p)^{n+1-j} = \dfrac{1}{p(n+1)}(1-(1-p)^{n+1})$. Notez que ça ne donne pas du tout $\dfrac{1}{1+E(X)}$.

Si on suppose que $p = \frac{1}{2}$, on a simplement $P(X = k) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}$. On en déduit, toujours avec le transfert, que $E(Z) = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} \frac{a^k}{2n \times 2^n} = \frac{(1+a)^n}{2n \times 2^n} = \frac{1}{2n} \times \left(\frac{1+a}{2}\right)^n$ (on a simplement utilisé la formule du binome de Newton).

Exercice 4 (*)

Notons X la variable aléatoire donnant le nombre de bouteilles bouchonnées dans un lot de n bouteilles. On a $X \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{15}\right)$ (on répète n fois une situation qui se produit avec probabilité $\frac{1}{15}$ et on compte le nombre d'occurences). Le nombre moyen de bouteilles bouchonnées dans le lot est $E(X) = \frac{n}{15}$. Il atteindra donc 1 pour $n = 15$.

Exercice 5 (***)

1. Commençons par calculer la probabilité qu'un groupe soit positif. Pour cela, il est plus simple de passer par le complémentaire : le groupe est testé négatif si tous les individus du groupe sont négatifs, ce qui se produit avec une probabilité $(1-p)^n$. Un groupe est donc positif avec une probabilité $1-(1-p)^n$. Ensuite, la loi du nombre de groupes positifs est une loi binomiale de paramètre $\left(\frac{N}{n}; 1-(1-p)^n\right)$ (puisqu'il y a $\frac{N}{n}$ groupes).
2. Dans un premier temps, on effectue $\frac{N}{n}$ analyses (une par groupe). Parmi celles-ci, il y en a en moyenne $(1-(1-p))^n \times \frac{N}{n}$ de positives (espérance de la variable aléatoire étudiée à la question précédente). Pour chaque groupe positif, on doit effectuer n analyses supplémentaires. On a donc au total en $E(Y) = \frac{N}{n} + (1-(1-p)^n)N$ analyses à faire.
3. Si $N = 1\ 000$, la première méthode conduit à faire 1 000 analyses. Avec la deuxième méthode, on en a en moyenne $10 + 1\ 000(1 - 0.99^{100}) \simeq 644$.

Exercice 6 (**)

1. Le nombre de tirages possibles de n cartes dans un jeu de 32 vaut $\binom{32}{n}$. Ce jeu est par ailleurs sonstitué de deux As de pique et de 30 cartes « normales ». Si on veut découvrir la supercherie, il faut tirer parmi nos n cartes les deux As de pique (pas de choix) et $n-2$ cartes quelconques parmi les 30 restantes, ce qui fait $\binom{30}{n-2}$ possibilités. La probabilité de découvrir la supercherie est donc de $\dfrac{\binom{30}{n-2}}{\binom{32}{n}}$.
2. Dans le cas où $n = 4$, la probabilité de découvrir la supercherie sur un tirage est de $\dfrac{\binom{30}{2}}{\binom{32}{4}} = \frac{30 \times 29}{2} \times \frac{4 \times 3 \times 2}{32 \times 31 \times 30 \times 29} = \frac{3}{248}$. La probabilité de **ne pas** découvrir la supercherie après p

tirages est donc de $\left(\frac{245}{248}\right)^p$, et on souhaite savoir pour quelle valeur de p cette dernière probabilité devient inférieure à 5%. On résout donc $\left(\frac{245}{248}\right)^p \leqslant 0.05 \Leftrightarrow p \geqslant \frac{\ln 0.05}{\ln 245 - \ln 248} \simeq 246.1$. Il faut donc attendre 247 tirages avant d'être sûr à 95% que la supercherie soit découverte ! C'est beaucoup. Il faut déjà attendre 57 tirages pour avoir plus d'une chance sur deux de découvrir le truc...

Exercice 7 (**)

1. Puisqu'on a une probabilité $\frac{1}{2}$ à chaque saut d'effectuer un saut d'une cases, et qu'on répète l'expérience n fois, on aura $Y_n \sim \mathcal{B}\left(n; \frac{1}{2}\right)$. En particulier, $E(Y_n) = \frac{n}{2}$ et $V(Y_n) = n \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{n}{4}$.
2. Il suffit de constater que, si on a effectué Y_n saut d'une case, on en a effctué $n - Y_n$ de deux cases, et qu'on a donc parcouru $Y_n + 2(n - Y_n) = 2n - Y_n$ cases lors des n sauts. Autrement dit, on a tout simplement $X_n = 2n - Y_n$. On en déduit que $X_n(\Omega) = \{n; n+1; \dots; 2n\}$, que $P(X_n = k) = P(Y_n = 2n - k) = \frac{n}{2n-k} \times \frac{1}{2^n}$; puis $E(X_n) = E(2n - Y_n) = 2n - \frac{n}{2} = \frac{3n}{2}$; enfin $V(X_n) = V(2n - Y_n) = V(Y_n) = \frac{n}{4}$.

Exercice 8 (***)

1. C'est une loi binomiale de paramètre (n, p). On a en particulier $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.
2. La variable Z représente le nombre total de correspondants obtenus, on a donc $Z(\Omega) = \{0; 1; \dots; n\}$.
3. On a $Z = 0$ si $X = 0$ et $Y = 0$, donc si on fait deux tours complets sans qu'un seul appel réussisse. On a donc $P(Z = 0) = (1-p)^{2n}$. Pour $Z = 1$, on a soit $X = 0$ et $Y = 1$, soit $X = 1$ et $Y = 0$, et attention, les deux possibilités n'ont pas la même probabilité ! Si $X = 0$ et $Y = 1$, un appel a réussi parmi les n derniers, et on a fait $2n$ appels au total, soit une proba de $(1-p)^n \times \binom{n}{1} p(1-p)^{n-1} = npq^{2n-1}$. Pour le cas où $X = 1$ et $Y = 0$, un appel parmi les n premiers a réussi, et on en a retenté $n - 1$ qui ont raté, soit une probabilité de $\binom{n}{1} p(1-p)^{n-1} \times (1-p)^{n-1} = npq^{2n-2}$. Au total, $P(Z = 1) = npq^{2n-2}(1+q)$.
4. Comme précédemment, si on a l appels réussis au total, c'est qu'on en a eu k (avec $0 \leqslant k \leqslant l$) au premier tour, et $l - k$ au second tour, autrement dit que $X = k$ et $Y = l - k$. On a donc bien $P(Z = l) = \sum_{k=0}^{k=l} P((X = k) \cap (Y = l - k))$.
5. On sait que $X = k$, il y a donc $n - k$ appels à retenter au deuxième tour. La probabilité conditionnelle $P_{X=k}(Y = h)$ est donc la probabilité de réussir h appels parmi $n - k$. Cette probabilité est non nulle si $h \in \{0; 1; \dots; n-k\}$ et elle vaut alors $\binom{n-k}{h} p^h (1-p)^{n-k-h}$. On a donc $P(Z = l) = \sum_{k=0}^{k=l} P(X = k) P_{X=k}(Y = l - k) = \sum_{k=0}^{k=l} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \binom{n-k}{l-k} p^{l-k} q^{n-l} = \sum_{k=0}^{k=l} \binom{n}{k} \binom{n-k}{l-k} p^l q^{2n-k-l}$.

6. Il suffit de calculer $\binom{n}{k}\binom{n-k}{l-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{(n-k)!}{(l-k)!(n-l)!} = \frac{n!}{k!(l-k)!(n-l)!}$ et $\binom{n}{l}\binom{l}{k} = \frac{n!}{l!(n-l)!} \times \frac{l!}{k!(l-k)!} = \frac{n!}{(n-l)!k!(l-k)!}$. On peut utiliser cette égalité pour simplifier l'expression obtenue à la question précédente :
$P(Z=l) = \sum_{k=0}^{k=l} \binom{n}{l}\binom{l}{k} p^l q^{2n-k-l} = \binom{n}{l} p^l q^{2n-2l} \sum_{k=0}^{k=l} \binom{l}{k} q^{l-k} = \binom{n}{l} p^l (1+q)^l (q^2)^{n-l}$.

7. Comme $p(1+q) = (1-q)(1+q) = 1-q^2$, on a $P(Z=l) = \binom{n}{l}(1-q^2)^l(q^2)^{n-l}$. La variable aléatoire Z suit dont une loi binomiale de paramètre $(n; 1-q^2)$.

Feuille d'exercices n°22 : Intégration

ECE3 Lycée Carnot

26 mars 2010

Exercice 1 (* à **)

Calculer les intégrales suivantes :

- $I_1 = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t^2}\,dt$ • $I_2 = \displaystyle\int_e^3 \frac{dx}{x\ln x}$ • $I_3 = \displaystyle\int_1^2 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,dx$ • $I_4 = \displaystyle\int_0^2 \left|x^2-3x+2\right|\,dx$
- $I_5 = \displaystyle\int_0^4 \sqrt{x}(x-2\sqrt{x})\,dx$ • $I_6 = \displaystyle\int_0^2 z^4 e^{-z^5}\,dz$ • $I_7 = \displaystyle\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{5}{2}} E(x)\,dx$
- $I_8 = \displaystyle\int_1^e \frac{(lns)^5}{s}\,ds$ • $I_9 = \displaystyle\int_0^{\frac{\ln 2}{2}} \frac{e^{2t}}{e^{2t}+2}\,dt$ • $I_{10} = \displaystyle\int_0^2 x^2(x^3+1)^{\frac{3}{2}}\,dx$
- $I_{11} = \displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\exp(\frac{-3}{v^2})}{v^3}\,ds$ • $I_{12} = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1-q}{(q^2-2q)^4}\,dq$ • $I_{13} = \displaystyle\int_1^4 \frac{e^{-\sqrt{z}}}{\sqrt{z}}\,dz$

Exercice 2 (**)

Calculer à l'aide d'intégrations par parties les intégrales suivantes :

- $I_1 = \displaystyle\int_{-1}^1 xe^{3x}dx$ • $I_2 = \displaystyle\int_1^4 \sqrt{3s}\ln s ds$ • $I_3 = \displaystyle\int_1^e z^2(\ln z)^3 dz$
- $I_4 = \displaystyle\int_1^{e^2} (2x^3+1)\ln x\,dx$ • $I_5 = \displaystyle\int_0^1 (1+x+x^2)e^{2x}dx$
- $I_6 = \displaystyle\int_1^2 \ln\left(1+\frac{1}{t}\right)dt$ • $I_7 = \displaystyle\int_1^2 (1+2s)\ln\left(1+\frac{1}{s}\right)ds$

Exercice 3 (**)

Calculer en utilisant le changement de variable indiqué (ou un changement de variable affine si rien n'est indiqué) les intégrales suivantes :

- $I_1 = \displaystyle\int_0^1 (t-2)(t+1)^5 dt$ • $I_2 = \displaystyle\int_0^2 \frac{t^2}{t^3+8}dt$ (poser $u = t^3+8$)
- $I_3 = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x(x+1)}dx$ (poser $t = \dfrac{x}{x+1}$)
- $I_4 = \displaystyle\int_1^2 \frac{ds}{s(s^3+1)}$ (poser $u = s^3$ et calculer $\dfrac{1}{u-1} - \dfrac{1}{u}$)
- $I_5 = \displaystyle\int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}dt$ (poser $u = \sqrt{t}$) • $I_6 = \displaystyle\int_1^e \frac{dt}{t\sqrt{\ln t+1}}$ (poser $u = \ln t$)

Exercice 4 (* à **)

Donner les primitives de chacune des fonctions suivantes :

- $f_1 : t \mapsto 1 - 2e^{-t}$
- $f_2 : t \mapsto \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$
- $f_3 : t \mapsto \dfrac{\ln t}{t}$
- $f_4 : t \mapsto \dfrac{t^2}{t^3+2}$
- $f_5 : t \mapsto (t^2 - t + 1)e^{-t}$
- $f_6 : t \mapsto (\ln t)^3$
- $f_7 : t \mapsto \dfrac{e^{2t}}{e^t+1}$ (on posera $u = e^t$)
- $f_8 : t \mapsto \dfrac{\ln t}{t + t(\ln t)^2}$ (on posera $u = \ln t$)

Exercice 5 (*)

Soit f la fonction définie sur $]-3;2[$ par $f(x) = \dfrac{3x^2 - 4x - 25}{x^2 + x - 6}$.

1. Montrer qu'on peut écrire f sous la forme $f(x) = a + \dfrac{b}{x-2} + \dfrac{c}{x+3}$.
2. En déduire l'expression de la primitive de f s'annulant en 1.

Exercice 6 (**)

On considère, $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2$, l'intégrale $I_{m,n} = \displaystyle\int_0^1 x^n(1-x)^p \, dx$.

1. Calculer $I_{m,0}$ pour toute valeur de m.
2. Établir une relation entre $I_{m,n+1}$ et $I_{m+1,n}$.
3. En déduire une expression simple de $I_{m,n}$.

Exercice 7 (**)

On s'intéresse à la suite d'intégrales définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x dx$.

1. Montrer que la suite (I_n) converge vers 0.
2. Montrer que $I_n = \dfrac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$.
3. En déduire que $e = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

Exercice 8 (***)

On définit deux suites d'intégrales de la façon suivante : $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln(1+x^2) \, dx$ et $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} \, dx$ (pour $n \geqslant 1$).

1. Calculer J_1 et montrer que $\forall n \geqslant 1$, $0 \leqslant J_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
2. En déduire la limite de J_n.
3. Montrer à l'aide d'une intégration par partie que $I_n = \dfrac{\ln 2}{n+1} - \dfrac{2}{n+1} J_{n+2}$.
4. En déduire la convergence et la limite de (I_n).
5. Déterminer un équivalent de I_n.

Exercice 9 (***)

On définit, pour tout entier n, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_1^e x^2(\ln x)^n dx$.

1. Calculer I_1.
2. Montrer que sur $[1; e]$, on a $(\ln x)^{n+1} \leqslant (\ln x)^n$, et en déduire le sens de variation de I_n.
3. Montrer que (I_n) est convergente.
4. Montrer que sur $[1; e]$, $0 \leqslant \ln x \leqslant \dfrac{x}{e}$. En déduire la limite de I_n.
5. Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $I_{n+1} = \dfrac{e^3}{3} - \dfrac{n+1}{3} I_n$. En déduire un équivalent de I_n.

Exercice 10 (**)

Dériver chacune des fonctions suivantes :

- $f_1(x) = \displaystyle\int_0^{2x} e^{-3\sqrt{2\ln t}} dt$
- $f_2(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{1+t+t^2} dt$
- $f_3(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} \sqrt{1+t^2} dt$
- $f_4(x) = \displaystyle\int_{-\sqrt{x}}^{e^x} \frac{t}{\ln t} dt$

Exercice 11 (***)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t} dt$.

1. Montrer que f est dérivable et déterminer sa dérivée. En déduire le tableau de variations de f.
2. On pose désormais $g(x) = f(x) - \ln x$. Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}_+^*$ et en déduire son signe.
3. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

Exercice 12 (**) à (***)

Déterminer les limites de chacune des suites suivantes en utilisant des sommes de Riemann.

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2} \qquad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}} \qquad w_n = \left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Exercice 13 (EDHEC 2004) (**)

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n} dt$.

1. Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, justifier l'existence de u_n.
2. Calculer u_0 et u_1.
3. (a) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ln 2$.

(c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4. (a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, écrire $\ln 2 - u_n$ sous la forme d'une intégrale.

   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln 2 - u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

   (c) Donner la limite de la suite (u_n).

Exercice 14 (ESCP 92) (****)

Pour tout entier naturel k on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}^+$ par la relation

$$f_k(x) = \int_0^1 t^k e^{-tx} dt$$

1. (a) Montrer que pour tout entier naturel k, la fonction f_k est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

   (b) Etudier la suite $(f_k(0))_{k\geqslant 0}$. En déduire, pour tout réel positif x, la limite de la suite $(f_k(x))_{k\geqslant 0}$.

2. (a) Soit $x > 0$. Etablir que $f_{k+1}(x) = \dfrac{k+1}{x} f_k(x) - \dfrac{e^{-x}}{x}$ pour tout $k \geqslant 0$.

   (b) Expliciter les fonctions f_0, f_1 et f_2.

   (c) Montrer que, $f_0(x) \underset{+\infty}{\sim} 1/x$.

   (d) A l'aide de la relation établie au c) , montrer que pour tout k, $f_k(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{k!}{x^{k+1}}$.

3. (a) En effectuant un changement de variable, montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x > 0$, $f_k(x) = \dfrac{1}{x^{k+1}} \displaystyle\int_0^x u^k e^{-u}\, du$.
   En déduire que f_k est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer sa dérivée.

   (b) Trouver une relation simple entre f_k' et f_{k+1}.

   (c) Montrer que pour tout réel $\forall y \geqslant 0$, $1 - e^{-y} \leqslant y$. En déduire que pour tout entier naturel k, la fonction f_k est continue en 0. Est-elle dérivable à droite en ce point ?

Corrigé de la feuille d'exercices n°22

Exercice 1 (* à **)

- Pour I_1, intégration directe :$I_1 = \int_1^2 \frac{1}{t^2}\ dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$
- Pour I_2, on reconnait la forme $\frac{u'}{u}$, avec $u(x) = \ln x$, donc $I_2 = \int_e^3 \frac{dx}{x \ln x} = [\ln(\ln x)]_e^3 = \ln(\ln 3)$
- Pour I_3, on reconnait exactement $u'e^u$, avec $u(x) = \sqrt{x}$, d'où
  $I_3 = \int_1^2 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\ dx = [e^{\sqrt{x}}]_1^2 = e^{\sqrt{2}} - e$
- Pour I_4, comme toujours avec les valeurs absolues, on découpe en utilisant la relation de Chasles :
  $I_4 = \int_0^2 \left|x^2 - 3x + 2\right|\ dx = \int_0^1 (x^2 - 3x + 2)\ dx + \int_1^2 (-x^2 + 3x - 2)\ dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_0^1 + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x\right]_1^2 = \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 - \frac{8}{3} + 6 - 4 + \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 = 1$
- Pour I_5, il suffit de développer pour faire apparaitre des puissances qu'on sait très bien intégrer :
  $I_5 = \int_0^4 \sqrt{x}(x - 2\sqrt{x})\ dx = \int_0^4 x^{\frac{3}{2}} - 2x\ dx = \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - x^2\right]_0^4 = \frac{2}{5}4^{\frac{5}{2}} - 16 = \frac{64}{5} - 16 = -\frac{16}{5}$
- Ici, on reconnait presque $u'e^u$, avec $u(z) = -z^5$:
  $I_6 = \int_0^2 z^4 e^{-z^5}\ dz = -\frac{1}{5}\int_0^2 -5z^4 e^{-z^5}\ dz = -\frac{1}{5}[e^{-z^5}]_0^2 = -\frac{1}{5}(e^{-32} - e) = \frac{1}{5}\left(e - \frac{1}{e^{32}}\right)$
- Le plus simple dans le cas d'une fonction qui n'est pas continue, comme la partie entière, est de découper l'intervalle d'intégration en morceaux sur lesquels la fonction et continue (et même ici constante) :
  $I_7 = \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{5}{2}} Ent(x)\ dx = \int_{-\frac{1}{3}}^0 -1\ dx + \int_0^1 0\ dx + \int_1^2 1\ dx + \int_2^{\frac{5}{2}} 2\ dx = -\frac{1}{3} + 0 + 1 + 1 = \frac{5}{3}$
- On a presque ici du $6u'u^5$ avec $u(s) = \ln s$, d'où le calcul suivant :
  $I_8 = \int_1^e \frac{(lns)^5}{s}\ ds = \left[\frac{1}{6}(\ln s)^6\right]_1^e = \frac{1}{6}$
- Là, encore, quasiment une forme usuelle, en l'occurence $\frac{u'}{u}$ à un facteur 2 près :
  $I_9 = \int_0^{\frac{\ln 2}{2}} \frac{e^{2t}}{e^{2t} + 2}\ dt = \left[\frac{1}{2}\ln(e^{2t} + 2)\right]_0^{\frac{\ln 2}{2}} = \frac{1}{2}(\ln 4 - \ln 3) = \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$
- Il faut faire un peu attention pour celle-ci, on est proche de la dérivée de $(x^3 + 1)^{\frac{5}{2}}$, mais il manque un facteur 3 dans la dérivée (puisqu'on a simplement x^2 au lieu de $3x^2$), **et** il manque aussi le facteur $\frac{5}{2}$ qui devrait apparaitre en dérivant la puissance, d'où finalement
  $I_{10} = \int_0^2 x^2(x^3 + 1)^{\frac{3}{2}}\ dx = \frac{2}{15}[(x^3 + 1)^{\frac{5}{2}}]_0^2 = \frac{2}{15}(9^{\frac{5}{2}} - 1) = \frac{2}{15}(3^5 - 1) = \frac{484}{15}$
- Là encore, il manque juste un petit facteur pour reconnaitre une forme usuelle (le ds au lieu du dv dans l'intégrale n'était pas un piège vicieux, mais simplement une faute de frappe) :
  $I_{11} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\exp(\frac{-3}{v^2})}{v^3}\ ds = \left[\frac{1}{6}\exp\left(-\frac{3}{v^2}\right)\right]_1^{\sqrt{3}} = \frac{1}{6}(e^{-1} - e^{-3}) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e^3}\right)$

- Encore une forme usuelle, puisqu'on a presque la dérivée de $(q^2-2q)^{-3}$: il manque le facteur -3 de la dérivée de la puissance, et un facteur -2 pour que le numérateur soit exactement la dérivée de q^2-2q, d'où finalement $I_{12} = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1-q}{(q^2-2q)^4}\ dq = \left[\frac{1}{6}(q^2-2q)^{-3}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{6}\left(\left(\frac{9}{4}-3\right)^{-3} - \left(\frac{1}{4}-1\right)^{-3}\right) = \frac{1}{6}\left(\left(-\frac{3}{4}\right)^{-3} - \left(-\frac{3}{4}\right)^{-3}\right) = 0$
- Celle-là ressemble beaucoup à la numéro 3, à un petit signe et un facteur près : $I_{13} = \int_1^4 \frac{e^{-\sqrt{z}}}{\sqrt{z}}\ dz = [-2e^{-\sqrt{z}}]_1^4 = -2(e^{-2}-e^{-1}) = 2\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{e^2}\right)$

Exercice 2 (**)

- On fait (ô surprise) une IPP en posant $\begin{cases} u(x) = x & v'(x) = e^{3x} \\ u'(x) = 1 & v(x) = \frac{1}{3}e^{3x} \end{cases}$ pour obtenir $I_1 = \int_{-1}^1 xe^{3x}\ dx = \left[\frac{1}{3}xe^{3x}\right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{1}{3}e^{3x}\ dx = \frac{1}{3}(e^3+e^{-3}) - \left[\frac{1}{9}e^{3x}\right]_{-1}^1 = \frac{e^3}{3}+\frac{e^{-3}}{3}-\frac{e^3}{9}+\frac{e^{-3}}{9} = \frac{2}{9}e^3+\frac{4}{9}e^{-3}$
- Effectuons donc une IPP en posant $\begin{cases} u(s) = \ln s & v'(s) = \sqrt{s} \\ u'(s) = \frac{1}{s} & v(s) = \frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}} \end{cases}$, on obtient $I_2 = \int_1^4 \sqrt{3s}\ln s\ ds = \sqrt{3}\left[\frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}}\ln s\right]_1^4 - \sqrt{3}\int_1^4 \frac{2}{3}\sqrt{s}\ ds = \frac{2}{3}\sqrt{3}\times 4^{\frac{3}{2}}\ln 4 - \sqrt{3}\left[\frac{4}{9}s^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{32\sqrt{3}}{3}\ln 2 - \frac{32}{9}\sqrt{3}+\frac{4}{9}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(32\ln 2 - \frac{28}{3}\right)$ (on a utilisé $4^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{4})^3 = 8$)
- Commençons par poser $\begin{cases} u(z) = (\ln z)^3 & v'(t) = z^2 \\ u'(t) = 3\times\frac{1}{z}\times(\ln z)^2 & v(z) = \frac{z^3}{3} \end{cases}$ pour obtenir : $I_3 = \int_1^e z^2(\ln z)^3\ dz = \left[\frac{1}{3}z^3(\ln z)^3\right]_1^e - \int_1^e \frac{z^3}{3}\times\frac{3}{z}(\ln z)^2\ dz = \frac{e^3}{3} - \int_1^e z^2(\ln z)^2\ dz$

  Pour ce deuxième morceau, posons $\begin{cases} u(z) = (\ln z)^2 & v'(t) = z^2 \\ u'(t) = \frac{2}{z}\times\ln z & v(z) = \frac{z^3}{3} \end{cases}$:

  $\int_1^e z^2(\ln z)^2\ dz = \left[\frac{1}{3}z^3(\ln z)^2\right] - \int_1^e \frac{z^3}{3}\times\frac{2}{z}\ln z\ dz = \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3}\int_1^e z^2\ln z\ dz$

  Les deux constantes sorties des deux premières IPP s'annulent, et il ne reste plus qu'à calculer une dernière intégrale en posant $\begin{cases} u(z) = \ln z & v'(t) = z^2 \\ u'(t) = \frac{1}{z} & v(z) = \frac{z^3}{3} \end{cases}$:

  $I_3 = \frac{2}{3}\int_1^e z^2\ln z\ dz = \frac{2}{3}\left[\frac{z^3}{3}\ln z\right]_1^e - \frac{2}{3}\int_1^e \frac{z^2}{3}\ dz = \frac{2e^3}{9} - \frac{2}{9}\left[\frac{z^3}{3}\right]_1^e = \frac{2e^3}{9} - \frac{2e^3}{27}+\frac{2}{27} = \frac{4e^3+2}{27}$
- Allons-y pour une IPP en posant $\begin{cases} u(x) = \ln x & v'(x) = 2x^3+1 \\ u'(x) = \frac{1}{x} & v(x) = \frac{x^4}{2}+x \end{cases}$

  $I_4 = \int_1^{e^2} (2x^3+1)\ln x\ dx = \left[\left(\frac{x^4}{2}+x\right)\ln x\right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} \frac{x^3}{2}+1\ dx = e^8+2e^2 - \left[\frac{x^4}{8}+x\right]_1^{e^2} = e^8+2e^2-\frac{1}{8}e^8-e^2+\frac{1}{8}+1 = \frac{7}{8}e^8+e^2+\frac{9}{8}$

- Effectuons une IPP du dernier morceau en posant $\begin{cases} u(x) = x^2 & v'(x) = e^{2x} \\ u'(x) = 2x & v(x) = \dfrac{e^{2x}}{2} \end{cases}$:
$I_5 = \int_0^1 (1+x+x^2)e^{2x}\,dx = \int_0^1 e^{2x}\,dx + \int_0^1 xe^{2x}\,dx + \int_0^1 x^2e^{2x}\,dx = \left[\dfrac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 + \int_0^1 xe^{2x}\,dx + \left[x^2\dfrac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 2x\dfrac{e^{2x}}{2}\,dx = \dfrac{e^2}{2} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{e^2}{2} = e^2 - \dfrac{1}{2}$
- Ici, il faut faire apparaitre un produit par 1 pour effectuer l'IPP en posant donc $\begin{cases} u(t) = \ln\left(1+\dfrac{1}{t}\right) & v'(t) = 1 \\ u'(t) = \dfrac{-\frac{1}{t^2}}{1+\frac{1}{t}} = -\dfrac{1}{t(t+1)} & v(t) = t \end{cases}$, ce qui donne :
$I_6 = \int_1^2 \ln\left(1+\dfrac{1}{t}\right)\,dt = \left[t\ln\left(1+\dfrac{1}{t}\right)\right]_1^2 + \int_1^2 \dfrac{1}{t+1}\,dt = 2\ln\dfrac{3}{2} - \ln 2 + [\ln(1+t)]_1^2 = 2\ln 3 - 3\ln 2 + \ln 3 - \ln 2 = 3\ln 3 - 4\ln 2$
- On pose $\begin{cases} u(s) = \ln\left(1+\dfrac{1}{s}\right) & v'(t) = 1+2s \\ u'(s) = \dfrac{-\frac{1}{s^2}}{1+\frac{1}{s}} = -\dfrac{1}{s(s+1)} & v(s) = s+s^2 = s(s+1) \end{cases}$ pour obtenir :
$I_7 = \int_1^2 (1+2s)\ln\left(1+\dfrac{1}{s}\right)\,ds = \left[s(s+1)\ln(1+\dfrac{1}{s})\right]_1^2 + \int_1^2 1\,ds = 6\ln\dfrac{3}{2} - 2\ln 2 + 1 = 6\ln 3 - 8\ln 2 + 1$

Exercice 3 (**)

- Pour I_1, on pose $u = t+1$, donc $du = dt$, les bornes de l'intégrale deviennent 1 et 2 et le $t-2$ qui traine encore est égal à $u-3$:
$I_1 = \int_0^1 (t-2)(t+1)^5\,dt = \int_1^2 (u-3)u^5\,du = \left[\dfrac{u^7}{7} - \dfrac{u^6}{2}\right]_1^2 = \dfrac{128}{7} - 32 - \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{2} = -\dfrac{193}{14}$
- Pour I_2, on pose $u = t^3+8$, donc $du = 3t^2\,dt$ (ce qui élimine au passage le problème du t^2 au numérateur), et les bornes deviennent 8 et 16 :
$I_2 = \int_0^2 \dfrac{t^2}{t^3+8}\,dt = \int_8^{16} \dfrac{1}{3u}\,du = \dfrac{1}{3}[\ln u]_8^{16} = \dfrac{1}{3}(\ln 16 - \ln 8) = \dfrac{\ln 2}{3}$
- Pour I_3, on pose $t = \dfrac{x}{x+1}$, donc $dt = \dfrac{x+1-x}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{(x+1)^2}$, ce qui simplifie à merveille le quotient présent dans l'intégrale, puisque $\dfrac{1}{x(x+1)}dx = \dfrac{x+1}{x} \times \dfrac{1}{(x+1)^2}dx = \dfrac{dt}{t}$. Par ailleurs les bornes bornes deviennent $\dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{1}{2}$:
$I_3 = \int_{\frac{1}{2}}^1 \dfrac{1}{x(x+1)}\,dx = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{t}\,dt = [\ln t]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} = \ln\dfrac{1}{3} - \ln\dfrac{1}{2} = \ln\dfrac{2}{3}$
- Pour I_4, on pose $u = s^3$, donc $du = 3s^2ds$, le quotient dans l'intégrale pouvant s'écrire $\dfrac{s^2}{s^3(s^3+1)} = \dfrac{s^2}{u(u+1)}$. Les bornes deviennent 1 et 8, et on utilise pour terminer le calcul l'égalité $\dfrac{1}{u} - \dfrac{1}{u+1} = \dfrac{1}{u(u+1)}$:
$I_4 = \int_1^2 \dfrac{ds}{s(s^3+1)} = \int_1^8 \dfrac{1}{3u(u+1)}\,du = \dfrac{1}{3}\int_1^8 \dfrac{1}{u} - \dfrac{1}{u+1}\,du = \dfrac{1}{3}[\ln u - \ln(u+1)]_1^8 = \dfrac{1}{3}(\ln 8 - \ln 9 + \ln 2) = \dfrac{4\ln 2 - 2\ln 3}{3}$

- Pour I_5, on pose $u = \sqrt{t}$, donc $du = \dfrac{dt}{2\sqrt{t}}$, et les bornes deviennent 1 et $\sqrt{2}$:
$I_5 = \displaystyle\int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\ dt = \int_1^{\sqrt{2}} 2\ln(u^2)\ du = \int_1^{\sqrt{2}} 4\ln u\ du = 4[u\ln u - u]_1^{\sqrt{2}} = 4(\sqrt{2}\ln\sqrt{2} - \sqrt{2} + 1) =$
$2\sqrt{2}\ln 2 + 4 - 4\sqrt{2}$

- Pour I_6, on pose $u = \ln t$, donc $du = \dfrac{dt}{t}$, et les bornes deviennent 0 et 1 :
$I_6 = \displaystyle\int_1^e \frac{1}{t\sqrt{\ln t + 1}}\ dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u+1}}\ du = [2\sqrt{u+1}]_0^1 = 2\sqrt{2} - 2 = 2(\sqrt{2} - 1)$

Exercice 4 (* à **)

- Par intégration directe, $F_1(t) = t + 2e^{-t}$.
- Encore par intégration directe, $F_2(t) = \sqrt{1+t^2}$.
- On reconnait cette fois-ci un produit uu', qui a pour primitive $\dfrac{1}{2}u^2$, donc $F_3(t) = \dfrac{1}{2}(\ln t)^2$
- On a du $\dfrac{u'}{u}$ à un facteur près : $F_4(t) = \dfrac{1}{3}\ln(t^3 + 2)$
- Cette fois-ci, on difficilement échapper à une écriture sous forme d'intégrale, et à une double intégration par partie : commençons par intégrer par partie le premier morceau en posant $\begin{cases} u(x) = x^2 & v'(x) = e^{-t} \\ u'(x) = 2x & v(x) = -e^{-x} \end{cases}$, ce qui nous donne :
$F_5(t) = \displaystyle\int_0^t (x^2 - x + 1)e^{-x}\ dx = \int_0^t x^2e^{-x}dx - \int_0^t xe^{-x}dx + \int_0^t e^{-x}dx = [-x^2e^{-x}]_0^t +$
$\displaystyle\int_0^t 2xe^{-x}dx - \int_0^t xe^{-x}dx + [-e^{-x}]_0^t = -t^2e^{-t} - e^{-t} + 1 + \int_0^t xe^{-x}dx$
Ne reste plus qu'à intégrer ce morceau par parties, en posant $u(x) = x$ et $v'(x) = e^{-x}$, ce qui donne $\displaystyle\int_0^t xe^{-x}dx = [-xe^{-x}]_0^t - \int_0^t -e^{-x}dx = -te^{-t} + [-e^{-x}]_0^t = -te^{-t} - e^{-t} + 1$, soit finalement $F_5(t) = -t^2e^{-t} - te^{-t} - 2e^{-t} + 2$.

- Il va falloir user (et presque abuser) de l'IPP, en posant pour commencer
$\begin{cases} u(x) = (\ln x)^3 & v'(x) = 1 \\ u'(x) = 3 \times \dfrac{1}{x} \times (\ln x)^2 & v(x) = x \end{cases}$ pour obtenir (on prend 1 comme borne inférieure de l'intégrale pour ne pas avoir de souci avec le ln) :
$F_5(t) = \displaystyle\int_1^t (\ln x)^3dx = [x(\ln x)^3]_1^t - \int_1^t x \times \frac{3}{x}(\ln x)^2dx = t(\ln t)^3 - 3\int_1^t (\ln x)^2dx$
Cette deuxième intégrale se calcule essentiellement comme la précédente, en posant toujours $v(x) = 1$, ce qui donne :
$\displaystyle\int_1^t (\ln x)^2dx = [x(\ln x)^2]_1^t - \int_1^t x \times \frac{2}{x}\ln x = t(\ln t)^2 - 2\int_1^t \ln t = t(\ln t)^2 - 2[x\ln x - x]_1^t =$
$t(\ln t)^2 - 2t\ln t + 2t - 2$; et finalement $F_6(t) = t(\ln t)^3 - 3t(\ln t)^2 + 6t\ln t - 6t + 6$.

- Posons donc $u = e^x$, d'où $du = e^xdx$, et on peut transformer l'intégrale ainsi :
$F_7(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{e^{2x}}{e^x+1}\ dx = \int_0^t \frac{e^x}{e^x+1} \times e^xdx \int_1^{e^t} \frac{u}{u+1}\ du = \int_1^{e^t} 1 - \frac{1}{u+1}\ du = [u - ln(u+1)]_1^{e^t} =$
$e^t - \ln(e^t + 1) - 1 + \ln 2$

- Posons $u = \ln x$, donc $du = \dfrac{1}{x}dx$, ce qui tombe bien puisqu'on peut mettre un $\dfrac{1}{t}$ en facteur dans l'intégrale, obtenant :
$F_8(t) = \displaystyle\int_1^t \frac{\ln x}{x + x(\ln x)^2}\ dx = \int_0^{\ln t} \frac{u}{1+u^2}\ du = \left[\frac{1}{2}\ln(1+u^2)\right]_0^{\ln t} = \frac{1}{2}\ln(1 + (\ln t)^2)$

Exercice 5 (*)

1. Le plus simple est de partir du résultat et d'identifier. Comme on a $(x+3)(x-2) = x^2+x-6$, on peut écrire $a + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x+3} = \frac{a(x^2+2x-x-6)+b(x+3)+c(x-2)}{x^2+x-6}$ $= \frac{ax^2+(a+b+c)x+(-6a+3b-2c)}{x^2+x-6}$
   Par identification, on a $a = 3$; $a+b+c = -4$ et $-6a+3b-2c = -25$. On en déduit que $b+c = -7$ et $3b-2c = -7$; en multipliant la première équation par 2 et en l'additionnant à la seconde, on a donc $5b = -21$, soit $b = -\frac{21}{5}$ puis $c = -7-b = -\frac{14}{5}$.
2. La deuxième expression permet d'obtenir une primitive (en faisant attention au fait que sur $]-3;2[$, $x+3>0$ et $x-2<0$) : $F(x) = 3x - \frac{21}{5}\ln(2-x) - \frac{14}{5}\ln(x+3)$. Si on veut obtenir la primitive de f s'annulant en 1, il suffit de retrancher une constante égale à la valeur de la primitive précédente en 1, c'est-à-dire $3 - \frac{14}{5}\ln 4$.

Exercice 6 (**)

1. On a $I_{n,0} = \int_0^1 x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.
2. On effectue une IPP en posant $\begin{cases} u(x) = (1-x)^{p+1} & v'(x) = x^n \\ u'(x) = -(p+1)(1-x)^p & v(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \end{cases}$, et on obtient :
   $I_{n,p+1} = \int_0^1 x^n(1-x)^{p+1}\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}(1-x)^{p+1}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1}(p+1)(1-x)^p\,dx = \frac{p+1}{n+1}I_{n+1,p}$
   (le crochet s'annulant en 0 et en 1).
3. En utilisant plusieurs fois de suite la relation précédente et le résultat de la première question, on obtient
   $I_{n,p} = \frac{p}{n+1}I_{n+1,p-1} = \frac{p(p-1)}{(n+1)(n+2)}I_{n+2,p-2} = \cdots = \frac{p(p-1)\dots 1}{(n+1)(n+2)\dots(n+p)}I_{n+p,0} = \frac{p!n!}{(n+p+1)!}$

Exercice 7 (**)

1. La fonction intégrée étant positive sur $[0;1]$ (puisque $1-x$ y est positif), la suite (I_n) est positive. De plus, $\forall x \in [0;1]$, $(1-x)^n e^x \leqslant e$ (majoration brutale mais largement suffisante), donc $I_n \leqslant \int_0^1 \frac{e}{n!}\,dx = \frac{e}{n!}$. Le théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que (I_n) converge vers 0.
2. Pour obtenir exactement l'égalité voulue, il faut effectuer une IPP en dérivant l'exponentielle et en primitivant la puissance, donc en posant $\begin{cases} u(x) = e^x & v'(x) = (1-x)^n \\ u'(x) = e^x & u(x) = -\dfrac{(1-x)^{n+1}}{n+1} \end{cases}$, d'où :
   $I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!}e^x\,dx = \left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)!}e^x\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)\times n!}e^x\,dx = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$
3. On déduit de la question précédente que $I_0 = \frac{1}{1!} + I_1 = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + I_2 = \cdots = \sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k!} + I_n$. Or,

on a $I_0 = \int_0^1 e^x \, dx = [e^x]_0^1 = e - 1 = e - \frac{1}{0!}$. On en déduit donc que $e - I_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!}$, ce qui en passant à la limite donne bien $e = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!}$.

Exercice 8 (***)

1. $J_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \, dx = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}$. De plus, $\forall x \in [0;1]$, $1+x^2 \geqslant 1$, donc $\frac{x^n}{1+x^2} \leqslant x^n$ et $J_n \leqslant \int_0^1 x^n \, dx = \frac{1}{n+1}$. La positivité de J_n découle simplement, comme d'habitude, de celle de la fonction intégrée.
2. Le théorème des gendarmes permet d'affirmer la convergence de J_n vers 0.
3. On pose $\begin{cases} u(x) = \ln(1+x^2) & v'(x) = x^n \\ u'(x) = \frac{2x}{1+x^2} & v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{cases}$, et on obtient
$I_n = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln(1+x^2)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^{n+2}}{(n+1)(1+x^2)} \, dx = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{2J_{n+2}}{n+1}$
4. Les deux termes du membre de droite de l'égalité précédente tendent manifestement vers 0 (en utilisant la question 2), donc I_n également.
5. On a $I_n = \frac{1}{n+1}(\ln 2 - 2J_{n+2})$. Or $\lim_{n\to+\infty} J_{n+2} = 0$, donc $\lim_{n\to+\infty} \ln 2 - 2J_{n+2} = \ln 2$. On en déduit que $I_n \sim \frac{\ln 2}{n+1} \sim \frac{\ln 2}{n}$.

Exercice 9 (***)

1. Par une intégration par parties désormais classique consistant à poser $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = x^2$, donc $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = \frac{x^3}{3}$, on a $I_1 = \int_1^e x^2 \ln x \, dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{3} \, dx = \frac{e^3}{3} - \left[\frac{x^3}{9}\right]_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3+1}{9}$.
2. Sur $[1;e]$, $0 \leqslant \ln x \leqslant 1$, donc $0 \leqslant (\ln x)^{n+1} \leqslant (\ln x)^n$. On a donc $0 \leqslant x^2(\ln x)^{n+1} \leqslant x^2(\ln x)^n$, puis par intégration $0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$. La suite (I_n) est décroissante.
3. La suite est décroissante minorée par 0, elle converge donc.
4. Le plus simple est d'étudier la fonction $f : x \mapsto \ln x - \frac{x}{e}$. On a $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e}$, qui est positif sur l'intervalle $[1;e]$. La fonction f est donc croissante sur $[1;e]$, et $f(e) = 1 - 1 = 0$, donc f est négative sur $[1;e]$. On en déduit que $I_n \leqslant \int_1^e x^2 \left(\frac{x}{e}\right)^n = \frac{1}{e^n}\int_1^e x^{n+2} \, dx = \frac{1}{e^n}\left[\frac{x^{n+3}}{n+3}\right]_1^e = \frac{e^{n+3}-1}{e^n(n+3)} = \frac{e^3 - \frac{1}{e^n}}{n+3}$. La majoration calculée tendant vers 0, notre cher théorème des gendarmes s'applique et (I_n) converge vers 0.
5. Il s'agit bien sûr d'une intégration par parties, avec $u(x) = (\ln x)^{n+1}$ et $v'(x) = x^2$, donc $u'(x) = (n+1) \times \frac{1}{x} \times (\ln x)^n$ et $v(x) = \frac{x^3}{3}$:
$I_{n+1} = \left[\frac{x^3}{3}(\ln x)^{n+1}\right]_1^e - \int_1^e (n+1)\frac{x^2}{3}(\ln x)^n = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3}I_n$ En faisant tendre n vers $+\infty$, on a donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{3}I_n = \frac{e^3}{3}$, donc $I_n \sim \frac{e^3}{n+1} \sim \frac{e^3}{n}$.

Exercice 10 (**)

- Si on note $g(t) = e^{-3\sqrt{2\ln t}}$, et G une primitive de g sur $]1; +\infty[$ (il faudrait changer la borne inférieure dans l'énoncé pour mettre quelque chose de plus grand que 1, par exemple 2, la fonction g n'étant pas définie pour $x < 1$ ...), on aura (par définition de l'intégrale) $f_1(x) = G(2x) - G(2)$, donc en utilisant la formule de dérivation des fonctions composées $f_1'(x) = 2g(2x) = 2e^{-3\sqrt{2\ln(2t)}}$
- Même principe que ci-dessus : on note $g(t) = \dfrac{1}{1+t+t^2}$ (qui est pour le coup définie sur $\mathbb{R}$ puisque le dénominateur a un discriminant négatif), et G une primitive de g, on a alors $f_2(x) = G(x^2) - G(x)$, donc $f_2'(x) = 2xg(x^2) - g(x) = \dfrac{2x}{1+x^2+x^4} - \dfrac{1}{1+x+x^2}$.
- Posons donc $g(t) = \sqrt{1+t^2}$ (encore une fois définie sur $\mathbb{R}$) et G une primitive ; $f_3(x) = G(-x) - G(x)$, donc $f_3'(x) = -g(-x) - g(x) = -\sqrt{1+(-x)^2} - \sqrt{1+x^2} = -2\sqrt{1+x^2}$
- Cette fois, $g(t) = \dfrac{t}{\ln t}$ (définie sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$), et f_4 n'est définie nulle part puisque $-\sqrt{x}$ est toujours négatif quand la valeur existe. Inutile donc de chercher à dériver f_4.

Exercice 11 (***)

1. La fonction f est la primitive de $\dfrac{e^x}{x}$ s'annulant en 1. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $f'(x) = \dfrac{e^x}{x}$. Cette dérivée étant positive sur $\mathbb{R}_+^*$, f y est croissante.
2. La fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $g'(x) = \dfrac{e^x}{x} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{e^x - 1}{x}$. Cette dérivée est positive sur $\mathbb{R}_+^*$, donc g y est croissante. Comme $g(1) = f(1) - \ln 1 = 0$, la fonction g est donc négative sur $]0;1]$ et positive sur $[1;+\infty[$ ($f(1) = 0$ car on effectue alors une intégrale sur l'intervalle $[1;1]$).
3. D'après la question précédente, on a $f(x) \leqslant \ln x$ sur $]0;1[$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$; de même, $f(x) \geqslant \ln x$ si $x \geqslant 1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 12 (** à ***)

- Le but est donc de faire apparaitre une somme de Riemann, ce qui consiste en gros à sortir un $\dfrac{1}{n}$ de la somme et à exprimer ce qui reste dans la somme en fonction de $\dfrac{k}{n}$ uniquement : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{n^2+k^2} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{n^2(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right)$, avec $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.
Le théorème de convergence des sommes de Riemann permet alors d'affirmer que (u_n) converge et que sa limite vaut $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}$.
- Même méthode : $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2k}{n}}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right)$, avec $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}$, donc (v_n) converge vers $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+2x}}\,dx = \left[\sqrt{1+2x}\right]_0^1 = \sqrt{3} - 1$.
- Pour w_n, c'est un peu plus subtil, il vaut mieux étudier $\ln(w_n)$ et surtout se rendre compte que $\ln(n!) = \ln(1\times 2\times\cdots\times n) = \ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n$. On a alors : $\ln w_n = \dfrac{1}{n}(\ln((2n)!) - n\ln n - \ln(n!)) = \dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{k=2n} \ln k - n\ln n - \sum_{k=1}^{k=n} \ln k\right) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=n+1}^{k=2n} (\ln k -$

$\ln n) = \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{k=2n} \ln\frac{k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} \ln\frac{n+k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$, donc $(\ln w_n)$ converge vers $\int_0^1 \ln(1+x)\,dx = \int_1^2 \ln u\,du = [x\ln x - x]_1^2 = 2\ln 2 - 1$, et (w_n) converge vers $e^{2\ln 2-1} = \frac{4}{e}$.

Exercice 13 (**)

1. Il suffit pour cela de dire que le dénominateur $1+t+t^n$ ne s'annule jamais sut l'intervalle $[0;1]$ (il est toujours supérieur à 1), donc que la fonction à intégrer est continue sur $[0;1]$, ce qui assure l'existence de son intégrale.

2. Calculons donc : $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{2+t}dt = [\ln(2+t)]_0^1 = \ln 3 - \ln 2$; et $u_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+2t}dt = \left[\frac{1}{2}\ln(1+2t)\right]_0^1 = \frac{\ln 3}{2}$.

3. (a) Pour tout t dans $[0;1]$, on a $t^{n+1} \leqslant t^n$, donc $1+t+t^{n+1} \leqslant 1+t+t^n$ puis (tout étant positif) $\frac{1}{1+t+t^{n+1}} \geqslant \frac{1}{1+t+t^n}$. En intégrant cette inégalité entre 0 et 1, on obtient $u_{n+1} \geqslant u_n$, la suite (u_n) est donc croissante.

   (b) Il faut réussir à majorer intelligemment ce qui se trouve sous l'intégrale, en l'occurence en constatant que $\forall t \in [0;1]$, $1+t+t^n \geqslant 1+t$, donc $\frac{1}{1+t+t^n} \leqslant \frac{1}{1+t}$. En intégrant l'inegalité, on obtient $u_n \leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+t}dt = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln 2$.

   (c) La suite (u_n) est donc croissante et majorée, elle converge.

4. (a) En utilisant le calcul fait un peu plus haut, on a $\ln 2 - u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t}dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t+t^n}dt$.

   (b) Il suffit d'arriver à majorer ce qui se trouve sous l'intégrale : $\frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t+t^n} = \frac{1+t+t^n-(1+t)}{(1+t)(1+t+t^n)} = \frac{t^n}{(1+t)(1+t+t^n)}$. Or, ce magnifique dénominateur est certainement plus grand que 1 quand $t \in [0;1]$, donc $\frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t+t^n} \leqslant t^n$, et en intégrant cette inégalité on a $\ln 2 - u_n \leqslant \int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.

   (c) On a vu plus haut que $u_n \leqslant \ln 2$, donc $\ln 2 - u_n \geqslant 0$. Comme on vient de majorer par ailleurs cette même expression par quelque chose qui tend vers 0, un coup de théorème des gendarmes nous donnes $\lim_{n\to+\infty}(\ln 2 - u_n) = 0$, c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln 2$.

Exercice 14 (ESCP 92) (****)

1. (a) Prenons deux réels x et y dans $\mathbb{R}_+^*$ tels que $x < y$. On a alors $e^{-tx} > e^{-ty}$ pour tout $t \in [0;1]$. De même $t^k e^{-tx} > t^k e^{-ty}$ et on peut intégrer cette inégalité, ce qui donne exactement $f_k(x) > f_k(y)$, donc f_k est bien décroissante.

   (b) On a $f_k(0) = \int_0^1 t^k\,dt = \frac{1}{k+1}$. La suite $(f_k(0))$ est donc décroissante et tend vers 0. Or, f_k étant positive et décroissante sur $\mathbb{R}^+$, on a $\forall x > 0$, $0 \leqslant f_k(x) \leqslant \frac{1}{k+1}$, ce qui suffit à assurer via le théorème des gendarmes que $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

2. (a) Il s'agit de faire une IPP en posant $u(t) = t^{k+1}$ et $v'(t) = e^{-tx}$, donc $u'(t) = (k+1)t^k$ et $v(t) = -\frac{e^{-tx}}{x}$ (faites bien gaffe que la variable ici est t et x est donc une constante). On obtient $f_{k+1}(x) = \left[-t^{k+1}\frac{e^{-tx}}{x}\right]_0^1 + (k+1)\int_0^1 t^k \frac{e^{-tx}}{x}\, dx = -\frac{e^{-x}}{x} + \frac{k+1}{x} f_k(x)$.

(b) On a $f_0(x) = \int_0^1 e^{-tx}\, dt = \left[-\frac{e^{-tx}}{x}\right]_0^1 = -\frac{e^{-x}}{x} + \frac{1}{x} = \frac{1-e^{-x}}{x}$. On peut utiliser la question précédente pour calculer les fonctions suivantes : $f_1(x) = \frac{1}{x} f_0(x) - \frac{e^{-x}}{x} = \frac{1}{x^2}(1 - e^{-x} - xe^{-x})$, puis $f_2(x) = \frac{2}{x} f_1(x) - \frac{e^{-x}}{x} = \frac{1}{x^3}(2 - 2e^{-x} - 2xe^{-x} - x^2 e^{-x})$.

(c) Il suffit de reprendre l'expression trouvée : $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - e^{-x} = 1$, donc $f_0 \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.

(d) Il faut faire une récurrence : on vient de montrer le résultat pour $k = 0$. Supposons le vrai pour f_k, on a alors $f_{k+1}(x) = \frac{f_k(x)}{x}\left(k + 1 - \frac{e^{-x}}{f_k(x)}\right)$. La parenthèse tend vers $k+1$ car l'exponentielle négative, par croissance comparée, l'emporte sur f_k qui est par hypothèse de récurrence équivalente à une fonction puissance. On a donc $f_{k+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{k+1}{x} f_k \sim \frac{k+1}{x}\frac{k!}{x^{k+1}} \sim \frac{(k+1)!}{x^{k+2}}$, ce qui achève la récurrence.

3. (a) Le changement de variable est $u = tx$, qui donne $du = x\, dt$, et change les bornes de l'intégrale en 0 et x, ce qui donne donc $f_k(x) = \int_0^1 t^k e^{-tx} dt = \int_0^x \left(\frac{u}{x}\right)^k e^{-u}\, \frac{du}{x} = \frac{1}{x^{k+1}} \int_0^x u^k e^{-u}\, du$.

(b) On vient décrire $f_k(x)$ sous la forme d'un produit $g(x)h(x)$, où $g(x) = \frac{1}{x^{k+1}}$, et donc $g'(x) = -\frac{k+1}{x^{k+2}}$, et $h(x) = \int_0^x u^k e^{-u}\, du$, donc $h'(x) = x^k e^{-x}$. On en déduit que $f_k'(x) = -\frac{k+1}{x^{k+2}} h(x) + \frac{1}{x^{k+1}} x^k e^{-x} = -\frac{k+1}{x} f_k(x) + \frac{e^{-x}}{x}$. On vient donc de montrer, en reprenant le résultat de la question 2.a, que $f_k' = -f_{k+1}$.

(c) On étudie la fonction $y \mapsto 1 - e^{-y} - y$ sur $\mathbb{R}^+$. sa dérivée vaut $e^{-y} - 1$, qui est négative sur l'intervalle d'étude. Or, pour $y = 0$, la fonction est nulle. Elle est donc bien négative sur $\mathbb{R}^+$.

On a donc $f_k(x) - f_k(0) = \int_0^1 t^k e^{-tx}\, dt - \int_0^1 t^k\, dt = \int_0^1 t^k(e^{-tx} - 1)\, dt \geqslant \int_0^1 t^{k+1} x\, dt = \frac{x}{k+2}$. Quand x tend vers 0, ceci tend vers 0. Comme par ailleurs $f_k(x) - f_k(0)$ est négatif puisque f_k est décroissante, la fonction f_k est bien continue en 0.

Pour la dérivée, on utilise ce bon vieux théorème du prolongement C^1 ! La fonction f_k est dérivable et C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $f_k' = -f_{k+1}$. On vient de voir que f_{k+1} était continue en 0, donc $\lim\limits_{x \to 0} f_{k+1}(x) = f_{k+1}(0) = \frac{1}{k+2}$. On en déduit que $\lim\limits_{x \to 0} f_k'(x) = -\frac{1}{k+2}$ puis que f_k est dérivable en 0, de dérivée $f_k'(0) = -\frac{1}{k+2}$.

Feuille d'exercices n°23 : Variables aléatoires infinies

ECE3 Lycée Carnot

9 avril 2010

Exercice 1 (**)

Soit X une variable aléatoire dont la loi est de la forme $P(X = k) = ckq^{k-1}$, avec $q \in [0;1]$ et $c \in \mathbb{R}$. déterminer la valeur de c, puis l'espérance et la variance (si elles existent ...) de X.

Exercice 2 (*)

Montrer que, si $X \sim \mathcal{G}(p)$, on a $P_{X>n}(X > n + m) = P(X > m)$. Pour cette raison, on dit que la loi géométrique est une loi sans mémoire.

Exercice 3 (**)

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue des tirages dans cette urne, en remettant après chaque tirage la boule tirée, et en ajoutant une nouvelle boule de la même couleur que la boule tirée. On note X le nombre de tirages nécessaires avant de tirer une boule blanche. Déterminer la loi de X, ainsi que son espérance (si elle existe).

Exercice 4 (***)

La nombre X de candidats se présentant à un examen suit une loi de Poisson de moyenne M. Chaque candidat a une probabilité p d'être reçu, indépendamment des résultats des autres candidats. On note Y le nombre de candidats reçus.

1. Déterminer la loi de X.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculer $P_{X=j}(Y = k)$ (deux cas à distinguer selon la valeur de j).
3. En déduire la valeur de $P(Y = k)$ sous forme d'une somme.
4. Déterminer la loi de Y.

Exercice 5 (**)

Un téléski est constitué de N perches différentes. Un skieur prend une de ces perches, va faire sa descente et revient au même téléski. On admet qu'entre-temps, le nombre de skieurs ayant emprunté le téléski suit une loi géométrique de paramètre p. Quelle est la probabilité que notre skieur retombe sur la même perche ?

Exercice 6 (**)

On lance trois dés à six faces jusqu'à obtenir trois six, sachant que dès qu'un dé tombe sur 6, on arrête de le lancer, et on se contente de relancer les dés n'ayant pas encore donné un 6. On note X_1 le nombre de lancers nécessaires avant d'obtenir un 6 sur le premier (et similairement X_2 et X_3 pour les deux autres dés).

1. Quels sont les lois des variables X_1, X_2 et X_3 ?
2. Déterminer $P(X_i \leqslant k)$ pour un entier k donné.
3. Soit X la variable égale au nombre de lancers nécessaires avant d'obtenir les trois 6. Calculer $P(X \leqslant k)$ (on admettra que les évènements $(X_1 \leqslant k)$, $(X_2 \leqslant k)$ et $(X_3 \leqslant k)$ sont indépendants).
4. En déduire la loi de la variable X.
5. Déterminer, si elle existe, l'espérance de X.

Exercice 7 (***)

Deux joueurs A et B effectuent uns série de lancers de pièce jusqu'à obtenir un Pile avec une pièce truquée pour laquelle la probabilité d'obtenir Pile vaut $p \in [0;1]$. On note X_A et X_B le nombre de tirages nécessaires pour chacun des joueurs.

1. Donner la loi de X_A et de X_B.
2. Calculer la probabilité d'avoir $X_A = X_B$.
3. Soit $k \geqslant 1$. Calculer $P(X_B \geqslant k)$.
4. En déduire la probabilité que le joueur B effectue plus de lancers que le joueur A (c'est-à-dire $P(X_B \geqslant X_A)$).

Exercice 8 (EDHEC 1998) (***)

On réalise une suite de lancers d'une pièce équilibrée, chaque lancer amenant donc pile ou face avec une probabilité $\frac{1}{2}$. On note P_k (respectivement F_k) l'évènement : « on obtient pile (resp. face) au k-ème lancer ».
Pour ne pas surcharger l'écriture, on écrira, par exemple, P_1F_2 à la place de $P_1 \cap F_2$.
On note X la variable aléatoire qui prend la valeur k si l'on obtient pour la première fois pile puis face dans cet ordre aux lancers $k-1$ et k (k désignant un entier supérieur ou égal à 2), X prenant la valeur 0 si l'on obtient jamais une telle succession.

1. Calculer $P(X = 2)$.
2. (a) En remarquant que $(X = 3) = P_1P_2F_3 \cup F_1P_2F_3$, calculer $P(X = 3)$.
   (b) Sur le modèle de la question précédente, écrire, pour tout entier k supérieur ou égal à 3, l'évènement $(X = k)$ comme réunion de $(k-1)$ évènements incompatibles.
   (c) Déterminer $P(X = k)$ pour tout entier k supérieur ou égal à 2.
   (d) Calculer $\mathrm{P}(X = 0)$.
3. On se propose, dans cette question, de retrouver le résultat de la question 2) c : par une autre méthode.
   (a) Montrer que, k désignant un entier supérieur ou égal à 3, si le premier lancer est un pile, alors il faut et il suffit que $P_2P_3 \dots P_{k-1}F_k$ se réalise pour que $(X = k)$ se réalise.
   (b) En déduire, en utilisant la formule des probabilités totales, que :
   $\forall k \geqslant 3,\ P(X = k) = \frac{1}{2}P(X = k-1) + \frac{1}{2^k}$

(c) On pose, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, $u_k = 2^k P(X = k)$. Montrer que la suite $(u_k)_{k \geqslant 2}$ est arithmétique. Retrouver le résultat annoncé.

4. Montrer que X a une espérance $E(X)$, puis la calculer.

Corrigé de la feuille d'exercices n°23

Exercice 1 (**)

Pour que X soit une variable aléatoire, on doit avoir $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) = 1$. Or, $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) = c\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{c}{(1-q)^2}$. On doit donc avoir $c = (1-q)^2$.

On peut alors calculer $E(X) = c\sum_{k=1}^{+\infty} k^2q^{k-1} = cq\sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} + c\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{2cq}{(1-q)^3} + \frac{c}{(1-q)^2} = \frac{2q}{1-q} + 1 = \frac{q+1}{1-q}$. De même, $E(X^2) = c\sum_{k=1}^{+\infty} k^3q^{k-1} = cq^2\sum_{k=3}^{+\infty} k(k-1)(k-2)q^{k-3} + 3cq\sum_{k=3}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} + c\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{6cq^2}{(1-q)^4} + \frac{6cq}{(1-q)^3} + \frac{c}{(1-q)^2} = \frac{6q^2}{(1-q)^2} + \frac{6q}{1-q} + 1 = \frac{6q+(1-q)^2}{(1-q)^2}$. On a utilisé pour ce calcul la formule donnant la somme d'une série géométrique dérivée troisième : si $|q| < 1$, alors $\sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)(k-2)q^k = \frac{6}{(1-q)^4}$, qui s'obtient par exemple par la méthode utilisée en cours pour le calcul des sommes de séries géométriques dérivées secondes.

Exercice 2 (*)

Commençons par calculer $P(X > m) = \sum_{k>m} P(X=k) = \sum_{k=m+1}^{+\infty} pq^{k-1} = p\sum_{j=0}^{+\infty} q^{j+m} = pq^m\sum_{j=0}^{+\infty} q^j = p\frac{q^m}{1-q} = q^m$. De même, on a donc $P(X > n) = q^n$ et $P(X > n+m) = q^{n+m}$, donc $P_{X>n}(X > n+m) = \frac{P(X > n+m)}{P(X > n)} = q^m$, ce qui prouve bien l'égalité demandée.

Exercice 3 (**)

La variable X prend les valeurs entières supérieures ou égales à 1, et on obtient par la formule des probabilités composées, $\forall k \geqslant 1$, $P(X=k) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{k-1}{k} \times \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$ (tous les termes au numérateur se simplifient avec les premiers dénominateurs). On peu vérifier que X est bien définie presque sûrement en passant par l'égalité $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$, dont on déduit que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1$ (il serait plus rigoureux d'écrire une somme allant jusqu'à un entier n et de passer à la limite ensuite pour justifier la convergence).

L'espérance de X est donnée par la somme de la série de terme général $kP(X=k) = \frac{1}{k+1}$, qui a ici le mauvais goût d'être une série harmonique divergente. Conclusion : la variable aléatoire a beau être définie presque sûrement, elle n'admet pas d'espérance (c'est intuitivement assez étrange, mais c'est comme ça).

Exercice 4 (***)

1. La moyenne d'une loi de Poisson est égale à son paramètre, on a donc $P(X=k)=e^{-M}\dfrac{M^k}{k!}$.
2. Si $j<k$, $P_{X=j}(Y=k)=0$ (on ne peut pas avoir plus de reçus que de candidats !). Sinon, à $X=j$ fixé, le nombre de candidats reçus suit une loi binomiale de paramètre (j,p), donc $P_{X=j}(Y=k)=\dbinom{j}{k}p^k(1-p)^{j-k}$.
3. Il faut prendre en compte toutes les valeurs possibles de j (autrement dit appliquer la formule des probabilités totales au système complet d'évènements formé des $X=j$, pour $j\in\mathbb{N}$), et on obtient $P(Y=k)=\displaystyle\sum_{j=k}^{+\infty}P(X=j)P_{X=j}(Y=k)=\sum_{j=k}^{+\infty}e^{-M}\frac{M^j}{j!}\binom{j}{k}p^k(1-p)^{j-k}$.
4. Il « suffit » de simplifier l'expression précédente :
$$P(Y=k)=e^{-M}p^k\sum_{j=k}^{+\infty}\frac{M^j}{j!}\frac{j!}{k!(j-k)!}(1-p)^{j-k}=e^{-M}p^kM^k\sum_{j=k}^{+\infty}\frac{M^{j-k}(1-p)^{j-k}}{k!(j-k)!}$$
$$=e^{-M}\frac{(Mp)^k}{k!}\sum_{j=k}^{+\infty}\frac{(M(1-p))^{j-k}}{(j-k)!}=e^{-M}\frac{(Mp)^k}{k!}e^{M-Mp}=e^{-Mp}\frac{(Mp)^k}{k!}.$$
On reconnait la forme d'une loi de Poisson, seul le paramètre a changé : $Y\sim\mathcal{P}(Mp)$.

Exercice 5 (**)

Le skieur reprendra la même perche si le nombre de skieurs qui sont passés entre temps vaut $N-1$, $2N-1$, …, $kN-1$ pour un entier $k\geqslant 1$. Puisque ce nombre de skieurs est censé suivre une loi géométrique X, la probabilité recherchée vaut $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}P(X=kN-1)=\sum_{k=1}^{+\infty}p(1-p)^{kN-2}=\frac{p}{(1-p)^2}\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^{kN}=\frac{p}{(1-p)^2}\sum_{k=1}^{+\infty}((1-p)^N)^k=\frac{p}{(1-p)^2}\left(\frac{1}{1-(1-p)^N}-1\right)=\frac{p(1-p)^{N-2}}{1-(1-p)^N}$.
Un petit calcul supplémentaire pour vérifier la crédibilité de la formule (calcul qui n'était pas demandé dans l'énoncé) : quand p tend vers 0, ce qui revient à faire tendre l'espérance de la loi géométrique vers $+\infty$, on peut intuitivement s'attendre à ce que notre probabilité tende vers $\dfrac{1}{N}$ (en effet, si énormément de gens sont passés par le téléski, la valeur de N devient négligeable et toutes les perches tendent à être équiprobables). Et en effet, quand p tend vers 0, le numérateur de notre expression est équivalent à p (le second facteur tend vers 1), et le dénominateur peut se développer à l'aide du binôme de Newton sous la forme $1-(1-Np+o(p))$ (il s'agit d'un polynôme dont les termes prépondérants sont ceux de petits degré quand p tend vers 0), ce qui donne pour équivalent Np. Le quotient a donc bien comme limite $\dfrac{1}{N}$.

Exercice 6 (**)

1. Chacune des trois variables suit une loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{6}$.
2. C'est un calcul dont on va finir par avoir l'habitude : $P(X_i\leqslant k)=\displaystyle\sum_{j=1}^{j=k}p(1-p)^{j-1}=p\times\frac{1-(1-p)^k}{1-(1-p)}=1-(1-p)^k=1-q^k$ (avec ici $p=\dfrac{1}{6}$, mais on continuera les calculs de façon formelle, c'est aussi simple).

3. Comme $X = \max(X_1, X_2, X_3)$, on aura $(X \leqslant k) = (X_1 \leqslant k) \cap (X_2 \leqslant k) = \cap(X_3 \leqslant k)$, d'où en utilisant la supposition d'indépendance $P(X \leqslant k) = (1-q^k)^3$.
4. L'évènement $X = k$ se produit si $X \leqslant k$ est réalisé, mais pas $X \leqslant k-1$, donc $P(X = k) = P(X \leqslant k) - P(X \leqslant k-1) = (1-q^k)^3 - (1-q^{k-1})^3 = 1 - 3q^k + 3q^{2k} - q^{3k} - 1 + 3q^{k-1} - 3q^{2k-2} + q^{3k-3} = 3q^{k-1}(1-q) - 3q^{2(k-1)}(1-q^2) + q^{3(k-1)}(1-q^3)$.
5. L'espérance existe, son calcul fait intervenir plusieurs séries géométriques dérivées : $E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} 3(1-q)kq^{k-1} - 3(1-q^2)k(q^2)^{k-1} + (1-q^3)k(q^3)^{k-1} = 3\frac{1-q}{(1-q)^2} - 3\frac{1-q^2}{(1-q^2)^2} + \frac{1-q^3}{(1-q^3)^2} = \frac{3}{1-q} - \frac{3}{1-q^2} + \frac{1}{1-q^3}$. Dans le cas qui nous intéresse ici, $q = \frac{5}{6}$, donc $E(X) = \frac{3}{1-\frac{5}{6}} - \frac{3}{1-\frac{25}{36}} + \frac{1}{1-\frac{125}{216}} = 18 - \frac{108}{11} + \frac{216}{81} \simeq 10.85$.

Exercice 7 (***)

1. Chacune des deux lois est une loi géométrique de paramètre p, donc $P(X = k) = P(Y = k) = p(1-p)^{k-1}$.
2. On a $P(X_A = X_B) = \sum_{k=1}^{+\infty} P((X_A = k) \cap (X_B = k)) = \sum_{k=1}^{+\infty} (p(1-p)^{k-1})^2 = p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} ((1-p)^2)^{k-1} = \frac{p^2}{(1-(1-p)^2)} = \frac{p^2}{2p-p^2} = \frac{p}{2-p}$.
3. C'est un simple calcul de somme : $P(X \geqslant k) = \sum_{i=k}^{+\infty} P(X = i) = \sum_{i=k}^{+\infty} p(1-p)^{i-1} = p(1-p)^{k-1} \sum_{i=1}^{+\infty} (1-p)^{i-1} = \frac{p(1-p)^{k-1}}{1-(1-p)} = (1-p)^{k-1}$.
4. En admettant que les deux variables sont indépendantes, on a $P(X_B \geqslant X_A) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_A = k)P(X_B \geqslant k) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1}(1-p)^{k-1} = p\sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{2k-2} = p\sum_{k=1}^{+\infty} ((1-p)^2)^{k-1} = p\frac{1}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{2p-p^2} = \frac{1}{2-p}$.
   Autre façon de voir les choses : les évènements $X_A \geqslant X_B$ et $X_B \geqslant X_A$ ont la même probabilité pour une raison de symétrie évidente, et la probabilité de leur intersection, $X_A = X_B$, a été calculée plus faut, donc $P((X_A \geqslant X_B) \cup (X_B \geqslant X_A)) = 2P(X_B \geqslant X_A) - P(X_A = X_B)$, soit, l'évènement de gauche étant certain, $1 = 2P(X_B \geqslant X_A) - \frac{p}{2-p}$, puis $2P(X_B \geqslant X_A) = \frac{2}{2-p}$, et enfin $P(X_B \geqslant X_A) = \frac{1}{2-p}$.

Exercice 8 (EDHEC 1998) (***)

1. L'évenement $X = 2$ se produit si on tire Pile puis Face aux deux premiers lancers, ce qui donne une probabilité $\frac{1}{4}$.
   (a) Pour avoir $X = 3$, il faut avoir Pile et Face aux deuxième et troisième lancers, ce qui réduit les possibilités aux tirages PPF et FPF, pour lesquels on a effectivement $X = 3$. On a donc $P(X = 3) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$.

(b) Constatons qu'à partir du moment où on obtient un Pile, le premier Face qui apparaitra sera précédé d'un Pile. Les seuls possibilités d'avoir $X = k$ sont donc $\underbrace{P\dots P}_{k-1}F$; $F\underbrace{P\dots P}_{k-2}F$; $FF\underbrace{P\dots P}_{k-3}F$; $\dots$; $\underbrace{F\dots F}_{k-2}PF$, soit $k-1$ tirages possibles (le nombre de Pile varie en effet entre 1 et $k-1$).

(c) Chacun de ces $k-1$ tirages ayant une probabilité $\frac{1}{2^k}$, on a $P(X = k) = \frac{k-1}{2^k}$.

(d) L'événement $X = 0$ se produit si aucun des événements $X = k$ ne se produit. Autrement dit, les événements $X = k$ étant incompatibles, on a $P(X = 0) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k)$ (cette dernière série converge nécessairement car elle est majorée par 1). Or, $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k-1}{2^k} = \frac{1}{4}\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k-1}{2^{k-2}} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{4} \times 4 = 1$. On en déduit que $P(X = 0) = 0$. L'événement $X = 0$ est négligeable.

2. (a) En effet, si le premier Face apparait avant le $k$ème lancer, on aura un PF avant le lancer k, donc $X < k$. Et si on n'a pas de Face du tout, naturellement, $X > k$.

(b) On utilise la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements $(P1, F1)$: $P(X = k) = P((X = k) \cap P_1) + P((X = k) \cap F_1)$. D'après la remarque précédente, le premier terme vaut $\frac{1}{2^k}$ puisqu'il y a un seul tirage possible. Par contre, pour le deuxième terme, on peut oublier le premier tirage puisque c'est un face, et regarder si on obtient un PF sur les $k-1$ derniers tirages, ce qui se produit avec probabilité $P(X = k-1)$, d'où la relation annoncée.

(c) Si on multiplie l'égalité précédente par 2^k, on obtient $2^k P(X = k) = 1 + 2^{k-1}P(X = k_1)$, soit $u_k = 1 + u_{k-1}$. La suite u_k est donc bien arithmétique, de raison 1 et de premier terme $u_1 = 0$. On a donc $u_k = k-1$. On en déduit que $P(X = k) = \frac{u_k}{2^k} = \frac{k-1}{2^k}$.

3. C'est un calcul de somme géométrique dérivée seconde, qui converge donc :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k(k-1)}{2^k} = \frac{1}{4}\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k(k-1)}{2^{k-2}} = \frac{1}{4}\frac{2}{(1-\frac{1}{2})^3} = 4.$$

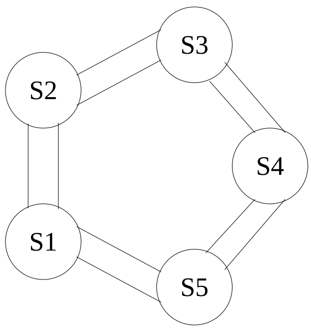
Sujet d'annales : ESSEC 2008

ECE3 Lycée Carnot

19 avril 2010

Exercice 1 : probabilités discrètes

Deux personnes P_1 et P_2 ont rendez-vous dans un complexe formé de cinq sites S_1, S_2, S_3, S_4 et S_5 disposés en pentagone et reliés par des routes, comme l'illustre le schéma ci-dessous. Ils arrivent au rendez-vous à l'heure prévue, mais suite à un malentendu, P_1 se présente au site S_1 et P_2 au site S_2.



Ils décident alors de partir à la recherche l'un de l'autre. Ils empruntent les différentes routes du complexe, avec les règles suivantes :

- à partir d'un site, chacun choisit de se rendre sur l'un des deux sites voisins, les deux possibilités étant équiprobables ;
- les déplacements des deux personnes se font simultanément ;
- tous les choix de déplacement se font indépendamment les uns des autres.

Ils continuent à se déplacer ainsi jusqu'à se retrouver éventuellement sur un même site (ils ne se rencontrent pas le long des routes). Une fois retrouvés, ils ne se déplacent plus.

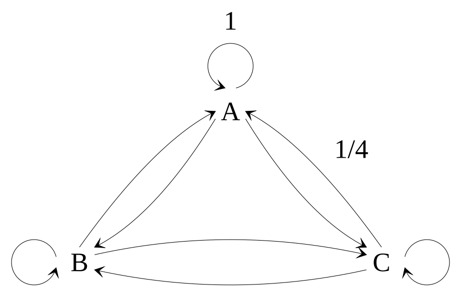
A. Modélisation du problème

Pour tout entier naturel n, on définit les trois évènements A_n, B_n, C_n :

- A_n : « les deux personnes sont sur le même site après le $n^{\text{ème}}$ déplacement »
- B_n : « les deux personnes sont sur des sites adjacents après le $n^{\text{ème}}$ déplacement »
- C_n : « les deux personnes sont à deux routes de distance après le $n^{\text{ème}}$ déplacement »

On note a_n, b_n, c_n les probabilités des évènements A_n, B_n, C_n.

1. Justifier que A_n, B_n, C_n forment un système complet d'évènements.
2. Déterminer les valeurs de a_0, b_0 et c_0.
3. (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{C_n}(A_{n+1}) = \dfrac{1}{4}$.
   (b) Justifier $P_{A_n}(A_{n+1}) = 1$.
   (c) Déterminer toutes les probabilités conditionnelles analogues. On représentera les résultats en reproduisant et complétant le schéma suivant :



4. Etablir les relations suivantes, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $\left\{\begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & a_n + \dfrac{1}{4}c_n \\ b_{n+1} & = & \dfrac{3}{4}b_n + \dfrac{1}{4}c_n \\ c_{n+1} & = & \dfrac{1}{4}b_n + \dfrac{1}{2}c_n \end{array}\right.$
5. (a) Déterminer une relation entre b_{n+2}, b_{n+1} et b_n.
   (b) En déduire une expression de b_n en fonction de n.
   On fera intervenir les nombres $\alpha = \dfrac{5-\sqrt{5}}{8}$ et $\beta = \dfrac{5+\sqrt{5}}{8}$.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $c_n = \dfrac{\sqrt{5}}{5}(\beta^n - \alpha^n)$.
6. (a) Exprimer a_n en fonction de n, α et β.
   On pourra s'intéresser à la somme $a_n + b_n + c_n$.
   (b) Déterminer la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Quelle est la probabilité que les deux personnes ne se retrouvent jamais ?

B. Nombre de déplacements avant rencontre

On définit la variable aléatoire X égale au nombre de déplacements effectués par chacune des personnes avant leur rencontre sur un même site.

1. Déterminer $X(\Omega)$, l'ensemble des valeurs prises par X.
2. Soit $n \in X(\Omega)$, montrer : $P(X = n) = \dfrac{\sqrt{5}}{20}(\beta^{n-1} - \alpha^{n-1})$.
3. Calculer l'espérance de X.
4. Calculer la variance et l'écart-type de X.

Exercice 2 : probabilités et analyse

Dans certaines situations (paris sportifs, investissements financiers...), on est amené à miser de l'argent de façon répétée sur des paris à espérance favorable. On se propose de mettre en place une stratégie afin d'optimiser les gains à long terme.

On adopte ici le cadre simplifié suivant : on considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ indépendantes et suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre p.

Un joueur mise une partie M_n de son capital sur la réalisation de l'évènement $(X_n = 1)$, pour chaque $n > 1$. La variable M_n est supposée indépendante des variables X_k, $k \in \mathbb{N}^*$.
En cas de victoire, il double sa mise (son capital est donc augmenté de M_n), en cas de défaite il perd sa mise (son capital diminue de M_n).

Initialement, le joueur dispose du capital $C_0 > 0$, puis on note C_n la variable aléatoire égale au capital détenu à l'issue du $n^{\text{ième}}$ pari.
On a ainsi l'encadrement : $0 \leqslant M_{n+1} \leqslant C_n$ pour tout entier n.

Le jeu est supposé favorable, on considèrera dans tout le problème : $\dfrac{1}{2} < p < 1$.

I. Quitte ou double

1. Déterminer deux réels a et b vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $C_{n+1} = C_n + (aX_{n+1} + b)M_{n+1}$.
2. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $E(C_n) = C_0 + (2p-1)\displaystyle\sum_{k=1}^{n} E(M_k)$.
   En déduire que pour maximiser $E(C_n)$ il faut miser tout son capital à chaque pari.
3. Montrer que cette stratégie, dite du "quitte ou double", conduit de façon quasi-certaine à la ruine du joueur, et déterminer le nombre moyen de parties conduisant à la ruine (on parle de ruine s'il existe un entier naturel n pour lequel $C_n = 0$).

II. Stratégie à mises proportionnelles

La stratégie précédente étant risquée, le joueur décide d'engager dans chaque pari une fraction du capital dont il dispose : on a ainsi $M_{n+1} = \alpha C_n$, avec $\alpha \in]0,1[$ indépendant de n.

1. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}$, $C_{n+1} = (1+\alpha)^{X_{n+1}}(1-\alpha)^{1-X_{n+1}}C_n$.
2. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.
   Que représente la variable aléatoire S_n ?
   Déterminer la loi de S_n et son espérance.
3. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $C_n = (1+\alpha)^{S_n}(1-\alpha)^{n-S_n}C_0$.
4. Montrer que : $E\left[\dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{C_n}{C_0}\right)\right] = p\ln(1+\alpha) + (1-p)\ln(1-\alpha)$.

Par la suite, on cherche à maximiser cette quantité, ce qui équivaut à maximiser l'espérance du *taux moyen de croissance* du capital.

III. Optimisation : le critère de Kelly

On pose, pour tout $x \in [0,1[$, $f(x) = p\ln(1+x) + (1-p)\ln(1-x)$.

1. Étude de f.
   (a) Étudier les variations de f sur $]0,1[$, et montrer que f est concave.
   Montrer que f admet un maximum sur $]0,1[$, atteint en un unique réel α_K que l'on exprimera en fonction de p.
   (b) Déterminer la limite de f en 1 et interpréter le résultat.
   (c) Montrer que f s'annule deux fois exactement sur $[0,1[$: en 0 et en un réel α_c vérifiant $\alpha_K < \alpha_c$.
   (d) Donner l'allure de la courbe représentative de f sur $[0,1[$.
2. **Conclusion :** le choix $\alpha = \alpha_K$ est celui qui optimise la croissance de gain à long terme.
   Que donnerait l'expression de α_K dans les cas limites $p = \dfrac{1}{2}$ et $p = 1$?
   Interpréter ces deux résultats.

IV. Étude de la valeur critique α_c

Les choix de α au-delà de la valeur critique α_c conduisent à une perte de capital. On cherche dans cette partie un équivalent de α_c lorsque p est proche de $\dfrac{1}{2}$.
On considèrera dans ce qui suit que α_c est une fonction de p (on écrira ainsi $\alpha_c(p)$).

1. On définit la fonction φ sur $]0,1[$ par $\varphi(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)}$.
   (a) Montrer que φ est prolongeable par continuité sur l'intervalle $[0,1]$. On notera encore φ ce prolongement.
   (b) Justifier que φ est dérivable sur $]0,1[$, et mettre l'expression de sa dérivée sous la forme
   $$\varphi'(x) = \frac{h(x)}{(1-x^2)[\ln(1-x)]^2}$$
   (c) Déterminer les variations de h sur $]0,1[$.
   (d) Montrer que φ réalise une bijection de $[0,1]$ sur un intervalle à préciser.
2. Montrer que φ est dérivable en 0 et que $\varphi'(0) = 1$.
   On commencera par donner le développement limité en 1 à l'ordre 2 de la fonction ln.
3. (a) Établir : $\forall p \in \left]\dfrac{1}{2}, 1\right[$, $\alpha_c(p) = \varphi^{-1}\left(1 - \dfrac{1}{p}\right)$.
   (b) En déduire que α_c est prolongeable par continuité en $\dfrac{1}{2}$, que ce prolongement est dérivable en $\dfrac{1}{2}$ et que :
   $$\alpha_c'\left(\frac{1}{2}\right) = 4$$
   (c) Établir l'équivalence, au voisinage de $\dfrac{1}{2}$:
   $$\alpha_c \sim 2\alpha_K$$

Conclusion : pour des valeurs de p proches de $\dfrac{1}{2}$ (c'est-à-dire des paris "légèrement" favorables, un cas très fréquent), il faut prendre $\alpha < 2\alpha_K$.
Par sécurité (p n'est en pratique connu qu'approximativement), les parieurs choisissent souvent $\alpha = \dfrac{\alpha_K}{2}$, la moitié de la valeur de Kelly.

V. Simulation informatique

Le programme `kelly1` qui suit, écrit en language Pascal, permet d'illustrer ce qui précède :

- le capital initial est fixé à 100 ;
- en entrée, le programme demande la valeur de p, la valeur de α à utiliser et le capital que l'on souhaite atteindre ;
- en sortie, le programme renvoie le nombre de parties jouées pour atteindre l'objectif demandé.

```
program kelly1 ;
var    n : integer ;
cap, cap_obj,u,p,alpha :    real ;
begin
     writeln('valeur de p : ') ; read (p) ;
     writeln (' objectif à atteindre : ') ; read (cap_obj) ;
     writeln( 'valeur de alpha :') ; read(alpha) ;
     cap :=100 ;
     n :=0 ;
     randomize ;
     while ********** do
     begin
          u :=random ;
          if u<p then
          begin ********** end
          else
          begin ********** end ;
     **********
     end ;
     writeln ( ' nombre_de_parties_jouées_ : ',n) ;
     writeln( ' capital_atteint_ : ' cap)
end.
```

1. Compléter les quatre lignes d'instructions manquantes.
2. Afin de vérifier que la stratégie de Kelly est optimale, on modifie le programme `kelly1` de la façon suivante :
   - les entrées restent les mêmes ;
   - le nouveau programme calcule la valeur de Kelly α_K ;
   - en sortie, le nouveau programme renvoie, en plus du nombre de parties jouées pour atteindre l'objectif demandé, le capital que l'on aurait obtenu si on avait choisi la valeur α_K à la place de α pendant ces mêmes parties.

   Écrire le programme `kelly2` qui réalise ces modifications, uniquement en insérant des nouvelles instructions au programme `kelly1`.

Corrigé du sujet ESSEC 2008

Exercice 1 : probabilités discrètes

A. Modélisation du problème

1. Les évènements A_n, B_n et C_n sont manifestement incompatibles (sauf si une des deux personnes a le don d'uniquité), et P_1 et P_2 ne peuvent pas se trouver à plus de deux routes de distance sur le pentagone. L'un des trois évènements A_n, B_n et C_n est donc nécessairement modifié, et ceux-ci forment un système complet d'évènements.
2. L'énoncé stipulant que P_1 et P_2 se trouvent initialement en S_1 et S_2, c'est-à-dire sur des sites adjacents, $b_0 = 1$ et $a_0 = c_0 = 0$.
3. (a) Supposons donc C_n vérifié, autrement dit que P_1 et P_2 se trouvent à deux routes de distance, par exemple en S_1 et en S_3. Au déplacement suivant, P_1 peut donc se trouver en S_2 ou en S_5, et P_2 en S_2 ou en S_4. Les quatres (deux fois deux) possibilités étant équiprobables, et une seule voyant nos deux personnes aboutir au même endroit, on a bien $P_{C_n}(A_{n+1}) = \dfrac{1}{4}$. Accessoirement, on constate que sur les trois cas restants, un seul amène nos deux compères à des sites adjacents, et deux les laissent à deux routes de distance, donc $P_{C_n}(B_{n+1}) = \dfrac{1}{4}$ et $P_{C_n}(C_{n+1}) = \dfrac{1}{2}$.

   (b) Ca c'est beaucoup plus facile ! L'énoncé stipulant que P_1 et P_2 arrêtent de bouger une fois qu'ils se rencontrent, A_{n+1} sera automatiquement vérifié si A_n l'est, d'où $P_{A_n}(A_{n+1}) = 1$ (et donc bien sûr $P_{A_n}(B_{n+1}) = P_{A_n}(C_{n+1}) = 0$).

   (c) Ne reste plus qu'à supposer B_n réalisé et à voir ce qui se passe. On a alors par exemple P_1 en S_1 et P_2 en S_2, d'où après le déplacement suivant les quatre possibilités (S_5, S_1) ; (S_5, S_3) ; (S_2, S_1) et (S_2, S_3). Dans trois cas les compères sont toujours sur des sites adjacents, dans le dernier ils se retrouvent à deux routes d'écart, donc $P_{B_n}(B_{n+1}) = \dfrac{3}{4}$; $P_{B_n}(C_{n+1}) = \dfrac{1}{4}$, et $P_{B_n}(A_{n+1}) = 0$.
4. Appliquons la formule des probabilités totales au systèmes complet d'évènements (A_n, B_n, C_n) : $P_{A_{n+1}} = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) + P(A_n) \times P_{C_n}(A_{n+1}) = a_n + \dfrac{1}{4}c_n$. Les deux autres relations s'obtiennent de façon similaire en exploitant les calculs de probabilités conditionnelles précédents.
5. (a) En décalant la deuxième relation de la question précédente, puis en exploitant la troisième, on obtient $b_{n+2} = \dfrac{3}{4}b_{n+1} + \dfrac{1}{4}c_{n+1} = \dfrac{3}{4}b_{n+1} + \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{4}b_n + \dfrac{1}{2}c_n\right) = \dfrac{3}{4}b_{n+1} + \dfrac{1}{16}b_n + \dfrac{1}{8}c_n$. Mais, en reprenant une fois de plus la deuxième relation et en la « retournant » un peu, on a $\dfrac{1}{4}c_n = b_{n+1} - \dfrac{3}{4}b_n$, donc en reportant $b_{n+2} = \dfrac{3}{4}b_{n+1} + \dfrac{1}{16}b_n + \dfrac{1}{2}b_{n+1} - \dfrac{3}{8}b_n = \dfrac{5}{4}b_{n+1} - \dfrac{5}{16}b_n$.

   (b) La suite (b_n) est donc récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - \dfrac{5}{4}x + \dfrac{5}{16} = 0$. Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = \dfrac{25}{16} - \dfrac{20}{16} = \dfrac{5}{16} = \left(\dfrac{\sqrt{5}}{4}\right)^2$, et ses deux racines sont, sans grande surprise, $\dfrac{\frac{5}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}}{2} = \alpha$ et $\dfrac{5+\sqrt{5}}{8} = \beta$.

   On peut donc écrire $b_n = w\alpha^n + z\beta^n$, avec $b_0 = 1$, et $b_1 = \dfrac{3}{4}b_0 + \dfrac{1}{4}c_0 = \dfrac{3}{4}$, donc $w + z = 1$, ou encore $z = 1 - w$; et $w\alpha + z\beta = \dfrac{3}{4}$, soit $w\alpha + (1-w)\beta = \dfrac{3}{4}$, donc $w(\alpha - \beta) = \dfrac{3}{4} - \beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{8}$. Comme $\alpha - \beta = \dfrac{-2\sqrt{5}}{8} = -\dfrac{\sqrt{5}}{4}$, on a donc $w = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} = \dfrac{5-\sqrt{5}}{10}$; puis $z = 1 - w = \dfrac{5+\sqrt{5}}{10}$. Finalement, $b_n = \dfrac{1}{5}(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1})$.

(c) En reprenant (et en multipliant par 4) la deuxième relation de la question 4, on obtient $c_n = 4b_{n+1} - 3b_n = \frac{4}{5}(\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}) - \frac{3}{5}(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}) = \frac{\alpha^n}{5}(4\alpha^2-3\alpha)+\frac{\beta^n}{5}(4\beta^2-3\beta)$. Or, en reprenant l'équation caractéristique de (b_n), on a $4\alpha^2 - 3\alpha = 2\alpha - \frac{5}{4} = \frac{5-\sqrt{5}}{4} - \frac{5}{4} = -\sqrt{5}$; de même $4\beta^2 - 3\beta = 2\beta - \frac{5}{4} = \frac{5+\sqrt{5}}{4} - \frac{5}{4} = \sqrt{5}$. Finalement, la relation devient donc $c_n = \frac{\sqrt{5}}{5}(\beta^n - \alpha^n)$ comme annoncé dans l'énoncé.

6. (a) En revenant à la toute première question du sujet, la complétude du système d'évènements permet d'affirmer que $a_n = 1 - b_n - c_n = 1 - \frac{1}{5}(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}) - \frac{\sqrt{5}}{5}(\beta^n - \alpha^n)$, qu'on peut tenter de simplifier ou non selon son courage (la formule exacte n'a ici que peu d'intérêt, on s'en dispensera donc).

(b) Hormis le 1 initial, (a_n) est une somme de suites géométriques de raison α ou β. Or, $2 < \sqrt{5} < 3$, donc $2 < 5 - \sqrt{5} < 5 + \sqrt{5} < 8$, ce qui suffit à constater que $|\alpha| < 1$ et $|\beta| < 1$. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$.

(c) Notons D l'évènement « Les deux personnes ne se rencontrent jamais ». On a donc $\bar{D} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Cette union est formée d'une suite croissante d'évènements (cf question 3.b), donc par théorème de la limite monotone a pour probabilité $\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = 1$. Par passage au complémentaire, on peut dire que $P(D) = 0$, autrement dit qu'il est quasi-sûr que les personnes finiront par se rencontrer.

B. Nombre de déplacements avant rencontre

1. La variable X prend bien sûr ses valeurs dans $\mathbb{N}$, mais ne peut pas être égale à 0, ni à 1 (car $P_{B_n}(A_{n+1}) = 0$, donc $P(A_1) = 0$. On a en fait $X(\Omega) = \{2, 3, \ldots\}$.

2. L'évènement X_n est réalisé si A_n est réalisé mais pas A_{n-1}, donc si $A_n \cap B_{n-1}$ ou $A_n \cap C_{n-1}$ sont réalisés. Le premier cas étant impossible, $P(X_n) = P(A_n \cap C_{n-1}) = P(C_{n-1}) \times P_{C_{n-1}}(A_n) = \frac{1}{4}c_{n-1} = \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{5}}{20}(\beta^{n-1} - \alpha^{n-1}) = \frac{\sqrt{5}}{20}(\beta^{n-1} - \alpha^{n-1})$.

3. L'espérance de X existe car $nP(X = n)$ est une somme de termes généraux de séries géométriques dérivées convergentes. Calculons-la donc :
$E(X) = \sum_{n=2}^{+\infty} n\frac{\sqrt{5}}{20}(\beta^{n-1}-\alpha^{n-1}) = \frac{\sqrt{5}}{20}\left(\frac{1}{(1-\beta)^2} - 1 - \frac{1}{(1-\alpha)^2} + 1\right) = \frac{\sqrt{5}}{20}\left(\frac{1}{(1-\beta)^2} - \frac{1}{(1-\alpha)^2}\right)$.
Or, $\frac{1}{(1-\beta)^2} = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{8}\right)^{-2} = \frac{64}{14-6\sqrt{5}}$; et $\frac{1}{(1-\alpha)^2} = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{8}\right)^{-2} = \frac{64}{14+6\sqrt{5}}$. D'où $\frac{1}{(1-\beta)^2} - \frac{1}{(1-\alpha)^2} = \frac{64}{14-6\sqrt{5}} - \frac{64}{14+6\sqrt{5}} = \frac{64(14+6\sqrt{5}-14+6\sqrt{5})}{196-36\times 5} = \frac{64 \times 12\sqrt{5}}{16} = 48\sqrt{5}$. Encore un petit effort et on en voit le bout : $E(X) = \frac{\sqrt{5}}{20} \times 48\sqrt{5} = 12$. Il faudra donc en moyenne 12 déplacements (chacun) pour que P_1 et P_2 se rejoignent.

4. Tentons de calculer $E(X(X-1)) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\frac{\sqrt{5}}{20}(\beta^{n-1} - \alpha^{n-1}) = \frac{\sqrt{5}\beta}{20}\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\beta^{n-2} - \frac{\sqrt{5}\alpha}{20}\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\alpha^{n-2} = \frac{\sqrt{5}}{10}\left(\frac{\beta}{(1-\beta)^3} - \frac{\alpha}{(1-\alpha)^3}\right)$. On simplifie ? Allez, soyons fous : $\frac{\beta}{(1-\beta)^3} = \beta \times \left(\frac{3-\sqrt{5}}{8}\right)^{-3} = \frac{512\beta}{72-32\sqrt{5}} = \frac{64(5+\sqrt{5})}{72-32\sqrt{5}} = \frac{64(5+\sqrt{5})(72+32\sqrt{5})}{72^2 - 32^2 \times 5} = \frac{64(520+232\sqrt{5})}{5\ 184 - 5\ 120} =$

$520+232\sqrt{5}$; de même $\dfrac{\alpha}{(1-\alpha)^3} = \alpha \times \left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{8}\right)^{-3} = \dfrac{512\alpha}{72+32\sqrt{5}} = \dfrac{64(5-\sqrt{5})(72-32\sqrt{5})}{72^2 - 32^2 \times 5} =$ $520-232\sqrt{5}$. Tout compte fait, ce n'est pas si immonde que ça : $E(X(X-1)) = \dfrac{\sqrt{5}}{10} \times 464\sqrt{5} =$ 232. On en déduit via König-Huygens que $V(X) = E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2 = 232 + 12 - 12^2 = 244 - 144 = 100$, soit $\sigma(X) = 10$ (qui eût cru à un résultat si simple il y a quelques lignes ? Hein, je suis sûr que vous avez douté, soyez francs un peu !).

À propos de ces deux dernières questions, le raport du jury est étonamment sobre, se contentant de signaler que « les calculs sont très rarement menés correctement à leur terme ». J'aurais aimé connaitre le nombre de copies qui ont trouvé le 10 ci-dessus...

Exercice 2 : probabilités et analyse

I. Quitte ou double

1. On doit avoir $C_{n+1} = C_n + M_{n+1}$ si $X_{n+1} = 1$, et $C_{n+1} = C_n - M_{n+1}$ si $X_{n+1} = 0$. En constatant que $2X_{n+1} - 1$ prend respectivement la valeur 1 et la valeur -1 si X_{n+1} vaut 0 ou 1, on peut donc écrire $C_n = C_n + (2X_{n+1} - 1)M_{n+1}$.
2. Par linéarité de l'espérance appliquée ç l'équation précédente $E(C_n) - E(C_{n-1}) = E(2X_n - 1)M_n$. Les variables X_n et M_n étant indépendantes, on peut dire que $E((2X_n - 1)M_n) = (2E(X_n) - 1)E(M_n) = (2p-1)E(M_n)$ (j'admets, nous n'avons par encore vu cette propriété, qui sera dans le chapitre 19 du cours). En sommant toutes ces égalités, on a donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} E(C_k) - E(C_{k-1}) = (2p-1)\sum_{k=1}^{k=n} E(M_k)$ ce qui par télescopage sur la somme de gauche donne exactement le résultat demandé. Comme $2p-1$ est strictement positif au vu de l'hypothèse faite sur p, $E(C_n)$ est d'autant plus grande que les valeurs de $E(M_k)$ sont élevées. Comme M_k est par construction inférieur ou égal à C_{k-1}, il faut choisir $M_k = C_{k-1}$, autrement dit miser tout son capital à chaque fois, pour maximiser $E(C_n)$. Note du correcteur : en fait, la rédaction rigoureuse de cette question est plus compliquée que ça puisque M_k dépend de la valeur de C_{k-1}, ce qui suppose de faire une petite récurrence quelque part.
3. En misant à chaque fois tout ce qu'on possède, on est ruiné à la première partie où l'on perd. Notons X la variable aléatoire donnant le numéro de cette première partie perdue. Comme la probabilité de perdre une partie vaut $1-p$, X suit une loi géométrique de paramètre $1-p$. En particulier, X est définie quasi-sûrement (donc la ruine est quasi-certaine), et $E(X) = \dfrac{1}{1-p}$, qui représente donc le nombre moyen de parties avant la ruine du joueur.

II. Stratégie à mises proportionnelles

1. Puisqu'on nous donnes la formule, vérifions qu'elle fonctionne dans les deux cas possibles à savoir si $X_{n+1} = 1$ ou $X_{n+1} = 0$. Si on gagne, $(1+\alpha)^{X_{n+1}}(1-\alpha)^{1-X_{n+1}}C_n = (1+\alpha)C_n = C_n + M_{n+1} = C_{n+1}$. Si on perd, on a similairement $(1+\alpha)^{X_{n+1}}(1-\alpha)^{1-X_{n+1}}C_n = (1-\alpha)C_n = C_{n+1}$. La formule est donc correcte.
2. La variable S_n représente le nombre de parties gagnées parmi les n premières. On sait que S_n suit une loi bonômiale de paramètre (n, p) (note : l'hypothèse d'indépendance des variables X_k est essentielle pour que ce résultat soit vrai, nous reviendrons plus en détail sur ce genre de choses dans le chapitre 19), et a pour espérance $E(S_n) = np$.

3. Une petite récurrence est encore ce qu'il y a de plus simple : pour $n = 1$, comme $S_1 = X_1$, c'est la formule de la question 1. Supposons le résultat vrai pour C_n, alors $C_{n+1} = (1+\alpha)^{X_{n+1}}(1-\alpha)^{1-X_{n+1}}C_n = (1+\alpha)^{X_{n+1}}(1-\alpha)^{1-X_{n+1}}(1+\alpha)^{S_n}(1-\alpha)^{n-S_n}C_0 = (1+\alpha)^{X_{n+1}+S_n}(1-\alpha)^{1-X_{n+1}+n-S_n}C_0 = (1+\alpha)^{S_{n+1}}(1-\alpha)^{n+1-S_{n+1}}C_0$, ce qui achève la preuve de l'hérédité et la récurrence.
4. Passons au ln l'expression précédente : $\ln C_n = S_n \ln(1+\alpha) - (n - S_n)\ln\ln(1-\alpha) + \ln(C_0)$, soit $\ln \dfrac{C_n}{C_0} = S_n \ln(1+\alpha) + (n - S_n)\ln(1-\alpha)$ puis en mettant de l'espérance partout (et en utilisant sa linéarité) et en utilisant le calcul de l'espérance de S_n effectué plus haut : $E\left(\ln \dfrac{C_n}{C_0}\right) = np\ln(1+\alpha) + (n-np)\ln(1-\alpha)$. Il ne reste plus qu'à tout diviser par n pour obtenir la formule souhaitée (le $\dfrac{1}{n}$ à gauche pouvant passer dans l'espérance en bonne constante qu'il est).

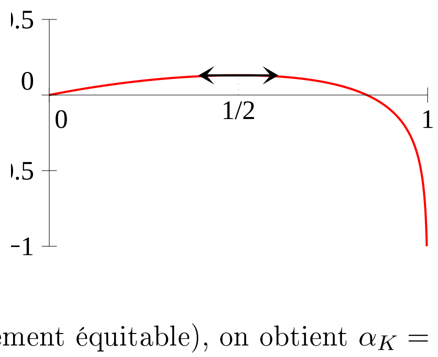
III. Optimisation : le critère de Kelly

1. (a) La fonction f est C^∞ sur $[0;1[$ (elle est définie sur $]-1;1[$), de dérivée $f'(x) = \dfrac{p}{1+x} - \dfrac{1-p}{1-x} = \dfrac{p(1-x)+(p-1)(1+x)}{1-x^2} = \dfrac{p-px+p+px-1-x}{1-x^2} = \dfrac{2p-1-x}{1-x^2}$. Sur l'intervalle $[0;1[$, $1-x^2 > 0$, donc f' est du signe de $2p-1-x$, qui s'annule en $\alpha_K = 2p-1$ (qui appartient bien à $[0;1[$ vu les hypothèses faites sur p). La fonction f étant croissante sur $[0;2p-1]$ et décroissante ensuite, f admet bien en α_K un maximum. De plus, $f''(x) = \dfrac{-(1-x^2)+2x(2p-1-x)}{(1-x^2)^2} = \dfrac{x^2-1+4px-2x-2x^2}{(1-x^2)^2} = \dfrac{-1+(4p-2)x-x^2}{(1-x^2)^2}$. Le numérateur de ce quotient a pour discriminant $\Delta = (4p-2)^2 - 4$. Or, $4p-2 < 2$ (puisque $p < 1$), donc $\Delta < 0$, et f'' est toujours négative, ce qui prouve la concavité de f.

   (b) Comme $\lim\limits_{x\to 1} \ln(1-x) = -\infty$, et $1-p > 0$, on obtient $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty$. On en déduit que, si on fait tendre α vers 1, $E\left(\dfrac{1}{n}\ln\dfrac{C_n}{C_0}\right)$ tend vers $-\infty$, autrement dit que $E\left(\dfrac{C_n}{C_0}\right)$ tend vers 0. C'est une nouvelle façon de constater que si on tend à miser tout ce qu'on a, on va certainement se ruiner.

   (c) Calculons $f(0) = p \times 0 + (1-p) \times 0 = 0$, donc f s'annule effectivement en 0. Étant ensuite strictement croissante donc bijective sur $[0;\alpha_K]$, elle ne s'nnulera pas une deuxième fois sur cet intervalle, mais on peut par contre en déduire que $f(\alpha_K) > 0$. Comme f est ensuite strictement décroissante et de limite $-\infty$ en 1, une nouvelle application du théorème de la bijection révèle l'existence (et l'unicité) d'un deuxième point d'annulation α_C appartenant à $]\alpha_K;1[$.

   (d) Voici à quoi ça ressemble pour $p = \dfrac{3}{4}$ (donc $\alpha_K = \dfrac{1}{2}$) :



2. Si on prend $p = \dfrac{1}{2}$ (pari exactement équitable), on obtient $\alpha_K = 2 \times \dfrac{1}{2} - 1 = 0$, ce qui signifie que pour optimiser le gain, il ne faut pas parier ! Cela est raisonnable puisque le jeu est équilibré

en moyenne dans ce cas, mais on a toujours le risque de se ruiner si on n'a pas de chance, alors qu'on n'a pas d'équivalent de la ruine « vers le haut » (on continuera à parier quoi qu'il arrive si on ne se ruine pas). Dans le cas où $p = 1$, on obtient $\alpha = 1$, ce qui signifie que si on est certain de toujours gagner on a intérêt à toujours miser tout ce qu'on a (pas besoin d'explication pour comprendre ce résultat-là...).

IV. Étude de la valeur critique α_C

1. (a) Le prolongement en 1 ne pose pas de problème : le numérateur tend vers $\ln 2$ et le dénominateur vers $-\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 1}\varphi(x) = 0$, on prolonge en posant $\varphi(1) = 0$. Du côté de 0, on sait que $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$, et donc $\ln(1-x) \underset{0}{\sim} -x$, d'où $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x}{-x} = -1$, et on peut prolonger φ en 0 en posant $\varphi(0) = -1$.

   (b) La fonction φ est dérivable sur $]0;1[$ par théorèmes généraux (son dénominateur ne s'annule pas), de dérivée $\varphi'(x) = \dfrac{\frac{\ln(1-x)}{1+x} + \frac{\ln(1+x)}{1-x}}{(\ln(1-x))^2} = \dfrac{h(x)}{(1-x^2)(\ln(1-x))^2}$, avec $h(x) = (1-x)\ln(1-x) + (1+x)\ln(1+x)$.

   (c) La fonction h est C^∞ sur $]0;1[$, de dérivée $h'(x) = -\ln(1-x) - \dfrac{1-x}{1-x} + \ln(1+x) + \dfrac{1+x}{1+x} = \ln\dfrac{1+x}{1-x}$. Or, $\forall x \in]0;1[$, $1+x > 1$ et $0 < 1-x < 1$, donc $\dfrac{1+x}{1-x} > 1$, et $h'(x) > 0$. La fonction h est donc strictement croissante sur $]0;1[$.

   (d) Comme par ailleurs $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0$, la fonction h est toujours strictement positive sur $]0;1[$, et φ est strictement croissante, donc bijective sur $]0;1[$ (sa dérivée étant du signe de h). On en déduit que φ est aussi bijective sur $[0;1]$, à valeurs dans $[-1;0]$ au vu des limites calculées un peu plus haut.

2. Signalons donc que $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$, et du coup que $\ln(1-x) \underset{0}{\sim} -x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$. On a donc $h(x) = (1-x)\left(-x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)\right) + (1+x)\left(x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = -x - \dfrac{x^2}{2} + x^2 + x - \dfrac{x^2}{2} + x^2 + o(x^2) \sim x^2$. Par ailleurs, $(1-x^2)(\ln(1-x))^2 \underset{x\to 0}{\sim} (-x)^2 \sim x^2$, donc on a $\varphi'(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{x^2} \sim 1$, c'est-à-dire que $\lim\limits_{x\to 0}\varphi'(x) = 1$. Il ne reste plus qu'à appliquer un petit coup de théorème du prolongement C^1 (φ est bien C^1 sur $]0;1[$) pour en déduire que φ est dérivable en 0, de dérivée $\varphi'(0) = 1$.

3. (a) Par définition de α_C, on a $p\ln(1+\alpha_C) + (1-p)\ln(1-\alpha_C) = 0$, soit $p\ln(1+\alpha_C) = (p-1)\ln(1-\alpha_C)$ et donc $\dfrac{\ln(1+\alpha_C)}{\ln(1-\alpha_C)} = \dfrac{p-1}{p}$ (on peut quotienter, α_C étant distinct de 0 et de 1). On a obtenu $\varphi(\alpha_C) = 1 - \dfrac{1}{p}$, ce qui donne bien la relation souhaitée.

   (b) Lorsque p tend vers $\dfrac{1}{2}$, $1 - \dfrac{1}{p}$ tend vers $1 - 2 = -1$. Or, au vu des résultats précédents, φ^{-1} est définie en -1, prenant pour valeur $\varphi'(-1) = 0$ (puisque $\varphi(0) = -1$), et y est même dérivable puisque φ est dérivable de dérivée non nulle en 0. En appliquant la formule de dérivation des fonctions réciproques, on a d'ailleurs $(\varphi^{-1})'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(\frac{1}{2}))} = \dfrac{1}{\varphi'(0)} = 1$. On en déduit que $\alpha_C\left(\dfrac{1}{2}\right) = \varphi^{-1}(-1) = 0$, et par dérivation de composée, $\alpha'_C(p) = \dfrac{1}{p^2}(\varphi^{-1})'\left(1 - \dfrac{1}{p}\right)$, donc $\alpha'_C\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{\frac{1}{4}}(\varphi^{-1})'(0) = 4$ comme annoncé.

(c) Au voisinage de $p = \dfrac{1}{2}$, on peut écrire le développement limité à l'ordre 1 de α_C : $\alpha_C(p) = \alpha_C\left(\dfrac{1}{2}\right) + \left(p - \dfrac{1}{2}\right)\alpha'_C\left(\dfrac{1}{2}\right) + o\left(p - \dfrac{1}{2}\right) \sim 4\left(p - \dfrac{1}{2}\right) \sim 4p - 2$, qui est égal à $2\alpha_K$, d'où l'équivalent annoncé.

V. Simulation informatique

1. Les quatre lignes en question deviennent logiquement :
```
while cap < cap_obj do
cap := (1+alpha)*cap;
cap := (1-alpha)*cap;
n := n+1;
```
2. Allez, recopions un programme complet :
```
PROGRAM kelly2;
VAR n : integer; cap,capkelly,capobj,u,p,alpha,alphakelly : real;
BEGIN
WriteLn('Valeur de p?'); ReadLn(p);
WriteLn('Objectif à atteindre?'); ReadLn(capobj);
WriteLn('Valeur de alpha?'); ReadLn(alpha);
cap := 100; capkelly := 100; alphakelly := 2*p-1; n := 0;
Randomize;
WHILE cap < capobj DO
BEGIN
u := random;
IF u<p THEN
BEGIN
cap := (1+alpha)*cap; capkelly := (1+alphakelly)*capkelly;
END
ELSE BEGIN
cap := (1-alpha)*cap; capkelly := (1-alphakelly)*capkelly;
END;
n := n+1;
END;
WriteLn('On a joué ',n,' parties');
WriteLn('Le capital atteint est de ',cap);
WriteLn('Le capital optimal aurait été de ',capkelly);
END.
```

Exercices et problèmes de révision pour le Concours Blanc n°2

ECE3 Lycée Carnot

16 avril 2010

Exercice 1

Factoriser les expressions suivantes $P(x) = 2x^2 - 4x^2 - 22x + 24$ et $Q(x) = e^{3x} + \frac{7}{12}e^{2x} - \frac{7}{12}x - \frac{1}{6}$.

Exercice 2

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{3 + 2u_n}{u_n + 4}$.

1. Montrer que (u_n) est bien définie et à valeurs strictement positives.
2. Montrer que $u_{n+1} = 1 \Leftrightarrow u_n = 1$ et en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 1$.
3. On pose $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique, en déduire son expression puis celle de (u_n).

Exercice 3

Résoudre le système suivant : $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & + & z & = & 4 \\ -x & + & y & + & 2z & = & 3 \\ 7x & + & 3y & - & 5z & = & 2 \end{array} \right.$

Exercice 4

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = A - 2I$. Vérifier que $B^2 = 3B$ puis prouver par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = 2^n I + \dfrac{5^n - 2^n}{3} B$. En déduire la valeur de A^4.

Exercice 5

Une urne contient cinq boules noires numérotées de 1 à 5, trois boules vertes numérotées de 1 à 3 et deux boules blanches numérotées 1 et 2. On tire trois boules dans l'urne successivements sans remise.

- Combien y a-t-il de tirages possibles ?
- Combien de tirages avec trois boules de la même couleur ?
- Combien de tirages avec uniquement des numéros strictement plus petits que 3 ?
- Combien de tirages avec un numéro apparaissant deux fois (exactement) ?
- Combien de tirages avec une boule de chaque couleur ?

Mêmes questions si on effectue désormais un tirage de trois boules simultané.

Exercice 6

Soit $n \geqslant 1$, et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1$.

1. Montrer que la fonction f_n s'annule une fois dans l'intervalle $[0;1]$. On note a_n cette valeur.
2. Déterminer la monotonie de la suite a_n et en déduire sa convergence.
3. Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $a_n - \dfrac{1}{2} = \dfrac{a_n^{n+1}}{2}$. Déterminer la limite de (a_n).

Exercice 7

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe deux suites (u_n) et (v_n) telles que $A^n = u_n A + v_n I$ et déterminer des relations de récurrence pour ces deux suites.
2. On pose $a_n = 2u_n + v_n$ et $b_n = u_n - v_n$. Déterminer a_{n+1} en fonction de a_n et b_{n+1} en fonction de b_n, en déduire la valeur de A^n.

Exercice 8

Un restaurant propose 3 menus $M1$, $M2$ et $M3$ et on suppose que chaque client choisit son menu au hasard et indépendemment des autres clients. Un jour donné, n clients se présentent. On note $X1$, $X2$ et $X3$ les variables aléatoires du nombre de clients choisissant les menus $M1$, $M2$ et $M3$.

1. Quelle est la loi de $X1$? En déduire celles de $X2$ et $X3$.
2. Quelle est la loi de $n - X3$?
3. Que vaut $X1 + X2 + X3$? En déduire la loi de $X1 + X2$.
4. (a) Quelle est la probabilité que tous les clients choisissent le même menu ?
   (b) Quelle est celle que le restaurateur doivent préparer au moins deux menus ?
   (c) Quelle est enfin la probabilité que les trois menus soient demandés.

Exercice 9

Étudier le plus complètement possible (notamment branches infinies et convexité) la fonction $f : x \mapsto \ln(e^{2x} + 3e^x + 2)$ et la fonction $g : x \mapsto x + \sqrt{2x^2 - 2x + 1}$.

Exercice 10

Un jeu video est constitué d'une infinité de niveaux, numérotés 1, 2 etc. Un joueur a une probabilité $\dfrac{1}{n}$ de passer le niveau numéroté n s'il a réussi à passer les niveaux précédents. On note X la nombre de niveaux que ce joueur réussit à passer avant de perdre lors d'une partie. Préciser $X(\Omega)$, puis déterminer la loi de X, et calculer son espérance et sa variance (pour ces derniers calculs, il pourra être plus facile de calculer $E(X+1)$ et $E(X^2-1)$ plutôt que $E(X)$ et $E(X^2)$).

Problème 1 (Ecricome 07, exercice 1)

Soit a un réel strictement positif. On considère la fonction f_a définie pour tout réel t strictement positif par $f_a(t) = \dfrac{1}{2}\left(t + \dfrac{a^2}{t}\right)$, ainsi que la suite (u_n) de nombres réels déterminée par son premier terme $u_0 > 0$ et par la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f_a(u_n)$.

1. Étude des variations de la fonction f_a

1. Déterminer la limite de $f_a(t)$ quand t tend vers $+\infty$. Justifier l'existence d'une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et donner la position de la courbe représentative de f_a par rapport à cette asymptote.
2. Déterminer la limite de $f_a(t)$ lorsque t tend vers 0 par valeurs positives. Interpréter graphiquement cette limite.
3. Donner l'expression de la fonction dérivée de f_a sur $\mathbb{R}_+^*$ et dresser le tableau de variation de f_a.
4. En déduire que $\forall t > 0,\ f_a(t) \geqslant a$.

2. Étude de la convergence de la suite (u_n)

1. Que dire de la suite (u_n) dans le cas particulier où $u_0 = a$?
2. Dans la suite on revient au cas général $u_0 > 0$. Démontrer que $\forall t > a,\ 0 < f_a'(t) < \dfrac{1}{2}$.
3. Montrer que, pour tout entier n non nul, $u_n \geqslant a$.
4. Prouver alors que pour tout entier n non nul $0 \leqslant u_{n+1} - a \leqslant \dfrac{1}{2}(u_n - a)$,

   puis que $|u_n - a| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a|$.
5. En déduire la convergence de la suite (u_n) et indiquer sa limite.
6. En utilisant ce qui précède, écrire un programme Pascal permettant d'afficher les 100 premiers termes d'une suite (u_n) de premier terme 1 et convergeant vers $\sqrt{2}$.

3. Recherche d'extremum d'une fonction à deux variables

On considère sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, la fonction g définie par $g(x, y) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)(1 + x)(1 + y)$.

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de g sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que g admet un extremum local sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.
3. Vérifier que $g(x, y) = 1 + f_1(x) + f_1(y) + f_1\left(\dfrac{x}{y}\right)$.
4. En déduire que l'extremum local est un extrememum global de g sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

Problème 2 (EMLyon 09, exercice 3)

Une urne contient des boules blanches et des boules noires. La proportion de boules blanches est p et la proportion de boules noires est q. Ainsi, on a $0 < p < 1$, $0 < q < 1$ et $p + q = 1$.

Partie I : tirages avec arrêt dès qu'une boule noire a été obtenue.

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu une boule noire. On note T la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués et U la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Reconnaître la loi de T. Pour tout entier $k \geqslant 1$, donner $P(T = k)$ et rappeler l'espérance et la variance de T.
2. En déduire que U admet une espérance et une variance. Déterminer $E(U)$ et $V(U)$.

Partie II : Tirages avec arrêt dès qu'une boule blanche et une boule noire ont été obtenues.

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu au moins une boule blanche et au moins une boule noire. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués, Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues et Z la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues. Ainsi, on peut remarquer que la probabilité de l'évènement $(Y = 1) \cup (Z = 1)$ est égale à 1. Pour tout entier naturel non nul, on note B_i l'évènement « la i-ème boule tirée est blanche » et N_i l'évènement « la i-ème boule tirée est noire ».

1. (a) Montrer, pour tout entier $k \geqslant 2$, $P(X)k = qp^{k-1} + pq^{k-1}$.

   (b) Vérifier $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} P(X = k) = 1$.

   (c) Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que $E(X) = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} + 1$.

2. (a) Pour tout entier $k \geqslant 2$, déterminer $P((X = k) \cap (Y = 1))$ (on distinguera les cas $k = 2$ et $k \geqslant 3$).

   (b) En déduire $P(Y = 1) = q(1 + p)$.

   (c) Déterminer la loi de la variable aléatoire Y.

   On admet que l'espérance de Y existe et que $E(Y) = \dfrac{1}{q}(1 - p + p^2)$.

3. Donner la loi de Z et son espérance.

4. Montrer que les variables YZ et $X - 1$ sont égales.

Problème 3 (EMLyon 08, exercice 1)

On admet l'encadrement suivant : $2,7 < e < 2,8$.

Partie I : Étude d'une fonction.

On considère l'application $f : [0; +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \begin{cases} t \ln t - t & \text{si} \quad t \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad t = 0 \end{cases}$

1. Montrer que f est continue sur $[0; +\infty[$.

2. Justifier que f est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$ et calculer $f'(t)$ pour tout $t \in]0; +\infty[$.

3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

4. Dresser le tableau de variations de f.

5. Montrer que f est convexe sur $]0; +\infty[$.

6. On note Γ la courbe représentative de f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

   (a) Montrer que Γ admet une demi-tangente en O.

   (b) Déterminer les points d'intersection de Γ avec l'axe des abscisses.

   (c) Préciser la nature de la branche infinie de Γ.

   (d) Tracer Γ.

Partie II : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On considère l'application $G :]1; +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $G(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x-1}^{x+1} f(t)dt$.

1. Montrer que G est de classe C^2 sur $]1; +\infty[$ et que $G'(x) = \dfrac{1}{2}(f(x+1) - f(x-1))$ et $G''(x) = \dfrac{1}{2}(\ln(x+1) - \ln(x-1))$. À cet effet, on pourra faire intervenir une primitive F de f sans chercher à calculer F.
2. (a) Montrer que G' est strictement croissante sur $]1; +\infty[$.
   (b) Vérifier $G'(2) > 0$.
   (c) Établir que l'équation $G'(x) = 0$, d'inconnue $x \in]1; +\infty[$, admet une solution unique notée α, et que $\alpha < 2$.

Partie III : Étude d'une fonction de deux variables réelles

On considère l'application $\Phi :]1; +\infty[^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$\Phi(x, y) = (y - f(x+1))^2 + (y - f(x-1))^2$, où l'application f est définie dans la partie I.

1. Calculer les dérivées partielles premières de Φ sur $]1; +\infty[^2$.
2. Vérifier que $(\alpha, f(\alpha+1))$ est un point critique de Φ, où α est définie en II 2.c.
3. Est-ce que Φ admet un extremum local en $(\alpha, f(\alpha+1))$?

Corrigé de la feuille de révisions CB2

Exercice 1

Le trinôme P a pour racine évidente 1, donc $P(x) = (x-1)(ax^2+bx+c) = ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c$, d'où par identification $a=2$, $b=-4+a=-2$, et $c=-22+b=-24$. On a donc $P(x) = 2(x-1)(x^2-x-12)$, et le deuxième facteur a pour discriminant $\Delta = 1+48 = 49$, donc admet deux racines réelles $x_1 = \dfrac{1+7}{2} = 4$ et $x_2 = \dfrac{1-7}{2} = -3$. Finalement, on obtient $P(x) = 2(x-1)(x-4)(x+3)$.

Pour Q, posons $X = e^x$ pour nous ramener à l'étude de $Q(X) = X^3 + \dfrac{7}{12}X^2 - \dfrac{7}{12}X - \dfrac{1}{6}$. On constate que $X=-1$ est racine du trinôme puisque $-1+\dfrac{7}{12}+\dfrac{7}{12}-\dfrac{1}{6} = 0$, donc $Q(X) = (X+1)(aX^2+bX^2+c) = aX^3+(b+a)X^2+(c+b)X+c$, avec par identification $a=1$, $b=-\dfrac{5}{12}$ et $c=-\dfrac{1}{6}$, d'où $Q(X) = (X+1)\left(X^2-\dfrac{5}{12}-\dfrac{1}{6}\right)$. La deuxième parenthèse a pour discriminant $\Delta = \dfrac{25}{144}+\dfrac{4}{6} = \dfrac{121}{144} = \left(\dfrac{11}{12}\right)^2$, et admet donc pour racines $X_1 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{5}{12}+\dfrac{11}{12}\right) = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3}$; et $X_2 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{5}{12}-\dfrac{11}{12}\right) = -\dfrac{3}{12} = -\dfrac{1}{4}$. Finalement, on a $Q(X) = (X+1)\left(X-\dfrac{2}{3}\right)\left(X+\dfrac{1}{4}\right)$, soit $P(x) = (e^x+1)\left(e^x-\dfrac{2}{3}\right)\left(e^x+\dfrac{1}{4}\right)$.

Exercice 2

1. La suite (u_n) est bien définie si elle ne prend jamais la valeur -4, prouver par récurrence qu'elle est à valeurs strictement positives suffira donc. Or, $u_0 = 2 > 0$ et si on suppose $u_n > 0$, $3+2u_n$ et u_n+4 sont strictement positifs, donc leur quotient aussi, ce qui prouve que $u_{n+1} > 0$ et achève la récurrence.
2. Si $u_{n+1} = 1$, on a donc $u_n + 4 = 3 + 2u_n$, ce qui donne effectivement $u_n = 1$. Supposons par l'absurde que u_n prenne la valeur 1 et notons n_0 le plus petit entier pour lequel $u_{n_0} = 1$. On a alors $n_0 \geqslant 2$ (puisque $u_0 \neq 1$) mais d'après le calcul précédent u_{n_0-1} est aussi égal à 1, ce qui contredit la définition de n_0. Conclusion : la suite ne prend jamais la valeur 1.
3. Calculons donc $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+3} = \dfrac{\frac{3+2u_n}{u_n+4}-1}{\frac{3+2u_n}{u_n+4}+3} = \dfrac{3+2u_n-u_n-4}{3+2u_n+3u_n+12} = \dfrac{u_n-1}{5u_n+15} = \dfrac{1}{5}\dfrac{u_n-1}{u_n+3} = \dfrac{1}{5}v_n$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{u_0-1}{u_0+3} = \dfrac{1}{5}$, donc $v_n = \dfrac{1}{5^{n+1}}$. Comme $v_n = \dfrac{u_n-1}{u_n+3}$, on a par ailleurs $v_nu_n+3v_n = u_n-1$, soit $3v_n+1 = u_n(1-v_n)$, donc $u_n = \dfrac{3v_n+1}{1-v_n} = \dfrac{\frac{3}{5^{n+1}}+1}{1-\frac{1}{5^{n+1}}}$.

Exercice 3

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} 2x & + & 3y & + & z & = & 4 & \\ -x & + & y & + & 2z & = & 3 & \qquad L_2 \leftarrow L_1 - 3L_2 \\ 7x & + & 3y & - & 5z & = & 2 & \qquad L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} 2x & + & 3y & + & z & = & 4 & \\ 5x & & & - & 5z & = & -5 & \\ -5x & & & + & 6z & = & 2 & \qquad L_3 \leftarrow L_1 + L_3 \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} 2x & + & 3y & + & z & = & 4 \\ x & & & - & z & = & -1 \\ & & & & z & = & -3 \end{cases}$$

On remonte le système : $x = z - 1 = -4$ et $3y = 4 - 2x - z = 15$, donc $y = 5$. Il y a une unique solution : $\mathcal{S} = \{(-4; 5; -3)\}$.

Exercice 4

On a $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ donc $B^2 = 3B$. Prouvons par récurrence la propriété P_n : $A^n = 2^n I + \dfrac{5^n - 2^n}{3} B$. Pour $n = 0$, $A^0 = I$ et $2^0 I + \dfrac{5^0 - 2^0}{3} B = I$, donc la propriété est vraie. Supposons-la vérifiée au rang n, on a alors $A^{n+1} = A \times A^n = A\left(2^n I + \dfrac{5^n - 2^n}{3} B\right) = (B+2I)\left(2^n I + \dfrac{5^n - 2^n}{3} B\right)$ par définition de B. En développant, on obtient $A^{n+1} = 2^n B + 2^{n+1} I + \dfrac{5^n - 2^n}{3} B^2 + \dfrac{2(5^n - 2^n)}{3} B = 2^{n+1} I + \dfrac{3 \times 2^n B}{3} + \dfrac{3 \times 5^n - 3 \times 2^n}{3} B + \dfrac{2 \times 5^n - 2 \times 2^n}{3} B = 2^{n+1} I + \dfrac{5 \times 5^n - 2 \times 2^n}{3} B = 2^{n+1} I + \dfrac{5^{n+1} - 2^{n+1}}{3} B$, ce qui prouve l'hérédité et achève la récurrence. Pour $n = 4$, on obtient $A^4 = 16I + 203B = \begin{pmatrix} 219 & 203 & 203 \\ 203 & 219 & 203 \\ 203 & 203 & 219 \end{pmatrix}$.

Exercice 5

- Il s'agit d'arrangements de trois éléments dans un ensemble à dix éléments, il y a $\dfrac{10!}{7!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$ tirages possibles.
- On peut obtenir soit trois boules noires, soit trois boules vertes, ce qui donne $\dfrac{5!}{2!} + \dfrac{3!}{0!} = 5 \times 4 \times 3 + 3 \times 2 \times 1 = 66$ tirages possibles.
- Il y a six boules dont le numéro est strictement plus petit que 3, donc $\dfrac{6!}{3!} = 6 \times 5 \times 4 = 120$ tirages possibles.
- Soit le numéro apparaissant deux fois est un 3, ce qui ne laisse pas de choix pour les deux boules correspondantes, mais 8 possibilités pour la troisième boule et 3! choix pour l'ordre des trois boules, soit le numéro apparaissant deux fois est un 1 ou un 2, ce qui laisse $\dbinom{3}{2}$ choix pour les deux boules, 7 choix pour la troisième boule, et 3! permutations possibles. Il y a donc au total $8 \times 3! + 2 \times \dbinom{3}{2} \times 7 \times 3! = 300$ tirages possibles.
- Il y en a $5 \times 3 \times 2 \times 3! = 180$.

Avec des tirages simultanés, il n'y a plus que $\dbinom{10}{3} = 120$ tirages possibles au total. On peut toujours obtenir trois boules noires ou trois boules vertes, donc $\dbinom{5}{3} + \dbinom{3}{3} = 11$ tirages possibles. De même, les réponses à toutes les autres questions seront les mêmes que précédemment à une division par 3! près, puisqu'on ne tient plus compte de l'ordre (si on travaillait avec des probabilités, les deux situations donneraient les mêmes résultats).

Exercice 6

1. La fonction f_n est strictement croissante sur $[0;1]$ comme somme de fonctions croissantes. De plus, $f(0) = -1$ et $f(1) = n - 1 \geqslant 0$ puisque $n \geqslant 1$, donc, f étant bien entendue continue, elle est bijective et s'annule une fois sur $[0;1]$.
2. On sait que $f_n(a_n) = f_{n+1}(a_{n+1}) = 0$. De plus, $\forall x \in [0;1]$, $f_{n+1}(x) = x^{n+1} + f_n(x) \geqslant f_n(x)$. on a donc $f_{n+1}(a_n) \geqslant f_n(a_n) = 0$, d'où $f_{n+1}(a_n) \geqslant f_{n+1}(a_{n+1})$. La fonction f_{n+1} étant croissante, $a_n \geqslant a_{n+1}$, et la suite est donc décroissante. Comme elle est à valeurs dans $[0;1]$, elle est de plus minorée, donc convergente.
3. On sait que $a_n^n + a_n^{n-1} + \cdots + a_n - 1 = 0$. En multipliant cette égalité par a_n, on obtient $a_n^{n+1} + a_n^n + \cdots + a_n^2 - a_n = 0$. En faisant la différence de ces deux égalités, on obtient $a_n^{n+1} - 2a_n + 1 = 0$, ce qui nous donne bien $\dfrac{a_n^{n+1}}{2} = a_n - \dfrac{1}{2}$. Or, comme a_n est décroissante, on a $\forall n \geqslant 2$, $a_n \leqslant a_2 < 1$, donc $a_n^{n+1} \leqslant a_2^{n+1}$. Comme $a_2 < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_2^{n+1} = 0$, donc on a par le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^{n+1} = 0$. En utilisant la dernière relation prouvée, on en déduit alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 7

1. Commençons par constater que $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A + 2I$. Prouvons ensuite par récurrence la propriété $P_n : \exists (u_n, v_n) \in \mathbb{R}^2$, $A^n = u_n A + v_n I$. C'est vrai pour $n = 0$ puisque $A^0 = I = 0 \times A + 1 \times I$, donc $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$. Supposons la propriété vraie au rang n, on a alors $A^{n+1} = A \times A^n = A(u_n A + v_n I) = u_n A^2 + v_n A = u_n(A + 2I) + v_n A = (u_n + v_n)A + 2u_n I$. En posant $u_{n+1} = u_n + v_n$ et $v_{n+1} = 2u_n$, on a donc prouvé la propriété P_{n+1}, ce qui achève la récurrence.
2. On a $a_{n+1} = 2u_{n+1} + v_{n+1} = 2(u_n + v_n) + 2u_n = 2(2u_n + v_n) = 2a_n$. La suite (a_n) est donc géométrique de raison 2, et de premier terme $a_0 = 2u_0 + v_0 = 1$, donc $a_n = 2^n$. Similairement, $b_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = u_n + v_n - 2u_n = -u_n + v_n = -b_n$, donc (b_n) est géométrique de raison -1 et de premier terme $b_0 = u_0 - v_0 = -1$, donc $b_n = (-1)^{n+1}$. Reste à déterminer u_n et v_n en fonction de a_n et b_n (pour l'instant, on a le contraire). Cela revient à résoudre un système, ou plus simplement à constater que $a_n + b_n = 3u_n$ et $a_n - 2b_n = 3v_n$, dont découle que $A^n = u_n A + v_n I = \dfrac{1}{3}(2^n A + (-1)^{n+1} A + 2^n I - 2(-1)^{n+1} I)$.

Exercice 8

1. Chaque client a une chance sur trois de choisir le menu M_1, indépendamment des autres clients, et il y a n clients. Le nombre de clients choisissant le menu suit une loi binômiale de paramètre $\left(n, \dfrac{1}{3}\right)$. De même, $X_2 \sim \mathcal{B}\left(n, \dfrac{1}{3}\right)$ et $X_3 \sim \mathcal{B}\left(n, \dfrac{1}{3}\right)$.
2. La variable X_3 prenant les valeurs de 0 à n, $n - X_3$ prend les mêmes valeurs, et $P(n - X_3 = k) = P(X_3 = n - k) = \dbinom{n}{k} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-k} \left(\dfrac{2}{3}\right)^k$. Autrement dit, $n - X_3 \sim \mathcal{B}\left(n, \dfrac{2}{3}\right)$.
3. On a bien sûr $X_1 + X_2 + X_3 = n$, soit $X_1 + X_2 = n - X_3$. La variable $X_1 + X_2$ suit donc une loi géométrique de paramètre n et $\dfrac{2}{3}$, ce qui n'a rien de surprenant (chaque client a une probabilité $\dfrac{2}{3}$ de choisir l'un des deux premiers menus, et on compte le nombre de clients parmi les n ayant fait ce choix).

4. (a) La probabilité que tous choisissent un menu fixé (le premier par exemple) vaut $\frac{1}{3^n}$, donc la probabilité que tout le monde choisisse le même menu quand il y en a 3 vaut $\frac{1}{3^{n-1}}$.

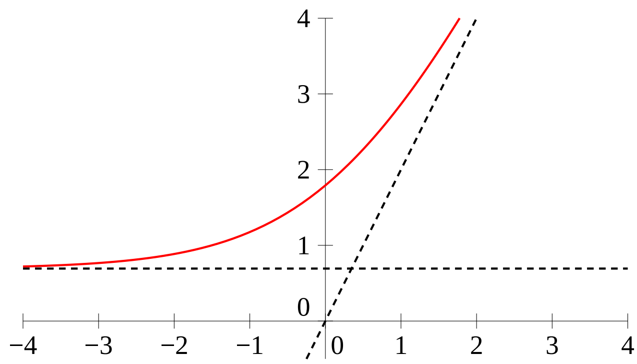
   (b) Il s'agit de l'évènement complémentaire du précédent, de probabilité $1 - \frac{1}{3^{n-1}}$.

   (c) Notons A_i les évènements « Le menu i n'a été choisi par aucun client », pour $i = 1, 2, 3$. On a d'après la formule de Poincaré $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$. Les trois premières probabilités valent $\left(\frac{2}{3}\right)^n$; chacune des trois suivantes vaut $\frac{1}{3^n}$ (puisque cela revient à dire que tout le monde a choisi le menu restant) et l'intersection des trois évènements est un évènement impossible. On a donc $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{3}{3^n} = \frac{2^n - 1}{3^{n-1}}$. La probabilité demandée est celle du complémentaire de $A_1 \cup A_2 \cup A_3$, elle vaut donc $1 - \frac{2^n - 1}{3^{n-1}}$.

Exercice 9

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier puisque $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{2x} + 3e^x + 2 \geqslant 2$. Sa limite en $+\infty$ vaut $+\infty$ (aucune difficulté), sa limite en $-\infty$ vaut $\ln 2$ (aucune difficulté non plus !). Il y a donc une asymptote horizontale d'équation $y = \ln 2$ en $-\infty$. Pour la branche infinie en $+\infty$, constatons que $e^{2x} + 3e^x + 2 = e^{2x}\left(1 + \frac{3}{e^x} + \frac{3}{e^{2x}}\right)$, donc $f(x) = \ln(e^{2x}) + \ln\left(1 + \frac{3}{e^x} + \frac{3}{e^{2x}}\right) = 2x + \ln\left(1 + \frac{3}{e^x} + \frac{3}{e^{2x}}\right)$. Le deuxième morceau tendant très fortement vers 0 en $+\infty$, on peut en déduire directement que la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote oblique à la courbe en $+\infty$.

La fonction f est bien sûr C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions usuelles, de dérivée $f'(x) = \frac{2e^{2x} + 3e^x}{e^{2x} + 3e^x + 2}$. Cette dérivée étant toujours positive, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Enfin, $f''(x) = \frac{(4e^{2x} + 3e^x)(e^{2x} + 3e^x + 2) - (2e^{2x} + 3e^x)^2}{(e^{2x} + 3e^x + 2)^2}$
$= \frac{4e^{4x} + 12e^{3x} + 8e^{2x} + 3e^{3x} + 9e^{2x} + 6e^x - 4e^{4x} - 12e^{3x} - 9e^{2x}}{(e^{2x} + 3e^x + 2)^2} = \frac{3e^{3x} + 8e^{2x} + 6e^x}{(e^{2x} + 3e^x + 2)^2}$. Le numérateur étant toujours tout ce qu'il y a de plus positif, la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$, et sa courbe ressemble à ceci :

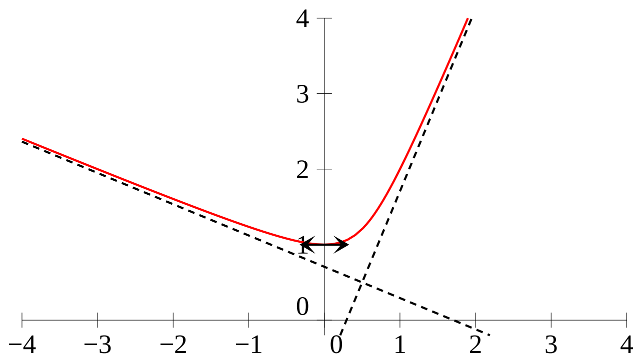


La fonction g est définie si $2x^2 - 2x + 1 \geqslant 0$, ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 2 - 4 = -2$, il est toujours positif, donc $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$, et g est C^∞ sur $\mathbb{R}$, puisque ce qui se trouve sous la racine ne s'annule jamais. Remarquons tout de suite que $g(x) = x + \sqrt{2x^2\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = x + |x|\sqrt{2 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}$. Quand $x > 0$, $g(x) = x\left(1 + \sqrt{2 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}\right)$, ce dont on déduit successivement que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 1+\sqrt{2}$; et enfin $g(x)-x(1+\sqrt{2}) = x\left(\sqrt{2 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} - \sqrt{2}\right) = x\times\frac{2 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - 2}{\sqrt{2 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{2}} = \frac{-2 + \frac{1}{x}}{\sqrt{2 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{2}}$, ce qui a pour limite $\frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ en $+\infty$. Conclusion : la courbe de g admet pour asymptopte oblique en $+\infty$ la droite d'équation $y = (1+\sqrt{2})x - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Du côté négatif, on a cette fois $g(x) = x\left(1 - \sqrt{2 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}\right)$. Des calculs très similaires donnent $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 1 - \sqrt{2}$; et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) - (1-\sqrt{2})x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (au signe près, on a la même expression que ci-dessus). Il y a donc en $-\infty$ une autre asymptote oblique, d'équation $y = (1-\sqrt{2})x + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Pour les variations, la fonction g est C^∞ sur $\mathbb{R}$, de dérivée $g'(x) = 1 + \frac{4x-2}{2\sqrt{2x^2-2x+1}}$. Cette dérivée est positive si $4x - 2 \geqslant -2\sqrt{2x^2-2x+1}$. Ceci est toujours vérifié quand $x > \frac{1}{2}$, puisque le membre de gauche est alors positif alors que celui de droite est négatif. Si les deux membres sont négatifs, on peut élever au carré (en changeant le sens de l'inégalité) : $16x^2-16x+4 \leqslant 4(2x^2-2x+1)$, soit $8x^2 - 8x \leqslant 0$, donc x doit être situé entre les racines $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$. Finalement, la fonction g est tout simplement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et décroissante sur $\mathbb{R}_-$. Elle admet un minimum en 0, de valeur $f(0) = 1$.

Ne reste plus que la convexité : $g''(x) = \frac{8\sqrt{2x^2-2x+1} - (4x-2)\frac{2(4x-2)}{2\sqrt{2x^2-2x+1}}}{4(2x^2-2x+1)}$ $= \frac{8(2x^2-2x+1) - (4x-2)^2}{4(2x^2-2x+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{16x^2-16x+8-16x^2+16x-4}{4(2x^2-2x+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4}{4(2x^2-2x+1)^{\frac{3}{2}}}$. La fonction g est donc convexe sur $\mathbb{R}$, et l'allure de la courbe est la suivante :



Exercice 10

La variable X prend donc tous les valeurs entières à partir de 1 (en effet, au vu de l'énoncé, on ne peut pas perdre au niveau 1). La probabilité que le joueur passe exactement k niveaux vaut, via la formule des probabilités composées, $\frac{1}{1}\times\frac{1}{2}\times\cdots\times\frac{1}{k}\times\left(1-\frac{1}{k+1}\right) = \frac{k}{(k+1)!}$, donc $P(X=k) =$

$\dfrac{k}{(k+1)!}$.

L'espérance de $X+1$ est effectivement nettement plus facile à calculer, elle vaut $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(k+1)\times\frac{k}{(k+1)!}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k-1)!}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}=e$. Si $E(X+1)=e$, on aura par linéarité $E(X)=e-1$.

De même $E(X^2-1)=E((X-1)(X+1))=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(k-1)(k+1)\times\frac{k}{(k+1)!}=\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{(k-2)!}=e$ (pour $k=1$, la valeur est nulle, d'où le décalage d'indice en bas de somme). Conclusion : $E(X^2)=e+1$, puis par König-Huygens $V(X)=E(X^2)-E(X)^2=e+1-(e-1)^2=e+1-e^2-1+2e=e(3-e)$ (qui est bien un nombre positif puisque $e<3$).

Problème 1 (Ecricome 07, exercice 1)

1. Étude des variations de la fonction f_a

1. Manifestement, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}f_a(t)=+\infty$. Comme de plus, $f(t)=\dfrac{1}{2}t+\dfrac{a^2}{2t}=\dfrac{1}{2}t+o(1)$, la droite d'équation $y=\dfrac{1}{2}t$ est asymptote oblique à la courbe en $+\infty$. Enfin, $f(t)-\dfrac{1}{2}t=\dfrac{a^2}{2t}$, qui est positif sur $\mathbb{R}_+^*$, donc la courbe est située au-dessus de l'asymptote.
2. Sans difficulté aucune, on obtient $\displaystyle\lim_{t\to 0}f(t)=+\infty$, l'axe des ordonnées est donc asymptote verticale à la courbe.
3. La fonction est C^∞ sur $]0;+\infty[$, de dérivée $f_a'(t)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{a^2}{2t^2}=\dfrac{t^2-a^2}{2t^2}$. La fonction f_a est donc strictement décroissante sur $]0;a]$, et strictement croissante sur $[a;+\infty[$. Elle admet en a un minimum de valeur $f_a(a)=\dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{a^2}{a}\right)=a$.
4. C'est une conséquence immédiate du calcul de minimum de la question précédente.

2. Étude de la convergence de la suite (u_n)

1. Dans ce cas, la suite est constante (une récurrence évidente si on tient à le prouver rigoureusement).
2. Si $t>a$, $t^2-a^2>0$, donc $f'(t)>0$. De plus, $t^2-a^2<t^2$, donc $f'(t)<\dfrac{t^2}{2t^2}=\dfrac{1}{2}$, d'où l'encadrement demandé.
3. Il n'est même pas nécessaire de faire une récurrence : $\forall n\geqslant 1$, $u_n=f(u_{n-1})\geqslant a$ d'après la question 1.4.
4. La fonction f est C^1 sur $[a;+\infty[$, intervalle auquel appartiennent a et u_n et sur lequel $0\leqslant f'\leqslant\dfrac{1}{2}$, on peut donc appliquer l'inégalité des accroissements finis (première version, celle sans valeur absolue) entre a et u_n : $0\times(u_n-a)\leqslant f(u_n)-f(a)\leqslant\dfrac{1}{2}(u_n-a)$. Il ne reste plus qu'à remplacer $f(u_n)$ par u_{n+1} et $f(a)$ par a (cf calculs antérieurs). La deuxième partie est une récurrence classique : pour $n=1$ c'est évident puisqu'on a $|u_1-a|$ des deux côtés de l'inégalité. Si l'inégalité est vraie au rang n, alors $|u_{n+1}-a|\leqslant\dfrac{1}{2}|u_n-a|\leqslant\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}|u_1-a|\leqslant\dfrac{1}{2^n}|u_1-a|$, ce qui prouve l'inégalité au rang $n+1$.
5. Par le théorème des gendarmes, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n-a=0$, soit, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=a$.

6. Il suffit de prendre la fonction $f_{\sqrt{2}} : t \mapsto \frac{1}{2}\left(t + \frac{2}{t}\right) = \frac{t}{2} + \frac{1}{t}$ et de construire la suite récurrente correspondante :

```
PROGRAM ecricome;
VAR u : real; i : integer;
FUNCTION f (x : real) : real;
BEGIN
f := x/2+1/x;
END;
BEGIN
u := 1;
FOR i := 1 TO 100 DO
BEGIN
u := f(u); WriteLn(u);
END;
END.
```

3. Recherche d'extremum d'une fonction à deux variables

1. Développons tout, ce sera aussi simple : $g(x,y) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(1 + x + y + xy) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{2} + \frac{x}{2y} + \frac{y}{2x} + \frac{1}{2} + \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = \frac{1+y}{2x} + \frac{1+x}{2y} + \frac{x+y}{2} + 1$.
   On a donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{1+y}{2x^2} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{2}$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{1+x}{2y^2} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2}$;
   $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{1+y}{x^3}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{1+x}{y^3}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2y^2}$.

2. Mettons la première dérivée partielle au même dénominateur : $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^2y + x^2 - y - y^2}{2x^2y}$, ce qui s'annule si $x^2y + x^2 = y + y^2$, soit $x^2(1+y) = y(1+y)$. Comme $y > 0$, $1 + y$ ne risque pas de s'annuler, et on doit donc avoir $x^2 = y$. Symétriquement, l'annulation de la deuxième dérivée partielle donne comme condition $x = y^2$. On a donc un point critique si $x = y = 1$ (puisque par exemple $y^4 = y$ avec $y > 0$). Pour le fait que ce point critique est bien un extremum, si on ne veut pas utiliser le résultat complémentaire vu dans une feuille d'exos, on se reporte à la dernière question. Sinon, on calcule $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = 2$, et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) = -1$. Comme $2 \times 2 - (-1)^2 = 3 > 0$, et que $2 > 0$, le point critique est un minimum local.

3. C'est du calcul bête : $f_1(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2x}$, donc $1 + f_1(x) + f_1(y) + f_1\left(\frac{x}{y}\right) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{1}{2x} + \frac{y}{2} + \frac{1}{2y} + \frac{x}{2y} + \frac{y}{2x} = g(x,y)$.

4. La fonction f_1 ayant pour minimum 1 (atteint en 1), $1 + f_1(x) + f_1(y) + f_1\left(\frac{x}{y}\right) \geqslant 4$. Or, $g(1,1) = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 2 = 4$, qui est donc un minimum global pour la fonction.

Problème 2 (EMLyon 09, exercice 3)

Partie I : tirages avec arrêt dès qu'une boule noire a été obtenue.

1. La variable T suit une loi géométrique de paramètre, donc $P(T=k)=p(1-p)^{k-1}$; $E(T)=\dfrac{1}{p}$ et $V(T)=\dfrac{q}{p^2}$.

2. Il suffit de constater que $U=T-1$ (puisqu'on s'arrête à la première boule noire, on a tiré une boule de moins que le nombre total de boules tirées). La variable U admet donc une espérance et une variance, et $E(U)=\dfrac{1}{p}-1$; $V(U)=V(T)=\dfrac{q}{p^2}$.

Partie II : Tirages avec arrêt dès qu'une boule blanche et une boule noire ont été obtenues.

1. (a) Pour avoir $X=k$, il y a deux possibilités incompatibles : soit on tire $k-1$ boules blanches, puis une boule noire (probabilité $p^{k-1}q$, soit on tire $k-1$ boules noires puis une boule blanche (proba $q^{k-1}p$), donc $P(X=k)=p^{k-1}q+q^{k-1}p$.

   (b) Calculons donc $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} pq^{k-1}+qp^{k-1}=p\sum_{k=1}^{+\infty} q^k+p\sum_{k=1}^{+\infty} q^k=p\left(\frac{1}{1-q}-1\right)+q\left(\frac{1}{1-p}-1\right)=\frac{p}{p}-p+\frac{q}{q}-q=2-1=1.$

   (c) Encore un petit calcul : l'espérance existe puisque le calcul fait apparaitre deux séries géométriques dérivées, et $\displaystyle E(X)=p\sum_{k=2}^{+\infty} kq^{k-1}+q\sum_{k=2}^{+\infty} kp^{k-1}=p\left(\frac{1}{(1-q)^2}-1\right)+q\left(\frac{1}{(1-p)^2}-1\right)=\frac{p}{p^2}-p+\frac{q}{q^2}-1=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1.$

2. (a) Pour $(X=2)\cap(Y=1)$, il y a deux possibilités : il faut avoir tiré une boule blanche et une boule noire, mais peu importe l'ordre. On a donc $P((X=2)\cap(Y=1))=pq+qp=2pq$. Par contre, pour $k\geqslant 3$, si $X=k$ et $Y=1$ sont vérifiés, cela signifie qu'on a tiré la boule blanche au tirage k (sinon on aurait tiré une noire et une boule blanche avant le tirage k) et uniquement des boules noires avant, d'où $P((X=k)\cap(Y=1))=q^{k-1}p$.

   (b) Les évènements $(X=k)$ formant un système complet d'évènements, on peut appliquer la formule des probabilités totales : $\displaystyle P(Y=1)=\sum_{k=2}^{+\infty} P((X=k)\cap(Y=1))=2qp+p\sum_{k=3}^{+\infty} q^{k-1}=pq+p\sum_{k=2}^{+\infty} q^{k-1}=pq+p\left(\frac{1}{1-q}-1\right)=pq+1-p=p(1-p)+1-p=1-p^2.$

   (c) Calculer $P(Y=k)$ est plus simple si $k\geqslant 2$, puisque le seul tirage possible consiste à tirer d'abord les k boules blanches, puis une boule noire, donc $P(Y=k)=p^kq$.

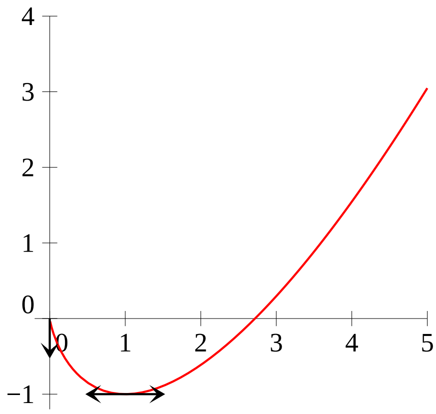
3. La variable Z est définie de façon similaire à Y, mais avec le rôle de p et de q inversé, donc $P(Z=1)=1-q^2$; $P(Z=k)=q^kp$, et $E(Z)=\dfrac{1}{p}(1-q-q^2)$.

4. En effet, si on tire d'abord une boule blanche, on aura nécessairement $Z=1$, donc $YZ=Y=X-1$, puisque dans ce cas on ne tire qu'une boule noire et donc $X-1$ boules blanches. De même, si on commence par une boule noire, $Y=1$, et $YZ=Z=X-1$. Les variables YZ et $X-1$ prennent donc toujours la même valeur.

Problème 3 (EMLyon 08, exercice 1)

Partie I : Étude d'une fonction.

1. En effet, $\lim_{t\to 0} t\ln t = 0$, donc $\lim_{t\to 0} f(t) = 0$. Comme f est par ailleurs bien sûr C^∞ sur $]0;+\infty[$, elle est continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Cf plus haut pour le caractère C^1 ; $f'(t) = \ln t$ (résultat classique...).
3. On a $f(t) = t(\ln t - 1)$, donc $\lim_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$.
4. La fonction f est décroissante sur $[0;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$, admettant un minumum en $t = 1$ de valeur $f(1) = -1$.
5. En effet, $f''(t) = \dfrac{1}{t} > 0$ sur $]0;+\infty[$, donc f est convexe.
6. (a) Comme $\lim_{t\to 0} f'(t) = -\infty$, d'après le théorème de prolongement C^1, f admet une demi-tangente verticale en 0.
   (b) Il faut résoudre l'équation $f(t) = 0$, ce qui en reprenant la forme factorisée donne $t = 0$ ou $\ln t = 1$, soit $t = 0$ ou $t = e$.
   (c) Comme $\dfrac{f(t)}{t} = \ln t - 1$, qui a pour limite $+\infty$ en $+\infty$, la courbe admet une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$.
   (d) Voilà une allure de la courbe :



Partie II : Étude d'une fonction définie par une intégrale

1. La fonction G est dérivable de dérivée $G'(x) = \dfrac{1}{2}(f(x+1) - f(x-1))$ par définition de l'intégrale (on peut dire que $G(x) = F(x+1) - F(x-1)$, qui est effetivement définie et dérivable sur $]1;+\infty[$). Comme f est elle-même dérivable de dérivée $t \mapsto \ln t$, la dérivée seconde de G en découle.
2. (a) Au facteur $\dfrac{1}{2}$ près, $G''(x) = \ln \dfrac{x+1}{x-1}$, avec $x = 1 > x - 1 > 0$, donc $\dfrac{x+1}{x-1} > 1$. La dérivée seconde de G étant donc strictement positive, G' est strictement croissante.
   (b) Calculons : $G'(2) = \dfrac{1}{2}(f(3) - f(1)) = \dfrac{1}{2}(3\ln 3 - 3 + 1) = \dfrac{3}{2}\ln 3 - 1 > 0$.
   (c) La fonction G' est strictement croissante, a pour limite $f(2) - f(0) = f(2) < 0$ en 0 (puisqu'on a vu que la courbe de f ne recoupait l'axe des abscisses que pour $x = e > 2$), et prend des valeurs strictement positives d'après la question précédente. D'après le théorème des valeurs intérmédiaires, il existe donc un réel $\alpha \in]0;2[$ tel que $G'(\alpha) = 0$. La fonction étant par ailleurs strictement croissante, donc bijective, ce réel est nécessairement unique.

Partie III : Étude d'une fonction de deux variables réelles

1. Calculons donc : $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y) = -2y\ln(x+1)+2\ln(x+1)f(x+1)-2y\ln(x-1)+2\ln(x-1)f(x-1)$; $\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}(x,y) = 2y - 2f(x+1) + 2y - 2f(x-1) = 4y - 2(f(x+1) + f(x-1))$.
2. On a $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(\alpha, f(\alpha+1)) = -2f(\alpha+1)\ln(\alpha+1) + 2\ln(\alpha+1)f(\alpha+1) - 2f(\alpha+1)\ln(\alpha-1) + 2\ln(\alpha-1)f(\alpha-1)$. Or, $G'(\alpha) = 0$ donc $f(\alpha+1) = f(\alpha-1)$ et tout s'annule. Par ailleurs, $\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}(\alpha, f(\alpha+1)) = 4f(\alpha+1) - 2(f(\alpha+1) + f(\alpha-1)) = 0$. Le point est donc bien un point critique.
3. Comme $\Phi(\alpha, f(\alpha+1)) = (f(\alpha+1) - f(\alpha+1))^2 + (f(\alpha+1) - f(\alpha-1))^2 = 0$, ce point critique est un minimum global (la fonction Φ ne prend que des valeurs positives, c'est une somme de deux carrés).

Feuille d'exercices n°24 : Inversion de matrices

ECE3 Lycée Carnot

6 mai 2010

Exercice 1 (**)

Inverser (lorsque c'est possible) les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 (***)

Déterminer les valeurs de λ et de x pour lesquels les matrices suivantes sont inversibles et, lorsque c'est possible, leur inverse.

$A = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 1+x & -x \\ 0 & x & 1-2x \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$

Exercice 3 (**)

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et déterminer son inverse. Calculer $P^{-1}AP$ et en déduire les puissances de la matrice A.

Exercice 4 (*)

Résoudre le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & z & = & a \\ x & + & 2y & + & z & = & b \\ x & + & y & + & 2z & = & c \end{array} \right.$$

En déduire l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 5 (**)

On s'intéresse à la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Trouver une relation entre A^2, A et I. En déduire que A est inversible et la valeur de A^{-1}. Résoudre en utilisant ce qui précède le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & 2y & + & 4z & = & 1 \\ -x & + & 3y & + & 2z & = & 4 \\ -x & + & y & + & 4z & = & 0 \end{array} \right.$$

Exercice 6 (***)

On considère la matrice carrée $K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer K^2.
2. En déduire que K est inversible et calculer K^{-1}.
3. Soient a et b deux réels, on définit $M = aI + bK$. Montrer que $M^2 = -(a^2 + b^2)I + 2aM$.
4. En déduire que si a et b ne sont pas nuls tous les deux, M est inversible et écrire M^{-1} sous la forme $cI + dK$.
5. En déduire l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1+\sqrt{2} & 1 & -2 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2+\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Exercice 7 (*)

Montrer que si une matrice A est symétrique et inversible, alors A^{-1} est également symétrique.

Exercice 8 (**)

Soit A une matrice nilpotente. Montrer que $I - A$ est inversible et que son inverse s'écrit sous la forme $I + A + A^2 + \cdots + A^k$. En déduire l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et celui de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 9 (***)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 1$, $u_2 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$. On définit également les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

2. Calculer $P^{-1}AP$. En déduire la valeur de A^n.
3. Quel lien y a-t-il entre la suite (u_n) et la matrice A ? À l'aide des calculs des questions précédentes, déterminer la valeur de u_n.

Corrigé de la feuille d'exercices n°24

Exercice 1 (**)

Un peu de motivation, six pivots de Gauss, ça va prendre quelques pages de calcul, mais ça ne peut pas faire de mal.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_2 \leftarrow 2L_2 + 3L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 21 & 7 \\ 0 & 7 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow 3L_3 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 21 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow 2L_1 - L_3 \\ L_2 \leftrightarrow 2L_2 - 7L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 6 & 0 \\ 0 & 42 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 6 & 18 & -42 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow 7L_1 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} -28 & 0 & 0 \\ 0 & 42 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 \\ 6 & 18 & -42 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow -L_1/28 \\ L_2 \leftarrow L_2/42 \\ L_3 \leftarrow L_3/2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

La matrice A est donc inversible, et $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow 9L_1 + L_3 \\ L_2 \leftrightarrow 3L_2 - L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 18 & 18 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$$

$$\begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1/18 \\ L_2 \leftrightarrow L_2/9 \\ L_3 \leftarrow L_3/9 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

La matrice B est donc inversible, et $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_2 - L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice C n'est pas inversible.

$$
\begin{array}{cccc}
D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\
\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} L_1 \leftarrow 4L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow 4L_2 + L_3 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -10 & 6 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\
\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -10 & 6 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1/8 \\ L_2 \leftarrow -L_2/4 \\ L_3 \leftarrow L_3/4 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} &
\end{array}
$$

La matrice D est donc inversible, et $D^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftrightarrow L_1 \\ L_3 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_4 \leftarrow L_3 - L_4 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_2 - L_3$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_4 - L_1 \\ \\ L_3 \leftrightarrow L_4 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_4 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice E est donc inversible, et $E^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On peut tricher un peu pour la matrice F en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne, qui ne bougeront de toute façon pas pendant les calculs (sauf pour la toute dernière étape où on divisera la dernière ligne par 3, ce qui fera apparaitre un $\frac{1}{3}$ dans le coin inférieur droit de la matrice inverse).

$$F' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 2L_1 + L_3 \\ L_2 \leftrightarrow L_2 + L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow 3L_1 - 2L_2$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1/6 \\ L_2 \leftrightarrow L_2/3 \\ L_3 \leftarrow -L_3/2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La matrice F est donc inversible, et $F^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Exercice 2 (***)

Il est en fait nettement préférable d'éviter de faire des opérations interdites pour certaines valeurs de λ, ce qui est tout à fait possible en commençant avec un petit échange de lignes :

$$A = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1-\lambda \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 1-\lambda & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - (1-\lambda)L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1-\lambda \\ 0 & -(1+\lambda) & 1+\lambda \\ 0 & 2(1+\lambda) & 4-(1-\lambda)^2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow 2L_2 + L_3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1-\lambda \\ 0 & -(1+\lambda) & 1+\lambda \\ 0 & 0 & Z \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & \lambda-3 \end{pmatrix}$$

avec $Z = 2(1+\lambda) + 4 - (1-\lambda)^2 = 2 + 2\lambda + 4 - 1 + 2\lambda - \lambda^2 = 5 + 4\lambda - \lambda^2$. Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 16 + 20 = 36$ et admet deux racines $\lambda_1 = \dfrac{-4+6}{-2} = -1$ et $\lambda_2 = \dfrac{-4-6}{-2} = 5$. Les deux valeurs annulant un des coefficients de la diagonale sont $\lambda = -1$ (qui en annule même deux) et $\lambda = 5$. Pour toute autre valeur de λ, la matrice est donc inversible.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1-\lambda \\ 0 & -(1+\lambda) & 1+\lambda \\ 0 & 0 & (\lambda+1)(5-\lambda) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & \lambda-3 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow XL_1 - (1-\lambda)L_3 \\ L_2 \leftarrow L_3 - (5-\lambda)L_2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2X & 2X & 0 \\ 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & X \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2(\lambda-1) & 2(\lambda-1) & X-(1-\lambda)(\lambda-3) \\ 2 & \lambda-3 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda-3 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow 7L_1 - L_2$$

en posant $X = (\lambda+1)(5-\lambda)$. Reste à effectuer l'opération $L_1 \leftarrow \dfrac{1}{2}L_1 - L_2$, qui transforme notre matrice de gauche en $X \times I$, et modifie les coefficients de la première ligne à droite : le premier devient $\lambda - 1 - 2 = \lambda - 3$, le deuxième $\lambda - 1 - (\lambda - 3) = 2$, et le dernier $\dfrac{X}{2} - \dfrac{(1-\lambda)(\lambda-3)}{2} - 2 = \dfrac{5 + 4\lambda - \lambda^2 - \lambda + 3 + \lambda^2 - 3\lambda - 4}{2} = 2$. Finalement, en divisant tout par X, on obtient la matrice inverse, beaucoup moins compliquée que ce qu'on aurait pu craindre : si $\lambda \notin \{-1; 5\}$,

$$A^{-1} = \frac{1}{(\lambda+1)(\lambda-5)} \begin{pmatrix} \lambda-3 & 2 & 2 \\ 2 & \lambda-3 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda-3 \end{pmatrix}$$

Pour B, c'est un peu plus facile :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1+x & -x \\ 0 & x & 1-2x \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_1 - L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+x & -x \\ 0 & x & 1-2x \\ 0 & x & -2x \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_2 - L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+x & -x \\ 0 & x & 1-2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + xL_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - (1-2x)L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+x & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1-x & x & x \\ 1-2x & 2x & 2x-1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow xL_1 - (1+x)L_2$$

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1+2x+x^2 & -2x-x^2 & 1-x-x^2 \\ 1-2x & 2x & 2x-1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalement, la matrice B est inversible si $x \neq 0$ et dans ce cas, $B^{-1} = \begin{pmatrix} x+2-\frac{1}{x} & -2-x & \frac{1}{x}-1-x \\ \frac{1}{x}-2 & 2 & 2-\frac{1}{x} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 (**)

Appliquons donc le pivot de Gauss à la matrice P :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2 - L_3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1/2 \\ L_2 \leftarrow L_2/2 \\ L_3 \leftarrow L_3/2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La matrice P est bien inversible, d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

On calcule sans enthousiasme $P^{-1}A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, puis $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, matrice diagonale que nous noterons D. On prouve ensuite par récurrence que $A^n = PD^nP^{-1}$: c'est vrai pour $n = 1$, puisque $A = P(P^{-1}AP)P^{-1} = PDP^{-1}$, et supposant la formule vérifiée pour A^n, on aura $A^{n+1} = A^n \times A = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$, ce qui achève la récurrence. Donc $A^n = P\begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 6^n & 0 \\ 0 & 0 & 8^n \end{pmatrix}P^{-1}$, soit $A^n = \begin{pmatrix} \frac{4^n+6^n}{2} & \frac{8^n-6^n}{2} & \frac{8^n-4^n}{2} \\ \frac{4^n-6^n}{2} & \frac{6^n+8^n}{2} & \frac{8^n-4^n}{2} \\ \frac{6^n-4^n}{2} & \frac{8^n-6^n}{2} & \frac{4^n+8^n}{2} \end{pmatrix}$.

Exercice 4 (*)

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & a \\ x & + & 2y & + & z & = & b \\ x & + & y & + & 2z & = & c \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & a \\ & - & 3y & & & = & a-b \\ & - & 2y & - & z & = & a-c \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & a \\ & & y & & & = & \frac{b}{3} - \frac{a}{3} \\ & & & & z & = & c-a-2y \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & a+y-z \\ y & = & -\frac{a}{3} + \frac{b}{3} \\ z & = & -\frac{a}{3} - \frac{2}{3}b + c \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & a+b-c \\ y & = & -\frac{a}{3} + \frac{b}{3} \\ z & = & -\frac{a}{3} - \frac{2}{3}b + c \end{array}\right.$$

On vient de résoudre le système $AX = B$, dont la solution est $X = A^{-1}B$. On en déduit que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 (**)

Commençons par calculer $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 20 \\ -5 & 9 & 10 \\ -5 & 5 & 14 \end{pmatrix}$. On remarque que $A^2 = 5A - 6I$, donc $5A - A^2 = A(5I - A) = 6I$, dont on déduit que $A^{-1} = \frac{1}{6}(5I - A)$, soit $A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Le système qui suit est de la forme $AX = B$, avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc l'unique solution du système est $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{3}{2} \\ -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Exercice 6 (***)

1. On obtient $K^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $K^2 = -I$.
2. On a donc $K \times (-K) = I$, d'où $K^{-1} = -K$.
3. Calculons $M^2 = (aI + bK)^2 = a^2I^2 + abIK + baKI + b^2K^2 = (a^2 - b^2)I + 2abK = (a^2 - b^2)I + 2a(M - aI) = 2aM - (a^2 + b^2)I$.
4. Il faut avoir $a^2 + b^2 \neq 0$ pour pouvoir écrire $M^2 - 2aM = M(M - 2aI) = -(a^2 + b^2)I$, donc $M^{-1} = \dfrac{1}{a^2 + b^2}(2aI - M) = \dfrac{1}{a^2 + b^2}(aI - bK)$.
5. La matrice A est égale à $\sqrt{2}I + K$, son inverse vaut donc $\frac{1}{3}(\sqrt{2}I - K)$, c'est-à-dire $A^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & \sqrt{2}-1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & -1 \\ -1 & -1 & 0 & \sqrt{2}+2 \end{pmatrix}$.

Exercice 7 (*)

C'est en fait très simple : si A est symétrique, on a $A = {}^tA$. Par ailleurs, $A^{-1}A = I$. Si on transpose cette égalité, on obtient ${}^t(A^{-1}A) = {}^tI$, donc ${}^tA\,{}^t(A^{-1}) = I$ ou encore $A\,{}^t(A^{-1}) = I$. On en déduit que ${}^t(A^{-1})$ est l'inverse de A, donc que $A^{-1} = {}^t(A^{-1})$ par unicité de l'inverse, donc A^{-1} est bien une matrice symétrique.

Exercice 8(**)

Si A est nilpotente, il existe un entier k tel que $A^{k+1} = 0$. Or, on constate que $(I - A)(I + A + A^2 + \cdots + A^k = I - A + A - A^2 + A^2 - A^3 + \cdots + A^k - A^{k+1} = I - A^{k+1} = I$, donc $I - A$ est inversible, d'inverse $I + A + A^2 + \cdots + A^k$. On a $A = I - M$, avec $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Un rapide calcul donne $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M^3 = 0$. D'après ce qui précède, on a donc $A^{-1} = I + M + M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. De même on a $B = I - N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On calcule

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 12 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ puis } N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -8 & -36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, N^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et}$$

enfin $N^5 = 0$, donc $B^{-1} = I + N + N^2 + N^3 + N^4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 9 (***)

1. Appliquons donc le pivot de Gauss à la matrice P :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow 3L_1 - 4L_3 \\ L_2 \leftarrow 3L_2 - 2L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1/6 \\ L_2 \leftarrow L_2/6 \\ L_3 \leftarrow L_3/3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

La matrice P est bien inversible, d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

2. On calcule sans enthousiasme $P^{-1}A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$, puis $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, matrice diagonale que nous noterons D. On prouve ensuite par récurrence que $A^n = PD^nP^{-1}$: c'est vrai pour $n = 1$, puisque $A = P(P^{-1}AP)P^{-1} = PDP^{-1}$, et supposant la formule vérifiée pour A^n, on aura $A^{n+1} = A^n \times A = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$, ce qui achève la récurrence. Donc $A^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1}$, soit

$$A^n = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} + \dfrac{(-1)^n}{6} + \dfrac{2^{n+2}}{3} & \dfrac{1 + (-1)^{n+1}}{2} & 1 + \dfrac{(-1)^n - 2^{n+2}}{3} \\ -\dfrac{1}{2} + \dfrac{(-1)^{n+1}}{6} + \dfrac{2^{n+1}}{3} & \dfrac{1 + (-1)^n}{2} & 1 + \dfrac{(-1)^{n+1} - 2^{n+1}}{3} \\ -\dfrac{1}{2} + \dfrac{(-1)^n}{6} + \dfrac{2^n}{3} & \dfrac{1 + (-1)^{n+1}}{2} & 1 + \dfrac{(-1)^n - 2^n}{3} \end{pmatrix}.$$

3. On constate que les coefficients de la première ligne de A correspondent à ceux de la récurrence triple définissant (u_n). On peut ainsi écrire $A \times \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$, soit, en posant $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$, $X_{n+1} = AX_n$. On prouve par une récurrence classique que $X_n = A^n X_0$ (en effet, c'est vrai pour $n = 0$, et si on le suppose vrai au rang n, alors $X_{n+1} = AX_n = A(A^n X_0) = A^{n+1} X_0$. Pour déterminer la valeur de u_n, il suffit de connaitre le dernier coefficient de la matrice colonne X_n, donc un produit à gauche de X_0 par la dernière ligne de A^n suffit : $u_n = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{6} + \frac{2^n}{3} & \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2} & 1 + \frac{(-1)^n - 2^n}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} + \frac{(-1)^{n+1}}{6} - \frac{2^n}{3} + \frac{1}{2} + \frac{(-1)^{n+1}}{2} + 2 + \frac{2 \times (-1)^n}{3} - \frac{2^{n+1}}{3}$, soit $u_n = 3 - 2^n$.

Sujet d'annales : EDHEC 2003

ECE3 Lycée Carnot

10 mai 2010

Un joueur participe à un jeu se jouant en plusieurs parties. Ses observations lui permettent d'affirmer que :

- s'il gagne deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{2}{3}$.
- s'il perd une partie et gagne la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
- s'il gagne une partie et perd la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
- s'il perd deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement : "le joueur gagne la $n^{\text{ième}}$ partie".
De plus, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose :

$$E_n = A_{n-1} \cap A_n \qquad F_n = \overline{A_{n-1}} \cap A_n \qquad G_n = A_{n-1} \cap \overline{A_n} \qquad H_n = \overline{A_{n-1}} \cap \overline{A_n}$$

1. On admet que (E_n, F_n, G_n, H_n) est un système complet d'événements.
   (a) Utiliser la formule des probabilités totales pour montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a : $P(E_{n+1}) = \frac{2}{3}P(E_n) + \frac{1}{2}P(F_n)$.
   (b) Exprimer de la même façon (aucune explication n'est exigée) les probabilités $P(F_{n+1})$, $P(G_{n+1})$ et $P(H_{n+1})$ en fonction de $P(E_n)$, $P(F_n)$, $P(G_n)$ et $P(H_n)$.
   (c) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose : $U_n = \begin{pmatrix} P(E_n) \\ P(F_n) \\ P(G_n) \\ P(H_n) \end{pmatrix}$.
   Vérifier que $U_{n+1} = MU_n$, où $M = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 2/3 \end{pmatrix}$.
2. (a) Soient $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   Calculer PQ. En déduire que P est inversible et donner son inverse.
   (b) On note C_1, C_2, C_3 et C_4 les colonnes de P. Calculer MC_1, MC_2, MC_3 et MC_4. Que constate-t-on ?
   (c) Justifier que $M = PDP^{-1}$, où D est une matrice diagonale que l'on déterminera.

Dans toute la suite, on suppose que le joueur a gagné les deux premières parties.

3. (a) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = PD^nP^{-1}$.
   (b) Montrer, également par récurrence, que : $\forall n \geqslant 2, \quad U_n = M^{n-2}U_2$.
   (c) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, donner la première colonne de M^n, puis en déduire $P(E_n)$, $P(F_n)$, $P(G_n)$ et $P(H_n)$.
   (d) Montrer que l'on a :

$$\lim_{n\to+\infty} P(E_n) = \frac{3}{10} \qquad \lim_{n\to+\infty} P(F_n) = \frac{2}{10} \qquad \lim_{n\to+\infty} P(G_n) = \frac{2}{10} \qquad \lim_{n\to+\infty} P(H_n) = \frac{3}{10}$$

4. Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le joueur gagne la $k^{\text{ième}}$ partie et qui vaut 0 sinon (X_1 et X_2 sont donc deux variables certaines).
   (a) Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, exprimer A_k en fonction de E_k et F_k.
   (b) En déduire, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, la loi de X_k.

5. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note S_n la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur lors des n premières parties.
   (a) Calculer $P(S_n = 2)$ en distinguant les cas $n = 2$, $n = 3$ et $n \geqslant 4$.
   (b) Déterminer $P(S_n = n)$.
   (c) Pour tout entier n supérieur ou égal à 3, écrire S_n en fonction des variables X_k, puis déterminer $E(S_n)$ en fonction de n.

Corrigé du sujet EDHEC 2003

1. (a) Les hypothèses données dans l'énoncé peuvent se traduire sous forme de probabilités conditionnelles : $P_{A_n \cap A_{n-1}}(A_{n+1}) = \dfrac{2}{3}$ etc. En appliquant la formule des probabilités totales, on obtient $P(E_{n+1}) = P_{E_n}(E_n+1) + P_{F_n}(E_n+1) + P_{G_n}(E_n+1) + P_{H_n}(E_n+1)$. Or, les deux dernières probabilités sont nulles car E_{n+1}, qui suppose la partie n gagnée, est incompatible avec G_n et H_n, qui la supposent perdue. Quand aux deux premières, elles sont égales, pour une raison similaire, à $P_{A_n \cap A_{n-1}}(A_{n+1})$ et $P_{A_n \cap \bar{A}_{n-1}}(A_{n+1})$ respectivement, d'où la formule demandée.

   (b) De la même façon on démontre que $P(F_{n+1}) = \dfrac{1}{2}P(G_n) + \dfrac{1}{3}P(H_n)$; $P(G_{n+1}) = \dfrac{1}{3}P(E_n) + \dfrac{1}{2}P(F_n)$ et $P(H_{n+1}) = \dfrac{1}{2}P(G_n) + \dfrac{2}{3}P(H_n)$ (un simple coup d'oeil à l'énoncé de la question suivante suffisait d'ailleurs à trouver les coefficients ...).

   (c) C'est juste une autre façon d'exprimer les relations précédentes, le calcul de MU_n donnant les membres de droite des quatre relations.

2. (a) On calcule $PQ = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = 10I$. On en déduit que $P \times \dfrac{1}{10}Q = I$, autrement dit P est inversible d'inverse $P^{-1} = \dfrac{1}{10}Q$.

   (b) $MC_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$; $MC_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$; $MC_3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ et $MC_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. On constate que chacun des produits MC_i est proportionnel à C_i, avec comme coefficients de proportionnalité respectifs $-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{2}$ et 1 (en termes techniques que vous verrez plutôt l'an prochain, cela signifie que les quatre coefficients de proportionnalité sont des valeurs propres de la matrice M, et les colonnes C_i représentent les coordonnées de vecteurs propres associés à ces valeurs propres).

   (c) Si on a bien compris les calculs de la question précédente, il n'y a plus rien à faire : en regroupant les produits de colonnes, on a constaté que le produit MP donnait une matrice dont chaque colonne était proportionnelle à la colonne correspondante de P. Or, pour multiplier les colonnes d'une matrice par des constantes, il suffit de faire le produit à droite de cette matrice par la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les constantes en question. Ici, on a donc prouvé que $MP = PD$, où $D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ce qui, en multipliant l'égalité à droite par P^{-1}, revient à dire que $M = PDP^{-1}$.

3. (a) C'est une des récurrences à savoir faire les yeux fermés. On pose $P_n : M^n = PD^nP^{-1}$. Pour $n = 1$, on a $M^1 = M = PDP^{-1}$, donc P_1 est vérifiée. Supposons $M^n = PD^nP^{-1}$ alors $M^{n+1} = M^nM = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$. Par principe de récurrence, P_n est vérifiée pour toute valeur de n.

(b) On initialise à $n=2$: on a $M^{2-2}U_2 = U_2$ (ce qui est vrai puisque $M^0 = I$), et si $U_n = M^{n-2}U_2$ alors $U_{n+1} = MU_n = MM^{n-2}U_2 = M^{n-1}U_2$. Donc $\forall n \geqslant 2$, $U_n = M^{n-2}U_2$.

(c) Il suffit de calculer la première colonne donc de faire le produit sur la première colonne.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{3}\right)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{6}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ 2\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ 2\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 2\left(\frac{1}{6}\right)^n + 6\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3 \\ 2\left(-\frac{1}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 \\ -2\left(-\frac{1}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 \\ \left(-\frac{1}{3}\right)^n + 2\left(\frac{1}{6}\right)^n - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3 \end{pmatrix}$$

Commme $U_n = M^{n-2}U_2$ et que $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (on a supposé que les deux premières parties étaient gagnées), U_n est simplement la première colonne de M_{n-2} donc $P(E_n) = \frac{1}{10}\left(-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} + 2\left(\frac{1}{6}\right)^{n-2} + 6\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + 3\right)$; $P(F_n) = \frac{1}{10}\left(2\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} - 2\left(\frac{1}{6}\right)^{n-2} - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + 2\right)$; $P(G_n) = \frac{1}{10}\left(-2\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} - 2\left(\frac{1}{6}\right)^{n-2} + 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + 2\right)$ et $P(H_n) = \frac{1}{10}\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} + 2\left(\frac{1}{6}\right)^{n-2} - 6\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + 3\right)$.

(d) Comme $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{2}$ ont des valeurs absolues strictement inférieures à 1, on a $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0$. D'où les limites demandées.

4. (a) On a manifestement $A_k = E_k \cup F_k$ selon que la $k-1$ème partie a été gagnée ou non.

(b) Les deux événements E_k et F_k étant incompatibles on a simplement $P(X_k = 1) = P(A_k) = P(E_k) + P(F_k) = \frac{1}{10}\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-2} + 4\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} + 5\right)$, donc X_k suit une loi de Bernouilli de paramètre $\frac{1}{10}\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-2} + 4\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} + 5\right)$.

5. (a) Le joueur étant supposé avoir gagné les deux premières parties, $S_2 = 2$ est un événement certain donc $P(S_2 = 2) = 1$.

Pour $n = 3$, le joueur ayant gagné les deux premières parties, l'événement $(S_3 = 2)$ n'est autre que $\bar{A}_3$ donc $P(S_3 = 2) = 1 - \frac{1}{10}\left(\left(-\frac{1}{3}\right) + 4\left(\frac{1}{2}\right) + 5\right) = -\frac{1}{10}\left(\frac{-2+12+30}{6}\right) =$

$1 - \dfrac{40}{10 \times 6} = \dfrac{1}{3}$ (on a utilisé le résultat obtenu pour la probabilité de A_k pour $k = 3$). On peut également se contenter de constater qu'on cherche à calculer $P_{A_1 \cap A_2}(\overline{A_3})$, qui est une des probabilités conditionnelles données en début d'énoncé, égale à $\dfrac{1}{3}$.
Pour $n \geqslant 4$, l'événement $S_n = 2$ signifie que toutes les parties de la troisième à la $n$ième ont été perdues. Or, pour $k = 4$, $P_{\overline{A_3}}(\overline{A_4}) = \dfrac{1}{2}$ et pour $k \geqslant 5$, $P_{\overline{A_{k-2}} \cap \overline{A_{k-1}}}(\overline{A_k}) = \dfrac{2}{3}$, donc par la formule des probabilités composées, $P(S_n = 2) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} \times \displaystyle\prod_{k=5}^{k=n} \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{6} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-4}$.

(b) L'événement $S_n = n$ signifie que le joueur a gagné toutes les parties, par un raisonnement similaire au précédent (et même plus simple), $P(S_n = n) = \displaystyle\prod_{k=3}^{k=n} \dfrac{2}{3} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-2}$.

(c) Le nombre total de victoires est $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} X_k$ puisque X_k représente le succès ou l'échec à la $k$ième partie. On a donc $E(S_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} E(X_k) = E(X_1) + E(X_2) + \sum_{k=3}^{k=n} E(X_k) = 1 + 1 + \sum_{k=3}^{k=n} \dfrac{1}{10}\left(\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{k-2} + 4\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-2} + 5\right) = 2 + \dfrac{1}{10}\sum_{k=1}^{k=n-2}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^k + \dfrac{2}{5}\sum_{k=1}^{k=n-2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^k + \dfrac{n-2}{2} = \dfrac{n}{2} + 1 + \dfrac{1}{10} \times \left(-\dfrac{1}{3}\right) \times \dfrac{\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} - 1}{-\frac{1}{3} - 1} + \dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \dfrac{n}{2} + 1 + \dfrac{1}{40}\left(9\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n - 1\right) - \dfrac{2}{5}\left(4\left(\dfrac{1}{2}\right)^n - 1\right) = \dfrac{n}{2} + \dfrac{11}{8} + \dfrac{9}{40}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n - \dfrac{8}{5}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
On peut constater que $E(S_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{n}{2}$, ce qui signifie que le joueur tend à gagner la moitié des parties auxquelles il participe, ce qui est raisonnable puisque les quatre probabilités conditionnelles de gain données au tout début du problème ont une moyenne égale à $\dfrac{1}{2}$. Le terme constant $\dfrac{11}{8}$ vient du fait qu'on a supposé que le joueur démarrait avec deux victoires.

Sujet d'annales : HEC 2008

ECE3 Lycée Carnot

10 mai 2010

Dans tout le problème, N désigne un entier naturel fixé supérieur ou égal à 2, et p un réel fixé de l'intervalle $]0,1[$. On pose : $q = 1 - p$. Soit n un entier naturel quelconque.

Dans une population de N individus, on s'intéresse à la propagation d'un certain virus. Chaque jour, on distingue dans cette population trois catégories d'individus : en premier lieu, les individus sains, c'est-à-dire ceux qui ne sont pas porteurs du virus, ensuite les individus qui viennent d'être contaminés et qui sont inoffensifs pour les autres, et enfin, les individus contaminés par le virus et qui sont contagieux. Ces trois catégories évoluent jour après jour selon le modèle suivant :

- chaque jour n, chaque individu sain peut être contaminé par n'importe lequel des individus contagieux ce jour avec la même probabilité p, ces contaminations éventuelles étant indépendantes les unes des autres.
- un individu contaminé le jour n devient contagieux le jour $n+1$.
- chaque individu contagieux le jour n redevient sain le jour $n+1$.

On note alors X_n le nombre aléatoire d'individus contagieux le jour n. On remarquera que si, pour un certain entier naturel i, on a $X_i = 0$, alors on a aussi $X_{i+1} = 0$.

Partie I. Un cas particulier

Dans cette partie uniquement, on suppose que l'on a : $N = 3$ et $p = \dfrac{1}{3}$. On considère les matrices

$$S = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 4 & 9 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -6 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la matrice R est inversible et calculer son inverse R^{-1}.
2. (a) Calculer le produit matriciel $R^{-1}SR$.

   (b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$ l'expression de la matrice S^n.
3. Soit n un entier fixé de $\mathbb{N}$.

   (a) Déterminer, pour tout entier k, la probabilité conditionnelle de $P_{X_n=0}(X_{n+1} = k)$.

   (b) Déterminer, pour tout entier k, la probabilité conditionnelle de $P_{X_n=3}(X_{n+1} = k)$.

   (c) Vérifier qu'en supposant l'évènement $X_n = 1$ réalisé (respectivement $X_n = 2$ réalisé), la loi de X_{n+1} est la loi binomiale de paramètres $\left(2, \dfrac{1}{3}\right)$ (resp. $\left(1, \dfrac{5}{9}\right)$).

   (d) On note $E_{X_n=i}(X_{n+1})$ l'espérance de la loi obtenue pour la variable X_{n+1} en supposant vérifié l'évènement $X_n = i$. Déterminer les valeurs respectives de $E_{X_n=1}(X_{n+1})$ et $E_{X_n=2}(X_{n+1})$.
4. On suppose, uniquement dans cette question, que X_0 suit la loi binomiale de paramètre $\left(3, \dfrac{1}{3}\right)$.

(a) Déterminer la loi de X_1 et calculer $E(X_1)$.

(b) Vérifier la formule suivante : $E\left(X_1\right) = \sum_{i=0}^{i=3} E_{X_0=i}(X_1) \times P(X_0 = i)$.

5. Pour tout entier naturel n, on définit la matrice $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \\ t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \end{pmatrix}$.

   (a) Déterminer une relation entre u_n, v_n, w_n et t_n.

   (b) À l'aide de la formule des probabilités totales, déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que : $U_{n+1} = MU_n$.

   (c) Exprimer M en fonction de S. En déduire les puissances de M.

   (d) Donner l'expression des réels u_n et v_n en fonction de n, v_0 et w_0.

6. On pose : $F = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (X_n = 0)$.

   (a) Que représente l'évènement F ?

   (b) Montrer que le virus finit par disparaître presque sûrement, quelle que soit la loi de la variable aléatoire initiale X_0.

Corrigé du sujet HEC 2008

1. Appliquons donc dans la joie et la bonne humeur le pivot de Gauss à notre matrice R :

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -6 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_4 \leftarrow L_4 + L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow 6L_1 - 5L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 - L_4 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1/6 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3/6 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice R est bien inversible, d'inverse $R^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. (a) C'est un calcul peu passionnant : $R^{-1}S = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ 9 & 9 & 9 & 9 \end{pmatrix}$, puis $R^{-1}SR = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

   (b) Notons D la matrice diagonale calculée à la question précédente, et prouvons par récurrence que $S^n = RD^nR^{-1}$: c'est vrai pour $n = 1$, car $S = R(R^{-1}SR)R^{-1} = RDR^{-1}$; en supposant la formule exacte au rang n, on a ensuite $S^{n+1} = S \times S^n = (RDR^{-1})(RD^nR^{-1}) = RD^{n+1}R^{-1}$. On en déduit donc que $S^n = R \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9^n \end{pmatrix} R^{-1}$, soit

$$S^n = \begin{pmatrix} 9^n & 9^n - 5^n & 9^n - 5^n & 9^n \\ 0 & \dfrac{1 + 5^{n+1}}{6} & \dfrac{5^{n+1} - 5}{6} & 0 \\ 0 & \dfrac{5^n - 1}{6} & \dfrac{5^n + 5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. (a) L'énoncé était peut-être un peu ambigü sur la façon dont s'effectue la contamination : une personne saine au jour n qui se fait contaminer devient contagieuse au jour $n+1$, il n'y a que deux états possibles (et pas d'état « malade mais pas contagieux »). Du coup, si personne n'est contagieux au jour n (c'est ce que signifie $X_n = 0$), personne ne le sera au jour $n+1$ (puisque personne n'aura pu être contaminé), soit $P_{X_n=0}(X_{n+1} = 0) = 1$, et $P_{X_n=0}(X_{n+1} = 1) = P_{X_n=0}(X_{n+1} = 2) = P_{X_n=0}(X_{n+1} = 3) = 0$.

   (b) Si tout les individus sont contagieux au jour n (hypothèse $X_n = 3$), d'après l'énoncé, ils seront tous sains le jour $n+1$ donc $P_{X_n=3}(X_{n+1} = 0) = 1$ et $P_{X_n=3}(X_{n+1} = 1) = P_{X_n=3}(X_{n+1} = 2) = P_{X_n=3}(X_{n+1} = 3) = 0$.

   (c) Si on suppose $X_n = 1$ réalisé, il y a donc un individu contagieux au jour n et deux individus sains. Chacun de ces deux individus a donc une probabilité $p = \frac{1}{3}$ de devenir contagieux, le nombre de personnes contaminées suivra donc bien une loi binômiale de paramètre $\left(2; \frac{1}{3}\right)$.

   Si $X_n = 2$, il y a cette fois-ci un seul individu sain (et donc suscptible d'être contaminé), donc X_{n+1} suivra une loi de Bernouilli. Reste à déterminer son paramètre, c'est-à-dire la probabilité que l'individu sain soit contaminé, sachant qu'il a deux possibilités de se faire contaminer puisqu'il y a deux malades. Autrement dit, la probabilité qu'il ne soit **pas** contaminé vaut $\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$. La loi de X_{n+1} sera donc bien binômiale de paramètre $\left(1; \frac{5}{9}\right)$.

   (d) D'après la question précédente, il s'agit simplement de calculer des espérances de lois binômiales, donc $E_{X_n=1}(X_{n+1}) = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ et $E_{X_n=2}(X_{n+1}) = \frac{5}{9}$.

4. (a) On a donc la loi suivante pour X_0 : $P(X_0 = 0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$; $P(X_0 = 1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{12}{27} = \frac{4}{9}$; $P(X_0 = 2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{2}{9}$ et $P(X_0 = 3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{27}$. Les quatre évènements dont on vient de calculer les probabilités forment un système complet d'évènements, on peut appliquer (quatre fois) la formule des probabilités totales pour déterminer la loi de X_1.

   Commençons par préciser les probabilités conditionnelles manquantes : au vu de la question c, $P_{X_n=2}(X_{n+1} = 0) = \frac{4}{9}$; $P_{X_n=2}(X_{n+1} = 1) = \frac{5}{9}$ et $P_{X_n=2}(X_{n+1} = 2) = P_{X_n=2}(X_{n+1} = 3) = 0$; et $P_{X_n=1}(X_{n+1} = 0) = \binom{2}{0} \times \left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$; $P_{X_n=1}(X_{n+1} = 1) = \binom{2}{1} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ et $P_{X_n=1}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{9}$.

   On a donc $P(X_1 = 0) = P(X_0 = 0) \times P_{X_0=0}(X_1 = 0) + P(X_0 = 1) \times P_{X_0=1}(X_1 = 0) + P(X_0 = 2) \times P_{X_0=2}(X_1 = 0) + P(X_0 = 3) \times P_{X_0=3}(X_1 = 0) = \frac{8}{27} \times 1 + \frac{4}{9} \times \frac{4}{9} + \frac{2}{9} \times \frac{4}{9} + \frac{1}{27} \times 1 = \frac{51}{81}$. De même, $P(X_1 = 1) = \frac{8}{27} \times 0 + \frac{4}{9} \times \frac{4}{9} + \frac{2}{9} \times \frac{5}{9} + \frac{1}{27} \times 0 = \frac{26}{81}$; $P(X_1 = 2) = \frac{8}{27} \times 0 + \frac{4}{9} \times \frac{1}{9} + \frac{2}{9} \times 0 + \frac{1}{27} \times 0 = \frac{4}{81}$, et $P(X_1 = 3) = 0$ (toutes les probabilités conditionnelles sont nulles). Résumons tout cela dans un tableau :

k	0	1	2	3
$P(X_1 = k)$	$\frac{51}{81}$	$\frac{26}{81}$	$\frac{4}{81}$	0

D'où une espérance $E(X_1) = \dfrac{26 + 2 \times 4}{81} = \dfrac{34}{81}$.

(b) Calculons la somme en question en reprenant les résultats de la question $3.d)$: $\displaystyle\sum_{i=0}^{i=3} E_{X_0=i}(X_1) \times P(X_0 = i) = 0 \times \frac{8}{27} + \frac{2}{3} \times \frac{4}{9} + \frac{5}{9} \times \frac{2}{9} + 0 \times \frac{1}{27} = \frac{34}{81}$, l'égalité est vérifiée.

5. (a) Les quatre évènements formant un système complet, on aura $u_n + v_n + w_n + t_n = 1$.

(b) D'après la formule des probabilités totales,

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} P_{X_n=0}(X_{n+1} = 0) & P_{X_n=1}(X_{n+1} = 0) & P_{X_n=2}(X_{n+1} = 0) & P_{X_n=3}(X_{n+1} = 0) \\ P_{X_n=0}(X_{n+1} = 1) & P_{X_n=1}(X_{n+1} = 1) & P_{X_n=2}(X_{n+1} = 1) & P_{X_n=3}(X_{n+1} = 1) \\ P_{X_n=0}(X_{n+1} = 2) & P_{X_n=1}(X_{n+1} = 2) & P_{X_n=2}(X_{n+1} = 2) & P_{X_n=3}(X_{n+1} = 2) \\ P_{X_n=0}(X_{n+1} = 3) & P_{X_n=1}(X_{n+1} = 3) & P_{X_n=2}(X_{n+1} = 3) & P_{X_n=3}(X_{n+1} = 3) \end{pmatrix} U_n,$$

c'est-à-dire que $M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & 1 \\ 0 & \frac{4}{9} & \frac{5}{9} & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) On constate simplement que $M = \dfrac{1}{9}S$, donc $M^n = \dfrac{1}{9^n}S^n$.

(d) Une petite récurrence permet de prouver que $U_n = M^n U_0$ (en effet, c'est trivialement vrai pour $n = 0$, et si on le suppose au rang n, alors $U_{n+1} = MU_n = M(M^n U_0) = M^{n+1}U_0$), donc en effectuant le produit matriciel sur les deux premières lignes, $u_n = \dfrac{1}{9^n}(9^n u_0 + (9^n - 5^n)v_0 + (9^n - 5^n)w_0 + 9^n t_0) = u_0 + v_0 + w_0 + t_0 - \left(\dfrac{5}{9}\right)^n (v_0 + w_0) = 1 - \left(\dfrac{5}{9}\right)^n (v_0 + w_0)$;
et $v_n = \dfrac{1}{9^n}\left(\dfrac{1 + 5^{n+1}}{6}v_0 + \dfrac{5^{n+1} - 5}{6}w_0\right) = \dfrac{v_0 - 5w_0}{6 \times 9^n} + \dfrac{5^{n+1}(v_0 - w_0}{6 \times 9^n}$.

6. (a) Les évènements $(X_n = 0)$ forment une suite croissante d'évènements (puisque $X_n = 0 \Rightarrow X_{n+1} = 0$, dont l'union représente toutes loes situations où l'épidémie finira par être éradiquée (puisque, si $X_n = 0$, plus personne ne retombera malade).

(b) Il suffit de calculer, en utilisant le théorème de la limite monotone, la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$. Au vu de la formule obtenue et du fait que $\dfrac{5}{9} \in]-1; 1[$, cette limite vaut 1 quelles que soient les valeurs de v_0 et w_0 (et a fortiori de u_0 et t_0 qui n'interviennent pas dans l'expression de u_n), ce qui signifie bien que le virus disparait presque sûrement, indépendamment de la loi de X_0.

Feuilles d'exercices n°25 : Couples de variables aléatoires

ECE3 Lycée Carnot

25 mai 2010

Exercice 1 (*)

Soient X et Y deux variables indépendantes suivant une loi de Bernoulli de même paramètre p. On note $U = X + Y$ et $V = X - Y$. Calculer la loi du couple (U, V). Les deux variables sont-elles indépendantes ?

Exercice 2 (**)

Une armoire est constituée de trois tiroirs. On y range une chaussette verte, une rouge et une noire. On note X le nombre de chaussettes que contient le premier tiroir et N le nombre de tiroirs vides. Déterminez la loi conjointe puis les lois marginales du couple (X, N). Les deux variables sont-elles indépendantes ?

Exercice 3 (**)

On dispose de n urnes numérotées de 1 à n. L'urne k contient k boules elles-mêmes numérotées de 1 à k. On tire une urne au hasard, puis une boule au hasard dans cette urne. On note X le numéro de l'urne et Y le numéro de la boule. Déterminer la loi du couple (X, Y), puis les lois marginales. En déduire l'espérance des variables X et Y.

Exercice 4 (***)

On considère deux variables aléatoires X et Y telle que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{1; 2; \dots; n\}$, et $P((X = i) \cap (Y = j)) = a \times i \times j$.

1. Déterminer la valeur de la constante a.
2. Donner la loi, l'espérance et la variance de X.
3. Déterminer la loi de Y.
4. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
5. Calculer $P(X = Y)$.
6. On pose $U = \max(X, Y)$. Calculer la loi de U.

Exercice 5 (***)

Une urne contient $n + 1$ boules numérotées 0 à n. On y tire successivement et avec remise un certain nombre de boules. La variable aléatoire X_k est définie de la façon suivante : $X_1 = 1$, et ensuite $X_i = 1$ si le numéro obtenu au tirage i n'avait jamais été tiré avant, $X_i = 0$ sinon.

1. Déterminer la loi de X_2.
2. Montrer que X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{i-1}$.
3. Montrer que, si $i < j$, on a $P((X_i = 1) \cap (X_j = 1)) = \dfrac{(n-1)^{i-1}n^{j-1}}{(n+1)^{j-1}}$.
4. En déduire la loi du produit X_iX_j.
5. Les variables X_i et X_j sont-elles indépendantes ?
6. On note Z_p la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus lors des p premiers tirages. Exprimer Z_p en fonction des variables définies précédemment.
7. En déduire son espérance, et la limite de celle-ci lorsque p tend vers $+\infty$.

Exercice 6 (***)

Trois urnes contiennent chacune n boules numérotées de 1 à n. On tire une boule dans chaque urne et on note X_1, X_2 et X_3 les trois numéros obtenus. On note X le plus grand des numéros obtenus, Z le plus petit, et Y celui du milieu. Déterminer la loi du triplet (X, Y, Z) (qui est définie, comme vous pourriez vous en douter, comme la donnée des probabilités de toutes les intersections de trois événements possibles). En déduire la loi de X, de Y et de Z. On pourra commencer pour cet exercice par traiter le cas où $n = 3$.

Exercice 7 (EDHEC 99) (**)

Soient X, Y et Z trois variables aléatoires mutuellement indépendantes et définies sur le même espace probabilisé Ω. On suppose que X, Y et Z suivent la loi $\mathcal{U}_{\{1;2;\dots;n\}}$.

1. (a) Donner la loi du couple (X, Y).
   (b) Montrer que : $\forall k \in \{2; 3; \dots; n+1\}$, $P(X + Y = k) = \dfrac{k-1}{n^2}$.
   (c) Montrer que : $\forall k \in \{n+1; \dots; 2n\}$, $P(X + Y = k) = \dfrac{2n-k+1}{n^2}$.
2. Utiliser la formule des probabilités totales pour déduire de la première question que
$$P(X + Y = Z) = \frac{n-1}{2n^2}$$
.
3. (a) Montrer que la variable aléatoire $T = n + 1 - Z$ suit la loi $\mathcal{U}_{\{1;2;\dots;n\}}$.
   (b) On admet que T est indépendante de X et de Y. Déterminer la probabilité
$$P(X + Y + Z = n + 1)$$
.

Exercice 8 (**)

On réalise une suite de lancers avec une piève équilibrée, et on note X le rang d'apparition du premier Pile et Y le rang d'apparition du deuxième Pile.

1. Quelle est la loi suivie par la variable X ?
2. Déterminer la loi du couple (X, Y).
3. En déduire la loi marginale de Y.
4. Déterminer, pour tout entier $j \geqslant 2$, la loi de X conditionnelle à $Y = j$.
5. Déterminer, pour tout entier $i \geqslant 1$, la loi de $Y - n$ conditionnelle à $X = n$. Ce résultat est-il surprenant ?

Exercice 9 (***)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de même paramètre p. On note $U = \max(X, Y)$ et $V = \min(X, Y)$.

1. Déterminer les lois de U et de V.
2. Calculez l'espérance de la variable U.
3. Déterminer $E(V)$ de deux façons différentes (un calcul direct, et un autre utilisant la valeur de $E(U)$).

Exercice 10 (***) (EM Lyon 2010)

Une gare dispose de deux guichets. Trois clients notés C_1, C_2, C_3 arrivent en même temps. Les clients C_1 et C_2 se font servir tandis que le client C_3 attend puis effectue son opération dès que l'un des deux guichets se libère.

On définit X_1, X_2, X_3 les variables aléatoires égales à la durée de l'opération des clients C_1, C_2,. C_3 respectivement. Ces durées sont mesurées en minutes et arrondies à l'unité supérieure ou égale. On suppose que les variables aléatoires X_1, X_2, X_3 suivent la loi géométrique de paramètre p, $p \in]0; 1[$ et qu'elles sont indépendantes. On note $q = 1 - p$.

On note A l'événement, : « C_3 termine en dernier son opération ».

Ainsi l'événement A est égal à l'événement : $(\min(X_1, X_2) + X_3) > \max(X_1, X_2)$. On se propose de calculer la probabilité de A.

1. Rappeler la loi de X_1 ainsi que son espérance $E(X_1)$ et sa variance $V(X_1)$. On définit la variable aléatoire Δ par $\Delta = |X_1 - X_2|$.
2. Calculer la probabilité $\mathrm{P}(\Delta = 0)$.
3. Soit n un entier naturel non nul.
   (a) Justifier : $\mathrm{P}(X_1 - X_2 = n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X_1 = k)\,\mathrm{P}(X_2 = n + k)$
   (b) En déduire : $\mathrm{P}(\Delta = n) = 2\dfrac{pq^n}{1+q}$
4. (a) Montrer que Δ admet une espérance $E(\Delta)$ et la calculer.
   (b) Montrer : $E\left((X_1 - X_2)^2\right) = 2V(X_1)$. En déduire que Δ admet une variance $V(\Delta)$ et la calculer.
5. Montrer que l'événement A est égal à l'événement $(X_3 > \Delta)$.
6. (a) En déduire : $\mathrm{P}(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\Delta = k)\,\mathrm{P}(X_3 > k)$
   (b) Exprimer $\mathrm{P}(A)$ à l'aide de p et q.

Corrigé de la feuille d'exercices n°25

Exercice 1 (*)

On a donc $P(X = 1) = P(Y = 1) = p$ et $P(X = 0) = P(Y = 0) = 1 - p$. On en déduit la loi suivante pour (U, V) (pas vraiment d'autre méthode que de procéder au cas pas cas, sachant qu'il n'y a que quatre possibilités) :

$U\backslash V$	-1	0	1	$P(U = i)$
0	0	$(1-p)^2$	0	$(1-p)^2$
1	$p(1-p)$	0	$p(1-p)$	$2p(1-p)$
2	0	p^2	0	p^2
$P(V = j)$	$p(1-p)$	$p^2 + (1-p)^2$	$p(1-p)$	

Les deux variables ne sont manifestement pas indépendantes : on a par exemple $P((U = 0) \cap (V = 1)) = 0$, alors que $P(U = 0) \times P(V = 1) \neq 0$.

Exercice 2 (**)

Le mieux si on ne veut pas se perdre dans le remplissage du tableau est encore d'écrire tous les rangements possibles, au nombre de 27, et de compter. Sinon, on s'en sort sans : si $N = 0$, on a nécessairement $X = 1$ puisqu'on a alors une chaussette dans chaque tiroir, et cela se produit avec probabilité $\dfrac{6}{27}$ (six rangements possibles, on peut permuter les chaussettes). Si $N = 1$, soit $X = 0$ avec probabilité $\dfrac{6}{27}$ (trois cas avec une chaussette dans le deuxième tiroir et deux dans le troisième, trois autres cas où c'est le contraire), soit $X = 1$ avec probabilité $\dfrac{6}{27}$ (deux choix pour le tiroir où caser les deux chaussettes restantes, et trois choix de chaussette à mettre dans le premier tiroir), soit enfin $X = 2$ avec probabilité $\dfrac{6}{27}$ (essentiellement le même raisonnement que le cas précédent). Enfin, si $N = 2$, on a trois cas (il faut choisir le tiroir qui accueille les trois chaussettes), un pour lequel $X = 3$ et deux pour lesquels $X = 0$.

$X\backslash N$	0	1	2	$P(X = i)$
0	0	$\frac{6}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{8}{27}$
1	$\frac{6}{27}$	$\frac{6}{27}$	0	$\frac{12}{27}$
2	0	$\frac{6}{27}$	0	$\frac{6}{27}$
3	0	0	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$
$P(N = j)$	$\frac{6}{27}$	$\frac{18}{27}$	$\frac{3}{27}$	

Encore une fois, les deux variables ne sont pas du tout indépendantes.

Exercice 3 (**)

On a $P((X = i) \cap (Y = j)) = \dfrac{1}{in}$ si $j \leqslant i$, et 0 sinon (le numéro de la boule est toujours inférieur à celui de l'urne). En appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'évènements

$(Y = j)$, on a donc $P(X = i) = \displaystyle\sum_{j=1}^{i} \frac{1}{in} = i \times \frac{1}{in} = \frac{1}{n}$. C'est sans surprise une loi uniforme, d'espérance $\dfrac{n+1}{2}$. Quand à Y, on a $P(Y = j) = \displaystyle\sum_{i=j}^{n} \frac{1}{in}$ et $E(Y) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} j \sum_{i=j}^{n} \frac{1}{in} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} \frac{j}{in} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{in}\frac{i(i+1)}{2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{i+1}{2n} = \frac{n(n+1)}{4n} + \frac{1}{2} = \frac{n+3}{4}$.

Exercice 4 (***)

1. On doit avoir $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} P((X = i) \cap (Y = j)) = 1$, c'est-à-dire $1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} aij = a\sum_{i=1}^{n} i \sum_{j=1}^{n} j = a\frac{n^2(n+1)^2}{4}$, donc $a = \dfrac{4}{n^2(n+1)^2}$.
2. Via la formule des probabilités totales, $P(X = i) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} P((X = i) \cap (Y = j)) = ai\sum_{j=1}^{n} j = ai\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2i}{n(n+1)}$. Et donc $E(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{2i^2}{n(n+1)} = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{6n(n+1)} = \frac{2n+1}{3}$.
3. La loi de Y est la même que celle de X puisqu'obtenue par le même calcul.
4. On vérifie que $P(X = i) \times P(Y = j) = \dfrac{2i}{n(n+1)} \times \dfrac{2j}{n(n+1)} = \dfrac{4}{n^2(n+1)^2} ij = aij = P((X = i) \cap (Y = j))$. Les deux variables sont donc indépendantes.
5. On a $P(X = Y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P((X = i) \cap (Y = i)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{4i^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6n^2(n+1)^2} = \frac{2(2n+1)}{3n(n+1)}$.
6. Comme souvent avec un max, il faut passer par la fonction de répartition. On a $\forall k \in \{1; \dots; n\}$, $\forall x \in [k; k+1[$, $F_X(x) = F_Y(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{2i}{n(n+1)} = \frac{k(k+1)}{n(n+1)}$. On a donc $\forall k \in \{1; \dots; n\}$, $\forall x \in [k; k+1[$, $F_U(x) = F_X(x)F_Y(x) = \dfrac{k^2(k+1)^2}{n^2(n+1)^2}$. On en déduit que $P(U = k) = F_U(k) - F_U(k-1) = \dfrac{k^2(k+1)^2}{n^2(n+1)^2} - \dfrac{(k-1)^2k^2}{n^2(n+1)^2} = \dfrac{k^2((k+1)^2 - (k-1)^2)}{n^2(n+1)^2} = \dfrac{k^2 \times 4k}{n^2(n+1)^2} = \dfrac{4k^3}{n^2(n+1)^2}$.

Exercice 5 (***)

1. L'évènement $X_2 = 1$ signifie qu'on tire au deuxième tirage une boule différente de celle tirée au premier, ce qui se produit avec une probabilité $\dfrac{n}{n+1}$. On en déduit que $X_2 \sim \mathcal{B}\left(1, \dfrac{n}{n+1}\right)$.
2. De même $X_i = 1$, si chacun des $i-1$ premiers tirages a donné une boule différente de X_i, ce qui se produit avec probabilité $\dfrac{n}{n+1}$ pour chacun, donc $X_i \sim \mathcal{B}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{i-1}$.
3. On a $X_i = 1$ et $X_j = 1$, si les tirages i et j donnent des résultats différents (probabilité $\dfrac{n}{n+1}$), si chacun des $i-1$ premiers tirages est différent du i-ème et du j-ème (proba $\dfrac{n-1}{n+1}$, $i-1$ fois)

et si chacun des tirages entre le i-ème et le j-ème est différent du j-ème (proba $\frac{n}{n+1}$, $j-i-1$ fois), soit une probabilité globale de $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{j-i}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{i-1} = \frac{(n-1)^{i-1}n^{j-i}}{(n+1)^{j-1}}$.

4. Si X_i et X_j sont deux lois de Bernoulli, X_iX_j est aussi une loi de Bernoulli, dont le paramètre est la valeur calculée à la question précédente (puisqu'avoir $X_iX_j = 1$ équivaut à $(X_i = 1) \cap (X_j = 1)$).
5. La formule donnant $P((X_i = 1) \cap (X_j = 1))$ n'est manifestement pas égale au produit de $P(X_i = 1)$ par $P(X_j = 1)$. Les deux variables ne sont donc pas indépendantes.
6. On a tout simplement $Z_p = \sum_{i=1}^{p} X_i$.
7. On en déduit que $E(Z_p) = \sum_{i=1}^{p} E(X_i) = \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{i-1} = \frac{1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^p}{1-\frac{n}{n+1}} = (n+1)\left(1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^p\right)$.
   Lorsque p tend vers l'infini, comme $\left(\frac{n}{n+1}\right)^p$ est une suite géométrique de raison strictement inférieure à 1 tendant donc vers 0, cette espérance a pour limite $n+1$. C'est tout à fait logique, quand le nombre de boules tirées tend vers l'infini, on s'attend à tirer toutes les boules de l'urne, soit $n+1$ boules différentes.

Exercice 6 (***)

Commençons donc par le cas particulier où $n = 3$, ce qui permet encore de présenter sous forme de tableau. Les trois tableaux correspondent respectivement à $Z = 1$, $Z = 2$ et $Z = 3$. Il y a 27 tirages possibles au total, se répartissant comme suit :

$Y\backslash X$	1	2	3
1	$\frac{1}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{3}{27}$
2	0	$\frac{3}{27}$	$\frac{6}{27}$
3	0	0	$\frac{3}{27}$

$Y\backslash X$	1	2	3
1	0	0	0
2	0	$\frac{1}{27}$	$\frac{3}{27}$
3	0	0	$\frac{3}{27}$

$Y\backslash X$	1	2	3
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0	$\frac{1}{27}$

Pour obtenir les trois lois marginales, il faut dans le cas de Z faire la somme tableau par tableau, et dans le cas de X et de Y faire les sommes par lignes et par colonnes, en ajoutant les résultats des trois tableaux. On obtient :

	1	2	3
X	$\frac{1}{27}$	$\frac{7}{27}$	$\frac{19}{27}$
Y	$\frac{7}{27}$	$\frac{13}{27}$	$\frac{7}{27}$
Z	$\frac{19}{27}$	$\frac{7}{27}$	$\frac{1}{27}$

Dans le cas général, c'est un peu plus formel mais pas beaucoup plus compliqué. Soient (i, j, k) trois entiers inférieurs à n. Si $i > j > k$, on a $P((X = i) \cap (Y = j) \cap (Z = k)) = \frac{6}{n^3}$ (il y a n^3 tirages au total, et 6 favorables,, le nombre de permutations possibles des trois résultats). Si $i = j > k$ ou $i > j = k$, on a $P((X = i) \cap (Y = j) \cap (Z = k)) = \frac{3}{n^3}$, si $i = j = k$, on a $P((X = i) \cap (Y = j) \cap (Z = k)) = \frac{1}{n^3}$, et le reste du temps $P((X = i) \cap (Y = j) \cap (Z = k)) = 0$ (tous ces cas sont déjà présents dans le cas $n = 3$). On en déduit par la formule des probabilités totales que $P(Z = k) = \sum_{j=k}^{n} \sum_{i=j}^{n} P((X = i) \cap (Y = j) \cap (Z = k)) = \frac{1}{n^3} + (n-k)\frac{3}{n^3} + \sum_{j=k+1}^{n} \sum_{i=j}^{n} P((X = i) \cap (Y = j) \cap (Z = k)) = \frac{1}{n^3} + 3\frac{n-k}{n^3} + \sum_{j=k+1}^{n} \frac{3}{n^3} + 6\frac{n-j}{n^3} = \frac{1}{n^3}(1 + 6(n-k) + 3(n-k-1)(n-k))$. La loi de X est symétrique de celle de Z : $P(X = k) = P(Z = n+1-k) = \frac{1}{n^3}(1 + 6(k-1) + 3(k-2)(k-1))$. Enfin, $P(Y = j) = \sum_{i=j}^{n} \sum_{k=1}^{j} P((X = i) \cap (Y = j) \cap (Z = k)) = \frac{1}{n^3} + (n-1)\frac{3}{n^3} + \sum_{i=j+1}^{n} \sum_{k=1}^{j-1} \frac{6}{n^3} = \frac{1}{n^3}(1 + 3(n-1) + 6(j-1)(n-j))$. Vous pouvez vérifier que les formules marchent pour $n = 3$, voire pour $n = 4$ si vous êtes motivés.

Exercice 7 (EDHEC 99) (**)

1. (a) Puisque les deux variables sont indépendantes, $P((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}$.

   (b) Si $k \leqslant n+1$, $P(X + Y = k) = \sum_{i=1}^{i=n} P((X = i) \cap (Y = k - i))$. Mais si on veut avoir $1 \leqslant k - i \leqslant n$, on devra choisir des valeurs de i vérifiant $i \leqslant k-1$ (on aura toujours $k - i \leqslant n$ si $k \leqslant n+1$), donc $P(X + Y = k) = \sum_{i=1}^{k-1} P((X = i) \cap (Y = k - i)) = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{n^2} = \frac{k-1}{n^2}$.

   (c) Si $k > n+1$, on doit de même se restreindre pour avoir cette fois $k - i \leqslant n$, ce qui impose $i \geqslant k - n$, donc $P(X + Y = k) = \sum_{i=k-n}^{n} P((X = i) \cap (Y = k - i)) = \sum_{i=k-n}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{n - (k-n) + 1}{n^2} = \frac{2n - k + 1}{n^2}$.

2. Les variables $X + Y$ et Z sont indépendantes, on a donc $P(X + Y = Z) = \sum_{k=2}^{n} P(X + Y =$

$$k) \times P(Z=k) = \sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{n^2} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=2}^{n} k-1 = \frac{(n-1)n}{2n^3} = \frac{n-1}{2n^2}.$$

3. (a) $P(T=k) = P(n+1-Z=k) = P(Z=n+1-k) = \frac{1}{n}$ pour $1 \leqslant n+1-k \leqslant n$, c'est-à-dire pour $1 \leqslant k \leqslant n$. La variable aléatoire T a bien la même loi que Z.
   (b) On en déduit que $P(X+Y+Z=n+1) = P(X+Y=n+1-Z) = P(X+Y=T)$. Comme Z et T suivent la même loi, cette probabilité est la même que celle calculée un peu plus haut : $\frac{n-1}{2n^2}$.

Exercice 8 (**)

1. C'est une loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{2}$.
2. Soient i et j deux entiers supérieurs ou égaux à 1. Si $i \geqslant j$, on aura bien sûr $P((X=i)\cap(Y=j)) = 0$ (le deuxième Pile ne peut pas apparaitre avant le premier!). Si $i < j$, un seul tirage permet d'obtenir $X=i$ et $Y=j$: celui constitué de $i-1$ Face, puis le premier Pile, puis une nouvelle série de Face entre les tirages i et j, et enfin le deuxième Pile. On impose donc le résultat des j premiers lancers de la série, ce qui donne $P((X=i)\cap(Y=j)) = \frac{1}{2^j}$.
3. Par la formule des probabilités totales, $\forall j \geqslant 2$ (Y prend nécessairement des valeurs supérieurs ou égales à 2), $P(Y=j) = \sum_{i=1}^{+\infty} P((X=i)\cap(Y=j)) = \sum_{i=1}^{i=j-1} \frac{1}{2^j} = \frac{j-1}{2^j}$.
4. On a tout simplement $\forall i < j$ $P_{Y=j}(X=i) = \frac{P((X=i)\cap(Y=j))}{P(Y=j)} = \frac{1}{j-1}$. Autrement dit, si on connait le rang du deuxième Pile, la loi du premier est uniforme sur les tirages précédents.
5. Il faut calculer $P_{X=n}(Y-n=k) = P_{X=n}(Y=n+k)$. Cette probabilité est non nulle pour tout entier $k \geqslant 1$ et vaut $\frac{P((X=n)\cap(Y=n+k))}{P(X=n)} = \frac{1}{2^{n+k}} \times 2^n = \frac{1}{2^k}$. Autrement dit, $Y-n$ suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$ quand elle est conditionnée par $X=n$. C'est tout à fait logique : le temps d'attente du deuxième Pile à partir du lancer suivant le premier Pile suit la même loi que le temps d'attente du premier Pile.

Exercice 9 (***)

1. Commençons par déterminer l'allure de la fonction de répartition d'une loi géométrique : $\forall k \geqslant 1$, $\forall x \in [k, k+1[$, $F_X(x) = F_Y(x) = \sum_{i=1}^{i=k} P(X=i) = \sum_{i=1}^{i=k} p(1-p)^{i-1} = p \times \frac{1-(1-p)^k}{1-(1-p)} = 1-(1-p)^k$. On en déduit la fonction de répartition de U : $\forall k \geqslant 1$, $\forall x \in [k, k+1[$, $F_U(x) = (1-q^k)^2$ (en posant comme d'habitude $q = 1-p$), ce dont on déduit que $\forall k \geqslant 1$, $P(U=k) = F_U(k) - F_U(k-1) = (1-q^k)^2 - (1-q^{k-1})^2 = (2-q^k-q^{k-1})(q^{k-1}-q^k) = pq^{k-1}(2-q^k-q^{k-1})$. Pour V, c'est curieusement plus facile : $(1-F_X(x))(1-F_Y(x)) = q^k \times q^k = q^{2k}$, donc $F_V(x) = 1-q^{2k}$, puis $P(V=k) = (1-q^{2k}) - (1-q^{2k-2}) = q^{2k-2}(1-q^2)$. Autrement dit, $V \sim \mathcal{G}(1-q^2)$.
2. Un peu de motivation : $E(U) = \sum_{k=1}^{+\infty} 2kpq^{k-1} - kpq^{2k-1} - kpq^{2k-2} = 2p\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} - pq\sum_{k=1}^{+\infty} k(q^2)^{k-1} - p\sum_{k=0}^{+\infty} k(q^2)^{k-1} = \frac{2p}{(1-q)^2} - \frac{p(q+1)}{(1-q^2)^2} = \frac{2(1-q)}{(1-q)^2} - \frac{1-q^2}{(1-q^2)^2} = \frac{2}{1-q} - \frac{1}{1-q^2}$.

3. Par un calcul direct, puisque V suit une loi géométrique, $E(V) = \dfrac{1}{1-q^2}$. Sinon, on peut aussi utiliser que $U + V = X + Y$, d'où par linéarité $E(V) = E(X) + E(Y) - E(U) = \dfrac{2}{p} - \dfrac{2}{1-q} + \dfrac{1}{1-q^2} = \dfrac{1}{1-q^2}$. Remarquons qu'il est en fait infiniment plus simple de calculer d'abord l'espérance de V puisqu'on reconnait une loi classique, puis d'en déduire celle de U par linéarité.

Exercice 10 (***) (EM Lyon 2010)

1. C'est du cours : $\forall k \geqslant 1$, $P(X_1 = k) = pq^{k-1}$; $E(X_1) = \dfrac{1}{p}$ et $V(X_1) = \dfrac{q}{p^2}$.
2. On a $\Delta = 0$ si $X_1 = X_2$, ce qui donne $P(\Delta = 0) = P(X_1 = X_2) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P((X_1 = k) \cap (X_2 = k))$. Par indépendance de X_1 et X_2, $P(\Delta = 0) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} (pq^{k-1})^2 = p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} (q^2)^{k-1} = \dfrac{p^2}{1-q^2} = \dfrac{p^2}{(1-q)(1+q)} = \dfrac{p}{1+q}$.
3. (a) La formule est vaguement inversée : $X_1 - X_2 = n$ revient à $X_1 = n + X_2$, d'où $P(X_1 - X_2 = n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(X_2 = k)P(X_1 = n+k)$ (la formule de l'énoncé est juste malgré tout, puisque X_1 et X_2 ont la même loi).

   (b) L'évènement $\Delta = n$ se produit si $X_1 - X_2 = n$ ou $X_2 - X_1 = n$, deux évènements incompatibles et ayant la même probabilité, donc en utilisant la question précédente $P(\Delta = n) = 2\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1} \times pq^{n+k-1} = 2pq^n \sum_{k=1}^{+\infty} (q^2)^{k-1} = \dfrac{2pq^n}{1+q}$ (même fin de calcul qu'à la question 2).
4. (a) Sous réserve d'existence, l'espérance est donnée par $E(\Delta) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} kP(\Delta = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} 2k\frac{pq^k}{1+q}$. Cette somme est, à un facteur près, celle d'une série géométrique dérivée de raison $q < 1$, donc elle converge et $E(\Delta) = \dfrac{2pq}{1+q} \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \dfrac{2pq}{(1+q)(1-q)^2} = \dfrac{2q}{1-q^2}$.

   (b) Si on n'aime pas le calcul, on peut répondre à la question de manière formelle : $E((X_1 - X_2)^2) = E(X_1^2) - 2E(X_1X_2) + E(X_2^2) = 2E(X_1^2) - 2E(X_1)E(X_2) = 2V(X_1)$ via König-Huygens (on a utilisé l'indépendance pour découper l'espérance du produit).

   Autre méthode, le calcul brutal : via théorème du transfert, $E((X_1 - X_2)^2) = \displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty} k^2 P(X_1 - X_2 = k) = 2\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \times \frac{pq^k}{1+q}$ (en effet, $X_1 - X_2$ peut prendre des valeurs négatives, mais le terme de la somme obtenu pour $k = -n$ est identique au terme correspondant à $k = n$, ce qui permet de ne calculer qu'une moitié de la somme). On a donc $E((X_1 - X_2)^2) = 2\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)\frac{pq^k}{1+q} + 2\sum_{k=1}^{+\infty} k\frac{pq^k}{1+q} = \frac{2pq^2}{1+q}\sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} + \frac{2pq}{1+q}\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{4pq^2}{(1+q)(1-q)^3} + \frac{2pq}{(1+q)(1-q)^2} = \frac{4q^2 + 2pq}{(1+q)(1-q)^2} = \frac{2q(2q+p)}{(1+q)(1-q)^2} = \frac{2q}{(1-q)^2}$ car $2q + p = 2 - p = 1 + q$. Finalement, on obtient bien $\dfrac{2q}{p^2} = 2V(X1)$.

Ne reste plus qu'à achever le calcul de la variance de Δ. Comme $|X_1 - X_2|^2 = (X_1 - X_2)^2$, $V(\Delta) = E(\Delta^2) - E(\Delta)^2 = \dfrac{2q}{p^2} - \dfrac{4q^2}{(1-q^2)^2}$, qu'on peut simplifier ou non selon sa bonne volonté.

5. L'évènement A peut se traduire par $X_3 > \max(X_1 - X_2, X_2 - X_1)$, ce qui correspond bien à $X_3 > \delta$.

6. (a) C'est une simple application de la formule des probabilités totales avec le système complet formé des évènements $\Delta = k$.

   (b) Commençons par calculer $P(X_3 > k) = \displaystyle\sum_{i=k=1}^{+\infty} P(X_3 = i) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} pq^{i-1} = pq^k \sum_{i=1}^{+\infty} q^{i-1} = \dfrac{pq^k}{1-q} = q^k$.

   On a donc $P(A) = P(\Delta = 0) \times P(X_3 > 0) + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(\Delta = k) \times P(X_3 > k) = \frac{p}{1+q} \times 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2pq^k}{1+q} \times q^k = \frac{p}{1+q} + \frac{2pq^2}{1+q} \sum_{k=1}^{+\infty} (q^2)^{k-1} = \frac{p}{1+q} + \frac{2pq^2}{(1+q)(1-q^2)} = \frac{p(1+q)+2q^2}{(1+q)^2} = \frac{1+q^2}{(1+q)^2}$.

Feuilles d'exercices n°26 : Espaces vectoriels

ECE3 Lycée Carnot

8 juin 2010

Exercice 1 (*)

Déterminer parmi les ensembles suivants lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$: $A = \{(x,y) \mid x \leqslant y\}$; $B = \{(x,y) \mid xy = 0\}$; $C = \{(x,y) \mid x = y\}$; $D = \{(x,y) \mid x+y = 1\}$; $E = \{(x,y) \mid 2x - 6y = 0\}$.

Exercice 2 (**)

On se place dans l'ensemble E des suites réelles. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de E ?

- suites arithmétiques
- suites géométriques
- suites récurrentes linéaires d'ordre 2
- suites vérifiant la récurrence $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 3u_n$
- suites nulles à partir d'un certain rang
- suites équivalentes à $\dfrac{\lambda}{n}$, pour un certain réel λ.

Exercice 3 (*)

On considère dans $\mathbb{R}^3$ les ensembles $F = \{(x,y,z) \mid x+y-z = 0\}$ et $G = \{(a-b, a+b, a-3b) \mid a,b \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et déterminer leur intersection.

Exercice 4 (*)

Dans un espace vectoriel E, on considère trois vecteurs x_1, x_2 et x_3 et on définit $y_1 = x_1+x_2+x_3$, $y_2 = x_1 + x_2$ et $y_3 = 2x_1 + x_2 - x_3$. Montrer que x_1, x_2 et x_3 sont des combinaisons linéaires de y_1, y_2 et y_3. En déduire que $Vect(x_1, x_2, x_3) = Vect(y_1, y_2, y_3)$.

Exercice 5 (**)

Donner une base de chacun des sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^4$: $F = \{(x,y,z,t) \mid x+y-2z = 2x-3y+z = -4x+z = 0\}$; $G = \{(a-2b+c, 2a-3b, 4a+2c, 2a+b-c) \mid a,b,c \in \mathbb{R}^3\}$; $H = \{(x,y,z,t) \mid x+y-z = 2x-y+t = x-2y-z+t = 0\}$.

Exercice 6 (**)

Montrer que la famille $((0,1,1),(2,0,-1),(2,1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner les coordonnées de $(4,-1,1)$ et de $(1,0,0)$ dans cette base. Mêmes questions avec la famille $((3,-1,1),(2,0,0),(1,-2,4))$.

Exercice 7(*)

On se place dans un espace vectoriel de dimension 3 dont une base est (e_1,e_2,e_3). La famille $(e_1+e_2,e_2+e_3,e_3+e_1)$ est-elle une base de E ? Et la famille $(e_1,e_1+e_2,e_1+e_2+e_3)$?

Exercice 8 (***)

On note $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $E=\mathbb{R}^3$, dont on notera les vecteurs en colonne et non en ligne pour une fois.

1. On note $F = \{X \in E \mid AX = 0\}$. Montrer que F est un espace vectoriel.
2. En donner une base.
3. On note $G = \{Y \in E \mid AX = Y$ admet au moins une solution$\}$. Montrer que G est un espace vectoriel.
4. Montrer qu'on peut écrire G comme ensemble des solutions d'un système linéaire.
5. Trouver une base de G.

Exercice 9 (***)

On considère les fonctions e_1, e_2, e_3 et e_4 définies sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $e_1(x)=x$, $e_2(x)=x^2$, $e_3(x)=x\ln x$ et $e_4(x)=x^2\ln x$. On note E l'espace vectoriel engendré par ces quatre fonctions.

1. On suppose dans cette question que a, b, c et d sont 4 réels tels que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $ax+bx^2+cx\ln x+dx^2\ln x=0$. Montrer que $a+b=0$.
2. Etablir que $\forall x > 1$, $\dfrac{a}{x\ln x}+\dfrac{b}{\ln x}+\dfrac{c}{x}+d=0$. En déduire que $d=0$.
3. Etablir ensuite que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\dfrac{a}{x}+b+c\dfrac{\ln x}{x}=0$. En déduire que $b=0$.
4. Montrer finalement que $a=b=c=d=0$.
5. En déduire que (e_1,e_2,e_3,e_4) est une famille libre, puis que c'est une base de E.

Exercice 10 (***)

On considére les matrices suivantes de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$: $I = \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix}$; $J = \begin{pmatrix} 0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0 \end{pmatrix}$; $K = \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0 \end{pmatrix}$. On note E l'ensemble des matrices M s'écrivant sous la forme $M = aI+bJ+cK+dL$, avec a, b, c, $d \in \mathbb{R}^4$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel.

2. Montrer que la famille (I, J, K, L) est libre.
3. Donner la dimension de E.
4. Montrer, en les calculant explicitement, que J^2, K^2, L^2, J^3 et L^3 appartiennent à E.
5. En déduire, sans aucun calcul matriciel, que JK, KJ, KL, LK, JL et LJ appartiennent aussi à E.
6. Etablir enfin que le produit de deux matrices de E est encore une matrice de E.

Corrigé de la feuille d'exercices n°26

Exercice 1 (*)

- A n'est pas un sous-ev de $\mathbb{R}^2$: il est bien stable par somme et par produit par un réel positif, mais pas par produit par un réel négatif ; par exemple $(2, 6)\ inA$ mais $-3(2, 6) = (-6, -18) \notin A$.
- B n'est pas un sous-ev de $\mathbb{R}^2$, il est stable par produit par un réel mais pas par somme ; par exemple $(0; 2) \in B$, $(-4; 0) \in B$, mais $(0, 2) + (-4, 0) = (-4, 2) \notin B$.
- C est un sous-ev de $\mathbb{R}^2$: si $(x, y) \in C$ et $(x', y') \in C$, alors $x = y$ et $x' = y'$ donc $x+x' = y+y'$ et $(x, y) + (x', y') \in C$; de même, si $x = y$, alors $\lambda x = \lambda y$ donc C est stable par produit par un réel.
- D n'est pas un sous-ev de $\mathbb{R}^2$: il ne contient pas $(0; 0)$.
- E est un sous-ev de $\mathbb{R}^2$, c'est l'ensemble des solutions d'une équation linéaire homogène.

Exercice 2 (**)

Commençons par constater que la suite nulle appartient à chacun des six ensembles proposés, on se contentera de vérifier les deux autres conditions.

- L'ensemble des suites arithmétiques est bien un sous-ev : le produit d'une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r est une suite arithmétique de premier terme λu_0 et de raion λr. La somme de deux suites arithmétiques de premiers termes u_0 et v_0, et de raisons r et s, est une suite arithmétique de premier terme $u_0 + v_0$ et de raison $r + s$ (tout cela se prouve soit en utilisant la relation $u_{n+1} = u_n + r$, soit la forme générale $u_n = u_0 + nr$).
- Là, par contre, pas de sous-ev, la somme de deux suites géométriques de raisons différentes n'est pas géométrique. Par exemple, la suite $u_n = 2^n + 3^n$ n'est pas géométrique : $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{5}{2}$, mais $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{13}{5}$.
- Ce n'est pas non plus un sous-ev : si deux suites vérifient des récurrences linéaires différentes, leur somme n'est en général pas récurrente linéaire d'ordre 2. Ainsi, $u_n = 2^n+3^n$ et $v_n = 4^n+5^n$ sont des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (de relations respectives $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$ et $v_{n+2} = 9v_{n+1} - 20v_n$), mais leur somme n'en est pas une.
- Ici, on a bien un sous-ev, si (u_n) et (v_n) vérifient la relation, leur somme également (il suffit d'additionner les deux équations) et de même pour le produit par un réel λ.
- Oui, c'est un sous-ev. Si (u_n) s'annule à partir d'un certain rang, (λu_n) s'annule à partir du même rang. Et si (u_n) s'annule à partir du rang n_0 et (v_n) à partir du rang n_1, alors $(u_n + v_n)$ s'annule à partir du rang $\max(n_0, n_1)$.
- Il faut être, comme vous le savez, très méfiant avec les sommes d'équivalents. De fait, cet ensemble n'est pas stable par somme (donc pas un sous-ev) : si on pose $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{n}$, alors $u_n \sim \dfrac{1}{n}$ et $v_n \sim \dfrac{-1}{n}$, mais $u_n + v_n = \dfrac{1}{n^2}$, ne peut pas être équivalent à $\dfrac{\lambda}{n}$ (sinon, λn devrait tendre vers 1, ce qui n'est pas très possible).

Exercice 3 (*)

On peut écrire F sous la forme $F = \{(x, y, x+y) \mid z \in \mathbb{R}\}$. Autrement dit, $F = Vect((1, 0, 1); (0, 1, 1))$ (F est bien constitué de l'ensemble des combinaisons linéaires de ces deux vecteurs). C'est donc bien un sous-ev de $\mathbb{R}^3$. De même, $G = Vect((1, 1, 1); (-1, 1, -3))$ est un ev. L'intersection des deux ensembles est constitué des éléments de G vérifiant l'équation définissant F, donc $F \cap G = \{(a - b, a + b, a - 3b) \mid a - b + a + b - a + 3b = 0\} = \{(a - b, a + b, a - 3b) \mid a = -3b\} = \{(-4b, -2b, -6b) \mid b \in \mathbb{R}\} = Vect((-4, -2, -6))$.

Exercice 4 (*)

Il suffit de « retourner » le système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} y_1 & = & x_1 & + & x_2 & + & x_3 \\ y_2 & = & x_1 & + & x_2 & & \\ y_3 & = & 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} y_1 & - & y_2 & = & x_3 & & \\ & & y_2 & = & x_1 & + & x_2 \\ y_1 & + & y_3 & = & 3x_1 & + & 2x_2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} & & y_1 & - & y_2 & = & x_3 \\ 3y_2 & - & y_1 & - & y_3 & = & x_2 \\ y_1 & + & y_3 & - & 2y_2 & = & x_1 \end{array}\right.$$

On a exprimé les vecteurs x_1, x_2 et x_3 comme combinaisons linéaires de y_1, y_2 et y_3, donc ils appartiennent à $Vect(y_1, y_2, y_3)$. Comme l'espace vectoriel engendré par une famille est le plus petit qui la contient, on a alors $Vect(y_1, y_2, y_3) \subset Vect(x_1, x_2, x_3)$. Mais de la même façon, les y_i étant définis comme combinsais linéaires des x_i, l'inclusion en sens inverse est vraie. Les deux espaces sont donc les mêmes.

Remarquons que d'un point de vue matriciel, on a $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, les deux matrices étant inverses l'une de l'autre (si la matrice n'était pas inversible, les deux espaces vectoriels engendrés ne seraient pas les mêmes).

Exercice 5 (**)

Pour F, il faut commencer par résoudre le système (on peut déjà remarquer que t n'apparait pas dans le système donc peut prendre n'importe quelle valeur) : la dernière équation donne $z = 4x$, qu'on peut remplacer dans les deux premières équations pour obtenir $y - 7x = 6x - 3y = 0$. On obtient facilement $x = y = 0$, donc $z = 0$ et $F = \{(0, 0, 0, t) \mid t \in \mathbb{R}\} = Vect((0, 0, 0, 1))$. Une base de F est donc constituée du seul vecteur $((0, 0, 0, 1))$.

C'est beaucoup plus simple pour G : $G = Vect((1, 2, 4, 2); (-2, -3, 0, 1); (1, 0, 2, -1)$. Encore faut-il vérifier que cette famille est libre pour que ce soit une base de G. Supposons donc qu'une combinaison linéaire de ces vecteurs soit nulle : $\lambda(1, 2, 4, 2) + \mu(-2, -3, 0, 1) + \nu(1, 0, 2, -1) = 0$. En regardant la deuxième coordonnée, on obtient $2\lambda - 3\mu = 0$, donc $\mu = \frac{3}{2}\lambda$. De même, avec la troisième coordonnée, on obtient $4\lambda + 2\nu = 0$, donc $\nu = -2\lambda$. On peut désormais remplacer tout cela dans la première coordonnée : $\lambda - 2\mu + \nu = 0$, donc $-4\lambda = 0$. On en déduit que $\lambda = 0$, puis $\mu = \nu = 0$, donc la famille est libre. Elle forme donc bien une base de G (qui est donc de dimension 3).

Pour H, il faut aussi commencer par résoudre le système. On a $z = x + y$ (première équation) et $t = y - 2x$ (deuxième équation), ce qui donne en remplaçant dans la dernière équation $-2y - 2x = 0$, soit $y = -x$. On en déduit que $z = 0$ et $t = -3x$. Finalement, $H = \{(x, -x, 0, -3x) \mid x \in \mathbb{R}\} = Vect((1, -1, 0, -3))$. Ce vecteur forme bien entendu une base de H.

Exercice 6 (**)

Dans $\mathbb{R}^3$, tout famille génératrice de trois vecteurs est une base. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, cherchons λ, μ, ν tels que $(x, y, z) = \lambda(0, 1, 1) + \mu(2, 0, -1) + \nu(2, 1, 1)$. La première coordonnée donne $2\mu + 2\nu =$

x, soit $\mu = \dfrac{x}{2} - \nu$. La deuxième coordonnée donne $\lambda + \nu = y$, donc $\lambda = y - \nu$. Enfin, on a pour la troisième coordonnée $\lambda - \mu + \nu = z$, donc en remplaçant $\nu = -z + y + \dfrac{x}{2}$. On en déduit $\lambda = z - \dfrac{x}{2}$ et $\mu = z - y$. On peut donc exprimer tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ comme combinaison linéaire des trois vecteurs de la famille, elle est génératrice et comporte trois éléments, c'est une base. Pour obtenir les coordonnées de $(4, -1, 1)$ dans cette nouvelle base, il suffit de calculer les valeurs de λ, μ et ν correspondant à $x = 4$, $y = -1$ et $z = 1$. On obtient $\lambda = -3$; $\mu = 2$ et $\nu = 0$. Les coordonnées de $(4, -1, 1)$ dans la base $((0, 1, 1); (2, 0, -1); (2, 1, 1))$ sont donc $(-3, 2, 0)$. De même, les coordonnées de $(1, 0, 0)$ deviennent $\left(-\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{2}\right)$.

Pour l'autre base, la méthode est la même. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Si $(x, y, z) = \lambda(3, -1, 1) + \mu(2, 0, 0) + \nu(1, -2, 4)$, les deux dernières coordonnées donnent $-\lambda - 2\nu = y$ et $\lambda + 4\nu = z$. En faisant la somme des deux, on obtient $\nu = \dfrac{y + z}{2}$, puis $\lambda = -2y - z$. Enfin, la première coordonnée donne $3\lambda + 2\mu + \nu = x$, donc $2\mu = x - 3\lambda - \nu = x + \dfrac{11}{2}y + \dfrac{5}{2}z$. Les nouvelles coordonnées de $(4, -1, 1)$ sont donc $\left(1, \dfrac{1}{2}, 0\right)$ et celles de $(1, 0, 0)$ sont $\left(0, \dfrac{1}{2}, 0\right)$.

Exercice 7 (*)

Comme l'espace vectoriel possède une base formée de trois vecteurs, il est de dimension 3. Il suffit donc de montrer que les familles sont libres pour qu'elles forment des bases. Supposons qu'une combinaison libéaire de la famille $(e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_3 + e_1)$ s'annule : $a(e_1 + e_2) + b(e_2 + e_3) + c(e_3 + e_1) = 0 \Leftrightarrow (a + c)e_1 + (a + b)e_2 + (b + c)e_3 = 0$. La famille (e_1, e_2, e_3) étant une base, on a nécessairement $a + c = a + b = b + c = 0$, ce dont on déduit rapidement que $a = b = c = 0$. La famille $(e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_3 + e_1)$ est donc libre, et c'est une base de E.

C'est encore plus rapide pour $(e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3)$: $ae_1 + b(e_1 + e_2) + c(e_1 + e_2 + e_3) = 0 \Leftrightarrow (a + b + c)e_1 + (b + c)e_2 + ce_3 = 0 \Leftrightarrow a + b + c = b + c = c = 0$, donc la famille est libre et est également une base de E.

Exercice 8 (***)

1. Soient X_1, $X_2 \in F$, alors $AX_1 = AX_2 = 0$, donc $A(X_1 + X_2) = 0$ et $X_1 + X_2 \in F$. De même, si $AX = 0$, on a $A(\lambda X) = 0$, donc F est stable par somme et produit par un réel, il contient manifestement 0, c'est un sous-ev de $\mathbb{R}^3$.
2. Il faut pour cela résoudre le système homogène dont la matrice est A :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ -2x & + & y & + & 3z & = & 0 \\ -x & & & + & 5z & = & 0 \end{array}\right.$$

   La dernière équation donne $x = 5z$, ce qui en remplaçant dans les premières nous donne $-y + 7z = 0$ et $y - 7z = 0$. Ces deux équations étant équivalentes, on en déduit simplement que $y = 7z$, donc $F = \{(5z, 7z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = Vect((5, 7, 1))$. Ce vecteur est une base de F.
3. Supposons $Y_1, Y_2 \in G^2$, on a donc $Y_1 = AX_1$ et $Y_2 = AX_2$. Mais alors, $Y_1 + Y_2 = A(X_1 + X_2) \in G$. De même, $\lambda Y_1 = \lambda AX_1 = A(\lambda X_1)$, donc $\lambda Y_1 \in G$. Enfin, $0 = A \times 0 \in G$, l'ensemble G est donc un sous-ev de $\mathbb{R}^3$.
4. $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in F \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 2z & = & a \\ -2x & + & y & + & 3z & = & b \\ -x & & & + & 5z & = & c \end{array}\right.$ a une solution. Si l'on effectue la même manipulation sur les lignes qu'à la question 2, on obtient de même y et x en fonction de z (et

de a, b et c, naturellement), mais en plus on a la condition $a-b+c=0$. On en déduit que $G = \{(a,b,b-a) \mid a,b \in \mathbb{R}^2\} = Vect((1,0,-1);(0,1,1))$.

5. Les deux vecteurs de la famille précédentent ne sont pas proportionnels, ils forment donc une famille libre, donc une base de G.

Exercice 9 (***)

1. Il suffit de constater qu'on peut remplacer x par n'importe quelle valeur positive, en particulier 1 : on a alors $a+b=0$.
2. En effet, si $x>1$, on peut diviser l'égalité de départ par $x^2 \ln x$, qui ne s'annule pas, et on obtient $\dfrac{a}{x\ln x} + \dfrac{b}{\ln x} + \dfrac{c}{x} + d = 0$. Regardons maintenant la limite du membre de gauche quand x tend vers $+\infty$, elle vaut d. Mais comme ce membre de gauche est constant égal à 0 par hypothèse, on doit avoir $d=0$.
3. C'est exactement la même chose en divisant cette fois par x^2 (et en utilisant que $d=0$). La limite vaut cette fois-ci b (on a une croissance comparée pour le dernier terme), donc $b=0$.
4. Comme $a+b=0$ et $b=0$, on a donc $a=0$. Seul c peut encore être non nul, c'est-à-dire qu'on a $cx\ln x = 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, ce qui ne se produit que si $c=0$ (sinon, la fonction ne s'annule que pour $x=1$).
5. On vient de montrer que toute combinaison linéaire nulle de la famille avait des coefficients nuls, ce qui prouve que la famille est libre. Comme elle est de plus génératrice (par hypothèse !), c'est une base de E, sui est donc de dimension 4.

Exercice 10 (***)

1. C'est l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille (I,J,K,L), qui est un espace vectoriel, et même précisément l'espace vectoriel engendré par cette famille.
2. Supposons $aI+bJ+cK+dL=0$, on a donc $\begin{pmatrix} a & c & b & d \\ d & a & c & b \\ b & d & a & c \\ c & b & d & a \end{pmatrix} = 0$, ce qui implique manifestement $a=b=c=d=0$. La famille est donc libre.
3. La famille (I,J,K,L) est libre et génératrice, elle engendre donc un espace vectoriel de dimension 4.
4. On calcule sans difficulté $J^2=L$, $K^2=L$, $L^2=L$, $J^3=K$, $K^3=J$ et $L^3=L$.
5. On a $JK = JJ^3 = J^4 = (J^2)^2 = L^2 = I$. De même, $KJ=I$, puis $KL=LK=K^3=J$ et $JL=LJ=J^3=K$
6. Soient deux matrices de E, qui s'écrivent donc $aI+bJ+cK+dL$ et $eI+fJ+hK+iL$. Leur produit, via un calcul passionnant et en utilisant les résultats des deux questions précédentes, vaut $(ae+bh+cf+di)I+(af+be+ci+dh)J+(ag+bi+ce+df)K+(ai+bf+cg+de)L$, qui appartient bien à E. L'ensemble E est ce qu'on appelle une algèbre (espace vectoriel et stabilité par produit interne).

Feuilles d'exercices n°27 : Applications linéaires

ECE3 Lycée Carnot

14 juin 2010

Exercice 1 (*)

On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par $u(P) = XP' - P$. Déterminer le noyau et l'image de u.

Exercice 2 (**)

Donner la matrice (dans les bases canoniques à chaque fois) des applications linéaires suivantes, ainsi que leur noyau et leur image :

$$u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad (x, y) \mapsto (x + y, y - 2x + z)$$

$$u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad (x, y, z) \mapsto (x + y, x + z, y + z)$$

$$u : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^4 \quad P \mapsto (P(1), P(2), P(3), P(4))$$

Exercice 3 (*)

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ définie par $f(x, y) = (x + y, x - y)$. Montrer que f est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 4 (**)

Soient A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'application linéaire $u : M \mapsto AM - MB$ ($u \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$. Calculer le noyau de u dans les cas suivants :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 (*)

Soit p l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $p(x,y) = \dfrac{1}{5}(x+2y, 2x+4y)$. Déterminer le noyau et l'image de p et montrer que $p^2 = p$.

Exercice 6 (**)

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que les images des vecteurs de la base canonique soient $(1,-1,2)$, $(-3,2,-1)$ et $(-7,4,1)$.

1. Déterminer la matrice de u dans la base canonique, ainsi que l'expression de u.
2. Déterminer les antécédents par u de $(-1,1,8)$ et de $(-2,1,3)$.
3. u est-elle injective ? Surjective ?

Exercice 7 (*)

On considère l'endomorphisme u de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $u\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & a-b \\ d & d \end{pmatrix}$. Déterminer le noyau et l'image de u.

Exercice 8 (***)

Soit $A = \begin{pmatrix} 16 & 4 & -4 \\ -18 & -4 & 5 \\ 30 & 8 & -7 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme représenté par A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer une base de $Ker(u)$.
2. Montrer que 1 et 4 sont des valeurs propres de u, et déterminer les vecteurs propres correspondants.
3. En déduire que u est diagonalisable, et préciser une base dans laquelle la matrice de u est diagonale.
4. Déterminer la matrice de passage P de la base canonique à la base définie à la question précédente. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

Exercice 9 (***)

Soit E l'espace vectoriel des suites bornées et f l'endomorphisme de E qui, à une suite (u_n) associe la suite (v_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - u_n$. Déterminer les valeurs propres de f (et les vecteurs propres correspondants).

Exercice 10 (EDHEC 2001) (***)

Soit E un espace vectoriel réel, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Soit a un réel non nul et f_a l'endomorphisme de E, défini par $f_a(e_2) = 0$, $f_a(e_1) = f_a(e_3) = ae_1 + e_2 - ae_3$.

1. (a) Ecrire la matrice A_a de f_a dans la base $\mathcal{B}$ et calculer A_a^2.
   (b) Montrer que si $A_aX = \lambda X$, avec $X \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda = 0$.
   (c) A_a est-elle inversible ?
2. On pose $u_1 = ae_1 + e_2 - ae_3$.

(a) Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, e_2, e_3)$ est une base de E.

(b) Vérifier que la matrice de f_a dans la base $\mathcal{B}'$ est $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Dans la suite, on cherche à caractériser les endomorphismes g de E tels que $g \circ g = f_a$.

3. On suppose qu'un tel endomorphisme g existe et on note M sa matrice dans $\mathcal{B}'$.

   (a) Expliquer pourquoi $M^2 = K$ puis montrer que $MK = KM$.

   (b) Déduire de ces deux relations que $M = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, x, y et z étant 3 réels tels que $xz = 1$.

4. Réciproquement, vérifier que tout endomorphisme g dont la matrice dans $\mathcal{B}'$ est du type ci-dessus est solution de $g \circ g = f_a$.

Exercice 11 (ESC 2001) (***)

On donne les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -14 \\ 6 & 6 & -16 \\ 5 & 5 & -14 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -16 \\ 0 & 4 & -8 \\ 4 & 4 & -12 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice est A dans la base canonique.
Soient $v_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (1, -1, 0)$ et $v_3 = (1, 1, 1)$.

1. (a) Vérifier que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Calculer $f(v_1)$, $f(v_2)$ et $f(v_3)$. En déduire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

   (c) Vérifier la relation $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

   On note D la matrice diagonale précédente.

   (d) Calculer la matrice $\Delta = P^{-1}BP$ et vérifier qu'elle est diagonale.

2. On se propose de calculer les matrices colonne X_n définies par les relations $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+2} = AX_{n+1} + BX_n$. A cet effet, on définit pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $Y_n = P^{-1}X_n$ et on pose également $Y_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que $Y_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $Y_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

   (b) Montrer que pour tout entier naturel n, $Y_{n+2} = DY_{n+1} + \Delta Y_n$.

   (c) Montrer alors que pour tout entier naturel n, $\begin{cases} u_{n+2} = u_{n+1} \\ v_{n+2} = 4v_n \\ w_{n+2} = -4w_{n+1} - 4w_n \end{cases}$ En déduire les expressions explicites de u_n, v_n et w_n en fonction de n.

   (d) Donner finalement la matrice X_n , en fonction de n .

Exercice 12 (EM Lyon 2010) (***)

Partie I : Un endomorphisme de l'espace vectoriel des matrices symétriques d'ordre 2.

- Dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on note $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- On note $\mathcal{S}_2$ l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre 2.

1. Calculer les produits AFA, AGA, AHA.
2. Montrer que $\mathcal{S}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et que (F, G, H) est une base de $\mathcal{S}_2$. En déduire la dimension de $\mathcal{S}_2$.
3. On note u l'application qui à chaque matrice S de $\mathcal{S}_2$, associe la matrice $u(S) = ASA$.
   (a) Montrer que $\forall S \in \mathcal{S}_2,\ u(S) \in \mathcal{S}_2$.
   (b) Montrer que u est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{S}_2$.
   (c) Donner la matrice de u dans la base (F, G, H) de $\mathcal{S}_2$.

Partie II : Diagonalisation d'une matrice carrée d'ordre 3.

On note désormais : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \\ 4 & 12 & 9 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$.

1. On note v l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est M. Vérifier que -4, 1, 16 sont valeurs propres de v et déterminer, pour chacune de celles-ci, les vecteurs propres associés. En déduire une base dans laquelle la matrice de v est diagonale.
2. Déterminer la matrice de passage P entre la base cacnonique et la base construite à la question précédente. Calculer la matrice $D = P^{-1}MP$.
3. Vérifier que $(D + 4I)(D - I)(D - 16I)$ est la matrice nulle.
4. En déduire que $M^3 = 13M^2 + 52M - 64I$.
5. Établir que $u^3 = 13u^2 + 52u - 64e$, où e désigne l'application identité de $\mathcal{S}_2$ et où u est l'application définie dans la première partie.

Corrigé de la feuille d'exercices n°27

Exercice 1 (*)

L'application u est bien linéaire : si P et Q sont deux polynômes, et (λ, μ) un couple de réels, $u(\lambda P + \mu Q) = X(\lambda P + \mu Q)' - (\lambda P + \mu Q) = \lambda XP' + \mu XQ' - \lambda P - \mu Q = \lambda u(P) + \mu u(Q)$. Son noyau est constitué des polynômes vérifiant $XP' - P$. Comme on est dans $\mathbb{R}_2[X]$, on peut écrire $P(X) = aX^2 + bX + c$, donc la condition devient $X(2aX + b) - (aX^2 + bX + c) = 0$, soit $aX^2 + c = 0$. Cela n'est possible que si $a = c = 0$, donc $Ker(u) = \{aX \mid a \in \mathbb{R}\} = Vect(X)$.

Quant à l'image de u, calculons les images par u des éléments de la base canonique : $u(1) = -1$; $u(X) = 0$ et $u(X^2) = 2X^2 - X^2 = X^2$. On en déduit que $Im(u) = Vect(1, X^2)$.

Exercice 2 (**)

Pour la première application, on a comme matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Le noyau est l'ensemble des solutions du système homogène correspondant $\begin{cases} x + y = 0 \\ -2x + y + z = 0 \end{cases}$. La première équation donne $y = -x$, puis en remplaçant dans la deuxième $-3x + z = 0$, donc $z = 3x$. On a donc $Ker(u) = \{(x, -x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\} = Vect((1, -1, 3))$. Pour obtenir l'image, calculons les images par u des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$: $u(1, 0, 0) = (1, -2)$; $u(0, 1, 0) = (1, 1)$ et $u(0, 0, 1) = (0, 1)$. On a donc $Im(u) = Vect((1, -2); (1, 1); (0, 1))$. Mais cette famille n'est pas libre et par ailleurs engendre $\mathbb{R}^2$ tout entier (en effet, on a par exemple $(x, y) = x(1, 1) + (y - x)(0, 1)$). On a donc en fait $Im(u) = \mathbb{R}^2$.

La matrice de la deuxième application est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Le noyau est l'ensemble des solutions d'un système qui peut s'écrire sous la forme $y = -x$; $z = -x$ et $z = -y$, donc $x = -x = 0$, puis $y = z = 0$. Le noyau de u est donc réduit au vecteur nul (autrement dit, u est injective). L'image est engendrée par les trois vecteurs $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ et $(0, 1, 1)$ et on vérifie facilement que cette famille est libre (le système à résoudre est le même que pour le calcul du noyau). Il s'agit donc d'une base de $\mathbb{R}^3$ (puisqu'elle comporte trois élémants), donc $Im(u) = \mathbb{R}^3$ (en fait, u est une application bijective, ce qu'on peut également prouver en constatant que sa matrice est inversible).

Rappelons que la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ est constituée des polynomes 1, X, X^2 et X^3. On a $u(1) = (1, 1, 1, 1)$; $u(X) = (1, 2, 3, 4)$; $u(X^2) = (1, 4, 9, 16)$ et enfin $u(X^3) = (1, 8, 27, 64)$, donc la matrice de u dans les bases canoniques est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix}$. Le noyau de u est constitué des polynomes de degré 3 qui s'annulent pour $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ et $x = 4$. Mais un tel polynome, s'il n'est pas nul, se factorise par $(X - 1)(X - 2)(X - 3)(X - 4)$, et doit donc être de degré au moins 4. On a donc $Ker(u) = \{0\}$. Quand à l'image, elle est engendrée par les quatre vecteurs calculés plus haut. Montrons que la famille est libre : si une combinaison linéaire de ces quatre vecteurs s'annule, cela signifie que le polynome correspondant s'annule en 1, 2, 3 et 4, ce dont on a déjà dit que c'était impossible sauf pour le polynome nul. L'image est donc de dimension 4, donc $Im(u) = \mathbb{R}^4$.

Exercice 3 (*)

La matrice de f dans les bases canoniques est $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Vérifions qu'elle est inversible. Pour cela, on va plutôt résoudre le système formé des deux équations $x + y = a$ et $x - y = b$. En faisant la somme des deux, on obtient $x = \dfrac{a+b}{2}$, et en faisant la différence $y = \dfrac{a-b}{2}$. Le système est donc bien de Cramer, et la matrice inverse est $M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $f^{-1}(a,b) = \left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x-y}{2}\right)$.

Exercice 4 (**)

- Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a alors $AM = \begin{pmatrix} -a & -b \\ a-c & b-d \end{pmatrix}$ et $MB = \begin{pmatrix} -a & a-b \\ -c & c-d \end{pmatrix}$. On a donc $AM - MB = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & b-c \end{pmatrix}$. Cette matrice est nulle seulement si $a = 0$ et $b = c$, donc $Ker(u) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & d \end{pmatrix} \mid b, d \in \mathbb{R}^2 \right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$.

- Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a alors $AM = \begin{pmatrix} -a & -b \\ a-c & b-d \end{pmatrix}$ et $MA = \begin{pmatrix} -a+b & -b \\ -c+d & -d \end{pmatrix}$. On a donc $AM - MA = \begin{pmatrix} -b & 0 \\ a-d & b \end{pmatrix}$. Cette matrice est nulle seulement si $b = 0$ et $a = d$, donc $Ker(u) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix} \mid a, c \in \mathbb{R}^2 \right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$.

- Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. On a alors $AM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix}$ et $MA = \begin{pmatrix} 0 & b & 2c \\ 0 & e & 2f \\ 0 & h & 2i \end{pmatrix}$. On a donc $AM - MA = \begin{pmatrix} 0 & -b & -2c \\ d & 0 & -f \\ 2g & h & 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice est nulle seulement si $b = c = d = f = g = h = 0$, donc $Ker(u) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \mid a, e, i \in \mathbb{R}^3 \right\}$ $= Vect\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$. Autrement dit, $Ker(u)$ est l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. On a alors $AM = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix}$ et $MA = \begin{pmatrix} a & b & 2c \\ d & e & 2f \\ g & h & 2i \end{pmatrix}$. On a donc $AM - MA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & -f \\ g & h & 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice est nulle seulement si $c = f = g = h = 0$, donc $Ker(u) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \mid a, b, d, e, i \in \mathbb{R}^5 \right\}$, qu'on peut bien sûr écrire comme d'habitude comme espace vectoriel engendré ici par 5 matrices.

Exercice 5 (*)

Le noyau de p est constitué des solutions du système homogène $\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & 2y & = & 0 \\ 2x & + & 4y & = & 0 \end{array}\right.$. Les deux équations sont proportionnelles et équivalentes à $x = -2y$, donc $Ker(p) = \{(-2y, y) \mid y \in \mathbb{R}\} = Vect((-2,1))$. L'image de p est engendrée par les images de $(1,0)$ et de $(0,1)$, qui valent $\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$ et $\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$. Ces deux vecteurs étant proportionnels, on a simplement $Im(p) = Vect\left(\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)\right)$ (ou même $Im(p) = Vect((1,2))$ si on veut faire plus simple). Pour calculer p^2, rien de plus simple : $p(p(x,y)) = \frac{1}{25}(x + 2y + 2(2x + 4y), 2(x + 2y) + 4(2x + 4y)) = \frac{1}{25}(5x + 10y, 10x + 20y) = \frac{1}{5}(x + 2y, 2x + 4y)$, on a bien $p^2 = p$ (ce qui fait de p ce qu'on appelle en termes techniques un projecteur).

Exercice 6 (**)

1. Par définition, la matrice est constituée des coordonnées données dans l'énoncé disposées en colonnes, elle vaut donc $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Il faut résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & - & 7z & = & -1 \\ -x & + & 2y & + & 4z & = & 1 \\ 2x & - & y & + & z & = & 8 \end{array}\right.$

   $$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & - & 7z & = & -1 \\ & & -y & - & 3z & = & 0 \\ & & -5y & - & 15z & = & -10 \end{array}\right.$$

   Les deux dernières équations étant incompatibles, $(-1,1,8)$ nn'a pas d'antécédent par u.

   De même, pour le deuxième vecteur, il faut résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & - & 7z & = & -2 \\ -x & + & 2y & + & 4z & = & 1 \\ 2x & - & y & + & z & = & 3 \end{array}\right.$

   $$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & - & 7z & = & -2 \\ & & -y & - & 3z & = & -1 \\ & & -5y & - & 15z & = & -5 \end{array}\right.$$

   Cette fois-ci, les deux dernières équations sont équivalentes et donnent $y = 1 - 3z$. En remplaçant dans la première équation, on obtient $x - 3 + 9z - 7z = -2$, soit $x = 1 - 2z$. Finalement, les antécédents de $(-2,1,3)$ sont les vecteurs de la forme $(1 - 2z, 1 - 3z, z)$, pour une certaine valeur réelle de z.

3. u n'est pas injective ni surjective puisque certains éléments ont une infinité d'antécédents, et d'autres n'en ont pas.

Exercice 7 (*)

Les matrices appartenant au noyau de u sont celles vérifiant $a = c$, $a = b$ et $d = 0$, donc $Ker(u) = \left\{\begin{pmatrix} a & a \\ a & 0 \end{pmatrix}\right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$. Quant à l'image on l'obtient comme d'habitude en regardant les images des vecteurs de la base canonique : $Im(u) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$. On peut constater que les trois premières images ne forment pas une famille libre (leur somme est nul) et pousser un peu les calculs pour obtenir que les matrices appartenant à l'image sont exactement celles vérifiant $c = d$.

Exercice 8 (***)

1. Il s'agit de résoudre le système $AX = 0$, c'est-à-dire $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 16x & + & 4y & - & 4z & = & 0 \\ -18x & - & 4y & + & 5z & = & 0 \\ 30x & + & 8y & - & 7z & = & 0 \end{array}\right.$. La somme $L_1 - L_2$ donne $z - 2x = 0$, la combinaison $2L_1 - L_3$ donne $2x - z = 0$. Ces deux équations étant équivalentes, le système n'est pas de Cramer, ses solutions doivent vérifier $z = 2x$ puis, en divisant la première ligne par 4, $4x + y - z = 0$, donc $y = z - 4x = -2x$. Finalement $Ker(u) = \{(x, -2x, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\} = Vect((1, -2, 2))$.
2. Encore des systèmes à résoudre :
$$u(x,y,z) = (x,y,z) \Leftrightarrow MX = X \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 16x & + & 4y & - & 4z & = & x \\ -18x & - & 4y & + & 5z & = & y \\ 30x & + & 8y & - & 7z & = & z \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 15x & + & 4y & - & 4z & = & 0 \\ -18x & - & 5y & + & 5z & = & 0 \\ 30x & + & 8y & - & 8z & = & 0 \end{array}\right.$$
Cette fois-ci, les lignes L_1 et L_3 sont manifestement proportionnelles. De plus, $5L_1 + 4L_2$ donne $x = 0$. Les deux premières équations se réduisent alors à $y = z$, ce qui signifie que tous les vecteur de la forme $(0, y, y)$, avec $y \neq 0$, sont vecteurs propres de u associés à la valeur propre 1.
Même technique pour $u(x,y,z) = 4(x,y,z)$, on se ramène au système homogène suivant :
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 12x & + & 4y & - & 4z & = & 0 \\ -18x & - & 8y & + & 5z & = & 0 \\ 30x & + & 8y & - & 11z & = & 0 \end{array}\right.$$
La somme $L_2 + L_3$ donne $12x - 6z = 0$, soit $z = 2x$, et la combinaison $L_3 - 2L_1$ donne $6x - 3z = 0$, ce qui est une équation équivalente. Encore une fois, le système n'est pas de Cramer, et en remplaçant dans la première équation on obtient $12x + 4y - 8x = 0$, soit $y = -x$. Finalement, les vecteurs propres sont de la forme $(x, -x, 2x)$, avec $x \neq 0$.
3. On a trouvé trois vecteurs propres associés à trois valeurs propres distinctes (en comptant le noyau calculé à la question précédente, qui correspond à la valeur propre 0). La famille formée de ces trois vecteurs sera une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u sera diagonale. Plus précisément, en posant par exemple $\mathcal{B} = ((1,-2,2); (0,1,1); (1,-1,2))$, la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ sera $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
4. La matrice de passage est $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Il ne reste plus qu'à l'inverser. Pour changer du pivot de Gauss, résolvons le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & & & z & = & a \\ -2x & + & y & - & z & = & b \\ 2x & + & y & + & 2z & = & c \end{array}\right.$. On a donc $x = a - z$, et en faisant la somme des deux dernières équations $2y + z = b + c$, soit $2y = b + c - z$. En remplaçant dans la dernière équation, $2a - 2z + \frac{b}{2} + \frac{c}{2} - \frac{z}{2} + 2z = c$, soit $z = 4a + b - c$; puis $x = -3a - b + c$ et $y = b + z - 2x = -2a + c$. C'est-à-dire que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 9 (***)

Ce n'est pas si difficile si on comprend bien ce qu'il faut faire. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, λ sera valeur propre pour l'application f si on peut trouver une suite bornée (u_n) non nulle telle que $f(u_n) = \lambda u_n$, c'est-à-dire si, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \lambda u_n$, ou encore $u_{n+1} = (1+\lambda)u_n$. De telles suites existent bien évidemment, ce sont toutes les suites géométriques de raison $1+\lambda$. Mais pour que celles-ci (à l'exception de la suite nulle) soient bornées, il faut absolument avoir $|1+\lambda| \leqslant 1$, c'est-à-dire $-1 \leqslant 1+\lambda \leqslant 1$, ou encore $-2 \leqslant \lambda \leqslant 0$. Les valeurs propres de f sont donc tous les nombres réels compris dans l'intervalle $[0;2]$ (une situation très différente de ce que vous étudierez l'an prochain, où les valeurs propres seront systématiquement en nombre fini.

Exercice 10 (EDHEC 2001) (***)

1. (a) Au vu de la définition de f_a, on a $A_a = \begin{pmatrix} a & 0 & -a \\ 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & -a \end{pmatrix}$. On calcule sans problème $A_a^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   (b) Si $A_aX = \lambda X$, on aura $A_a^2X = \lambda A_aX = \lambda^2 X$. Or $A_a^2X = 0$ d'après le calcul précédent, donc $\lambda^2 = 0$ et $\lambda = 0$.

   (c) Non, avec une colonne composée de 0, elle ne peut pas être inversible.

2. (a) La famille étant constitué de 3 vecteurs, il suffit de prouver qu'elle est libre. Supposons que $\lambda u_1 + \mu e_2 + \nu e_3 = 0$, alors $\lambda a e_1 + (\lambda+\mu)e_2 + (\nu - \lambda a)e_3 = 0$. La famille (e_1, e_2, e_3) étant supposée être une base, on a alors $\lambda a = \lambda + \mu = \nu - \lambda a = 0$, dont découle facilement $\lambda = \mu = \nu = 0$ (a étant supposé non nul). La famille est donc libre, et constitue une base de E.

   (b) En effet, par linéarité, $f(u_1) = af(e_1) + f(e_2) - af(e_3) = 0$, $f(e_2) = 0$ et $f(e_3) = u_1$, ce qui correspond bien à la matrice donnée.

3. (a) La matrice de $g \circ g$ dans la base $\mathcal{B}'$ est $M \times M = M^2$, celle de f est K, si les deux applications sont égales, on doit donc avoir $M^2 = K$. On en déduit que $MK = MM^2 = M^3 = M^2M = KM$.

   (b) Commençons par chercher les matrices commutant avec K : si $M = \begin{pmatrix} b & c & d \\ e & f & g \\ h & i & j \end{pmatrix}$, alors $KM = \begin{pmatrix} h & i & j \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $MK = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}$, l'égalité des deux matrices impose donc $e = h = i = 0$ et $b = j$, soit $M = \begin{pmatrix} b & c & d \\ 0 & f & g \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$. On peut alors calculer $M^2 = \begin{pmatrix} b^2 & bc+cf & 2bd+cg \\ 0 & f^2 & fg+gb \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix}$. Cette matrice doit être égale à K, ce qui impose $b^2 = f^2 = 0$, donc $b = f = 0$ (ce qui annule deux autres coefficients de la matrice). Il ne reste plus que la condition $cg = 1$, donc $M = \begin{pmatrix} 0 & c & d \\ 0 & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $cg = 1$, ce qui correspond à la forme de l'énoncé.

4. C'est évident, si la matrice de g ressemble à ceci, son carré est égal à K, donc $g \circ g = f_a$.

Exercice 11 (ESC 2001) (***)

1. (a) La famille étant constituée de trois vecteurs dans un espace de dimension 3, il suffit de vérifier qu'elle est libre. Supposons donc que $a(1,2,1)+b(1,-1,0)+c(1,1,1)=(0,0,0)$. Cela revient à chercher les solutions du système $\left\{\begin{array}{ccccccc} a & + & b & + & c & = & 0 \\ 2a & - & b & + & c & = & 0 \\ a & + & & & c & = & 0 \end{array}\right.$. La différence des deux équations extrêmes donne immédiatement $b=0$, et on a ensuite $a+c=2a+c=0$, dont on déduit que $a=c=0$, donc la famille est libre, et constitue une base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Calculons donc : $f(v_1)=A\times\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, donc $f(v_1)=v_1$. De même, on obtient $f(v_2)=(0,0,0)$ et $f(v_3)=(-4,-4,-4)=-4v_3$. La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ (qui est constituée de vecteurs propres pour f est donc $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-4\end{pmatrix}$.

   (c) La matrice P étant la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$, $P^{-1}AP$ représente la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, c'est-à-dire la matrice calculée à la question précédente, qui coïncide bien avec D.

   (d) Plutôt que de calculer P^{-1} et finir par un produit matriciel, considérons g l'endomrorphisme dont B est la matrice dans la base canonique. On a $g(1,2,1)=(0,0,0)$; $g(1,-1,0)=(4,-4,0)=4(1,-1,0)$ et $g(1,1,1)=(-4,-4,-4)=-4(1,1,1)$. Les vecteurs de la base $\mathcal{B}$ sont donc également vecteurs propres pour g, et la matrice de g dans cette base (qui est égale à $P^{-1}BP$, est donc diagonale (de coefficients diagonaux 0, 4 et -4).

2. (a) Constatons qu'en multipliant à gauche par P, $Y_n=P^{-1}X_n \Leftrightarrow PY_n=X_n$. Il suffit maintenant de vérifier que $P\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=X_0$, et de même que $P\begin{pmatrix}-3\\-1\\-4\end{pmatrix}=X_1$, ce qui est vrai.

   (b) En effet, $Y_{n+2}=P^{-1}X_{n+2}=P^{-1}AX_{n+1}+P^{-1}BX_n=DP^{-1}X_{n+1}+\Delta P^{-1}X_n=DY_{n+1}+\Delta Y_n$.

   (c) Le système s'obtient simplement en reprenant les expressions obtenues pour D et Δ. On déduit de la première relation que la suite (u_n) est constante à partir du rang 1, donc $\forall n\geqslant 1$, $u_n=-3$; la suite des termes pairs de (v_n), mais également celle des termes impairs, est géométrique de raison 4. Comme $v_0=0$, on aura toujours $v_{2n}=0$; par contre, $v_{2n+1}=4^n v_1=-4^n$. Enfin, la suite (w_n) est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2+4x+4=0$, soit $(x+2)^2=0$, donc $w_n=(\alpha+\beta n)\times(-2)^n$. La condition $w_0=1$ impose $\alpha=2$, et la condition $w_1=1$ donne $-2(\alpha+\beta)=4$, donc $\alpha+\beta=-2$, d'où $\beta=-4$, soit $w_n=(2-4n)(-2)^n$.

   (d) Il ne reste plus qu'à calculer $X_n=PY_n$. Si n est pair (non nul), on obtient $X_n=\begin{pmatrix}-4+(2-4n)(-2)^n\\-6+(2-4n)(-2)^n\\-3+(2-4n)(-2)^n\end{pmatrix}$, si n est impair, $X_n=\begin{pmatrix}-3-4^{\frac{n-1}{2}}+(2-4n)(-2)^n\\-6+4^{\frac{n-1}{2}}+(2-4n)(-2)^n\\3+(2-4n)(-2)^n\end{pmatrix}$.

Exercice 12 (EM Lyon 2010) (***)

Partie I

1. On calcule $AF = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ puis $AFA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$; $AG = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ puis $AGA = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$ et $AH = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ puis $AHA = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

2. Une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{S}_2$ si $b = c$, donc $S_2 = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = Vect(F, G, H)$. Les trois matrices formant manifestement une famille libre (une combinaison linéaire des trois aura du mal à s'annuler), c'est une base de S_2, qui est donc de dimension 3.

3. (a) La linéarité est facile à prouver : $A(\lambda S + \mu T)A = \lambda ASA + \mu ATA$. D'après la question précédente, si $S \in \mathcal{S}_2$, $S = \alpha F + \beta G + \gamma H$, donc par linéarité $u(S) = \alpha AFA + \beta AGA + \gamma AHA$. Chacune des trois matrices AFA, AGA et AHA étant symétrique (on les a calculées plus haut), $u(S)$ l'est aussi. L'application u est bien linéaire de $\mathcal{S}_2$ dans lui-même.

   (b) Ah ben, on a déjà tout fait !

   (c) Comme $u(F) = AFA = 4H$; $u(G) = AGA = 4G+12H$ et $u(H) = AHA = 4A+6G+9H$, la matrice recherchée est exactement la matrice M introduite un peu plus loin dans l'énoncé.

Partie II

1. Pour prouver que -4 est valeur propre, il s'agit de résoudre, pour un vecteur-colonne à trois lignes X, le système $MX = -4X$, c'est-à-dire $\begin{cases} & & 4z & = & -4x \\ & 4y & + & 6z & = & -4y \\ 4x & + & 12y & + & 9z & = & -4z \end{cases}$. Via les deux premières équations, $x = -z$ et $y = -\frac{3}{4}z$, et la dernière équation est alors automatiquement vérifiée. Le réel -4 est donc bien valeur propre de v, avec pour vecteurs propres les vecteurs de la forme $\left(-z, -\frac{3}{4}z, z\right)$, avec $z \neq 0$.

   De même, le système $\begin{cases} 4z = x \\ 4y + 6z = y \\ 4x + 12y + 9z = z \end{cases}$ donne $x = 4z$ et $y = -2z$, et la dernière équation est alors toujours vérifie, donc 1 est valeur propre, avec des vecteurs propres de la forme $(4z, -2z, z)$, pour $z \neq 0$.

   Enfin, le système $\begin{cases} 4z = 16x \\ 4y + 6z = 16y \\ 4x + 12y + 9z = 16z \end{cases}$ donne $z = 4x$ et $z = 2y$, donc $y = 2x$, et encore une fois la dernière équation est alors toujours vérifiée, donc 16 est valeur propre, avec des vecteurs propres de la forme $(x, 2x, 4x)$, $x \neq 0$.

   La matrice de v devient donc par exemple diagonale dans la base suivante : $((4, 3, -4); (4, -2, 1); (1, 2, 4))$

2. La matrice de passage s'écrit $P = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. La matrice $P^{-1}MP$ est la matrice représentant v dans sa base de vecteurs propres, c'est donc une matrice diagonale de coefficients diagonaux -4, 1 et 16. Autrement dit, $P^{-1}MP = D$.

3. En effet, c'est vrai...

4. Commençons par tout développer dans l'égalité précédente : $D^3 - 13D^2 - 52D + 64I = 0$. En multipliant l'égalité précédente à gauche par P et à droite par P^{-1}, on a $PD^3P^{-1} = 13PD^2P^{-1} - 52PDP^{-1} + 64I$. Or, $M = PDP^{-1}$, $M^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$ et $M^3 = M^2 \times M = PD^2P^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$, d'où l'égalité demandée.
5. C'est évident puisque u^3 est représenté dans la base (F, G, H) par M^3, u^2 par M^2 et e par I (ça c'est vrai dans n'importe quelle base).

Sujet d'annales : Compilation EDHEC

ECE3 Lycée Carnot

17 juin 2010

Exercice 1 (EDHEC 2008)

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction f_n par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{1}{1+e^x} + nx$.
On appelle (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 5 cm.

1. (a) Déterminer, pour tout réel x, $f_n'(x)$ et $f_n''(x)$.
   (b) En déduire que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$ ainsi que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$.
   (b) Montrer que les droites (D_n) et (D_n') d'équations $y = nx$ et $y = nx + 1$ sont asymptotes de (C_n).
   (c) Déterminer les coordonnées du seul point d'inflexion, noté A_n de (C_n).
   (d) Donner l'équation de la tangente (T_1) à la courbe (C_1) en A_1, puis tracer sur un même dessin les droites (D_1), (D_1') et (T_1) ainsi que l'allure de la courbe (C_1).
3. (a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une seule solution sur $\mathbb{R}$, notée u_n.
   (b) Montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $-\dfrac{1}{n} < u_n < 0$.
   (c) En déduire la limite de la suite (u_n).
   (d) En revenant à la définition de u_n, montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n}$.

Exercice 2 (EDHEC 2009)

Dans cet exercice, p désigne un réel de $]0;1[$ et on note $q = 1 - p$. On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant toutes deux la même loi géométrique de paramètre p.

1. On pose $Z = \min(X, Y)$ et on admet que Z est une variable aléatoire, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On rappelle que, pour tout entier naturel k, on a l'égalité $(Z > k) = (X > k) \cap (Y > k)$.
   (a) Pour tout entier naturel k, calculer $P(Z > k)$.
   (b) Etablir que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 1, on a $P(Z = k) = P(Z > k - 1) - P(Z > k)$.
   (c) En déduire que Z suit la loi géométrique de paramètre $(1 - q^2)$.

2. On définit la variable aléatoire T de la façon suivante :
   Pour tout ω de Ω tel que $X(\omega)$ est un entier naturel pair, on pose $T(\omega) = \dfrac{X(\omega)}{2}$, et, pour tout ω de Ω tel que $X(\omega)$ est un entier naturel impair, on pose $T(\omega) = \dfrac{1+X(\omega)}{2}$.
   On admet que T est une variable aléatoire, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
   (a) Montrer que T prend des valeurs entières non nulles.
   (b) Réciproquement, justifier que tout entier naturel k non nul est élément de $T(\Omega)$ et en déduire que $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
   (c) Exprimer l'évènement $(T = k)$ en fonction de certains évènements $(X = i)$ puis montrer que T suit la même loi que Z.
3. On rappelle que la fonction random renvoie de façon uniforme un réel aléatoire élément de $[0;1[$.
   Compléter le programme suivant pour que, d'une part, il simule les lancers d'une pièce donnant *pile* avec la probabilité p et calculer la valeur prise par la variable aléatoire X égale au rang du premier *pile* obtenu lors de ces lancers (X suit bien la loi géométrique de paramètre p) et pour que, d'autre part, il calcule et affiche la valeur prise par T, la variable aléatoire T ayant été définie dans la deuxième question.

```
Program edhec2009 ;
Var x,t,lancer :integer ;
Begin
     Randomize ; x :=0 ;
     Repeat lancer :=random ; x :=....... ; until(lancer <=p) ;
     If(x mod 2=0) then .... else.... ;
     Writeln(t) ;
End.
```

Exercice 3 (EDHEC 2006)

Soit f la fonction définie pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y$.

1. (a) Calculer les dérivées partielles premières de f.
   (b) En déduire que le seul point critique de f est $A = \left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{6}\right)$.
2. (a) Calculer les dérivées partielles secondes de f.
   (b) Montrer que f présente un minimum local en A et donner la valeur m de ce minimum.
3. (a) Développer $2\left(x + \dfrac{y}{2} - \dfrac{1}{4}\right)^2 + \dfrac{3}{2}\left(y - \dfrac{1}{6}\right)^2$.
   (b) En déduire que m est le minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$.
4. On considère la fonction g définie pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ par $g(x, y) = 2e^{2x} + 2e^{2y} + 2e^{x+y} - e^x - e^y$.
   (a) Utiliser la question 3) pour établir que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $g(x, y) \geqslant -\dfrac{1}{6}$.
   (b) En déduire que g possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et préciser en quel point ce minimum est atteint.

Problème (EDHEC 2010)

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$ et on considère l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ défini par les égalités suivantes : $f(e_1) = \dfrac{1}{3}(e_2 + e_3)$ et $f(e_2) = f(e_3) = \dfrac{2}{3}e_1$.

Partie 1 : étude de f.

1. (a) Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
   (b) Déterminer la dimension de Im f puis celle de Ker f.
   (c) Donner alors une base de Ker f, puis en déduire une valeur propre de f ainsi que les vecteurs propres associés.
   (d) Vérifier que $\frac{2}{3}$ et $-\frac{2}{3}$ sont aussi valeurs propres de f, et déterminer les vecteurs propres associés.
   (e) En déduire que f est diagonalisable.
2. On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Vérifier que P est inversible, puis déterminer la matrice D diagonale telle que : $M = PDP^{-1}$.
   (b) Calculer PQ puis en déduire P^{-1}.
   (c) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel j, on a $M^j = PD^jP^{-1}$.
   (d) Écrire, pour tout entier naturel j non nul, la première colonne de la matrice M^j. Vérifier que ce résultat reste valable si $j = 0$.

Partie 2 : étude d'une suite de variables aléatoires.

Une urne contient trois boules numérotées de 1 à 3. Un tirage consiste à extraire au hasard une boule de l'urne puis à la remettre dans l'urne pour le tirage suivant. On définit une suite de variables aléatoires $(X_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ de la manière suivante :

- Pour tout entier naturel k non nul, X_k est définie *après* le $k^{\text{ème}}$ tirage.
- On procède au 1^{er} tirage et X_1 prend la valeur du numéro de la boule obtenue à ce tirage.
- Après le $k^{\text{ème}}$ tirage ($k \in \mathbf{N}^*$) : soit X_k a pris la valeur 1, dans ce cas on procède au $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage et X_{k+1} prend la valeur du numéro obtenu à ce $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage. Soit X_k a pris la valeur j, différente de 1, dans ce cas on procède également au $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage et X_{k+1} prend la valeur j si la boule tirée porte le numéro j et la valeur 1 sinon.

1. Reconnaître la loi de X_1.
2. Simulation informatique de l'expérience aléatoire décrite dans cette partie.
   On rappelle que `random(n)` renvoie un entier compris entre 0 et `n`-1.
   Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans cette partie et pour qu'il affiche la valeur de la variable X_k, l'entier k étant entré au clavier par l'utilisateur.

```
Program simul ;
var i,k,X,tirage : integer ;
Begin
     Readln(k) ; X :=random(3)+1 ;
     For i :=2 to k do begin
          tirage :=random(3)+1 ;
          If X=1 then X := ----
          else If tirage <> X then X := ---- ;
     end ;
     Writeln(X) ;
End.
```

3. On note U_k la matrice à 3 lignes et une colonne dont l'élément de la $i^{ème}$ ligne est $P(X_k = i)$.
   (a) Déterminer les probabilités $P_{(X_k=j)}(X_{k+1} = i)$, pour tout couple (i, j) de $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$.
   (b) On admet que $\{(X_k = 1), (X_k = 2), (X_k = 3)\}$ est un système complet d'événements. Déterminer, grâce à la formule des probabilités totales, la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$, telle que, pour tout entier naturel k non nul, on a $U_{k+1} = AU_k$.
   (c) Montrer qu'en posant $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, alors, pour tout k de $\mathbf{N}$, on a : $U_k = AU_0$.
   (d) Vérifier que $A = M + \frac{1}{3}I$, puis établir que, pour tout k de $\mathbf{N}$, on a : $A^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^j$.
   (e) En déduire les 3 éléments de la première colonne de la matrice A^k, puis vérifier que la loi de X_k est donnée par :

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \quad P(X_k = 1) = \frac{1}{2}\left(1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right) \quad \text{et} \quad P(X_k = 2) = P(X_k = 3) = \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right).$$

   (f) Montrer que la suite (X_k) converge en loi vers une variable aléatoire X dont on donnera la loi (c'est-à-dire que les probabilités $P(X_k = i)$ convergent vers $P(X = i)$).
   (g) Calculer l'espérance $E(X_k)$ de X_k.
   (h) Écrire une fonction Pascal, notée `esp`, qui renvoie $E(X_k)$ à l'appel de `esp(k)`.

Corrigé du sujet Compil EDHEC

Exercice 1 (EDHEC 2008)

1. (a) La fonction f_n est C^∞ sur $\mathbb{R}$ puisque le dénominateur du quotient $\dfrac{1}{1+e^x}$ ne s'annule jamais, et $f_n'(x) = -\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2} + n$; $f_n''(x) = \dfrac{-e^x(1+e^x)^2 + e^x \times 2e^x(1+e^x)}{(1+e^x)^4} = \dfrac{-e^x - e^{2x} + 2e^x}{(1+e^x)^3} = \dfrac{e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}$.

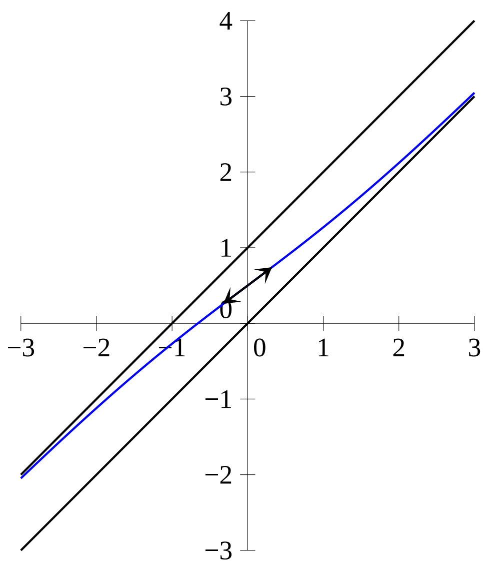
   (b) Au vu de l'expression obtenue pour f'', la fonction f' est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$, admettant donc un minimum en 0 de valeur $f'(0) = n - \dfrac{1}{4}$. Comme n est un entier naturel non nul, f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$, et f est bien strictement croissante.

2. (a) Puisque, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+e^x} = 1$, on a $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty$. De même, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+e^x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$

   (b) Puisque $f_n(x) - nx = \dfrac{1}{1+e^x}$, les calculs de limites précédents prouvent que $y = nx$ est asymptote oblique à la courbe en $+\infty$, et $y = nx + 1$ en $-\infty$.

   (c) Le seul point d'annulation de f_n'' a pour abscisse 0, et ordonnée $f_n(0) = \dfrac{1}{2}$.

   (d) Comme $f_1(0) = \dfrac{1}{2}$ et $f_1'(0) = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$, la tangente a pour équation $y = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{2}$. L'allure des différentes courbes est la suivante :



3. (a) La fonction étant strictement croissante et ayant pour limites $-\infty$ et $+\infty$, elle est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. L'équation $f_n(x) = 0$ a donc une seule solution.

   (b) On a déjà vu plus haut que $f_n(0) = \dfrac{1}{2} > 0$; $f_n\left(-\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{1+e^{-\frac{1}{n}}} - 1 = -\dfrac{e^{\frac{1}{n}}}{1+e^{\frac{1}{n}}} < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la valeur d'annulation de f_n se trouve donc entre $-\dfrac{1}{n}$ et 0.

   (c) Une application du théorème des gendarmes permet de conclure que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

(d) Puisque u_n converge vers 0, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+e^{u_n}} = \frac{1}{2}$. Or, par définition, $\frac{1}{1+e^{u_n}} = -nu_n$. On a donc $\lim_{n\to+\infty} -nu_n = \frac{1}{2}$, soit $u_n \sim -\frac{1}{2n}$.

Exercice 2 (EDHEC 2009)

1. (a) Par indépendance des variables X et Y, $P(Z > k) = P(X > k)P(Y > k)$. Or, pour une variable de loi géométrique, $P(X > k) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} pq^{i-1} = pq^k \sum_{i=0}^{+\infty} q^i = \frac{pq^k}{1-q} = q^k$. On en déduit que $P(Z > k) = (q^k)^2 = q^{2k}$.
   (b) En effet, $(Z > k-1) = (Z > k) \cup Z = k$, union disjointe d'évènement, donc $P(Z > k-1) = P(Z > k) + P(Z = k)$, d'où la formule demandée.
   (c) On a donc $P(Z = k) = q^{2(k-1)} - q^{2k} = q^{2(k-1)}(1-q^2)$, ce qui correspond bien à une loi géométrique de paramètre q^2.
2. (a) En effet, si X est paire, $\frac{X}{2}$ est un entier naturel non nul (X prend des valeurs strictement positives), et si X est impaire, $\frac{X+1}{2}$ est entier aussi.
   (b) Pour tout entier strictement positif k, la variable T prend la valeur k quand $X = 2k$.
   (c) Il y a deux possibilités pour avoir $T = k$: soit $X = 2k$, soit $X = 2k-1$ (qui est bien impair). Donc $(T = k) = (X = 2k) \cup (X = 2k-1)$ (union d'évènements disjoints), et $P(T = k) = pq^{2k-1} + pq^{2k-2} = pq^{2k-2}(1+q) = (1-q)(1+q)q^{2(k-1)} = (1-q^2)q^{2(k-1)}$. On retrouve la même loi que pour Z.
3.
```
Program edhec2009 ;
Var x,t,lancer :integer ;
Begin
     Randomize ; x :=0 ;
     Repeat lancer :=random ; x :=x+1 ; until(lancer <=p) ;
     If(x mod 2=0) then t :=x/2 else t :=(1+x)/2 ;
     Writeln(t) ;
End.
```

Exercice 3 (EDHEC 2006)

1. (a) Sans difficulté, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x + 2y - 1$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y + 2x - 1$.
   (b) Il faut résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcl} 4x & + & 2y & = & 1 \\ 2x & + & 4y & = & 1 \end{array}\right.$. La combinaison $L_1 - 2L_2$ donne $-6y = -1$, d'où $y = \frac{1}{6}$. Symétriquement, $x = \frac{1}{6}$. Il y a donc un unique point critique de coordonnées $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$.
2. (a) Encore une fois rien de compliqué : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 4$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 4$.
   (b) On calcule $\Delta = 16 - 4 = 12$. Il y a bien un extrêmum local au point critique, qui est un minimum puisque $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) > 0$.

3. (a) Développons donc : $2\left(x+\frac{y}{2}-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{2}\left(y-\frac{1}{6}\right)^2 = 2\left(x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{1}{16}+xy-\frac{x}{2}-\frac{y}{4}\right)+\frac{3}{2}\left(y^2-\frac{y}{3}+\frac{1}{36}\right) = 2x^2+\frac{y^2}{2}+\frac{1}{8}+2xy-x-\frac{y}{2}+\frac{3}{2}y^2-\frac{y}{2}+\frac{1}{24} = 2x^2+2y^2+2xy-x-y+\frac{1}{6}$.

   (b) D'après la question précédente, on a toujours $2x^2+2y^2+2xy-x-y \geqslant -\frac{1}{6}$, une somme de carrés étant toujours positive. Or, $f\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right) = \frac{2}{36}+\frac{2}{36}+\frac{2}{36}-\frac{1}{6}-\frac{1}{6} = -\frac{1}{6}$. Puisqu'on a toujours $f(x,y) \geqslant f\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)$, le point critique correspond à un minimum global de f.

4. (a) Il suffit de constater que $g(x,y) = f(e^x, e^y)$ et appliquer le résultat de la question précédente.

   (b) La fonction g atteint la valeur $-\frac{1}{6}$ lorsque $e^x = e^y = \frac{1}{6}$, donc pour $x = y = -\ln 6$.

Problème (EDHEC 2010)

Partie 1 : étude de f.

1. (a) La matrice est $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   (b) On sait que $Im(f) = Vect\left(\left(0,\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right),\left(\frac{1}{3},0,0\right),\left(\frac{1}{3},0,0\right)\right) = Vect\left(\left(0,\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right),\left(\frac{1}{3},0,0\right)\right)$.
   Ces deux vecteurs n'étant pas proportionnels, ils forment une famille libre et $\dim(Im(f)) =$

   2. Pour déterminer $Ker(f)$, il faut résoudre le système $\begin{cases} \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z = 0 \\ \frac{1}{3}x = 0 \\ \frac{1}{3}x = 0 \end{cases}$, ce qui donne sans aucune difficulté $Ker(f) = \{(0,y,-y) \mid y \in \mathbb{R}\} = Vect((0,1,-1))$. Le noyau de f est donc de dimension 1.

   (c) La base a déjà été donnée à la question précédente. Le réel 0 est donc valeur propre de f, et les vecteurs propres associés sont tous ceux de la forme $(0,y,-y)$ pour $y \neq 0$.

   (d) Il s'agit, pour $\frac{2}{3}$, de résoudre le système $\begin{cases} \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z = \frac{2}{3}x \\ \frac{1}{3}x = \frac{2}{3}y \\ \frac{1}{3}x = \frac{2}{3}z \end{cases}$, ce qui donne $x = 2y = 2z$ (la première équation est alors automatiquement vérifiée). Il y a donc des solutions non nulles, $\frac{2}{3}$ est valeur propre avec pour vecteurs propres associés les vecteurs de la forme $(2y,y,y)$, pour $y \neq 0$. De même (le système est très similaire, on obtient comme vecteurs propres pour la valeur propre $-\frac{2}{3}$ les vecteurs $(-2y,y,y)$, avec $y \neq 0$.

   (e) L'application f admet trois valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable.

2. (a) On constate que P est la matrice de passage de la base canonique vers la base $((2,1,1);(-2,1,1);(0,1,-1))$, qui est constituée de vecteurs propres respectifs pour chacune des trois valeurs propres de f (c'est pourquoi il s'agit nécessairement d'une base,

d'ailleurs). La matrice $P^{-1}MP$ est donc la matrice de f dans cette base de vecteurs propres, donc $D = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) On calcule $PQ = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Puisque $PQ = 4I$, $P^{-1} = \frac{1}{4}Q$.

(c) C'est la récurrence classique : $PDP^{-1} = M$ par hypothèse, et en supposant la relation vraie au rang j, on a $M^{j+1} = MM^j = PDP^{-1}PD^jP^{-1} = PD^{j+1}P^{-1}$.

(d) On calcule $PD^j = \begin{pmatrix} 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^j & -2 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^j & 0 \\ \left(\frac{2}{3}\right)^j & \left(-\frac{2}{3}\right)^j & 0 \\ \left(\frac{2}{3}\right)^j & \left(-\frac{2}{3}\right)^j & 0 \end{pmatrix}$. En multipliant la matrice précédente par la première colonne de Q et en divisant par 4, on obtient la première colonne de M^j : $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^j + \left(-\frac{2}{3}\right)^j\right) \\ \frac{1}{4}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^j - \left(-\frac{2}{3}\right)^j\right) \\ \frac{1}{4}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^j - \left(-\frac{2}{3}\right)^j\right) \end{pmatrix}$. Pour $j = 0$, on obtient une colonne 1 0 0, ce qui correspond à la première colonne de la matrice $M^0 = I$.

Partie 2 : étude d'une suite de variables aléatoires.

1. Puisqu'on tire une boule au hasard parmi 3, $X_1 \sim \mathcal{U}(3)$.
2.
```
Program simul ;
var i,k,X,tirage : integer ;
Begin
     Readln(k) ; X :=random(3)+1 ;
     For i :=2 to k do begin
          tirage :=random(3)+1 ;
          If X=1 then X := tirage ;
          else If tirage <> X then X := 1 ;
     end ;
     Writeln(X) ;
End.
```
3. (a) Si $X_k = 1$, X_{k+1} suit une loi uniforme : $P_{X_k=1}(X_{k+1} = 1) = P_{X_k=1}(X_{k+1} = 2) = P_{X_k=1}(X_{k+1} = 3) = \frac{1}{3}$. Si X_k prend la valeur 2 ou 3, on a une chance sur trois de retirer la même boule, donc $P_{X_k=2}(X_{k+1} = 2) = P_{X_k=3}(X_{k+1} = 3) = \frac{1}{3}$; et deux chances sur trois d'en tirer un autre, auquel cas on redonne la valeur 1 : $P_{X_k=2}(X_{k+1} = 1) = P_{X_k=3}(X_{k+1} = 1) = \frac{2}{3}$. Enfin, $P_{X_k=2}(X_{k+1} = 3) = P_{X_k=3}(X_{k+1} = 2) = 0$.

(b) En écrivant la formule des probabilités totales, $P(X_{k+1}=1)=\frac{1}{3}P_{X_k=1}+\frac{2}{3}P(X_k=2)+\frac{2}{3}P(X_k=3)$; $P(X_{k+1}=2)=\frac{1}{3}P(X_k=1)+\frac{1}{3}P_(X_k=2)$ et $P(X_{k+1}=3)=\frac{1}{3}P(X_k=1)+\frac{1}{3}P(X_k=3)$, soit une matrice $A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2&2\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

(c) Récurrence hyper classique : c'est évidemment vrai pour $k=0$, et en le supposant vrai au rang k, alors $U_{k+1}=AU_k=A(A^kU_0)=A^{k+1}U_0$.

(d) La vérification est immédiate : $3M+I=\begin{pmatrix}1&2&2\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}=A$. La formule qui suit est une application tout aussi immédiate de la formule du binôme de Newton.

(e) Le premier élément de la colonne vaut, en utilisant la formule précédente,
$\sum_{j=0}^{j=k}\binom{k}{j}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-j}M_{11}^j=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{j=k}\binom{k}{j}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-j}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^j+\left(-\frac{2}{3}\right)^k\right)$
$=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)^k+\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right)^k\right)=\frac{1}{2}\left(1+\left(-\frac{1}{3}\right)^k\right)$ (les simplifications de somme utilisant à nouveau le binôme). Les deux derniers éléments (qui sont égaux), se calculent de la même façon et valent $\frac{1}{4}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^k\right)$. Comme $U_k=A^kU_0$, on en déduit que U_k est identique à la première colonne de A^k, ce qui revient à la loi donnée par l'énoncé pour X_k.

(f) Comme $\left|-\frac{1}{3}\right|<1$, les limites donnent $\lim_{k\to+\infty}P(X_k=1)=\frac{1}{2}$, et $\lim_{k\to+\infty}P(X_k=2)=\lim_{k\to+\infty}P(X_k=3)=\frac{1}{4}$.

(g) Calculons donc : $E(X_k)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^k+\frac{2}{4}-\frac{2}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^k+\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^k=\frac{7}{4}-\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^k$.

(h) Le plus simple est de faire une boucle pour calculer la puissance :
```
FUNCTION esperance (k :integer) : real;
VAR i : integer; a : real;
BEGIN
a := -1/3;
FOR i := 2 TO k DO a := -a/3;
esperance := (7-3*a)/4;
END;
```

Troisième partie

Devoirs


Mais M'sieur, à quoi ça sert?

Devoir Surveillé n°1

ECE3 Lycée Carnot

30 septembre 2009

Durée : 2H. Calculatrices interdites

Exercice 1

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $x - 3\sqrt{x} \leqslant 2$
2. $\ln(x-3) + \ln(x+1) = 3\ln 2$
3. $|3x+1| + |2x-4| = 5$

Exercice 2

Le but de cet exercice est de calculer la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} (2k+1)^3$ de trois façons différentes.

1. Écrire S_n sans utiliser de symbole somme. De combien de termes cette somme est-elle composée ?
2. Calculer S_n en développant $(2k+1)^3$.
3. On pose $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} (2k)^3$ et $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=2n+1} k^3$. Expliquer pourquoi $U_n = S_n + T_n$ (à l'aide d'une phrase si vous n'arrivez pas à le faire par le calcul).
4. Calculer T_n et U_n.
5. Retrouver la valeur de S_n à l'aide des deux questions précédentes.
6. Prouver par récurrence que $S_n = (n+1)^2(2n^2+4n+1)$.

Problème

On définit deux fonctions notées ch (pour **c**osinus **h**yperbolique) et sh (pour **s**inus **h**yperbolique) de la façon suivante : $ch(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $sh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. On note également $f(x) = \dfrac{x}{sh(x)}$.

1. Résoudre l'équations $sh(x) = 0$.
2. Déterminer le domaine de définition de chacune de ces trois fonctions.

3. Déterminer la parité de chacune de ces trois fonctions.
4. À l'aide d'un calcul de dérivée, déterminer les variations de la fonction sh, puis celles de la fonction ch.
5. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $ch(x) > sh(x)$.
6. Calculer l'équation de la tangente à chacune des deux courbes en leur point d'équation $x = -2$ (garder les valeurs exactes, puis donner des valeurs approchées des coefficients directeurs, sachant que $e^2 \simeq 7,4$ et $e^{-2} \simeq 0,1$.
7. Déterminer les limites de ch et sh en $+\infty$ et en $-\infty$.
8. Tracer dans un même repère les représentations graphiques des fonctions sh et ch.
9. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \dfrac{sh(x) - x\,ch(x)}{(sh(x))^2}$.
10. Étudier les variations de $g : x \mapsto sh(x) - x\,ch(x)$.
11. En déduire le tableau de variations de la fonction f.
12. La fonction f admet-elle une limite lorsque x tend vers 0 ?

Corrigé du DS1

Exercice 1

1. On pose $X = \sqrt{x}$ (naturellement, x devra être positif pour que l'inéquation ait en sens). L'inéquation devient $X^2 - 3X - 2 \leqslant 0$, le discriminant du trinome est $\Delta = 8 + 8 = 17$, il y a donc deux racines $x_1 = \dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$. La première racine étant négative, on obtient comme condition $\sqrt{x} \leqslant x_2$, soit $x \leqslant x_2^2 = \dfrac{25+6\sqrt{25}}{4}$, donc $\mathcal{S} = \left[0; \dfrac{25+6\sqrt{17}}{4}\right]$.
2. Commençons par signaler que l'équation n'a un sens que si $x \geqslant 3$ et $x \geqslant -1$, soit sur $[3; +\infty[$. En regroupant les ln, on obtient $\ln((x-3)(x+1)) = \ln 8$, soit en passant à l'exponentielle $(x-3)(x+1) = 8$, puis $x^2 - 2x - 11 = 0$. Ce trinome a pour discriminant $\Delta = 4 + 44 = 48$, et admet deux racines $x_1 = \dfrac{2+\sqrt{48}}{2} = \dfrac{2+4\sqrt{3}}{2} = 1 + 2\sqrt{3}$, et $x_2 = \dfrac{2-4\sqrt{3}}{2} = 1 - 2\sqrt{3}$. Seule la première est supérieure à 3, donc $\mathcal{S} = \{1 + 2\sqrt{3}\}$.
3. Un petit tableau sera nécessaire pour enlever les valeurs absolues :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$		2	$+\infty$
$\lvert 3x+1\rvert$	$-3x-1$	0	$3x+1$		$3x+1$
$\lvert 2x-4\rvert$	$-2x+4$		$-2x+4$	0	$2x-4$
$\lvert 3x+1\rvert + \lvert 2x-4\rvert$	$-5x+3$		$x+5$		$5x-3$

On résout l'équation sur chaque intervalle : $-5x+3 = 5$ donne $x = -\dfrac{2}{5}$, qui est dans le bon intervalle ; $x+5 = 5$ donne $x = 0$ qui est aussi dans le bon intervalle ; et enfin $5x-3 = 5$ donne $x = \dfrac{8}{5}$, qui lui n'est pas une solution valable, donc $\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{2}{5}; 0\right\}$.

Exercice 2

1. $S_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + 2n + 1$. Cette somme est constituée de $n+1$ termes.
2. $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 = 8\sum_{k=0}^{k=n} k^3 + 12\sum_{k=0}^{k=n} k^2 + 6\sum_{k=0}^{k=n} k + \sum_{k=0}^{k=n} 1 = 2n^2(n+1)^2 + 2n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1) + n + 1 = (n+1)(2n^2(n+1) + 2n(2n+1) + 3n + 1) = (n+1)(2n^3 + 6n^2 + 5n + 1)$.
3. $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=2n+1} k^3 = \sum_{k \text{ pair}}^{k \leqslant 2n} k^3 + \sum_{k \text{ impair}}^{k \leqslant 2n+1} k^3 = \sum_{k=0}^{k=n} (2k)^3 + \sum_{k=0}^{k=n} (2k+1)^3 = T_n + S_n$.
4. On a $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} k^3 = \frac{(2n+1)^2(2n+2)^2}{4} = (n+1)^2(2n+1)^2$ en utilisant la formule du cours pour la somme des cubes. De même, $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} (2k)^3 = \sum_{k=0}^{k=n} 8k^3 = 8 \times \frac{n^2(n+1)^2}{4} = 2n^2(n+1)^2$.
5. Comme $S_n = U_n - T_n$, on a donc $S_n = (n+1)^2(2n+1)^2 - 2n^2(n+1)^2 = (n+1)^2((2n+1)^2 - 2n^2) = (n+1)^2(2n^2 + 4n + 1)$. Notons que cette formule est bien la même que la précédente puisque $(n+1)(2n^2 + 4n + 1) = 2n^3 + 2n^2 + 4n^2 + 4n + n + 1 = 2n^3 + 6n^2 + 5n + 1$.
6. Prouvons donc par récurrence la propriété P_n : $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} (2k+1)^3 = (n+1)^2(2n^2+4n+1)$. Pour $n = 0$, on obtient P_0 : $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=0} (2k+1)^3 = 1^2 \times 1 = 1$, ce qui est vrai. Supposons désormais P_n vérifiée, on

a alors $\sum_{k=0}^{k=n+1}(2k+1)^3 = \sum_{k=0}^{k=n}(2k+1)^3 + (2(n+1)+1)^3 = (n+1)^2(2n^2+4n+1) + (2n+3)^3 = (n^2+2n+1)(2n^2+4n+1)+8n^3+36n^2+54n+27 = 2n^4+4n^3+n^2+4n^3+8n^2+2n+2n^2+4n+1+8n^3+36n^2+54n+27 = 2n^4+16n^3+47n^2+60n+28$. Ne reste plus qu'à vérifier que ça correspond à la formule annoncée : on devrait obtenir $(n+2)^2(2(n+1)^2+4(n+1)+1) = (n^2+4n+4)(2n^2+8n+7) = 2n^4+8n^3+7n^2+8n^3+32n^2+28n+8n^2+32n+28 = 2n^4+16n^3+47n^2+60n+28$. Ca marche, donc P_{n+1} est vérifiée, et par principe de récurrence, toutes les propriétés P_n sont vraies.

Problème

1. On a $sh(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = e^{-x}$, ce qui donne en prenant les logarithmes, $x = -x$, soit $x = 0$, donc $\mathcal{S} = \{0\}$.

2. $\mathcal{D}_{sh} = \mathcal{D}_{ch} = \mathbb{R}$ (puisque la fonction exponentielle est définie partout) ; et d'après la question précédente, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$.

3. Calculons $ch(-x) = \dfrac{e^{-x}+e^x}{2} = ch(x)$, donc ch est paire, et $sh(-x) = \dfrac{e^{-x}-e^x}{2} = -sh(x)$ donc sh est impaire. Quant à f, c'est le quotient de deux fonction impaires, elle est donc paire (on peut refaire le calcul si on veut).

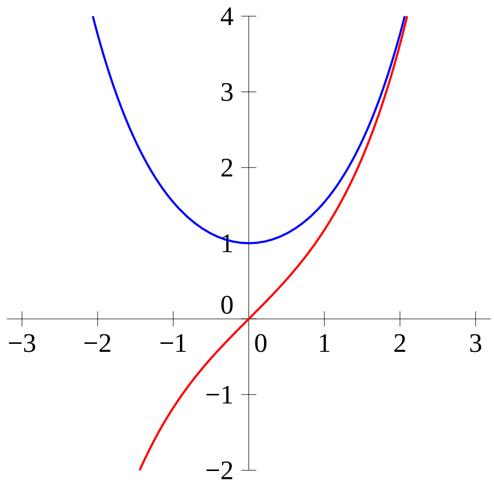
4. Calculons donc : $sh'(x) = \dfrac{e^x-(-e^{-x})}{2} = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2} = ch(x)$. Cette dérivée est toujours positive (c'est une somme de deux exponentielles), donc sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme elle s'annule en 0, elle est donc négative sur $]-\infty;0]$ et positive sur $[0;+\infty[$. Passons à la deuxième fonction : $ch'(x) = \dfrac{e^x+(-e^{-x})}{2} = sh(x)$. D'après la remarque que nous venons de faire, ch est donc décroissante sur $]-\infty;0]$ et croissante sur $[0;+\infty[$.

5. Encore un petit calcul : $ch(x)-sh(x) = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2} - \dfrac{e^x-e^{-x}}{2} = \dfrac{e^x+e^{-x}-e^x+e^{-x}}{2} = e^{-x} > 0$, donc on a bien $ch(x) > sh(x)$.

6. La tangente à ch en -2 a pour équation $y = sh(-2)(x+2)+ch(-2) = \dfrac{e^{-2}-e^2}{2}(x+2) + \dfrac{e^{-2}+e^2}{2} = \dfrac{e^{-2}-e^2}{2}x + \dfrac{3}{2}e^{-2} - \dfrac{1}{2}e^2 \simeq -3,65x - 3,55$. Pour sh, on a l'équation suivante : $y = \dfrac{e^{-2}+e^2}{2}(x+2) + \dfrac{e^{-2}-e^2}{2} = \dfrac{e^{-2}+e^2}{2}x + \dfrac{3}{2}e^{-2} + \dfrac{1}{2}e^2 \simeq 3,75x+3,85$.

7. En utilisant les limites de l'exponentielle en $\pm\infty$, on obtient sans difficulté $\lim\limits_{x\to-\infty} ch(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} ch(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} sh(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} sh(x) = +\infty$.

8. Voici les deux courbes demandées :



9. C'est un calcul de dérivée de quotient tout simple, à tel point qu'il est difficile de le détailler.
10. On a $g'(x) = ch(x) - ch(x) - x\,sh(x) = -x\,sh(x)$. On a vu un peu plus haut que $sh(x)$ est toujours du même signe que x, donc $x\,sh(x)$ est toujours positif, et $g'(x)$ est toujours négatif. Autrement dit, g est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$.
11. Comme on a par ailleurs $g(0) = 0 - 0 = 0$, on peut en déduire que f', qui est du même signe que g, est positive sur $]-\infty; 0[$, et négative sur $]0; +\infty[$. Si on tient absolument à compléter le tableau de variations, on peut prouver que f a pour limite 0 en $+\infty$ et en $-\infty$ par croissance comparée. Pour ce qui se passe en 0, c'est l'objet de la dernière question ci-dessous.
12. Oui, mais ce n'est pas si facile à calculer ! Une astuce est d'écrire que $\dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2x} = \dfrac{e^x - 1}{2x} - \dfrac{e^{-x} - 1}{2x}$. La première moitié a pour limite $\dfrac{1}{2}$ (je rappelle que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$, c'est une des limites classiques vues en cours). La deuxième moitié tend aussi vers $\dfrac{1}{2}$ pour la même raison (il suffit de remplacer x par $-x$, qui tend tout autant vers 0), donc on a en fait $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

Devoir Surveillé n°2

ECE3 Lycée Carnot

21 octobre 2009

Durée : 3H. Calculatrices interdites.

Exercice 1 (un peu fourre-tout)

1. Résoudre l'équation $\dfrac{|x^2-2x+4|}{|x-1|-3}=1$.

2. Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{i=9\ 999}\sqrt{i+1}-\sqrt{i}$.

3. Calculer $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\frac{i}{j+1}$.

4. On considère la suite (u_n) définie par $u_0=0$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=1+\dfrac{2}{1+u_n}$.

   (a) Montrer que (u_n) est bien définie et que $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\geqslant 0$.

   (b) On pose $w_n=\dfrac{u_n-\frac{3}{2}}{u_n+1}$. Montrer que (w_n) est une suite géométrique.

   (c) En déduire l'expression de w_n puis celle de u_n.

   (d) Quelle est la limite de (u_n) ?

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=3$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\sqrt{u_n-1}+1$.

1. Montrer que (u_n) est bien définie et que, $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n>1$
2. On introduit une suite auxiliaire (v_n) définie par $v_n=\ln(u_n-1)$. Montrer que (v_n) est bien définie.
3. Déterminer la nature de la suite (v_n).
4. En déduire l'expression de v_n puis celle de u_n.
5. Déterminer la limite de (u_n).

Exercice 3

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, on note fonction indicatrice de l'ensemble A l'application f_A : $A \to \{0;1\}$ définie de la façon suivante : $f(x) = 1$ si $x \in A$, et $f(x) = 0$ si $x \notin A$.

1. Dessiner le graphe de la fonction f_A si $A = [0;2]$.
2. La fonction précédente est-elle injective ? Surjective ?
3. Pour quels ensembles A la fonction f_A ne sera-t-elle pas surjective ?
4. On a toujours $A = [0;2]$ et on pose désormais $B = [1;4]$. À quoi ressemblent les fonctions indicatrices de $A \cap B$ et de $A \cup B$?
5. Démontrer qu'en général, on a toujours $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_{A\cap B}(x) = f_A(x) \times f_B(x)$ et $f_{A\cup B}(x) = f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) \times f_B(x)$.
6. Montrer que, pour tout ensemble A, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_{\bar{A}}(x) = 1 - f_A(x)$.

Exercice 4

On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par $u_0 = 1$, $v_0 = w_0 = 0$, et les relations de récurrence suivantes : $\begin{cases} u_{n+1} &= u_n + \sqrt{2}v_n \\ v_{n+1} &= \sqrt{2}u_n + v_n + \sqrt{2}w_n \\ w_{n+1} &= \sqrt{2}v_n + w_n \end{cases}$

1. On définit une première suite auxiliaire $d_n = u_n - w_n$. Montrer que d_n est constante et calculer sa valeur.
2. On définit une deuxième suite auxiliaire $s_n = u_n + w_n$. Exprimer s_{n+1} en fonction de s_n et v_n.
3. Exprimer v_{n+2} en fonction de v_{n+1} et de s_{n+1}.
4. Déduire des deux question précédentes que $v_{n+2} = 2v_{n+1} + 3v_n$.
5. Calculer le terme général de la suite (v_n).
6. En déduire la valeur de s_n, puis celles de u_n et de w_n.

Exercice 5

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{2-x}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Étudier les variations de f, ainsi que ses limites aux bornes de son ensemble de définition.
3. Démontrer que, $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) \geqslant x$. Quand a-t-on égalité ?
4. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$, courbe représentative de la fonction f, en son point d'abscisse 1.
5. Tracer le plus soigneusement possible la courbe $\mathcal{C}$ en tenant compte de toutes les informations précédentes.
6. Montrer que f est bijective de $[0;2[$ sur $[0;+\infty[$.
7. Déterminer une équation explicite pour sa bijection réciproque f^{-1}.
8. On considère désormais la suite (u_n) définie par $u_0 \in]0;1[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que la suite est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;1]$.
9. Déterminer la monotonie de la suite (u_n).
10. En déduire la convergence de (u_n) et sa limite l (en utilisant que $f(l) = l$).

Corrigé du DS2

Exercice 1 (un peu fourre-tout)

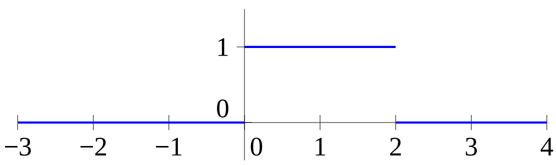
1. Le trinome du numérateur étant toujours positif, on se ramène à l'équation $x^2 - 2x + 4 = |x-1| - 2$ (avec toutefois un domaine de définition où on doit enlever 4 et -2). Ainsi si $x \geqslant 1$, il faut résoudre $x^2 - 3x + 7 = 0$, équation qui n'a pas de solution. Si $x \leqslant 1$, on se ramène à $x^2 - x + 5$, qui n'a pas plus de solution, donc $\mathcal{S} = \emptyset$.
2. C'est une somme télescopique qui se réduit à $\sqrt{10\ 000} - \sqrt{1} = 100 - 1 = 99$.
3. $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i}{j+1} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j+1} \sum_{i=1}^{j} i = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j+1} \frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{4}$.
4. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{2}{1+u_n}$.
   (a) Une récurrence vraiment facile suffit (si $u_n \geqslant 0$, alors (u_n) est bien définie).
   (b) En effet $w_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - \frac{3}{2}}{u_{n+1} + 1} = \dfrac{1 + \frac{2}{1+2u_n} - \frac{3}{2}}{1 + \frac{2}{1+2u_n} + 1} = \dfrac{\frac{2}{1+2u_n} - \frac{1}{2}}{2 + \frac{2}{1+2u_n}} = \dfrac{\frac{3}{2} - u_n}{4 + 2u_n} = -\dfrac{1}{4} w_n$.
   (c) Comme $w_0 = -\dfrac{3}{2}$, on obtient $w_n = -\dfrac{3}{2 \times (-4)^n}$, puis après un petit calcul $u_n = \dfrac{w_n + \frac{3}{2}}{1 - w_n}$ (expression qu'on n'a pas trop envie d'essayer de simplifier).
   (d) La limite de w_n étant nulle (suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{4}$), celle de u_n vaut $\dfrac{3}{2}$.

Exercice 2

1. Dire que (u_n) est bien définie revient de fait à prouver que u_n est toujours strictement supérieur à 1, ce qui se fait par récurrence : notons $P_n : u_n > 1$. P_0 est vraie par hypothèse, et si on suppose $u_n > 1$, alors $u_n - 1 > 0$, donc $\sqrt{u_n - 1} > 0$ et $u_{n+1} > 1$, ce qui prouve $P_{n+1} > 1$ et achève la récurrence.
2. C'est une conséquence immédiate de la question précédente.
3. On a $v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 1) = \ln(\sqrt{u_n - 1}) = \dfrac{1}{2} v_n$, donc (v_n) est donc géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.
4. Comme $v_0 = \ln 2$, $v_n = \dfrac{\ln 2}{2^n}$, et $u_n = e^{v_n} + 1 = 2^{\frac{1}{2^n}} + 1$.
5. La limite de $\dfrac{1}{2^n}$ valant 0, celle de $2^{\frac{1}{2^n}}$ vaut 1 et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = 2$.

Exercice 3

1. La fonction f_A vaut 1 sur l'intervalle $[0;2]$ et 0 le reste du temps :



2. La fonction n'est certainement pas injective puisque par exemple $f(-4) = f(35) = 0$. Elle est par contre surjective puisque 0 et 1 ont tous les deux des antécedents par f_A.
3. La fonction n'est pas surjective dans deux cas : si elle est tout le temps nulle, ce qui est le cas pour $A = \emptyset$, ou si elle est tout le temps égale à 1, ce qui est le cas pour $A = \mathbb{R}$.

4. La fonction $f_A \cup B$ vaut 1 sur l'intervalle $[0;4]$ et elle est nulle le reste du temps ; la fonction $f_A \cap B$ vaut 1 sur l'intervalle $[1;2]$ et elle est nulle le reste du temps.
5. Si $x \in A \cap B$, on a $x \in A$ et $x \in B$, donc $f_A(x) = f_B(x) = 1$, et $f_{A\cap B}(x) = 1 = 1 \times 1$ donc l'égalité est vérifiée. Sinon, il y a au moins l'une des deux valeurs de $f_A(x)$ et $f_B(x)$ qui est nulle, et leur produit est donc nul, ce qui correspon bien à la valeur de $f_{A\cap B}(x)$.

   Pour l'union, supposons d'abord que x n'appartienne ni à A ni à B. L'égalité demandée s'écrit alors $0 = 0 + 0 - 0 \times 0$, ce qui est vrai. À l'opposé, si x appartient aux deux ensembles, $1 = 1 + 1 - 1 \times 1$ est également vrai. Supposons enfin que x appartienne à A mais pas à B (le dernier cas est symétrique), alors $x \in A \cup B$, et $1 = 1 + 0 - 1 \times 0$ reste vrai. dans tous les cas, l'égalité demandée est vérifiée.
6. Si $x \in A$, alors $x \notin \bar{A}$, et $f_{\bar{A}}(x) = 0 = 1 - 1 = 1 - f_A(x)$. De même, si $x \notin A$, alors $f_{\bar{A}}(x) = 1 = 1 - 0 = 1 - f_A(x)$.

Exercice 4

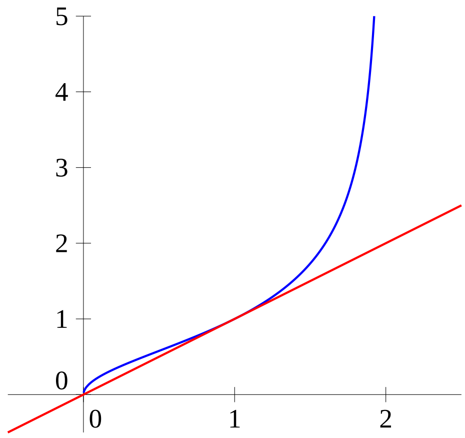
1. On a $d_{n+1} = u_{n+1} - w_{n+1} = u_n + \sqrt{2}v_n - \sqrt{v_n} - w_n = u_n - w_n$, donc la suite est effectivement constante. elle est donc égale à son premier terme $d_0 = 1 - 0 = 1$.
2. Toujours en utilisant l'énoncé, $s_{n+1} = u_{n+1} + w_{n+1} = u_n + \sqrt{2}v_n + \sqrt{2}v_n + u_n = s_n + 2\sqrt{2}v_n$.
3. $v_{n+2} = \sqrt{2}u_{n+1} + v_{n+1} + \sqrt{2}w_{n+1} = \sqrt{2}s_{n+1} + v_{n+1}$.
4. En combinant les deux calculs, on obtient $v_{n+2} = \sqrt{2}(s_n + 2\sqrt{2}v_n) + v_{n+1} = \sqrt{2}s_n + 4v_n + v_{n+1}$. Or, en décalant la relation de la question précédente, on a $v_{n+1} = \sqrt{2}s_n + v_n$, ou encore $\sqrt{2}s_n = v_{n+1} - v_n$. En remplaçant dans l'égalité précédente, cela donne $v_{n+2} = v_{n+1} - v_n + 4v_n + v_{n+1} = 2v_{n+1} + 3v_n$.
5. La suite (v_n) est donc récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - 2x - 3 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 4 + 12 = 16$, et pour racines réelles $r = \dfrac{2+4}{2} = 3$ et $x_2 = \dfrac{2-4}{2} = -1$. le terme général de (v_n) peut donc s'écrire sous la forme $v_n = \alpha 3^n + \beta(-1)^n$, avec $v_0 = \alpha + \beta = 0$, et $v_1 = 3\alpha - \beta = \sqrt{2}$. On a donc $\beta = -\alpha$ et $4\alpha = \sqrt{2}$, soit $\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$, puis $v_n = \dfrac{\sqrt{2}}{4}(3^n - (-1)^n)$.
6. Comme $s_n = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(v_{n+1} - v_n)$, on obtient $s_n = \dfrac{1}{4}(3^{n+1} - (-1)^{n+1}) - 3^n + (-1)^n) = \dfrac{1}{4}(3 \times 3^n - 3^n + 2 \times (-1)^n) = \dfrac{1}{2}(3^n + (-1)^n)$. Réutilisons désormais que $u_n - w_n = 1$, donc $s_n = u_n + w_n = 2u_n - 1$, ou encore $u_n = \dfrac{1}{2}(s_n + 1) = \dfrac{1}{4}(3^n + (-1)^n) + \dfrac{1}{2}$, puis $w_n = \dfrac{1}{4}(3^n + (-1)^n) - \dfrac{1}{2}$.

Exercice 5

1. La fonction f est définie lorsque $\dfrac{x}{2-x} \geqslant 0$, et $x - 2 \neq 0$. Un petit tableau de signe nous donne $\mathcal{D}_f = [0;2[$.
2. En posant $u(x) = \dfrac{x}{2-x}$, la dérivée de f sera de la forme $f' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, et donc du même signe que u'. Contentons nous donc de calculer cette dernière : $u'(x) = \dfrac{2-x+x}{(2-x)^2} = \dfrac{2}{(2-x)^2}$. La fonction f est donc strictement croissante sur son ensemble de définition.

   La seule limite à calculer est est $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ (de l'autre côté, f est définie en 0, et $f(0) = 0$). Le numérateur de la fraction tend alors vers 2 et le dénominateur vers 0^+, donc le quotient vers $+\infty$. Le fait d'ajouter une racine carrée ne change rien, et $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = +\infty$.
3. Sur $[0;2[$, les deux membres étant positifs, $f(x) \geqslant x \Rightarrow \dfrac{x}{2-x} \geqslant x^2$, soit $x \geqslant 2x^2 - x^3$ (puisque $2 - x$ est toujours positif), ou encore $x(1 - 2x + x^2) \geqslant 0$, soit $x(1-x)^2 \geqslant 0$. Cette inégalité étant toujours vérifiée, on a bien $f(x) \geqslant x$ sur $\mathcal{D}_f$, avec égalité pour $x = 0$ et $x = 1$.

4. Comme $f(1) = 1$ et $f'(1) = \dfrac{u'(1)}{2\sqrt{u(1)}} = \dfrac{2}{2} = 1$, l'équation de la tangente demandée est $y = x$.
5. Voici la courbe ainsi que la tangente :



6. La fonction étant strictement croissante, elle est injective. De plus, au vu du calcul de limite et de la valeur prise par f en 0, on a $f([0;2[) = [0;+\infty[$, donc f effectue bien une bijection de $[0;2[$ sur $[0;+\infty[$.
7. Il suffit de résoudre l'équation $\sqrt{\dfrac{x}{2-x}} = y \Rightarrow \dfrac{x}{2-x} = y^2 \to x = 2y^2 - xy^2 \Rightarrow x(1+y^2) = 2y^2 \Rightarrow x = \dfrac{2y^2}{1+y^2}$. On déduit de ce calcul que $f^{-1}(y) = \dfrac{2y^2}{1+y^2}$ (notons que f^{-1} n'est définie que sur $[0;+\infty[$, sinon la première équivalence du calcul précédent est grossièrement fausse).
8. C'est une récurrence toute bête : $u_0 \in [0;1]$ par hypothèse, et si $u_n \in [0;1]$, on sait d'après le tableau de variations de f que $f(u_n) \in [0;1]$, c'est-à-dire que $u_{n+1} \in [0;1]$, ce qui achève la récurrence.
9. Une conséquence immédiate du fait que $\forall x \in [0;1]$, $f(x) \geqslant x$, est que $u_{n+1} \geqslant u_n$, c'est-à-dire que la suite est croissante.
10. La suite est croissante et majorée par 1, elle converge donc. Utilisons l'indice : $f(x) = x$ a déjà été résolue plus haut, on a deux solutions qui sont 0 et 1. La limite de (u_n) ne pouvant être 0 (la suite est croissante et $u_0 > 0$), on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Devoir Surveillé n°3

ECE3 Lycée Carnot

1er décembre 2009

Durée : 4H. Calculatrices autorisées (pour une fois).

Dans les deux exercices de dénombrement, chaque calcul doit être accompagné d'une justification soigneuse. Sauf mention explicite dans l'énoncé de la question, on ne demande pas de valeur numérique pour les réponses.

Exercice 1

Une grille de mots croisés est un tableau rectangulaire à n lignes et p colonnes, (et donc constitué de $n \times p$ cases), parmi lesquelles un certain nombre sont noircies (et les autres blanches). Dans un premier temps, on s'intéresse à des grilles à 6×4 cases (6 lignes et 4 colonnes donc, et 24 cases au total), contenant exactement 4 cases noires.

1. Combien y a-t-il de telles grilles différentes ?
2. Combien ont exactement un coin noirci ?
3. Combien ont exactement une case noircie sur chaque colonne ?
4. Combien ont au moins une case noire sur la première ligne ?
5. Combien ont leurs quatre cases noires sur quatre lignes différentes ?
6. Combien ont leurs cases noires sur quatre lignes et quatre colonnes différentes (donner la valeur numérique) ?

On se place maintenant dans le cas général : n lignes, p colonnes et k cases noires, avec $k \leqslant np$.

1. Combien y a-t-il de grilles différentes possibles ?
2. Combien ont les quatre coins noirs ?
3. Combien ont exactement deux coins noirs ?
4. Combien ont au plus une case noire sur chaque ligne ?
5. On suppose pour cette question $n = p = k$. Combien y a-t-il alors de grilles ayant exactement une case noire sur chaque ligne et sur chaque colonne ?
6. Calculer le nombre de façons de placer les neuf chiffres 1 sur une grille de Sudoku vierge (pour ceux qui ne maitrisent pas les règles du Sudoko : il s'agit d'une grille à neuf lignes et neuf colonnes, et il doit y avoir un 1 sur chaque ligne et sur chaque colonne ; de plus, si on découpe la grille en neuf petites grilles de neuf cases en regroupant lignes et colonnes trois par trois, il doit y avoir un 1 exactement dans chacune de ces petites grilles).
7. Comparer ce nombre avec le nombre de façons de répartir 9 chiffres 1 dans la grille sans respecter les règles du Soduko (donner la valeur numérique pour chacun des deux).

Exercice 2

On considère dans tout cet exercice un ensemble fini E de cardinal n, et on va chercher à dénombrer l'ensemble de ses partitions vérifiant certaines propriétés. Rappelons qu'une partition de E est un découpage de E en sous-ensembles disjoints non vides, dont la réunion est égale à E tout entier. Les questions de l'exercice sont largement indépendantes.

1. Déterminer « à la main » le nombre de partitions de l'ensemble à un élément $E_1 = \{1\}$, puis de l'ensemble à deux éléments $E_2 = \{1; 2\}$, et enfin de l'ensemble à trois éléments $E_3 = \{1; 2; 3\}$ (l'ordre dans lequel apparaissent les sous-ensembles dans la partition n'est pas important).
2. Dans le cas général, déterminer le nombre de partitions de E constituées de n sous-ensembles, puis celles constituées de $n-1$ sous-ensembles.
3. Dans le cas où $|E| = 10$ (on prendra par exemple $E = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$), déterminer le nombre de partitions de E en 8 sous-ensembles (on pourra considérer deux types de partitions).
4. Généraliser le résultat précédent en déterminant le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en $n-2$ sous-ensembles (pour $n \geqslant 3$).
5. On cherche dans cette question à déterminer le nombre de partitions de E en deux sous-ensembles.
   (a) On suppose dans cette question que le premier sous-ensemble contient un seul élément (donc le deuxième en contient $n-1$). Compter le nombre de telles partitions.
   (b) Déterminer le nombre de partitions pour lesquelles l'un des deux ensembles contient 2 éléments, et l'autre $n-2$.
   (c) En déduire une formule générale pour le nombre de partitions de E en deux sous-ensembles dont l'un contient k éléments, puis pour le nombre total de partitions de E en deux sous-ensembles. Calculer ce nombre.
6. (a) Calculer « à la main » a_1, a_2 et a_3 (pour a_3, on pourra se contenter d'une bonne explication plutôt que de faire une liste complète).
   (b) Démontrer que, $\forall p \geqslant 2$, $a_p = (2p-1)a_{p-1}$.
   (c) Écrire un programme Pascal calculant la valeur de a_p, pour un entier p choisi par l'utilisateur.
   (d) Déterminer une formule explicite pour a_p faisant intervenir un quotient de factorielles.
   (e) En déduire de combien de façons on peut former 10 couples dans un groupe de 20 personnes (couples homosexuels autorisés !). Comparer au nombre de façon de former dix couples hétérosexuels avec 10 garçons et 10 filles.

Problème : algorithme de Babylone et fractions continues

Le but de ce problème est d'étudier les propriétés de certaines suites convergeant vers $\sqrt{2}$. Dans les deux premières parties, on introduit deux suites différentes ayant cette limite, et dans la troisième partie, on cherche à comparer la rapidité de leur convergence vers $\sqrt{2}$.

Première partie :

On définit dans cette partie les deux suites (p_n) et (q_n) par $p_0 = q_0 = 1$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} = p_n + 2q_n$ et $q_{n+1} = p_n + q_n$. On pose enfin, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{p_n}{q_n}$.

1. Montrer que pour $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n \in \mathbb{N}^*$ et $q_n \in \mathbb{N}^*$.
2. Calculer les valeurs de p_1, q_1, p_2, q_2, p_3 et q_3, et en déduire les valeurs de u_1, u_2 et u_3.
3. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n \geqslant q_n$.

4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_{n+2} = 2p_{n+1} + p_n$.
5. Calculer la valeur du terme général de la suite (p_n).
6. Montrer que (q_n) vérifie la même relation de récurrence que (p_n), et calculer également son terme général.
7. En déduire une formule explicite pour u_n, puis la limite de la suite (u_n).

Deuxième partie :

On considère désormais la suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{R}$, $v_{n+1} = f(v_n)$, où f est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{2}{x}\right)$.

1. Calculer v_1, v_2 et v_3 (donner pour v_3, outre la valeur exacte, une valeur approchée à 10^{-3} près).
2. Montrer que la suite (v_n) est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \in [1; 2]$.
3. Étudier les variations de la fonction f (sur son intervalle de définition).
4. Résoudre sur $]0; +\infty[$ l'équation $f(x) = x$, en déduire les limites possibles pour la suite (v_n).
5. Étudier le signe de $f(x) - x$ en fonction de x.
6. Montrer que, si $v_n \in [1; \sqrt{2}]$, alors $v_{n+1} \in [\sqrt{2}; 2[$, et si $v_n \in [\sqrt{2}; 2[$, alors $v_{n+1} \in [1; \sqrt{2}[$. La suite (v_n) est-elle monotone ?
7. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{(v_n - \sqrt{2})^2}{2v_n}$. En déduire que $|v_{n+1} - \sqrt{2}| \leqslant \dfrac{1}{2}|v_n - \sqrt{2}|$.
8. En utilisant le résultat de la question précédente, prouver que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|v_n - \sqrt{2}| \leqslant \dfrac{1}{2^n}|v_0 - \sqrt{2}|$.
9. En déduire la limite de la suite (v_n).

Troisième partie :

On cherche désormais à comparer la vitesse de convergence des suites (u_n) et (v_n) introduites dans les parties précédentes vers $\sqrt{2}$, et on pose pour cela $t_n = \dfrac{v_n - \sqrt{2}}{u_n - \sqrt{2}}$.

1. Au vu des valeurs de u_3 et v_3 calculées précédemment, quelle semble être la suite qui converge le plus vite ?
2. Déterminer u_{n+1} en fonction de u_n, en déduire que $u_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{1 - \sqrt{2}}{u_n + 1}(u_n - \sqrt{2})$.
3. En utilisant les résultats de la question précédente et de la question 7. de la deuxième partie, exprimer t_{n+1} en fonction de t_n, u_n et v_n.
4. Déterminer la limite de $\dfrac{t_{n+1}}{t_n}$ quand n tend vers $+\infty$.
5. En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = 0$.
6. Que peut-on conclure de ce calcul concernant la rapidité de convergence des deux suites (u_n) et (v_n) ?

Corrigé du DS3

Exercice 1

1. Il faut choisir les quatre cases noires dans un ensemble de 24 cases, il y a donc $\binom{24}{4}$ grilles possibles.
2. Il y a quatre possibilités pour le coin, et il reste en suite à noircir trois cases parmi les 20 qui ne sont pas des coins, soit $4 \times \binom{20}{3}$ possibilités.
3. Il suffit de choisir, dans chaque colonne, quelle case (parmi six possibles) va être noircie, soit 6^4 choix possibles.
4. Comptons les grilles n'ayant pas de case noire sur la première ligne : il y en a $\binom{18}{6}$ (il ne reste que 18 cases sur les trois dernières lignes). Par passage au complémentaire, il y a donc $\binom{24}{4} - \binom{18}{4}$ grilles avec au moins une case noire sur la première ligne.
5. Il faut choisir les quatre lignes (parmi six possibles) et à l'interieur de chaque ligne, la case à noircir sur quatre disponibles, soit $\binom{6}{4} \times 4^4$ possibilités.
6. C'est le même principe que la question précédente, sauf qu'on a 4 choix possibles pour la case à noircir sur la première ligne, mais plus que 3 sur la deuxième ligne, 2 sur la troisième ligne et un seul sur la dernière. Le nombre de grilles cherché est donc $\binom{6}{4} \times 4! = 360$.

1. On a désormais k cases à noircir sur un total de np, donc $\binom{np}{k}$ grilles possibles.
2. Il reste $k-4$ cases à noircir parmi $np-4$, donc $\binom{np-4}{k-4}$ (naturellement, on doit avoir $k \geqslant 4$).
3. Il faut choisir les deux coins, puis noircir $k-2$ cases parmi les $np-4$ qui ne sont pas des coins, donc $\binom{4}{2} \times \binom{np-4}{k-2}$ possibilités.
4. Cela suppose que $k \leqslant n$. Il faut alors choisir les k lignes contenant une case parmi les n possibles, puis il reste pour chacune de ces lignes p choix pour la case à noircir, donc $\binom{n}{k} \times p^k$ grilles possibles.
5. La grille a donc n lignes et n colonnes, et on cherche à noircir une case par grille, sans en mettre deux dans la même colonne. Il y a n choix possibles pour la case à noircir sur la première ligne, $n-1$ choix pour la case de la deuxième ligne (il ne faut pas la mettre dans la même colonne que la première), $n-2$ pour la troisième etc. Quand on arrive à la dernière ligne, on n'a plus le choix pour la dernière case à noircir (il ne reste qu'une seule colonne vierge). On a donc $n \times (n-1) \times \cdots \times 1 = n!$ grilles possibles.
6. On aurait 9! choix s'il n'y avait pas la condition supplémentaire sur les petits carrés. Le mieux est de recommencer une raisonnement similaire à celui de la question précédente :
   - il y a 9 possibilités pour le 1 de la première ligne.
   - il y a seulement 6 possibilités ensuite pour le 1 de la deuxième ligne (trois cases à éviter qui sont dans le même petit carré que le premier 1).
   - plus que 3 possibilités pour la troisième ligne (un seul petit carré vierge en haut de la grille).
   - à nouveau 6 possibilités pour la quatrième ligne (plus de problème de petit carré, mais tout de même trois colonnes à éviter).
   - 4 pour la cinquième ligne (deux colonnes libres dans deux petits carrés).

- 2 pour la sixième (deux colonnes dans le dernier petit carré médian).
- 3 sur la septième ligne (plus que trois colonnes libres).
- 2 et 1 pour les deux dernières.

Soit $9 \times 6 \times 3 \times 6 \times 4 \times 2 \times 3 \times 2 \times 1 = 46\ 656$ façons de placer les 1.

7. Au total, il y a $\binom{81}{9}$ façons de placer neuf 1 dans une grille de 81 cases, soit 260 887 834 350 possibilités. Le proportion de placements « Sudoku-compatibles » est donc extrêmement faible !

Exercice 2

1. Il n'y a qu'une seule partition de E_1. Pour E_2, on a deux possibilités : soit regrouper les deux éléments (un seul sous-ensemble dans la partition), soit les séparer (deux sous-ensembles). Enfin, pour E_3, on peut regrouper les trois éléments (un seul sous-ensemble), les séparer tous les trois, ou faire une partition en deux sous-ensembles dont l'un contient un élément et l'autre les deux qui restent (trois possibilités selon le choix de l'élément isolé). Il y a donc cinq partitions différentes de E_3.
2. S'il y a n sous-ensembles non vides et disjoints, chacun doit comporter exactement n éléments, et il n'y a donc qu'une seule partition possible. S'il y a $n-1$ sous-ensembles, ils contiennent tous un élément, sauf un qui en contient deux. Il faut donc choisir quels sont les deux éléments qui sont regroupés, ce qui laisse $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ partitions.
3. Il y a deux types de partitions : celles qui ont 7 sous-ensembles réduits à un élément et le huitième qui en contient 3 (au nombre de $\binom{10}{3}$, de manière similaire à la question précédente) ; et celles qui ont 6 sous-ensembles réduits à deux éléments et les deux derniers qui en contiennent 2. Ces dernières sont au nombre de $\frac{1}{2}\binom{10}{2}\binom{8}{2}$ (il faut choisir les deux éléments du premier ensemble, les deux du deuxième parmi ceux qui restent, et diviser par deux car l'ordre n'est pas important). Au total donc, $\binom{10}{3} + \frac{1}{2}\binom{10}{2}\binom{8}{2}$ partitions.
4. Le même raisonnement conduit à $\binom{n}{3} + \frac{1}{2}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}$.
5. (a) Il faut tout simplement choisir l'élément isolé, et il y a n possibilités pour cela, ou si l'on préfère $\binom{n}{1}$ possibilités.

   (b) De la même façon, il faut choisir les deux éléments du premier ensemble, soit $\binom{n}{2}$ partitions possibles.

   (c) En général, on aura $\binom{n}{k}$ partitions en deux sous-ensembles dont l'un contient k éléments. Attention tout de même, k est compris entre 1 (le premier ensemble n'a pas le droit d'être vide) et $n-1$ (le deuxième ne doit pas être vide non plus !). Autre piège, si on fait la somme pour k variant entre 1 et $n-1$, on compte en fait deux fois chaque partition (en effet, on obtient la même partition en échangeant le rôle du premier et du deuxième ensemble : par exemple, les partitions obtenues pour $k=1$ sont les mêmes que celles obtenues pour $k=n-1$). Il y a donc au total $\frac{1}{2}\sum_{k=1} k = n-1\binom{n}{k} = \frac{1}{2}(2^n-2) = 2^{n-1}-1$ partitions en deux sous-ensembles.
6. On suppose dans cette question que $n = 2p$ (autrement dit, E est de cardinal pair), et que tous les sous-ensembles de la partition de E sont constitués d'exactement 2 éléments. On note a_p le nombre de telles partitions de E.

(a) Si E est constitué de $2 \times 1 = 2$ éléments, il n'y a qu'une façon de le partitionner en sous-ensembles à deux éléments, donc $a_1 = 1$. Si E a quatre éléments, on peut le partitionner de trois façons en deux paires (il faut choisir qui on case avec le premier élément, l'autre paire est alors imposée), donc $a_2 = 3$. Enfin, si E contient 6 éléments, on a cinq choix pour l'élémént à caser avec 1, et enuite trois possibilités à chaque fois pour apparier les quatre éléments restants, donc $a_3 = 5 \times 3 = 15$.

(b) On fait comme ci-dessus : si E contient $n = 2p$ éléments, on commence par choisir l'élément qu'on va apparier avec 1, ce pour quoi on a $n - 1 = 2p - 1$ choix. Une fois ce choix fait, il reste à partitionner les $n - 2 = 2p - 2 = 2(p - 1)$ éléments restants en paires, ce pour quoi on a par définition a_{p-1} possibilités. Ce la laisse bien $(2p - 1)a_{p-1}$ possibilités pour séparer E en paires, donc $a_p = (2p - 1)a_{p-1}$.

(c)
```
PROGRAM suite ;
USES wincrt ;
VAR p,i : integer ; a : lingint ;
BEGIN
WriteLn('Choisissez la valeur de l'entier p') ;
ReadLn(p) ;
a := 1 ;
FOR i :=2 TO p DO
a := (2*i-1)*a ;
WriteLn('Le nombre de façons de partitionner un ensemble à ',p,' éléments en paires est ',a) ;
END.
```

(d) D'après la question précédente, on a $a_p = (2p - 1) \times a_{p-1} = (2p - 1) \times (2p - 3)a_{p-2} = (2p-1)\times(2p-3)\times\cdots\times5\times3$ (ce qui est cohérent avec les calculs de a_2 et a_3). Autrement dit $a_p = \dfrac{(2p) \times (2p - 1) \times \cdots \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{(2p) \times (2p - 2) \times \cdots \times 4 \times 2} = \dfrac{(2p)!}{2 \times p \times 2 \times (p - 1) \times \cdots \times 2 \times 2 \times 2 \times 1} = \dfrac{(2p)!}{2^p p!}$.

(e) Le nombre demandé est exactement $a_{10} = \dfrac{20!}{2^{10} \times 10!} = 19\times17\times\cdots\times5\times3 = 654\ 729\ 075$. Si on ne considère que des couples hétéro avec 10 filles et 10 garçons, la première fille (soyons galants) a 10 choix pour son compagnon, la deuxième n'en a plus que 9 etc, et la dernière fille n'a plus le choix (ceci n'est pas censé modéliser ce qui se passe dans la vraie vie), soit $10! = 3\ 628\ 800$ possibilités. Autrement dit, si on apparie aléatoirement 10 filles et 10 garçons, on à peine plus d'une chance sur 200 d'obtenir dix couples hétérosexuels.

Problème : algorithme de Babylone et fractions continues

Première partie :

1. C'est une récurrence assez simple : c'est vrai pour p_0 et q_0 qui sont égaux à 1, et si on suppose que p_n et q_n sont deux entiers strictement positifs, $p_n + q_n$ et $p_n + 2q_n$ le seront certainement aussi, ce qui achève la récurrence.
2. On calcule $p_1 = 3$, $q_1 = 2$, $p_2 = 7$, $q_2 = 5$, $p_3 = 17$ et $q_3 = 12$, d'où $u_1 = \dfrac{3}{2}$, $u_2 = \dfrac{7}{5}$ et $u_3 = \dfrac{17}{12}$.
3. Même pas besoin de récurrence : comme $q_n > 0$, on a toujours $p_n + 2q_n > p_n + q_n$, soit $p_{n+1} > q_{n+1}$. Le seul cas d'égalité est obtenu pour p_0 et q_0.
4. On a $p_{n+2} = p_{n+1} + 2q_{n+1} = p_{n+1} + 2p_n + 2q_n$. Or, $p_{n+1} = p_n + 2q_n$ donc $2q_n = p_{n+1} - p_n$. On en déduit que $p_{n+2} = p_{n+1} + 2p_n + p_{n+1} - p_n = 2p_{n+1} + p_n$.

5. On reconnait une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - 2x - 1 = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 4 + 4 = 8$, et il y a deux racines $r = \dfrac{2 + \sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2}$, et $s = \dfrac{2 - \sqrt{8}}{2} = 1 - \sqrt{2}$. La suite est donc de la forme $p_n = \alpha(1 + \sqrt{2})^n + \beta(1 - \sqrt{2})^n$, avec $p_0 = \alpha + \beta = 1$, et $p_1 = (1 + \sqrt{2})\alpha + (1 - \sqrt{2})\beta = 3$. On obtient donc $\beta = 1 - \alpha$, puis $(1 + \sqrt{2})\alpha + 1 - \sqrt{2} - (1 - \sqrt{2})\alpha = 3$, soit $2\sqrt{2}\alpha = 2 + \sqrt{2}$. Finalement, $\alpha = \dfrac{2 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{2} + 1}{2}$, et $\beta = \dfrac{1 - \sqrt{2}}{2}$, donc $p_n = \dfrac{1}{2}((1 + \sqrt{2})^{n+1} + (1 - \sqrt{2})^{n+1})$.
6. En effet, $q_{n+2} = q_{n+1} + p_{n+1} = q_{n+1} + 2q_n + p_n$, avec $p_n = q_{n+1} - q_n$, donc $q_{n+2} = 2q_{n+1} + q_n$. L'équation caractéristique n'ayant pas changé depuis tout à l'heure, il faut désormais déterminer α' et β' tels que $\alpha' + \beta' = 1$, et $\alpha'(1+\sqrt{2}) + \beta'(1-\sqrt{2}) = 2$, soit $\alpha'(1+\sqrt{2}-1+\sqrt{2}) + 1 - \sqrt{2} = 2$, et $\alpha' = \dfrac{1 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$, puis $\beta' = \dfrac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2}}$. On obtient finalement $q_n = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}((1+\sqrt{2})^{n+1} - (1-\sqrt{2})^{n+1}$.
7. Tout cela nous donne $u_n = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} \dfrac{(1 + \sqrt{2})^{n+1} + (1 - \sqrt{2})^{n+1}}{(1 + \sqrt{2}^{n+1} - (1 - \sqrt{2})^{n+1}}$. Comme $|1+\sqrt{2}| < 1$ et $1+\sqrt{2} > 1$, numérateur et dénominateur du deuxième quotient sont équivalents à $(1 + \sqrt{2})^{n+1}$, donc le quotient a pour limite 1. On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

Deuxième partie :

1. On calcule $v_1 = \dfrac{1}{2}(1 + 2) = \dfrac{3}{2}$, puis $v_2 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2} + \dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{17}{12}$, et enfin $v_3 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{17}{12} + \dfrac{24}{17}\right) = \dfrac{577}{408} \simeq 1.414$
2. La suite est définie si $v_n \neq 0$, donc prouver par récurrence que $v_n \in [1; 2]$ suffit. C'est vrai pour v_0, et si on le suppose vrai pour v_n, on a alors $\dfrac{2}{v_n} \in [1; 2]$ également, donc $v_n + \dfrac{2}{v_n} \in [2; 4]$, et $v_{n+1} \in [1; 2]$, ce qui achève la récurrence.
3. On a $f'(x) = \dfrac{1}{2}(1 - \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{x^2 - 2}{2x^2}$. Cette dérivée s'annule pour $x = \sqrt{2}$, la fonction f est décroissante sur $]0; \sqrt{2}]$ et croissante sur $[\sqrt{2}; +\infty[$.
4. Si $f(x) = x$, on a donc $x + \dfrac{2}{x} = 2x$, soit $\dfrac{2}{x} = x$. Comme $x \neq 0$, on obtient $x^2 = 2$, soit $x = \sqrt{2}$. La suite (v_n) ne peut avoir pour limite que $\sqrt{2}$.
5. Par un calcul similaire, $f(x) - x$ est positif sur $[0; \sqrt{2}]$, et négatif sur $[\sqrt{2}; +\infty[$.
6. C'est une simple application du tableau de variations : si $x \leqslant \sqrt{2}$, $f(x) \geqslant \sqrt{2}$, et vice-versa. Comme $v_{n+1} = f(u_n)$, les propriétés demandées en découlent. On en déduit que, si $v_n \in [1; \sqrt{2}]$, $v_n \leqslant v_{n+1}$ mais $v_{n+1} \geqslant v_{n+2}$, et sinon les inégalités sont inversées. dans les deux cas, la suite ne peut pas être monotone.
7. Calculons $2v_n(v_{n+1} - \sqrt{2}) = v_n\left(v_n + \dfrac{2}{v_n} - 2\sqrt{2}\right) = v_n^2 - 2\sqrt{2}v_n + 2 = (v_n - \sqrt{2})^2$. Comme $v_n \in [1; 2]$, $|2v_n| \geqslant 2$, et $|v_n - \sqrt{2}| \leqslant 1$. On en déduit que $|v_{n+1} - \sqrt{2}| = \dfrac{|v_n - \sqrt{2}||v_n - \sqrt{2}|}{|2v_n|} \leqslant \dfrac{|v_n - \sqrt{2}|}{2}$.
8. On le prouve par récurrence. Pour $n = 0$, c'est évident puisqu'on a la même chose à gauche et à droite. Supposons l'inégalité vérifiée au rang n, on a alors au rang $n + 1$ en utilisant la question précédente $|v_{n+1} - \sqrt{2}| \leqslant \dfrac{1}{2}|v_n - \sqrt{2}| \leqslant \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2^n}|v_0 - \sqrt{2}| \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}|v_n - \sqrt{2}|$, ce qui achève la récurrence.

9. D'après le théorème des gendarmes et le résultat précédent, on a $\lim_{n\to+\infty} |v_n - \sqrt{2}| = 0$, ce qui signifie exactement que $\lim_{n\to+\infty} v_n = \sqrt{2}$.

Troisième partie :

1. Manifestement, c'est v_3 qui fait la course en tête.
2. On a $u_{n+1} = \dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \dfrac{p_n + 2q_n}{p_n + q_n} = 1 + \dfrac{q_n}{p_n + q_n} = 1 + \dfrac{1}{\frac{p_n}{q_n} + 1} = 1 + \dfrac{1}{1 + u_n} = \dfrac{u_n + 2}{u_n + 1}$. On a donc $un + 1 - \sqrt{2} = \dfrac{u_n + 2 - \sqrt{2}u_n - \sqrt{2}}{u_n + 1} = \dfrac{(1 - \sqrt{2})(u_n - \sqrt{2})}{u_n + 1}$.
3. Nous avons $t_{n+1} = \dfrac{v_{n+1} - \sqrt{2}}{u_{n+1} - \sqrt{2}} = \dfrac{(v_n - \sqrt{2})^2}{2v_n} \dfrac{u_n + 1}{(1 - \sqrt{2})(u_n - \sqrt{2})} = \dfrac{(v_n - \sqrt{2})(u_n + 1)}{2v_n(1 - \sqrt{2})} t_n$.
4. Parmi les termes de l'affreux quotient de la question précédente, on a $v_n - \sqrt{2}$ qui a pour limite 0, et tous les autres ont une limite finie (non nulle), donc $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{t_{n+1}}{t_n} = 0$.
5. De la question précédente, on déduit qu'à partir d'un certain rang n_0, $\left|\dfrac{t_{n+1}}{t_n}\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$ (on pourrait prendre autre chose que $\dfrac{1}{2}$, peu importe), donc $\forall n > n_0\ |t_n| \leqslant \dfrac{1}{2}|t_{n-1}| \leqslant \dfrac{1}{4}|t_{n-2}| \leqslant \cdots \leqslant \dfrac{1}{2^{n-n_0}}|t_{n_0}|$ (on fait une jolie récurrence si on veut être rigoureux). Par théorème de comparaison, on a donc $\lim_{n\to+\infty} |t_n| = 0$, donc $\lim_{n\to+\infty} t_n = 0$.
6. Cela signifie que $v_n - \sqrt{2}$ est négligeable par rapport à $u_n - \sqrt{2}$, donc que la suite (v_n) converge vers $\sqrt{2}$ beaucoup plus rapidement que la suite (u_n).

Concours Blanc n°1

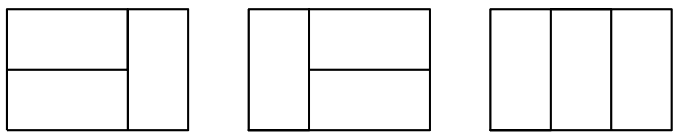
ECE3 Lycée Carnot

6 janvier 2010

Problème 1 : Variations autour de la suite de Fibonacci

Première partie

On dipose de briques rectangulaire 1×2 et on se propose de construire à l'aide de ces briques un mur de hauteur 2 et de longueur $k \in \mathbb{N}^*$. On note a_n le nombre de murs distincts construits avec n briques. Ainsi, par exemple, $a_3 = 3$:



Déterminer une relation de récurrence lisant a_{n+2}, a_{n+1} et a_n (on pourra remarquer qu'un mur commence soit par une brique verticale soit par deux briques horizontales superposées).

Deuxième partie

On étudie la suite de Fibonacci (F_n) définie par $F_0 = F_1 = 1$ et la relation de récurrence $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

1. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer qu'il existe un couple de réels (α, β) que l'on déterminera tel que, pour tout entier naturel n, $F_n = \alpha \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.
3. Montrer que, $\forall n > 0$, $F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^n$.
4. Déterminer la limite de (F_n) quand n tend vers $+\infty$, puis un équivalent simple de F_n.

Troisième partie

Dans toute cette partie, a_n désigne le nombre de murs distincts construits avec n briques (avec $a_0 = 1$).

1. Montrer que, $\forall n \geqslant 0$, $a_0 + a_1 + \cdots + a_n = a_{n+2} - 1$.
2. Montrer que, $\forall n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{a_1 a_3} + \dfrac{1}{a_2 a_4} + \cdots + \dfrac{1}{a_n a_{n+2}} = 1 - \dfrac{1}{a_{n+1} a_{n+2}}$.
3. Montrer l'inégalité : $\forall n \geqslant 0$, $a_{n+2} > \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$.
4. On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{a_n a_{n+2}}$. Cette série converge-t-elle ? Si oui, quelle est sa somme ?
5. Montrer que $\dbinom{2n}{0} + \dbinom{2n-1}{1} + \cdots + \dbinom{n}{n} = a_{2n}$, où a_k désigne le $(k+1)$-ème nombre de Fibonacci.

Problème 2 : Nombre de surjections entre ensembles finis

Dans tout ce problème, on note, pour tous entiers naturels n et p, $S_{n,p}$ le nombre de surjections de l'ensemble $\{1; 2; \dots; n\}$, vers l'ensemble $\{1; 2; \dots; p\}$. Un exemple de telle application pour $n = 3$ et $p = 2$ est $f : \{1; 2; 3\} \to \{1; 2\}$ définie par $\begin{cases} f(1) = 2 \\ f(2) = 2 \\ f(3) = 1 \end{cases}$. On convient que $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_{n,0} = 0$, et $\forall p \in \mathbb{N}$, $S_{0,p} = 0$.

Première partie : exemples et généralités

1. Déterminer les valeurs de $S_{3,2}$ et $S_{4,2}$ en faisant la liste de toutes les applications convenables.
2. Que peut-on dire de $S_{n,p}$ quand $n < p$?
3. Déterminer, pour tout entier n, la valeur de $S_{n,1}$.
4. Déterminer, pour tout entier n, la valeur de $S_{n,n}$.

Deuxième partie : détermination de $S_{n,2}$

Pour alléger les notations, on pose dans cette partie, $\forall n \geqslant 2$, $u_n = S_{n,2}$.

1. Vérifier que $u_2 = 2$.
2. Prouver que, $\forall n \geqslant 2$, $u_{n+1} = 2(u_n + 1)$ (on pourra fixer l'image de $n + 1$ par une application surjective de $\{1; 2; \dots; n + 1\}$ dans $\{1; 2\}$, et considérer les possibilités pour les images des autres éléments).
3. À l'aide de cette relation de récurrence, déterminer la valeur de u_n.
4. Retrouver cette valeur à l'aide d'un raisonnement combinatoire direct, en comptant le nombre d'applications de $\{1; 2; \dots; n\}$ dans $\{1; 2\}$ qui ne sont pas surjectives.

Troisième partie : détermination de $S_{n,3}$

On pose désormais, $\forall n \geqslant 3$, $v_n = S_{n,3}$.

1. Vérifier que $v_3 = 6$.
2. Prouver que, $\forall n \geqslant 3$, $v_{n+1} = 3(v_n + u_n) = 3v_n + 3 \times 2^n - 6$.
3. Écrire un programme Pascal calculant la valeur de v_n pour un entier n choisi par l'utilisateur, à l'aide de la relation de récurrence précédente.
4. On pose $\forall n \geqslant 3$, $w_n = v_n - 3$. Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite (w_n).
5. On pose désormais, $\forall n \geqslant 3$, $t_n = w_n + 3 \times 2^n$. Montrer que (t_n) est une suite géométrique de raison 3.

6. En déduire la valeur de t_n, puis celle de u_n et de w_n.
7. Par un raisonnement direct inspiré de celui de la question 2.4 (dénombrer le nombre d'applications non surjectives), retrouver la valeur de v_n.

Quatrième partie : détermination de $S_{n+1,n}$

1. Soit f une application surjective de $\{1; 2; \ldots; n+1\}$ dans $\{1; 2; \ldots; n\}$. Montrer qu'il existe un unique élément dans $\{1; 2; \ldots; n\}$ ayant deux antécédents par f.
2. De combien de façons peut-on choisir ces deux antécédents ?
3. En déduire que $S_{n+1,n} = \dfrac{n(n+1)!}{2}$.

Cinquième partie : cas général

1. Montrer que, $\forall n \geqslant 2$, $\forall p \geqslant n$, $S_{n,p} = nS_{n,p-1} + S_{n-1,p-1}$.
2. À l'aide de cette relation, dresser un tableau similaire au triangle de Pascal donnant les valeurs de $S_{n,p}$ pour des entiers n et p inférieurs ou égaux à 5.
3. Soit j un entier inférieur ou égal à $p-1$, et k tel que $j \leqslant k \leqslant p$, prouver que
$$\binom{p}{k}\binom{k}{j} = \binom{p}{j}\binom{p-j}{k-j}$$
4. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=q}^{k=p}(-1)^k\binom{p}{k}\binom{k}{q} = 0$ (on pourra faire apparaître une formule du binôme de Newton).
5. Déterminer en fonction de $S_{n,k}$, le nombre d'applications de $\{1; 2; \ldots; n\}$ dans $\{1; 2; \ldots; p\}$ prenant exactement j valeurs différentes (j étant ici un entier inférieur ou égal à p).
6. En déduire que $p^n = \displaystyle\sum_{j=1}^{j=p}\binom{p}{j}S_{n,j}$.
7. Prouver à l'aide des deux résultats précédents que $S_{n,p} = (-1)^p\displaystyle\sum_{k=0}^{k=p}(-1)^k\binom{p}{k}k^n$ (calculer la somme de droite en remplaçant k^n par la formule obtenue à la question 6).

Corrigé du Concours Blanc n°1

Problème 1 : Variations autour de la suite de Fibonacci

Première partie

Les murs de longueur $n+2$ peuvent être séparés en deux catégories disjointes : ceux qui débutent avec une brique verticale, et qui sont donc au nombre de a_{n+1} puisqu'il reste un mur de longueur $n+1$ à accoller à cette première brique ; et ceux débutant avec deux briques horizontales superposés, au nombre de a_n car il reste alors un mur de longueur n à construire. Conclusion : $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

Deuxième partie

1. C'est un récurrence double évidente : F_0 et F_1 sont entiers par hypothèse, et en supposant F_n et F_{n+1} entiers, leur somme F_{n+2} l'est également.
2. La suite est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - x - 1 = 0$, dont le discriminant vaut $\Delta = 1 + 4 = 5$ et admettant donc deux racines $r = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $s = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. La forme de F_n en découle, avec au vu des valeurs de F_0 et de F_1 les équations $\alpha + \beta = 1$ et $\alpha \times \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + \beta \times \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$, soit $\alpha \times \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + (1-\alpha) \times \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$, donc $\alpha\sqrt{5} = 1 - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, soit $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$, et $\beta = 1 - \alpha = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$. On a donc $F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$.
3. C'est encore une récurrence : $F_1^2 - F_0F_2 = 1 - 2 = (-1)^1$. Supposons l'égalité vérifié au rang n, alors $F_{n+1}^2 - F_nF_{n+2} = F_{n+1}^2 - F_n(F_n + F_{n+1}) = F_{n+1}(F_{n+1} - F_n) - F_n^2 = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = -(-1)^n = (-1)^{n+1}$, ce qui prouve l'hérédité et achève la démonstration.
4. La suite est somme de deux suites géométriques, l'une de raison $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \in]-1;1[$ (en effet, $\sqrt{5} \in]2;3[$), et l'autre de raison strictement plus grande que 1. Comme $\alpha > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n = +\infty$.

   La suite géométrique tendant vers 0 étant négligeable devant l'autre, $F_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$.

Troisième partie

1. Une première récurrence : $a_0 = 1 = a_2 - 1$, et en supposant l'égalité vraie au rang n, $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n+1} a_k = \sum_{k=0}^{k=n} a_k + a_{n+1} = a_{n+2} + a_{n+1} - 1 = a_{n+3} - 1$ au vu de la récurrence vérifiée par la suite (a_n). Ce calcul prouve l'hérédité et achève la récurrence.
2. Une deuxième récurrence : $\dfrac{1}{a_1a_3} = \dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{a_2a_3} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3}$, donc l'égalité est vraie au rang 1. Si on la suppose vraie au rang n alors $\dfrac{1}{a_1a_3} + \cdots + \dfrac{1}{a_na_{n+2}} + \dfrac{1}{a_{n+1}a_{n+3}} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{a_{n+1}a_{n+2}} + \dfrac{1}{a_{n+1}a_{n+3}} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{a_{n+1}}\left(\dfrac{1}{a_{n+3}} - \dfrac{1}{a_{n+2}}\right) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{a_{n+3} - a_{n+2}}{a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{a_{n+2}a_{n+3}}$, puisque $a_{n+3} - a_{n+2} = a_{n+1}$. Ceci achève la récurrence.

3. Pour changer, une récurrence double : $a_2 = 2 > 1 = \left(\frac{3}{2}\right)^0$ et $a_3 = 3 > \frac{3}{2}$. Supposons l'inégalité vraie au rang n, alors $a_{n+4} = a_{n+3} + a_{n+2} > \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \left(\frac{3}{2}\right)^n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+2}\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{9}\right)$. Comme $\frac{2}{3} + \frac{4}{9} = \frac{10}{9} > 1$, $a_{n+4} > \left(\frac{3}{2}\right)^{n+2}$ et la récurrence fonctionne.
4. On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}} = 0$ puisque la suite (a_n) tend vers $+\infty$, donc le résultat de la question 2 permet d'affirmer que la série de terme général $\frac{1}{a_n a_{n+2}}$ converge vers $\frac{1}{2}$.
5. C'est un pur résultat combinatoire : on peut séparer les murs en catégorie suivant le nombre de briques verticales et le nombre de duos de briques horizontales superposées qu'ils contiennent. Si un mur de longueur $2n$ contient k duos de briques horizontales, il contient $2n - 2k$ briques verticales , et on peut placer les k duos à $2n - k$ emplacements différents (puisque le mur contient au total $2n - k$ briques/duos), ce qui fait $\binom{2n-k}{k}$ possibilités. En sommant cette expression entre 0 et n, on obtient le nombre total de murs de longueur $2n$, soit a_{2n}.

Problème 2 : Nombre de surjections entre ensembles finis

Première partie : exemples et généralités

1. Soit f une application surjective de $\{(1;2;3)\}$ dans $\{(1;2)\}$. Les triplets possibles pour $(f(1);f(2);f(3))$ sont $(1;1;2)$; $(1;2;1)$; $(1;2;2)$; $(2;1;1)$; $(2;1;2)$ et $(2;2;1)$, ce qui nous donne $S_{3,2} = 6$.
   De même, si g est une application surjective de $\{(1;2;3;4)\}$ dans $\{(1;2)\}$, les quadruplets possibles pour $(g(1);g(2);g(3);g(4))$ sont $(1;1;1;2)$; $(1;1;2;1)$; $(1;1;2;2)$; $(1;2;1;1)$; $(1;2;1;2)$; $(1;2;2;1)$; $(1;2;2;2)$; $(2;1;1;1)$; $(2;1;1;2)$; $(2;1;2;1)$; $(2;1;2;2)$; $(2;2;1;1)$; $(2;2;1;2)$ et $(2;2;2;1)$, d'où $S_{4,2} = 14$.
2. Une application ayant pour ensemble de départ $\{1;2;\ldots;n\}$ ne peut prendre qu'au plus n valeurs différentes, donc ne pourra pas être surjective dans $\{1;2;\ldots;p\}$ si $n < p$. Autrement dit, $S_{n,p} = 0$ dans ce cas.
3. La seule application ayant pour ensemble d'arrivée l'ensemble réduit à un seul élément $\{1\}$ est l'application constante égale à 1 (quel que soit l'ensemble de départ). Elle est par ailleurs surjective dès que $n \geqslant 1$, donc $S_{n,1} = 1$ pour $n \geqslant 1$.
4. Une application surjective de $\{1;2;\ldots;n\}$ dans lui-même n'est autre qu'une permutation de l'ensemble $\{1;2;\ldots;n\}$, qui sont au nombre de $n!$, donc $S_{n,n} = n!$.

Deuxième partie : détermination de $S_{n,2}$

1. On a vu plus haut que $S_{2,2} = 2! = 2$.
2. Considérons une application surjective f de $\{1;2;\ldots;n+1\}$ dans $\{1;2\}$, et supposons que $f(n+1) = 1$. Pour que f soit surjective, il suffit alors que la restriction de f à $\{1;2;\ldots;n\}$ soit déjà surjective (u_n possibilités) ou que $f(1) = f(2) = \cdots = f(n) = 2$. Il y a de même $u_n + 1$ applications surjectives pour lesquelles $f(n+1) = 2$, ce qui nous donne bien au total $u_{n+1} = 2(u_n + 1)$.
3. La suite (u_n) est une suite arithmético-géométrique. Son équation de point fixe, $x = 2x + 2$, a pour solution $x = -2$. Posons donc $v_n = u_n + 2$, on a alors $v_{n+1} = u_{n+1} + 2 = 2u_n + 2 + 2 = 2(u_n + 2) = 2v_n$. La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison 2 et vérifiant $v_2 = u_2 + 2 = 4$. On en déduit que $\forall n \geqslant 2$, $v_n = 4 \times 2^{n-2} = 2^n$, puis $u_n = v_n - 2 = 2^n - 2$.
4. Il y a au total 2^n applications de $\{1;2;\ldots;n\}$ dans $\{1;2\}$. Parmi celles-ci, les seules qui ne sont pas surjectives sont les deux applications constantes respectivement égales à 1 et à 2. Le nombre d'applications surjectives est donc $2^n - 2$.

Troisième partie : détermination de $S_{n,3}$

1. Toujours en revenant à la dernière question de la première partie, $v_3 = S_{3,3} = 3! = 6$.
2. Soit g une application surjective de $\{1;2;\dots;n+1\}$ dans $\{1;2;3\}$ telle que $g(n+1) = 3$. Il y a alors deux possibilités pour la restriction de g à $\{1;2;\dots;n\}$: soit elle est surjective dans $\{1;2;3\}$, soit elle est surjective dans $\{1;2\}$ (sans prendre la valeur 3). Ces deux possibilités ne pouvant se produire simultanément, il y a $v_n + u_n$ applications g convenables. Un raisonnement identique dans le cas où $g(n+1) = 1$ et $g(n+1) = 2$ nous permet d'obtenir au total $v_{n+1} = 3(v_n + u_n)$. Comme $u_n = 2^n - 2$, on a donc $v_{n+1} = 3v_n + 3 \times 2^n - 6$.
3.
```
PROGRAM recurrence;
USES wincrt;
VAR i,n,v,w : integer;
BEGIN
WriteLn('Choisissez la valeur de l'entier n >=3');
ReadLn(n);
v := 6; w := 3*8;
FOR i := 4 TO n DO
BEGIN
v := 3*v+w-6; w := 2*w;
END;
WriteLn('La valeur de v_',n,' est de ',v);
END.
```
4. D'après le résultat de la question 2, $w_{n+1} = v_{n+1} - 3 = 3v_n + 3 \times 2^n - 6 - 3 = 3(v_n - 3 + 2^n) = 3(w_n + 2^n)$.
5. Calculons $t_{n+1} = w_{n+1} + 3 \times 2^{n+1} = 3(w_n + 2^n + 2^{n+1}) = 3(w_n + 2^n + 2 \times 2^n) = 3(w_n + 3 \times 2^n) = 3t_n$. La suite (t_n) est donc bien géométrique de raison 3.
6. Il ne reste plus qu'à remonter : $t_3 = w_3 + 3 \times 2^3 = w_3 + 24 = v_3 - 3 + 24 = v_3 + 21 = 6 + 21 = 27$. On en déduit que $t_n = 27 \times 3^{n-3} = 3^n$, puis $w_n = 3^n - 3 \times 2^n$ et enfin $v_n = 3^n - 3 \times 2^n + 3$.
7. Les applications de $\{1;2;\dots n+1\}$ dans $\{1;2;3\}$ peuvent être classées selon le nombre de valeurs différentes qu'elles prennent : soit elle prennent les trois valeurs possibles, et il y a par définition v_n telles applications ; soit elles en prennent exactement deux, qu'on peut choisir de $\binom{3}{2} = 3$ façons différentes, et il y a à chaque fois u_n telles applications, donc $3u_n$ au total ; soit elles sont constantes, ce pour quoi on a 3 possibilités. Comme il y a un total de 3^n applications de $\{1;2;\dots;n\}$ dans $\{1;2;3\}$, on obtient la relation $3^n = v_n + 3u_n + 3$, donc $v_n = 3^n - 3u_n - 3 = 3^n - 3(2^n - 2) - 3 = 3^n - 3 \times 2^n + 3$.

Quatrième partie : détermination de $S_{n+1,n}$

1. L'application f étant surjective, tout élément de $\{1;2;\dots;n\}$ admet (au moins) un antécédent par f. Choisissons donc un antécédent pour chaque élément de l'ensemble d'arrivée, cela nous donne n éléments de $\{1;2.\dots;n+1\}$ ayant des images distinctes par f. Le dernier élément de $\{1;2;\dots;n+1\}$ a une image identique à l'un des autres éléments de $\{1;2;\dots;n+1\}$ (puisqu'on a déjà épuisé tous les éléments de l'ensemble d'arrivée), et cette image est bien l'unique élément de notre ensemble d'arrivée ayant exactement deux antécédents.
2. Il faut choisir deux éléments dans un ensemble en contenant $n+1$, il y a donc $\binom{n+1}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2}$ possibilités.

3. Une fois choisis l'élément de l'ensemble d'arrivée ayant deux antécédents (n possibilités) et les deux antécédents en question, les $n-1$ éléments restants dans chaque ensemble sont reliés de façon bijective par f, ce qui laisse $(n-1)!$ possibilités. On a donc $S_{n+1,n} = n \times \dfrac{n(n+1)}{2} \times (n-1)! = \dfrac{n(n+1)!}{2}$.

Cinquième partie : cas général

1. Considérons une application surjective f de $\{1;2;\dots;n\}$ dans $\{1;2;\dots;p\}$. On a p choix possibles pour l'image de n par cette application, et la restriction de f à $\{1;2;\dots;n-1\}$ est soit surjective vers $\{1;2;\dots;p\}$ (il y a pour cela $S_{n-1,p}$ possibilités), soit elle prend toutes les valeurs sauf $f(n)$ (il y a pour cela $S_{n-1,p-1}$ possibilités). Cela nous donne bien la relation de récurrence $S_{n,p} = p(S_{n-1,p} + S_{n-1,p-1})$.
2.

$S_{n,p}$	$p=0$	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$
$n=0$	0	0	0	0	0	0
$n=1$	0	1	0	0	0	0
$n=2$	0	1	2	0	0	0
$n=3$	0	1	6	6	0	0
$n=4$	0	1	14	36	24	0
$n=5$	0	1	30	150	240	120

3. Calculons séparément les membres de gauche et de droite : $\dbinom{p}{k}\dbinom{k}{j} = \dfrac{p!}{k!(p-k)!}\dfrac{k!}{j!(k-j)!} = \dfrac{p!}{(p-k)!(k-j)!j!}$. De l'autre côté, $\dbinom{p}{j}\dbinom{p-j}{k-j} = \dfrac{p!}{j!(p-j)!}\dfrac{(p-j)!}{(k-j)!(p-k)!} = \dfrac{p!}{j!(k-j)!(p-k)!}$. Les deux membres sont bien égaux.
4. On a, en utilisant l'égalité précédente, $\displaystyle\sum_{k=q}^{k=p}(-1)^k\binom{p}{k}\binom{k}{q} = \sum_{k=q}^{k=p}(-1)^k\binom{p}{q}\binom{p-q}{k-q}$. Le premier coefficient binomial ne dépendant pas de k, on peut le sortir de la somme. On va par ailleurs effectuer le changement d'indice $j = k-q$ pour se ramener à $\displaystyle\binom{p}{q}\sum_{j=0}^{j=p-q}(-1)^{j+q}\binom{p-q}{j} = \binom{p}{q}\sum_{j=0}^{j=p-q}\binom{p-q}{j}1^j(-1)^{j+q}$. Comme $(-1)^{j+q} = (-1)^{j+q-2j} = (-1)^{q-j}$, on peut reconnaitre dans la somme une formule du binome de Newton égale à $(1-1)^{p-q} = 0$, d'où la nullité de la somme initiale.
5. Il faut choisir les j valeurs qui seront prises par notre application (il y a pour cela $\dbinom{p}{j}$ choix), et il reste ensuite à choisir une application surjective d'un ensemble à n éléments vers un ensemble à j éléments, ce pour quoi on a par définition $S_{n,j}$ possibilités. Les applications prenant exactement j valeurs sont donc au nombre de $\dbinom{p}{j}S_{n,j}$.
6. Il y a au total p^n applications de $\{1;2;\dots;n\}$ vers $\{1;2;\dots;p\}$, et chacune d'elle prend un nombre de valeurs compris entre 1 et p. En sommant les expressions obtenues à la question précédente pour j variant de 1 à p, on obtiendra donc p^n (on ne compte manifestement pas deux fois une même application).
7. Tentons donc de calculer la somme de droite, en inversant la somme double qui apparait dès que possible :

$$(-1)^p\sum_{k=0}^{k=p}(-1)^k\binom{p}{k}k^n = (-1)^p\sum_{k=0}^{k=p}(-1)^k\binom{p}{k}\sum_{j=1}^{j=k}\binom{k}{j}S_{n,j} = (-1)^p\sum_{j=1}^{j=p}S_{n,j}\sum_{k=j}^{k=p}(-1)^k\binom{p}{k}\binom{k}{j}$$

La somme de droite est justement celle dont on a montré qu'elle était nulle pour toutes les valeurs de j inférieures ou égales à $p-1$. Le seul terme restant est donc $(-1)^p S_{n,p} \sum_{k=p}^{k=p} (-1)^k \binom{p}{k}\binom{k}{p} = (-1)^{2p} S_{n,p} = S_{n,p}$. L'égalité demandée est donc prouvée.

Devoir Surveillé n°5

ECE3 Lycée Carnot

10 février 2010

Durée : 4H. Calculatrices interdites.

Problème 1 (d'après EDHEC 2004)

Pour tout entier naturel n, on définit sur $\mathbb{R}$ une fonction f_n par $f_n(x) = xe^{-\frac{n}{x}}$ si $x \neq 0$, et $f_n(0) = 0$. On désigne par $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n.

1. Montrer que f_n est continue à droite en 0, et dérivable à droite en 0.
2. Étudier les variations de f_n, ainsi que ses limites en $+\infty$, $-\infty$ et 0^+, et dresser son tableau de variations.
3. Étudier les branches infinies de la fonction f_n (on pourra utiliser l'équivalent classique $e^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x$).
4. Étudier la convexité de la fonction f_n.
5. Tracer dans un même repère une allure des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
6. (a) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel u_n tel que $f_n(u_n) = 1$.
   (b) Montrer que, $\forall n \geqslant 1$, $u_n > 1$, et u_n est solution de l'équation $x \ln x = n$.
   (c) Étudier la fonction g définie par $g(x) = x \ln x$, et en déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
   (d) Montrer que $\ln u_n + \ln(\ln u_n) = \ln n$, et en déduire un équivalent simple pour u_n.
7. Dans cette question, on ne s'intéresse plus qu'à la fonction $f_1 : x \mapsto xe^{-x}$ (toujours prolongée par $f_1(0) = 0$). On définit par ailleurs une suite (v_n) par $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = f_1(v_n)$.
   (a) Déterminer le signe de $f_1(x) - x$ et les éventuels points fixes de f_1 sur $[0; +\infty[$.
   (b) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \in [0; 1]$.
   (c) Étudier la monotonie de la suite (v_n).
   (d) En déduire que (v_n) converge et préciser sa limite.

Problème 2 (d'après ESSEC 2002)

Le but de ce problème est d'étudier numériquement les solutions d'équations du type $x^n + x^{n-1} + \cdots + x = a$.

1. **Résolution numérique de l'équation** $x^2 + x - 1 = 0$.
   On considère dans cette question la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.
   (a) Montrer que l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ a une seule racine dans l'intervalle $]0;1[$ et préciser la valeur de cette racine, qu'on notera désormais r_2.
   (b) Montrer que, $\forall x \in \left[\dfrac{1}{2};1\right]$, $f(x) \in \left[\dfrac{1}{2};1\right]$.
   (c) Calculer la dérivée f' de f et prouver que, $\forall x \in \left[\dfrac{1}{2};1\right]$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{4}{9}$.
   (d) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Écrire un programme PASCAL calculant la valeur de u_n pour un entier n choisi par l'utilisateur.
   (e) Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\dfrac{1}{2};1\right]$.
   (f) Prouver que r_2 est un point fixe de la fonction f.
   (g) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - r_2| \leqslant \left(\dfrac{4}{9}\right)^n$, et en déduire la convergence de la suite (u_n) vers r_2.
   (h) Soit ε un réel strictement positif. Déterminer un entier n pour lequel $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$. Écrire un programme PASCAL déterminant une valeur approchée de r_2 à ε près (ε choisi par l'utilisateur).

2. **Résolution numérique de l'équation** $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$.
   On considère désormais la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$.
   (a) Montrer que l'équation $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ a une unique solution r_3 appartenant à $]0;1[$.
   (b) Montrer que l'intervalle $\left[\dfrac{1}{3};1\right]$ est stable par g.
   (c) Calculer les dérivées g' et g'' et déterminer le maximum de $|g'(x)|$ sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{3};1\right]$.
   (d) On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = g(v_n)$. Majorer $|v_n - r_3|$ en fonction de n, et prouver la convergence de (v_n) vers r_3.

3. **Racine positive de l'équation** $x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x - a = 0$.
   On désigne désormais par a un réel strictement positif, et on note, pour tout entier $n \geqslant 2$, h_n la fonction définie par $h_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x - a$.
   (a) Montrer que sur l'intervalle $]0;+\infty[$, l'équation $h_n(x) = 0$ possède une unique racine qu'on notera t_n, puis que $t_n \in]0;1[$ si $n > a$.
   (b) Montrer que $(x-1)h_n(x) = x^{n+1} - (a+1)x + a$.
   (c) Montrer que $h_{n+1}(t_n) > h_n(t_n)$, et en déduire que la suite (t_n) est strictement décroissante, puis qu'elle converge vers une limite qu'on notera désormais α.
   (d) Montrer que, si $A \in \mathbb{N}$, on aura $0 < t_n^n \leqslant t_A^n$ si $n \geqslant A$. En déduire, en choisissant $A > a$, que $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n^n = 0$.
   (e) Exprimer la limite α en fonction de a.

Corrigé du DS5

Problème 1

1. Il suffit de prouver que $\lim\limits_{x \to 0^+} xe^{-\frac{n}{x}} = 0$, ce qui ne pose pas de problème puisque $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{-\frac{n}{x}} = -\infty$. Le seul cas très particulier se produit quand $n = 0$, où on a $f_0(x) = x$, qui a également pour limite 0 en 0. Pour la dérivabilité, commençons par préciser que f_n est dérivable et C^1 sur $]0; +\infty[$, de dérivée $f_n'(x) = e^{-\frac{n}{x}} + x \times \dfrac{n}{x^2} e^{-\frac{n}{x}} = \left(1 + \dfrac{n}{x}\right) e^{-\frac{n}{x}}$. Cette dérivée a pour limite 0 en 0 si $n \geqslant 1$ en utlisant la croissance comparée, et 1 si $n = 0$. Dans les deux cas, le théorème de prolongement C^1 permet de prouver la dérivabilité de f_n en 0.

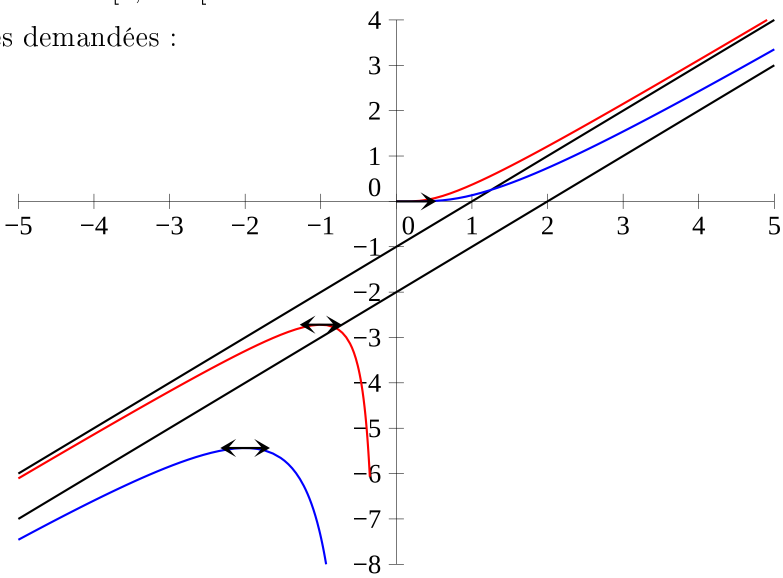
2. D'après le calcul de dérivée de la question précédente, la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Sur $] - \infty; 0[$, la dérivée s'annule pour $x = -n$, valeur qui représente un maximum local pour la fonction f_n, de valeur $f_n(-n) = -ne$. Les limites de f_n en $+\infty$ et $-\infty$ sont respectivement égales à $+\infty$ et $-\infty$ puisque $\lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{-\frac{n}{x}} = 1$. Enfin, en 0^-, en posant $X = -\dfrac{1}{x}$, on a $f(x) = -\dfrac{e^{nX}}{X}$, avec X qui tend vers $+\infty$, donc par croissance comparée $\lim\limits_{x \to 0^-} f_n(x) = -\infty$ (encore une fois, cas particulier si $n = 0$, la limite vaut alors 0). D'où le tableau pour $n \geqslant 1$:

x	$-\infty$		$-n$		0		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	$-ne$	$\searrow$	$-\infty$ || 0	$\nearrow$	$+\infty$

3. On a déjà signalé les limites infinies en $\pm\infty$. De plus, $\dfrac{f_n(x)}{x} = e^{-\frac{n}{x}}$ a pour limite 1 en $\pm\infty$. Reste donc à calculer $f(x) - x = x(e^{-\frac{n}{x}} - 1)$. Comme $\lim\limits_{x \to \pm\infty} -\dfrac{n}{x} = 0$, on peut utiliser l'équivalent classique de l'exponentielle en 0, ce qui donne $f_n(x) - x \underset{\pm\infty}{\sim} x \times \dfrac{-n}{x} = -n$. Autrement dit, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - x = -n$, et la courbe $\mathcal{C}_n$ admet donc une asymptote oblique d'équation $y = x - n$ en $+\infty$ comme en $-\infty$.

4. Calculons donc la dérivée seconde de f_n : $f_n''(x) = \left(-\dfrac{n}{x^2} + \left(1 + \dfrac{n}{x}\right) \times \dfrac{n}{x^2}\right) e^{-\frac{n}{x}} = \dfrac{n}{x^3} e^{-\frac{n}{x}}$. Cette dérivée seconde est du signe de x^3, donc de x, ce qui signifie que f est concave sur $] - \infty; 0[$ et convexe sur $[0; +\infty[$.

5. Voici les courbes demandées :



6. (a) Sur $]-\infty;0[$, la fonction f_n admet un miminum qui est négatif, l'équation $f_n(x)=1$ ne peut donc avoir de solution négative. Sur $\mathbb{R}_+$, la fonction f_n est strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même, donc l'équation $f_n(x)=1$ admet une unique solution positive.

   (b) Calculons $f_n(1)=e^{-n}$. Si $n\geqslant 1$, $-n<0$, donc $e^{-n}<1$ et par croissance de la fonction f_n, $1<u_n$. De plus, comme u_n est solution de l'équation $xe^{-\frac{x}{n}}=1$, un simple passage au ln montrer que u_n est également solution de l'équation $\ln x-\dfrac{n}{x}=0$, soit $x\ln x-n=0$, donc $x\ln x=n$.

   (c) La fonction g est définie et C^∞ sur $]0;+\infty[$, de dérivée $g'(x)=\ln x+1$. Elle est donc décroissante sur $\left]0;\dfrac{1}{e}\right]$ et croissante sur $\left[\dfrac{1}{e};+\infty\right[$, avec pour limite 0 en 0 (limite classique) et $+\infty$ en $+\infty$, et pour minumum $f\left(\dfrac{1}{e}\right)=-\dfrac{1}{e}$. La fonction g est notamment bijective de $\left[\dfrac{1}{e};+\infty\right[$ dans $\left[-\dfrac{1}{e};+\infty\right[$, de réciproque g^{-1} strictement croissante et vérifiant $\lim\limits_{x\to+\infty}g^{-1}(x)=+\infty$. Comme $u_n=g^{-1}(n)$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

   (d) Il suffit d'appliquer un nouveau coup de ln à l'équation obtenue à la question b (on peut le faire si $n\geqslant 1$ puisque $u_n>1$) pour obtenir $\ln u_n+\ln(\ln u_n)=\ln n$. Comme u_n tend vers $+\infty$, $\ln(\ln u_n)=o(\ln u_n)$, et $\ln u_n\sim\ln n$. Or, on a $u_n=\dfrac{n}{\ln u_n}$, on peut donc en déduire que $u_n\sim\dfrac{n}{\ln n}$.

7. (a) On a vu plus haut que $f_1(x)-x=x(e^{-x}-1)$. Si $x\geqslant 0$, $e^{-x}\leqslant 1$, donc $f_1(x)-x\leqslant 0$, avec égalité seulement si $x=0$. Autrement dit, 0 est le seul point fixe de f_1 sur $\mathbb{R}_+$, et $\mathcal{C}_1$ est toujours située sous la droite d'équation $y=x$.

   (b) La fonction f_1 est croissante sur $[0;1]$, $f_1(0)=0$ et $f_1(1)=\dfrac{1}{e}-1<1$, donc $[0;1]$ est un intervalle stable par f_1. Prouvons par récurrence la propriété P_n : $v_n\in[0;1]$. C'est vrai pour v_0 puisque $v_0=1$. Supposons $v_n\in[0;1]$ alors d'après le calcul précédent $f(v_n)\in[0;1]$, c'est-à-dire que $v_{n+1}\in[0;1]$, ce qui achève la récurrence.

   (c) Comme $f(x)-x\leqslant 0$ sur $[0;1]$, on aura $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1}-v_n=f(v_n)-v_n\leqslant 0$, ce qui prouve la décroissance de la suite (v_n).

   (d) La suite (v_n) est décroissante et minorée par 0, elle converge donc. Comme sa limite doit être un point fixe de la fonction f_1, ce ne peut être que 0, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$.

Problème 2

1. (a) C'est une équation du second degré, qu'on sait très bien résoudre : $\Delta=1+4=5$, $x_1=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$. La deuxième solution est manifestement négative, quant à la première, on peut l'encadrer en partant de $4<5<9\Rightarrow 2<\sqrt{5}<3$, donc $\dfrac{1}{2}<x_1<1$. il y a donc bien une solution unique à l'équation sur l'intervalle $]0;1[$.

   (b) Si $\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$, on a $\dfrac{3}{2}\leqslant x+1\leqslant 2$, donc $\dfrac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{2}{3}$. Comme $\dfrac{2}{3}<1$, on a a fortiori $\dfrac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant 1$.

   (c) La fonction f est bien sûr dérivable sur son ensemble de définition, et $f'(x)=-\dfrac{1}{(x+1)^2}$. En reprenant la question précédente, si $\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$, on a $\dfrac{1}{2}\leqslant\dfrac{1}{x+1}\leqslant\dfrac{2}{3}$, donc en élevant au carré (tout est positif), $\dfrac{1}{4}\leqslant\dfrac{1}{(x+1)^2}\leqslant\dfrac{4}{9}$, soit $\dfrac{1}{2}\leqslant|f'(x)|\leqslant\dfrac{4}{9}$.

(d)
```
PROGRAM facile;
USES wincrt;
VAR u : real; i,n : integer;
BEGIN
WriteLn('Choisissez la valeur de n');
ReadLn(n);
u := 1;
FOR i := 1 TO n DO u := 1/(u+1);
WriteLn(u);
END.
```

(e) C'est une récurrence assez facile : $u_0 = 1$ appartient bien à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Supposons désormais que $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$, on a d'après la question b $\frac{1}{2} \leqslant f(u_n) \leqslant 1$, soit $\frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$, ce qui achève la récurrence.

(f) On sait que r_2 vérifie $r_2^2 + r_2 - 1 = 0$, soit $r_2(r_2+1) = 1$, donc $r_2 = \dfrac{1}{r_2+1}$ ou encore $f(r_2) = r_2$.

(g) Commençons par appliquer l'IAF à $x = u_n$ et $y = r_2$, qui appartiennent tous deux à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ (cf questions précédentes), sur lequel on a vu que $|f'(x)| \leqslant \frac{4}{9}$. On peut donc affirmer que $|f(u_n) - r_2| \leqslant \frac{4}{9}|u_n - r_2|$, soit $|u_{n+1} - r_2| \leqslant \frac{4}{9}|u_n - r_2|$.
Montrons désormais par récurrence la propriété P_n : $|u_n - r_2| \leqslant \left(\frac{4}{9}\right)^n$. Pour $n = 0$, $|u_0 - r_2| = |1 - r_2| \leqslant 1$ car $r_2 \in]0; 1[$, ce qui prouve P_0. Si on suppose P_n vérifiée, on peut faire le calcul suivant en utilisant successivement le résultat précédent et l'hypothèse de récurrence : $|u_{n+1} - r_2| \leqslant \frac{4}{9}|u_n - r_2| \leqslant \frac{4}{9} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n \leqslant \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}$. Cette dernière inégalité prouve P_{n+1} et achève donc la récurrence.
Comme $\frac{4}{9} < 1$, la suite $\left(\frac{4}{9}\right)^n$ converge vers 0, et le théorème des gendarmes nous permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - r_2| = 0$, c'est-à-dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = r_2$.

(h) On sait que $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$ si $\left(\frac{4}{9}\right)^n \leqslant \varepsilon$, soit en passant au ln, $n \ln \frac{4}{9} \leqslant \ln \varepsilon$, ou encore $n \geqslant \dfrac{\ln \varepsilon}{\ln 4 - \ln 9}$ (on change le sens de l'inégalité puisque $\ln \frac{4}{9}$ est négatif). Un programme possible est le suivant :

```
PROGRAM moinsfacile;
USES wincrt;
VAR u,e,a : real;
BEGIN
WriteLn('Choisissez une valeur positive pour epsilon');
ReadLn(e);
u := 1; a := 1;
REPEAT
u := 1/(u+1);
a := 4*a/9;
UNTIL a < e;
WriteLn('Une valeur approchée de r2 à ',e,' près est ',u);
END.
```

2. (a) Cette fois-ci, on ne sait pas résoudre l'équation, il faut donc étudier un peu le polynome $x^3 + x^2 + x - 1$. Sa dérivée est $3x^2 + 2x + 1$, qui a un discriminant négatif et est donc toujours positive. La fonction $x \mapsto x^3 + x^2 + x - 1$ est donc strictement croissante et bijective sur $\mathbb{R}$. Comme elle prend la valeur -1 pour $x = 0$ et la valeur 2 pour $x = 1$, on en déduit qu'elle s'annule entre 0 et 1. L'équation proposée a donc une unique solution (àa cause de la bijectivité) qui appartient à l'intervalle $]0;1[$.

   (b) Le trinome $x^2 + x + 1$ étant strictement croissant sur $\mathbb{R}_+$, on aura, si $\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 1$, $f(1^\circ \leqslant f(x) \leqslant f\left(\frac{1}{3}\right)$. Comme $f(1) = \frac{1}{3}$ et $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{\frac{1}{9} + \frac{1}{3} + 1} < 1$, on aura bien $\frac{1}{3} \leqslant f(x) \leqslant 1$, donc l'intervalle est stable.

   (c) La fonction g est C^∞ sur $\mathbb{R}$ (son dénominateur ayant un discriminant négatif, il ne s'annule jamais), et $g'(x) = -\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$; et en dérivant g' comme un produit,
$g''(x) = -\frac{2}{(x^2+x+1)^2} - (2x+1) \times \frac{-2(2x+1)}{(x^2+x+1)^3} = \frac{2(2x+1)^2 - 2(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)^3}$
$= \frac{8x^2 + 8x + 2 - 2x^2 - 2x - 2}{(x^2+x+1)^3} = \frac{6x(x+1)}{(x^2+x+1)^2}$. Cette dérivée seconde étant toujours positive sur $\left[\frac{1}{3};1\right]$, la dérivée g' y est strictement croissante. Comme $g'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{2}{3}+1}{(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+1)^2} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{169}{81}} = \frac{135}{169}$ et $g'(1) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, on peut en déduire que $\forall x \in \left[\frac{1}{3};1\right]$, $|g'(x)| \leqslant \frac{135}{169}$.

   (d) On aimerait appliquer l'IAF à $x = r_3$ et $y = v_n$ en utilisant la majoration de $|f'(x)|$ obtenue à la question précente. Il faut pour cela vérifier que v_n est toujours dans cet intervalle, ce qui se fait en utilisant la stabilité de l'intervalle par une récurrence identique à celle de la question 1.f ; et que $r_3 \in \left[\frac{1}{3};1\right]$ et est un point fixe de g. Comme $\frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3} - 1 = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3} - 1 = -\frac{14}{27} < 0$, on a effectivement $r_2 \geqslant \frac{1}{3}$ (cf étude de la question a). De plus, $r_3^3 + r_3^2 + r_3 - 1 = 0 \Rightarrow r_3(r_3^2 + r_3 + 1) = 1 \Rightarrow r_3 = f(r_3)$, donc r_3 est un point fixe de f. On peut donc bien appliquer l'IAF pour obtenir $|f(v_n) - f(r_3)| \leqslant \frac{135}{169}|v_n - r_3|$, soit $|v_{n+1} - r_3| \leqslant \frac{135}{169}|v_n - r_3|$.

   On fait ensuite notre petite récurrence classique pour prouver que $|u_n - r_3| \leqslant \left(\frac{135}{169}\right)^n$ (comme dans la question 1.g, on majore $|v_0 - r_3|$ par 1 en utilisant que $\frac{1}{3} \leqslant r_3 \leqslant 1$, et le reste de la récurrence est identique en remplaçant les $\frac{4}{9}$ par des $\frac{135}{169}$).

   La conclusion est également la même : $\frac{135}{169} < 1$ donc le membre de droite de notre inégalité tend vers 0, et en appliquant le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} |v_n - r_3| = 0$, c'est-à-dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = r_3$.

3. (a) La fonction h_n est C^∞ sur $\mathbb{R}_+$, de dérivée $h_n'(x) = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \cdots + 2x + 1$. La fonction h_n étant stricement croissante sur $\mathbb{R}_+$, elle y est bijective. Comme $h_n(0) = -a < 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n(x) = +\infty$, on en déduit que l'équation $h_n(x) = 0$ a bien une solution (unique par bijectivité) sur $[0;+\infty[$. De plus, on a $h_n(1) = n - a$, donc $h_n(1) > 0$ si $n > a$. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, h_n s'annule alors sur l'intervalle $]0;1[$ et $t_n \in]0;1[$.

   (b) C'est un simple calcul : $(x-1)h_n(x) = (x-1)(x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x - a) = x^{n+1} + x^n + \cdots + x^3 + x^2 - ax - x^n - x^{n-1} - \cdots - x^2 - x + a = x^{n+1} - ax - x + a = x^{n+1} - (a+1)x + a$.

(c) Notons que $h_{n+1}(x) = x^{n+1} + h_n(x)$. Comme $h_n(t_n) = 0$ (par définition), on a donc $h_{n+1}(t_n) = t_n^{n+1} > 0$, donc $h_{n+1}(t_n) > h_n(t_n)$. Comme par ailleurs on a aussi, toujours par définition, $h_{n+1}(t_{n+1}) = 0$, on en déduit que $h_{n+1}(t_n) > h_{n+1}(t_{n+1})$. La fonction h_{n+1} étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, cela implique $t_n > t_{n+1}$, et la suite (t_n) est donc strictement décroissante. Étant minorée par 0, elle est donc convergente.

(d) On vient de voir que la suite (t_n) était décroissante, donc $\forall A \geqslant n$, $0 < t_n \leqslant t_A$, et comme t_n et t_A sont tous deux strictement inférieurs à 1, $0 < t_n^n \leqslant t_A^n$. Fixons donc $A \geqslant a$ (de façon à ce que t_A soit une constante). Comme $t_A < 1$ dans ce cas, $\lim\limits_{n \to +\infty} t_A^n = 0$. En appliquant le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n^n = 0$.

(e) En reprenant la relation obtenue à la question b et en l'appliquant pour $x = t_n$, on obtient $0 = t_n^{n+1} - (a+1)t_n + a$, soit $(a+1)t_n - a = t_n \times t_n^n$. Le membre de droite convergeant vers 0 d'après la question précédente, on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (a+1)t_n - a = 0$, soit $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = \dfrac{a}{a+1}$.

Devoir Surveillé n°6

ECE3 Lycée Carnot

11 mars 2010

Durée : 2H. Calculatrices interdites.

Exercice 1 (d'après EM Lyon 2003)

On considère dans cet exercice les matrices carrées réelles d'ordre trois suivantes : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3, puis vérifier que $A^3 = A^2 + 2A$.
2. Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, il existe un couple unique (a_n, b_n) de réels tel que $A^n = a_nA + b_nA^2$, et exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
3. Écrire un programme en Turbo-Pascal qui calcule et affiche a_n et b_n pour un entier n choisi par l'utilisateur.
4. Montrer que, $\forall n \geqslant 1$, $b_{n+2} = b_{n+1} + 2b_n$.
5. En déduire a_n et b_n en fonction de n.
6. Donner l'expression de A^n en fonction de A, A^2 et n. Écrire explicitement la matrice A^8.
7. Déterminer l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $AM = MA$ (question indépendante du reste de l'exercice).

Exercice 2

On considère une suite infinie de lancers de pièce équilibrée à Pile ou Face. On note P_n et F_n les événements : « On obtient Pile (respectivement Face) au n-ème lancer ».

Deux joueurs A et B jouent au jeu suivant : A gagne si la séquence PPF apparait avant la séquence FPP lors de cette suite de tirages ; B gagne si la séquence FPP apparait avant la séquence PPF (si aucune des deux séquences n'apparait dans la suite de tirages, il y a match nul).

Première partie

On note A_n l'événement « Le joueur A gagne à l'issue du n-ème lancer (et personne ne gagne avant) » et a_n sa probabilité. De même, on note B_n et b_n pour le cas où c'est le joueur B qui gagne après le $n$ème lancer.

1. Calculez a_3 et a_4.
2. Dans le cas général ($n \geqslant 3$), explicitez tous les tirages pour lesquels A gagne au $n$ème lancer (il n'y en a pas beaucoup ...). En déduire que $P(A_n) = \dfrac{1}{2^n}$.
3. En déduire la probabilité de l'événement A : « Le joueur A gagne la partie ».
4. On admet que la probabilité que personne ne gagne est nulle (cf troisième partie). Quelle est la probabilité que B gagne ? Conclusion ?

Deuxième partie

On note dans cette partie D_n l'événement « On n'obtient jamais deux Piles consécutifs lors des n premiers lancers » et d_n sa probabilité.

1. Calculez d_1, d_2 et d_3 (pour d_3, un bête dénombrement suffira).
2. Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $D_{n+2} = (D_{n+2} \cap F_1) \cup (D_{n+2} \cap P_1 \cap F_2)$, et en déduire que $d_{n+2} = \dfrac{1}{2}d_{n+1} + \dfrac{1}{4}d_n$.
3. Montrer par récurrence que $\forall n \geqslant 1$, $d_n \leqslant \left(\dfrac{6}{7}\right)^n$ (on pourra faire une récurrence double et utiliser la relation précédente).
4. En déduire que la série de terme général d_n converge et une majoration de sa somme.
5. Montrez que, si on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} d_k$, on a $S_{n+2} = \dfrac{1}{2}S_{n+1} + \dfrac{1}{4}S_n + \dfrac{5}{4}$. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} d_k = 5$.

Troisième partie

On note C_n l'événement « Aucun des deux deux joueurs n'a gagné à l'issue du n-ème lancer » et T_n l'événement « Un des deux joueurs gagne à l'issue du $n$ème lancer (mais personne n'avait gagné avant) ».

1. Calculez les probabilités des événements T_1, T_2 et T_3.
2. Soit $n \geqslant 3$. Montrer que $P(C_n) = \dfrac{1}{2^n} + d_n$.
3. En déduire l'égalité $P(T_n) = \dfrac{1}{2^n} + d_{n-1} - d_n$.
4. Montrez que la série de terme général $P(T_n)$ converge, calculer sa somme et en déduire que l'événement « Aucun des deux joueurs ne gagne » est de probabilité nulle.

Corrigé du DS6

Exercice 1 (d'après EM Lyon 2003)

1. On calcule donc $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On vérifie sans difficulté que $A^2 + 2A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^3$.
2. Procédons par récurrence. C'est vrai pour $n = 1$, car $A = 1 \times A + 0 \times A^2$. On peut donc poser $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$. Supposons désormais que $A^n = a_n A + b_n A^2$, alors $A^{n+1} = A \times A^n = A(a_n A + b_n A^2) = a_n A^2 + b_n A^3$. En utilisant la relation obtenue à la question précédente, on a donc $A^{n+1} = a_n A^2 + b_n(A^2 + 2A) = 2b_n A + (a_n + b_n)A^2$. La matrice A^{n+1} est donc de la forme souhaitée, en posant $a_{n+1} = 2b_n$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$, ce qui achève la récurrence.
3.
```
PROGRAM suites ;
USES wincrt ;
VAR a,b,t : real ; i,n : integer ;
BEGIN
WriteLn('Choisissez la valeur de n') ;
ReadLn(n) ;
a := 1 ; b := 0 ;
FOR i := 2 TO n DO
BEGIN
t := a ;
a := 2*b ;
b := t+b ;
END ;
WriteLn('a',n,'=',a,' et b',n,'=',b) ;
END.
```
4. En utilisant les relations de récurrence obtenues à la question 2, on a $b_{n+2} = a_{n+1} + b_{n+1} = 2b_n + b_{n+1}$.
5. La suite (b_n) est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristiques $x^2 - x - 2 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 1+8 = 9$, et pour racines $r = \frac{1-3}{2} = -1$, et $s = \frac{1+3}{2} = 2$. On a donc $b_n = \alpha(-1)^n + \beta \times 2^n$. Comme par ailleurs $b_1 = 0$, et $b_2 = 1$ (puisque $A^2 = 1 \times A^2 + 0 \times A$), on en déduit que $-\alpha + 2\beta = 0$, soit $\alpha = 2\beta$; et $\alpha + 4\beta = 1$, soit $6\beta = 1$, donc $\beta = \frac{1}{6}$, puis $\alpha = \frac{1}{3}$, et enfin $b_n = \frac{(-1)^n}{3} + \frac{2^n}{6} = \frac{2^{n-1} + (-1)^n}{3}$. On a ensuite $a_n = 2b_{n-1} = \frac{2^{n-1} + 2(-1)^{n-1}}{3}$.
6. Finalement, on a $A^n = \frac{2^{n-1} + (-1)^n}{3} A^2 + \frac{2^{n-1} + 2(-1)^{n-1}}{3} A$. Pour $n = 8$, on a donc $A^8 = \frac{2^7 + 1}{3} A^2 + \frac{2^7 - 2}{3} A = \frac{129}{3} A^2 + \frac{126}{3} A = 43A^2 + 42A = \begin{pmatrix} 171 & 85 & 85 \\ 85 & 43 & 43 \\ 85 & 43 & 43 \end{pmatrix}$.
7. Posons $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. On a $AM = \begin{pmatrix} a+d+g & b+e+h & c+f+i \\ a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}$ et $MA = \begin{pmatrix} a+b+c & a & a \\ d+e+f & d & d \\ g+h+i & g & g \end{pmatrix}$. Pour que les deux matrices soient égales, on doit avoir en observant les

quatre coeffcicients en bas à droite $b = c = d = g$. Puis, en prenant le coefficient en haut à gauche, on obtient $a+d+g = a+b+c$, ce qui est toujours vrai d'après les égalités précédentes. Enfin, les quatre derniers coefficients donnent : $a = b+e+h = c+f+i = d+e+f = g+h+i$. En remplaçant c, d et g par b, on a donc $a = b+e+h = b+f+i = b+e+f = b+h+i$, soit encore $a-b = e+h = f+i = e+f = h+i$. Comme $e+h = e+f$, alors $f = h$, puis $e+h = f+i$ donne $e = i$. Toutes les égalités se réduisent alors à $a-b = e+f$, soit $a = b+e+f$. Finalement, les matrices convenant sont de la forme $M = \begin{pmatrix} b+e+f & b & b \\ b & e & f \\ b & f & e \end{pmatrix}$, avec $b, e, f \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 2

Première partie

1. On a $a_3 = \dfrac{1}{8}$ (un seul tirage gagnant sur les 8 possibles : PPF). Pour que A_4 se réalise, il faut que les trois derniers tirages soient PPF, mais le premier tirage ne peut être Face, sinon le joueur B aurait gagné au troisième tour. Il ne reste donc que la possibilité $PPPF$, soit $a_4 = \dfrac{1}{16}$.
2. Dans le cas général, il faut toujours finir par PPF, et on ne peut pas avoir de Face précédant ces deux Pile sinon le joueur B aurait gagné à un des tirages précédents. Il n'y a donc que le tirage $P\dots PPF$ qui fasse gagner le joueur A, soit une probabilité de $\dfrac{1}{2^n}$.
3. Il suffit d'additionner les probabilités de tous les événements A_n : $P(A) = \displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 2 - \frac{7}{4} = \frac{1}{4}$.
4. La probabilité d'un match nul étant nulle, il reste une probabilité $\dfrac{3}{4}$ que ce soit B qui gagne. Conclusion, il vaut largement mieux être dans la peau du joueur B (bien qu'on puisse penser au premier abord que PPF et FPP sont plus ou moins équivalents).

Deuxième partie

1. On a clairement $d_1 = 1$ puisqu'on ne risque pas d'obtenir deux Pile de suite après un seul tirage. Après deux tirages, une seule possibilité sur les quatre amène une succesion de deux Pile, donc $d_2 = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$. Enfin, après trois tirages, trois possibilités sur 8 vont donner deux Pile (ce sont les tirages PPP, PPF et FPP), donc $d_3 = 1 - \dfrac{3}{8} = \dfrac{5}{8}$.
2. Les événements F_1, $P_1 \cap F_2$ et $P_1 \cap P_2$ forment un système complet d'événements (ils sont disjoints et on est bien obligé de commencer par F, par PF ou par PP), donc $D_{n+2} = D_{n+2} \cap F_1 \cup D_{n+2} \cap P_1 \cap F_2 \cup D_{n+2} \cap P_1 \cap P_2$. Or, ce dernier ensemble est vide puisque $P_1 \cap P_2$ est incompatible avec D_{n+2} par définition. Il ne reste donc que l'union de deux ensembles annoncée. Or, $P(D_{n+2} \cap F_1) = \dfrac{1}{2} d_{n+1}$ (probabilité $\dfrac{1}{2}$ d'avoir Face au départ et ensuite il ne faut pas avoir Pile sur les $n+1$ lancers restants) et de même $P(D_{n+2} \cap P_1 \cap F_2) = \dfrac{1}{4} d_n$, d'où la formule de récurrence.
3. On a bien $d_1 = 1 \leqslant \left(\dfrac{6}{7}\right)^0$ et $d_2 = \dfrac{3}{4} \leqslant \left(\dfrac{6}{7}\right)^1$. Supposons que $d_{n+1} \leqslant \left(\dfrac{6}{7}\right)^n$ et $d_n \leqslant \left(\dfrac{6}{7}\right)^{n-1}$, on a alors d'après la question précédente $d_{n+2} \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{6}{7}\right)^n + \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{6}{7}\right)^{n-1} \leqslant \left(\dfrac{6}{7}\right)^{n-1}\left(\dfrac{1}{2} \times \dfrac{6}{7} + \dfrac{1}{4}\right)$.

Or, $\frac{1}{2}\times\frac{6}{7}+\frac{1}{4}=\frac{6}{14}+\frac{1}{4}=\frac{19}{28}=\frac{133}{196}$ et $\left(\frac{6}{7}\right)^2=\frac{36}{49}=\frac{144}{196}$. On a donc $d_{n+2}\leqslant\left(\frac{6}{7}\right)^2\left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}=\left(\frac{6}{7}\right)^{n+1}$, ce qui achève la récurrence.

4. La série a un terme général positif, et ses sommes partielles sont majorées par $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{6}{7}\right)^n$, qui converge (c'est une série géométrique) vers $\frac{1}{1-\frac{6}{7}}=7$. On en déduit la convergence de la série de terme général d_k, et de plus $\sum_{k=1}^{+\infty}d_k\leqslant 7$.

5. En sommant la relation de récurrence entre $k=1$ et $k=n$, on obtient $\sum_{k=1}^{n}d_{k+2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}d_{k+1}+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}d_k$, soit après changement d'indices $\sum_{k=3}^{n+2}d_k=\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n+1}d_k+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}d_k$. Attention, il manque des termes aux deux premières sommes pour faire apparaitre S_{n+2} et S_{n+1}. On a plus précisément $S_{n+2}-d_1-d_2=\frac{1}{2}(S_{n+1}-d_1)+\frac{1}{4}S_n$, soit $S_{n+2}-1-\frac{3}{4}=\frac{1}{2}S_{n+1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}S_n$, donc $S_{n+2}=\frac{1}{2}S_{n+1}+\frac{1}{4}S_n+\frac{5}{4}$. Comme la série converge, les trois suites S_n, S_{n+1} et S_{n+2} convergent vers la même limite S (somme de la série), donc en passant à la limite $S=\frac{1}{2}S+\frac{1}{4}S+\frac{5}{4}$, donc $\frac{1}{4}S=\frac{5}{4}$. On obtient bien $\sum_{k=1}^{+\infty}d_k=5$.

Troisième partie

1. On a bien sûr $P(T_1)=P(T_2)=0$, puisqu'il faut attendre au moins trois tirages pour que PPF ou FPP apparaisse. Quand à T_3, il est réalisé si un de ces tirages apparait, soit $P(T_3)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$.
2. Remarquons que si une série d'au moins deux Pile apparait, elle verra la victoire d'un des joueurs dès qu'elle est interrompue par un Face, que ce soit à sa gauche ou à sa droite. Pour qu'aucun joueur ne gagne, il faut donc, soit qu'il n'y ait pas de série de deux Piles (probabilité d_n), soit qu'il n'y ait que des Pile (probabilité $\frac{1}{2^n}$), d'où la formule.
3. On a $C_{n-1}=C_n\cup T_n$ (si personne n'a gagné après $n-1$ tirages, soit quelqu'un gagne juste après, soit non), et ces deux événements sont incompatibles, donc $P(C_{n-1})=P(C_n)+P(T_n)$ et $P(T_n)=P(C_{n-1})-P(C_n)=\frac{1}{2^{n-1}}+d_{n-1}-\frac{1}{2^n}-d_n=\frac{1}{2^n}+d_{n-1}-d_n$.
4. On a donc $\sum_{k=3}^{n}P(T_k)=d_2-d_n+\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{2^k}$ (il y a un télescopage sur les d_k). Comme $\lim_{n\to+\infty}d_n=0$ (puisque la série de terme général d_n converge) et comme la série de terme général $\frac{1}{2^k}$ converge (série géométrique), cette sommé partielle a une limite, qui vaut $d_2+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}+2-\frac{7}{4}=1$ (il manque les premiers termes de la somme de droite). Cette somme représente la probabilité qu'un des deux joueurs gagne. Il reste donc une probabilité nulle qu'il y ait match nul.

Devoir Surveillé n°7

ECE3 Lycée Carnot

6 avril 2010

Durée : 4H. Calculatrices interdites.

Exercice 1 (Ecricome 2005)

On considère, pour tout entier naturel n, l'application φ_n, définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi_n(x) = (1-x)^n e^{-2x}$, ainsi que l'intégrale : $I_n = \int_0^1 \varphi_n(x)dx$. On se propose de démontrer l'existence de trois réels, a, b, c tels que $I_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{\varepsilon(n)}{n^2}$, avec $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Déterminer le signe de I_n pour tout entier naturel n.
4. Qu'en déduit-on pour la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
5. Majorer la fonction $g : x \mapsto e^{-2x}$ sur $[0;1]$.
6. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.
7. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
8. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n$.
9. En déduire la limite de la suite $(nI_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
10. Déterminer la limite de la suite $(n(nI_n - 1))_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
11. Donner alors les valeurs de a, b, c.

Exercice 2 (d'après Ecricome Techno 2009)

On s'intéresse dans cet exercice à la fonction définie sur $[0;1[$ par $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$, et à l'intégrale $I = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)$. On cherche plus précisément à encadrer la valeur de cette intégrale, sans la calculer. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

1. Déterminer le sens de variation de f sur $[0;1[$, ainsi que $\lim_{x\to1^-} f(x)$.
2. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0.

3. Montrer que la droite d'équation $y = 2\left(\frac{2}{\sqrt{e}} - 1\right)x + 1$ passe par les points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 0 et $\frac{1}{2}$.
4. On admet que f est convexe sur $[0;1[$. En déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ et des deux droites introduites aux questions précédentes, et faire une représentation graphique rapide de f sur $[0;1[$ (on donne $\frac{2}{\sqrt{e}} \simeq 1.2$).
5. Montrer que $\frac{1}{2} \leqslant I \leqslant \frac{1}{\sqrt{e}}$.
6. Montrer que $\frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x}$. En déduire que $I = \int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)e^{-x}dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)dx$.
7. Calculer $\int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)e^{-x}dx$ à l'aide d'une intégration par parties.
8. En reprenant une méthode similaire à celle de la question 5, montrer que $\frac{1}{24} \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)dx \leqslant \frac{1}{12\sqrt{e}}$. En déduire un deuxième encadrement de I.
9. En utilisant les considérations géométriques de la question 4, montrer que $\frac{1}{2} \leqslant I \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} 2\left(\frac{2}{\sqrt{e}} - 1\right)x + 1\ dx$, et en déduire un troisième encadrement de I.

Exercice 3 (d'après BL 2008)

Soit X une variable aléatoire finie prenant ses valeurs dans $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$. on note $p_i = P(X = x_i)$ et on appelle entropie de X le réel défini par $H(X) = -\sum_{i=1}^{i=n} p_i \ln(p_i)$.

1. On suppose dans cette question que $X \sim \mathcal{U}_n$. Montrer que $H(X) = \ln n$ puis, après avoir rappelé la valeur de $V(X)$, vérifier que $H(X) = \frac{1}{2}\ln(12V(X) + 1)$.
2. On s'intéresse désormais à une variable B_p suivant une loi de Bernoulli de paramètre p, et on note f la fonction définie sur $]0;1[$ par $f(p) = H(B_p) - V(B_p)$. Montrer que $f(p) = -p\ln p + (p-1)(p + \ln(1-p))$.
3. Calculer les dérivées première et seconde f' et f'' de f.
4. Étudier les variations de f' et calculer $f'\left(\frac{1}{2}\right)$.
5. En déduire les variations de f.
6. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition, puis prouver qu'on a toujours $H(B_p) \geqslant V(B_p)$.

Problème (HEC Techno 99)

On dispose d'une urne contenant deux boules, l'une numérotée 1, l'autre 2. On effectue, dans cette urne, une succession de tirages au hasard d'une boule en notant le numéro obtenu, la boule tirée étant remise dans l'urne après chaque tirage. La suite aléatoire des numéros tirés fournit ainsi une suite (X_n) de variables aléatoires de même loi vérifiant : $P(X_n = 1) = P(X_n = 2) = \frac{1}{2}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$; S_n désigne donc la somme des numéros obtenus au cours des n premiers tirages. Un entier naturel N non nul étant donné, on considère la variable aléatoire T_N égale au rang n où, pour la première fois, on a $S_n > N$. Par exemple si $N = 5$ et si les premiers numéros tirés sont $2, 1, 2, 1, 1, \ldots$ alors T_5 prend la valeur 4. De même, toujours si $N = 5$, si les premiers numéros tirés sont $2, 2, 2, 1, 2, \ldots$ alors T_5 prend la valeur 3.

Première partie : Préliminaires

1. On considère la suite réelle (v_n) définie par $v_1 = \dfrac{5}{6}$, $v_2 = \dfrac{11}{12}$ et, $\forall n \geqslant 1$, $v_{n+2} = \dfrac{1}{2}(v_{n+1} + v_n)$.
   Montrer, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $v_n = \dfrac{8}{9} + \dfrac{1}{9}\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n$.
2. On considère la suite réelle (w_n) définie par $w_1 = \dfrac{3}{2}$, $w_2 = \dfrac{9}{4}$ et, $\forall n \geqslant 1$, $w_{n+2} = \dfrac{1}{2}(w_{n+1} + w_n) + 1$. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = w_n - \dfrac{2n}{3}$ vérifie les hypothèses de la question précédente et en déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de w_n en fonction de n.

Deuxième partie : Etude de la loi de T_N

1. **Exemples**
   (a) Donner les lois de T_1 et T_2 ainsi que leurs espérances et variances.
   (b) Montrer que les valeurs prises par T_5 sont 3, 4, 5, et 6, et calculer les valeurs des probabilités $P_{X_1=2}(T_5 = i)$ et $P_{X_1=1}(T_5 = i)$.
   (c) Déterminer la loi de T_5, calculer son espérance et sa variance.
   (d) Les évènements $X_1 = 1$ et $T_5 = 4$ sont-ils indépendants ? Interpréter la différence obtenue.
2. **Calcul de l'espérance de T_N**
   On revient au cas général où N désigne un entier naturel non nul.
   (a) i. Déterminer la plus petite et la plus grande valeur prises par T_N dans le cas où N est pair ($N = 2M$).
   ii. Déterminer la plus petite et la plus grande valeur prises par T_N dans le cas où N est impair ($N = 2M + 1$).
   (b) Soit k un entier naturel non nul. En distinguant deux cas selon le résultat du premier tirage, justifier l'égalité suivante :
   $$\mathbf{P}([T_{N+2} = k]) = \frac{1}{2}\mathbf{P}([T_{N+1} = k-1]) + \frac{1}{2}\mathbf{P}([T_N = k-1])$$
   (c) Prouver à l'aide de la relation précédente l'égalité : $\mathbf{E}(T_{N+2}) = \dfrac{1}{2}(\mathbf{E}(T_N) + \mathbf{E}(T_{N+1})) + 1$.
   (d) À l'aide des résultats de la première partie, montrer que, pour tout entier naturel N non nul, on a :
   $$\mathbf{E}(T_N) = \frac{6N+8}{9} + \frac{1}{9}\left(\frac{-1}{2}\right)^N$$
   Quelle est la limite de la suite de terme général $\dfrac{\mathbf{E}(T_N)}{N}$?
   Pour quelle raison ce résultat était-il prévisible ?
3. **La loi de T_N**
   On désigne toujours par N un entier naturel non nul.
   (a) Pour tout entier naturel k non nul, justifier l'égalité : $\mathbf{P}([T_N > k]) = \mathbf{P}([S_k \leqslant N])$.
   On rappelle que $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.
   En déduire l'égalité : $\mathbf{P}([T_N > k]) = \mathbf{P}([Z_k \leqslant N - k])$ où Z_k est une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres k et $\dfrac{1}{2}$.

(b) Établir l'égalité : $\mathbf{P}\left([T_N > k]\right) = \dfrac{1}{2^k} \displaystyle\sum_{i=0}^{N-k} \binom{k}{i}$.

(c) Écrire explicitement (sous forme de tableau) la loi de T_{10}.

Corrigé du DS7

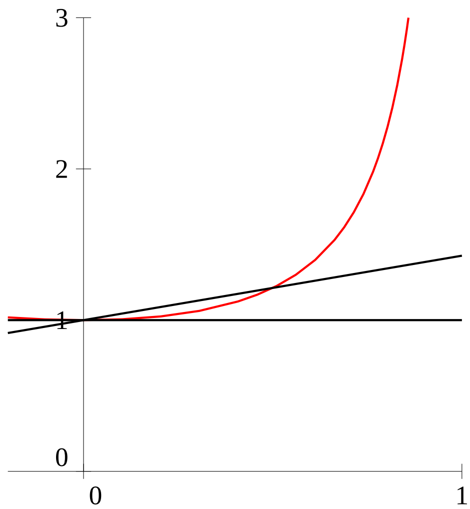
Exercice 1 (Ecricome 2005)

1. Pour I_0, c'est un calcul direct : $I_0 = \int_0^1 e^{-2x}dx = \left[\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^1 = \frac{e^{-2}-1}{-2} = \frac{1}{2} - \frac{e^{-2}}{2}$. Pour I_1, on peut procéder à une intégration par parties en posant $u(x) = 1 - x$; $v'(x) = e^{-2x}$, et donc $u'(x) = -1$ et $v(x) = \frac{e^{-2x}}{-2}$, ce qui donne $I_1 = \int_0^1 (1-x)e^{-2x} = \left[(1-x)\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{e^{-2x}}{-2}dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-2x}dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}I_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{e^{-2}}{4} = \frac{1+e^{-2}}{4}$.
2. Comme $1 - x \in [0;1]$ si $x \in [0;1]$, on aura $(1-x)^{n+1} \leqslant (1-x)^n$ sur l'intervalle d'intégration $[0;1]$, d'où $(1-x)^{n+1}e^{-2x} \leqslant (1-x)^n e^{-2x}$ et on en déduit en intégrant l'inégalité que $I_{n+1} \leqslant I_n$. La suite (I_n) est donc décroissante.
3. La fonction intégrée étant positive, $I_n \geqslant 0$.
4. La suite est décroissante et minorée par 0, elle converge donc.
5. La fonction g est décroissante sur $\mathbb{R}$ (et donc en particulier sur $[0;1]$), donc on peut majorer g sur $[0;1]$ par $g(0) = 1$.
6. Par intégration d'inégalités, on déduit du résultat précédent que $I_n \leqslant \int_0^1 (1-x)^n dx = \left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.
7. C'est une application évidente du théorème des gendarmes.
8. Posons donc $u(x) = (1-x)^{n+1}$ et $v'(x) = e^{-2x}$, ce qui donne $u'(x) = -(n+1)(1-x)^n$, et $v(x) = \frac{e^{-2x}}{-2}$, d'où $I_{n+1} = \left[(1-x)^{n+1}\frac{e^{-2x}}{-2x}\right]_0^1 - \int_0^1 -(n+1)(1-x)^n\frac{e^{-2x}}{-2}dx = 0 - \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{n+1}{2}\int_0^1 (1-x)^n e^{-2x}dx = \frac{1}{2} - \frac{n+1}{2}I_n$. L'égalité demandée en découle en multipliant tout par 2.
9. On peut réécrire le résultat précédent sous la forme $nIn = 1 - I_n - 2I_{n+1}$. En utilisant la convergence de (I_n) vers 0, le membre de droite de cette égalité tend vers 1, donc $\lim_{n\to+\infty} nI_n = 1$.
10. Toujours en reprenant l'égalité de la question 8, on a $nI_n - 1 = -I_n - 2I_{n+1}$, donc $n(nI_n - 1) = -nI_n - 2nI_{n+1} = -nI_n - 2(n+1)I_{n+1} + 2I_{n+1}$, et le membre de droite tend vers -3, en utilisant cette fois le résultat de la question 9.
11. Nous avons donc $n(nI_n - 1) = -3 + \varepsilon(n)$, avec $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0$. Ou encore $nI_n - 1 = -\frac{3}{n} + \frac{\varepsilon(n)}{n}$, puis $nI_n = 1 - \frac{3}{n} + \frac{\varepsilon(n)}{n}$, et enfin $I_n = \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{\varepsilon(n)}{n^2}$, dont on déduit que $a = 0$; $b = 1$ et $c = -3$.

Exercice 2 (d'après Ecricome Techno 2009)

1. La fonction f est dérivable sur $[0;1[$, de dérivée $f'(x) = \frac{-e^{-x}(1-x) + e^{-x}}{(1-x)^2} = \frac{xe^{-x}}{(1-x)^2}$. La fonction f est donc croissante sur $[0;1[$. De plus, $\lim_{x\to1^-} e^{-x} = \frac{1}{e}$ et $\lim_{x\to1^-} 1 - x = 0^+$, donc $\lim_{x\to1^-} f(x) = +\infty$.
2. Au vu du calcul de la question précédente, $f'(0) = 0$, et $f(0) = 1$, donc la tangente a pour équation $y = 1$.

3. Pour $x = 0$, on obtient $y = 1$, ce qui correspond à la valeur calculée ci-dessus. Pour $x = \frac{1}{2}$, on obtient $y = \frac{2}{\sqrt{e}} - 1 + 1 = \frac{2}{\sqrt{e}}$. Or, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{e}}$. La droite passe donc pas les deux points demandés.
4. Si la fonction est convexe, sa courbe est en-dessous de ses cordes et au-dessus de ses tangentes, donc $\mathcal{C}_f$ se situe au-dessus de la tangente calculée, et en-dessous de la droite de la question 3 (qui est une corde) sur $\left[0; \frac{1}{2}\right[$, puis au-dessus de cette même droite sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right[$. Cela donne l'allure suivante :



5. La fonction étant croissante, on a sur $f(0) \leqslant f(x) \leqslant f\left(\frac{1}{2}\right)$ sut $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, soit $1 \leqslant f(x) \leqslant \frac{2}{\sqrt{e}}$. Par intégration de cet encadrement sur un intervalle de largeur $\frac{1}{2}$, on obtient bien $\frac{1}{2} \leqslant I \leqslant \frac{1}{\sqrt{e}}$.
6. Petit calcul : $1 + x + \frac{x^2}{1-x} = \frac{(1+x)(1-x)+x^2}{1-x} = \frac{1-x^2+x^2}{1-x} = \frac{1}{1-x}$. On a donc $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x} = (1+x)e^{-x} + x^2\frac{e^{-x}}{1-x} = (1+x)e^{-x} + x^2 f(x)$, et l'égalité demandée est une simple application de la linéarité de l'intégrale.
7. On pose $u(x) = 1 + x$ et $v'(x) = e^{-x}$, soit $u'(x) = 1$ et $v(x) = -e^{-x}$ pour obtenir $\int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)e^{-x}dx = [-(1+x)e^{-x}]_0^{\frac{1}{2}} + \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x}dx = -\frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}} + 1 + [-e^{-x}]_0^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{3}{2\sqrt{e}} - e^{-\frac{1}{2}} + 1 = 2 - \frac{5}{2\sqrt{e}}$.
8. Réutilisons le fait que $1 \leqslant f(x) \leqslant \frac{2}{\sqrt{e}}$ pour obtenir $\int_0^{\frac{1}{2}} x^2dx \leqslant I \leqslant \frac{2}{\sqrt{e}}\int_0^{\frac{1}{2}} x^2dx$. Or, $\int_0^{\frac{1}{2}} x^2dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{24}$. L'encadrement souhaité en découle, et en reprenant le résultat de la question 6, on a alors $2 - \frac{5}{2\sqrt{e}} + \frac{1}{24} \leqslant I \leqslant 2 - \frac{5}{2\sqrt{e}} + \frac{1}{12\sqrt{e}}$, soit $\frac{49}{24} - \frac{5}{2\sqrt{e}} \leqslant I \leqslant 2 - \frac{29}{12\sqrt{e}}$.
9. La courbe $\mathcal{C}_f$ étant comprise entre la tangente et la droite de la question 4, on a $\int_0^{\frac{1}{2}} 1dx \leqslant I \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} 2\left(\frac{2}{\sqrt{e}} - 1\right)x + 1\, dx$. L'intégrale de gauche vaut $\frac{1}{2}$, celle de droite vaut $\left[\left(\frac{2}{\sqrt{e}} - 1\right)x^2 + x\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{e}} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\sqrt{e}}$.

Exercice 3 (d'après BL 2008)

1. Dans le cas d'une loi uniforme, on a simplement n probabilités p_i valant $\frac{1}{n}$ chacune, donc $H(X) = -\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} = -n \times \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} = \ln n$. Comme on sait par ailleurs que $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$, on a $12V(X)+1 = n^2$, donc $\frac{1}{2}\ln(12V(X)+1) = \frac{1}{2}\ln n^2 = \ln n = H(X)$.
2. Dans ce cas, on a deux probabilités valant respectivement p et $1-p$, donc $H(B_p) = -p\ln p - (1-p)\ln(1-p)$. De plus, on sait que $V(X) = p(1-p)$. On a donc $H(B_p) = -p\ln p - (1-p)\ln(1-p) - p(1-p) = -p\ln p + (p-1)(p+\ln(1-p))$.
3. Calculons donc : $f'(p) = -\ln p - 1 + p + \ln(1-p) + (p-1)\left(1 - \frac{1}{1-p}\right) = \ln(1-p) - \ln p + 2p - 1$, puis $f''(p) = -\frac{1}{1-p} - \frac{1}{p} + 2 = \frac{-p-(1-p)+2p(1-p)}{p(1-p)} = \frac{-1+2p-2p^2}{p(1-p)}$.
4. Le dénominateur est toujours positif, le numérateur a pour discriminant -4, il est toujours négatif, donc la fonction f' est décroissante sur $]0;1[$. De plus, $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 - 1 = 0$.
5. On déduit de la question précédente que f' est positive sur $\left]0;\frac{1}{2}\right]$ puis négative sur $\left[\frac{1}{2};1\right[$, donc f est croissante puis décroissante, admettant un maximum pour $p = \frac{1}{2}$.
6. Quand $p=0$, $p+\ln(1-p)=0$, et de plus $\lim_{p\to 0} p\ln p = 0$ (limite classique), donc $\lim_{p\to 0} f(p) = 0$. De même, $\lim_{p\to 1}(p-1)\ln(1-p) = 0$, et tous les autres termes sont nuls pour $p=1$, donc $\lim_{p\to 1} f(p) = 0$. Finalement, la fonction f ne prend que des valeurs positives, d'où $H(B_p) \geqslant V(B_p)$.

Problème (HEC Techno 99)

Première partie : Préliminaires

1. La suite (v_n) est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$, dont le discriminant vaut $\frac{1}{4}+2 = \frac{9}{4}$, et admettant pour racines $r = \frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{2} = 1$, et $s = \frac{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{2} = -1$. On peut donc écrire $v_n = \alpha + \beta\left(-\frac{1}{2}\right)^n$, les coefficients α et β vérifiant $\alpha - \frac{1}{2}\beta = \frac{5}{6}$ et $\alpha + \frac{1}{4}\beta = \frac{11}{12}$. Il suffit donc de constater que $\frac{8}{9} - \frac{1}{2}\times\frac{1}{9} = \frac{16-1}{18} = \frac{5}{6}$; et $\frac{8}{9} + \frac{1}{4\times 9} = \frac{33}{36} = \frac{11}{12}$.
2. Vérifions : $v_{n+2} = w_{n+2} - \frac{2(n+2)}{3} = \frac{1}{2}w_{n+1} + \frac{1}{2}w_n + 1 - \frac{2}{3}n - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}v_{n+1} + \frac{1}{2}\times\frac{2(n+1)}{3} + \frac{1}{2}v_n + \frac{1}{2}\times\frac{2n}{3} - \frac{2}{3}n - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}v_{n+1} + \frac{1}{2}v_n + \frac{1}{3}n + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}n - \frac{2}{3}n - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}v_{n+1} + \frac{1}{2}v_n$. De plus, $v_1 = \frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$ et $v_2 = \frac{9}{4} - \frac{4}{3} = \frac{11}{12}$. La suite (v_n) est donc bien celle étudiée précédemment, et $w_n = v_n + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}n + \frac{8}{9} + \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

Deuxième partie : Etude de la loi de T_N

1. **Exemples**
   (a) On a $T_1 = 1$ si on tire le 2 au premier tirage, et $T_1 = 2$ sinon (probabilité $\frac{1}{2}$ pour chaque). La variable T_1 suit donc une loi uniforme sur $\{1;2\}$, d'espérance $E(T_1) = \frac{3}{2}$ et

de variance $V(T_1) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$. Pour T_2, on aura nécessairement $T_2 = 2$ si on tire le 2 au premier tirage. Sinon, on aura encore $T_2 = 2$ si on tire le 1 puis le 2, mais $T_2 = 3$ si on commence par tirer deux fois de suite le numéro 1, ce qui se produit avec une probabilité $\frac{1}{4}$. On a donc $P(T_2 = 2) = \frac{3}{4}$ et $P(T_2 = 3) = \frac{1}{4}$. On calcule $E(T_2) = \frac{6}{4} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$, $E(T_2^2) = 4 \times \frac{3}{4} + 9 \times \frac{1}{4} = \frac{21}{4}$, donc $V(T_2) = E(T_2^2) - (E(T_2))^2 = \frac{21}{4} - \frac{81}{16} = \frac{3}{16}$.

(b) Pour atteindre un total strictement supérieur à 5, il faut tirer au moins trois numéros (si on tire trois fois le 2, on aura bien $T_5 = 3$), et au pire il faudra attendre le sixième tirage si on ne tire que des 1. Si $X_1 = 2$ est réalisé, on ne peut plus avoir $T_5 = 6$, donc $P_{X_1=2}(T_5 = 6) = 0$. La seule combinaison donnant $T_5 = 3$ est 222, donc $P_{X_1=2}(T_5 = 3) = \frac{1}{4}$. La seule combinaison donnant $T_5 = 5$ sera 2111 (suivi de 1 ou de 2), donc $P_{X_1=2}(T_5 = 5) = \frac{1}{8}$. Enfin, $P_{X_1=2}(T_5 = 4) = \frac{5}{8}$ (soit on débute par 212, soit par 221, soit par 2112).
De même, on a $P_{X_1=1}(T_5 = 3) = 0$ (on ne peut pas dépasser 5 en trois tirages si on commence par un 1) ; $P_{X_1=1}(T_5 = 6) = \frac{1}{16}$ (il faut que les quatre tirages suivants donnent tous des 1) ; $P_{X_1=1}(T_5 = 4) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ (il faut avoir soit trois 2, soit un 1 et deux 2, peu importe l'ordre, aux trois tirages suivants) ; et $P_{X_1=1}(T_5 = 5) = \frac{7}{16}$ (il faut avoir soit deux 1 et un 2 lors des trois tirages suivants (peu importe l'ordre) soit trois 1 puis un 2).

(c) Il suffit d'appliquer la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $X_1 = 1$ et $X_1 = 2$, pour obtenir $P(T_5 = 3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times 0 = \frac{1}{8}$; $P(T_5 = 4) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{16}$; $P(T_5 = 5) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{7}{16} = \frac{9}{32}$; et $P(T_5 = 6) = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{32}$.
On calcule ensuite $E(T_5) = 3 \times \frac{1}{8} + 4 \times \frac{9}{16} + 5 \times \frac{9}{32} + 6 \times \frac{1}{32} = \frac{12 + 72 + 45 + 6}{32} = \frac{135}{32}$; $E(T_5^2) = 9 \times \frac{1}{8} + 16 \times \frac{9}{16} + 25 \times \frac{9}{32} + 36 \times \frac{1}{32} = \frac{585}{32}$. Pour les plus courageux, $V(T_5) = \frac{495}{1\,024}$.

(d) On a $P_{X_1=1}(T_5 = 4) = \frac{1}{2}$ et $P(T_5 = 4) = \frac{9}{16}$, donc les évènements ne sont pas indépendants. Le fait de savoir que $X_1 = 1$ diminue légèrement la probabilité que T_5 soit égal à 4 (savoir que $X_1 = 1$ favorise a priori l'apparition de plus grandes valeurs pour T_5).

2. **Calcul de l'espérance de T_N**

(a) i. La plus grande valeur prise par T_N est $N + 1$ (si on commence par tirer N fois le numéro 1). Le plus petite valeur sera $M + 1$ (si on ne commence avec M fois des deux, suivis d'un 1 ou d'un 2).

ii. La plus grande valeur est toujours $N + 1$ (même raison), et la plus petite vaut $M + 1$ (si on ne tire que des 2 sur les $M + 1$ premiers tirages, on aura un total de $2M + 2$, strictement supérieur à $N = 2M + 1$).

(b) Si le premier tirage a donné 1, on aura $T_{N+2} = k$ si la somme des $k - 1$ tirages suivant le premier donne pour la première fois un entier strictement supérieur à $N + 1$ (ce qui fera un total strictement supérieur à $N + 2$ en ajoutant le 1 initial). Autrement dit, $P_{X_1=1}(T_{N+2} = k) = P(T_{N+1} = k - 1)$. De même, si on commence avec un 2, il faudra dépasser N sur les $k - 1$ tirages suivants, soit $P_{X_1=2}(T_{N+2} = k) = P(T_n = k - 1)$. La formule des probabilités totales appliquée au système complet d'évènements constitué de $X_1 = 1$ et $X_1 = 2$ donne alors la formule souhaitée.

(c) On a $E(T_{N+2}) = \sum_{k=1}^{k=N+2} kP(T_{N+2} = k)$ (pour simplifier, on commence la somme à $k = 1$

même si les premières valeurs sont nulles), donc $E(T_{N+2}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=N+2} kP(T_{N+1} = k-1) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=N+2} kP(T_N = k-1) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{k=N+1}(k+1)P(T_{N+1} = k) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{k=N+1}(k+1)P(T_N = k) = \frac{1}{2}E(T_{N+1}) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{k=N+2} P(T_{N+1} = k) + \frac{1}{2}E(T_N) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{k=N+2} P(T_N = k) = \frac{1}{2}(E(T_{N+1}) + E(T_N)) + 1$.

(d) Au vu des calculs d'espérance de T_1 et T_2 et de la formule de récurrence précédente, $E(T_N) = w_N$, où (w_n) est la suite étudiée dans la partie préliminaire. On a donc $E(T_N) = \frac{2}{3}N + \frac{8}{9} + \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^N$, ce qui coïncide avec la formule de l'énoncé. La partie géométrique de raison $-\frac{1}{2}$ a une limite nulle, donc $\lim_{N\to+\infty}\frac{E(T_N)}{N} = \lim_{N\to+\infty}\frac{6N+8}{9N} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.
Cette limite est assez raisonnable : en moyenne, on obtient à chaque tirage une valeur égale à $\frac{3}{2}$. On aura donc un total moyen de $\frac{3}{2}k$ après k lancers, et il faudra donc environ $\frac{2}{3}N$ lancers pour atteindre un total de N.

3. **La loi de T_N**

(a) L'évènement $T_N > k$ signifie qu'il faut au moins attendre le lancer numéro $k+1$ avant de dépasser la valeur N, ou encore qu'on a une somme de résultats inférieure ou égale à N après le lancer numéro k. Cela coïncide bien avec l'évènement $S_k \leqslant N$. Or, si on note Z_k le nombre de fois où on a obtenu 2 lors des k premiers lancers, le total obtenu vaut $2 \times Z_k + 1 \times (k - Z_k)$ (puisqu'on a otenu $k - Z_k$ fois la valeur 1), soit $Z_k + k$. Dire que $S_k \leqslant N$ revient donc à dire $Z_k + k \leqslant N$, soit $Z_k \leqslant N - k$. Or, Z_k est bien une variable aléatoire suivant une loi binômiale de paramètre $\left(k, \frac{1}{2}\right)$ (nombre de succès après répétition de k épreuves de probabilité de succès $\frac{1}{2}$).

(b) Au vu de la question précédente, $P(T_N > k) = P(Z_k \leqslant N-k)) \sum_{i=0}^{i=N-k} P(Z_k = i) = \sum_{i=0}^{i=N-k}\binom{k}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^i\left(1-\frac{1}{2}\right)^{k-i} = \frac{1}{2^k}\sum_{i=0}^{i=N-k}\binom{k}{i}$.

(c) Nous aurons besoin pour les calculs du triangle de Pascal, qui ne sera pas reproduit dans le corrigé. On obtient $P(T_{10} > 10) = \frac{1}{2^{10}}\sum_{i=0}^{i=0}\binom{10}{i} = \frac{1}{1\,024}$; puis $P(T_{10} > 9) = \frac{1}{2^9}\sum_{i=0}^{i=1}\binom{9}{i} = \frac{1+9}{2^9} = \frac{10}{512} = \frac{5}{256}$; puis $P(T_{10} > 8) = \frac{1}{2^8}\sum_{i=0}^{i=2}\binom{8}{i} = \frac{1+8+28}{256} = \frac{37}{256}$; puis $P(T_{10} > 7) = \frac{1}{2^7}\sum_{i=0}^{i=3}\binom{7}{i} = \frac{1+7+21+35}{128} = \frac{64}{128} = \frac{1}{2}$; puis $P(T_{10} > 6) = \frac{1}{2^6}\sum_{i=0}^{i=4}\binom{6}{i} = \frac{1+6+15+20+15}{64} = \frac{57}{64}$; et enfin $P(T_{10} > 5) = 1$ (on somme tous les coefficients de la ligne), ce qui est normal puisque T_{10} prend des valeurs de 6 à 11. Ne reste plus qu'à en déduire les probabilités par soustraction on a par exemple $T_{10} = 7$ si $T_{10} > 6$ est vérifié, mais pas $T_{10} > 7$, d'où $P(T_{10} = 7) = P(T_{10} > 6) - P(T_{10} > 7)$. On obtient finalement le tableau suivant :

k	6	7	8	9	10	11
$P(T_{10}=k)$	$\frac{7}{64}$	$\frac{25}{64}$	$\frac{91}{256}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{19}{1\ 024}$	$\frac{1}{1\ 024}$

Concours Blanc n°2 : épreuve d'analyse

ECE3 Lycée Carnot

18 mai 2010

Durée de l'épreuve : 4H.
Les calculatrices sont **interdites**.

Le sujet est constitué de deux exercices et d'un problème indépendants. Le candidat peut traiter les questions dans l'ordre qu'il souhaite, à condition d'indiquer clairement les résultats des questions non traitées qu'il admet pour la suite de l'exercice.

Exercice 1

Le but de cet exercice est de résoudre numériquement l'équation $(E) : x + e^{-2x} = 1$. On introduit pour cela la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - e^{-2x}$.

1. **Étude de la fonction f.**
   (a) Que représentent les solutions de l'équation (E) pour la fonction f ?
   (b) Étudier les variations de f.
   (c) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$, ainsi que la nature de ses branches infinies.
   (d) Déterminer les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - x$.
   (e) Montrer que l'équation (E) admet deux solutions, dont une, qu'on notera α, appartient à l'intervalle $]\ln 2, 1[$ (on rappelle que $\ln 2 \simeq 0.69$).
   (f) Tracer une allure de la courbe représentative de la fonction f, en faisant figurer sur le graphique la droite d'équation $y = x$.
2. **Étude d'une suite récurrente**
   On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 \geqslant 1$ et de la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > \alpha$.
   (b) Prouver que la suite (u_n) est monotone, puis en déduire la convergence de la suite.
   (c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.
   (d) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_{n+1} - \alpha \leqslant 2e^{-2\alpha}(u_n - \alpha)$.

(e) En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n - \alpha \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n (u_0 - \alpha)$.

(f) Montrer que, si $u_0 = 1$, $0 \leqslant u_n - \alpha \leqslant \dfrac{1}{2^n}$, et écrire un programme PASCAL calculant une valeur approchée de α à ε près (ε étant choisi par l'utilisateur).

Exercice 2

Dans tout cet exercice, on s'intéresse à des suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ à termes positifs, et on cherche à étudier un critère de converge de la série de terme général u_n. On notera S_n la somme partielle d'indice n de la série : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} u_k$. On pourra utiliser dans cet exercice le résultat suivant : si deux suites (a_n) et (b_n) sont à termes positives et équivalentes quand n tend vers $+\infty$, alors les séries $\sum a_k$ et $\sum b_n$ sont de même nature.

1. On suppose dans un premier temps la suite (u_n) décroissante et la série de terme général u_n convergente.
   (a) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n} - S_n \geqslant n u_{2n}$.
   (b) En déduire que la suite $(2n\ u_{2n})_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.
   (c) Prouver que la suite $(n\ u_n)_{n\geqslant 1}$ converge également vers 0.
   (d) En déduire que $u_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
2. On suppose désormais (u_n) bornée (mais plus nécessairement décroissante), et la série de terme général u_n divergente. On définit une suite auxiliaire (v_n) par $\forall n \geqslant 1$, $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{S_n}$, et une deuxième suite auxiliaire (w_n) par $w_n = \ln(1 + v_n)$.
   (a) Déterminer la limite éventuelle de la suite (v_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
   (b) Prouver que $w_n = \ln \dfrac{S_{n+1}}{S_n}$, et en déduire une expression simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} w_k$. En déduire la nature de la série de terme général w_n.
   (c) Prouver la divergence de la série de terme général v_n.
   (d) Quel résultat classique retrouve-t-on lorsqu'on prend comme suite (u_n) la suite constante égale à 1 ?
   (e) En appliquant les résultats de cette partie à la suite définie par $u_n = \dfrac{1}{n}$, montrer que la série de terme général $\dfrac{1}{n \ln n}$ est divergente.
   (f) La réciproque du résultat obtenu à la question 1.d) est-elle vraie ?

Problème

On considère la famille de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur $]-1,+\infty[$ par :

$$f_n(x) = x^n \ln(1+x).$$

I. Étude des fonctions f_n.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note h_n la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par :

$$h_n(x) = n\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}.$$

1. Étudier le sens de variation des fonctions h_n.
2. Calculer $h_n(0)$, puis en déduire le signe de h_n.
3. Étude du cas particulier $n = 1$.
   (a) Après avoir justifié la dérivabilité de f_1 sur $]-1,+\infty[$, exprimer $f_1'(x)$ en fonction de $h_1(x)$.
   (b) En déduire les variations de la fonction f_1 sur $]-1,+\infty[$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.
   (a) Justifier la dérivabilité de f_n sur $]-1,+\infty[$ et exprimer $f_n'(x)$ en fonction de $h_n(x)$.
   (b) En déduire les variations de f_n sur $]-1,+\infty[$. (On distinguera les cas n pair et n impair). On précisera les limites aux bornes sans étudier les branches infinies.

II. Étude d'une suite.

On définit une suite (U_n) par

$$U_n = \int_0^1 f_n(x)\ dx$$

1. **Calcul de U_1.**
   (a) Prouver l'existence de trois réels a, b, c tels que :
   $$\forall x \in [0,1], \quad \frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}.$$
   (b) En déduire la valeur de l'intégrale :
   $$\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\ dx.$$
   (c) Montrer que $U_1 = \dfrac{1}{4}$.
2. **Convergence de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.**
   (a) Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone.
   (b) Justifier la convergence de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. (On ne demande pas sa limite.)
   (c) Démontrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant U_n \leqslant \frac{\ln 2}{n+1}.$$

(d) En déduire la limite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3. **Calcul de U_n pour $n \geqslant 2$.**
Pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on pose :

$$S_n(x) = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k.$$

(a) Montrer que :

$$S_n(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}.$$

(b) En déduire que :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\, dx.$$

(c) En utilisant une intégration par parties dans le calcul de U_n, montrer que :

$$U_n = \frac{\ln 2}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n+1}\left[\ln 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{(-1)^k}{k+1} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}\right)\right].$$

(d) En admettant que $U_n \sim \dfrac{\ln 2}{n+1}$, en déduire que la série de terme général $\dfrac{(-1)^k}{k+1}$ converge vers $\ln 2$.

III. Étude d'une suite implicite.

On considère dans cette partie l'équation $f_n(x) = 2$, et on cherche à étudier les solutions de cette équation sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

1. Montrer que, $\forall n \geqslant 1$, l'équation admet une seule solution, qu'on notera désormais v_n.
2. Prouver que, $\forall n \geqslant 1$, $1 \leqslant v_n \leqslant 2$ (on rappelle que $\ln 3 \simeq 1.1$).
3. Déterminer le sens de variation de la suite (v_n), et en déduire la nature de la suite.
4. Prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$.
5. Déterminer un équivalent simple de $\ln v_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.
6. En utilisant le résultat de la question précédente, trouver un réel a tel que $v_n = 1 + \dfrac{a}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Corrigé de la première épreuve du Concours Blanc n°2

Exercice 1

1. **Étude de la fonction f.**

   (a) L'équation (E) étant équivalente à $f(x) = x$, ses solutions sont les points fixes de la fonction f.

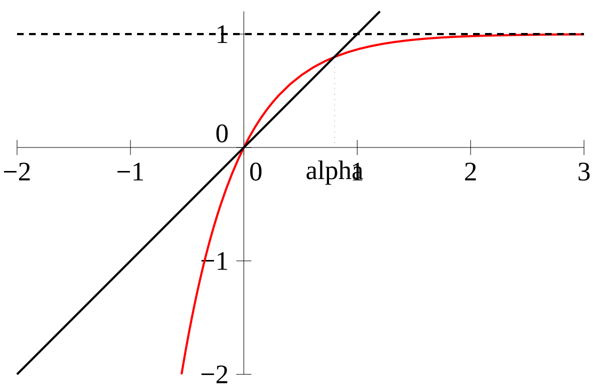
   (b) La fonction f est bien sûr C^∞ sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = 2e^{-2x} > 0$, donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

   (c) Par somme et composition de limites, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, donc la courbe de f admet en $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 1$; et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. De plus, par croissance comparée, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}}{x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{-2x}}{x} = -\infty$, et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$. La courbe de f admet donc une branche parabolique de direction (Oy) en $-\infty$.

   (d) La fonction g est également C^∞ sur $\mathbb{R}$, de dérivée $g'(x) = 2e^{-2x} - 1$. Comme $e^{-2x} \geqslant \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow -2x \geqslant -\ln 2$, la fonction g est strictement croissante sur $\left]-\infty; \dfrac{\ln 2}{2}\right]$, et strictement décroissante sur $\left[\dfrac{\ln 2}{2}; +\infty\right[$. La fonction g admet en $\dfrac{\ln 2}{2}$ un maximum de valeur $g\left(\dfrac{\ln 2}{2}\right) = 1 - e^{-\ln 2} - \dfrac{\ln 2}{2} = \dfrac{1 - \ln 2}{2}$, et vérifie $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ (car par croissance comparée, $g(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} -e^{-2x}$) et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

   (e) L'équation (E) est équivalente à $g(x) = 0$. On vient de voir que g était strictement monotone, donc bijective de $\left]-\infty; \dfrac{\ln 2}{2}\right]$ vers $\left]-\infty; \dfrac{1-\ln 2}{2}\right]$, et de $\left[\dfrac{\ln 2}{2}; +\infty\right[$ vers $\left]-\infty; \dfrac{1-\ln 2}{2}\right]$, donc 0, appartenant à l'intervalle $]-\infty; 1]$, admet un unique antécédent inférieur à $\dfrac{\ln 2}{2}$ (dont on peut aisément constater qu'il est égal à 0), et un unique antécédent strictement supérieur à $\dfrac{\ln 2}{2}$, ce qui correspond aux deux solutions de (E). De plus, $g(\ln 2) = 1 - e^{-2\ln 2} - \ln 2 = 1 - \dfrac{1}{4} - \ln 2 = \dfrac{3}{4} - \ln 2 > 0$ et $g(1) = 1 - e^{-2} - 1 = -e^{-2} < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction g s'annule donc bien sur l'intervalle $]\ln 2; 1[$.

   (f) On obtient l'allure suivante pour la fonction f :



2. **Étude d'une suite récurrente**

(a) Une petite récurrence pour commencer : on sait que $\alpha < 1$, donc $u_0 > \alpha$. Si on suppose désormais $u_n \geqslant \alpha$, la fonction f étant strictement croissante sur $[\alpha; +\infty[$ à valeurs dans $[\alpha; +\infty[$, on aura également $u_{n+1} = f(u_n) > \alpha$. D'après le principe de récurrence, la propriété demandée est vérifiée.

(b) La fonction g étant négative sur $]\alpha; +\infty[$, on a $\forall x > \alpha$, $f(x) < x$. En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n) < u_n$, donc la suite (u_n) est strictement décroissante. Étant de plus minorée par α, elle converge.

(c) La limite de (u_n) est nécessairement un point fixe de f. Or, comme $u_n > \alpha$, on aura par passage à la limite $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \geqslant \alpha$, et la limite ne peut donc qu'être égale à α (le deuxième point fixe de f étant 0, qui est strictement inférieur à α).

(d) Sur l'intervalle $[\alpha; +\infty[$, la dérivée f' de la fonction f est positive et majorée par $2e^{-2\alpha}$. Comme f est C^1 sur $[\alpha; +\infty[$, et que α et u_n appartiennent à cet intervalle (avec $\alpha < u_n$), on peut leur appliquer l'inégalité des accroissements finis pour obtenir $0 \times (f(u_n) - f(\alpha)) \leqslant 2e^{-2\alpha}(u_n - \alpha)$. Comme $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(\alpha) = \alpha$, l'encadrement demandé en découle.

(e) Constatons qu'au vu des résultats de la première partie $2e^{-2\alpha} < 2e^{-2\ln 2} = \dfrac{1}{2}$. Ne reste plus qu'à faire une récurrence : pour $n = 0$, l'inégalité est triviale. Si on la suppose vraie au rang n, on aura $0 \leqslant u_{n+1} - \alpha \leqslant 2e^{-2\alpha}(u_n - \alpha) \leqslant \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n (u_0 - \alpha) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} (u_0 - \alpha)$, ce qui prouve l'hérédité de la propriété.

(f) Il suffit de reprendre l'inégalité précédente et de constater que $1 - \alpha < 1$, puisque $0 < \alpha < 1$.

```
PROGRAM concoursblanc1 ;
VAR u,e,a : real ;
BEGIN
WriteLn('Choisissez la précision souhaitée') ;
ReadLn(e) ;
u := 1 ; a := 1 ;
REPEAT
u := 1-exp(-2*u) ;
a := a/2 ;
UNTIL a < e ;
WriteLn('Une valeur approchée de alpha à ',e,' près est donnée par ',u) ;
END.
```

Exercice 2

1. (a) On a $S_{2n} - S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{k=2n} u_k$. Or, la suite (u_n) étant décroissante, on aura $\forall k \in \{n+1, \dots, 2n\}$, $u_k \geqslant u_{2n}$, donc $S_{2n} - S_n \geqslant \sum\limits_{k=n+1}^{k=2n} u_{2n} = nu_{2n}$.

(b) La série de terme général S_n étant supposée convergence, on peut noter S sa somme, et on a alors $\lim\limits_{n \to +\infty} S_{2n} = \lim\limits_{n \to +\infty} S_n = S$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} S_{2n} - S_n = 0$. La suite $(n\ u_{2n})$ étant positive (puisque u_n l'est par hypothèse) et majorée par une suite tendant vers 0, d'après le théorème des gendarmes, elle converge vers 0, et $(2n\ u_{2n})$ également.

(c) On vient de voir que les termes d'indices pairs de cette suite tendaient vers 0. Or, (u_n) étant décroissante, $u_{2n+1} \leqslant u_{2n}$, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $(2n+1)\ u_{2n+1} \leqslant (2n+1)\ u_{2n}$, et ce majorant tend vers 0. Encore un coup de gendarmes, et les termes impairs de la suite tendent eux aussi vers 0. Conclusion : la suite $(n\ u_n)$ converge bien vers 0.

(d) Dire que $n\ u_n$ tend vers 0 est bien équivalent à dire que $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

2. (a) La série de terme général u_n étant supposée divergente, avec (u_n) positive, on aura $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$. La suite (u_n) étant bornée, le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{S_n}$ tend vers 0 (pour les rigoristes absolus, on peut invoquer le théorème des gendarmes : si on note M un majorant de (u_n), on a $0 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{M}{S_n}$).

(b) En effet, $w_n = \ln\left(1 + \dfrac{u_{n+1}}{S_n}\right) = \ln \dfrac{S_n + u_{n+1}}{S_n} = \ln \dfrac{S_{n+1}}{S_n}$. Un petit télescopage donne alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} w_k = \sum_{k=1}^{k=n} \ln S_{k+1} - \ln S_k = \ln S_{n+1} - \ln S_1 = \ln S_{n+1} - \ln u_1$. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$, on en déduit que la série de terme général w_n diverge.

(c) Comme on sait que (v_n) a pour limite 0, on aura $w_n = \ln(1 + v_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$. Les deux suites étant à termes positifs, la série de terme général v_n est de même nature que celle de terme général u_n, donc divergente.

(d) Si on prend $u_n = 1$ (qui est bien une suite bornée, et la série de terme général 1 diverge grossièrement), on aura $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} 1 = n - 1$, donc $v_n = \dfrac{1}{n-1}$, et on retrouve la divergence de la série harmonique.

(e) La suite u_n est toujours bornée, et on vient de revoir que la série de terme général $\dfrac{1}{n}$ divergeait. Cette fois, on a $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} \sim \ln n$, donc $v_n = \dfrac{1}{(n+1)S_n} \sim \dfrac{1}{n \ln n}$. La série de terme général v_n étant divergente, celle de terme général $\dfrac{1}{n \ln n}$ l'est également.

(f) Manifestement non, puisque la suite $\left(\dfrac{1}{n \ln n}\right)$ est bien positive, décroissante et négligeable devant $\dfrac{1}{n}$, mais que la série associée ne converge pas.

Problème

I. Étude des fonctions f_n.

1. Les fonctions h_n sont C^∞ sur $]-1;+\infty[$, de dérivées $h_n'(x) = \dfrac{n}{1+x} + \dfrac{1+x-x}{(1+x)^2} = \dfrac{n(1+x)+1}{(1+x)^2}$. Le numérateur étant toujours positif sur $]-1;+\infty[$, les fonction h_n sont toutes strictement croissantes sur cet intervalle.
2. Calculons donc : $h_n(0) = n\ln 1 + 0 = 0$. Les fonctions h_n sont donc négatives sur $]-1;0]$ et positives sur $[0;+\infty[$.
3. (a) La fonction f_1 est C^∞ sur son ensemble de définition comme produit et composée de fonctions usuelles. Sa dérivée est $f_1'(x) = \ln(1+x) + \dfrac{x}{1+x} = h_1(x)$.
   (b) La fonction f_1 est donc décroissante sur $]-1;0]$ et croissante sur $[0;+\infty[$. Elle admet en 0 un minimum de valeur $f_1(0) = 0$, et a pour limite $+\infty$ en -1 et en $+\infty$.
4. (a) Comme f_1, f_n est C^∞ sur $]-1;+\infty[$, de dérivée $f_n'(x) = nx^{n-1}\ln(1+x) + \dfrac{x^n}{1+x} = x^{n-1}h_n(x)$.
   (b) Si n est impair, x^{n-1} est toujours positif et, comme pour f_1, f_n est décroissante puis croissante, atteignant pour minimum 0 en 0, et ayant pour limite $+\infty$ aux deux bornes de son domaine de définition. Si n est pair, par contre, x^{n-1} change de signe en 0, et $x^{n-1}h_n(x)$ est toujours positif, donc f_n est strictement croissante sur $]-1;+\infty[$, avec pour limite $-\infty$ en -1 et $+\infty$ en $+\infty$.

II. Étude d'une suite.

1. (a) Procédons par identification : $ax+b+\dfrac{c}{x+1} = \dfrac{ax^2+(a+b)x+b+c}{x+1}$, donc on aura égalité si $a=1$, $a+b=0$ et $b+c=0$, soit $a=c=1$ et $b=-1$, donc $\dfrac{x^2}{x+1} = x-1+\dfrac{1}{x+1}$.
   (b) On a donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx = \int_0^1 x-1+\frac{1}{x+1}dx = \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 1 + \ln 2 = \ln 2 - \frac{1}{2}$.
   (c) Par définition, $U_1 = \displaystyle\int_0^1 x\ln(1+x)dx$. Effectuons une intégration par partie en posant $u(x) = \ln(1+x)$ et $v'(x) = x$, donc $u'(x) = \dfrac{1}{x+1}$ et $v(x) = \dfrac{x^2}{2}$. On obtient $U_1 = \displaystyle\left[\frac{x^2}{2}\ln(1+x)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx = \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2}\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.
2. (a) Pour tout entier naturel n, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $x^{n+1} \leqslant x^n$, donc $x^{n+1}\ln(1+x) \leqslant x^n\ln(1+x)$, d'où en intégrant l'inégalité sur $[0;1]$, $U_{n+1} \leqslant U_n$. La suite (U_n) est donc décroissante.
   (b) Comme de plus (U_n) est une suite à valeurs positives (les fonctions f_n prennent toutes des valeurs positives sur $[0;1]$), la suite est décroissante minorée, donc convergente.
   (c) La positivité de U_n a déjà été justifiée. De plus, sur $[0;1]$, $\ln(1+x) \leqslant \ln 2$, donc $U_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 x^n \ln 2 = \ln 2\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{n+1}$.
   (d) Le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$.
3. (a) Inutile de faire une récurrence, il s'agit d'une somme géométrique de raison $-x$, donc $S_n(x) = \dfrac{1-(-x)^{n+1}}{1-(-x)} = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$.

(b) Intégrons donc l'égalité précédente : par linéarité $\int_0^1 S_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k \int_0^1 x^k dx = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(-1)^k}{k+1}$.
À droite, on a $\int_0^1 \frac{1}{1+x} + \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x} dx = [\ln(1+x)]_0^1 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx = \ln 2 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$.

(c) On va effectuer une intégration par parties en posant $u(x) = \ln(x+1)$ et $v'(x) = x^n$, donc $u'(x) = \frac{1}{1+x}$ et $v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$. On obtient $U_n = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \ln(1+x)\right]_0^1 - \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\sum_{k=0}^{k=n} \frac{(-1)^k}{k+1} - \ln 2 \right)$, ce qui donne bien la formule annoncée.

(d) En multipliant l'équation précédente par $n+1$, le mebre de droite doit tendre vers $\ln 2$, ce qui se produit si $\lim_{n \to +\infty} \ln 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}\right) = 0$, c'est-à-dire que la série de terme général $\frac{(-1)^k}{k+1}$ converge vers $\ln 2$.

III. Étude d'une suite implicite.

1. On a vu dans la première partie du problème que la fonction f_n était strictement croissante sur $[0; +\infty[$, avec $f(0) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$. Le théorème de la bijection nous permet alors d'affirmer que 2 a un seul antécédent par f_n sur $[0; +\infty[$.
2. En effet, on a $f_n(1) = \ln 2 < 2$, et $f_n(2) = 2^n \ln 3 > 2$ si $n \geqslant 1$, donc le théorème des valeurs intermédiaires nous donne l'existence d'une solution à l'équation $f_n(x) = 2$ sur $[1; 2]$. Comme v_n est l'unique solution de cette équation sur $[0; +\infty[$, $v_n \in [1; 2]$.
3. Constatons que $\forall x \in [1; 2]$, $x^n \leqslant x^{n+1}$, donc $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$. Comme $f_n(v_n) = f_n(v_{n+1}) = 2$ par définition, on a donc $f_n(v_{n+1}) \leqslant 2 = f_n(v_n)$, et par croissance de la fonction f_n, $v_{n+1} \leqslant v_n$. La suite (v_n) est donc décroissante. Étant minorée par 1, elle converge.
4. On sait que la suite (v_n) converge vers un réel $l \geqslant 1$ (puisque (v_n) est minorée par 1). Supposons que $l > 1$, alors on aura à partir d'un certain rang $v_n \geqslant \frac{1+l}{2} > 1$, donc $\lim_{n \to +\infty} v_n^n = +\infty$, et également $\lim_{n \to +\infty} v_n^n \ln(1+v_n) = +\infty$. Ceci n'est guère possible pour une expression qui vaut toujours 2 par définition. Conclusion : $l = 1$.
5. En reprenant l'équation de définition de v_n, on a $v_n^n \ln(1+v_n) = 2$, donc en passant au ln $n \ln v_n + \ln(\ln(1+v_n)) = \ln 2$. Or, $\lim_{n \to +\infty} \ln(\ln(1+v_n)) = \ln(\ln 2)$ puisque (v_n) converge vers 1. On a donc $v_n \sim \frac{\ln 2 - \ln(\ln 2)}{n}$.
6. Comme v_n tend vers 1, $v_n - 1$ tend vers 0, et $\ln v_n = \ln(1 + v_n - 1) \sim v_n - 1$. La question précédente nous donne donc $v_n - 1 \sim \frac{\ln 2 - \ln(\ln 2)}{n}$, d'où le résultat demandé avec $a = \ln 2 - \ln(\ln 2)$.

Concours Blanc n°2 - Probabilités et Algèbre

ECE3 Lycée Carnot

20 mai 2010

Durée de l'épreuve : 4H.
Les calculatrices sont **interdites**.

Le sujet est constitué de deux problèmes indépendants. Le candidat peut traiter les questions dans l'ordre qu'il souhaite, à condition d'indiquer clairement les résultats des questions non traitées qu'il admet pour la suite de l'exercice.

Problème 1

Dans cet exercice, on étudie l'exponentielle d'une matrice pour une matrice carrée d'ordre 3, puis d'ordre 2.

I. Exponentielle d'une matrice carrée d'ordre 3.

Soient A et P les matrices définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la matrice P est inversible et déterminer P^{-1}.
2. On pose $T = P\,A\,P^{-1}$.
   (a) Calculer la matrice T.
   (b) Calculer T^2, T^3, puis T^n pour tout entier naturel $n \geqslant 3$.
3. En déduire que $\forall n \geqslant 3,\ A^n = 0$.
4. Pour tout réel t, on définit la matrice $E(t)$ par $E(t) = I + tA + \dfrac{t^2}{2}A^2$, où I désigne la matrice unité d'ordre 3.
   (a) Montrer que $\forall (t, t') \in \mathbb{R}^2, \quad E(t)\,E(t') = E(t + t')$.

(b) Pour tout t réel, calculer $E(t)\,E(-t)$. En déduire que la matrice $E(t)$ est inversible et déterminer son inverse en fonction de $I,\ A,\ A^2,\ t$.

(c) Pour tout t réel et pour tout entier naturel n, déterminer $[E(t)]^n$ en fonction de $I,\ A,\ A^2,\ t$ et n.

II. Exponentielle d'une matrice carrée d'ordre 2.

Soient B et D les matrices définies par $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Pour tout entier naturel n non nul, et pour tout réel t, on définit la matrice $E_n(t)$ par :

$$E_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} B^k \quad \text{que l'on note } E_n(t) = \begin{pmatrix} a_n(t) & c_n(t) \\ b_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}$$

1. Déterminer toutes les matrices $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $MX = X$, puis toutes les matrices $Y \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $MY = 2Y$.
2. En déduire une matrice Q d'ordre 2 inversible telle que $Q^{-1}BQ = D$, et préciser son inverse.
3. Pour tout entier naturel n, montrer que $B^n = \begin{pmatrix} 2-2^n & 1-2^n \\ 2^{n+1}-2 & 2^{n+1}-1 \end{pmatrix}$
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2t^k - (2t)^k}{k!}$; exprimer de même $b_n(t)$, $c_n(t)$ et $d_n(t)$ sous le forme d'une somme.
5. Déterminer les limites de $a_n(t)$, $b_n(t)$, $c_n(t)$ et $d_n(t)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
6. Pour tout t réel, on pose alors $E(t) = \begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to+\infty} a_n(t) & \lim\limits_{n\to+\infty} c_n(t) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} b_n(t) & \lim\limits_{n\to+\infty} d_n(t) \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que $E(t) = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{2t} & e^t - e^{2t} \\ 2e^{2t} - 2e^t & 2e^{2t} - e^t \end{pmatrix}$.

   (b) Déterminer deux matrices E_1 et E_2, telles que pour tout t réel on ait : $E(t) = e^t E_1 + e^{2t} E_2$.

   (c) Calculer E_1^2, E_2^2, E_1E_2, E_2E_1.

   (d) En déduire que pour tout t réel, $E(t)$ est inversible et déterminer son inverse.

Problème 2

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul. On considère une urne U_n contenant n boules numérotées de 1 à n. On tire une boule au hasard dans U_n. On note k le numéro de cette boule. Si k est égal à 1, on arrête les tirages. Si k est supérieur ou égal à 2, on enlève de l'urne U_n les boules numérotées de k à n (il reste donc les boules numérotées de 1 à $k-1$), et on effectue à nouveau un tirage dans l'urne. On répète ces tirages jusqu'à l'obtention de la boule numéro 1. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule numéro 1. On note Y_n la variable aléatoire égale à la somme des numéros des boules tirées. On note $E(X_n)$ et $V(X_n)$ (respectivement $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$) l'espérance et la variance de X_n (respectivement Y_n).

Préliminaires.

On pose, $\forall n \geqslant 1$, $h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$ et $k_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$.

1. Rappeler un équivalent simple de h_n quand n tend vers $+\infty$.

2. Montrer que, $\forall k \geqslant 2,\ \dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$.
3. En déduire que $\forall n \geqslant 1,\ k_n \leqslant 2$.
4. Déterminer un équivalent simple de $h_n - k_n$ quand n tend vers l'infini.

Partie 1 : Etude de la variable aléatoire X_n.

On note dans cette partie I_n la variable aléatoire égale au numéro de la première boule tirée dans l'urne U_n.

1. (a) Quelle est la loi de la variable I_n ?
   (b) On suppose réalisé l'évènement $I_n = 1$. Que devient alors la loi de la variable X_n ?
   (c) Si n est supérieur ou égal à 2, montrer que $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in \{1, 2\ , ..., n\}$,
   $P_{I_n=k}\left(X_n = j\right) = P\left(X_{k-1} = j - 1\right)$.
2. (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable X_n.
   (b) Quelle est la loi de X_1 ?
   (c) Quel représente l'évènement $(X_2 = 1)$? Donner la loi de X_2 , son espérance et sa variance.
   (d) Calculer $P_{I_3=1}(X_3 = 2)$, $P_{I_3=2}(X_3 = 2)$ et $P_{I_3=3}(X_3 = 2)$. En déduire $P(X_3 = 2)$, puis déterminer la loi de X_3, son espérance et sa variance.
3. (a) Dans le cas général, déterminer $P(X_n = 1)$, $P(X_n = 2)$ et $P(X_n = n)$.
   (b) Si n est supérieur ou égal à 2, montrer la relation $P\left(X_n = j\right) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n-1} P\left(X_k = j - 1\right)$.
   (c) Calculer $nP\left(X_n = j\right) - (n-1)P\left(X_{n-1} = j\right)$, et en déduire que, $\forall n \geqslant 2$,
   $P\left(X_n = j\right) = \dfrac{n-1}{n} P\left(X_{n-1} = j\right) + \dfrac{1}{n} P\left(X_{n-1} = j - 1\right)$.
4. (a) Montrer en utilisant la question précédente que, si $n \geqslant 2$, $E\left(X_n\right) = E\left(X_{n-1}\right) + \dfrac{1}{n}$.
   (b) En déduire $E(X_n)$ et donner un équivalent simple de $E(X_n)$ quand n tend vers l'infini.
   (c) Si n est supérieur ou égal à 2, calculer $E(X_n^2)$ en fonction de $E(X_{n-1}^2)$ et de $E(X_{n-1})$.
   (d) En déduire : $V(X_n) = h_n - k_n$ (où h_n et k_n ont été définies dans les préliminaires).
   (e) Donner un équivalent de $V(X_n)$ quand n tend vers l'infini.

Partie 2 : Etude de la variable aléatoire Y_n.

1. (a) Quelles sont les valeurs prises par Y_2 ?
   (b) Déterminer la loi de Y_2.
2. (a) Si n est supérieur ou égal à 2, montrer, pour tout entier j non nul et tout entier k supérieur ou égal à 2, $P_{I_n=k}(Y_n = j) = P\left(Y_{k-1} = j - k\right)$.
   (b) Si n est supérieur ou égal à 2, en déduire, pour tout entier j supérieur ou égal à 1,
   $$P\left(Y_n = j\right) = \frac{n-1}{n} P\left(Y_{n-1} = j\right) + \frac{1}{n} P\left(Y_{n-1} = j - n\right)$$
   (c) Si n est supérieur ou égal à 2, montrer $E(Y_n) = E(Y_{n-1}) + 1$
   Que vaut $E(Y_n)$ pour tout entier n supérieur ou égal à 1 ?
3. Écrire un programme Pascal demandant un entier n à l'utilisateur et simulant une occurence des variables aléatoires X_n et Y_n.

Corrigé de la deuxième épreuve du Concours Blanc n°2

Problème 1

I. Exponentielle d'une matrice carrée d'ordre 3.

1. Appliquons donc l'algorithme du pivot à la matrice P :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ L_3 \leftrightarrow L_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow 3L_3 + L_1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 0 & -3 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow 3L_1 + L_2$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 6 & -12 & -18 \\ 0 & -3 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1/6 \\ L_2 \leftarrow -L_2/3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

La matrice P est inversible, d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

2. (a) On a $PA = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis $T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   (b) On obtient $T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis $T^3 = 0$, donc $\forall n \geqslant 3$, $T^n = 0$.

3. En effet, on prouve par récurrence que $A^n = PT^nP^{-1}$: c'est vrai pour $n = 1$ car $A = P(P^{-1}AP)P^{-1} = PTP^{-1}$, et le supposant vrai au rang n, alors $A^{n+1} = A^nA = (PT^nP^{-1})(PTP^{-1}) = PT^{n+1}P^{-1}$. Pour $n \geqslant 3$, on a bien $A^n = P \times 0 \times P^{-1} = 0$.

4. (a) Calculons donc $E(t)E(t') = \left(I + tA + \dfrac{t^2}{2}A^2\right)\left(I + t'A + \dfrac{t'^2}{2}A^2\right) = I + t'A + \dfrac{t'^2}{2}A^2 + tA + tt'A^2 + \dfrac{t^2}{2}A^2 = I + (t+t')A + \dfrac{t'^2 + 2tt' + t^2}{2}A^2 = E(t+t')$ (tous les termes faisant

intervenir des puissances de A supérieurs ou égales à 3 ont été supprimés au vu de la question précédente).

(b) Comme $E(t)E(-t) = E(t-t) = E(0) = I$, on en déduit que $E(t)$ est inversible, d'inverse $E(-t) = I - tA + \frac{t^2}{2}A^2$.

(c) En utilisant toujours le résultat de la question 4.a), on prouve que $E(t)^n = E(nt)$ (par exemple par récurrence : c'est vrai pour $n = 1$, et en le supposant vrai au rang n, $(E(t))^{n+1} = (E(t))^n E(t) = E(nt)E(t) = E(nt+t) = E((n+1)t)$), donc $E(t)^n = I + ntA + \frac{n^2t^2}{2}A^2$.

II. Exponentielle d'une matrice carrée d'ordre 2.

1. Notons $X = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$. L'équation $BX = X$ se traduit par le système suivant : $\left\{\begin{array}{rcrcl} & - & z & = & x \\ 2x & + & 3z & = & z \end{array}\right.$, système qui n'est pas de Cramer et a pour solution tous les couples $\{(x;-x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. De même en posant $Y = \begin{pmatrix} y \\ t \end{pmatrix}$, on ramène l'équation $BY = 2Y$ au système $\left\{\begin{array}{rcrcl} & - & t & = & 2y \\ 2y & + & 3t & = & 2t \end{array}\right.$, qui n'est pas de Cramer non plus et admet pour solutions les couples $\{(y;-2y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.
2. D'après la question précédente, en posant par exemple $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, on aura $BQ = QD$ (puisque dans le produit BQ, la première colonne de Q est laissée identique, et sa deuxième colonne multipliée par 2, ce qui correspond bien à un produit à droite par la matrice D), donc $Q^{-1}BQ = D$ en supposant Q inversible. Elle l'est effectivement : le pivot ne nécessite que deux étapes $L_2 \leftarrow -L_1 - L_2$ puis $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$, ce qui donne $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.
3. Puisque l'énoncé donne le résultat, on peut éviter le calcul de QD^nQ^{-1} (qui n'est cependant pas bien compliqué) et procéder par récurrence : pour $n = 0$, la matrice proposée est bien égale à l'identité. Supposons la formule vraie au rang n, alors $B^{n+1} = B^n \times B = \begin{pmatrix} 2-2^n & 1-2^n \\ 2^{n+1}-2 & 2^{n+1}-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2^{n+1} & 2^n-2+3-3\times 2^n \\ 2^{n+2}-2 & 2-2^{n+1}+3\times 2^{n+1}-3 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 2-2^{n+1} & 1-2^{n+1} \\ 2^{n+2}-2 & 2^{n+2}-1 \end{pmatrix}$, ce qui est bien la formule attendue.
4. Par définition, $a_n(t) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{t^k}{k!}(B^k)_{11} = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{t^k}{k!}(2-2^k)$, d'où la formule annoncée. De même, en reprenant le résultat de la question précédente, $b_n(t) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{2(2t)^k - 2t^k}{k!}$, $c_n(t) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{t^k - (2t)^k}{k!}$ et $d_n(t) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{2(2t)^k - t^k}{k!}$.
5. On reconnait dans les sommes précédentes des sommes partielles de séries exponentielles, qui convergent donc, et on calcule sans difficulté (en séparant en deux la somme à chaque fois) les limites : $\lim_{n\to+\infty} a_n(t) = 2e^t - e^{2t}$; $\lim_{n\to+\infty} b_n(t) = 2e^{2t} - 2e^t$; $\lim_{n\to+\infty} c_n(t) = e^t - e^{2t}$ et $\lim_{n\to+\infty} d_n(t) = 2e^{2t} - e^t$.
6. (a) De qui se moque-t-on dans cet énoncé ? On vient de le faire à la question précédente !

   (b) Il suffit manifestement de poser $E_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $E_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

   (c) Un peu de calcul donne $E_1^2 = E_1$; $E_2^2 = E_2$ et $E_1E_2 = E_2E_1 = 0$.

   (d) Au vu des calculs effectués dans la première partie du problème, on peut deviner que l'inverse de $E(t)$ sera $E(-t)$. Vérifions-le : $E(t)E(-t) = (e^tE_1 + e^{2t}E_2)(e^{-t}E_1 + e^{-2t}E_2) =$

$e^t e^{-t} E_1^2 + e^{2t} e^{-2t} E_2 = E_1 + E_2 = I$ (les simplification utilisent les résultats de la question précédente). On a donc bien $(E(t))^{-1} = E(-t)$.

Problème 2

Préliminaires.

1. On reconnait la somme partielle de la série harmonique : $h_n \sim \ln n$.
2. C'est un simple petit calcul : $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{k-(k-1)}{(k-1)k} = \frac{1}{k^2-k} \geqslant \frac{1}{k^2}$, puisque $0 \leqslant k^2 - k \leqslant k^2$.
3. Sommons les inégalités précédentes à partir de $k = 2$: $\sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n}$ (somme télescopique à droite). En rajoutant le terme correspondant à $k = 1$, on a donc $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + 1 - \frac{1}{n} \leqslant 2$.
4. Comme $0 \leqslant k_n \leqslant 2$, $k_n = o(\ln n)$, et $h_n - k_n \sim \ln n$.

Partie 1 : Etude de la variable aléatoire X_n.

1. (a) C'est une loi uniforme $\mathcal{U}(n)$.
   (b) Si $I_n = 1$, on arrête les tirages après ce premier tirage et on a $X_n = 1$, qui est donc une variable constante.
   (c) Si on suppose vérifié l'évènement $I_n = k$, on recommence ensuite les tirages dans une urne ne contenant plus que $k-1$ boules et on attend toujours de tirer la boule numéro 1. Tout se passe donc comme si on effectuait l'expérience dans l'urne U_{k-1}, en ajoutant 1 à la valeur de X_n puisqu'on a déjà effectué un tirage. Autrement dit, en supposant $I_n = k$, $X_n \sim 1 + X_{k-1}$, soit $P_{I_n=k}(X = j) = P(1 + X_{k-1} = j) = P(X_{k-1} = j - 1)$.
2. (a) La variable X_1 peut prendre toutes les valeurs entières entre 1 (si on tire le numéro 1 immédiatement) et n (si on tire toutes les boules de l'urne en ordre décroissant).
   (b) Pour X_1, il n'y qu'une boule dans l'urne, la variable est constante égale à 1.
   (c) $X_2 = 1$ signifie qu'on tire la boule 1 dans une urne contenant deux boules, donc $P(X_2 = 1) = \frac{1}{2}$ et $P(X_2 = 2) = \frac{1}{2}$; $E(X_2) = \frac{1}{2} + \frac{2}{2} = \frac{3}{2}$.
   (d) Si $I_3 = 1$ est réalisé, on aura nécessairement $X_3 = 1$, donc $P_{I_3=1}(X_3 = 2) = 0$. Si $I_3 = 2$, il ne reste plus que la boule 1 dans l'urne pour le deuxième tirage, on aura forcément $X_3 = 2$ dans ce cas : $P_{I_3=2}(X_3 = 2) = 1$. Enfin, si $I_3 = 3$, il reste deux boules dans l'urne, on a une chance sur deux de tirer la boule 1 au deuxième tirage : $P_{I_3=3}(X_3 = 2) = \frac{1}{2}$. Via la formule des probabilités totales, $P(X_3 = 2) = P(I_3 = 1) \times P_{I_3=1}(X_3 = 2) + P(I_3 = 2) \times P_{I_3=2}(X_3 = 2) + P(I_3 = 3) \times P_{I_3=3}(X_3 = 2) = \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$. Par ailleurs, $P(X_3 = 1) = P(I_3 = 1) = \frac{1}{3}$, donc $P(X_3 = 3) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ (on peut aussi calculer directement $P(X_3 = 3)$). On obtient donc $E(X_3) = \frac{1}{3} + \frac{2}{2} + \frac{3}{6} = \frac{11}{6}$.
3. (a) On aura toujours $P(X_n = 1) = P(I_n = 1) = \frac{1}{n}$. Pour avoir $X_n = 2$, il faut tirer une boule autre que la boule 1 au premier tirage, puis la boule 1 au deuxième tirage, parmi les $k-1$ restantes, donc $P(X_n = 2) = \sum_{k=2}^{k=n} P(I_n = k) \times P_{I_n=k}(X_n = 2) = \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{n} \times \frac{1}{k-1} = \frac{h_{n-1}}{n}$.

Enfin, pour avoir $X_n = n$, il faut tirer la boule n au premier tirage, puis la $n-1$ (parmi $n-1$ boules) au deuxième etc, soit $P(X_n = n)\frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1} \times \cdots \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{n!}$.

(b) Il suffit de reprendre le résultat de la question 1.c) et appliquer la formule des probabilités totales : pour $j \geqslant 2$, $P(X_n = j) = \sum_{k=2}^{k=n} P(I_n = k) \times P_{I_n=k}(X_{k-1} = j-1) = \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{1}{n} P(X_k = j-1)$ (avec un petit changement d'indice). Si $j = 1$, ça marche aussi puisque $P(X_n = 1) = \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} P(X_{n-1} = 1)$ (le deuxième terme de la somme étant ici nul).

(c) Calculons donc : $nP(X_n = j) - (n-1)P(X_{n-1} = j) = \sum_{k=1}^{k=n-1} P(X_k = j-1) - \sum_{k=1}^{k=n-2} P(X_k = j-1) = P(X_{n-1} = j-1)$, donc en divisant tout par n, $P(X_n = j) = \frac{n-1}{n} P(X_{n-1} = j) + \frac{1}{n} P(X_{n-1} = j-1)$.

4. (a) Par définition, $E(X_n) = \sum_{j=1}^{j=n} jP(X_n = j) = \frac{n-1}{n} \sum_{j=1}^{j=n} jP(X_{n-1} = j) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{j=n} jP(X_{n-1} = j-1) = \frac{n-1}{n} E(X_{n-1}) + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} (k+1)P(X_{n-1} = k)$ en effectuant un petit changement d'indice. En découpant la dernière somme en deux, on a donc $E(X_n) = \frac{n-1}{n} E(X_{n-1}) + \frac{1}{n} E(X_{n-1}) + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} P(X_{n-1} = k) = E(X_{n-1}) + \frac{1}{n}$.

(b) Puisque $E(X_1) = 1$, on aura $E(X_n) = 1 + \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k}$, soit $E(X_n) = h_n$, et $E(X_n) \sim \ln n$.

(c) Par un calcul exactement similaire au précédent, $E(X_n^2) = \frac{n-1}{n} E(X_n^2) + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} (k+1)^2 P(X_{n-1} = k)$, soit en développant et découpant $E(X_n^2) = E(X_{n-1}^2) + \frac{2}{n} E(X_{n-1}) + \frac{1}{n}$.

(d) Effectuons une petite récurrence : pour $n = 1$, $V(X_1) = 0$ puisque la variable est constante, et $h_1 - k_1 = 1 - 1 = 0$, ça marche. Supposons le résultat vrai au rang n, alors en utilisant la formule de König-Huygens, $V(X_{n+1}) = E(X_{n+1}^2) - (E(X_{n+1}))^2 = E(X_n^2) + \frac{2}{n+1} E(X_n) + \frac{1}{n+1} - h_{n+1}^2 = h_n - k_n + h_n^2 + \frac{2}{n+1} h_n + \frac{1}{n+1} - \left(h_n + \frac{1}{n+1}\right)^2 = h_n + \frac{1}{n+1} - k_n - \frac{1}{(n+1)^2} = h_{n+1} - k_{n+1}$ (on a simplement utilisé ici l'hypothèse de récurrence sous la forme $E(X_n^2) = V(X_n) + E(X_n)^2 = h_n - k_n + h_n^2$). La récurrence est achevée et la formule démontrée.

(e) En reprenant les résultats de la partie préliminaire, $V(X_n) \sim \ln n$.

Partie 2 : Etude de la variable aléatoire Y_n.

1. (a) Si l'urne contient initialement deux boules, on a deux possibilités : soit on tire immédiatement la boule 1, auquel cas $Y_2 = 1$, soit on tire la boule 2 puis la boule 1, et $Y_2 = 2+1 = 3$, donc $Y_2(\Omega) = \{1; 3\}$.

(b) Les deux possibilités citées étant équiprobables, $P(Y_2 = 1) = P(Y_2 = 3) = \frac{1}{2}$.

2. (a) On a déjà vu ce genre de raisonnement dans la première partie : si $I_n = k$, on recommence notre expérience sur une urne contenant $k-1$ boules, et il faudra ajouter k à la valeur

obtenue pour Y_{k-1} lors des tirages suivants. Autrement dit, $Y_n = k+Y_{k-1}$, et $P_{I_n=k}(Y_n = j) = P(k+Y_{k-1} = j) = P(Y_{k-1} = j-k)$.

(b) Encore une fois, calquons la première partie, en commençant par appliquer la formule des probabilités totales : pour $j \geqslant 2$, $P(Y_n = j) = \sum_{k=2}^{k=n} P(I_n = k) \times P_{I_n=k}(Y_{k-1} = j-k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n-1} P(Y_k = j-k-1)$ (attention en faisant le changement d'indice...). On calcule ensuite $nP(Y_n = j) - (n-1)P(Y_{n-1} = j) = \sum_{k=1}^{k=n-1} P(Y_k = j-k-1) - \sum_{k=1}^{k=n-2} P(Y_k = j-k-1) = P(Y_{n-1} = j-n)$. On en déduit la formule demandée en divisant tout par n. Encore une fois, on vérifie sans difficulté que la formule reste vraie si $j = 1$ puisque $P(Y_n = 1) = \frac{1}{n}$.

(c) Encore un calcul similaire à celui fait pour X_n, si ce n'est qu'on ne connait pas les valeurs prises par Y_n (en fait on peut calculer que ça se situe entre 1 et $\frac{n(n+1)}{2}$), d'où la nécessité d'élargir la somme : $E(Y_n) = \sum_{j=1}^{+\infty} jP(Y_n = j) = \frac{n-1}{n}\sum_{j=1}^{+\infty} jP(Y_{n-1} = j) + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{+\infty} jP(Y_{n-1} = j-n) = \frac{n-1}{n}E(Y_{n-1}) + \frac{1}{n}\sum_{k=-n}^{+\infty}(k+n)P(Y_{n-1} = k) = \frac{n-1}{n}E(Y_{n-1}) + \frac{1}{n}E(Y_{n-1}) + \sum_{k=-n}^{+\infty} P(Y_{n-1} = k) = E(Y_n) + 1$.

Comme $E(Y_1) = 1$ (la variable Y_1 est toujours égale à 1), on en déduit aisément que $E(Y_n) = n$ (on peut d'ailleurs vérifier que $E(Y_2) = 2$ avec les calculs effectués en début de deuxième partie).

3.
```
PROGRAM hec ;
USES wincrt ;
VAR n,x,y,i : integer ;
BEGIN
Randomize ;
WriteLn('Choisissez la valeur de n') ;
ReadLn(n) ;
x := 0 ; y := 0 ;
REPEAT
i := random(n)+1 ;
x := x+1 ; y := y+i ;
n := i-1 ;
UNTIL i = 1 ;
WriteLn('On a effectué ',x,' tirages') ;
WriteLn('La somme des nombres tirés vaut ',y) ;
END.
```

Devoir Surveillé n°10

ECE3 Lycée Carnot

4 juin 2010

Durée : 2H. Calculatrices interdites.

Exercice 1 (EM Lyon 2004)

On se place dans l'ensemble $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on note, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $E_A = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = M\}$, et $F_A = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid A^2M = AM\}$.

1. Montrer qu'on a toujours $E_A \subset F_A$, et que, dans le cas où A est inversible, $E_A = F_A$.
2. Montrer que, si $A - I$ est inversible, $E_A = \{0\}$.
3. On pose $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer E_B et F_B.
4. On pose désormais $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
   (b) Calculer $P^{-1}CP$ (on notera désormais $D = P^{-1}CP$).
   (c) Montrer que $M \in E_C \Leftrightarrow P^{-1}M \in E_D$.
   (d) Déterminer l'ensemble E_D.
   (e) En déduire E_C.

Exercice 2

On effectue une série de lancers d'une pièce équilibrée jusqu'à obtenir un premier Pile. On note Z le nombre de lancers ainsi effectués, puis si ce nombre de lancers a été égal à k, on remplit une urne de k boules numérotées de 1 à k, on tire une boule au hasard dans cette urne et on note X le numéro de la boule tirée. Dans le cas (extrêmement improbable) où on n'obtient jamais Pile lors de la série de lancers de la pièce, on considère que $X = 0$.

1. Rappeler la loi de Z, ainsi que son espérance et sa variance.
2. (a) Déterminer la loi conjointe du couple (Z, X) (en précisant clairement les valeurs pour lesquelles $P((Z = k) \cap (X = i)) = 0$).

   (b) En déduire que, $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $P(X = i) = \displaystyle\sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}$.

   (c) En admettant la formule $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{k=i}^{+\infty} a_{i,k} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{i=k} a_{i,k}$ (où $a_{i,k}$ est une expression pouvant dépendre des deux indices i et k), calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} P(X = i)$.
3. (a) Montrer que, $\forall i \geqslant 1$, $iP(X = i) \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{i-1}$, et en déduire que X admet une espérance.

   (b) En utilisant la même formule d'inversion des sommes qu'à la question 2.c), calculer $E(X)$.
4. (a) En vous inspirant des questions précédentes, montrer que X^2 admet un moment d'ordre 2 et que $E(X^2) = \dfrac{1}{6}\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(k+1)(2k+1)}{2^k}$.

   (b) Déterminer trois réels a, b et c tels que $\forall k \geqslant 1$, $(k+1)(2k+1) = ak(k-1) + bk + c$.

   (c) En déduire la valeur de $E(X^2)$, puis calculer $V(X)$.
5. On note dans cette question $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{x^k}{k}$.

   (a) Montrer que $\forall x \in [0; 1[$ $f_n'(x) = \dfrac{1 - x^n}{1 - x}$.

   (b) En déduire que $\forall n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k2^k} = \ln 2 - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx$.

   (c) Montrer que, $\forall n \geqslant 1$, $0 \leqslant \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx \leqslant \frac{1}{2^n}$, et en déduire $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx$.

   (d) Déduire des calculs précédents que $P(X = 1) = \ln 2$.

Corrigé du DS10

Exercice 1 (EM Lyon 2004)

1. Si $AM = M$, une simple multiplication à gauche par A donne $A^2M = AM$, d'où $E_A \subset F_A$. Si A est inversible, on peut multiplier l'égalité $A^2M = AM$ à gauche par A^{-1} pour obtenir $AM = M$, les deux égalités sont donc équivalentes et $E_A = F_A$.
2. Si $A - I$ est inversible, on a $AM = M \Leftrightarrow (A - I)M = 0 \Leftrightarrow M = 0$.
3. Comme B et $B - I$ sont inversibles (elle sont triangulaires supérieures sans 0 sur la diagonale), en exploitant les questions précédentes, $F_B = E_B = \{0\}$.
4. (a) Appliquons donc un petit pivot de Gauss :

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_1 - L_3$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice P est inversible, d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) On calcule $P^{-1}C = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, puis $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) En effet, $P^{-1}M \in E_D \Leftrightarrow DP^{-1}M = P^{-1}M \Leftrightarrow P^{-1}CPP^{-1}M = P^{-1}M \Leftrightarrow P^{-1}CM = P^{-1}M \Leftrightarrow CM = M$ (en multipliant par P à gauche pour la dernière équation).

(d) Posons $N = P^{-1}M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, on a alors $DN = \begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 0 & 0 & 0 \\ g & h & i \end{pmatrix}$. On aura donc $DN = N$ si $a = b = c = d = e = f = 0$, les trois derniers coefficients de la matrice étant quelconques.

(e) Il suffit de constater que $M = PN = \begin{pmatrix} g & h & i \\ g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

1. Cours : $Z \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$; $E(Z) = 2$ et $V(Z) = \dfrac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2$.
2. (a) Si $i > k$, on aura toujours $P((Z = k) \cap (X = i)) = 0$. Sinon, $\forall k \geqslant 1$, $\forall i \in \{1; \dots; k\}$, $P((Z = k) \cap (X = i)) = P(Z = k) \times P_{Z=k}(X = i) = \dfrac{1}{2^k} \times \dfrac{1}{k}$.

(b) C'est une simple application de la formule des probabilités totales au système complet d'évènements $(Z = k)$ (la somme débute à $k = i$ puisque la probabilité de l'intersection est nulle si $k < i$).

(c) On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = i) = \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{i=k} \frac{1}{k2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1$ (ce qui est normal).

3. (a) En effet, $\displaystyle iP(X = i) = \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{i}{k2^k} \leqslant \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$ (puisque toutes les valeurs que prend l'indice k sont plus grandes que i), soit $\displaystyle iP(X = i) \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+i}} = \frac{1}{2^i} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{i-1}}$. La série de terme général $iP(X = i)$ est à termes positifs et majorée par une série géométrique convergente, elle converge donc, ce qui signifie que X admet une espérance.

   (b) On a $\displaystyle E(X) = \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{k=i}^{+\infty} \frac{i}{k2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{i=k} \frac{i}{k2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k(k+1)}{2k2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k+1}{2^{k+1}} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{+\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} - 1\right) = \frac{3}{2}$.

4. (a) En reprenant les questions précédentes, $i^2P(X = i) \leqslant \dfrac{i}{2^{i-1}}$, qui est le terme général d'une série convergente, donc X^2 admet une espérance, et $\displaystyle E(X^2) = \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{k=i}^{+\infty} \frac{i^2}{k2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{i=k} \frac{i^2}{k2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6k2^k}$, d'où la formule demandée.

   (b) On a $(k+1)(2k+1) = 2k^2 + 3k + 1$, et $ak(k-1) + bk + c = ak^2 + (b-a)k + c$, par identification on obtient $a = 2$, $b = 5$ et $c = 1$.

   (c) Il s'ensuit que $\displaystyle E(X^2) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2k(k-1)+5k+1}{2^k} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k(k-1)}{2^k} + \frac{5}{6}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{2^k} + \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2^2} \times \frac{2}{(1-\frac{1}{2})^3} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{8}{6} + \frac{10}{6} + \frac{1}{6} = \frac{19}{6}$. Via König-Huygens, on a donc $V(X) = \dfrac{19}{6} - \dfrac{9}{4} = \dfrac{38-27}{12} = \dfrac{11}{12}$.

5. (a) En effet, $\displaystyle f_n'(x) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{kx^{k-1}}{k} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1-x^n}{1-x}$.

   (b) En intégrant l'équation précédente entre 0 et $\frac{1}{2}$, on obtient $\displaystyle f_n\left(\frac{1}{2}\right) - f_n(0) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-x^n}{1-x}$. Or, $f_n(0) = 0$, donc $\displaystyle f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k2^k} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x}dx - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}dx$. La première intégrale se calcule, elle est égale à $[-\ln(1-x)]_0^{\frac{1}{2}} = -\ln\dfrac{1}{2} + \ln 1 = \ln 2$, d'où la formule demandée.

   (c) La fonction sous l'intégrale étant positive, l'intégrale est bien positive. De plus, $\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$, $x^n \leqslant \dfrac{1}{2^n}$, et $\dfrac{1}{2} \leqslant 1 - x \leqslant 1$, donc $\dfrac{1}{1-x} \leqslant 2$, d'où en intégrant tout ça $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}dx \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{2^n}dx = \frac{1}{2^n}$. Une application évidente du théorème des gendarmes donne donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}dx = 0$.

(d) En passant à la limite dans la formule obtenue à la question 2, on a alors $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k} = \ln 2$.
Or, cette somme est justement égale à $P(X = 1)$, d'où le résultat final.

Devoir à la Maison n°1

ECE3 Lycée Carnot

à rendre le 23 septembre 2009

Exercice 1

Le retour du VRAI/FAUX. Justifier soigneusement chaque réponse (démontrer les résultats vrais, donner des contre-exemples quand c'est faux, éventuellement citer une hypothèse à ajouter pour rendre l'énoncé vrai) :

1. $\exists n \in \mathbb{Z}, \forall p \in \mathbb{Z}, n \leqslant p$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y > 0, x = e^y$.
3. $\forall a \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, \ln x < a$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R}, x < y < z$.
5. $\forall a > 0, \exists q \in \mathbb{Q}, \sqrt{2} \leqslant q \leqslant \sqrt{2} + a$.

Exercice 2

On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2(3 - 2\ln x)$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
2. Caculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Déterminer les variations de la fonction f.
4. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en son point d'abscisse 1.
5. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
6. Montrer que l'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution.
7. Déterminer la position relative de la courbe représentative de la fonction f et celle de la fonction $g : x \mapsto 3x^2$.
8. Représenter ces deux courbes le plus soigneusement possible dans un même repère.

Exercice 3

Étudier le plus complètement possible (limites, variations, représentation graphique) la fonction g définie par $g(x) = \left|\dfrac{x-1}{x^2 - 8x + 15}\right|$.

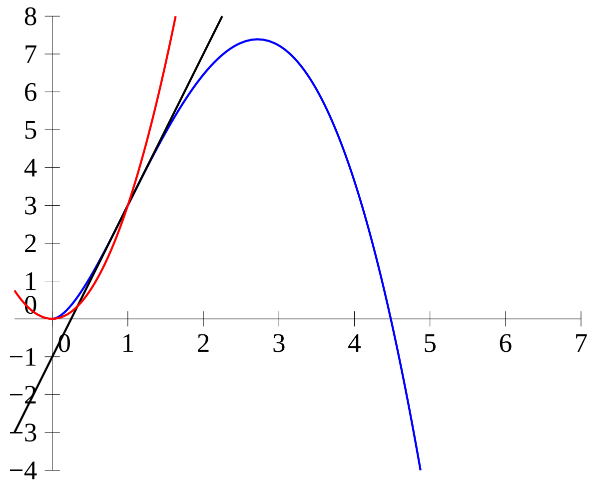
Corrigé du DM1

Exercice 1

1. Non, ce n'est pas vrai dans $\mathbb{Z}$, n est toujours strictement supérieur, par exemple, à $n-1$. Par contre, ce serait vrai avec n et p dans $\mathbb{N}$ (il suffit de prendre $n=0$).
2. Non, c'est complètement faux. Si $x \leqslant 0$, on ne peut pas trouver de $y \in \mathbb{R}$ tel que $x = e^y$ (puisque $e^y > 0$), donc encore moins avec $y > 0$. Ce qui est vrai c'est que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists y > 0$, $e^x = y$.
3. Oui, ça c'est vrai, cela signifie que la fonction ln peut prendre des valeurs aussi petites que l'on veut, et c'est en effet le cas (à cause de la limite égale à $-\infty$ en 0). Si on veut être plus précis, $\ln(e^a - 1) < \ln(e^a) = a$, donc $x = e^a - 1$ convient.
4. Non, si on n'interdit pas à x et y d'être égaux (et même à y d'être inférieur à x), ça ne peut pas marcher. Un contre-exemple facile : $x = y = 0$.
5. Oui, ça c'est vrai, mais ce n'est pas si facile que ça à justifier. Prenons un entier naturel (non nul) n tel que $\dfrac{1}{n} < a$ (il en existe, par exemple $n = Ent\left(\dfrac{1}{a}\right) + 1$), alors il existe un entier naturel p tel que $\dfrac{p}{n} \in]\sqrt{2}; \sqrt{2} + a[$. En effet, pour p suffisamment grand, $\dfrac{p}{n}$ finit par être plus grand que $\sqrt{2}$. Notons donc p_0 le plus grand entier tel que $\dfrac{p_0}{n} \leqslant \sqrt{2}$. On a donc $\dfrac{p_0+1}{n} > \sqrt{2}$, mais aussi $\dfrac{p_0+1}{n} < \sqrt{2} + a$, sinon on aurait $\dfrac{p_0+1}{n} - \dfrac{p_0}{n} \geqslant \sqrt{2} + a - \sqrt{2}$, c'est-à-dire $\dfrac{1}{n} \geqslant a$, ce qui contredit notre choix pour l'entier n.

Exercice 2

1. Une question très tranquille pour commencer : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^*$.
2. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 3 - 2\ln x = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. En 0, c'est un tout petit peu plus compliqué, on remarque que $f(x) = 3x^2 - 2x^2 \ln x$, et $\lim\limits_{x\to 0} 3x^2 = 0$, et $\lim\limits_{x\to 0} -2x^2 \ln x = 0$ (par croissance comparée), donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$
3. On n'a pas vraiment d'autre choix que de dériver (en général, c'est le cas quand on a un produit). On admet sans sourciller la dérivabilité sur $\mathbb{R}_+^*$ et on constate que $f'(x) = 2x(3 - 2\ln x) - 2x^2 \times \dfrac{1}{x} = 6x - 4x\ln x - 2x = 4x(1 - \ln x)$. Comme on est sur $\mathbb{R}_+^*$, seul compte le signe de la parenthèse, et $1 - \ln x \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln x \leqslant 1 \Leftrightarrow x \leqslant e$. La fonction f est donc strictement croissante sur $]0; e]$, et strictement décroissante sur $[e; +\infty[$. Elle atteint un maximum global en e, de valeur $f(e) = e^2(3 - 2\ln(e)) = e^2 \simeq 7,39$.
4. Pour $a = 1$, on a $f(a) = 1^2(3 - 2\ln 1) = 3$ et $f'(1) = 4(1 - \ln 1) = 4$, donc la tangente a pour équation $y = 4(x-1) + 3 = 4x - 1$.
5. On a $f(x) = 0$ si $x^2 = 0$ (mais ça n'arrivera pas sur $\mathbb{R}_+^*$) ou si $3 - 2\ln x = 0$, c'est-à-dire si $x = e^{\frac{3}{2}} \simeq 4,48$.
6. Cette équation ne risque pas d'avoir de solution sur $]0; e]$, où la fonction est positive puisque partant de 0 et strictement croissante. Ensuite, la fonction est strictement décroissante, et passe par -1 puisqu'elle a pour limite $-\infty$ en $+\infty$. Il y a donc bien une unique solution à l'équation $f(x) = -1$ (pour bien justifier les choses, il faut utiliser le théorème des valeurs intermédiaires, que nous reverrons plus tard dans l'année).
7. On a $f(x) - g(x) = 3x^2 - 2x^2 \ln x - 3x^2 = -2x^2 \ln x$, qui est du signe opposé à celui de $\ln x$. La courbe représentative de f est donc au-dessus de la courbe de g sur l'intervalle $]0; 1]$, et en-dessous sur $[1; +\infty[$. les deux courbes se coupent au point de coordonnées $(1; 3)$.
8. Voici le graphique demandé (les deux courbes et la tangente) :



Exercice 3

Commençons par donner le domaine de définition de g, ce qui nécessite de résoudre l'équation $x^2 - 8x + 15 = 0$. Ce trinome a pour discriminant $\Delta = 64 - 60 = 4$, et admet deux racines réelles $x_1 = \dfrac{8-2}{2} = 3$, et $x_2 = \dfrac{8+2}{2} = 5$. On a donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{3; 5\}$.

On peut maintenant obtenir facilement le signe du quotient situé à l'intérieur de la valeur absolue :

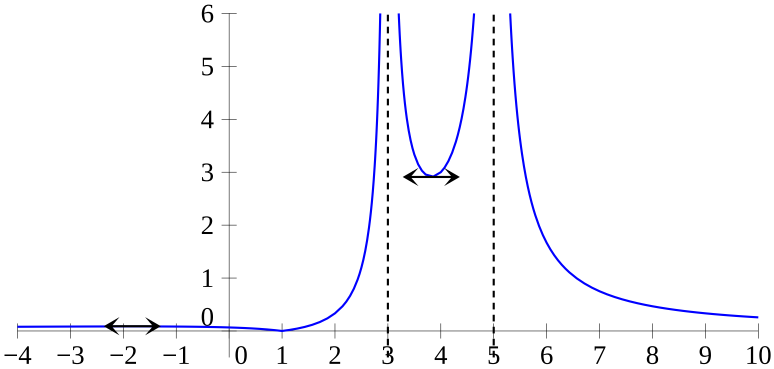
x		1		3		5	
$x-1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x^2-8x+15$	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
$\frac{x-1}{x^2-8x+15}$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$

Il suffit maintenant d'étudier les variations du quotient sans valeur absolue pour obtenir facilement celles de g : le signe et le sens de variation vont changer sur les intervalles où le quotient est négatif, et rester identiques sur ceux où il est positif. Notons donc $h(x) = \dfrac{x-1}{x^2-8x+15}$, et dérivons : $h'(x) = \dfrac{x^2-8x+15-(2x-8)(x-1)}{(x^2-8x+15)^2} = \dfrac{-x^2+2x+7}{(x^2-8x+15)^2}$. Seul le signe du numérateur nous intéresse, c'est un trinome de discriminant $\Delta = 4 + 28 = 32$, qui admet deux racines réelles $x_3 = \dfrac{-2-\sqrt{32}}{-2} = 1+2\sqrt{2}$, et $x_2 = \dfrac{-2+\sqrt{32}}{-2} = 1-2\sqrt{2}$. Si on est courageux, on cherche à calculer les images par h de ces deux valeurs : $h\left(1+2\sqrt{2}\right) = \dfrac{2\sqrt{2}}{(1+2\sqrt{2})^2 - 8(1+2\sqrt{2}) + 15} = \dfrac{2\sqrt{2}}{1+4\sqrt{2}+8-8-16\sqrt{2}+15} = \dfrac{2\sqrt{2}}{16-12\sqrt{2}} = \dfrac{1}{4\sqrt{2}-6} \simeq -2,91$. De même, on obtient $f(1-2\sqrt{2}) = -\dfrac{1}{4\sqrt{2}+6} \simeq -0,09$ (on aura du mal à voir cette valeur sur le graphique mais c'est la vie).

Reste à gérer le souci des limites. En fait, encore une fois, il suffit de calculer les limites de h et de changer éventuellement le signe. Quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, on constate que la limite vaut 0 (je ne détaille pas les calculs, comme on reverra les limites plus tard au cours de l'année, on sera plus à l'aise avec ce genre de calculs à ce moment-là). De même, les limites quand x tend vers 3 ou 5 (que ce soit par valeurs inférieures ou supérieures) sont toujours infinies, donc les limites correspondantes pour g seront toutes égales à $+\infty$. Voici donc le tableau de variations complet de g :

x	$-\infty$		$1-2\sqrt{2}$		1		3		$1+2\sqrt{2}$		5		$+\infty$
$h(x)$	0	$\searrow$	$-0,09$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty \;\Vert\; -\infty$	$\nearrow$	$-2,91$	$\searrow$	$-\infty \;\Vert\; +\infty$	$\searrow$	0
$g(x)$	0	$\nearrow$	$0,09$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty \;\Vert\; +\infty$	$\searrow$	$2,91$	$\nearrow$	$+\infty \;\Vert\; +\infty$	$\searrow$	0

Et pour conclure, voici la courbe représentative de g (asymptotes en pointillés et extrema soulignés par une double flèche) :



Devoir à la Maison n°2

ECE3 Lycée Carnot

à rendre le 5 novembre 2009

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + n - 1$. On pose ensuite $v_n = 4u_n - 6n + 15$.

1. Prouver que la suite (v_n) est d'un type bien connu et en déduire la valeur de v_n.
2. Calculer la valeur de u_n.
3. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} u_k$.

Exercice 2

On considère l'application f définie par $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer si f est injective ou surjective sur $\mathcal{D}_f$.
3. Montrer que f est bijective de $[0;2[\cup]2;+\infty[$ vers un ensemble à déterminer.
4. On note g la réciproque de f (restreinte à $[0;2[\cup]2;+\infty[$). Déterminer l'expression de $g(x)$.

Exercice 3

1. Déterminer quatre réels a, b, c et d tels que $\forall k \geqslant 1$,
$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2} + \frac{d}{k+3}$$
.
2. À l'aide de la question précédente, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$.
3. Vérifier la formule obtenue à la question précédente à l'aide d'une démonstration par récurrence.

Problème (premier exercice Ecricome 99, à peine modifié)

Préliminaire

Soit (x_n) une suite numérique qui vérifie, pour tout entier naturel n, la relation :

$$x_{n+2} = \frac{1}{3}x_{n+1} + \frac{1}{3}x_n$$

1. Résoudre l'équation caractéristique de cette suite et, sans chercher à déterminer les coefficients α et β, donner l'allure du terme général de la suite.
2. En déduire la limite de la suite (x_n).

On étudie désormais la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = a \geqslant 1$; $u_1 = b \geqslant 1$, et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+2} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}}$$

Question 1

1.a : Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n est bien défini et vérifie : $u_n \geqslant 1$.

1.b : Ecrire un programme en Turbo Pascal qui calcule et affiche la valeur de u_n pour des valeurs de a et b réelles supérieures ou égales à 1 et de n entier supérieur ou égal à 2, entrées par l'utilisateur.

Question 2

On se propose d'établir la convergence de la suite (u_n) par l'étude d'une suite auxiliaire (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \dfrac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1$

2.a : Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$

2.b : Vérifier, pour tout entier n, que $v_{n+2} = \dfrac{v_{n+1} + v_n}{2(2 + v_{n+2})}$.

En déduire que : $|v_{n+2}| \leqslant \dfrac{1}{3}(|v_n| + |v_{n+1}|)$.

2.c : On note (x_n) la suite définie par : $x_0 = |v_0|$, $x_1 = |v_1|$ et pour tout entier naturel n :

$$x_{n+2} = \frac{1}{3}x_{n+1} + \frac{1}{3}x_n$$

Montrer que, pour tout entier naturel n, $|v_n| \leqslant x_n$ et conclure quant à la convergence de la suite (u_n).

Corrigé du DM2

Exercice 1

1. Essayons donc d'exprimer v_{n+1} en fonction de v_n : $v_{n+1} = 4u_{n+1} - 6(n+1) + 15 = \frac{4}{3}u_n + 4n - 4 - 6n - 6 + 15 = \frac{4}{3}u_n - 2n + 5 = \frac{1}{3}(4u_n - 6n + 15) = \frac{1}{3}v_n$. La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = 4u_0 - 0 + 15 = 19$.

2. On a d'après la question précédente $v_n = \frac{19}{3^n}$, donc $u_n = \frac{v_n + 6n - 15}{4} = \frac{19}{4 \times 3^n} + \frac{3}{2}n - \frac{15}{4}$.

3. C'est un calcul un peu brutal, mais qui ne fait intervenir que des sommes classiques : $\sum_{k=0}^{k=n} u_k = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{19}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^k + \frac{3}{2}k - \frac{15}{4} = \frac{19}{4} \times \frac{1-(\frac{1}{3})^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} + 3n(n+1) - \frac{15}{4}n = \frac{57}{8}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right) + 3n(n+1) - \frac{15}{4}n$ (on va se dispenser de tenter de simplifier plus).

Exercice 2

1. Un calcul sommaire donne $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-2; 2\}$.

2. Pour voir si f est injective, supposons donc $\frac{x^2}{x^2-4} = \frac{x'^2}{x'^2-4}$, ce qui donne $(x^2(x'^2 - 4) = x'^2(x^2-4)$ puis $-4x^2 = -4x'^2$. Ceci n'implique pas que $x = x'$ (on peut aussi avoir $x = -x'$), la fonction n'est pas injective. On a par exemple $f(1) = f(-1) = -\frac{1}{3}$. Pour la surjectivité, partons de $y = \frac{x^2}{x^2-4}$, ce qui donne $yx^2 - 4y = x^2$, soit $x^2(y-1) = 4y$, ou encore $x^2 = \frac{4y}{y-1}$. Cette équation n'a pas de solution lorsque $y = 1$, donc la fonction f n'est pas non plus surjective.

3. Sur l'ensemble en question, f devient injective puisque seul l'antécédent positif de y est valable (et il y en a toujours un positif et un négatif parmi les deux). Reste à déterminer quels sont les valeurs de y pour lesquelles $x^2 = \frac{4y}{y-1}$ admet une solution, c'est-à-dire les valeurs pour lesquelles $\frac{4y}{y-1} \geqslant 0$. Un petit tableau de signe permet de déterminer que l'ensemble d'arrivée de f sera $]-\infty; 0] \cup]1; +\infty[$.

4. D'après les calculs précédents, g est définie sur $]-\infty; 0] \cup]1; +\infty[$ par $g(y) = \sqrt{\frac{4y}{y-1}}$.

Exercice 3

1. C'est un calcul qui fait un peu peur mais qui n'est au fond pas très compliqué :

$$\begin{aligned}
& \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2} + \frac{d}{k+3} \\
= & \frac{a(k+1)(k+2)(k+3) + bk(k+2)(k+3) + ck(k+1)(k+3) + dk(k+1)(k+2)}{k(k+1)(k+2)(k+3)} \\
= & \frac{a(k^3+6k^2+11k+6) + b(k^3+5k^2+6k) + c(k^3+4k^2+3k) + d(k^3+3k^2+2k)}{k(k+1)(k+2)(k+3)} \\
= & \frac{(a+b+c+d)k^3 + (6a+5b+4c+3d)k^2 + (11a+6b+3c+2d)k + 6a}{k(k+1)(k+2)(k+3)}
\end{aligned}$$

Si on veut que l'égalité de l'énoncé soit vérifie, on doit donc avoir $a = \frac{1}{6}$ (égalité des coefficients constants), puis $b+c+d = -a = -\frac{1}{6}$; $5b+4c+3d = -6a = -1$ et $6b+3c+2d = -11a = -\frac{11}{6}$. La soustraction des deux premières équations donne $4b+3c+2d = -\frac{5}{6}$, ce qu'on peut soustraire à la troisième équation pour avoir $2b = -\frac{11}{6} + \frac{5}{6} = -1$, soit $b = -\frac{1}{2}$. La première équation devient alors $c+d = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$, et la deuxième $4c+3d = -1 + \frac{5}{2} = \frac{3}{2}$. On a donc $d = \frac{1}{3} - c$, d'où $4c + 1 - 3c = \frac{3}{2}$, soit $c = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$. Enfin, $d = \frac{1}{3} - c = -\frac{1}{6}$. Conclusion de ce superbe calcul : $\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{6k} - \frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{2(k+2)} - \frac{1}{6(k+3)}$.

2. La somme en question est une somme télescopique (mais oui !) : $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{6k} - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{2(k+1)} + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{2(k+2)} - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{6(k+3)} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{6k} - \sum_{k=2}^{k=n+1} \frac{1}{2k} + \sum_{k=3}^{k=n+2} \frac{1}{2k} - \sum_{k=4}^{k=n+3} \frac{1}{6k} = \sum_{k=4}^{k=n} \frac{1}{6k} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{18} - \sum_{k=4}^{k=n} \frac{1}{2k} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{2(n+1)} + \sum_{k=4}^{k=n} \frac{1}{2k} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} - \sum_{k=4}^{k=n} \frac{1}{6k} - \frac{1}{6(n+1)} - \frac{1}{6(n+2)} - \frac{1}{6(n+3)} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{18} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2(n+2)} - \frac{1}{6(n+1)} - \frac{1}{6(n+2)} - \frac{1}{6(n+3)} = \frac{1}{18} + \frac{1}{3(n+2)} - \frac{1}{6(n+1)} - \frac{1}{6(n+3)} = \frac{1}{18} + \frac{2(n+1)(n+3) - (n+2)(n+3) - (n+1)(n+2)}{6(n+1)(n+2)(n+3)}$
$= \frac{1}{18} + \frac{2n^2+8n+6-n^2-5n-6-n^2-3n-2}{6(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{18} - \frac{1}{3(n+1)(n+2)(n+3)}$. Vous voyez, ce n'est pas si compliqué que ça, finalement...

3. Notons P_n la propriété : $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{18} - \frac{1}{3(n+1)(n+2)(n+3)}$. Pour $n = 1$, le membre de gauche vaut $\frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = \frac{1}{24}$, et le membre de droite vaut $\frac{1}{18} - \frac{1}{3(2 \times 3 \times 4)} = \frac{1}{18} - \frac{1}{72} = \frac{3}{72} = \frac{1}{24}$. Ouf, ça marche ! Supposons désormais P_n vérifiée, on a alors $\sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} =$ (par hypothèse de récurrence) $\frac{1}{18} - \frac{1}{3(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} = \frac{1}{18} + \frac{-(n+4)+3}{3(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} = \frac{1}{18} + \frac{-(n+1)}{3(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$
$= \frac{1}{18} - \frac{1}{3(n+2)(n+3)(n+4)}$, ce qui est exactement ce que stipule P_{n+2}. La propriété est donc bien prouvée par récurrence.

Problème

Préliminaire

1. L'équation caractéristique $x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$ a pour discriminant $\Delta = \frac{1}{9} + \frac{4}{3} = \frac{13}{9}$, et l'équation admet donc deux solutions $x_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{6}$ et $x_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{6}$. Le terme général de la suite est

donc de la forme $x_n = \alpha \left(\dfrac{1+\sqrt{13}}{6} \right)^n + \beta \left(\dfrac{1-\sqrt{13}}{6} \right)^n$.

2. Les deux racines x_1 et x_2 étant comprises strictement entre -1 et 1, la suite (x_n) est une somme de deux suites convergeant vers 0, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

Question 1

1.a : Prouvons donc par récurrence double la propriété P_n : $u_n \geqslant 1$. C'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$ par hypothèse. Supposons désormais la propriété vérifiée par u_n et u_{n+1}. On a alors $\sqrt{u_n} \geqslant 1$ et $\sqrt{u_{n+1}} \geqslant 1$, donc $u_{n+2} \geqslant 1 + 1 = 2$ et a fortiori $u_{n+2} \geqslant 1$, ce qui achève la récurrence.

1.b :
```
PROGRAM valeurs;
USES wincrt;
VAR a,b,u,v,w : real; i,n : integer;
BEGIN
WriteLn('Choisissez des valeurs supérieures à 1 pour les réels a et b');
ReadLn(a,b);
WriteLn('Choisissez une valeur supérieure à 2 pour l'entier n');
ReadLn(n);
u := a; v := b;
FOR i := 2 TO n DO
BEGIN
w := sqrt(u)+sqrt(v);
u := v;
v := w;
END;
WriteLn('La valeur de u',n,' est ',v);
END.
```

Question 2

2.a : D'après la définition de v_n, on a $2(v_n+1) = \sqrt{u_n}$, ou encore $4(v_n+1)^2 = u_n$, soit $u_n = 4v_n^2 + 8v_n + 4$. Si la suite (v_n) converge vers 0, on en déduit bien, par somme de limites, que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$.

2.b : Calculons donc $\dfrac{v_{n+1}+v_n}{2(2+v_{n+2})} = \dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{u_{n+1}} - 1 + \frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1}{2(2+v_{n+2})} = \dfrac{u_{n+2}-4}{4(2+v_{n+2})} = \dfrac{4v_{n+2}^2 + 8v_{n+2}}{8+4v_{n+2}} = v_{n+2}$ (on a utilisé le calcul de la question précédente). On a donc $|v_{n+2}| = \dfrac{|v_{n+1}+v_n|}{2|2+v_{n+2}|}$. Or, on sait que $|v_{n+1}+v_n| \leqslant |v_{n+1}| + |v_n|$ (inégalité triangulaire) et d'autre part que $u_n \geqslant 1$, donc $v_n = \dfrac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1 \geqslant -\dfrac{1}{2}$. On peut en déduire que $2 + v_{n+2} \geqslant \dfrac{3}{2}$, d'où finalement $|v_{n+2}| \leqslant \dfrac{|v_{n+1}|+|v_n|}{2\times\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{3}(|v_{n+1}|+|v_n|)$.

2.c : C'est une récurrence double, mais assez simple malgré tout : notons P_n la propriété $|v_n| \leqslant x_n$. Par hypothèse, P_0 et P_1 sont vraies (on a même égalité), et, si on suppose à la fois $|v_n| \leqslant x_n$ et $|v_{n+1}| \leqslant x_{n+1}$, on a alors, en utilisant le résultat de la question précédente, $|v_{n+2}| \leqslant \dfrac{1}{3}(|v_{n+1}|+|v_n|) \leqslant \dfrac{1}{3}(x_{n+1}+x_n) = x_{n+2}$, donc on a bien $|v_{n+2}| \leqslant x_{n+2}$, ce qui achève la récurrence.

Comme on sait (question préliminaire du problème) que (x_n) converge vers 0, et que par ailleurs $|v_n| \geqslant 0$ (comme toute valeur absolue qui se respecte), on peut conclure du théorème des gendarmes que $\lim\limits_{n\to+\infty} |v_n| = 0$. Si la valeur absolue de (v_n) tend vers 0, (v_n) également, et la question 2.*a* nous permet donc d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$.

Devoir à la Maison n°3

ECE3 Lycée Carnot

à rendre le 26 novembre 2009

Exercice 1

On lance simultanément 4 dés à six faces équilibrés. Déterminer le nombre de lancers possibles vérifiant chacune des conditions suivantes :

1. On n'obtient que des chiffres supérieurs ou égaux à 4.
2. On obtient au moins un 6.
3. On obtient 3 chiffres pairs et un chiffre impair.
4. On obtient quatre chiffres différents.
5. On obtient quatre chiffres consécutifs.

Exercice 2 (EDHEC 97)

Pour tout entier naturel n non nul, on note f_n la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad f_n(x) = x - n.\ln(x).$$

1. (a) Etudier cette fonction et dresser son tableau de variations.
   (b) En déduire, lorsque n est supérieur ou égal à 3, l'existence de deux réels u_n et v_n solutions de l'équation $f_n(x) = 0$ et vérifiant $0 < u_n < n < v_n$.
2. Etude de la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$.
   (a) Montrer que $\forall n \geqslant 3, \quad 1 < u_n < e$.
   (b) Montrer que $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$, puis en conclure que (u_n) est décroissante.
   (c) En déduire que $(u_n)_{n\geqslant 3}$ converge et montrer, en encadrant $\ln(u_n)$, que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
   (d) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(u_n)}{u_n - 1} = 1$; en déduire que $u_n - 1 \sim \dfrac{1}{n}$.
3. Etude de la suite $(v_n)_{n\geqslant 3}$
   (a) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
   (b) Calculer $f_n(n \times \ln(n))$ puis montrer que $\forall n \geqslant 3, \quad n.\ln(n) < v_n$.
   (c) Soit g la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^\times, \quad g(x) = x - 2\ln(x)$.
   Etudier g et donner son signe. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^\times \quad , n > 2\ln(n)$.
   (d) En déduire le signe de $f_n(2n.\ln(n))$, puis établir que : $n\ln(n) < v_n < 2n.\ln(n)$
   (e) Montrer enfin que : $\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n \times \ln(n)$

Exercice 3

Un soir de semaine, dans un quartier parisien, six couples (distingables) décident d'aller dîner au restaurant. Il y a quatre restaurants dans le quartier et ces derniers n'auront pas d'autres clients que les couples qui viendront chez eux parmi les six (les pauvres ...). Calculer le nombre total de répartitions possibles, puis le nombre de cas où chacun des événements suivants est réalisé :

1. Tous les couples se retrouvent dans le même restaurant.
2. Trois couples se retrouvent au restaurant chinois, les trois autres au japonais (il n'y a qu'un chinois et un japonais parmi les quatre restaurants).
3. Deux des restaurants accueillent chacun trois couples, les deux autres sont vides.
4. Aucun restaurant n'est vide.
5. Exactement un restaurant est vide.
6. Les deux premiers couples, qui ne se supportent pas, se retrouvent seuls dans le même restaurant.

Corrigé du DM3

Exercice 1

Commençons par constater que le nombre total de tirages est de $6^4 = 1\ 296$.

1. Il ne reste plus que trois possibilités pour chaque dé, soit $3^4 = 81$ possibilités (ça n'arrivera pas souvent).
2. Il est plus simple de compter le nombre de tirages pour lesquels on n'obtient pas de 6 : il y en a $5^4 = 625$. Le nombre de tirages où il y a au moins un 6 est donc de $1\ 296 - 625 = 671$ (un peu plus de la moitié tout de même).
3. Il y a trois résultats possibles pour chaque dé (que ce soit un chuffre pair ou impair ne change rien), mais il faut également choisir lequel des quatre dés donnera le chiffre impair, ce qpour quoi on a quatre choix. Cela donne donc $3^4 \times 4 = 324$ tirages satisfaisant la condition stipulée.
4. Ca c'est simple : 6 choix pour le premier dé, 5 pour le deuxième, 4 pour le troisième et 3 pour le dernier, soit $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$ tirages (à peine plus d'un quart du total des tirages).
5. Difficile de faire mieux que de compter « à la main ». Pour obtenir quatre chiffres consécutifs, on a trois possibilités : $(1, 2, 3, 4)$; $(2, 3, 4, 5)$ et $(3, 4, 5, 6)$. Les dés étant tirés simultanément, l'ordre n'a pas d'importance, donc chacune de ces trois possibilités peut être réalisée de $4! = 24$ façons différentes (le nombre de permutations des quatre chiffres sur les quatre dés lancés). Soit $24 \times 3 = 72$ tirages possibles (à peine plus d'une fois sur 20).

Exercice 2 (EDHEC 97)

1. (a) La fonction f_n est dérivable sur son domaine de définition, et $f_n'(x) = 1 - \dfrac{n}{x} = \dfrac{x-n}{x}$. Cette dérivée est du signe de $x - n$ et s'annule donc pour $x = n$. La fonction f admet un minimum global en n, de valeur $f_n(n) = n - n \ln n = n(1 - \ln n)$. De plus, on a $\lim\limits_{x \to 0} f_n(x) = +\infty$ (pas de forme indéterminée), et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ par croissance comparée. D'où le tableau de variations suivant :

x	0		n		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$n(1-\ln n)$	$\nearrow$	$+\infty$

   (b) Si $n \geqslant 3$, $1 - \ln n < 0$, donc la fonction f_n s'annule une fois sur $]0; n[$, et une autre fois sur $]n; +\infty[$, d'où le résultat demandé.

2. (a) Calculons donc $f_n(1) = 1 - n \ln 1 = 1 > 0$, et $f_n(e) = e - n \ln e = e - n$. Si $n \geqslant 3$, $e - n < 0$, donc (en utilisant les théorème des valeurs intermédiaires par exemple, ou plus simplement en observant le tableau de variations de f_n), f_n s'annule entre 1 et e, d'où $1 < u_n < e$.

   (b) Calculons à nouveau : $f_n(u_{n+1}) = u_{n+1} - n \ln(u_{n+1})$. Or, par définition de u_{n+1}, on a $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$, c'est-à-dire que $u_{n+1} - (n+1) \ln u_{n+1} = 0$, ou encore $u_{n+1} = (n + 1) \ln(u_{n+1})$. On en déduit que $f_n(u_{n+1}) = (n+1) \ln(u_{n+1}) - n \ln(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$. Comme on vient de le voir, $u_{n+1} > 1$, donc $\ln(u_{n+1}) > 0$. Toujours en utilisant la décroissance de f_n sur $]0; n]$, on en déduit que $u_{n+1} < u_n$, c'est-à-dire que la suite (u_n) est decroissante.

   (c) La suite est décroissante et minorée par 1, donc converge. On a vu plus haut que $u_n = n \ln(u_n)$, ce qu'on peut aussi écrire $\ln(u_n) = \dfrac{u_n}{n}$, donc $\dfrac{1}{n} \leqslant \ln u_n \leqslant \dfrac{e}{n}$. D'après le théorème des gendarmes, $(\ln(u_n))$ converge donc vers 0, ce qui implique que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

(d) Maintenant qu'on sait que u_n converge vers 1, on peut aussi dire que $\lim_{n\to+\infty} u_n - 1 = 0$, ce dont on peut déduire (résultats classique de cours) que $\ln(1+u_n-1) \sim u_n - 1$, c'est-à-dire que $\ln u_n \sim u_n - 1$.Cela revient bien à $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln u_n}{u_n - 1} = 1$. Or, on sait que $\ln(u_n) = \frac{u_n}{n} \sim \frac{1}{n}$ puisque $u_n \sim 1$. On a donc $u_n - 1 \sim \ln u_n \sim \frac{1}{n}$. Une autre façon d'écrire les choses est de dire que $u_n = 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

3. (a) Puisque $v_n > n$, une simple application du théorème de comparaison permet d'affirmer que $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

(b) Calculons donc : $f_n(n \ln n) = n \ln n - n \ln(n \ln n) = n \ln n - n \ln n - n \ln(\ln n) = -n \ln(\ln n)$. Si $n \geqslant 3$, $\ln n \geqslant \ln 3 > 1$, donc $\ln(\ln n) > 0$, et $f_n(n \ln n) < 0$. En utilisant la croissance de f sur $[n; +\infty[$, on en déduit que $v_n < n \ln n$.

(c) L'étude a déjà été faite puisque g n'est autre que f_2. La fonction g est donc décroissante sur $]0; 2]$ et croissante sur $[2; +\infty[$, atteignant un minimum qui vaut $g(2) = 2(1 - \ln 2) > 0$. La fonction est donc toujours strictement positive. On peut en particulier en déduire que $\forall n \geqslant 1$, $g(n) > 0$, donc $n > 2 \ln n$.

(d) Encore un petit calcul : $f_n(2n \ln n) = 2n \ln n - n \ln(2n \ln n) = 2n \ln n - n \ln n - n \ln(2 \ln n) = n \ln n - n \ln(2 \ln n) = n(\ln n - \ln(2 \ln n)$. Or, d'après la question précédente, $n > 2 \ln n$, donc $\ln n > \ln(2 \ln n)$, et $f_n(2n \ln n) > 0$. En utilisant une dernière fois la croissance de f_n, on en déduit que $v_n < 2n \ln n$, d'où l'encadrement.

(e) Passons donc à la moulinette logarithmique l'encadrement précédent : $\ln(n \ln n) < \ln(v_n) \leqslant \ln(2n \ln n)$, soit $\ln n + \ln(\ln n) \leqslant \ln v_n \leqslant \ln 2 + \ln n + \ln \ln n$. Le mieux pour obtenir l'équivalent est de tout diviser par $\ln n$: $1 + \frac{\ln \ln n}{\ln n} \leqslant \frac{\ln v_n}{\ln n} \leqslant \frac{\ln 2}{\ln n} + 1 + \frac{\ln \ln n}{\ln n}$. Il ne reste plus qu'à constater que des deux côtés de l'encadrement on a des termes qui convergent vers 1, donc $\frac{\ln v_n}{\ln n}$ tend aussi vers 1, ce qui signifie bien que $v_n \sim \ln n$.

Exercice 3

Les couples et les restaurants étant distingables, on a 4 choix pour chaque couple, soit $4^6 = 4\ 096$ répartitions possibles.

1. Dans ce cas, il y a simplement 4 possibilités (une pour chaque restaurant).
2. Il faut choisir les trois couples qui vont au chinois, ce qui fait $\binom{6}{3}$ possibilités, et c'est tout puisqu'ensuite les trois couples qui restent vont nécessairement au japonais. Cela fait 20 possibilités.
3. Il faut choisir quels sont les deux restaurants vides (ou les deux pleins), puis choisir quels sont les trois couples qui vont dans le premier restaurant plein, soit $\binom{4}{2} \times \binom{6}{3} = 6 \times 20 = 120$.
4. En fait, ce n'est pas totalement évident sans formule sur le nombre de sujections (que vous ne connaissez pas). Il y a deux types de possibilité : un restaurant accueille trois couples, et les trois autres un couple, ou bien deux restaurants accueillent deux couples chacun et les deux autres un seul. Dans le premier cas, 4 choix pour le restaurant accueillant trois couples, $\binom{6}{3}$ choix pour les trois couples, et 3! permutations possibles pour les trois couples restants, soit $4 \times 20 \times 6 = 480$ possibilités. Dans le deuxième cas, $\binom{4}{2}$ choix pour les deux restaurants, $\binom{6}{2}$ choix de couple pour le premier restaurant, $\binom{4}{2}$ choix de couples pour le deuxième, et encore 2! possibilités de répartir les deux derniers couples dans les deux derniers restaurants, soit au

total $6 \times 15 \times 6 \times 2 = 1\ 080$ possibilités. En additionnant les deux, il y a donc 1 560 cas où aucun restaurant n'est vide. On peut aussi s'en sortir avec la formule de Poincaré en regardant le complémentaire.

5. On a calcule le nombre de cas où il n'y a pas de restaurant vide (question 3), et celui où 3 restaurants sont vides (question 1). On ne peut pas avoir quatre restaurants vides. Calculons les possibilités pour que 2 restaurants exactement soient vides. Il faut choisir les deux restaurants pleins, $\binom{4}{2}$ possibilités, ensuite on répartit les six couples dans les deux derniers, 2^6 possibilités auxquelles on enlève les deux cas où ils vont tous dans le même restaurant (on ne veut pas de troisième restaurant vide). Cela fait donc $\binom{4}{2}(2^6-2) = 372$ cas où deux restaurants exactement sont vides. Le nombre de cas où un restaurant est vide est donc $4\ 096 - 1\ 560 - 372 - 4 = 2\ 160$ (c'est le cas le plus fréquent).
6. On a le choix du restaurant dans lequel les deux couples en question se retrouvent (4 possibilités), puis 3 choix de restaurant pour chacun des 4 autres couples, soit $4 \times 3^4 = 324$ possibilités.

Devoir à la Maison n°4

ECE3 Lycée Carnot

à rendre le 17 décembre 2009

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(t) = \ln(1+t) + \dfrac{t^2}{t^2+1}$.

1. Montrer que la fonction f est continue et strictement croissante.
2. En déduire que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers un intervalle à préciser.
3. On note g la réciproque de f. Dresser le tableau de variations de g.
4. Déterminer les éventuelles branches infinies de f.
5. Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ admet une unique solution, qu'on notera désormais u_n.
6. Étudier la monotonie de la suite (u_n).
7. Montrer que la suite est convergente et déterminer sa limite.
8. Déterminer $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(t)}{t}$, et en déduire un équivalent simple de u_n.

Exercice 2

On note dans tout cet exercice $H_n = \sum\limits_{k=1}^{k=n} \dfrac{1}{k}$, $a_n = H_n - \ln n$ et $b_n = H_n - \ln(n+1)$.

1. Montrer que, $\forall n \geqslant 2$, $\ln(n+1) - \ln n \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant \ln n - \ln(n-1)$.
2. En déduire que, $\forall n \geqslant 1$, $\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant \ln n + 1$, puis déterminer la limite et un équivalent de la suite (H_n).
3. Démontrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes (on aura besoin d'étudier les fonctions $f : x \mapsto \ln(x+1) - \ln x - \dfrac{1}{x+1}$ et $g : x \mapsto \ln(x+2) - \ln(x+2) - \dfrac{1}{x+1}$).
4. En déduire l'existence d'une réel qu'on notera γ tel que $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$.
5. On note désormais S_n la série de terme général $\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$. Exprimer S_n en fonction de H_n et de H_{2n}et, à l'aide du résultat de la question précédente, en déduire la convergence et la somme de S_n.

6. On s'intéresse dans cette question à la série T_n de terme général $\dfrac{1}{\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} k^2}$.

   (a) Exprimer u_n en fonction de n.

   (b) Déterminer trois réels a, b et c tels que $u_n = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{n+2}$.

   (c) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{2k+1} = H_{2n+1} - \frac{H_n}{2} - 1$.

   (d) À l'aide de ce calcul et des résultats des questions précédentes, calculer la somme de la série T_n.

Corrigé du DM4

Exercice 1

1. Un bug d'impression que je n'arrive toujours pas à m'expliquer a apparemment fait disparaitre un carré du numérateur de la version f dans la version du DM que je vous ai distribuée (carré qui est bel et bien présent sur le fichier d'origine et sur la version visible sur ma page web, c'est vraiment très très bizarre), ce qui rend la fonction un peu plus pénible à étudier : la fonction f est continue sur son domaine de définition comme somme, produit et composée de fonctions usuelles. De plus, $f'(t) = \frac{1}{1+t} + \frac{t^2+1-2t^2}{(t^2+1)^2} = \frac{(t^2+1)^2 - t^2(1+t)}{(1+t)(t^2+1)^2} = \frac{t^4+2t^2+1-t^2-t^3}{(1+t)(t^2+1)^2)}$. Le numérateur de cette dérivée vaut $t^4 - t^3 + t^2 + 1$, expression qui est strictement positive quand $t \in [0;1[$ car on a alors $t^2 > t^3$, mais aussi quand $t > 1$ car on a alors $t^4 \geqslant t^3$. La dérivée de f est donc toujours strictement positive, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Il suffit de calculer les limites de f en 0 et $+\infty$ pour déterminer l'image de $\mathbb{R}_+^*$ par f. La limite en 0 vaut 0 sans difficulté. Quand à la limite en $+\infty$, elle vaut $+\infty$ puisque $f(t) \geqslant \ln(t+1)$ et $\ln(t+1)$ tend déjà vers $+\infty$ en $+\infty$. La fonction f réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même.
3. Une simple application du théorème de la bijection permet d'affirmer que g est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, est strictement croissante comme f, et admet les mêmes limites que f en 0 et en $+\infty$.
4. Il n'y a qu'une branche infinie à déterminer, c'est en $+\infty$. On a vu que f y avait pour limite $+\infty$, et $\frac{f(t)}{t} = \frac{\ln(1+t)}{t} + \frac{1}{t^2+1}$. La deuxième fraction a pour limite 0, quant à la première elle est équivalente à $\frac{\ln t}{t}$ et tend donc également vers 0 en $+\infty$ par croissance comparée. Conclusion, f admet une branche parabolique de direction (Ox) en $+\infty$.
5. Il suffit de constater que $\frac{1}{n} \in \mathbb{R}_+^*$ et d'utiliser le fait que f est bijective à valeurs dans cet ensemble.
6. Puisque $f(u_n) = \frac{1}{n}$ et $f(u_{n+1}) = \frac{1}{n+1}$, on a donc $f(u_n) > f(u_{n+1})$. En appliquant à cette inégalité la croissance stricte de la fonction g, on obtient $g(f(u_n)) > g(f(u_{n+1}))$, soit $u_n > u_{n+1}$. La suite (u_n) est donc strictement décroissante.
7. La suite étant décroissante minorée par 0 (puisque f n'est définie que sur $\mathbb{R}_+^*$, elle converge. Notons l sa limite. Comme $u_n = g\left(\frac{1}{n}\right)$, et que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, on doit avoir par continuité de la fonction g, $l = \lim_{t\to 0} g(t)$, soit $l = 0$. La suite converge donc vers 0.
8. En reprenant l'expression de $\frac{f(t)}{t}$ donnée plus haut, et en utilisant le fait que $\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$ (limite classique), on obtient $\lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{t} = 2$. Comme (u_n) a pour limite 0, on peut en déduire que $\lim_{n\to+\infty} \frac{f(u_n)}{u_n} = 2$, soit $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{nu_n} = 2$. Cela revient à dire que $u_n \sim \frac{1}{2n}$.

Exercice 2

1. Pour montrer l'inégalité de gauche, étudions la fonction $h : x \mapsto \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x}$. Cette fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $h'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - x(x+1) + x + 1}{x^2(x+1)} = \frac{1}{x^2(x+1)} > 0$. La fonction h est donc strictement croissante sur son domaine de définition, et

comme $h(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}$, on constate qu'elle a pour limite 0 en $+\infty$. La fonction h est donc toujours négative sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui prouve en particulier que $\ln(n+1) - \ln n \leqslant \frac{1}{n}$.

De même, posons $z(x) = \ln(x) - \ln(x-1) - \frac{1}{x}$: z est définie sur $]1;+\infty[$ de dérivée $z'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2} = \frac{x(x-1) - x^2 + x - 1}{x^2(x-1)} = -\frac{1}{x^2(x-1)} < 0$. Cette deuxième fonction a pour limite 0 en $+\infty$ (calcul similaire au précédent) et est décroissante, donc elle est toujours positive, ce qui prouve la deuxième inégalité.

Notons que ces deux inégalités sont beaucoup plus faciles à obtenir en utilisant un petit peu d'intégration : si $n \leqslant x \leqslant n+1$, on a $\frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{n+1}$, donc $\int_n^{n+1} \frac{1}{n} dx \geqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \geqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{n+1} dx$, ce qui donne $\frac{1}{n} \geqslant \ln(n+1) - \ln n \geqslant \frac{1}{n+1}$, d'où les inégalités demandées.

2. Si on additionne les encadrements de la question précédente pour des entiers k compris entre 2 et n, on obtient que $\sum_{k=2}^{k=n} \ln(k+1) - \ln k \leqslant \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=2}^{k=n} \ln k - \ln(k-1)$. Les deux sommes extrêmes sont télescopiques et donnent $\ln(n+1) - \ln 2 \leqslant \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k} \leqslant \ln n - \ln 1$. Il manque le terme correspondant à $k = 1$ dans la somme du milieu pour qu'elle soit égale à H_n. Ajoutons-le donc : $1 + \ln(n+1) - \ln 2 \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln n$. Comme $1 > \ln 2$, on a a fortiori $H_n \geqslant \ln(n+1)$. Par application du théorème des gendarmes, on obtient que $\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty$. En divisant notre encadrement par $\ln n$, on obtient par ailleurs, en utilisant que $\ln(n+1) = \ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$, l'encadrement $1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n} \leqslant \frac{H_n}{n} \leqslant 1 + \frac{1}{\ln n}$. Les deux extrêmes tendant chacun vers 1, une nouvelle application du théorème des gendarmes donne $\lim_{n\to+\infty} \frac{H_n}{\ln n} = 1$, soit $H_n \sim \ln n$.

3. Commençons par le plus simple en constantant que $a_n - b_n = H_n - \ln n - H_n + \ln(n+1) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ a bien pour limite 0 quand n tend vers $+\infty$.

Intéressons nous maintenant à la monotonie de (a_n) : $a_{n+1} - a_n = H_{n+1} - \ln(n+1) - H_n + \ln n = \frac{1}{n+1} + \ln n - \ln(n+1)$. Cela semble bien avoir un lien avec la fonction f. En fait, les plus observateurs d'entre vous auront remarqué que les fonctions f et g ressemblent étrangement à celles étudiées dans la question 1. En effet, en appliquand l'inégalité de droie de la question 1 à $n+1$ au lieu de n, on obtient immédiatement que $\ln(n+1) - \ln n \geqslant \frac{1}{n+1}$, ce qui prouve que la suite (a_n) est décroissante.

De même, $b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+2) + \ln(n+1)$, expression positive en reprenant l'inégalité de gauche de la quetsion 1 avec $n+1$ au lieu de n. Les deux suites (a_n) vérifiant les trois condition requises, elles sont donc adjacentes.

4. Une conséquence du résultat démontré à la question précédente est l'existence d'une limite finie pour la suite (a_n), qu'on peut noter γ. On a donc $\lim_{n\to+\infty} H_n - \ln n = \gamma$, ou encore $H_n - \ln n = \gamma + o(1)$, soit $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$.

5. Pour mieux visualiser les choses, constatons que $S_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) = H_{2n} - 1 - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{n} = H_{2n} - H_n$. De la même façon, on

obtient $S_{2n-1} = S_{2n} - \frac{1}{2n} = H_{2n} - H_n - \frac{1}{2n}$. En utilisant le résultat de la question précédente, on obtient alors $S_{2n} = \ln(2n) + \gamma + o(1) - \ln n - \gamma - o(1) = \ln(2n) - \ln n + o(1) = \ln 2 + o(1)$. Cette expression est également valable pour S_{2n-1} puisque $\frac{1}{2n}$ est négligeable devant 1. Les deux suites (S_{2n}) et (S_{2n-1}) convergent donc vers $\ln 2$. Cela suffit à prouver que $\lim_{n\to+\infty} S_n = \ln 2$.

6. (a) On sait depuis un petit moment maintenant que $\sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, donc $u_n = \frac{6}{n(n+1)(2n+1)}$.

   (b) Procédons par identification : $\frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1} = \frac{a(n+1)(2n+1) + bn(2n+1) + cn(n+1)}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a(2n^2+3n+1) + b(2n^2+n) + c(n^2+n)}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n^2(2a+2b+c) + n(3a+b+c) + a}{n(n+1)(n+2)}$. Si on veut que ce numérateur soit égal à 6, on doit donc avoir $a = 6$; $2a + 2b + c = 0$ et $3a + b + c = 0$, soit $2b + c = -12$ et $b + c = -18$, donc en soustrayant les deux équations $b = 6$, puis $c = -24$. On a donc finalement $\frac{6}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{6}{n} + \frac{6}{n+1} - \frac{24}{2n+1}$

   (c) En séparant les termes pairs et impairs, on a $H_{2n+1} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{2k} + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{2k+1} + 1$ (si on ne rajoute pas 1 à la fin, il manque le terme correspondant à $k = 1$ dans la somme de gauche). Or, $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{2k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} = \frac{H_n}{2}$, d'où l'égalité demandée.

   (d) Un très beau calcul pour terminer : $\sum_{k=1}^{k=n} u_k = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{6}{k} + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{6}{k+1} - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{24}{2k+1} = 6H_n + 6(H_{n+1} - 1) - 24\left(H_{2n+1} - \frac{H_n}{2} - 1\right) = 6(\ln n + \gamma + o(1)) + 6(\ln(n+1) + \gamma + o(1)) - 6 - 24(\ln(2n) + \gamma + o(1)) + 12(\ln n + \gamma + o(1)) + 24 = 18\ln n + 6\ln(n+1) - 24\ln(2n) + 18 + o(1)$ (les γ ont le bon gout de s'en aller). Or, $18\ln n + 6\ln(n+1) - 24\ln(2n) = 18\ln n + 6\ln(n+1) - 24\ln 2 - 24\ln n = \ln\left(\frac{n^{18}(n+1)^6}{n^{24}}\right) - 24\ln 2$. L'affreux ln de gauche peut être tranquillement oublié puisqu'il tend vers 0 (le numérateur est équivalent à n^{24}, donc le quotient tend vers 1), et il ne reste plus qu'à conclure que la série (T_n) converge, et a pour somme $18 - 24\ln 2$ (on se couchera un peu moins bêtes ce soir).

Devoir à la Maison n°5

ECE3 Lycée Carnot

à rendre le 29 janvier 2010

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $]0;1[\times]0;1[$ par $f(x,y) = xy(2-x-y)$.

1. Tracer la représentation graphique de l'application partielle obtenue en fixant $x = \frac{1}{2}$.
2. Calculer les dérivées partielles (d'ordre 1 et d'ordre 2) de la fonction f.
3. Montrer que f admet un unique point critique sur son domaine de définition.
4. Montrer que $f(x,y) - \frac{8}{27} = \frac{1}{4}\left(y - \frac{2}{3}\right)^2\left(y - \frac{8}{3}\right) - y(x + \frac{1}{2}y - 1)^2$.
5. En déduire la nature du point critique.

Exercice 2

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x - \ln x}$.

1. Montrer que $\forall x > 0$, $\ln x < x$, et en déduire le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On désignera désormais par f la fonction prolongée.
3. Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $f'(x)$ (on soignera bien la justification de la dérivabilité en 0).
4. Déterminer la branche infinie de f en $+\infty$.
5. Dresser le tableau de variations de f et tracer une allure de sa courbe représentative.
6. On pose désormais $g : x \mapsto x^2 - x\ln x - \ln x$. Étudier la convexité de g sur $\mathbb{R}_+^*$.
7. Étudier les variations de la fonction g.
8. En déduire que l'équation $f(x) = x$ n'admet pas de solution.

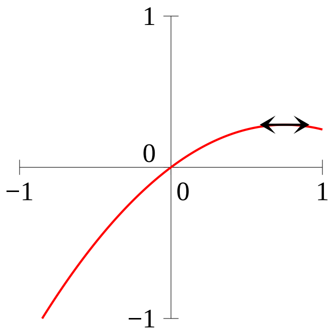
Exercice 3

On considère une suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n^2 - 4)$. Déterminer la nature de la suite (u_n) en distinguant plusieurs cas selon la valeur de u_0 (plus vous arrivez à dire de choses, mieux c'est...).

Corrigé du DM5

Exercice 1

1. Pour $x = \frac{1}{2}$, on obtient $f(y) = \frac{1}{2}y\left(\frac{3}{2} - y\right) = \frac{3}{4}y - \frac{1}{2}y^2$. C'est une fonction du second degré, représentée par une parabole, et atteignant son minimum en $y = \frac{3}{4}$, avec $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{16} - \frac{1}{2} \times \frac{9}{16} = \frac{9}{32}$. La courbe ressemble à ceci :



2. Le plus simple est de tout développer avant de dériver : $f(x, y) = 2xy - x^2y - xy^2$, donc $\frac{\partial f}{\partial}(x, y) = 2y - 2xy - y^2$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x - x^2 - 2xy$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -2y$; $\frac{\partial f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2 - 2x - 2y$; enfin, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -2x$.
3. Un point critique devra vérifier les deux équations $2y - 2xy - y^2 = 0$ et $2x - x^2 - 2xy = 0$. La première équation se factorise en $y(2 - 2x - y) = 0$. Au vu du domaine de définition de la fonction, la possibilité $y = 0$ est écartée, et on a donc $y = 2 - 2x$. De même, la deuxième équation se simplifie en $x = 2 - 2y$. En substituant, on obtient $x = 2 - 4 + 4x = 4x - 2$, donc $3x = 2$ et $x = \frac{2}{3}$, puis $y = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$. Conclusion : le seul point critiqee de la fonction f est $\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.
4. Calculons donc en partant pour commencer du membre de droite : $\frac{1}{4}\left(y - \frac{2}{3}\right)^2\left(y - \frac{8}{3}\right) - y(x + \frac{1}{2}y - 1)^2 = \frac{1}{4}\left(y^2 - \frac{4}{3}y + \frac{4}{9}\right)\left(y - \frac{8}{3}\right) - y\left(x^2 + \frac{1}{4}y^2 + 1 + xy - 2x - y\right)$
$= \frac{1}{4}y^3 - \frac{2}{3}y^2 - \frac{1}{3}y^2 + \frac{8}{9}y + \frac{1}{9}y - \frac{8}{27} - yx^2 - \frac{1}{4}y^3 - y - xy^2 + 2xy + y^2$
$= -yx^2 - xy^2 + 2xy - \frac{8}{27} = xy(2 - y - x) - \frac{8}{27}$, ce qui prouve l'égalité demandée.
5. En constatant que $f\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$, et qu'au vu du calcul précédent, $f(x, y) - \frac{8}{27} \leqslant 0$ sur le domaine de définition de f ($y - \frac{8}{3}$ y est toujours négatif, et y toujours positif, donc on additionne deux nombres négatifs), on peut conclure que le point critique est un maximum pour la fonction f.

Exercice 2

1. Le plus simple est de poser $h(x) = x - \ln x$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $1 - \frac{1}{x}$. La fonction h est décroissante sur $]0; 1]$ et croissante ensuite, elle atteint donc pour minimum

$h(1) = 1$, ce qui prouve qu'elle est toujours strictement positive. Autrement dit, $\forall x > 0$, $x - \ln x > 0$ et $\mathcal{D}_f =]0; +\infty[$.

2. On a $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{\ln x}{-\ln x} = -1$, donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -1$, ce qui permet de prolonger f par continuité en posant $f(0) = -1$.
3. Aucun problème sur $]0; +\infty[$, où $f'(x) = \dfrac{1 - \frac{\ln x}{x} - \ln x + \frac{\ln x}{x}}{(x - \ln x)^2} = \dfrac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2}$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$, de dérivée continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et $f'(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{-\ln x}{(-\ln x)^2} = -\dfrac{1}{\ln x}$, donc $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = 0$. On peut appliquer le théorème de prolongement C^1 et en déduire que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$.
4. On a en $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln x}{x}$ qui tend vers 0 par croissance comparée, donc la courbe de f admet l'axe des abscisses pour asymptote horizontale en $+\infty$.
5. La dérivée de f est du signe de $1 - \ln x$, et s'annule donc quand $\ln x = 1$, c'est-à-dire pour $x = e$. Comme $f(e) = \dfrac{\ln e}{e - \ln e} = \dfrac{1}{e - 1}$, on obtient le tableau suivant :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$\dfrac{1}{e-1}$	$\searrow$	0

6. La fonction g est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$, et $g'(x) = 2x - \ln x - 1 - \dfrac{1}{x}$, puis $g''(x) = 2 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{2x^2 - x + 1}{x^2}$. Le numérateur de la dérivée seconde est un trinôme de discriminant $\Delta = 1 - 8 = -7$, donc ce trinôme est toujours positif. La fonction g'' étant positive, g est donc convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.
7. Puisque g est convexe, g' est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Or, on constate que $g'(1) = 2 - 0 - 1 - 1 = 0$. Il est alors facile de dresser le tableau de variations de g, sachant que $g(1) = 1$, et que les limites de g en 0 et en $+\infty$ valent $+\infty$ (calculs faciles) :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

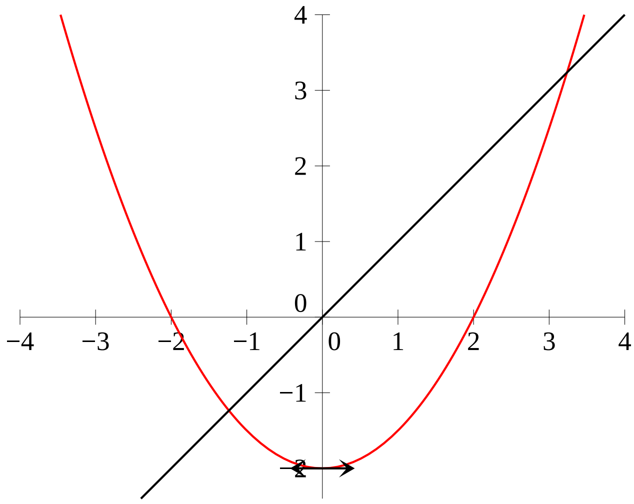
8. En constatant que $f(x) = x \Leftrightarrow \dfrac{\ln x}{x - \ln x} - \dfrac{x^2 - x\ln x}{x - \ln x} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-g(x)}{x - \ln x} = 0$, et que g ne s'annule jamais au vu de son tableau de variations, on conclut aisément que l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution.

Exercice 3

Posons $f(x) = \dfrac{1}{2}(x^2 - 4)$. La fonction f est définie et C^∞ sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = x$. Elle est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$, atteignant un minimum en 0 de valeur $f(0) = -2$. De plus, $f(x) = x \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}(x^2 - 4) = x \Leftrightarrow x^2 - 2x - 4 = 0$, équation de discriminant $\Delta = 20$, admettant donc deux solutions $x_1 = \dfrac{2 - \sqrt{20}}{2} = 1 - \sqrt{5}$, et $x_2 = \dfrac{2 + \sqrt{20}}{2} = 1 + \sqrt{5}$. On remarque par ailleurs que f s'annule pour $x = -2$ et $x = 2$. On peut donc établir le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	x_1	0	x_2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	x_1 ↘	-2	↗ x_2	↗ $+\infty$

Ou mieux, faire le dessin suivant :



La séparation des cas à étudier pour la convergence de la suite récurrente n'est pas très simple à faire, car on a malheureusement peu d'intervalles intéressants. Notamment, l'intervalle $[x_1; x_2]$ n'est pas stable, puisque la fonction f y atteint des valeurs plus petites que x_1, en particulier son minimum -2. Il existe tout de même un intervalle stable intéressant au vu des remarques effectuées plus haut : $[-2; 0]$. Examinons en détail tous les cas possibles pour u_0 :

- si $u_0 = x_1$ ou $u_0 = x_2$, la suite est constante (et converge donc vers x_1 ou x_2).
- si $u_0 > x_2$, tous les termes de la suite seront plus grands que x_2 (l'intervalle $[x_2; +\infty[$ est stable), et la suite sera croissante puisque $f(x) > x$ sur cet intervalle. Comme elle ne peut converger vers x_1 ou x_2 sous ces hypothèses, on aura $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
- passons tout de suite au cas où $x_1 < u_0 < 0$, les autres cas se ramenant tous ou presque à celui-ci ou au précédent. En remarquant que $f(]-2; x_1[) =]x_1; 0[$ et $f(]x_1; 0[) =]-2; x_1[$, on prouve par récurrence que tous les termes d'indice pair de la suite appartiennent à l'intervalle $]x_1; 0[$, et tous les termes d'indice impair à $]-2; x_1[$. Un petit dessin en forme d'escargot permet de se convaincre que les termes pairs se rapprochent de 0 et les termes impairs de -2, mais c'est loin d'être facile à prouver ! En fait, le plus simple est encore de prouver que (u_{2n}) (suite constituée des termes pairs) est croissante et (u_{2n+1}) (suite constituée des termes impairs) est décroissante. Par convergence monotone, les deux suites convergent alors, et ne peuvent converger que vers un réel vérifiant $f(f(x)) = x$ (pour les mêmes raisons qui font que la limite éventuelle d'une suite récurrente est un point fixe de la fonction définissant la récurrence). Reste tout à prouver la monotonie de ces deux suites. Faisons-le par exemple pour les termes pairs. On veut en fait prouver que, si $u_{2n} \in]x_1; 0[$ $u_{2n+2} > u_{2n}$. Or, $u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = \frac{1}{2}u_{2n+1}^2 - 2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}u_{2n}^2 - 2\right)^2 - 2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}u_{2n}^4 - 2u_{2n}^2 + 4\right) - 2 = \frac{1}{8}u_{2n}^4 - u_{2n}^2$. Si on veut comparer cette valeur à u_{2n}, le mieux est de calculer la différence $u_{2n+2} - u_{2n} = \frac{1}{8}u_{2n}^4 - u_{2n}^2 - u_{2n}$. Posons

donc $P(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^2 - x$, ce polynome s'annule pour $x = 0$, mais aussi pour $x = x_1$, $x = x_2$ et $x = -2$ (en effet, ces quatre valeurs sont celles des réels vérifiant $f(f(x)) = x$. On en déduit que $P(x) = \frac{1}{8}x(x - 1 + \sqrt{5})(x - 1 - \sqrt{5})(x + 2)$. Conclusion, via un petit tableau de signe, on trouve que $u_{2n+2} - u_{2n}$ est positif sur $]1 - \sqrt{5}; 0[$ (et accessoirement sur $[1 + \sqrt{5}; +\infty[$ et sur $]-\infty; -2]$), ce qui nous permet de prouver la croissance de (u_{2n}). Elle converge donc, et ce ne peut être que vers 0. De même, (u_{2n+1}) est décroissante et converge vers -2. La suite (u_n) est donc bien sûr divergente.

- si $-2 < u_0 < x_1$, le même phénomène se produit, si ce n'est que ce sont cette fois-ci les termes pairs qui se rapprochent de -2 et les impairs de 0.
- si $0 < u_0 < 2$, on aura $-2 < u_1 < 0$, et on peut alors appliquer l'étude précédente. Il y a simplement un cas très particulier qui peut se produire : si $u_0 = -x_1 = \sqrt{5} - 1$, alors $u_1 = x_1$, et la suite est stationnaire (tous les termes sauf u_0 sont égaux à x_1). Sinon, les termes pairs et impairs de la suite convergeront vers 0 et -2.
- les valeurs initiales $u_0 = -2$, $u_0 = 0$ et $u_0 = 2$ donnent des suites très particulières puisqu'elles vont être périodiques, prenant alternativement les valeurs 0 et -2 (à partir de u_1 dans le cas où $u_0 = 2$).
- si $2 < u_0 < x_2$, une petite récurrence permet de prouver que tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $[-2; x_2[$ (qui est un intervalle stable par f). On peut même dire que la suite va finir par prendre des valeurs dans l'intervalle $[-2; 2]$. En effet, si ce n'était pas le cas (un petit raisonnement par l'absurde), la suite prendrait toutes ses valeurs dans $]2; x_2[$, et serait alors décroissante (puisque $f(x) < x$ sur cet intervalle). Comme elle est par ailleurs minorée, elle devrait converger, ce qui ne serait pas possible puisqu'il n'y a pas l'ombre d'un point fixe de f dans cet intervalle (on ne peut pas converger vers x_2 en décroissant si on part d'un u_0 strictement inférieur à x_2). Conclusion : quitte à attendre assez longtemps, on finira par trouver un terme de la suite dans $[-2; 2]$, et on pourra appliquer l'étude du troisième cas pour en déduire la convergence des termes pairs et impairs vers 0 et -2. Du moins dans presque tous les cas... On aura en effet quelque chose de très différent si notre premier terme appartenant à $[-2; 2]$ est égal à $-x_1$ (ou x_1 mais dans ce cas ce ne sera pas le premier à être dans $[-2; 2]$), puisque la suite sera alors stationnaire ! Cela se produit par exemple si $f(u_0) = \sqrt{-1}$, soit $u_0^2 - 4 = 2(\sqrt{5} - 1)$, donc $u_0 = \sqrt{2(\sqrt{5} + 1)}$. La valeur que nous venons de calculer a elle-même un antécédent dans l'intervalle $[0; x_2[$ qui donnera une suite stationnaire et ainsi de suite. Il existe en fait une infinité de valeurs de u_0 dans cet intervalle pour lesquelles la suite converge vers x_1 en stationnant, et on ne peut pas les calculer simplement. D'autres valeurs un peu particulières sont celles pour lesquelles le premier terme appartenant à $[-2; 2]$ est égal à 2 (ou à 0 ou à -2 mais dans ce cas ce ne sera pas le premier à être dans $[-2; 2]$), car la suite devient alors périodique ! Malheureusement il y a à nouveau un paquet de valeurs de u_0 pour lesquelles cela se produit (une infinité...) et elles ne sont pas plus évidentes à déterminer. En fait, constatons qu'on aura $u_1 = 2$ si $\frac{1}{2}(u_0^2 - 4) = 2$, donc $u_0^2 = 8$, soit $u_0 = \sqrt{8}$ (et aussi $u_0 = -\sqrt{8}$, mais ça n'appartient pas à l'intervalle que nous étudions ici). Ensuite, on peut chercher les valeurs de u_0 pour lesquelles $u_2 = 2$, c'est-à-dire $u_1 = \sqrt{8}$, donc on cherche les antécédents de $\sqrt{8}$ par f, puis on peut chercher les antécédents de cette nouvelle valeur par f etc. On construit ainsi une suite de valeurs pour lesquelles la suite finira par être périodique.
- enfin, si $u_0 < -2$, la fonction f étant paire, u_1 (et tous les termes suivants) prend la même valeur que si on partait d'un $u_0 > 2$ qui est l'opposé de notre valeur initiale. On peut donc appliquer les études précédentes. Si $u_0 < -x_2$, la suite diverge vers $+\infty$. Si $u_0 = -x_2$ la suite est stationnaire égale à x_2 à partir de u_1. Si $-x_2 < u_0 < -2$, les termes pairs et impairs se rapprocheront de 0 et -2, sauf pour une petite infinité de valeurs qui sont les opposés de celles que nous n'avons pas pu déterminer ci-dessus, qui donneront une suite stationnaire en x_1, ou périodique.

Devoir à la Maison n°6

ECE3 Lycée Carnot

à rendre le 9 mars 2010

Exercice 1

Une roue de loterie se compose de secteurs identiques, numérotés de 1 à 12, et ayant la même probabilité d'être tirés à chaque tirage. À chaque partie un joueur mise une certaine somme d'argent en choisissant un, deux ou trois numéros sur les 12, et il gagne si l'un des numéros sur lesquels il a misé est tiré. Un joueur possédant un crédit illimité effectue une suite de parties en adoptant la stratégie suivante :

- Il mise sur le chiffre 1 à la première partie.
- S'il perd à la n-ème partie, il mise uniquement sur les chiffres 1 et 2 à la partie suivante et s'il gagne à la n-ème partie, il mise sur les chiffres 1, 3 et 5.

1. On note p_n la probabilité de l'événement A_n : « le joueur gagne la n-ème partie ».
   (a) Calculer les probabilités conditionnelles $P_{A_n}(A_{n+1})$ et $P_{\bar{A}_n}(A_{n+1})$. En déduire une relation de récurrence sur la suite p_n.
   (b) Calculer la valeur de p_n en fonction de n et déterminer sa limite.
2. Soit $k \in \{1; \ldots; n\}$, on note B_k l'événement « le joueur gagne une seule fois au cours des n premières parties et ce gain a lieu à la k-ème partie ».
   (a) Calculer $P(B_n)$.
   (b) Soit $k \in \{1; \ldots; n\}$, calculer $P(B_k)$.
   (c) En déduire la probabilité q_n pour que le joueur gagne une seule fois au cours des n premières parties.

Exercice 2

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. (a) Étudier, suivant la parité de n, les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^{n+1} + x^n$.
   (b) Montrer que dans tous les cas $f\left(-\frac{n}{n+1}\right) < 2$.
   (c) Calculer $f(1)$ et en déduire, suivant la parité de n, le nombre de solutions de l'équation $x^{n+1} + x^n = 2$.

2. On note A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   (a) Déterminer une matrice P de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$ telle que $AP = PD$.

   (b) Montrer qu'il existe une matrice Q telle que $PQ = QP = I$ (et la déterminer), en déduire que $A = PDQ$ et $D = QAP$.

3. On considère l'équation matricielle d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$(E_n) : X^{n+1} + X^n = A$$

   (a) On pose $Y = QXP$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $Y^n = QX^nP$.

   (b) Montrer que la résolution de l'équation (E_n) peut se ramener à la résolution de l'équation $(E'_n) : Y^{n+1} + Y^n = D$.

   (c) Soit Y une solution de (E'_n). On pose $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

      i. Montrer que $DY = YD$.

      ii. En déduire que $b = c = 0$.

      iii. Quelle sont les valeurs possibles de a ?

      iv. Discuter suivant les valeurs de n, le nombre de solutions de l'équation (E'_n).

   (d) On note α la solution négative de l'équation numérique $x^4 + x^3 = 2$. Déterminer les solutions de l'équation (E'_3) à l'aide de α, puis en déduire celles de (E_3) en admettant que $X = PYQ$.

Exercice 3

Factoriser les polynomes $P(x) = 2x^3 + 11x^2 - 26x - 35$ et $Q(x) = x^3 + 6x^2 - x - 30$.

Corrigé du DM6

Exercice 1

1. (a) D'après l'énoncé, on a $P_{A_n}(A_{n+1}) = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4}$ puisque le joueur mise sur trois numéros après avoir gagné, et $P_{\bar{A}_n}(A_{n+1}) = \dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6}$ puisqu'il ne mise que sur deux numéros après avoir perdu. Les évènements A_n et A_{n+1} formant un sysyème complet d'évènements, on peut appliquer la formule des probabilités totales pour obtenir $P(A_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\bar{A}_n) \times P_{\bar{A}_n}(A_{n+1}) = \dfrac{1}{4}P(A_n) + \dfrac{1}{6}P(\bar{A}_n)$. Avec les notations de l'énoncé, on peut le traduire par $p_{n+1} = \dfrac{1}{4}p_n + \dfrac{1}{6}(1 - p_n) = \dfrac{1}{12}p_n + \dfrac{1}{6}$.

   (b) La suite est arithmético-géométrique d'équation de point fixe $x = \dfrac{1}{12}x + \dfrac{1}{6}$, donnant $x = \dfrac{2}{11}$. En posant $u_n = p_n - \dfrac{2}{11}$, on constate que $u_{n+1} = p_{n+1} - \dfrac{2}{11} = \dfrac{1}{12}p_n + \dfrac{1}{6} - \dfrac{2}{11} = \dfrac{1}{12}p_n - \dfrac{1}{66} = \dfrac{1}{12}\left(p_n - \dfrac{2}{11}\right) = \dfrac{1}{12}u_n$, donc (u_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{12}$. Comme $p_1 = \dfrac{1}{12}$ (l'énoncé nous précise que le joueur parie sur un seul numéro au premier tirage), on a $u_1 = p_1 - \dfrac{2}{11} = \dfrac{1}{12} - \dfrac{2}{11} = -\dfrac{13}{132}$, et on en déduit que $p_n = \dfrac{2}{11} - \dfrac{13}{132}\left(\dfrac{1}{12}\right)^{n-1}$. La suite géométrique (u_n) étant de raison comprise entre -1 et 1, elle tend vers 0, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \dfrac{2}{11}$.

2. (a) Si on oublie le cas très particulier $n = 1$, B_n est réalisé si le joueur perd la première partie (où il a parié sur un seul numéro), puis toutes celles pour k allant de 2 à $n - 1$ (où il parie sur deux numéros à chaque fois) et enfin gagne la dernière (où il a également parié sur deux numéros). La formule des probabilités composées nous donne $P(B_n) = \dfrac{11}{12} \times \left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-2} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{11}{72}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-2}$.

   (b) Si $k = 1$, le joueur doit gagner la première partie (une chance sur 12), puis perdre la deuxième (où il parie sue trois numéros), ainsi que toutes les autres (où il parie à chaque fois sur deux numéros), donc $P(B_1) = \dfrac{1}{12} \times \dfrac{9}{12} \times \left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-2} = \dfrac{1}{16} \times \left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-2}$. Enfin si $2 \leqslant k \leqslant n - 1$, le joueur perd la première partie (un numéro), puis toutes les parties de la deuxième jusqu'à la $k - 1$ (deux numéros tentés à chaque fois), gagne la partie k (deux numéros tentés), perd la partie $k + 1$ (trois numéros tentés) puis toutes les autres (deux numéros tentés à chaque fois) qui sont au nombre de $n - (k + 1)$, ce qui donne $P(B_k) = \dfrac{11}{12} \times \left(\dfrac{5}{6}\right)^{k-2} \times \dfrac{1}{6} \times \dfrac{9}{12} \times \left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-k-1} = \dfrac{11}{96} \times \left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-3}$

   (c) On a simplement $q_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(B_k) = P(B_1) + P(B_n) + (n - 2)P(B_k)$

   $= \left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-3}\left(\dfrac{55}{432} + \dfrac{5}{96} + (n - 2) \times \dfrac{11}{96}\right)$.

Exercice 2

1. (a) Calculons la dérivée : $f'(x) = (n + 1)x^n + nx^{n-1} = x^{n-1}((n + 1)x + n)$. La parenthèse s'annule pour $x = -\dfrac{n}{n + 1}$. Si n est impair, $n - 1$ est pair et x^{n-1} est positif, sinon, x^{n-1} change de signe pour $x = 0$, ce qui donne les deux tableaux suivants (n impair, puis n pair) :

x	$-\infty$		$-\dfrac{n}{n+1}$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	<2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		$-\dfrac{n}{n+1}$		0		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	<2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

(b) On a $\left|-\dfrac{n}{n+1}\right| < 1$ donc $\forall k \in \mathbb{N}^*$ (et en particulier pour $k = n$ et $k = n+1$), $-1 < \left(-\dfrac{n}{n+1}\right)^k < 1$ et on en déduit que $f\left(-\dfrac{n}{n+1}\right) < 1 + 1 = 2$.

(c) On a $f(1) = 2$. En utilisant les tableaux de variations de la question précédente, on voit que si n est pair, $f(\mathbb{R}^- \subset]-\infty; 2[$, donc 2 ne peut pas avoir d'antécédent négatif. Comme de plus f est strictement croissante donc bijective sur $\mathbb{R}_+$, 2 ne peut avoir qu'(au plus) un antécédent positif, qui se trouve être égal à 1. Par contre, si n est impair, f est bijective sur $\mathbb{R}^+$, mais également sur $\mathbb{R}^+$ et 2 admet un antécédent sur chaque intervalle. Son antécédent positif est toujours égal à 1, et il y a un deuxième antécédent négatif plus petit que $\dfrac{-n}{n+1}$.

2. (a) On calcule $AP = \begin{pmatrix} 1+x & 1+y \\ 1+x & 1+y \end{pmatrix}$ et $PD = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2y \end{pmatrix}$. Les deux matrices sont égales si $1+x = 0$, donc $x = -1$, et $1+y = 2y = 2$, c'est-à-dire $y = 1$. On a donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Notons a, b, c et d les coefficients inconnus de la matrice Q. On a alors $PQ = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c-a & d-b \end{pmatrix}$. Pour avoir $PQ = I$, il faut donc déjà que $a+c = 1$, $b+d = 0$, soit $d = -b$; $c - a = 0$, soit $c = a = \dfrac{1}{2}$ à cause de la première équation, et enfin $d - b = 1$, donc $d = \dfrac{1}{2}$ et $b = -\dfrac{1}{2}$ en utilisant $d = -b$. Finalement, on a nécessairement $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Reste à vérifier qu'alors $QP = I$, ce qui est vrai.

Par contre, pas de calcul pour la deuxième partie de la question : si $AP = PD$, alors $APQ = PDQ$ (en multipliant à droite par Q), mais $APQ = AI = A$, donc $A = PDQ$. De même, $QAP = QPD = ID = D$.

3. (a) Posons $Y = QXP$. Prouvons par récurrence la propriété P_n : $Y^n = QX^nP$. C'est vrai pour $n = 1$ par définition de Y, et si on le suppose vrai pour un entier n, alors $Y^{n+1} = YY^n = (QXP)(QX^nP) = QX(PQ)X^nP = QXX^nP = QX^{n+1}P$.

(b) En effet, si $X^{n+1} + X^n = A$, alors $Q(X^{n+1} + X^n)P = QAP$, c'est-à-dire en développant $Y^{n+1} + Y^n = D$.

(c) i. Comme $Y^{n+1} + Y^n = D$, on a $YD = DY = Y^{n+2} + Y^{n+1}$.

ii. Le calcul donne $YD = \begin{pmatrix} 0 & 2b \\ 0 & 2d \end{pmatrix}$ et $DY = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$. Pour que les deux matrices soient égales, il faut bien avoir $b = c = 0$.

iii. La matrice Y est donc diagonale. On a donc $Y^{n+1}+Y^n = \begin{pmatrix} a^{n+1}+a^n & 0 \\ 0 & d^{n+1}+d^n \end{pmatrix}$. Comme $Y^{n+1}+Y^n = D$, on en déduit que $0 = a^{n+1}+a^n = a^n(a+1)$, donc $a = 0$ ou $a = -1$.

iv. Reste à déterminer d, qui est solution de l'équation $f(x) = 2$ puisque $d^{n+1}+d^n = 2$. En utilisant la première partie de l'exercice, on a donc, si n est pair, une seule solution pour d (qui est $d = 1$) et deux pour Y (selon que a vaut 0 ou -1) ; et si n est impair, deux solutions pour d et deux pour a, soit quatre possibilités pour Y.

(d) Les solutions de (E_3') sont les quatre matrices $Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$; $Y_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $Y_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$. Comme $X = PYQ$, on retrouve les solutions de (E_3) en calculant PY_iQ, pour $i = 1;2;3;4$. On trouve $X_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; $X_2 = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2} & \frac{\alpha}{2} \\ \frac{\alpha}{2} & \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$; $X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $X_4 = \begin{pmatrix} \frac{1+\alpha}{2} & \frac{\alpha-1}{2} \\ \frac{\alpha-1}{2} & \frac{1+\alpha}{2} \end{pmatrix}$.

Exercice 3

Le polynôme P a pour racine évidente $x = -1$: $P(-1) = -2+11+26-35 = 0$, donc on peut le factoriser par $X+1$. Plus précisément, $P(X) = (X+1)(aX^2+bX+c) = aX^3+(a+b)X^2+(b+c)X+c$. Par identification des coefficients, on obtient $a = 2$; $a+b = 11$; $b+c = -26$ et $c = -35$, donc $a = 2$; $b = 9$ et $c = -35$. On a donc $P(X) = (X+1)(2X^2+9X-35)$. Le deuxième facteur a pour discriminant $\Delta = 81+280 = 361 = 19^2$, et admet donc deux racines $x_1 = \frac{-9-19}{4} = -7$ et $\frac{-9+19}{4} = \frac{5}{2}$. Conclusion : $P(X) = 2(X+1)(X+7)\left(X-\frac{5}{2}\right)$.

Le polynôme Q a lui pour racine évidente $x = 2$: $Q(2) = 8+24-2-30 = 0$, donc on peut le factoriser par $X-2$. Effectuons pour changer une petite division euclidienne :

$$\begin{array}{rrrrrrrr|l}
 & X^3 & + & 6X^2 & - & X & - & 30 & X-2 \\ \cline{9-9}
- & (X^3 & - & 2X^2) & & & & & X^2+8X+15 \\
 & & & 8X^2 & - & X & - & 30 & \\
 & & - & (8X^2 & - & 16X) & & & \\
 & & & & & 15X & - & 30 & \\
 & & & & - & (15X & - & 30) & \\
 & & & & & & & 0 &
\end{array}$$

Conclusion : $Q(X) = (X-2)(X^2+8X+15)$. Le deuxième facteur a pour discriminant $\Delta = 64-60 = 4$, et admet deux racines $x_2 = \frac{-8-2}{2} = -5$ et $x_2 = \frac{-8+2}{2} = -3$. On en déduit que $Q(X) = (X-2)(X+5)(X+3)$.

Devoir à la Maison n°7

ECE3 Lycée Carnot

à rendre le 15 avril 2010

Un sujet d'annales pour réviser toute l'analyse

Soient f la fonction numérique de la variable réelle définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

et (u_n) la suite de nombres réels déterminée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \int_0^1 x^n f(x)\, dx$$

On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de f, relativement à un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

I. Etude de f.

1. Montrer que la fonction f est paire sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
3. Déterminer la lmite de f lorsque x tend vers $+\infty$.
4. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.
5. Donner l'allure de $\mathcal{C}_f$.
6. Montrer que f réalise une bijection de l'intervalle $[0, +\infty[$ sur un intervalle J à préciser.
7. Pour tout y de l'intervalle $]0, 1]$, déterminer l'unique réel x appartenant à l'intervalle $[0, +\infty[$ tel que $f(x) = y$.
8. Déterminer alors la bijection réciproqie f^{-1}.

II. Calcul d'aire

On considère la fonction numérique F de la variable réelle x définie par :

$$F(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

Pour tout réel λ strictement positif, on note $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire (exprimée en unités d'aire) du domaine constitué par l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que :

$$\lambda \leqslant x \leqslant 2\lambda \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x)$$

ainsi

$$\mathcal{A}(\lambda) = \int_{\lambda}^{2\lambda} f(x)\,dx$$

1. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x + \sqrt{x^2+1} > 0$$

   En déduire l'ensemble de définition de F.
2. Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que F est impaire sur son ensemble de définition.
4. Déterminer la limite de F lorsque x tend vers $+\infty$. En déduire la limite de F quand x tend vers $-\infty$.
5. Exprimer $\mathcal{A}(\lambda)$ en fonction de λ et calculer la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

III. Etude de la suite (u_n).

1. Calculer u_0 et u_1.
2. Effectuer une intégration par parties et calculer u_3.
   (On pourra remarquer que $\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} = x^2\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$)
3. Déterminer le sens de variations de la suite (u_n).
4. Montrer que la suite (u_n) est convergente. (On ne cherchera pas sa limite dans cette question)
5. Justifier l'encadrement suivant :

$$\forall x \in [0,1], \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leqslant x^n$$

   en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

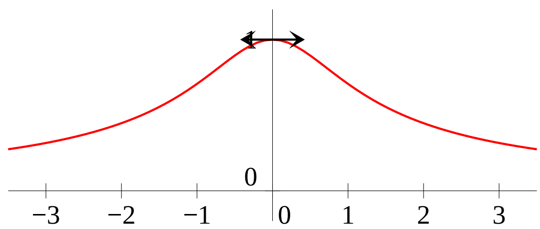
6. Déterminer alors la limite de la suite (u_n).

Corrigé du DM7

Sujet d'annales : Ecricome 2004

I. Etude de f.

1. En effet, f est définie sur $\mathbb{R}$ (ce qui se trouve sous la racine est toujours supérieur ou égal à 1), et $f(-x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+(-x)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = f(x)$, donc f est paire.
2. La fonction f est dérivable et même C^∞ sur son ensemble de définition, et comme $f(x) = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$, $f'(x) = -\dfrac{1}{2} \times (2x) \times (1+x^2)^{-\frac{3}{2}} = -\dfrac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$. Cette dérivée est toujours du signe opposé à celui de x, donc la fonction f est strictement croissante sur $]-\infty;0]$, et strictement décroissante sur $[0;+\infty[$. Elle a pour maximum $f(0) = 1$.
3. Sans difficulté aucune, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+x^2} = +\infty$.
4. Au vu des deux questions précédentes, f est bornée par 0 et 1 sur $[0;+\infty[$. La fonction étant paire, ces bornes sont en fait valables sur $\mathbb{R}$ tout entier.
5. Voici l'allure de la courbe :



6. La fonction f étant strictement croissante sur $[0;+\infty[$, elle y est bijective, et les calculs précédents montrent que l'intervalle image est $J =]0;1]$.
7. Si $f(x) = y$, alors $\dfrac{1}{y} = \sqrt{1+x^2}$, donc $\dfrac{1}{y^2} = 1+x^2$, et $x^2 = \dfrac{1}{y^2} - 1$. Comme x doit être positif, on en déduit que $x = \sqrt{\dfrac{1}{y^2} - 1} = \dfrac{\sqrt{1-y^2}}{y}$.
8. La fonction f^{-1} est définie sur $]0;1]$ par $f^{-1}(y) = \dfrac{\sqrt{1-y^2}}{y}$.

II. Calcul d'aire

1. En effet, si $x \geqslant 0$, c'est clair. Sinon, on cherche à prouver que $-x < \sqrt{x^2+1}$, ce qui est équivalent puisque les deux membres sont positifs en supposant $x < 0$ à l'inégalité $x^2 < x^2+1$, qui est indiscutablement vraie. La fonction F est donc définie sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction F est C^∞ sur $\mathbb{R}$, de dérivée $F'(x) = \dfrac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}(x+\sqrt{x^2+1})} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} = f(x)$. La fonction F est bien une primitive de f.
3. Calculons $F(-x) = \ln(-x+\sqrt{(-x)^2+1}) = \ln(\sqrt{x^2+1}-x)$. Or, via multiplication par la quantité conjuguée, $\sqrt{x^2+1} - x = \dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$; donc $F(-x) = \ln \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = -\ln(\sqrt{x^2+1}+x) = -F(x)$, et la fonction F est impaire.
4. Encore un calcul qui ne devrait pas poser de problème : ce qui se trouve dans le ln tend vers $+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$. La fonction F étant impaire, on a donc $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$.

5. Par définition de l'intégrale, $\mathcal{A}(\lambda) = F(2\lambda) - F(\lambda) = \ln(2\lambda + \sqrt{4\lambda^2+1}) - \ln(\lambda + \sqrt{\lambda^2+1}) = \ln \dfrac{2\lambda + \sqrt{4\lambda^2+1}}{\lambda + \sqrt{\lambda^2+1}}$. Cherchons la limite de ce quotient, qui est égal lorsque $\lambda > 0$ à $\dfrac{2\lambda + \lambda\sqrt{4+\frac{1}{\lambda^2}}}{\lambda + \lambda\sqrt{1+\frac{1}{\lambda^2}}} = \dfrac{2+\sqrt{4+\frac{1}{\lambda^2}}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{\lambda^2}}}$. Tout ceci converge vers $\dfrac{2+\sqrt{4}}{1+\sqrt{1}} = \dfrac{4}{2} = 2$, donc $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \mathcal{A}(\lambda) = \ln 2$.

III. Etude de la suite (u_n).

1. Calculons donc $u_0 = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = F(1) - F(0) = \ln(1+\sqrt{1+1}) - \ln(0+\sqrt{0+1}) = \ln(1+\sqrt{2})$.
   Puis $u_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = [\sqrt{1+x^2}]_0^1 = \sqrt{2}-1$.
2. On a $u_3 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}$. Essayons donc, comme nous le suggère aimablement l'énoncé, une IPP en posant $\begin{cases} u(x) = x^2 & v'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} \\ u'(x) = 2x & v(x) = \sqrt{x^2+1} \end{cases}$, pour obtenir $u_3 = [x^2\sqrt{x^2+1}]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 2x\sqrt{x^2+1} = \sqrt{2} - \left[\frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \sqrt{2} - \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3} = \frac{2-\sqrt{2}}{3}$.
3. Pout tout $x \in [0;1]$, et pour tout entier n, $x^{n+1} \leqslant x^n$, donc $x^{n+1}f(x) \leqslant x^n f(x)$, et en intégrant l'inégalité $u_{n+1} \leqslant u_n$, donc la suite (u_n) est décroissante.
4. Comme de plus (u_n) est l'intégrale d'une fonction positive, donc positive, la suite est décroissante minorée par 0, et converge donc.
5. Il suffit de rappeler que $0 < f(x) \leqslant 1$, donc $x^n f(x) \leqslant x^n$ sur $[0;1]$, et $u_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.
6. Un petit coup de théorème des gendarmes pour achever l'exercice, la suite (u_n) converge vers 0.

Interrogation Écrite n°1

ECE3 Lycée Carnot

10 septembre 2009

Tous les calculs doivent apparaitre sur la feuille.

1. Donner la négation de la phrase « Il a plu tous les jours de juillet en Bretagne ».

2. Quelle est la contraposée de la phrase « Il pleut donc mon jardin est mouillé » ?

3. Quel est le domaine de définition de la fonction définie par $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+2}{3-x}\right)$?

4. Étudier (sans calcul de dérivée) les variations de la fonction $g : x \mapsto (\ln x - 3)^2$.

5. Résoudre l'équation $e^{2x} + 3e^x = 4$.

Corrigé de l'Interrogation n°1

1. Donner la négation de la phrase « Il a plu tous les jours de juillet en Bretagne ».
   Il y a (au moins) un jour en juillet où il n'a pas plu en Bretagne.
2. Quelle est la contraposée de la phrase « Il pleut donc mon jardin est mouillé » ?
   Mon jardin est sec donc il ne pleut pas.
3. Quel est le domaine de définition de la fonction définie par $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+2}{3-x}\right)$?
   La fonction f est définie si $\dfrac{x+2}{3-x} > 0$ donc $\mathcal{D}_f =]-2;3[$ (un petit tableau de signe si nécessaire pour se convaincre).
4. Étudier (sans calcul de dérivée) les variations de la fonction $g : x \mapsto (\ln x - 3)^2$.
   La fonction g peut s'écrire sous la forme $g = h \circ k$, où $k : x \mapsto \ln x - 3$ est strictement croissante sur son domaine de définition $\mathbb{R}_+^*$, et $h : x \mapsto x^2$ est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme $k(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln x \geqslant 3 \Leftrightarrow x \geqslant e^3$, on peut en déduire via le théorème sur les variations des fonctions composées que g est strictement décroissante sur $]0; e^3]$ et strictement croissante sur $[e^3; +\infty[$.
5. Résoudre l'équation $e^{2x} + 3e^x = 4$.
   Posons $X = e^x$, on a alors $X^2 + 3X - 4 = 0$. Ce trinome a pour discriminant $\Delta = 9 + 16 = 25$, et admet donc deux racines $X_1 = \dfrac{-3+5}{2} = 1$ et $X_2 = \dfrac{-3-5}{2} = -4$. Comme $X > 0$ par définition, on ne garde que la première solution, ce qui nous donne pour unique solution à l'équation initiale $x = \ln 1 = 0$, donc $\mathcal{S} = \{0\}$

Interrogation Écrite n°2

ECE3 Lycée Carnot

8 octobre 2009

Tous les calculs doivent apparaitre sur la feuille.

1. On note $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ est pair}\}$, $B = \{n \in \mathbb{N} \mid 2 \leqslant n \leqslant 9\}$ et $C = \{3; 6; 9; 12; 15\}$. Déterminer $A \cap B$; $B \cup C$; $C \cap \bar{A}$ et $(A \cup B) \cap C$.

2. Déterminer le terme général de la suite (u_n) vérifiant $u_4 = 16$ et $u_{n+1} = 2u_n$.

3. Déterminer le terme général de la suite (u_n) définie par $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 2$, et calculer les sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k$ de la suite.

4. Déterminer le terme général de la suite (v_n) définie par $v_0 = v_1 = 1$ et $6v_{n+2} - 5v_{n+1} = -v_n$.

Corrigé de l'Interrogation n°2

1. $A \cap B = \{2; 4; 6; 8\}$; $B \cup C = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 12; 15\}$; $C \cap \bar{A} = \{3; 9; 15\}$ et $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) = \{3; 6; 9; 12\}$.

2. La suite (u_n) est géométrique de raison 2. On a donc $u_4 = 2^4 u_0$, soit $u_0 = \dfrac{16}{2^4} = 1$, puis $u_n = 2^n$.

3. La suite (u_n) est arithmético-géométrique, son équation de point fixe est $x = \dfrac{1}{2}x - 2$, ce qui donne $x = -4$. On pose donc $v_n = x + 4$, et on vérifie que cette suite auxiliaire est géométrique : $v_{n+1} = u_{n+1} + 4 = \dfrac{1}{2}u_n - 2 + 4 = \dfrac{1}{2}u_n + 2 = \dfrac{1}{2}(u_n + 4) = \dfrac{1}{2}v_n$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de permier terme $v_0 = u_0 + 4 = 3$, d'où $v_n = \dfrac{3}{2^n}$, puis $u_n = v_n - 4 = \dfrac{3}{2^n} - 4$.
On en déduit que $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} u_k = 3\sum_{k=0}^{k=n}\left(\frac{1}{2}\right)^k - \sum_{k=0}^{k=n} 4 = 3\left(\frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}}\right) - 4(n+1) = 6\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) - 4n - 4 = 2 - \frac{3}{2^n} - 4n$.

4. La suite (v_n) est récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique est $6x^2 - 5x + 1 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 25 - 24 = 1$, elle admet deux racines réelles $r = \dfrac{5+1}{12} = \dfrac{1}{2}$ et $s = \dfrac{5-1}{12} = \dfrac{1}{3}$. On en déduit que le terme général de la suite est de la forme $u_n = \dfrac{\alpha}{2^n} + \dfrac{\beta}{3^n}$. En utilisant les valeurs de v_0 et v_1, on obtient les conditions $\alpha + \beta = 1$ et $\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\beta}{3} = 1$, soit $\alpha = 1 - \beta$ et $\dfrac{1}{2} - \dfrac{\beta}{2} + \dfrac{\beta}{6} = 1$, ce qui donne $-\dfrac{\beta}{6} = \dfrac{1}{2}$, puis $\beta = -3$, et enfin $\alpha = 4$. Conclusion : $u_n = \dfrac{4}{2^n} - \dfrac{3}{3^n} = \dfrac{1}{2^{n-2}} - \dfrac{1}{3^{n-1}}$.

Interrogation Écrite n°3

ECE3 Lycée Carnot

13 novembre 2010

1. Rappeler la définition des coefficients binomiaux, ainsi que la formule de Pascal. Démontrer cette même formule par la méthode de votre choix.

2. Quel est le nombre d'angrammes du mot INTERROGATION ?

3. Développer $(2-x)^4$.

4. Le code d'entrée d'un immeuble est constitué de 3 chiffres (entre 0 et 9) suivi d'une lettre à choisir parmi A et B.
   - Combien y a-t-il de codes différents possibles ?
   - Combien de codes ont leurs trois chiffres distincts ?
   - Combien de codes comportent exactement deux fois le chiffre 2 ?
   - Combien de codes contiennent au moins un 7 ?

Corrigé de l'Interrogation n°3

1. Ca, c'est du cours, je ne vais pas me répéter.
2. Il y a 13 lettres dans le mot, donc cinq se répètent deux fois, soit $\dfrac{13!}{2!^5} = \dfrac{13!}{32}$ anagrammes.
3. $(2-x)^4 = 2^4 - 4 \times 2^3 \times x + 6 \times 2^2 \times x^2 - 4 \times 2 \times x^3 + x^4 = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$.
4. Il y a $10^3 \times 2 = 2\ 000$ codes possibles.

   Si les chiffres sont distincts, il reste $10 \times 9 \times 8 \times 2 = 1\ 440$ possibilités.

   S'il y a exactement deux 2, il reste à choisir le troisième chiffre (plus que 9 possibilités), sa position, et la lettre, soit $9 \times 3 \times 2 = 54$ possibilités.

   Par passage au complémentaire, $10^3 \times 2 - 9^3 \times 2 = 2\ 000 - 1\ 458 = 542$ possibilités.

Interrogation Écrite n°3 bis

ECE3 Lycée Carnot

20 novembre 2009

1. Rappeler la formule du binôme de Newton, ainsi que la formule de Vandermonde.

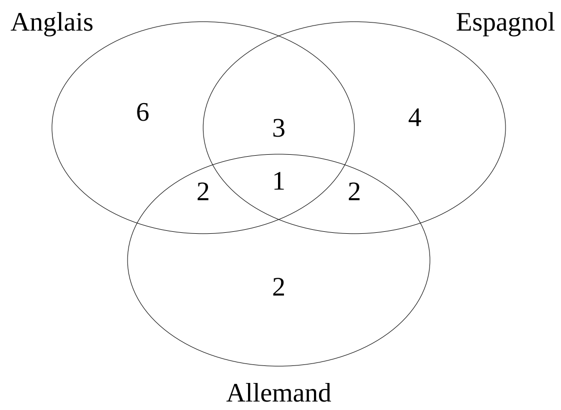
2. Développer et simplifier $(1+\sqrt{2})^4$.

3. Dans un groupe de 20 personnes, 12 parlent anglais ; 7 allemand ; 10 espagnol ; 4 anglais et espagnol ; 3 allemand et anglais. Un seul parle les trois langues, et chacun parle au moins une des trois langues. Faire un schéma représentant la répartition des 20 personnes selon les langues parlées.

4. Dans une urne se trouvent cinq boules vertes numérotées de 1 à 5, et trois boules blanches numérotées de 1 à 3. On tire successivement sans remise trois boules dans cette urne.
   (a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?
   (b) Combien de tirages ne comportent que des boules vertes ?
   (c) Combien de tirages avec deux boules paires et une impaire ?
   (d) Combien de tirages pour lesquels la première boule blanche tirée apparait au deuxième tirage ?
   (e) Combien de tirages pour lesquels les trois numéros tirés sont distincts ?

Corrigé de l'Interrogation n°3 bis

1. Encore une fois, revoyez votre cours...
2. $(1+\sqrt{2})^4 = 1 + 4\sqrt{2} + 6(\sqrt{2})^2 + 4(\sqrt{2})^3 + (\sqrt{2})^4 = 1 + 4\sqrt{2} + 12 + 8\sqrt{2} + 4 = 17 + 12\sqrt{2}$.
3. Il y a donc un trilingue, 3 bilingues anglais-espagnol qui ne parlent pas allemand, 2 bilingues allemand-anglais qui ne parlent pas espagnol, ce qui laisse 6 personnes qui ne parlent qu'anglais. Il reste donc 8 personnes à caser dans les cases espagnol seul, allemand seul et allemand-espagnol sans anglais, sachant qu'on doit avoir 4 personnes qui font allemand seul ou allemand-espagnol et 6 personnes qui font espagnol ou espagnol-allemand. Cela laisse deux personnes en trop, c'est-à-dire exactement deux bilingues allemand-espagnol, et donc 2 germanistes purs et 4 hispanisants purs. Allez, je vous fais quand même des jolies patates, ce sera plus clair :



4. (a) Ce sont des arrangements, il y en a $8 \times 7 \times 6 = 336$.
   (b) Il y en a $5 \times 4 \times 3 = 60$.
   (c) Il y a trois boules paires et cinq impaires, sachant que l'ordre est important, on a $3 \times 2 \times 5 \times 3 = 90$ (le 3 étant le nombre de positions possibles pour la boule blanche), ou si vous préférez $\binom{3}{2} \times \binom{5}{1} \times 3! = 90$.
   (d) Il faut donc une verte au premier tirage, une blanche au deuxième, et peu importe pour le troisième, soit $5 \times 3 \times 6 = 90$ tirages.
   (e) C'est en fait assez pénible, puisqu'il y a 2 boules portant les numéros 1, 2 et 3, mais une seule pour les numéros 4 et 5. Soit on tire comme numéro distincts les trois numéros doubles (1, 2 et 3 donc), ce qui laisse $2 \times 2 \times 2 \times 3! = 48$ tirages possibles (2 choix pour la boule de chaque numéro, plus l'ordre). Soit on tire la 4 et la 5, plus n'importe laquelle parmi les six autres, avec le choix de l'ordre également, soit $6 \times 3! = 36$ possibilités. Enfin, on peut tirer deux numéros doubles et un simple, ce qui laisse 2 possibilités pour le numéro simple, $\binom{3}{2} \times 2 \times 2$ pour les numéros doubles, et toujours 3! choix pour l'ordre, soit 96 tirages. Il y a donc au total 180 tirages avec trois numéros distincts.

Interrogation Écrite n°4

ECE3 Lycée Carnot

11 décembre 2009

Résoudre chacun des systèmes suivants, en détaillant les calculs effectués :

1. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ x & - & y & - & z & = & -1 \\ & & 2y & + & z & = & 3 \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 3y & + & z & = & 4 \\ x & - & y & + & 2z & = & 1 \end{array}\right.$

3. $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & & & + & t & = & -1 \\ -x & + & y & + & 4z & + & t & = & 11 \\ 2x & & & - & 2z & - & t & = & -9 \\ 3x & - & y & - & 4z & + & 2t & = & -12 \end{array}\right.$

Corrigé de l'Interrogation n°4

1.
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & y & + & z & = & 3 & \\ x & - & y & - & z & = & -1 & \qquad L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \\ & & 2y & + & z & = & 3 & \qquad L_3 \leftarrow L1 - L_3 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ 2x & & & & & = & 2 \\ x & - & y & & & = & 0 \end{array}\right.$$

On obtient donc $x = 1$ (deuxième équation), puis $y = x = 1$ (troisième équation) et enfin $z = 3 - x - y = 1$ (première équation), d'où $\mathcal{S} = \{1; 1; 1\}$.

2.
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} 2x & - & 3y & + & z & = & 4 & \\ x & - & y & + & 2z & = & 1 & \qquad L_2 \leftarrow L_1 - 2L_2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 3y & + & z & = & 4 \\ & - & y & - & 3z & = & 2 \end{array}\right.$$

On ne peut pas faire mieux, on obtient donc $y = -3z - 2$, puis $x = \dfrac{1}{2}(4 + 3y - z) = 2 - \dfrac{9}{2}z - 3 - \dfrac{1}{2}z = -1 - 5z$, d'où $\mathcal{S} = \{(-1 - 5z, -3z - 2, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$

3.
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} x & + & 2y & & & + & t & = & -1 & \qquad L_1 \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ -x & + & y & + & 4z & + & t & = & 11 & \\ 2x & & & - & 2z & - & t & = & -9 & \\ 3x & - & y & - & 4z & + & 2t & = & -12 & \qquad L_4 \leftarrow L_2 + L_4 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} -3x & & & + & 8z & + & t & = & 23 & \\ -x & + & y & + & 4z & + & t & = & 11 & \\ 2x & & & - & 2z & - & t & = & -9 & \qquad L_3 \leftarrow L_1 + 4L_3 \\ 2x & & & & & + & 3t & = & -1 & \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} -3x & & & + & 8z & + & t & = & 23 & \\ -x & + & y & + & 4z & + & t & = & 11 & \\ 5x & & & & & - & 3t & = & -13 & \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_4 \\ 2x & & & & & + & 3t & = & -1 & \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} -3x & & & + & 8z & + & t & = & 23 \\ -x & + & y & + & 4z & + & t & = & 11 \\ 7x & & & & & & & = & -14 \\ 2x & & & & & + & 3t & = & -1 \end{array}\right.$$

L'algorithme de Gauss n'a pas été appliqué dans un ordre très standard, mais on a bien obtenu un système triangulaire, qui nous donne $x = -2$, puis $3t = -1 + 4 = 3$, donc $t = 1$; $8z = 23 - 1 - 6 = 16$, soit $z = 2$; et enfin $y = 11 - 1 - 8 - 2 = 0$, soit $\mathcal{S} = \{(-2; 0; 2; 1)\}$.

Interrogation Écrite n°5

ECE3 Lycée Carnot

3 février 2010

1. Rappeler la définition d'une loi de probabilité

.

2. Rappeler l'énoncé de la formule des probabilités totales.

3. Une classe est constituée de 15 garçons et 20 filles. 5 garçons et 10 filles déclarent adorer les mathématiques. On tire un élève au hasard dans la classe. Quelle est la proba que ce soit un garçon ? Que ce soit quelqu'un qui adore les maths ? Sachant que l'élève adore les maths, quelle est la probabilité que ce soit une fille ?

4. Une urne contient 9 boules numérotées de 1 à 9. On en tire simultanément deux.
   (a) Quel est le nombre de tirage possibles ?
   (b) Quelle est la probabilité de tirer la boule numéro 1 ?
   (c) Quelle est la probabilité de tirer deux boules impaires ?
   (d) Quelle est la probabilité de tirer au moins un numéro divisible par 3 ?
   (e) Quelle est la probabilité que le plus grand numéro tiré soit inférieur ou égal à 5 ?

Corrigé de l'Interrogation n°5

1. Cours.
2. Cours toujours.
3. C'est un garçon avec proba $\dfrac{15}{15+20} = \dfrac{3}{7}$. L'élève adore les maths avec proba $\dfrac{15}{35} = \dfrac{3}{7}$ aussi. Enfin, la probabilité conditionnelle d'être une fille sachant qu'on aime les maths est de $\dfrac{10}{15} = \dfrac{2}{3}$.
4. (a) Il y a $\dbinom{9}{2} = \dfrac{9 \times 8}{2} = 36$ tirages possibles.
   (b) Il y a 8 tirages contenant le boule 1 (il faut choisir l'autre boule) soit une probabilité de $\dfrac{8}{36} = \dfrac{2}{9}$ (résultat intuitivement évident).
   (c) Comme il y a 5 boules impaires, $\dbinom{5}{2} = 10$ tirages conviennent, soit une probabilité de $\dfrac{10}{36} = \dfrac{5}{18}$.
   (d) On passe par le complémentaire, il y a 6 boules qui ne sont pas multiples de 3, donc $\dbinom{6}{2} = 15$ tirages sans multiples de 3. La probabilité cherchée vaut $1 - \dfrac{15}{36} = \dfrac{21}{36} = \dfrac{7}{12}$.
   (e) Le plus grand numéro est inférieur à 5 si les deux numéros tirés sont inférieurs à 5. On trouve la même probabilité qu'à la question c).

Interrogation Écrite n°6

ECE3 Lycée Carnot

25 mars 2010

1. Compléter le tableau suivant :

	$X(\Omega)$	$P(X=k)$	$E(X)$	$V(X)$
$\mathcal{U}(n)$				
$\mathcal{B}(n;p)$				
$\mathcal{H}(N;n;p)$				

2. Une société fait appel cinq fois au cours d'un mois à un service de dépannage informatique qui se vante d'être sur place dans l'heure suivant l'appel, mais qui est en réalité en retard une fois sur 10. On note X le nombre de retards observés sur les cinq appels effectués et Y le rang du premier appel auquel on a observé un retard (s'il n'y a jamais eu de retard, on conviendra de poser $Y = 0$).
   (a) Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X.
   (b) Déterminer $P(Y = 0)$.
   (c) Déterminer la loi de Y.
   (d) Calculer $P_{Y=3}(X = 2)$. Les évènements $Y = 3$ et $X = 2$ sont-ils indépendants ?
   (e) On suppose désormais que la société fait appel au service de dépannage cinq fois par mois pendant un an. On note Z le nombre de mois où la société n'a observé aucun retard lors de ses cinq appels. Déterminer la loi suivie par Z.

Corrigé de l'Interrogation n°6

1. Compléter le tableau suivant :

	$X(\Omega)$	$P(X=k)$	$E(X)$	$V(X)$
$\mathcal{U}(n)$	$\{1;2;\ldots;n\}$	$\dfrac{1}{n}$	$\dfrac{n+1}{2}$	$\dfrac{n^2-1}{12}$
$\mathcal{B}(n;p)$	$\{0;1;\ldots;n\}$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
$\mathcal{H}(N;n;p)$	$\{\max(0;n-Nq);1\ldots;\min(n,Np)\}$	$\dfrac{\binom{Np}{k}\binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	np	$np(1-p)\dfrac{N-n}{N-1}$

2. (a) La variable X suit une loi binômiale de paramètre $\left(5;\dfrac{1}{10}\right)$. On a donc $E(X)=\dfrac{5}{10}=0.5$ et $V(X)=5\times\dfrac{1}{10}\times\dfrac{9}{10}=\dfrac{45}{100}=\dfrac{9}{20}=0.45$.

   (b) On a $P(Y=0)=\left(\dfrac{9}{10}\right)^5$.

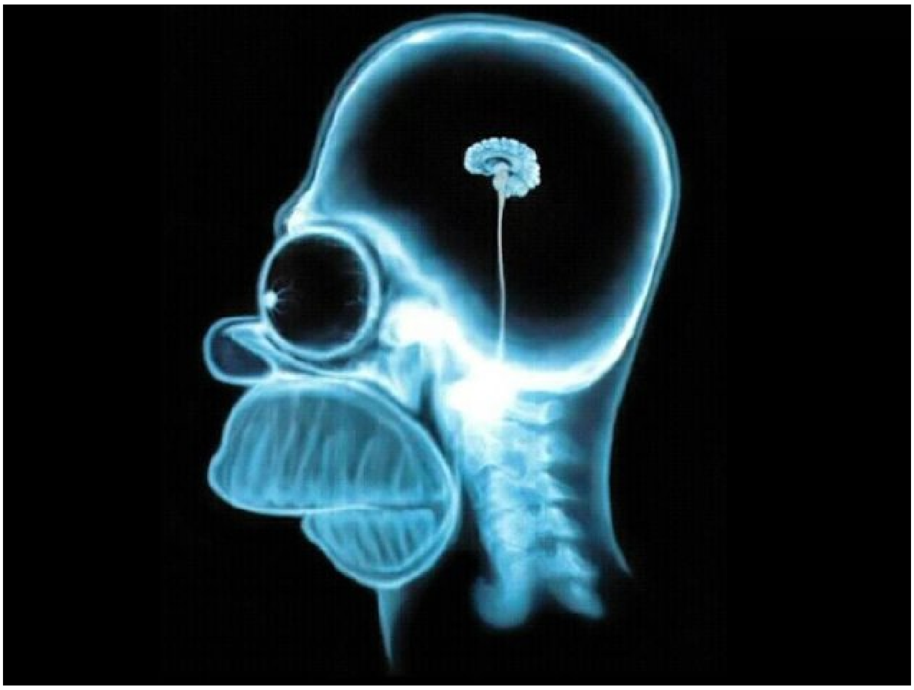
   (c) À l'aide d'une application répétée de la formule des probabilités composées, on obtient $P(Y=1)=\dfrac{1}{10}$; $P(Y=2)=\dfrac{9}{10}\times\dfrac{1}{10}=\dfrac{9}{100}$; puis $P(Y=3)=\dfrac{9^2}{1\ 000}$; $P(Y=4)=\dfrac{9^3}{10^4}$ et enfin $P(Y=5)=\dfrac{9^4}{10^5}$.

   (d) Si on sait que le premier retard intervient au troisième appel, on aura $X=2$ si (et seulement si) on a un retard au quatrième appel mais pas au cinquième, ou un retard au cinquième mais pas au quatrième, soit $P_{Y=3}(X=2)=\dfrac{1}{10}\times\dfrac{9}{10}+\dfrac{9}{10}\times\dfrac{1}{10}=\dfrac{18}{100}=0.18$. Or, on sait que $P(X=2)=\binom{5}{2}\left(\dfrac{1}{10}\right)^2\left(\dfrac{9}{10}\right)^3=10\times\dfrac{9^3}{10^5}=\dfrac{729}{10\ 000}=0.0729$. Les deux évènements ne sont donc pas indépendants.

   (e) On a vu plus haut que la probabilité d'un mois sans retard était de $\left(\dfrac{9}{10}\right)^5$. Si on répète cette expérience sur 12 mois, la variable Z va suivre une loi binômiale de paramètre $\left(12;\left(\dfrac{9}{10}\right)^5\right)$.

Quatrième partie

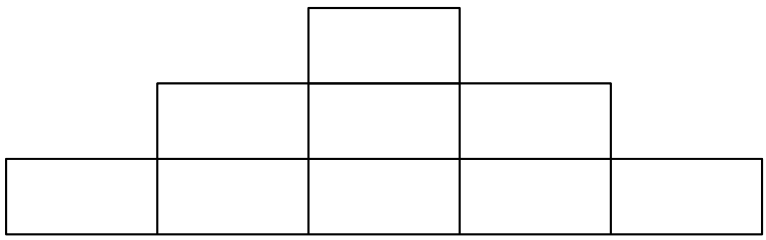
Brainstorming



Brainstorm n°1 : Pyramides égyptiennes

Une histoire de frontons

Pour cette première tentative de réflexion collective de l'année, nous allons remonter le temps de quelques millénaires et nous placer dans les sandales de Numérobis, celèbre architecte de l'Égypte ancienne. Ce dernier, à peu près aussi brillant dans le maniement des chiffres que dans celui de la règle et du concept d'horizontalité, aime construire à l'aide de blocs parallélépipédiques des frontons sur les façades de ses batiments ressemblant à ceci :



Autrement dit, un bloc sur le niveau supérieur, trois sur le niveau suivant, puis cinq, sept etc. Aidez-le à compter le nombre de blocs nécessaires à la construction d'un fronton à n niveaux (le but est d'obtenir est une jolie formule en fonction de n et si possible de la démontrer par le moyen de votre choix).

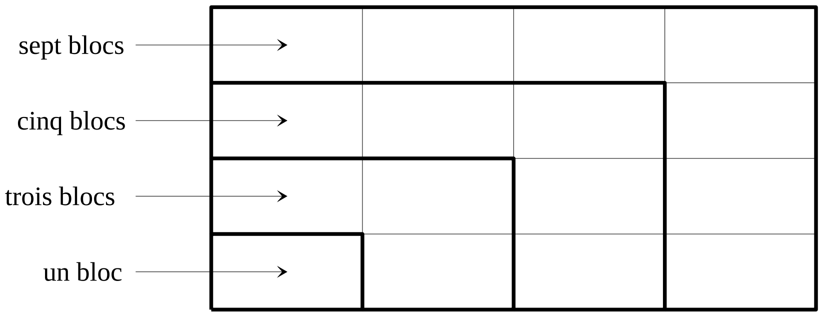
Mission Cléopâtre

La belle Cléopâtre, suite à une dispute avec le grand César, décide d'édifier une immense pyramide et, dans un moment d'égarement, fait appel à Numérobis pour la constrution du monument. La pyramide doit être constituée de 69 niveaux (le nombre préféré de Cléopâtre), le premier étant constitué de 2 blocs, le deuxième de 5 blocs, et chacun des suivants d'autant de blocs qu'il n'y en a **au total** dans les niveaux supérieurs (vu l'équilibre souvent précaire des constructions de Numérobis, si on met moins de blocs, la pyramide se cassera immanquablement la gueule). Numérobis n'ose pas trop rire au nez de sa reine (qu'elle a par ailleurs fort joli) de peur de servir de quatre heures à un crocodile sacré, mais il lui semble qu'une telle quantité de blocs va lui poser des problèmes de transport. Sachant que chaque bloc pèse une tonne, calculer la masse totale de la pyramide et donner votre avis.

Brainstorm n°1 : corrigé

Une histoire de frontons

L'énoncé nous demande en fait de trouver une façon de calculer la somme des n premiers entiers naturels impairs. Si l'on est un peu curieux et qu'on regarde ce que ça donne pour les premières valeurs de n (c'est toujours un bon réflexe de faire des essais de ce genre) on obtient 1, puis $1+3=4$, $1+3+5=9$, $1+3+5+7=16$, $1+3+5+7+9=25$ etc. Un oeil attentif aura remarqué que les résultats ressemblent étrangement aux carrés des premiers entiers. Reste à prouver que pour un fronton à n niveaux on aura effectivement besoin de n^2 blocs. Il existe pour cela une quantité de méthodes (notamment la récurrence), mais une simple figure suffit à se convaincre :



Mission Cléopâtre

Le nombre de blocs sur les premiers niveaux est donc 2, 5, $2+5=7$, $2+5+7=14$, $2+5+7+14=28$ etc. En fait, si on note le B_n le nombre de blocs du n-ième niveau, on a pour $n \geqslant 4$, $B_n = B_{n-1} + B_{n-2} + \cdots + B_1 = B_{n-1} + B_{n-1} = 2B_{n-1}$. Le nombre total de blocs est donc, en regroupant les deux premiers niveaux, de $7+7+14+28+\cdots = 7(1+1+2+2^2+\cdots+2^{66})$. Il ne reste plus qu'à réussir à calculer la parenthèse. Notons $A = 1+2+2^2+\cdots+7^{66}$, et constatons que $2A = 2+2^2+2^3+\cdots+2^{67}$, donc $A = 2A - A = 2+2^2+\cdots+2^{67}-1-2-2^2-\cdots-2^{66} = 2^{67}-1$. On en déduit que le nombre de blocs dans la pyramide vaut $7 \times 2^{67} \simeq 10^{21}$ blocs, soit un poids de 10^{24} kg. Sachant que la masse total de notre bonne vieille Terre est d'environ 6×10^{24} kg, Numérobis est dans un très gros pétrin. Pas sûr qu'invoquer de puissants mages gaulois suffise à le tirer d'affaire...

Brainstorm n°2 : Le jeu des craies

Bienvenue à Fort Boyard

Comme le titre l'indique, le petit jeu que je vais décrire ici a eu sa petite heure de gloire au sein d'un célèbre jeu télévisé. À défaut de cachots et de masques, nous allons reconstituer un minimum l'ambiance du jeu dans la classe, à savoir que vous allez affronter le Maître du jeu (en l'occurence moi) avec pour but de ne pas ramasser la fatidique dernière craie. Rappelons tout de même le principe : 20 craies sont alignées entre nous, et chacun notre tour, nous prenons à une extrémité une, deux ou trois craies. Celui qui est obligé de prendre la dernière craie a perdu. Je vous laisse commencer (sinon, je vous garantis que vous n'avez aucune chance) et votre but est tout simplement de me battre.

Une fois que vous avez mis au point votre stratégie, essayez de voir si le nombre de craies alignées au départ change vos chances de gains. Plus précisément, si on note n le nombre initial de craies, pour quelles valeurs de n êtes-vous certains de gagner avec une stratégie optimale ? Naturellement, une démonstration soignée de votre résultat sera la bienvenue.

Brainstorm n°2 : corrigé

Le jeu des craies

Je vais passer directement au cas où n craies sont alignées et chercher en fonction de n qui de celui qui débute le jeu (que nous appellerons désormais élève) ou de celui qui joue en deuxième (dénommé prof) va gagner si chacun des deux joueurs joue au mieux. Commençons donc par regarder ce qui se passe pour de petites valeurs de n :

- si $n = 1$, le pauvre élève est foutu avant même que le jeu ne commence. **Le prof gagne donc**.
- si $n = 2$, l'élève va brillament prendre une craie et laisser le prof perdre. **L'élève gagne**.
- si $n = 3$, l'élève prend deux craies. **L'élève gagne**.
- si $n = 4$, l'élève prend troies craies. **L'élève gagne**.
- si $n = 5$, l'élève a le choix entre prendre une craie et en laisser quatre au prof (qui gagne d'après le cas $n = 4$), en prendre deux et en laisser trois au prof (qui gagne encore), ou en prendre trois et en laisser deux au prof (qui gagne toujours). Dans tous les cas, **le prof gagne**.
- si $n = 6$, l'élève n'a qu'à prendre une craie et laisser le prof jouer avec cinq craies en face de lui, cas où on vient de voir qu'il est cuit quoi qu'il fasse. **L'élève gagne**.
- si $n = 7$, l'élève prend deux craies et ramène le prof à $n = 5$, **l'élève gagne**.
- si $n = 8$, l'élève prend troies craies et ramène le prof à $n = 5$, **l'élève gagne**.
- si $n = 9$, que l'élève prenne une, deux ou trois craies, il ramène le prof à un des trois cas précédents et perd. **Le prof gagne**.

Bref, si vous avez compris comment ça marche, vous commencez à vous doutez que le prof gagnera une fois sur quatre, plus précisément quand n est un multiple de quatre plus un. Pour le prouver, une seule méthode : la récurrence ! Mais on peut la présenter de différentes façons. Je vais le faire avec une récurrence quadruple car c'est assez simple à rédiger (une récurrence triple est en fait suffisante). Notons donc P_n : si $n = 4p+1$ alors le deuxième joueur gagne le jeu à n craies, sinon c'est le premier à jouer qui gagne. Les propositions P_1, P_2, P_3 et P_4 ont été vérifiées plus haut. Supposons désormais $n \geqslant 5$ et supposons également P_{n-1}, P_{n-2}, P_{n-3} et P_{n-4} vraies. Considérons alors le jeu à n craies. Si $n = 4p+1$, alors $n-1$, $n-2$ et $n-3$ ne sont pas multiples de quatre plus un, et quel que soit son choix initial le premier joueur va devoir laisser le deuxième jouer dans une position gagnante (par hypothèse de récurrence). Dans ce cas, P_n est vérifiée. Et si n n'est pas de la forme $4p+1$, alors l'un des trois entiers précédents, lui, l'est ! Le premier joueur n'a alors qu'à prendre le nombre de craies adéquates pour placer le deuxième dans la position perdante correspondante, et P_n est également vraie. Par principe de récurrence, P_n est donc vraie quel que soit l'entier n.

Note : La bonne tactique pour le premier joueur est donc la suivante : il commence par prendre (s'il le peut) un nombre de craies qui ramène le total à un multiple de quatre plus un. Ensuite, à chaque fois que son adversaire prend une craie, il en prend trois ; s'il en prend deux, il en prend aussi deux ; et s'il en prend trois, lui en prend une. Dans tous les cas, ils auront pris à eux deux quatre craies, et le nombre total de craies reste un multiple de quatre plus un. À force de diminuer, il finira par être égal à un, et le deuxième joueur perdra.

Brainstorm n°3 : Y a-t-il plus de points dans une droite ou dans un cercle ?

Des histoires de bijections

Mais qu'est-ce que c'est encore que cette histoire et ce titre étrange ? Voilà le problème : autant quand on parle d'ensembles finis, le concept d'avoir « autant d'éléments » dans deux ensembles est assez simple à comprendre, autant pour des ensembles infinis, c'est nettement plus compliqué. La seule façon raisonnable de procéder est de dire que deux ensembles (infinis) E et F sont équipotents s'il existe une bijection entre E et F (dans un sens ou dans l'autre, peu importe, puisque s'il en existe une de E vers F par exemple, la réciproque de cette application sera une bijection de F vers E). Le résultat (peut-être un peu surprenant) qui justifie cette définition est que tous les ensembles infinis ne sont pas équipotents. Autrement dit, même parmi les ensembles infinis, il y en a qui ont « plus d'éléments » que d'autres. Eh oui, il y a des infinis plus grands que d'autres, et le but de cette séance est d'essayer de faire un peu de tri là-dedans. Attention, les résultats que nous allons essayer de démontrer ne sont pas forcément très intuitifs...

1. On note $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{n est pair}\}$ et $B = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{n est impair}\}$. Montrer que A et B sont équipotents en construisant une bijection entre A et B (jusque-là, tout va bien, il parait normal qu'on ait autant d'entiers pairs que d'entiers impairs).
2. Montrer maintenant que A est équipotent à $\mathbb{N}$ tout entier (en fait, il y a autant d'entiers pairs que d'entiers tout court !).
3. Montrer que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont équipotents (autant d'entiers relatifs que de positifs).
4. Plus dur : montrer que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^2$ sont équipotents (autant d'entiers que de couples d'entiers !).
5. Montrer que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ sont équipotents.
6. Bon, vous allez me dire « en fait, tout le monde est équipotent à $\mathbb{N}$, c'est nul votre truc ». Eh bien non, $[0;1]$ n'est pas équipotent à $\mathbb{N}$. Vous pouvez essayer de le montrer mais c'est beaucoup plus dur que ce qui précède.
7. Montrer par contre que $[0;1]$ et $[0;10]$ sont équipotents.
8. Tant qu'on y est, montrer que $[0;1]$ et $\mathbb{R}$ tout entier sont équipotents.
9. Pour finir, montrer qu'un cercle et une droite sont équipotents (vous pouvez faire avec un demi-cercle et une droite, c'est plus facile).

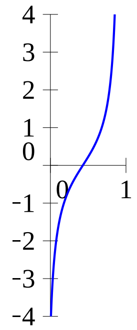
Brainstorm n°3 : corrigé

Des histoires de bijections

1. Il suffit de considérer l'application $f : \begin{array}{ccc} A & \to & B \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}$ (f est bien à valeurs dans B : si on ajoute 1 à un entier naturel pair, on obtient toujours un entier naturel impair). Cette application est manifestement injective (si $n+1 = n'+1$, alors $n = n'$), et également surjective puisque si on considère un entier p dans B, $p-1$ est toujours un entier naturel pair, et est un antécédent de p. L'application f est donc une bijection.
2. Encore une fois, une application fort simple suffit à notre bonheur, celle qui à un entier naturel n associe son double $2n$. Il est assez évident que f est à valeurs dans A, qu'elle est injective et surjective, donc bijective.
3. Si vous avez bien compris le cas précédent, celui-ci parait relativement naturel, mais l'application est un peu plus difficile à construire. L'idée est, par exemple, d'envoyer les naturels pairs sur les entiers positifs, et les impairs sur les négatifs. Une façon de le faire est de poser $f(n) = \dfrac{n}{2}$ si n est pair, et $f(n) = -\dfrac{n+1}{2}$ si n est impair. Si n est pair, $f(n) \geqslant 0$, et si n est impair, $f(n) < 0$. Comme par ailleurs, $\dfrac{n}{2} = \dfrac{n'}{2} \Rightarrow n = n'$, et $-\dfrac{n+1}{2} = -\dfrac{n'+1}{2} \Rightarrow n = n'$, l'application f est injective. Ne reste plus qu'à prouver qu'elle est surjective : soit $p \in \mathbb{Z}$, si $p \geqslant 0$, $2p$ est un antécédent de p ; si $p < 0$, $-2p-1$ est un antécédent de p. Finalement, f est bien bijective.
4. Ça se complique de plus en plus, alors plutôt que de vous donner une formule affreuse pour la bijection, je vais expliquer comment ça marche et j'espère que vous serez convaincus. L'ensemble $\mathbb{N}^2$ peut être représenté sous forme d'un tableau à deux dimensions, et donner une bijection de $\mathbb{N}$ vers ce tableau revient en fait à numéroter les éléments de ce tableau (à partir de 0) en essayant de ne pas en oublier au passage. L'idée est de faire cette numérotation diagonale par diagonale : on pose $f(0) = (0;0)$, puis $f(1) = (0;1)$ et $f(2) = (1;0)$ (première diagonale), puis $f(3) = (0;2)$, $f(4) = (1;1)$ et $f(5) = (2;0)$ etc. Le couple $(p;q)$ se trouve sur la diagonale numéro $p+q$, il est même le $(p+1)$ème élément de la diagonale avec la numérotation choisie, et on a déjà numéroté $1 + 2 + \cdots + (p+q)$ éléments sur les diagonales précédentes, soit $\dfrac{(p+q)(p+q+1)}{2}$ éléments. Autrement dit, on a $f(n) = (p;q)$ pour $n = \dfrac{(p+q)(p+q+1)}{2} + p$ (commence à numéroter à 0, ce qui explique qu'on ajoute p et pas $p+1$ à la fin). On a donc décrit la réciproque de la bijection f (je laisse les plus courageux vérifier que c'est bien une bijection).
5. En fait, l'idée est la même que pour $\mathbb{N}^2$ puisque $\mathbb{Q}$ est « plus petit » que $\mathbb{N}^2$: on peut toujours représenter un rationnel par un couple d'entiers (le numérateur et le dénominateur de la fraction) sauf qu'on impose en plus que la fraction en question ne soit pas simplifiable. Il suffit donc de reprendre le principe de la numérotation précédente, mais en sautant tous les couples correspondant à des fractions déjà numérotées (ainsi, on attribuera un numéro au couple $(1;1)$ mais pas au couple $(2;2)$, ni à $(3;3)$ etc.). Trouver une formule explicite pour cette bijection est impossible, et justifier correctement que ça fonctionne bien est délicat. On se contentera donc d'admettre que le résultat est effectivement raisonnable.
6. Pour le fait que $\mathbb{N}$ n'est pas équipotent à $\mathbb{R}$, il faut passer par un raisonnement par l'absurde. Supposons donc qu'il existe une bijection f qui « numérote » tous les réels. Un réel peut s'écrire sous forme décimale, avec éventuellement une infinité de chiffres après la virgule (cette écriture pose en fait quelques problèmes théoriques que nous allons passer sous silence). Notons donc x_1 l'image de 0 par f, qui sera donc pour nous un nombre décimal, x_2 l'image de 1, x_3 l'image de 2 etc. Construisons désormais un nouveau nombre décimal x de la façon suivante : $x = 0, \dots$, en choisissant comme première décimale un chiffre différent de la première décimale de x_1 (on peut certainement, puisqu'il y a 10 chiffres possibles pour chaque décimale !), comme deuxième

décimale un chiffre différent de la deuxième décimale de x_2, comme troisième décimale un chiffre différent de la troisième décimale de x_3 etc. Un tel nombre x est certainement différent de x_1 (ils ont au moins une décimale différente), de x_2, x_3, et de tous les x_i. Conclusion, ce nombre x n'a pas d'antécédent par f, qui ne peut donc pas être surjective, et encore moins bijective, ce qui est absurde ! Cet argument est connu sous le nom de « diagonale de Cantor ».

7. C'est très très bête, puisqu'il suffit de constater que la fonction $f : x \mapsto 10x$ effectue une bijection de $[0;1]$ sur $[0;10]$, ce qui est à peu près évident (sa réciproque est $f^{-1} : x \mapsto \dfrac{x}{10}$.
8. Là, c'est un peu plus compliqué, et j'aurais nettement mieux fait de vous faire chercher une bijection de $]0;1[$ (intervalle ouvert, donc) dans $\mathbb{R}$ (le fait de rajouter les points 0 et 1 ne change en fait essentiellement rien). Une fonction dont la représentation graphique ressemble à ceci est un candidat parfait à ce rôle :



9. Dessinez le demi-cercle sur une feuille, la droite un peu en-dessous, et placez le centre O du demi-cercle. On considère ensuite l'application suivante : à un point P du demi-cercle, on associe le point de la droite qui est sur la droite (OP). Il n'est pas très dur de se convaincre que cette application est bijective (en excluant les deux points extrêmes du demi-cercle).

Brainstorm n°4 : Des fonctions « pluri-bijectives »

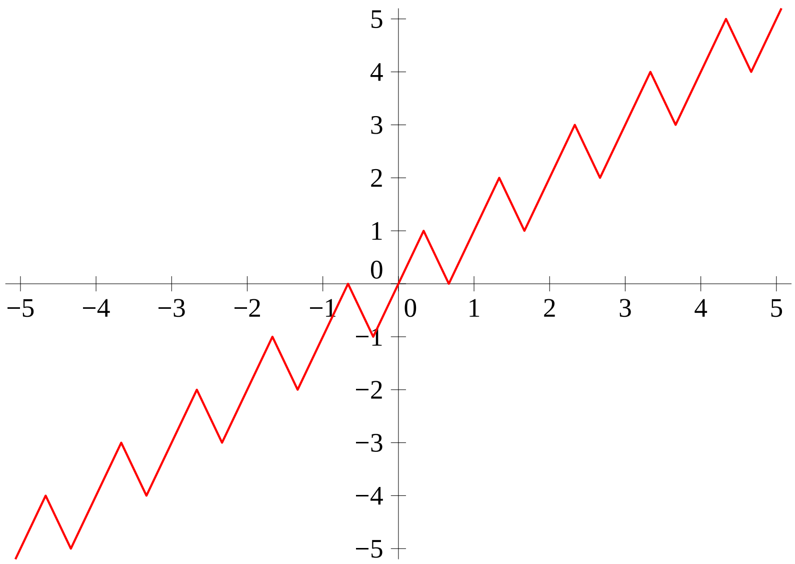
Le même nombre d'antécédents pour tous les réels ?

L'énoncé tient pour cette fois en une simple question : soit n un entier naturel (supérieur ou égal à 2). Existe-t-il une fonction f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que tout réel ait exactement n antécédents par f ? (le titre vient du fait que, pour $n = 1$, il s'agirait simplement de trouver des fonctions bijectives et continues, ce qui n'est pas vraiment difficile). La réponse peut naturellement dependre de la valeur de n, et un petit dessin en cas de réponse positive ou une (tentative d')explication en cas de réponse négative seront les bienvenus.

Brainstorm n°4 : corrigé

Des fonctions « pluri-bijectives ».

La réponse à la question posée est la suivante : une telle fonction existe pour toutes les valeurs de n impaires, mais ça ne marche jamais quand n est pair. Voici un exemple de fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour laquelle tout réel a exactement trois antécédents :



En effet, tout réel non entier a manifestement trois antécédents par cette fonction continue (deux sur des segments « montants » et un sur un segment « descendant »). Quand aux entiers, ils sont également atteints trois fois : une fois au milieu d'un segment « montant », une fois comme maximum local au bout d'un segment « montant » et une fois comme minimum local au bout d'un segment « descendant ». Il suffit en fait pour que ça marche bien que la valeur de chaque minimum local corresponde à celle d'un maximum local.

On construit assez facilement sur le même modèle des fonctions pour lesquelles chaque réel a 5, 7 ou 9 antécédents, et on généralise ainsi à tous les entiers impairs (il suffit de faire des « vaguelettes » supplémentaires entre deux segments « montants »).

Essayons maintenant de prouver par l'absurde qu'on ne peut pas trouver de fonction convenable pour $n = 2$. Supposons donc qu'une telle fonction f existe. Il existe alors exactement deux réels a et b, avec par exemple $a < b$, tels que $f(a) = f(b) = 0$. La fonction f est alors de signe constant sur chacun des intervalles $]-\infty; a[$, $]a; b[$ et $]b; +\infty[$ (sinon, via le théorème des valeurs intermédiaires, on pourrait trouver un troisième antécédent à 0 sur un de ces intervalles). On sait par ailleurs que $f([a; b])$ est un segment, que nous noterons $[m; M]$, avec donc $m \leqslant 0$ et $M \geqslant 0$. Si on suppose que f est de même signe sur $]-\infty; a[$ et sur $]b; +\infty[$, par exemple positive, elle admet pour minimum global m (si elle est négative sur les deux intervalles, elle a pour maximum global M), ce qui ne nous convient pas du tout puisque cela signifie que tous les réels strictement inférieurs à m n'ont pas d'antécédent par f (alors qu'il sont censés en avoir 2). Supposons donc f de signe opposé sur $]-\infty; a[$ et sur $]b; +\infty[$. Supposons par ailleurs $M > 0$ (M et m ne peuvent pas être tous les deux nuls, sinon f serait constante égale à 0 sur $[a; b]$, donc l'un des deux est non nul, et ça ne change pas grand chose que ce soit m ou M), et notons c un réel dans $]a; b[$ tel que $f(c) = M$. La fonction f prenant des valeurs strictement positives sur un deux intervalles « infinis », par exemple sur $]b; +\infty[$ (elle ne peut pas non plus y être toujours nulle), notons d un réel appartenant à $]b; +\infty[$ tel que $f(d) > 0$. Notons enfin e un réel strictement positif mais strictement inférieur à la fois à M et à $f(d)$ (un tel réel existe certainement, il suffit de prendre le plus petit parmi M et $f(d)$ et de le diviser par 2). En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires sur chacun des intervalles $[a;c]$, $[c;b]$ et $[b;d]$, on peut trouver trois réels distincts (un dans chaque intervalle ouvert) qui sont tous des antécédents de e. Cela contredit notre hypothèse sur f et achève le raisonnement par l'absurde.

Les plus courageux d'entre vous pourront entreprendre un raisonnement similaire dans le cas où $n = 4$ (il y a un peu plus de cas à regarder mais l'idée reste la même). Prouver qu'on ne peut pas trouver de fonction convenable en général quand n est pair nécessite un peu plus de connaissances que ce que vous avez à disposition pour l'instant.

Brainstorm n°5 : Paradoxes probabilistes

Bizarre, vous avez dit bizarre ?

Les probas, ce n'est pas toujours aussi intuitif qu'on ne le voudrait. Je ne vais pas vous râbacher une fois de plus le fameux paradoxe des anniversaires, mais voici une petite liste de problèmes amusants (enfin, j'espère) dont la conclusion n'est pas évidente à deviner :

1. Une famille a deux enfants. Chaque enfant a une probabilité $\frac{1}{2}$ d'être une fille et les deux probabilités sont indépendantes. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles (facile) ? Si on sait que l'aîné des deux enfants est une fille, quelle est désormais la probabilité que les deux enfants soient des filles (facile aussi) ? Et si on sait qu'au moins un des deux enfants est une fille (moins évident) ?
2. Dans un jeu télévisé, un candidat doit choisir entre trois portes, l'une d'entre elles cachant un prix fabuleux : une intégration à HEC sans passer le concours. Une fois que le candidat a fait son choix, le présentateur du jeu élimine une des deux portes qui ne contenaient pas le prix (et qui n'est pas celle choisie par le candidat), et laisse au candidat la possibilité de reconsidérer son choix entre les deux portes restantes. A-t-il intérêt à changer d'avis ?
3. Deux enveloppes sont posées devant vous, et vous savez que chacune contient une certaine somme, mais que l'une des deux contient deux fois plus d'argent que l'autre. Vous devez choisir une des deux enveloppes. Imaginez que vous preniez l'enveloppe 1 et que ayez 50 euros à l'intérieur (peu importe la somme, ça ne change rien) Que pensez-vous du raisonnement suivant : « Il y a une chance sur deux que l'enveloppe 2 contienne 25 euros, et une chance sur deux qu'elle contienne 100 euros. En moyenne, il y a donc $\frac{100+25}{2} = 62.5$ euros dans l'enveloppe 2. Il y a donc plus d'argent en moyenne dans l'enveloppe 2 que dans la 1 ». Pourtant, le même raisonnement peut être fait dans l'autre sens. Où est le bug ?
4. Pour finir, pas vraiment un paradoxe, mais un exercice grotesque. Pour vos vacances, vous décidez d'aller passer deux semaines sans emporter vos cours de maths sur une île paradisiaque qui n'a qu'un défaut : elle n'est desservie que par une seule compagnie aérienne, dont les avions ont le mauvais gout de ne pas être très fiables. Plus précisément, chaque moteur de chacun de leurs avions a une certaine probabilité p de tomber en panne en cours de vol (les pannes étant indépendantes d'un moteur à l'autre). Sachant que votre avion s'écrasera irrémédiablement si la moitié (au moins) de ses moteurs tombe en panne en cours de vol, préférez-vous emprunter un avion à deux moteurs ou à quatre moteurs ?

Brainstorm n°5 : corrigé

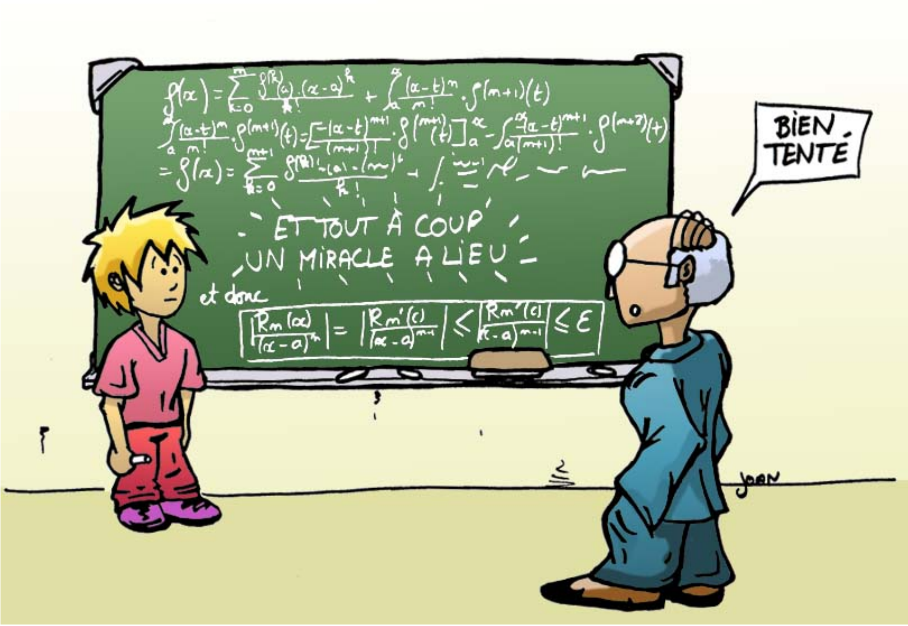
Bizarre, vous avez dit bizarre ?

1. Si on a aucune information, la probabilité d'avoir deux filles est naturellement $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Si on sait que l'aîné est une fille, la probabilité qu'il y ait deux filles vaut $\frac{1}{2}$, c'est la probabilité que le deuxième enfant soit une fille. Pour le dernier cas, il vaut mieux préciser ce qu'on calcule : notons A l'évènement « Les deux enfants sont des filles » et B « Au moins un enfant est une fille ». On cherche à calculer $P_B(A)$. Utilisons la formule de Bayes, on a $P(A) = \frac{1}{4}$ (cf ci-dessus), $P(B) = \frac{3}{4}$ (sur les quatre cas possibles, un seul ne réalise pas B, c'est celui où il y a deux garçons), et bien sûr $P_A(B) = 1$ (s'il y a deux filles, il y a certainement au moins une fille !). On a donc $P_B(A) = \frac{\frac{1}{4} \times 1}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$. Étonnant, non ?
2. Le candidat a tout intérêt à changer. En effet, s'il ne change pas, il a une chance sur trois de gagner (le fait que l'animateur ait exclu une porte ne change rien). Mais s'il change, il va gagner deux fois sur trois : s'il avait deviné avant de changer (une chance sur trois), il va se mordre les doigts. Mais s'il s'était trompé au départ (deux chances sur trois), peu importe laquelle des deux mauvaises portes il a choisie, l'animateur vient de lui supprimer l'autre mauvaise porte (il n'a pas eu le choix) et il est donc certain d'empocher le lot en changeant d'avis. Une autre façon de voir les choses : si le candidat perd sans changer, il aurait nécessairement gagné en changeant. La proba de gagner en changeant est donc complémentaire de celle de gagner sans changer, donc égale à $\frac{2}{3}$.
3. Là, c'est nettement plus subtil. Le problème est en fait que vous ne pouvez pas avoir n'importe quelle somme dans chaque enveloppe, ou du moins pas toujours avec la même probabilité. Supposons par exemple que les seuls montants acceptés soient de 1 à 50 euros pour l'enveloppe contenant le plus petit montant et donc de 2 à 100 euros pour l'autre, avec proba $\frac{1}{50}$ d'avoir chaque montant. Dans ce cas, si vous avez par exemple un montant de 60 euros dans l'enveloppe, vous savez que c'est l'enveloppe la plus intéressante et le raisonnement n'a plus de sens. Si les montants ne sont pas limités, on ne pourra donner la même probabilité à chaque montant possible (cela devra diminuer avec le montant) et on saura, si on tire un gros montant dans notre enveloppe, qu'il y a de plus grandes chances que ce soit la meilleure enveloppe. Ceci dit, le paradoxe reste très perturbant du point de vue du cobaye, qui lui ne sait pas quels sont les montants possibles, ni la répartition des probabilités...
4. Quelle est la probabilité que l'avion à deux moteurs s'écrase ? Notons A_1 : « Le premier moteur tombe en panne » et A_2 : « Le deuxième moteur tombe en panne ». O cherche à calculer $P(A_1 \cup A_2)$. Comme les deux moteurs sont indépendants, $P(A_1 \cap A_2) = p^2$, donc $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = 2p - p^2$. Dans le cas de l'avion à quatre moteurs, la probabilité que deux moteurs fixés (le premier et le deuxième par exemple) tombent en panne vaut $p^2(1-p)^2$ ($1-p$ représentant la probabilité que le troisième et le quatrième moteurs ne tombent pas en panne). Comme il y a $\binom{4}{2} = 6$ couples de moteurs possibles pouvant tomber en panne, cela donne une probabilité de $6p^2(1-p)^2$ que deux moteurs éxactement tombent en panne. Pour trois moteurs en panne exactement, la proba vaut $4p^3(1-p)$ (le facteur 4 pour le choix du moteur qui tient le coup), et pour quatre moteurs en panne, elle est naturellement de p^4. Cela laisse une probabilité que notre avion s'écrase de $6p^2(1-p)^2 + 4p^3(1-p) + p^4$. Pour comparer cette expression à celle obtenue pour le bimoteur, le plus simple est de faire leur différence et d'en chercher le signe : $f(p) = 6p^2(1-p)^2 + 4p^3(1-p) + p^4 - 2p + p^2 = 6p^2 - 12p^3 + 6p^4 + 4p^3 - 4p^4 + p^4 - 2p + p^2 = 3p^4 - 8p^3 + 7p^2 - 2p = p(3p^3 - 8p^2 + 7p - 2)$. Ce polynome a pour racine évidente 1 (ce qui est tout à fait normal puisque si $p = 1$, les deux avions ont la même

probabilité de s'écraser !), donc $f(p) = p(p-1)(ap^2+bp+c) = p(ap^3+(b-a)p^2+(c-b)p-c)$. En identifiant avec l'expression précedente, on obtient $a = 3$, $b = -5$ et $c = 2$. Ne reste plus qu'à déterminer les racines du trinôme $3p^2 - 5p + 2$, qui a pour discriminant $\Delta = 25 - 24 = 1$, et admet deux racines $p_1 = \frac{5-1}{6} = \frac{2}{3}$ et $p_2 = \frac{5+1}{6} = 1$. Un petit tableau de signe permet finalement d'obtenir que $f(p) \neq 0$ si $p \in \left[0; \frac{2}{3}\right]$ et $f(p) \geqslant 0$ si $p \in \left[\frac{2}{3}; 1\right]$. Autrement dit, il vaut mieux prendre l'avion à quatre moteurs si $p \leqslant \frac{2}{3}$. Si $p \geqslant \frac{2}{3}$, il vaut de toute façon mieux renoncer à son voyage !

Cinquième partie

Colles


ET TOUT À COUP
UN MIRACLE A LIEU
et donc
BIEN TENTÉ

Groupes de colles

Groupe 1
Jurkiewicz Martin
Moingeon Camille
Le Gall Cyrielle

Groupe 2
Duparc Sophie
Paly Camille
Caradec Paul

Groupe 3
Amram Maylis
Bendjebbour Sonia
Ozcan Isabelle

Groupe 4
Salignon Thibault
Cheneson Brandon
Lipnitzki Marie

Groupe 5
Prudent Julie
Verbrugghe Caroline
Boutevin Chloe

Groupe 6
Eschylles Sandra
Mathoulin Anne-Laure
Carré Pierre

Groupe 7
Bodier Alexandre
Lalane Clément
Banguy Anaïs

Groupe 8
Oudrhiri Rita
Robert Marion
Guillot Audrey

Groupe 9
Tchoumakov Tania
Maruzzo Estelle
Hayaud Laura

Groupe 10
Miralles Guillaume
Riesco Caroline
Sailly Marie

Groupe 11
Siccardi Olivia
Pees Alexandra
Cousseran Mathilde

Groupe 12
Marbot Mélanie
Ying Ping Mélody
Sper Angélique

Groupe 13
Francisco Juan José
Tournié Éric
Maléjac Cattleya

Groupe 14
Leshaf Samia
Lafitte Mélissa
Simon Sandra

Colloscope

Code	Colleur	Horaire	Salle	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	MATHS															
M1	M.Conduché	Mardi 15^{30}-16^{30}	118	2	1	3	4	6	5	8	13	10	9	12	11	14
M2	M.Conduché	Mardi 16^{30}-17^{30}	118	10	9	12	11	14	■	■	7	2	1	3	4	6
M3	M.Connétable	Mercredi 13-14	118	3	5	6	7	8	1	10	11	12	13	14	7	8
M4	M.Connétable	Mercredi 14-15	118	12	13	14	■	■	9	2	4	3	5	6	■	■
M5	M.Lafon	Jeudi 15^{30}-16^{30}	Préfa 2	6	7	8	9	10	11	12	5	14	7	8	1	2
M6	M.Lafon	Jeudi 16^{30}-17^{30}	Préfa 2	14	■	■	1	2	4	3	■	6	■	■	9	10
M7	Mme Chekroun	Vendredi 16^{30}-17^{30}	15	8	4	10	5	12	7	14	9	8	11	2	5	3
M8	Mme Chekroun	Vendredi 17^{30}-18^{30}	15	■	11	2	13	3	13	6	1	■	4	10	13	12
	AEHSC															
H1	Mme Duchêne	Mardi 17^{30}-18^{30}	R2	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
H2	Alternance	Mercredi 14-15	Préfa 4	4	10	5	12	7	14	9	6	11	2	13	3	1
H3	Alternance	Mercredi 15-16	Préfa 4	11	14	13	2	1	2	4	3	5	6	7	8	9
H4	Alternance	Mercredi 16-17	Préfa 4	7	2	9	3	11	6	13	8	1	10	4	12	5
H5	Alternance	Mercredi 17-18	Préfa 4	1	6	4	8	5	10	7	12	9	14	11	10	13
H6	Mme Duchêne	Vendredi 15^{30}-16^{30}	8	9	3	11	6	13	8	11	10	4	12	5	14	7
H7	Mme Duchêne	Vendredi 16^{30}-17^{30}	8	5	8	7	10	4	12	1	14	13	8	1	2	4
H8	Mme Duchêne	Vendredi 17^{30}-18^{30}	8	13	12	1	14	9	3	5	2	7	3	9	6	11
	Philo															
P1	Mme Boutot	Mercredi 13-14	109	13	8	1	14	4	2	9	14	5	3	1	10	4
P2	Mme Boutot	Mercredi 14-15	109	5	3	7	10	11	6	1	12	13	8	9	14	11
P3	Mme Boutot	Vendredi 16^{30}-17^{30}	A3	11	6	9	12	5	3	7	10	11	6	7	12	5
P4	Mme Boutot	Vendredi 17^{30}-18^{30}	A3	4	2	■	■	13	8	■	■	4	2	■	■	13
	Lettres															
L1	Mme Fleur	Jeudi 16^{30}-17^{30}	12	7	14	4	2	9	12	5	8	1	12	11	6	1
L2	Mme Fleur	Jeudi 17^{30}-18^{30}	12	9	10	11	6	■	■	13	3	7	■	4	2	■
L3	M.Casalaspro	Vendredi 16-17	11	1	12	5	8	7	14	4	2	9	10	13	3	9
L4	M.Casalaspro	Vendredi 17-18	11	■	■	13	3	1	10	11	6	■	14	5	8	7
	Allemand															
Al1	Mme Roehling	Mercredi 14-15	Préfa 5	■	1	3	1	2	1	3	1	2	1	3	1	2
Al2	Mme Roehling	Mercredi 15^{40}-16^{40}	Préfa 5	■	■	2	■	3	■	2	■	3	■	2	■	3
	Anglais															
An1	Mme Esnault	Lundi 17^{30}-18^{30}	105	■	8	1	2	4	12	5	6	7	8	9	10	11
An2	Mme Esnault	Jeudi 17^{30}-18^{30}	105	■	14	5	10	7	3	9	14	11	2	13	3	1
An3	Mme Pélichet	Mardi 15^{30}-16^{30}	114	■	2	4	3	5	6	7	8	9	10	11	12	13
An4	Mme Pélichet	Mardi 16^{30}-17^{30}	114	■	6	9	8	11	10	13	12	1	3	4	2	5
An5	Mme Pélichet	Mardi 17^{30}-18^{30}	114	■	10	13	12	1	14	4	2	5	14	7	6	9
An6	Mme Perrot	Mardi 15^{30}-16^{30}	212	■	3	7	6	9	8	11	10	13	12	1	8	4
An7	Mme Perrot	Mardi 16^{30}-17^{30}	212	■	12	11	14	13	2	1	3	4	6	5	14	7
	Espagnol															
Es1	Mme Munoz	Mercredi 14-15	101	■	4	12	5	6	7	8	9	10	4	12	11	6
Es2	Mme Munoz	Mercredi 15-16	101	■	7	14	9	14	13	6	11	8	13	14	5	10
Es3	Mme Munoz	Mercredi 16-17	101	■	13	■	11	■	4	10	5	12	7	■	9	8
Es4	Mme Voinier	Mercredi 13-14	107	■	9	10	13	10	11	12	4	6	5	10	13	12
Es5	Mme Voinier	Mercredi 14-15	107	■	11	8	4	12	5	14	7	14	9	8	4	14
Es6	Mme Voinier	Mercredi 15-16	107	■	5	6	7	8	9	■	13	■	11	6	7	■

1 : Semaine du 28/09 au 02/10
2 : Semaine du 05/10 au 09/10
3 : Semaine du 12/10 au 16/10
4 : Semaine du 19/10 au 23/10
5 : Semaine du 09/11 au 13/11
6 : Semaine du 16/11 au 20/11
7 : Semaine du 23/11 au 27/11

8 : Semaine du 30/11 au 04/12
9 : Semaine du 07/12 au 11/12
10 : Semaine du 14/12 au 18/12
11 : Semaine du 11/01 au 15/01
12 : Semaine du 18/01 au 22/01
13 : Semaine du 25/01 au 29/01

Code	Colleur	Horaire	Salle	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
	MATHS															
M1	M.Conduché	Mardi 15^{30}-16^{30}	118	13	8	7	6	5	8	13	10	9	12	11	14	13
M2	M.Conduché	Mardi 16^{30}-17^{30}	118	5	■	13	14	■	■	7	2	1	3	4	6	5
M3	M.Connétable	Mercredi 13-14	118	1	2	4	8	1	10	11	12	13	14	7	8	1
M4	M.Connétable	Mercredi 14-15	118	9	10	11	■	9	2	4	3	5	6	■	■	9
M5	M.Lafon	Jeudi 15^{30}-16^{30}	Préfa 2	4	3	5	10	11	12	5	14	7	8	1	2	4
M6	M.Lafon	Jeudi 16^{30}-17^{30}	Préfa 2	11	12	■	2	4	3	■	6	■	■	9	10	11
M7	Mme Chekroun	Vendredi 16^{30}-17^{30}	15	7	6	1	12	7	14	9	8	11	2	5	3	7
M8	Mme Chekroun	Vendredi 17^{30}-18^{30}	15	■	14	9	3	13	6	1	■	4	10	13	12	■
	AEHSC															
H1	Mme Duchêne	Mardi 17^{30}-18^{30}	R2	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
H2	Alternance	Mercredi 14-15	Préfa 4	6	4	8	5	14	7	6	9	2	11	3	13	6
H3	Alternance	Mercredi 15-16	Préfa 4	10	11	12	13	2	1	3	4	6	5	8	7	10
H4	Alternance	Mercredi 16-17	Préfa 4	14	7	14	9	6	11	8	13	10	1	12	4	14
H5	Alternance	Mercredi 17-18	Préfa 4	2	1	3	4	10	5	12	7	14	9	10	11	2
H6	Mme Duchêne	Vendredi 15^{30}-16^{30}	8	8	9	2	11	8	13	10	1	12	4	14	5	8
H7	Mme Duchêne	Vendredi 16^{30}-17^{30}	8	3	5	6	7	12	9	14	11	8	13	2	1	3
H8	Mme Duchêne	Vendredi 17^{30}-18^{30}	8	12	13	10	1	3	4	2	5	3	7	6	9	12
	Philo															
P1	Mme Boutot	Mercredi 13-14	109	3	7	12	13	2	1	14	4	3	1	10	13	3
P2	Mme Boutot	Mercredi 14-15	109	2	9	14	5	6	9	12	11	8	7	14	5	2
P3	Mme Boutot	Vendredi 16^{30}-17^{30}	A3	8	1	10	4	3	7	10	5	6	9	12	11	8
P4	Mme Boutot	Vendredi 17^{30}-18^{30}	A3	6	■	■	11	8	■	■	13	2	■	■	4	6
	Lettres															
L1	Mme Fleur	Jeudi 16^{30}-17^{30}	12	14	5	6	9	12	11	8	1	12	5	6	9	14
L2	Mme Fleur	Jeudi 17^{30}-18^{30}	12	10	13	8	7	■	4	3	■	■	13	2	1	10
L3	M.Casalaspro	Vendredi 16-17	11	12	4	3	1	14	5	2	7	10	11	3	7	12
L4	M.Casalaspro	Vendredi 17-18	11	■	11	2	■	10	13	6	9	14	4	8	■	■
	Allemand															
Al1	Mme Roehling	Mercredi 14-15	Préfa 5	1	3	1	2	1	3	1	2	1	3	■	■	■
Al2	Mme Roehling	Mercredi 15^{40}-16^{40}	Préfa 5	■	2	■	3	■	2	■	3	■	2	■	■	■
	Anglais															
An1	Mme Esnault	Lundi 16^{45}-17^{45}	105	12	13	8	1	12	4	6	5	8	7	■	■	■
An2	Mme Esnault	Lundi 17^{45}-18^{45}	105	6	4	14	5	3	7	14	9	2	11	■	■	■
An3	Mme Pélichet	Mardi 15^{30}-16^{30}	114	3	1	2	4	6	5	8	7	10	9	■	■	■
An4	Mme Pélichet	Mardi 16^{30}-17^{30}	114	14	7	6	9	10	11	12	13	3	1	■	■	■
An5	Mme Pélichet	Mardi 17^{30}-18^{30}	114	8	11	10	13	14	1	2	4	14	5	■	■	■
An6	Mme Perrot	Mardi 15^{30}-16^{30}	212	10	5	12	7	8	9	10	11	12	13	■	■	■
An7	Mme Perrot	Mardi 16^{30}-17^{30}	212	2	9	3	11	2	13	3	1	6	4	■	■	■
	Espagnol															
Es1	Mme Munoz	Mercredi 14-15	101	7	8	5	6	7	8	9	10	4	12	■	■	■
Es2	Mme Munoz	Mercredi 15-16	101	13	14	9	14	13	6	11	8	13	14	■	■	■
Es3	Mme Munoz	Mercredi 16-17	101	4	■	11	■	4	10	5	12	7	■	■	■	■
Es4	Mme Voinier	Mercredi 13-14	107	9	6	13	10	11	12	4	6	5	10	■	■	■
Es5	Mme Voinier	Mercredi 14-15	107	11	12	7	12	5	14	7	14	9	8	■	■	■
Es6	Mme Voinier	Mercredi 15-16	107	5	10	4	8	9	■	13	■	11	6	■	■	■

14 : Semaine du 01/02 au 05/02
15 : Semaine du 08/02 au 12/02
16 : Semaine du 15/02 au 19/02
17 : Semaine du 08/03 au 12/03
18 : Semaine du 15/03 au 19/03
19 : Semaine du 22/03 au 26/03
20 : Semaine du 29/03 au 02/04

21 : Semaine du 05/04 au 09/04
22 : Semaine du 12/04 au 16/04
23 : Semaine du 03/05 au 07/05
24 : Semaine du 10/05 au 14/05
25 : Semaine du 24/05 au 28/05
26 : Semaine du 31/05 au 04/06

Semaine n°1 (du 28/09 au 02/10 2009)

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera systématiquement noté en-dessous de la moyenne.

Fonctions usuelles

- Éléments de logique : quantificateurs, implications, contraposée.
- Domaines de définition de fonctions simples (faisant intervenir racines carrées et ln).
- Parité, périodicité.
- Variations de fonctions usuelles (aucune définition précise de la limite ou de la dérivée n'a été donnée, on se contente pour l'instant des connaissances de Terminale).
- Fonctions logarithmes et exponentielles de base quelconque (variations et courbes).
- Fonctions puissances : rappels sur les puissances entières et généralisation aux puissances quelconques.
- Résultats de croissance comparée (admis).
- Valeur absolue (propriétés algébriques, résolution d'équations et inéquations ; courbe de la fonction valeur absolue et de fonctions plus complexes faisant intervenir des valeurs absolues).
- Partie entière (définition et courbe).

Sommes, produits, récurrences

- Symbole $\sum$, propriétés et règles de calcul (y compris les changements d'indice) ; exemple de calcul faisant intervenir des sommes télescopiques.
- Sommes doubles.
- Symbole $\prod$, règles de calcul ; définition des factorielles.
- Démonstration par récurrence, récurrence double et récurrence forte.
- **Calcul des sommes classiques suivantes :** $\displaystyle\sum_{i=0}^{i=n} i\,;\ \sum_{i=0}^{i=n} i^2\,;\ \sum_{i=0}^{i=n} i^3\,;\ \sum_{i=0}^{i=n} q^i$.

Prévisions pour la semaine suivante (5 au 9 octobre) : même programme.

Semaine n°2 (du 05/10 au 09/10 2009)

Même programme que pour la semaine 1.

Prévisions pour la semaine suivante (12 au 16 octobre) : suites (début).

Semaine n°3 (du 12/10 au 16/10 2009)

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera noté systématiquement en dessous de la moyenne.

Sommes, produits, récurrences

Même si la partie centrale du programme porte sur le premier chapitre consacré aux suites, les exercices peuvent faire intervenir des récurrences ou des calculs de sommes. Les **calculs de sommes classiques** peuvent toujours faire l'objet d'une question de cours.

Suites

- Généralités et vocabulaire : indice, terme général, définition d'une suite par une formule explicite ou par récurrence, suites croissantes, décroissantes, majorées, minorées, bornées, sommes partielles.
- Suites arithmétiques : **formule explicite, sens de variation, sommes partielles**.
- Suites géométriques : **formule explicite, sens de variation, sommes partielles**.
- Suites arithmético-géométriques (la **méthode de calcul du terme général** peut faire l'objet d'une question de cours).
- Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (forme du terme général admise, mais la **méthode de résolution** peut faire l'objet d'une question de cours).
- Pour l'instant, aucun nouveau résultat sur les limites (ni même la définition avec des ε) n'a été vu en cours, les éventuels calculs de limites doivent donc rester élémentaires.

Prévisions pour la semaine suivante : même contenu sur les suites, plus ensembles et applications.

Semaine n°4 (du 19/10 au 23/10 2009)

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera noté systématiquement en dessous de la moyenne.

Suites

- Généralités et vocabulaire : indice, terme général, définition d'une suite par une formule explicite ou par récurrence, suites croissantes, décroissantes, majorées, minorées, bornées, sommes partielles.
- Suites arithmétiques : **formule explicite, sens de variation, sommes partielles**.
- Suites géométriques : **formule explicite, sens de variation, sommes partielles**.
- Suites arithmético-géométriques (la **méthode de calcul du terme général** peut faire l'objet d'une question de cours).
- Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (forme du terme général admise, mais la **méthode de résolution** peut faire l'objet d'une question de cours).
- Pour l'instant, aucun nouveau résultat sur les limites (ni même la définition avec des ε) n'a été vu en cours, les éventuels calculs de limites doivent donc rester élémentaires.

Ensembles et applications

- Vocabulaire ensembliste : sous-ensembles, union, intersection, lois de Morgan, partitions, produit, ensemble des paryies d'un ensemble.
- Vocabulaire sur les applications : images, antécédents, restriction, prolongement, composée, applications injectives, surjectives et bijectives
- **La composée de deux applications injectives (resp.surjectives) est injective (resp.surjective**
- Bijection réciproque, notion d'image et d'image réciproque d'un sous-ensemble.

Prévisions pour après les vacances : même contenu sur les ensembles, plus la convergence des suites.

Semaine n°5 (du 09/11 au 13/11 2009)

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera noté systématiquement en dessous de la moyenne.

Ensembles et applications

- Vocabulaire ensembliste : sous-ensembles, union, intersection, lois de Morgan, partitions, produit, ensemble des paryies d'un ensemble.
- Vocabulaire sur les applications : images, antécédents, restriction, prolongement, composée, applications injectives, surjectives et bijectives
- **La composée de deux applications injectives (resp.surjectives) est injective (resp.surjective)**.
- Bijection réciproque, notion d'image et d'image réciproque d'un sous-ensemble.

Convergence de suites

- Définition de la convergence et des limites infinies « avec des ε ».
- **Unicité de la limite** d'une suite convergente.
- Théorème de convergence monotone (admis).
- Limites des suites usuelles : limite d'une suite arithmétique et **limite d'une suite géométrique** (la seule partie de la démonstration à savoir refaire est la preuve que si $q = 1 + \alpha > 1$, alors $q^n \geqslant 1 + n\alpha$).
- Opérations et limites : limite d'une somme, d'un produit, d'un inverse, composition d'une limite par une fonction continue ; la limite éventuelle d'une suite récurrente est un point fixe de la fonction associée (les suites récurrentes n'ont pas encore été vues en détail, ce théorème a simplement été admis et utilisé sur quelques exemples).
- Théorèmes de comparaison et **théorème des gendarmes**.
- Suites adjacentes (la démonstration de la convergence n'est pas à savoir).
- PAS d'équivalence pour cette semaine.

Prévisions pour la semaine suivante : toujours convergence de suites, avec en plus équivalents et négligeabilité, et le début du dénombrement (sûrement pas grand chose pour l'instant).

Semaine n°6 (du 16/11 au 20/11 2009)

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera noté systématiquement en dessous de la moyenne.

Convergence de suites

- Définition de la convergence et des limites infinies « avec des ε ».
- **Unicité de la limite** d'une suite convergente.
- Théorème de convergence monotone (admis).
- Limites des suites usuelles : limite d'une suite arithmétique et **limite d'une suite géométrique** (la seule partie de la démonstration à savoir refaire est la preuve que si $q = 1 + \alpha > 1$, alors $q^n \geqslant 1 + n\alpha$).
- Opérations et limites : limite d'une somme, d'un produit, d'un inverse, composition d'une limite par une fonction continue ; la limite éventuelle d'une suite récurrente est un point fixe de la fonction associée (les suites récurrentes n'ont pas encore été vues en détail, ce théorème a simplement été admis et utilisé sur quelques exemples).
- Théorèmes de comparaison et **théorème des gendarmes**.
- Suites adjacentes (la démonstration de la convergence n'est pas à savoir).
- Équivalence et négligeabilité : définitions et principales propriétés. Croissances comparées.

Dénombrement

- Cardinaux d'ensembles finis : définition d'ensemble fini, cardinal d'une union, d'un complémentaire et d'un produit (la démonstration du cardinal d'une union est à savoir, sans détailler la preuve de la bijection dans le cas disjoint). Formule de Poincaré (donnée dans le cas général, mais surtout à savoir exprimer pour une union de trois ou quatre ensembles).
- Listes, arrangements et combinaisons : définitions et cardinal.
- Les propriétés des coefficients binomiaux (Pascal, Newton et compagnie) ne sont PAS au programme cette semaine. Seule une question de cours et/ou un exercice de dénombrement « élémentaire » peuvent être posé cette semaine.

Prévisions pour la semaine suivante : dénombrement complet, un peu de limites de fonctions.

Semaine n°7 (du 23/11 au 27/11 2009)

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera noté systématiquement en dessous de la moyenne.

Convergence de suites

- Le coeur du programme cette semaine est le chapitre de dénombrement (la question de cours portera nécessairement dessus), mais on pourra continuer à poser en complément des exercices sur les suites, faisant notamment intervenir les notions de négligeabilité et d'équivalence.

Dénombrement

- Cardinaux d'ensembles finis : définition d'ensemble fini, **cardinal d'une union**, d'un complémentaire et d'un produit (la démonstration du cardinal d'une union est à savoir, sans détailler la preuve de la bijection dans le cas disjoint). Formule de Poincaré (donnée dans le cas général, mais surtout à savoir exprimer pour une union de trois ou quatre ensembles).
- Listes, arrangements et combinaisons : définitions et cardinal.
- Propriétés des coefficients binomiaux : symétrie, **formule de Pascal** (démonstration calculatoire ou combinatoire au choix), triangle du même Pascal, formule du binôme de Newton, **formule de Vandermonde** (démonstration uniquement combinatoire).
- Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.

Prévisions pour la semaine suivante : toujours le dénombrement, plus limites de fonctions.

Semaine n°8 (du 30/11 au 04/12 2009)

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera noté systématiquement en dessous de la moyenne.

Dénombrement

- Cardinaux d'ensembles finis : définition d'ensemble fini, **cardinal d'une union**, d'un complémentaire et d'un produit (la démonstration du cardinal d'une union est à savoir, sans détailler la preuve de la bijection dans le cas disjoint). Formule de Poincaré (donnée dans le cas général, mais surtout à savoir exprimer pour une union de trois ou quatre ensembles).
- Listes, arrangements et combinaisons : définitions et cardinal.
- Propriétés des coefficients binomiaux : symétrie, **formule de Pascal** (démonstration calculatoire ou combinatoire au choix), triangle du même Pascal, formule du binôme de Newton, **formule de Vandermonde** (démonstration uniquement combinatoire).
- Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.

Limites

- Définition des différents types de limites pour une fonction (limites finies, limites en $\pm\infty$, limites infinies).
- Opérations sur les limites.
- Limites classiques et croissance comparée.
- Asymptotes et branches infinies (le **plan d'étude général des branches infinies** est à connaitre parfaitement).

Prévisions pour la semaine suivante : limites, continuité.

Semaine n°9 (du 07/12 au 11/12 2009)

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera noté systématiquement en dessous de la moyenne.

Limites, continuité

- Définition des différents types de limites pour une fonction (limites finies, limites en $\pm\infty$, limites infinies).
- Opérations sur les limites.
- Limites classiques et croissance comparée.
- Asymptotes et branches infinies (le **plan d'étude général des branches infinies** est à connaitre parfaitement).
- Théorème des gendarmes et autres utilisations d'inégalités pour les calculs de limites.
- Négligeabilité et équivalence.
- Continuité (en un point, à gauche et à droite, sur un intervalle, théorèmes généraux).
- Théorème des valeurs intermédiaires (non prouvé) et conséquences. La **méthode de dichotomie** doit pouvoir être expliquée clairement (et la propriété correspondante énoncée correctement).
- Théorème de la bijection (preuve non exigée) et applications, notamment à l'étude des suites implicites.

Séries

- Vocabulaire sur les séries : terme général, convergence, reste d'indice n, séries absolument convergentes et semi-convergentes.
- Propriétés élémentaires des séries convergentes : convergence du terme général vers 0, linéarité de la somme, comparaison de séries à termes positifs (les théorèmes faisant intervenir des équivalents ou de la négligeabilité ne sont PAS au programme de première année).
- Les résultats sur les séries classiques ne sont PAS au programme cette semaine.

Prévisions pour la semaine suivante : continuité, séries (chapitre complet).

Semaine n°10 (du 14/12 au 18/12 2009)

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera noté systématiquement en dessous de la moyenne.

Limites, continuité

- Définition des différents types de limites pour une fonction (limites finies, limites en $\pm\infty$, limites infinies).
- Opérations sur les limites.
- Limites classiques et croissance comparée.
- Asymptotes et branches infinies (le **plan d'étude général des branches infinies** est à connaitre parfaitement).
- Théorème des gendarmes et autres utilisations d'inégalités pour les calculs de limites.
- Négligeabilité et équivalence.
- Continuité (en un point, à gauche et à droite, sur un intervalle, théorèmes généraux).
- Théorème des valeurs intermédiaires (non prouvé) et conséquences. La **méthode de dichotomie** doit pouvoir être expliquée clairement (et la propriété correspondante énoncée correctement).
- Théorème de la bijection (preuve non exigée) et applications, notamment à l'étude des suites implicites.

Séries

- Vocabulaire sur les séries : terme général, convergence, reste d'indice n, séries absolument convergentes et semi-convergentes.
- Propriétés élémentaires des séries convergentes : convergence du terme général vers 0, linéarité de la somme, comparaison de séries à termes positifs (les théorèmes faisant intervenir des équivalents ou de la négligeabilité ne sont PAS au programme de première année).
- Séries classiques : séries géométriques, géométriques dérivée et dérivée seconde (formules à savoir démontrer pour les séries géométrique et dérivée, mais pas pour la dérivée seconde) ; séries exponentielles (formule non prouvée) ; divergence de la série harmonique et équivalent de la somme partielle (démonstration en devoir à la maison, non exigible).

Prévisions pour la semaine suivante (11 au 15 janvier) : séries, systèmes.

Semaine n°11 (du 11/01 au 15/01 2010)

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera noté systématiquement en dessous de la moyenne.

Séries

- Vocabulaire sur les séries : terme général, convergence, reste d'indice n, séries absolument convergentes et semi-convergentes.
- Propriétés élémentaires des séries convergentes : convergence du terme général vers 0, linéarité de la somme, comparaison de séries à termes positifs (les théorèmes faisant intervenir des équivalents ou de la négligeabilité ne sont PAS au programme de première année).
- Séries classiques : séries géométriques, géométriques dérivée et dérivée seconde (formules à savoir démontrer pour les séries géométrique et dérivée, mais pas pour la dérivée seconde) ; séries exponentielles (formule non prouvée) ; divergence de la série harmonique et équivalent de la somme partielle (démonstration en devoir à la maison, non exigible).

Systèmes linéaires

- Vocabulaire : systèmes de Cramer, système incompatible, système homogène, système carrés et triangulaires.
- Résolution d'un système par la méthode du pivot de Gauss (qui doit pouvoir être décrite de façon précise, mais PAS de matrices pour le moment).
- Exemples de systèmes faisant intervenir un paramètre.

Fonctions à deux variables

- Représentation de domaines de définitions simples de fonctions à deux variables (faisant intervenir équations de droites ou de cercles centrés à l'origine).
- Lignes de niveaux, applications partielles, dérivées partielles et dérivées partielles secondes (aucun résultat théorique n'a été énoncé).
- Points critiques (aucune méthode de détermination de la nature de ces points critiques n'est au programme).

Prévisions pour la semaine suivante (18 au 22 janvier) : systèmes, fonctions à deux variables, dérivation (début).

Semaine n°12 (du 18/01 au 22/01 2010)

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera noté systématiquement en dessous de la moyenne.

Systèmes linéaires

- Vocabulaire : systèmes de Cramer, système incompatible, système homogène, système carrés et triangulaires.
- Résolution d'un système par la méthode du pivot de Gauss (qui doit pouvoir être décrite de façon précise, mais PAS de matrices pour le moment).
- Exemples de systèmes faisant intervenir un paramètre.

Fonctions à deux variables

- Représentation de domaines de définitions simples de fonctions à deux variables (faisant intervenir équations de droites ou de cercles centrés à l'origine).
- Lignes de niveaux, applications partielles, dérivées partielles et dérivées partielles secondes (aucun résultat théorique n'a été énoncé).
- Points critiques (aucune méthode de détermination de la nature de ces points critiques n'est au programme).

Dérivation

- Définition du nombre dérivé comme limite du taux d'accroissement, interprétation géométrique (les exemples du cours, **calculs des dérivées des fonctions carré et racine carrée à l'aide de la définition**, sont à savoir refaire).
- Développement limité à l'ordre 1, équation d'une tangente, lien entre dérivabilité et continuité.
- Dérivée à gauche et à droite en un point.
- Formule de dérivation d'une somme, d'un produit, d'un inverse, d'un quotient, d'une composée et d'une réciproque. La **formule pour le produit** est à savoir démontrer.
- Dérivées des fonctions usuelles (puissances quelconques, ln et exp). La **preuve par récurrence de la dérivée de x^n (pour $n > 0$)** est à connaitre.
- Définition des fonctions de classe C^n et D^n sur un intervalle, et théorème de prolongement C^1 (admis).

Prévisions pour la semaine suivante (25 au 29 janvier) : dérivation, avec convexité et inégalité des accroissements finis.

Semaine n°13 (du 25/01 au 29/01 2010)

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera noté systématiquement en dessous de la moyenne.

Dérivation

- Définition du nombre dérivé comme limite du taux d'accroissement, interprétation géométrique (les exemples du cours, **calculs des dérivées des fonctions carré et racine carrée à l'aide de la définition**, sont à savoir refaire).
- Développement limité à l'ordre 1, équation d'une tangente, lien entre dérivabilité et continuité.
- Dérivée à gauche et à droite en un point.
- Formule de dérivation d'une somme, d'un produit, d'un inverse, d'un quotient, d'une composée et d'une réciproque. La **formule pour le produit** est à savoir démontrer.
- Dérivées des fonctions usuelles (puissances quelconques, ln et exp). La **preuve par récurrence de la dérivée de x^n (pour $n > 0$)** est à connaitre.
- Définition des fonctions de classe C^n et D^n sur un intervalle, et théorème de prolongement C^1 (admis).
- Convexité (définition géométrique : la courbe est au-dessus de ses tangentes, la définition formelle a simplement été citée et n'est pas exigible), caractérisation pour les fonction C^2, points d'inflexion.
- **Théorème de Rolle**, **Théorème des accroissements finis**, Inégalité des accroissements finis (deux versions, l'une avec valeur absolue et l'autre sans).
- Étude de suites récurrentes : représentation graphique, étude de convergence et majoration de l'erreur via IAF.

Prévisions pour la semaine suivante (01 au 05 février) : même programme.

Semaine n°14 (du 01/02 au 05/02 2010)

Même programme que la semaine 13.

Prévisions pour la semaine suivante (8 au 12 février) : probabilités (début).

Semaine n°15 (du 08/02 au 12/02 2010)

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera noté systématiquement en dessous de la moyenne.

Probabilités

- Vocabulaire : univers, évènements (certain, impossible, incompatibles, système complet d'évènements), tribus, lois de probabilité.
- Propriétés élémentaires des probabilités : probabilité d'un complémentaire, probabilité d'un union, formule de Poincaré.
- Équiprobabilité sur un univers fini.
- Probabilités conditionnelles : formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes.
- Chaine de Markov (pas d'utilisation de graphe, naturellement, mais ce type de problème doit être familier).
- Indépendance, indépendance mutuelle dans le cas de plus de deux évènements.

Prévisions pour la semaine suivante (15 au 19 février) : même programme, plus un petit peu de matrices.

Semaine n°16 (du 15/02 au 19/02 2010)

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera noté systématiquement en dessous de la moyenne.

Probabilités

- Vocabulaire : univers, évènements (certain, impossible, incompatibles, système complet d'évènements), tribus, lois de probabilité.
- Propriétés élémentaires des probabilités : probabilité d'un complémentaire, probabilité d'un union, formule de Poincaré.
- Équiprobabilité sur un univers fini.
- Probabilités conditionnelles : formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes.
- Chaine de Markov (pas d'utilisation de graphe, naturellement, mais ce type de problème doit être familier).
- Indépendance, indépendance mutuelle dans le cas de plus de deux évènements.

Matrices

- Vocabulaire et notations : matrices carrées, triangulaires, matrice nulle, matrice identité, matrices diagonales et nilpotentes.
- Opérations sur les matrices : somme, produit par un réel, produit, transposée, puissances de matrices, formule du binome de Newton.
- PAS d'inverse de matrices dans ce chapitre. Par ailleurs, peu d'exercices ayant été traités jusqu'ici, on se contentera pour cette semaine d'exercices de calcul assez rudimentaires.

Prévisions pour la semaine de la rentrée (15 au 19 février) : matrices, polynômes.

Semaine n°17 (du 08/03 au 12/03 2010)

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera noté systématiquement en dessous de la moyenne.

Matrices

- Vocabulaire et notations : matrices carrées, triangulaires, matrice nulle, matrice identité, matrices diagonales et nilpotentes.
- Opérations sur les matrices : somme, produit par un réel, produit, transposée (**à savoir démontrer** : ${}^t(AB) = {}^t B {}^t A$, puissances de matrices, formule du binome de Newton.
- PAS d'inverse de matrices dans ce chapitre.

Polynômes

- Vocabulaire et notations : degré (et propriétés élémentaires), coefficient dominant, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{R}_n[X]$.
- Condition de nullité d'un polynôme et principe d'identification des coefficients.
- **Algorithme de Hörner** (à savoir décrire, plutôt en lien avec l'informatique, a priori peu de place dans une colle de maths).
- Division euclidienne de polynômes (non démontré).
- **Factorisation d'un polynôme par $X - a$ quand a est une racine du polynôme** ; ordre de multiplicité d'une racine et caractérisation à l'aide des dérivées de P.

Prévisions pour la semaine suivante (15 au 19 mars) : polynômes, variables aléatoires (début).

Semaine n°18 (du 15/03 au 19/03 2010)

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera noté systématiquement en dessous de la moyenne.

Polynômes

- Vocabulaire et notations : degré (et propriétés élémentaires), coefficient dominant, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{R}_n[X]$.
- Condition de nullité d'un polynôme et principe d'identification des coefficients.
- **Algorithme de Hörner** (à savoir décrire, plutôt en lien avec l'informatique, a priori peu de place dans une colle de maths).
- Division euclidienne de polynômes (non démontré).
- **Factorisation d'un polynôme par $X - a$ quand a est une racine du polynôme** ; ordre de multiplicité d'une racine et caractérisation à l'aide des dérivées de P.

Variables aléatoires

- Définition, notations classiques, loi d'une variable aléatoire (variables finies uniquement, donc sous forme de tableau).
- Fonction de répartition (on doit savoir passer du tableau donnant la loi à la fonction de répartition en escalier, et vice-versa).
- Espérance d'une variable aléatoire, espérance d'une constante, d'une variable indicatrice d'un évènement, linéarité de l'espérance, variable aléatoire centrée, théorème de transfert ($E(g(X)) = \sum_{k \in X(\Omega)} g(k)P(X = k)$).
- Moments d'ordre supérieur, variance, écart-type, **formule $V(aX + b) = a^2V(X)$**, **théorème de König-Huygens**, variable réduite.
- Note : en début de semaine notamment, peu d'exercices auront été faits sur espérance et variable (en gros seulement des calculs dans des cas assez élémentaires).

Prévisions pour la semaine suivante (22 au 26 mars) : variables aléatoires, lois usuelles finies.

Semaine n°19 (du 22/03 au 26/03 2010)

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera noté systématiquement en dessous de la moyenne.

Variables aléatoires

- Définition, notations classiques, loi d'une variable aléatoire (variables finies uniquement, donc sous forme de tableau).
- Fonction de répartition (on doit savoir passer du tableau donnant la loi à la fonction de répartition en escalier, et vice-versa).
- Espérance d'une variable aléatoire, espérance d'une constante, d'une variable indicatrice d'un évènement, linéarité de l'espérance, variable aléatoire centrée, théorème de transfert ($E(g(X)) = \sum_{k \in X(\Omega)} g(k)P(X = k)$).
- Moments d'ordre supérieur, variance, écart-type, **formule** $V(aX + b) = a^2V(X)$, **théorème de König-Huygens**, variable réduite.
- Lois usuelles finies : loi uniforme sur $\{1; \dots; n\}$ (**calcul de l'espérance et de la variance)** ; loi de Bernoulli de paramètre p ; loi binômiale de paramètre (n, p) (**calcul de l'espérance** et de la variance) ; loi hypergéométrique de paramètre (N, n, p) (calcul de l'espérance et de la variance).
- Note : les lois usuelles seront encore fraîches dans les mémoires, surtout en début de semaine.

Prévisions pour la semaine suivante (29 au 2 avril) : même programme.

Semaine n°20 (du 29/03 au 02/04 2010)

Même programme que la semaine 19.

Prévisions pour la semaine suivante (5 au 9 avril) : intégration.

Semaine n°21 (du 05/04 au 09/04 2010)

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera noté systématiquement en dessous de la moyenne.

Variables aléatoires

- Lois usuelles finies : loi uniforme sur $\{1; \dots; n\}$ (**calcul de l'espérance et de la variance)** ; loi de Bernoulli de paramètre p ; loi binômiale de paramètre (n,p) (**calcul de l'espérance** et de la variance) ; loi hypergéométrique de paramètre (N,n,p) (calcul de l'espérance et de la variance).

Intégration

- Primitives de fonctions continues : existence (utilisation de la fonction aire sous la courbe), unicité de la primitive vérifiant $F(x_0) = y_0$, primitives de fonctions usuelles.
- Définition de l'intégrale, propriétés élémentaires : relation de Chasles, linéarité, intégration d'inégalités.
- **Intégration par parties**.
- Exemples d'études de suites d'intégrales (calcul de limite via encadrement, d'équivalent à l'aide d'une IPP).

Prévisions pour la semaine suivante (12 au 16 avril) : intégration, chapitre complet.

Semaine n°22 (du 12/04 au 16/04 2010)

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera noté systématiquement en dessous de la moyenne.

Intégration

- Primitives de fonctions continues : existence (utilisation de la fonction aire sous la courbe), unicité de la primitive vérifiant $F(x_0) = y_0$, primitives de fonctions usuelles (qui peuvent naturellement faire l'objet d'une **question de cours**).
- Définition de l'intégrale, propriétés élémentaires : relation de Chasles, linéarité, intégration d'inégalités.
- **Intégration par parties**.
- Exemples d'études de suites d'intégrales (calcul de limite via encadrement, d'équivalent à l'aide d'une IPP).
- Formule de changement de variable (tout changement de variable autre qu'affine devant être donné).
- Fonctions définie par une intégrale (on doit notamment savoir dériver une fonction définie par une intégrale à bornes variables).
- Compléments : sommes de Riemann (convergence non démontrée).

Prévisions pour la semaine suivante (3 au 7 mai) : variables aléatoires discrètes infinies.

Semaine n°23 (du 03/05 au 07/05 2010)

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera noté systématiquement en dessous de la moyenne.

Variables aléatoires infinies

- Compléments de probabilités : suites monotones d'évènements et limite monotone ; évènements presque sûrs et négligeables.
- Variables infinies : loi, fonction de répartition, espérance, variance.
- Lois usuelles infinies : loi géométrique (**calcul de l'espérance et de la variance**), loi de Poisson (**calcul de l'espérance et de la variance**), **loi de Poisson comme limite de lois binômiales** de paramètre $\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$.

Prévisions pour la semaine suivante (10 au 14 mai) : même programme, avec un petit peu d'inversion de matrices en plus.

Semaine n°24 (du 10/05 au 14/05 2010)

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera noté systématiquement en dessous de la moyenne.

Variables aléatoires infinies

- Compléments de probabilités : suites monotones d'évènements et limite monotone ; évènements presque sûrs et négligeables.
- Variables infinies : loi, fonction de répartition, espérance, variance.
- Lois usuelles infinies : loi géométrique (**calcul de l'espérance et de la variance**), loi de Poisson (**calcul de l'espérance et de la variance**), **loi de Poisson comme limite de lois binômiales** de paramètre $\left(n, \dfrac{\lambda}{n}\right)$.

Inversion de matrices

- Définition, propriétés élémentaires (**inverse d'un produit**, inverse d'une puissance).
- Lien entre systèmes linéaires et inversion de matrices, pivot de Gauss pour l'inversion de matrices.

Prévisions pour la semaine suivant le concours blanc (24 au 28 mai) : tout le chapitre sur l'inversion de matrices.

Semaine n°25 (du 24/05 au 28/05 2010)

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera noté systématiquement en dessous de la moyenne.

Inversion de matrices

- Définition, propriétés élémentaires (**inverse d'un produit**, inverse d'une puissance).
- Lien entre systèmes linéaires et inversion de matrices, pivot de Gauss pour l'inversion de matrices.
- « Diagonalisation » (la matrice de passage est toujours donnée, il faut simplement savoir calculer les puissances de la matrice A à partir de la relation $P^{-1}AP = D$), application à l'étude de chaînes de Markov, de suites récurrentes etc.

Couples de variables aléatoires

- Définition de la loi d'un couple de variables, des lois marginales et des lois conditionnelles.
- Pour cette semaine, seuls quelques exemples ont été vus dans le cas de variables finies, et la notion d'indépendance de variables aléatoires n'a pas encore été abordée.

Prévisions pour la dernière semaine (31 mai au 5 juin) : inversion de matrices, couples de variables aléatoires.

Semaine n°26 (du 31/05 au 04/06 2010)

Toutes les démonstrations du cours (points notés **en gras** dans le programme) sont à connaitre parfaitement. Un élève ne sachant pas répondre correctement à la question de cours sera noté systématiquement en dessous de la moyenne.

Inversion de matrices

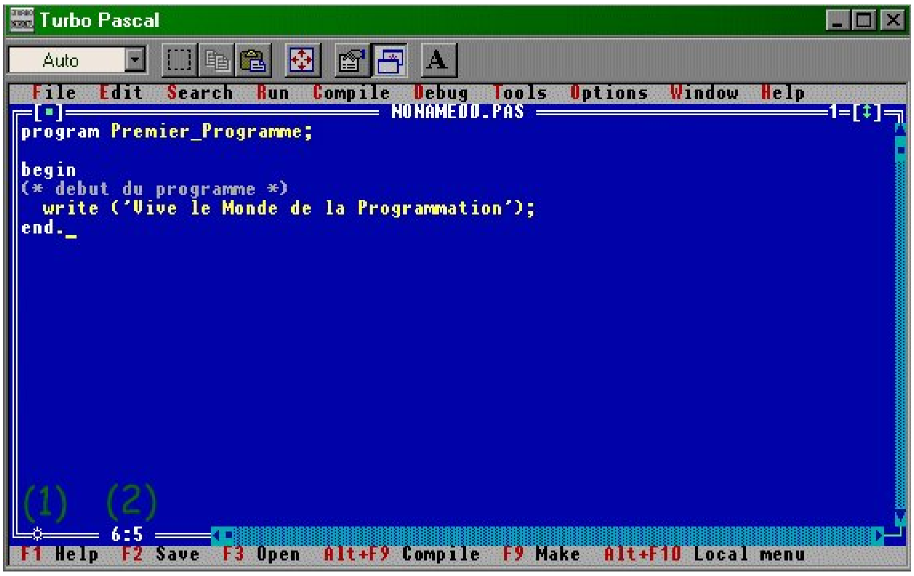
- Définition, propriétés élémentaires (**inverse d'un produit**, inverse d'une puissance).
- Lien entre systèmes linéaires et inversion de matrices, pivot de Gauss pour l'inversion de matrices.
- « Diagonalisation » (la matrice de passage est toujours donnée, il faut simplement savoir calculer les puissances de la matrice A à partir de la relation $P^{-1}AP = D$), application à l'étude de chaînes de Markov, de suites récurrentes etc.

Couples de variables aléatoires

- Définition de la loi d'un couple de variables, des lois marginales et des lois conditionnelles.
- Indépendance de variables aléatoires.
- Somme de variables aléatoires (**la somme de deux binômiales indépendantes de même paramètre est une binômiale**, **la somme de deux lois de Poisson indépendantes est une loi de Poisson**), loi d'un maximum ou d'un minimum de deux variables aléatoires.

Sixième partie

Informatique


Turbo Pascal
Auto
File Edit Search Run Compile Debug Tools Options Window Help
NONAME00.PAS
program Premier_Programme;
begin
(* debut du programme *)
write ('Vive le Monde de la Programmation');
end.
(1) (2)
6:5
F1 Help F2 Save F3 Open Alt+F9 Compile F9 Make Alt+F10 Local menu

TD1 : Introduction à la programmation et à Pascal

Nous y voila, premier TD d'informatique de l'année, vous allez enfin savoir ce qui vous attend dans cette matière qui occupe une place un peu particulière en prépa commerciale. Mettons déjà une première chose au point : il ne s'agit pas d'apprendre à manipuler un quelconque outil ou logiciel informatique, mais bel et bien de se concentrer sur la pratique de la programmation, et plus particulièrement de la programmation appliquée aux mathématiques. D'où le paragraphe suivant :

Qu'est-ce que la programmation ?

Le principe de base de la programmation est simple : faire faire à une machine des choses qui nous demanderaient trop de temps ou de calculs. La programmation est de nos jours présente à peu près partout autour de nous : un avion en pilotage automatique, ou le jeu video dernier cri, fonctionnent à grands coups de programmes. La machine, qui a le grand avantage d'avoir des limitations beaucoup moins contraignantes qu'un être humain pour ce qui est de la capacité de calcul, a toutefois un gros défaut, celui de ne pas avoir de cerveau. Pour lui faire faire ce qu'on veut, il est donc essentiel de décomposer le travail en une suite d'instructions suffisamment élémentaires pour pouvoir être effectuées de façon mécanique par la machine. Un langage de programmation, c'est donc en gros la chose suivante : une liste de commandes relativement basiques et compréhensibles par la machine, à partir desquelles nous pourrons imaginer des algorithmes et construire des programmes permettant de faire des choses plus complexes. Exemple idiot pour vous donner une idée de ce que ça signifie : si votre machine sait multiplier deux nombres, vous pouvez écrire un programme permettant d'élever un nombre au carré (il suffit de le multiplier par lui-même).

Outre la liste des instructions disponibles, il existe une autre donnée inhérente au langage de programmation que l'apprenti programmeur se doit de maitriser : la syntaxe. En effet, la machine, décidémment très bête, ne comprendra vos instructions que si elles respectent scrupuleusement des règles de syntaxe très précises. C'est un peu comme si vous aviez en face de vous quelqu'un qui ne comprend pas une phrase sous prétexte que vous avez mal accordé le verbe, ou même qu'il manque un signe de ponctuation ou une majuscule. C'est incontestablement le côté le plus rebutant de la programmation au début : on a l'impression de ne jamais arriver à faire un programme sans erreurs de syntaxe...

Un programme, à quoi ça ressemble ?

L'écriture d'un programme se déroule en trois phases :

- l'écriture proprement dite, où le programmeur tape ses instructions à la suite les unes des autres, dans le langage adéquat (le langage PASCAL est un des plus simples qui soient, vous avez de la chance).
- la compilation, où la machine relit votre programme en vérifiant la syntaxe. Si elle trouve une erreu, elle vous le signalera (en essayant de vous expliquer quelle est l'erreur, mais ce n'est pas toujours très compréhensible). S'il n'y a pas d'erreur, votre programme est prêt à être exécuté, ce qui ne signifie absolument pas qu'il va faire ce que vous voulez (la machine ne peut pas deviner à quoi est censé servir votre programme !).
- l'exécution : vous faites tourner le programme, la machine exécute vos instructions et, habituellement, vous donne un résultat. Il peut aussi (hélas) y avoir des problèmes pendant cette étape : si vous demandez par exemple à l'intérieur du programme à faire une division par un nombre qui se trouve être égal à zéro, le programme va compiler (l'opération de division est écrite correctement), mais va renvoyer une erreur à l'exécution.

Quant au programme proprement dit, c'est une suite de lignes de texte ayant la structure suivante :

- une ligne d'en-tête qui annonce le nom du programme et ressemble à ceci :
  PROGRAM nomduprogramme ;

- une zone de déclarations, où le programmeur doit annoncer tout ce qu'il va utiliser à l'intérieur du programme (c'est un peu comme la douane, vous devez déclarer tout ce qui se trouve dans votre programme). Pour l'instant, nous nous conterons de déclarer de temps à autre des variables. Par exemple, si on veut écrire un programme résolvant les équations du second degré, les calculs vons faire intervenir des nombres notés a, b, c et Δ. Il faut préciser en début de programme que nous utiliserons des variables appelées a, b, c et Δ, et également dire qu'il s'agira de nombres réels, ce qu'on fait de la façon suivante :
  VAR a, b, c, delta : real;
  Le « real » (réel) en fin de ligne est ce qu'on appelle le type de la variable, sa déclaration est obligatoire. Nous verrons un peu plus tard quels types de variables on peut définir en Pascal, et les quelques subtilités que ces histoires de variables et de types entrainent. Pour l'instant, on ne travaillera qu'avec des « real ».
- enfin, le corps du programme, qui débute nécessairement par un **BEGIN** et se conclut par un **END.** (oui, oui, avec un . derrière, si vous l'oubliez, Pascal va râler), et qui contient entre ces deux mots-clés les instructions du programme, séparées par des **;** (là encore, ces ; sont indispensables, tout comme ils le sont après l'en-tête et la déclaration des variables).

Quelques instructions histoire de pouvoir écrire nos premiers programmes

On ne va provisoirement utiliser que trois types d'instructions dans nos programmes :

- WriteLn() (ou Write, qui fait la même chose sans sauter de ligne, et n'est donc à peu près jamais utilisée pour des raisons de lisibilité) sert à écrire quelque chose à l'écran lors de l'exécution. Si on veut écrire du texte, il faut le mettre entre apostrophes, sinon Pascal croit que vous voulez afficher à l'écran la *valeur* d'une variable dont le nom est le texte en question.
  WriteLn('youhou'); va ainsi écrire youhou à l'écran
  WriteLn(youhou); va afficher la valeur de la variable youhou (et s'il n'y a pas de variable s'appelant youhou, ce qui est au fond assez probable, Pascal va râler).
- ReadLn() (ou Read) permet de « lire » quelque chose que l'utilisateur tape à l'écran, et de l'affecter à une variable (précisée dans la parenthèse).
  ReadLn(a); va ainsi attendre que l'utilisateur tape une valeur puis appuye sur Entrée, et va affecter cette valeur à la variable a.
- l'instruction d'affectation est (de loin) la plus utilisée à l'intérieur d'un programme. Elle permet de stocker une valeur dans une des variables définies en début de programme. En gros, une variable est une case dans la mémoire de la machine sur laquelle vous avez mis une étiquette (le nom de la variable), et lui affecter une valeur revient à mettre cette valeur dans la case en question. Vous pouvez ensuite réutiliser cette valeur via son nom de variable. Les affectations en Pascal se font à l'aide de la syntaxe nomdevariable := valeur
  a :=7/2; va ainsi stocker la valeur $\frac{7}{2}$ dans la variable qui s'appelle a.
  a :=2*b; va stocker dans la variable a le double de la valeur actuellement dans la variable b.

TP1 : Premiers pas devant la machine

Quelques petites précisions avant que vous ne vous mettiez à taper vos programmes :

- nous allons utiliser une version Windows de Pascal qui nécessite de rajouter une ligne après l'en-tête de chacun de nos programmes, qui permet notamment d'utiliser les commandes WriteLn et ReadLn : USES wincrt
- rappelons qu'après avoir tapé votre programme, vous devez le compiler (je pense que vous arriverez à trouver comment en regardant le nom des menus) ; ensuite, vous pouvez l'exécuter (ce qui ouvrira automatiquement une nouvelle fenêtre)

Exercices

- Écrire un programme affichant « Hello world » à l'écran.
- Écrire un programme vous demandant votre prénom, puis vous disant bonjour (avec le bon prénom après le bonjour, naturellement ; une variable contenant du texte sera déclarée sous le type char).
- Écrire un programme demandant deux nombres à l'utilisateur et calculant leur produit.
- Écrire un programme calculant l'aire d'un carré dont l'utilisateur spécifie le côté.
- Écrire un programme demandant trois nombres à l'utilisateur et calculant leur moyenne.
- Écrire un programme convertissant un nombre entier de secondes saisi par l'utilisateur au format heures-minutes-secondes. Vous aurez besoin pour ce programme de déclarer des variables de type int (nombre entier), et d'utiliser la commande **p div q**, qui donne le quotient (entier) de la division d'un entier p par un entier q (si vous voulez le reste de cette même division, vous pouvez l'obtenir à l'aide de la commande **p mod q**).

Corrigé du TP1

Voici les programmes demandés lors de ce premier TP :

```
PROGRAM bonjour ;
USES wincrt ;
BEGIN
WriteLn('Hello world') ;
END.
```

```
PROGRAM bonjour2 ;
USES wincrt ;
VAR a : string ;
BEGIN
WriteLn('Quel est votre prénom ?') ;
ReadLn(a) ;
WriteLn('Bonjour ',a) ;
END.
```

```
PROGRAM produit ;
USES wincrt ;
VAR a,b : real ;
BEGIN
WriteLn('Choisissez deux nombres réels') ;
ReadLn(a,b) ;
WriteLn(a*b) ;
END.
```

```
PROGRAM airecarre ;
USES wincrt ;
VAR a : real ;
BEGIN
WriteLn('Choisissez le côté du carré') ;
ReadLn(a) ;
WriteLn('L'aire du carré vaut ',a*a) ;
END.
```

```
PROGRAM moyenne ;
USES wincrt ;
VAR a,b,c : real ;
BEGIN
WriteLn('Choisissez trois nombres réels') ;
ReadLn(a,b,c) ;
WriteLn('La moyenne de vos nombres vaut ',(a+b+c)/3) ;
END.
```

```
PROGRAM conversion ;
USES wincrt ;
VAR a : integer ;
BEGIN
WriteLn('Donnez un nombre entier de secondes') ;
ReadLn(a) ;
WriteLn('Ce nombre correspond à ',a div 3600,' heures, ',a mod 3600 div 60,' minutes et ',a mod
60,' secondes.') ;
END.
```

TD2 : Instructions conditionnelles

Le principe d'une instruction conditionnelle est simple : il s'agit de demander à Pascal de faire deux choses différentes selon qu'une condition est remplie ou non (en informatique, on appelle la vérification d'une telle condition un test). Un exemple mathématique extrêmement classique est celui de la résolution des équations du second degré, où on effectue un calcul ou non selon le signe du discriminant de l'équation. Un tel test prendra souvent dans nos programmes la forme d'une inégalité à vérifier (par exemple pour les équations du second degré), ou d'une égalité, voire d'une différence. Notons tout de suite que le symbole $\leqslant$ se note <= en Pascal, le symbole $\neq$ se note <>. Quant au test d'une égalité, il se fait tout simplement avec le signe = (à ne pas confondre avec les affectations qui se font, rappelons-le, à l'aide du :=). Si on veut combiner plusieurs conditions lors d'un test, on dispose des mots-clés AND, OR et NOT, qui ont la signification que vous pouvez deviner (sinon, je vais m'inquiéter pour votre niveau d'anglais). Ainsi, $(x >= 2)$ AND $(x < 5)$ teste si la variable x se trouve dans l'intervalle $[2;5[$.

En pratique, comment rédige-t-on une telle instruction conditionnelle ? La syntaxe intuitive est à peu près celle-ci : SI la condition est vérifiée, ALORS il faut faire ceci, SINON il faut faire cela. Ca tombe bien, la syntaxe Pascal est essentiellement la même, utilisant les trois mots-clés IF, THEN et ELSE. Il est à noter que l'ensemble d'une instruction conditionnelle est considérée comme une seule commande, il n'y a donc qu'un seul ; à mettre à la fin de l'instruction suivant le ELSE. Le ELSE en question est d'ailleurs facultatif : on peut décider de donner un ordre à Pascal si une certaine condition est vérifiée, mais de ne rien faire dans le cas contraire, auquel cas un IF suivi d'un THEN suffit. Un exemple pour clarifier les choses :

```
PROGRAM valeur_absolue ;
VAR x : real ;
BEGIN
WriteLn('Entrez la valeur de x.') ;
ReadLn(x) ;
IF x < 0 THEN WriteLn(-x) ELSE WriteLn(x) ;
END.
```

Ce programme calcule la valeur absolue d'un nombre entré par l'utilisateur.

Petits exercices

1. Écrire un programme qui demande à l'utilisateur une valeur réelle, et affiche la valeur de $f(x)$, où $f(x) = 2x$ si $x \leqslant 3$ et $f(x) = x - 3$ si $x \geqslant 3$.
2. Écrire un programme calculant la plus grande de deux valeurs saisies par l'utilisateur.
3. Faire la même chose avec trois valeurs.
4. Écrire un programme effectuant la résolution des équations du premier degré, en faisant bien attention aux cas particuliers.
5. Écrire un programme effectuant la résolution d'équations du second degré.

TP2 : Instructions conditionnelles

Deuxième séance devant les machines, pour commencer aujourd'hui, je vous propose de tester les programmes écrits la semaine dernière en classe, et notamment celui calculant le plus grand parmi trois nombres choisis par l'utilisateur, et celui résolvant les équation du second degré. Une fois que c'est fait, vous pouvez vous intéresser à ce qui suit :

- Écrire un programme choisissant un chiffre aléatoire (la commande **random(10)** permet de donner un tel chiffre aléatoire, à condition d'avoir préalablement inséré l'instruction **Randomize ;** dans le corps de votre programme), demandant à l'utilisateur de tenter de le deviner, et lui répondant « Gagné » ou « Perdu »selon sa réponse.
- Améliorer le programme précédent pour qu'il précise si on a visé trop ghaut ou trop bas lorsqu'on perd.
- On considère désormais le programme plus complexe suivant, que vous pouvez recopier et faire tourner sous Pascal :

```
PROGRAM mystere ;
USES wincrt ;
VAR a,b : integer ;
BEGIN
randomize ;
a := random(100) ;
WriteLn('Essayez de deviner le nombre mystère compris entre 0 et 99') ;
ReadLn(b) ;
WHILE b<>a do
BEGIN
WriteLn('Perdu, essayez encore !') ;
ReadLn(b) ;
END ;
WriteLn('Bravo, vous avez gagné !') ;
END.
```

- Que fait ce programme ?
- Améliorer ce programme en précisant à chaque essai si le nombre tenté est trop gros ou trop petit.
- (pour les plus courageux) Améliorer encore le programme en précisant combien de combien d'essais l'utilisateur a eu besoin pour trouver le nombre mystère.
- (pour ceux qui préfèrent les maths à m'info) À votre avis, quelle est la meilleure stratégie à adopter pour trouver le nombre le plus rapidement possible (on se place dans le cas où on sait à chaque essai si on est trop haut ou trop bas) ? Combien au maximum faudra-t-il d'essais avec une stratégie optimale ?

Corrigé du TD2 et du TP2

Petits exercices du TD2

1. ```
   PROGRAM zoubida;
   USES wincrt;
   VAR x : real;
   BEGIN
   WriteLn('Choisissez la valeur de x');
   ReadLn(x);
   IF x<=3 THEN WriteLn('f(x)= ',2*x) ELSE WriteLn('f(x)= ',x-3);
   END.
   ```

2. ```
   PROGRAM Max2;
   USES wincrt;
   VAR x,y : real;
   BEGIN
   WriteLn('Choisissez deux nombres réels');
   ReadLn(x,y);
   IF x>y THEN WriteLn('Le plus grand nombre est ',x)
            ELSE WriteLn('Le plus grand nombre est ',y);
   END.
   ```

3. ```
   PROGRAM Max3;
   USES wincrt;
   VAR x,y,z : real;
   BEGIN
   WriteLn('Choisissez trois nombres réels');
   ReadLn(x,y,z);
   IF x>y THEN IF x>z THEN WriteLn('Le plus grand nombre est ',x)
                          ELSE WriteLn('Le plus grand nombre est ',z)
            ELSE IF y>z THEN WriteLn('Le plus grand nombre est ',y)
                          ELSE WriteLn('Le plus grand nombre est ',z);
   END.
   ```

4. ```
   PROGRAM premier_degre;
   USES wincrt;
   VAR a,b : real;
   BEGIN
   WriteLn('Choisissez les coefficients a et b de votre équation');
   ReadLn(a,b);
   IF a<>0 THEN WriteLn ('La solution unique de votre équation est ',-b/a)
              ELSE IF b<>0 THEN WriteLn ('Il n'y a pas de solution')
                                 ELSE WriteLn('Tous les réels sont solution');
   END.
   ```

5. PROGRAM second_degre ;

```
USES wincrt ;
VAR a,b,c,d : real ;
BEGIN
WriteLn('Choisissez les coefficients a, b et c de votre équation') ;
ReadLn(a,b,c) ;
d := b*b-4*a*c ;
IF d>0 THEN WriteLn('Il y a deux solutions : x1= ',(-b-sqrt(d))/(2*a),' et x2= ',(-b+sqrt(d))/(2*a))
        ELSE IF d=0 THEN WriteLn('L'unique solution est ',-b/(2*a))
                ELSE WriteLn ('Il n'y a pas de solution') ;
END.
```

Exercices du TP2

Je donne directement la version qui précise si on a visé trop haut ou trop bas pour le premier programme.

```
PROGRAM mystere1 ;
USES wincrt ;
VAR a,b : real ;
BEGIN
Randomize ;
WriteLn('Choisissez un chiffre') ;
ReadLn(a) ;
b := random(10) ;
IF a>b THEN WriteLn('Perdu, trop grand !')
        ELSE IF a<0 THEN WriteLn('Perdu, trop petit !')
                ELSE WriteLn('Bravo, vous avez trouvé le nombre mystère !') ;
END.
```

Quant au deuxième programme, je donne directement l'amélioration définitive qui compte le nombre d'essais.

```
PROGRAM mystere2 ;
USES wincrt ;
VAR a,b,c : integer ;
BEGIN
Randomize ;
a := random(100) ;
WriteLn('Essayez de deviner le nombre mystère compris entre 0 et 99') ;
ReadLn(b) ;
c := 1 ;
WHILE b<>a do
BEGIN
IF a>b THEN WriteLn('Trop petit, essayez encore !') ELSE WriteLn('Trop gros, essayez encore') ;
ReadLn(b) ;
c := c+1 ;
END ;
WriteLn('Bravo, vous avez gagné !') ;
WriteLn('Vous avez eu besoin de ',c,' essais') ;
END.
```

La meilleure méthode pour mettre en moyenne le moins de temps possible pour trouver le nombre mystère consiste à choisir à chaque étape un nombre qui est le plus proche possible du centre de l'intervalle où on sait que se trouve le nombre à trouver. Ainsi, au départ, le nombre étant entre 0 et 99, on choisit 49 ou 50 (c'est équivalent). Si on a pris 50 et qu'on nous répond « Trop petit », on essaye ensuite 24 ou 25 (puisque le nombre se trouve entre 0 et 49). On arrive à se convaincre qu'avec cette méthode, il faudra au maximum 7 essais.

TD3 : Boucles FOR

Ce TD va vous rappeler de bons souvenirs de cours de maths récents, puisque le principe d'une boucle FOR en Pascal est assez proche de celui du symbole $\sum$ en maths, à savoir « supprimer des petits points ». Une boucle FOR est donc une instruction répétitive permettant d'effectuer plusieurs fois de suite des calculs similaires. Des exemples classiques en maths sont les calculs de sommes, mais aussi les calculs de termes d'une suite définie par une formule de récurrence. L'instruction FOR obéit à la syntaxe suivante :

FOR i := 1 to n DO instruction ;

Comme en mathématiques quand on manipule une somme, la variable i est muette et vous pouvez donc lui donner n'importe quel autre nom. Elle devra bien sûr, comme toute variable, être déclarée en début de programme, avec un type integer. Toujours comme en maths, votre variable prendra toutes les valeurs entières entre la valeur initiale et la valeur finale stipulées (la valeur initiale a le droit d'être autre chose que 1 ; quant à la valeur finale, elle peut être égale à une autre variable n, par exemple choisie par l'utilisateur, comme dans mon exemple, mais aussi être égale à un entier fixe). Les instructions placées à l'intérieur de la boucle peuvent être des calculs faisant intervenir la variable i (comme en maths quand on calcule par exemple $\sum_{i=0}^{i=n} i^2$), mais il est très fortement déconseillé de modifier la valeur de i à l'intérieur de la boucle, sous peine de créer des boucles au comportement plus qu'étrange. Dernier détail, on a le droit de faire des boucles où la valeur de i diminue au lieu d'augmenter via la syntaxe :

FOR i := n downto 1 DO instruction ;

Naturellement, il faudra dans ce cas que la valeur finale soit plus petite que la valeur initiale. Un premier exemple de programme faisant intevenir une boucle FOR :

```
PROGRAM suite ;
VAR u : real ;
i,n : integer ;
BEGIN
WriteLn('Choisissez la valeur de n') ;
ReadLn(n) ;
u := 1 ;
FOR i := 1 to n do u := u/2 + 1/u ;
WriteLn('u_n=',u) ;
END.
```

Dans le cas où l'on souhaite effectuer plusieurs instructions à chaque étape de la boucle, on encadrera ces instructions par un BEGIN et un END (sinon, seule la première sera effectuée à chaque étape, et les suivantes seulement quand la boucle sera terminée).

Petits exercices

1. Essayer de comprendre ce que calcule exactement le programme précédent.
2. Écrire un programme calculant la somme des entiers entre 1 et n, pour un entier n choisi par l'utilisateur, sans utiliser la formule du cours (sinon c'est trop facile). Faire la même chose pour calculer $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$ (là, au moins, vous n'avez pas de formule).
3. Écrire un programme qui calcule la valeur de $n!$, pour un entier n choisi par l'utilisateur.
4. Écrire un programme qui calcule et affiche les n premières valeurs de la suite (u_n) définie par $u_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!}$.

Corrigé du TD3 et du TP3 (pas d'énoncé pour le TP3)

Petits exercices

1. Le programme en question calcule et affiche le terme d'indice n de la suite récurrente définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{1}{u_n}$. On a constaté ensuite devant les machines que cette suite convergeait très rapidement vers $\sqrt{2}$.
2. ```
   PROGRAM somme ;
   USES wincrt ;
   VAR i,n,s : integer ;
   BEGIN
   WriteLn('Choissez la valeur de l'entier n') ;
   ReadLn(n) ;
   s := 0 ;
   FOR i := 1 TO n DO s := s+i ;
   WriteLn(s) ;
   END.
   ```

   Pour calculer la somme des inverses des entiers, il suffit de remplacer s := s+i par s := s+1/i dans l'antépénultième ligne du programme (et de déclarer la variable s comme un réel et plus comme un entier).
3. ```
   PROGRAM factorielle ;
   USES wincrt ;
   VAR i,n,p : integer ;
   BEGIN
   WriteLn('Choisissez la valeur de n') ;
   ReadLn(n) ;
   p := 1 ;
   FOR i := 1 TO n DO p := p*i ;
   WriteLn(p) ;
   END.
   ```
4. ```
   PROGRAM suitecompliquee ;
   USES wincrt ;
   VAR i,n,p : integer ; u : real ;
   BEGIN
   WriteLn('Choisissez la valeur de n') ;
   ReadLn(n) ;
   u := 1 ; p := 1 ;
   FOR i := 1 TO n DO
   BEGIN
   p := p*i ;
   u := u+1/p ;
   END ;
   WriteLn(u) ;
   END.
   ```

Nous avons également vu en TP comment programmer le calcul du terme d'indice n d'une suite récurrente linéaire double, en l'occurence la suite de Fibonacci définie par $u_0 = 0$; $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Voici un programme faisant ce calcul :
   ```

```
PROGRAM fibonacci ;
USES wincrt ;
VAR i,n,u,v,w : integer ;
BEGIN
WriteLn('Choisissez n') ;
ReadLn(n) ;
u := 0 ; v := 1 ;
FOR i := 2 TO n DO
BEGIN
w := u+v ;
u := v ;
v := w ;
END ;
WriteLn(v) ;
END.
```

TD4 : Instructions répétitives

Les boucles REPEAT et WHILE, tout comme les boucles FOR, sont des procédures permettant d'effectuer des instructions de manière répétée. La différence fondamentale est qu'au lieu d'imposer un nombre de répétitions comme dans le cas de la boucle FOR, l'instruction sera répétée tant qu'une certaine condition ne sera pas vérifiée. La différence entre les deux instructions est minime : avec une boucle REPEAT, l'instruction est effectuée avant que la condition ne soit testée, avec une boucle WHILE, c'est le teste qui a lieu d'abord. Leur syntaxe respective est la suivante :

REPEAT instruction UNTIL condition ;
WHILE condition DO instruction ;

Il est souvent utile malgré tout de compter le nombre d'étapes dans une boucle de type REPEAT ou WHILE. Pour cela, la méthode consiste à créer une variable entière qui servira de compteur, à l'initialiser à la valeur 0 et à augmenter sa valeur d'une unité à chaque passage de la boucle. Par exemple, le programme suivant calcule la valeur du plus gran entier pour lequel $\sum_{k=1}^{n} k^3 < 1000$:

```
PROGRAM youhou ;
VAR k,s : integer ;
BEGIN
k := 0 ; s := 0 ;
WHILE s<1000 DO BEGIN
k := k+1 ; s := s+k*k*k ;
END ;
WriteLn(k) ;
END.
```

Si on remplaçait la boucle WHILE par une boucle REPEAT, on calculerait cette fois la valeur du plus petit entier pour lequel $\sum_{k=1}^{n} k^3 \geqslant 1000$.

Petits exercices

1. On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On admet que $\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$. Écrire un programme calculant la plus petite valeur de n pour laquelle $S_n \geqslant 5$, puis $S_n \geqslant 10$, et enfin $S_n \geqslant 15$.
2. On considère les deux suites (a_n) et (b_n) définies par $a_0 = 1$, $b_0 = 2$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$. Les deux suites sont adjacentes. Écrire un programme qui calcule la valeur de leur limite commune à ε près (choisi par l'utilisateur). Pour cela, on remarquera que si $b_n - a_n \leqslant \varepsilon$, a_n est une valeur approchée à ε près de la limite.
3. La suite de Syracuse est définie de la façon suivante : u_0 est un entier différent de 0, et ensuite, on a $u_{n+1} = \frac{u_n}{2}$ si u_n est pair, et $u_{n+1} = 3u_n + 1$ si u_n est impair. Vérifier à la main sur quelques exemples que la suite finit par prendre la valeur 1 (et est ensuite périodique). Écrire un programme calculant la plus petite valeur de n pour laquell $u_n = 1$ (u_0 étant choisi par l'utilisateur). Modifier le programme pour qu'il calcule également la plus grande valeur prise par la suite.

Corrigé du TD4

Petits exercices

1. Tant qu'à faire, nous allons écrire un programme qui demande une valeur réelle positive m à l'utilisateur, et qui calcule la première valeur de n pour laquelle $S_n > m$. Nous utiliserons également pour ce programme le type longint, qui permet de travailler en Pascal avec des entiers un peu plus gros que ceux du type integer (qui, rappelons-le, pose de gros problèmes dès qu'on atteint les environs de 10 000).

```
PROGRAM harmonique ;
USES wincrt ;
VAR m,s : real ; n : longint ;
BEGIN
WriteLn('Choisissez un réel positif') ;
ReadLn(m) ;
s := 0 ; n := 0 ;
REPEAT
n := n+1 ;
s := s+ 1/n ;
UNTIL s>m ;
WriteLn(n) ;
END.
```

2.
```
PROGRAM syracuse ;
USES wincrt ;
VAR u, n, m : longint ;
BEGIN
WriteLn('Choisissez un entier strictement positif pour u0') ;
ReadLn(u) ;
n := 0 ; m := u ;
WHILE u<>1 DO
BEGIN
n := n+1 ;
IF (u mod 2=0) THEN u :=u div 2 ELSE u :=3*u+1 ;
IF u > m THEN m := u ;
END ;
WriteLn('On atteint 1 au bout de ',n,' étapes') ;
WriteLn('La plus grande valeur atteinte est ',m) ;
END.
```

3.
```
PROGRAM adjacentes ;
USES wincrt ;
VAR u, v, e : real ; n : longint ;
BEGIN
WriteLn('Choisissez la précision de la valeur approchée') ;
ReadLn(e) ;
u := 0 ; v := 0 ; n := 0 ;
REPEAT
```

```
n := n+1 ;
u := u + 1/(n*n) ;
v := u + 1/n ;
UNTIL (v-u<e) ;
WriteLn('Une valeur approchée de la limite à ',e,' près par défaut est ',u) ;
WriteLn('La valeur approchée de Pi correspondante est ',sqrt(6*u)) ;
END.
```

TP4 : Instructions répétitives

Exercices sur les boucles répétitives

1. Commencez par faire tourner le programme écrit la semaine dernière pour les suites de Syracuse, et également celui du dernier petit exercice (suites récurrentes).
2. Écrire un programme calculant la somme double $\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i}{j}$, l'entier n étant choisi par l'utilisateur (c'est un petit retour en arrière, puisque ça n'utilisera que des boucles FOR).
3. Nous allons maintenant essayer d'écrire des programmes testant si un entier n proposé par l'utilisateur est premier ou non :
   - Écrire à l'aide d'une boucle FOR un premier programme qui teste la divisibilité de n par tous les entiers inférieurs à $\sqrt{n}$.
   - Améliorer le programme précédent en arrêtant les tests dès qu'on trouve un diviseur de n (on utilisera cette fois une boucle WHILE ou REPEAT).
   - Pour les plus courageux, écrire un programme qui donne la décomposition en facteurs premiers de l'entier n.
4. Écrire un programme calculant le pgcd de deux entiers choisis par l'utilisateur à l'aide de l'algorithme d'Euclide.

Corrigé du TP4

Exercices sur les boucles répétitives

1. Cf le corrigé du TD4.
2. ```
   PROGRAM sommedouble;
   USES wincrt;
   VAR i,j,n : integer; s : real;
   BEGIN
   WriteLn('Choisissez la valeur de n');
   ReadLn(n);
   s := 0;
   FOR j := 1 TO n DO
   FOR i := 1 TO j DO
   s := s + i/j;
   WriteLn(s);
   END.
   ```
3. - ```
     PROGRAM premier1;
     USES wincrt;
     VAR n,i : longint; p : boolean;
     BEGIN
     WriteLn('Choisissez un entier n');
     ReadLn(n);
     p := true; i := 1;
     FOR i := 2 TO trunc(sqrt(n)) DO
     IF n mod i=0 THEN p := false;
     IF p := true THEN WriteLn('Le nombre entier ',n,' est premier')
     ELSE WriteLn('Le nombre ',n,' n est pas premier');
     END.
     ```
   - ```
     PROGRAM premier2;
     USES wincrt;
     VAR n,i : longint;
     BEGIN
     WriteLn('Choisissez un entier n');
     ReadLn(n);
     i := 1;
     REPEAT
     i := i+1
     UNTIL ((n mod i=0) OR (i >trunc(sqrt(n))));
     IF (i > trunc(sqrt(n))) THEN WriteLn('Le nombre entier ',n,' est premier')
     ELSE WriteLn('Le nombre ',n,' n est pas premier car divisible par ', i);
     END.
     ```
   - ```
     PROGRAM decomposition;
     USES wincrt;
     VAR n,i : longint;
     BEGIN
     WriteLn('Choisissez un entier n');
     ReadLn(n);
     REPEAT
     i := 1;
     ```

```
REPEAT
i := i+1;
UNTIL ((n mod i=0) OR (i >trunc(sqrt(n))));
IF (i > trunc(sqrt(n))) THEN
BEGIN
WriteLn('Le nombre entier ',n,' est premier');
n := 1;
END
ELSE
BEGIN
WriteLn('Le nombre ',n,' n est pas premier car divisible par ', i);
n := n div i;
END;
UNTIL n=1;
WriteLn('Le nombre entier ',n,' est premier');
END.
```

4. PROGRAM pgcd;

```
USES wincrt;
VAR a,b,t : longint;
BEGIN
WriteLn('Choisissez deux entiers');
ReadLn(a,b);
IF b > THEN
BEGIN
t := b; b := a; a := t;
END;
REPEAT
t := a mod b;
a := b;
b := t;
UNTIL b=1;
WriteLn('Le pgcd des deux entiers choisis vaut ',a);
END.
```

Lexique informatique : tout ce que vous devez absolument savoir sur Pascal

Structure d'un programme :

PROGRAM nomduprogramme ;
USES wincrt ;
VAR nomvariable : type ;
BEGIN
instructions ;
END.

Types de variables les plus fréquents :

Les seuls types utilisés à ce jour sont **real** pour les nombres réels, **integer** pour les petits entiers, **longint** pour les entiers plus gros, **char** pour les caractères (un seul caractère) et **string** pour une chaine de caractères (un bloc de texte donc). On croisera aussi **boolean** pour des variables de test, qui ne peuvent prendre que deux valeurs : **true** ou **false**.

Procédures d'entrée-sortie :

WriteLn('texte',variable) ; affiche à l'écran tous les arguments placés entre apostrophes, et la valeur des variables qui ne sont pas placés entre apostrophes. Les différents éléments à afficher doivent être séparés par une virgule.

ReadLn(variable) ; stocke la valeur tapée par l'utilisateur dans la variable spécifiée.

Régles de syntaxe de base :

Toutes les instructions doivent être suivies d'un **;**

L'affectation d'une valeur à une variable se fait via **variable := valeur ;** (le simple = étant réservé aux tests).

Syntaxe des boucles :

IF test THEN instruction1 ELSE instruction 2 ; (pas de ; avant le ELSE, qui est par ailleurs facultatif : si on ne met pas de ELSE, il ne se passe rien si la condition n'est pas vérifiée).

FOR i := 1 TO n DO
BEGIN
instruction1 ; . . . ; instructionk ;
END ; (le BEGIN et le END sont facultatifs dans le cas où on n'effectue qu'une instruction à chaque passage dans la boucle ; le 1 et le n peuvent être remplacés par n'importe quel entier).

WHILE test DO
BEGIN
instruction1 ; . . . ; instructionk ;
END ;

REPEAT instruction1 ; . . . ; instructionk ;
UNTIL test ;

Opérations booléennes

Lorsqu'on veut effectuer (dans une instruction conditionnelle ou une boucle WHILE ou REPEAT) un test faisant intervenir plusieurs condition, on dispose des opérations logiques suivantes (mettez des parenthèses partout, c'est plus prudent) :

(test1) AND (test2) sera vrai seulement si test1 et test2 sont vérifiés.
(test1) OR (test2) sera vrai dès que test1 ou test2 est vérifié.
NOT (test1) sera vrai si test1 est faux (rarement utilisé).

Programmes classiques

Pour finir, un ou deux programmes dont vous croiserez la structure suffisamment souvent pour que ça vaille le coup de les connaitre sur le bout des doigts. Tout d'abord, un calcul de suite récurrente, ici le calcul du terme d'indice n (choisi par l'utilisateur) de la suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{3} - 2$:

```
PROGRAM suite ;
USES wincrt ;
VAR i,n : integer ; u : real ;
BEGIN
WriteLn('Choisissez la valeur de n') ;
ReadLn(n) ;
u := 3 ;
FOR i := 1 TO n DO
u := u*u/3-2 ;
WriteLn(u) ;
END.
```

Et un deuxième qui calcule $\sum_{k=1}^{k=?} \frac{1}{k^2}$ en s'arrêtant quand $\frac{1}{k^2}$ devient plus petit qu'un réel e choisi par l'utilisateur :

```
PROGRAM somme ;
USES wincrt ;
VAR k : longint ; e,s : real ;
BEGIN
WriteLn('Choisissez la valeur de e') ;
ReadLn(e) ;
k := 0 ; s := 0 ;
REPEAT
k := k+1 ;
s := s+1/(k*k) ;
UNTIL 1/(k*k) <e ;
WriteLn(s) ;
END.
```

TD5 : Fonctions en Pascal

Principe

Le langage PASCAL dispose d'un certain nombre de fonctions prédéfinies qu'on a déjà eu l'occasion d'utiliser dans nos programmes, comme la fonction racine carrée (**sqrt**) ou même les fonctions logarithme ou exponentielle (respectivement notées **ln** et **exp**). Il y a toutefois quelques manques criants (par exemple, pas de façon simple d'écrire des puissances, ou pas de raccourci pour les factorielles), et il est de toute façon utile de temps à autre de définir de nouvelles fonctions pour une utilisation limitée à un seul programme (par exemple, on cherche à effetuer via Pascal un tableau de valeurs pour la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2-3}{x^2+1}$). Cela tombe bien, puisqu'on peut définir à l'intérieur d'un programme Pascal des fonctions de toutes sortes.

Syntaxe

La définition d'une fonction se fait dans l'en-tête du programme, par exemple à la suite des déclarations de variables. Elle constitue en fait un sous-programme qui peut contenir ses propres déclarations de variables et dont le corps sera encadré par un BEGIN et un END; (pas de END. qui est réservé pour la fin du programme complet). En effet, les fonctions Pascal sont à prendre dans le sens le plus général possible, et peuvent prendre plusieurs variables de types différents et renvoyer un résultat d'à peu près n'importe quel type également. La première chose à préciser à Pascal quand on définit une fonction sera donc le nombre de variables ainsi que leur type, et le type du résultat. cela se fait de la façon suivante :

FUNCTION nomfonction (var1 : type1 ; var2 : type2 ... ; vark : typek) : typeresultat ;

Ainsi, la déclaration de la fonction factorielle aura pour en-tête :

FUNCTION factorielle (n : longint) : longint ;

Les variables apparaissant dans cet en-tête (ici l'entier n) sont définies et typées dans cet en-tête, inutile donc de les déclarer à nouveau ensuite. Par contre, on peut avoir besoin de déclarer à l'intérieur de la déclaration de fonction d'autres variables servant à calculer la valeur de la fonction (ici un indice i pour faire tourner une boucle calculant la valeur de la factorielle). Ces variables seront définies comme d'habitude par une ligne du type VAR nom : type ; à l'intérieur de la déclaration de fonction, et ne seront utilisables qu'à l'intérieur de cette même déclaration (on parle de variables **locales** par opposition aux variables **globales** qu'on définit pour l'intégralité du programme), et « disparaitront » dès que le calcul de la valeur de la fonction sera terminé. On peut même donner un même nom à une variable globale et à une variable locale, il n'y aura aucune interaction entre les deux (c'est tout de même très fortement déconseillé !). Le corps de la déclaration de fonction proprement est constitué d'instructions (comme n'importe quel corps de programme), mais il est interdit de faire apparaitre des WriteLn ou des ReadLn dedans, et il doit par contre **nécessairement** contenir une ligne du type

nomfonction := valeur ;

qui sert à définir la fonction. La valeur dépendra a priori des variables qu'on lui a associées, et cette fonction pourra ensuite être appelée à l'intérieur du programme par la commande nomfonction(var1,var2,...) (comme vous le noteriez naturellement en maths). Ainsi, la fonction factorielle peut être définie par la déclaration suivante :

```
FUNCTION factorielle (n : integer) : longint ;
VAR i : integer ; p : longint ;
BEGIN
p := 1 ;
FOR i := 1 TO n DO p := p*i ;
factorielle := p ;
```

END ;

Si on insère ensuite dans notre programme une ligne du genre a := factorielle(14) ; Pascal calculera 14! à l'aide de la définition précédente et affectera la valeur obtenue à la variable a.

Petits exercices

1. Écrire une déclaration de fonction Pascal prenant comme variables un réel et un entier, et calculant la puissance correspondante.
2. Écrire un programme Pascal affichant les images de tous les entiers compris entre -5 et 5 par la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2+3}$.
3. Écrire un programme Pascal calculant le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ en utilisant la fonction factorielle décrite ci-dessus (n et k étant deux entiers choisis par l'utilisateur).

Corrigé du TD5

Petits exercices

1. Cf le corrigé du TP5.
2. ```
   PROGRAM tableauvaleurs;
   USES wincrt;
   VAR i : integer;
   FUNCTION f (x : real) : real;
   BEGIN
   f := sqrt(x*x+3);
   END;
   BEGIN
   FOR i := -5 TO 5 DO WriteLn(f(i));
   END.
   ```
3. Cf le corrigé du TP5 également (je ne me suis pas trop fatigué pour taper cette page de correction...).
   ```

TP5 : Fonctions en Pascal

Exercice 1

Faire tourner le programme écrit la semaine dernière pour le calcul des arrangements, et écrire un programme similaire pour les coefficients binomiaux. Tester ce qui se passe pour de grandes valeurs de n et p.

Exercice 2

Écrire un programme en PASCAL qui demande à l'utilisateur quatre nombres et détermine le plus petit d'entre eux, en utilisant une fonction **min** qui prend comme argument deux réels et qui ressort le plus petit des deux.

Exercice 3

Écrire une fonction **puissance** qui prend comme argument un réel x et un entier n, et calcule x^n. À l'aide de cette fonction, écrire un programme qui calcule la valeur de n à partir de laquelle la somme $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{3^k}$ est une valeur approchée à ε près de sa limite (qui vaut $\frac{3}{2}$). Peut-on écrire un programme qui évite de recalculer chaque nouvelle puissance de 3 entièrement ?

Exercice 4

Le but de cet exercice est de calculer la limite de la suite de terme général $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$.

1. Écrire une fonction prenant comme argument un entier n et ressortant la valeur de $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$.
2. À l'aide de cette fonction, calculer la somme de tous les termes de la forme $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ supérieurs à 10^{-4}.
3. Montrer que $\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$ puis la limite de la suite (S_n) quand k tend vers l'infini. Comparer au résultat obtenu à la question précédente.

Corrigé du TP5

Exercice 1

```
PROGRAM coefbins ;
USES wincrt ;
VAR k,l : integer ;
FUNCTION fact (n : integer) : longint ;
VAR i : integer ; p : longint ;
BEGIN
p := 1 ;
FOR i := 1 TO n DO p := p*i ;
fact := p ;
END ;
BEGIN
WriteLn('Choisissez les valeurs de n et de k') ;
ReadLn(l,k) ;
WriteLn(fact(l)/(fact(k)*fact(l-k))) ;
END.
```

Dès que k ou l atteint la trentaine, Pascal renvoit n'importe quoi. Cela est du au fait que 30! dépasse déjà les capacités du type longint. On verra un peu plus tard des méthodes plus efficaces pour calculer les coefficients binomiaux, faisant intervenir le triangle de Pascal.

Exercice 2

```
PROGRAM min4 ;
USES wincrt ;
VAR a,b,c,d : real ;
FUNCTION min(x,y : real) : real ;
VAR z : real ;
BEGIN
IF x < y THEN u := x ELSE u := y ;
min := u ;
END ;
BEGIN
WriteLn('Choisissez quatre nombres réels') ;
ReadLn(a,b,c,d) ;
WriteLn(min(min(a,b),min(c,d))) ;
END.
```

Exercice 3

```
PROGRAM serie ;
USES wincrt ;
VAR e,s : real ; j : integer ;
FUNCTION puissance (x : real ; n : integer) : real ;
VAR i : integer ; u : real ;
BEGIN
u := 1 ;
FOR i := 1 TO n DO u := u*x ;
puissance := u ;
END ;
BEGIN
```

```
WriteLn('Choisissez la précision de la valeur approchée');
ReadLn(e);
s := 1; j := 0;
REPEAT
j := j+1;
s := s+puissance(1/3,j);
UNTIL (3/2-s <e);
WriteLn(j);
END.
```

Exercice 4

1. ```
   FUNCTION f (n : integer) : real;
   BEGIN
   f := 1/((n+1)*(n+2));
   END;
   ```
2. ```
   PROGRAM somme;
   USES wincrt;
   VAR s,t : real; i : integer;
   FUNCTION f (n : integer) : real;
   BEGIN
   f := 1/((n+1)*(n+2));
   END;
   BEGIN
   s := 0; i := 0;
   REPEAT
   t := f(i);
   i := i+1;
   s := s + t;
   UNTIL (t < 0.0001);
   WriteLn(s);
   END.
   ```
3. La première partie de la question est un calcul idiot de mise au même dénominateur. On en déduit par télescopage que $\sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} = 1 - \frac{1}{n+2}$. La limite de Sn est donc tout simplement 1. Le programme précédent donnait comme valeur approchée de la limite 0.990099. Ce n'est pas trop mal, non ?

Devoir Surveillé d'informatique

ECE3 Lycée Carnot

8 décembre 2009

Exercice 1

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \alpha \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + 4$.

1. Écrire un programme qui calcule et affiche la valeur de u_{15}, α étant choisi par l'utilisateur.
2. On pose $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} u_k$. Écrire un programme qui calcule et affiche la valeur de P_n, pour une valeur de n et une valeur de choisie par l'utilisateur et $\alpha = 1$.

Exercice 2

Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = v_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = 2v_{n+1} - 3v_n$. Écrire un programme calculant la valeur de v_n, pour un entier n choisi par l'utilisateur.

Exercice 3

On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!}$ et on rappelle que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} S_n = e$. Écrire un programme calculant la valeur de S_n pour le premier entier n vérifiant $\dfrac{1}{n!} < \varepsilon$ (ε étant choisi par l'utilisateur). On utilisera (en plus de ε) deux variables : une pour stocker la valeur de $\dfrac{1}{n!}$ et une autre pour celle de S_n. Faire afficher au programme l'erreur commise en prenant S_n comme valeur approchée de e (Pascal ne connaissant pas la notation e, on utlisisera exp(1) à la place).

Exercice 4

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = e^{-u_n}$. On admet que la suite converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$ et que, $\forall n \in \mathbb{R}$, $u_{2n} < l < u_{2n+1}$.
Écrire un programme calculant une valeur approchée de la limite de (u_n) à ε près, ε étant choisi par l'utilisateur (on calculera les termes de la suite jusqu'à une valeur de n pour laquelle on est certain que $|u_n - l| < \varepsilon$).

Corrigé du Devoir Surveillé

Exercice 1

```
PROGRAM u15;
USES wincrt;
VAR u : real; i : integer;
BEGIN
WriteLn('Choisissez la valeur du premier terme');
ReadLn(a);
FOR i := 1 TO 15 DO u := 3*u+4;
WriteLn('La valeur de u15 est de ',u);
END.
```

```
PROGRAM produit;
USES wincrt;
VAR n,i : integer; u,p : real;
BEGIN
WriteLn('Choisissez la valeur de n');
ReadLn(n);
u := 1; p :=1;
FOR i := 1 TO n DO
BEGIN
u := 3*u+4;
p := p*u;
END;
WriteLn('La valeur du produit est de ',p);
END.
```

Exercice 2

```
PROGRAM suite_double;
USES wincrt;
VAR n : integer; u,v,t : real;
BEGIN
WriteLn('Choisissez la valeur de n');
ReadLn(n);
u := 1; v := 1;
FOR i := 2 TO n DO
BEGIN
t := 2*v-3*u;
u := v;
v := t;
END;
WriteLn(v);
END.
```

Exercice 3

```
PROGRAM somme;
USES wincrt;
VAR e,u,s : real; n : integer;
BEGIN
```

```
WriteLn('Choisissez la valeur de espilon') ;
ReadLn(e) ;
s := 1 ; u := 1 ; n := 0 ;
REPEAT
n := n+1 ;
u := u/n ;
s := s+u ;
UNTIL u < e ;
WriteLn('La somme obtenue est une valeur approchée de e à ',exp(1)-u,' près) ;
END.
```

Exercice 4

```
PROGRAM joyeuxnoel ;
USES wincrt ;
VAR u,v,t,e ; real ;
BEGIN
WriteLn('Choisissez la précision de la valeur approchée') ;
ReadLn(e) ;
u := 0 ; v := exp(-u) ;
WHILE (((v-u)>e) OR ((u-v)>e)) DO
BEGIN
t := exp(-v) ;
u := v ;
v := t ;
END ;
WriteLn('La limite de la suite vaut ',v,' à ',e,' près') ;
END.
```

Corrigé du TP6 (pas d'énoncé)

Pas d'énoncé, mais tout de même un corrigé cette semaine ! Nous avons travaillé sur les machines sur le concept de dichotomie, et fait deux programmes. Le premier consistait à écrire un programme pour déterminer la solution d'une équation du type $f(x) = 0$ à l'aide de la dichotomie. Un programme possible (la fonction f pouvant être modifiée) est le suivant :

```
PROGRAM dicho ;
USES wincrt ;
VAR a,b,e,c : real ; i : integer ;
FUNCTION f (x : real) : real ;
BEGIN
f := 3x*x*x-2*x*x+1 ;
END ;
BEGIN
WriteLn('Choisissez deux réels a et b dont les images par f sont de signe différent') ;
ReadLn(a,b) ;
IF f(a)*f(b) > 0 THEN WriteLn('Mauvais choix')
ELSE
BEGIN
WriteLn('Choisissez la précision de la valeur approchée') ;
ReadLn(e) ;
REPEAT
c := (a+b)/2 ;
IF f(a)*f(c) > 0 THEN a := c ELSE b := c ;
UNTIL (b-a < e) ;
WriteLn(a) ;
END ;
END.
```

Le deuxième programme consistait à reprendre le jeu du TP2 (deviner un nombre mystérieux) et à y faire jouer la machine en lui imposant une méthode de recherche par dichotomie et en comptant le nombre d'essais effectués :

```
PROGRAM jeudicho ;
USES wincrt ;
VAR n,a,b,c,i : integer ;
BEGIN
Randomize ;
n := Random(100) ;
a := 0 ; b := 100 ; i :=0 ;
REPEAT
i := i+1 ;
c := (a+b) div 2 ;
IF c>n THEN b := c ELSE a :=c ;
UNTIL c = n ;
WriteLn('Il a fallu ',i,' essais pour trouver le nombre') ;
END.
```

TD7 : Tableaux en Pascal

Définition de types

Jusqu'à présent, nous n'avons travaillé qu'avec des types de données en PASCAL qui stockent une seule valeur à la fois (entière, réelle, ...). Il est pourtant souvent utile de stocker d'un seul coup plusieurs valeurs. Nous verrons bientôt que c'est quelque chose que nous aurons naturellement envie de faire quand nous travaillerons avec des matrices (pensez déjà que ça peut servir par exemple pour la résolution de systèmes). C'est également très utile quand on veut travailler avec des polynomes (pour lesquels il faut stocker un certain nombre de coefficients), exemple que nous utiliserons principalement pour l'instant. La façon la plus simple de représenter informatiquement un polynome est de ne conserver que les coefficients dans un tableau, par exemple par degré croissant (c'est plus facile si on veut pouvoir manipuler des polynomes de degré variable dans un même programme). Ainsi, le polynome $x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 9x - 4$ sera représenté par le tableau $[-4; 9; 5; 3; 1]$. Ca tombe bien, il existe en PASCAL un type ARRAY qui est en fait un tableau de nombres dont on spécifie à l'avance la longueur et le type de données qu'il permettra de stocker. On peut ainsi déclarer des variables de la façon suivante :

VAR grux : ARRAY[0..10] OF real ;

Tout ce qui est après les deux points : ARRAY[0..10] OF real désigne simplement le type de la variable grux : il s'agit d'un tableau dont les cases seront numérotées de 0 à 10 (autrement dit, un tableau à 11 cases) et dont chaque case contient un réel (on peut naturellement remplacer 0 et 10 par des entiers quelconques). La variable grux pourra donc par exemple représenter un polynome de degré 10 (qui a bien 11 coefficients). Comme toujours, Pascal est très pontilleux sur la syntaxe, à respecter scrupuleusement. Collé au ARRAY se trouvent toujours des crochets à l'intérieur desquels deux entiers séparés par deux points (pas plus ni moins) indiquent la numérotation des éléments du tableau. On peut aussi, tant qu'on y est, définir nous-même de nouveaux types faisant intervenir des tableaux, histoire d'alléger un peu les notations dans les programmes. Une déclaration de type se fait dans l'en-tête du programme, par une ligne du genre TYPE blabla = ARRAY[p..n] OF typesimple, où n et p sont deux entiers et typesimple un type « classique », réels, entiers etc. Ainsi :

TYPE polynome = ARRAY[0..10] OF real ;
VAR p,q : polynome ;

définit un nouveau type, le type polynome, qui est représenté par des tableaux de 11 réels, puis deux variables p et q de ce nouveau type, donc deux tableaux à 11 réels.

Une telle variable devra, comme toute autre, être initialisée, ce qui nécessite de donner une valeur à chacun de ses coefficients. On ne peut malheureusement pas initialiser un tableau en bloc (si vous écrivez quelque chose du genre p := 0 ; Pascal va vous dire qu'il y a incompatibilité de type car p est un tableau et 0 un réel), il faut donc faire une petite boucle pour passer en revue tous les éléments du tableau. L'élément du tableau p se trouvant dans la case numéro i est désigné en Pascal par p[i] (autrement dit, dans notre exemple, p[0], p[1], ..., p[10] sont des réels). Pour initialiser notre tableau de 11 réels en mettant des zéros dans toutes les cases, on procèdera donc ainsi :

FOR i := 0 to 10 DO p[i] := 0 ;

De la même façon, demander à l'utilisateur de saisir successivement tous les éléments d'un tableau demandera en général d'utiliser une boucle.

Exercices sur les polynomes

Dans tous les programmes nécessitant d'utiliser des polynomes, on prendra l'habitude de définir le type polynome par :

TYPE polynome := ARRAY[0..99] OF real ;

Ceci nous permet de travailler avec des polynomes dont le degré n'excède pas 99. Naturellement, si on travaille avec des polynomes de petit degré, la plupart des éléments de notre tableau seront égaux à 0.

Pour s'entrainer, nous allons écrire quelques petits programmes utilisant ce nouveau type :

1. Écrire un programme permettant de stocker dans un tableau les coefficients d'un polynome P saisis par l'utilisateur (on demandera d'abord le degré du polynome pour éviter de faire taper 95 zéros à l'utilisateur).
2. Compléter le programme précédent en lui faisant calculer la valeur de $P(0)$ et de $P(1)$ (et même de $P(2)$ si vous êtes courageux).
3. Compléter le premier programme pour lui faire calculer le polynome dérivé du polynome saisi.

Corrigé du TD7

Exercices sur les polynomes

1. PROGRAM saisie ;
   USES wincrt ;
   TYPE polynome = ARRAY[0..99] OF real ;
   VAR p : polynome ; i,d : integer ;
   BEGIN
   WriteLn('Saisissez le degré de votre polynome') ;
   ReadLn(d) ;
   FOR i := 0 TO d DO
   BEGIN
   Writeln('Saisissez le coefficient de degré ',i,' de votre polynome') ;
   ReadLn(p[i]) ;
   END ;
   FOR i := d+1 TO 99 DO p[i] := 0 ;
   END.
2. PROGRAM images ;
   USES wincrt ;
   TYPE polynome = ARRAY[0..99] OF real ;
   VAR p : polynome ; i,d : integer ; a,b,c : real ;
   BEGIN
   WriteLn('Saisissez le degré de votre polynome') ;
   ReadLn(d) ;
   FOR i := 0 TO d DO
   BEGIN
   Writeln('Saisissez le coefficient de degré ',i,' de votre polynome') ;
   ReadLn(p[i]) ;
   END ;
   FOR i := d+1 TO 99 DO p[i] := 0 ;
   WriteLn('P(0)=',p[0]) ;
   a := p[0] ;
   FOR i := 1 TO d DO a := a+p[i] ;
   WriteLn('P(1)=',a) ;
   b := p[0] ; c := 1 ;
   FOR i := 1 TO d DO
   BEGIN
   c := 2*c ; b := b+p[i]*c ;
   END ;
   WriteLn('P(2)=',c) ;
   END.
3. PROGRAM derivee ;
   USES wincrt ;
   TYPE polynome = ARRAY[0..99] OF real ;
   VAR p,q : polynome ; i,d : integer ;
   BEGIN

```
WriteLn('Saisissez le degré de votre polynome') ;
ReadLn(d) ;
FOR i := 0 TO d DO
BEGIN
Writeln('Saisissez le coefficient de degré ',i,' de votre polynome') ;
ReadLn(p[i]) ;
END ;
FOR i := d+1 TO 99 DO p[i] := 0 ;
FOR i := 1 TO d DO q[i-1] := i*p[i] ;
FOR i := d TO 99 DO q[i] := 0 ;
END.
```

TP7 : Tableaux en Pascal

Exercice 1

Faire tourner le programme écrit la semaine dernière calculant le polynome dérivé d'un polynome saisi par l'utilisateur. Essayer de faire afficher le polynome dérivé non pas sous forme d'un tableau mais sous la forme plus classique $P'(x) = \dots$, en commençant par le terme de plus haut degré.

Exercice 2

Écrire un programme Pascal permettant de calculer des moyennes coefficientées. On demandera à l'utilisateur de donner le nombre de notes intervenant dans le calcul de moyenne, puis chacune des notes (qu'on classera dans un tableau), et enfin chacun des coefficients (qu'on classera dans un autre tableau). On affichera enfin la moyenne coefficientée.

Exercice 3

On cherche à écrire un programme calculant les coefficients binomiaux en utilisant la formule de Pascal. Ce programme demandera à l'utilisateur une valeur de n et affichera la n-ème ligne du triangle Pascal, c'est-à-dire un tableau constitué des $n+1$ coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$, qu'on calculera de proche en proche à l'aide de la relation de Pascal. Un seul tableau est nécessaire pour réaliser ce programme : on part du tableau $1\ 0\ 0\ \dots$, puis on doit obtenir $1\ 1\ 0\ \dots$, puis $1\ 2\ 1\ 0\ \dots$ aux différentes étapes de notre boucle (faites bien attention à l'ordre dans lequel vous changez les valeurs des éléments de votre tableau).

Exercice 4

Écrire une fonction Pascal qui trie les éléments d'un tableau contenant 5 éléments (méthode au choix...).

Corrigé du TP7

Exercice 1

Il suffit d'ajouter juste avant le END. les lignes suivantes :

```
FOR i := d-1 DOWNTO 1 DO Write(q[i],'X^',i,'+') ;
Write(q[0]) ;
```

Exercice 2

```
PROGRAM moyennes;
USES wincrt;
TYPE tableau = ARRAY[1..99] OF real;
VAR n,c : tableau; i,p : integer; a,b : real;
BEGIN
WriteLn('Quel est le nombre de notes à saisir ?') ;
ReadLn(p) ;
FOR i := 1 TO p DO
BEGIN
WriteLn('Saisissez la note numéro ',i,' ainsi que son coefficient') ;
ReadLn(n[i]) ;
ReadLn(c[i]) ;
END;
For i := p+1 TO 99 DO
BEGIN
n[i] := 0; c[i] := 0;
END;
a := 0; b := 0;
FOR i := 1 TO p DO
BEGIN
a := a+n[i]*c[i];
b := b + c[i];
END;
WriteLn(a/b) ;
END.
```

Exercice 3

Cf corrigé du TP8.

Exercice 4

Cf corrigé du TP8.

TP8 : Tableaux, suites récurrentes

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = e^{-u_n^2}$. Convainquez-vous à l'aide d'un petit dessin que cette suite converge vers l'unique point fixe l de la fonction $f : x \mapsto e^{-x^2}$. On admet que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} < l < u_{2n+1}$.

1. Écrire un programme Pascal qui calcule u_{2n} et u_{2n+1} pour un entier n choisi par l'utilisateur et affiche l'écart entre u_{2n} et u_{2n+1}. Déterminer par tâtonnements la première valeur de n pour laquelle cet écart est inférieur à 10^{-9}.
2. Modifier le programme précédent pour lui faire calculer la première valeur de n pour laquelle $u_{2n+1} - u_{2n} < \varepsilon$ (choisi par l'utilisateur) et affiche la valeur de u_{2n} correspondante.

Exercice 2

On considère désormais la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1 + u_n}{1 + e^{u_n}}$. En admettant que la suite converge vers un réel l et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - l| \leqslant \dfrac{1}{8^n}$, écrire un programme Pascal calculant une valeur approchée de l à ε près (choisi par l'utilisateur).

Exercice 3

On cherche à écrire un programme calculant les coefficients binomiaux en utilisant la formule de Pascal. Ce programme demandera à l'utilisateur une valeur de n et affichera la n-ème ligne du triangle Pascal, c'est-à-dire un tableau constitué des $n + 1$ coefficients binomiaux $\dbinom{n}{k}$, qu'on calculera de proche en proche à l'aide de la relation de Pascal. Un seul tableau est nécessaire pour réaliser ce programme : on part du tableau $1\ 0\ 0\ \dots$, puis on doit obtenir $1\ 1\ 0\ \dots$, puis $1\ 2\ 1\ 0\ \dots$ aux différentes étapes de notre boucle (faites bien attention à l'ordre dans lequel vous changez les valeurs des éléments de votre tableau).

Exercice 4

Écrire une fonction Pascal qui trie les éléments d'un tableau contenant 5 éléments (méthode au choix...).

Corrigé du TP8

Exercice 1

1. PROGRAM ecart ;

```
USES wincrt ;
VAR u,v : real ; i,n : integer ;
BEGIN
WriteLn('Choisissez la valeur de n') ;
ReadLn(n) ;
u := 1 ;
FOR i := 1 TO n DO u := exp(-u*u) ;
v := exp(-v*v) ;
WriteLn(u-v) ;
END.
```

   On constate que l'écart affiché devient inférieur à 10^{-9} à partir de $n = 63$.

2. PROGRAM ecartbis ;

```
USES wincrt ;
VAR u,v,e : real ; n : integer ;
BEGIN
WriteLn('Choisissez la valeur de epsilon') ;
ReadLn(e) ;
u := 1 ; v := exp(-u*u) ; n := 0 ;
REPEAT
u := v ;
v := exp(-v*v) ;
n := n+1 ;
UNTIL u-v < e ;
WriteLn(n) ;
END.
```

Exercice 2

```
PROGRAM limite ;
USES wincrt ;
VAR u,e,a : real ;
BEGIN
WriteLn('Choisissez la valeur de epsilon') ;
ReadLn(e) ;
u := 0 ; a := 1 ;
REPEAT
u := (1+u)/(1+exp(u)) ;
a := a/8 ;
UNTIL a < e ;
WriteLn(u) ;
END.
```

Exercice 3

```
PROGRAM coefbin ;
USES wincrt ;
VAR p : ARRAY[0..99] OF longint ; i,j,n : integer ;
BEGIN
WriteLn('Choisissez la valeur de n') ;
ReadLn(n) ;
p[0] := 1 ;
FOR i := 1 TO 99 DO p[i] := 0 ;
FOR i := 0 TO n-1 DO
FOR j := i DOWNTO 0 DO p[j+1] := p[j]+p[j+1] ;
FOR i := 0 TO n DO Write(p[i],' ') ;
END.
```

Exercice 4

Une des nombreuses façons de faire est la suivante :

```
PROGRAM tri5 ;
USES wincrt ;
VAR t : ARRAY[1..5] of REAL ; i,j : integer ; a : real ;
BEGIN
WriteLn('Choisissez cinq nombres') ;
FOR i := 1 TO 5 DO Readln(t[i]) ;
FOR i := 1 TO 4 DO
FOR j := 1 TO 4 DO
IF t[j] < t[j+1] THEN
BEGIN
a := t[j] ;
t[j] := t[j+1] ;
t[j+1] := a ;
END ;
END.
```

TD8 : Complexité d'un algorithme

Depuis le début de l'année, nous apprenons péniblement à écrire des algorithmes en Pascal servant à calculer des choses plus ou moins compliquées. Nous nous sommes jusqu'ici assez peu préocuppés d'optimiser nos algorithmes pour les rendre les plus efficaces possibles. C'est pourtant un souci prédominant de l'informatique actuelle. On peut en gros s'intéresser à deux choses quand on veut rendre un programme le plus performant possible :

- la quantité de mémoire utilisée par l'algorithme (ainsi, il sera toujours préférable d'utiliser le moins de variables possible dans un programme, surtout quand ce sont des variables gourmandes en mémoire comme des tableaux).
- le temps d'exécution de l'algorithme : on a intérêt à minimiser le nombre d'opérations effectuées au sein de l'agorithme pour qu'il tourne plus rapidement.

On parle de complexité en espace ou en temps pour mesurer ces deux paramètres. On ne s'intéressera pour l'instant qu'à la complexité en temps, c'est-à-dire qu'on cherchera à comparer le temps mis par différents algorithmes pour résoudre un même problème. Pour cela, on essaiera tout simplement de compter le nombre d'opérations effectuées par l'agorithme et de le comparer à la taille des données manipulées par l'algorithme. Comme nous travaillons pour l'instant avec des tableaux, la taille des données sera tout simplement le nombre d'éléments que nous utiliserons dans nos tableaux. Ainsi, si notre tableau représente un polynome, le nombre d'éléments utilisés est égal au degré du polynome plus un. On classera les algorithmes en différentes catégories selon le nombre d'opérations effectuées. On dira notamment qu'un algorithme est :

- linéaire si le nombre d'opérations est proportionnel à la taille des données (ainsi, avec des données dix fois plus volumineuses, l'algorithme mettra dix fois plus de temps).
- quadratique si le nombre d'opérations est proportionnel au carré de la taille des données (ainsi, avec des données dix fois plus volumineuses, l'algorithme mettra cent fois plus de temps).
- polynomial si le nombre d'opérations est proportionnel à une certaine puissance de la taille des données.
- exponentiel le nombre d'opérations est proportionnel à un certain nombre élevé à une puissance égale taille des données (ainsi, si le nombre d'opérations est proportiel à 2^n où n représente la taille des données, l'agorithme mettra deux fois plus de temps pour tourner à chaque fois qu'on rajoute un élément dans notre tableau, ce qui est absolument affreux).

Ainsi, si un algoritme met 1 seconde pour trier les données d'un tableau contenant 10 éléments, et qu'on veut lui faire trier un tableau à 100 éléments, il mettra :

- 10 secondes s'il est linéaire
- 100 secondes s'il est quadratique
- 1 000 secondes (soit un peu plus d'un quart d'heure) s'il est cubique
- 2^90 secondes (soit un peu plus de 39 milliards de millards d'années) s'il est exponentiel de base 2
- 1.1^90 secondes (environ une heure et demie) s'il est exponentiel de base 1.1

Petits exercices

Exercice 1

1. Estimer le nombre d'opérations (additions ou multiplications) effectuées par un algorithme calculant tous les coefficients binomiaux de la n-ème ligne du triangle de Pascal :
   - en utilisant la formule $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ pour chaque valeur de k
   - en utilisant cette même formule, mais en stockant les valeurs des factorielles de façon à ne calculer qu'un seule fois chaque factorielle différente.
   - en utlisant cette même formule mais en calculant les factorielles les unes après les autres en les stockant à chaque étape
   - en utilisant la formule de Pascal (algorithme vu au TD8)

2. En considérant qu'une addition est en moyenne 10 fois plus rapide qu'une multiplication, comparer le temps d'exécution de chaque algorithme pour remplir la 50 ème ligne du triangle.

Exercice 2

Déterminer le nombre de comparaisons nécessaire pour trier dans l'ordre un tableau contenant 16 éléments quand on utilise chacune des méthodes suivantes :

1. on cherche le plus petit élément du tableau, on le supprime du tableau, puis on recommence jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'éléments dans le tableau.
2. on compare les deux premiers éléments du tableau (on les échange si besoin), puis les deux suivants et ainsi de suite jusqu'au deux derniers ; on recommence 15 fois cette manoeuvre (je vous laisse comprendre pourquoi on aura le tableau au bout de 15 tours).
3. on découpe de tableau en 8 paquets de 2 ; on trie chaque paquet, puis on regroupe les paquets de 2 en paquets de 4, puis de 8, et on finit par regrouper les deux paquets de 8 (je vous laisse déterminer combien de comparaisons il faut faire à chaque étape pour regrouper dans le bon ordre).

Corrigé du TD8

Exercice 1

1. - Il y a $n-1$ multiplications à faire au numérateur pour calculer $n!$, et $n-1$ au dénominateur également ($k-1$ pour $k!$, $n-k-1$ pour l'autre factorielle, et une dernière pour multiplier les 2), et enfin une division. Le tout à faire $n+1$ fois pour remplir complètement la ligne. Soit $n+1$ divisions et $(n+1)(2n-1)$ multiplications, donc de l'ordre de $2n^3$ opérations.
   - On fera $n-1+n-2+\cdots+1 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ multiplications pour calculer toutes les factorielles, et deux opérations supplémentaires pour chaque coefficient binomial (une multiplication et une division), soit $\dfrac{n(n-1)}{2} + 2(n+1)$ opérations, donc de l'ordre de $\dfrac{n^2}{2}$ opérations.
   - Il suffit en fait d'effectuer $n-1$ multiplications pour toutes les factorielles. On a alors au total $n-1+2(n+1) = 3n+1$ opérations.
   - Cette fois-ci, on ne fera que des additions : 1 pour passer de la ligne 0 à la ligne 1, 2 pour le passage à la ligne 2 etc, jusqu'à n pour le passage à la ligne n, donc au total $\dfrac{n(n+1)}{2}$ additions.
2. Pour la ligne 50, on a donc le choix, en considérant les deux dernières méthodes, entre 151 multiplications (ou divisions) et 1 225 additions. Si une addition est 10 fois plus rapide qu'une multiplication, la dernière méthode est légèrement plus rapide. En pratique, elle est en fait beaucoup plus efficace car toutes les méthodes à base de multiplications vont effectuer des calculs sur des entiers énormes, qui vont très vite devenir très longs.

Exercice 2

1. On a besoin de 15 comparaisons pour trouver le plus élément, puis de 14 pour le deuxième etc, soit au total $\dfrac{15 \times 16}{2} = 120$ comparaisons.
2. Il y a 15 comparaisons à effectuer à chaque tour, soit au total $15 \times 15 = 225$ comparaisons.
3. Il faut 8 comparaisons pour trier les paquets de 2, 4×3 comparaisons pour les regrouper en paquets de 4, puis 2×7 comparaisons pour faire 2 paquets de 8 et enfin 15 comparaisons pour la dernière étape, soit au total 49 comparaisons.

Corrigé du TP9 (pas d'énoncé)

Encore un corrigé de TP sans énoncé ! Cette semaine, nous avons testé l'algorithme de Hörner (cf cours de maths sur les polynômes) et nous avons tenté d'écrire un algorithme permettant d'effectuer le calcul du produit de deux polynômes. En voici une version générale, avec des polynômes de degrés quelconques, qui de plus affiche joliment le résultat :

```
PROGRAM prodpoly ;
USES wincrt ;
VAR p,q : ARRAY[0..99] OF real ; r : ARRAY[0..199] OF real ; i,j,d1,d2 : integer ;
BEGIN
WriteLn('Choisissez le degré du premier polynôme') ;
ReadLn(d1) ;
FOR i := 0 TO d1 DO
BEGIN
WriteLn('Coefficient du terme de degré ',i,' ?') ;
ReadLn(p[i]) ;
END ;
WriteLn('Choisissez le degré du deuxième polynôme') ;
ReadLn(d2) ;
FOR i := 0 TO d2 DO
BEGIN
WriteLn('Coefficient du terme de degré ',i,' ?') ;
ReadLn(q[i]) ;
END ;
FOR i := 0 TO 199 DO r[i] := 0 ;
FOR i := 0 TO d1 DO
FOR j := 0 TO d2 DO
r[i+j] := r[i+j]+p[i]*q[j] ;
FOR i := d1+d2 DOWNTO 1 DO Write(r[i],'X^ ',i,'+') ;
WriteLn(r[0]) ;
END.
```

TD9 : Matrices en Pascal

Matrices en Pascal

Rien de très nouveau cette semaine en réalité, puisque les manipulations de matrices en Pascal ne vont faire que reprendre ce qu'on a déjà vu sur les tableaux, mais avec des tableaux à deux dimensions. Pour définir des variables représentant des matrices, on utilisera toujours des types ARRAY, mais au lieu de ne leur donner qu'une dimension (le nombre de cases, dans un tableau traditionnel), on en donnera deux : le nombre de lignes et le nombre de colonnes. Ainsi, une variable matricielle sera définie par un intitulé de ce genre (il est plus logique de numéroter à partir de 1 pour des matrices) :

VAR M : ARRAY[1..99,1..99] OF real ;

Pour accéder à l'élément situé sur la ligne i et la colonne j de la matrice M, on pourra utiliser la variable $M[i, j]$. Pour initialiser une matrice ou faire des calculs sur tous les éléments d'une matrice, nous aurons souvent recours à des doubles boucles, puisqu'il faudra faire varier les lignes et les colonnes. Ainsi, par exemple, pour mettre des 0 partout dans la matrice définie précédemment, on écrira :

FOR i := 1 TO 99 DO

FOR j := 1 TO 99 DO M[i,j] := 0 ;

Sinon, dans la catégorie « rien à voir avec le sujet du jour », je me suis enfin décidé à regarder comment on faisait pour que Pascal cesse d'afficher les nombres réels avec plein de zéros inutiles qui rendent l'afichage illisible : il suffit de mettre un : n derrière le nom de la variable à afficher pour que l'affichage s'arrête à n chiffres après la virgule. Ainsi, WriteLn(a :2) vous affichera la variable a avec deux chiffres après la virgule.

Petits exercices

1. Commençons simplement : écrire un programme qui demande une matrice à l'utilisateur et l'affiche à l'écran (il faudra naturellement commencer par demander à l'utilisateur le nombre de lignes et de colonnes de la matrice, puis les coefficients).
2. Écrire un programme affichant la transposée d'une matrice saisie par l'utilisateur.
3. Beaucoup plus lourd : écrire un programme calculant et affichant le produit de deux matrices entrées par l'utilisateur.

Corrigé du TD9

Petits exercices

1. PROGRAM saisiematrice ;
   USES wincrt ;
   VAR t : ARRAY[1..30,1..30] OF real ; n,p,i,j : integer ;
   BEGIN
   WriteLn('Choisissez les dimensions de la matrice') ;
   ReadLn(n,p) ;
   FOR i := 1 TO n DO
   FOR j := 1 TO p DO
   BEGIN
   WriteLn('Coefficient ligne ',i,' colonne ',j,' ?') ;
   ReadLn(t[i,j]) ;
   END ;
   FOR i := 1 TO n DO
   BEGIN
   FOR j := 1 TO p DO Write(t[i,j],' ') ;
   WriteLn('') ;
   END ;
   END.
2. Il suffit en fait de modifier la dernière double boucle FOR du programme précédent affichant la matrice et d'inverser le rôle de i et de j (autrement dit afficher les colonnes de la matice plutôt que ses lignes) :
   FOR j := 1 TO p DO
   BEGIN
   FOR i := 1 TO n DO Write(t[i,j],' ') ;
   WriteLn('') ;
   END ;
3. PROGRAM prodmatrices ;
   USES wincrt ;
   VAR a,b,c : ARRAY[1..30,1..30] OF real ; i,j,k,n,p,q : integer ;
   BEGIN
   WriteLn('Choisissez les dimensions de la première matrice') ;
   ReadLn(n,p) ;
   FOR i := 1 TO n DO
   FOR j := 1 TO p DO
   BEGIN
   WriteLn('Coefficient ligne ',i,' colonne ',j,' ?') ;
   ReadLn(a[i,j]) ;
   END ;
   WriteLn('La deuxième matrice devra avoir ',p,' lignes, choisissez son nombre de colonnes') ;
   ReadLn(q) ;
   FOR i := 1 TO p DO
   FOR j := 1 TO q DO
   BEGIN

```
WriteLn('Coefficient ligne ',i,' colonne ',j,' ?') ;
ReadLn(b[i,j]) ;
END ;
FOR i := 1 TO n DO
FOR j := 1 TO q DO
BEGIN
c[i,j] := 0 ;
FOR k := 1 TO n DO c[i,j] := c[i,j] + a[i,k]*b[k,j] ;
END ;
FOR i := 1 TO n DO
BEGIN
FOR j := 1 TO q DO Write(c[i,j],' ') ;
WriteLn('') ;
END ;
END.
```

Corrigé du TP10 (pas d'énoncé)

Pour ce TD, nous avons commencé par écrire un programme qui extrait d'une matrice saisie par l'utilisateur son plus grand et son plus petit élément :

```
PROGRAM matriceminmax;
USES wincrt;
VAR t : ARRAY[1..30,1..30] OF real; n,p,i,j : integer; a,b : real;
BEGIN
WriteLn('Choisissez les dimensions de la matrice');
ReadLn(n,p);
FOR i := 1 TO n DO
FOR j := 1 TO p DO
BEGIN
WriteLn('Coefficient ligne ',i,' colonne ',j,' ?');
ReadLn(t[i,j]);
END;
a := t[1,1]; b :=t [1,1];
FOR i := 1 TO n DO
FOR j := 1 TO p DO
BEGIN
IF t[i,j] < a THEN a := t[i,j];
IF t[i,j] > b THEN b := t[i,j];
END;
WriteLn('Le plus petit élément de la matrice vaut ',a);
WriteLn('Le plus grand élément de la matrice vaut ',b);
END.
```

Puis nous avons écrit un programme dans lequel l'utilisateur choisit un réel, et le programme repère les coefficients de la matrice égaux à ce réel, et indique le nombre de fois où ce réel apparait dans la matrice :

```
PROGRAM vlknvrvz;
USES wincrt;
VAR t : ARRAY[1..30,1..30] OF real; n,p,i,j,c : integer; a : real;
BEGIN
WriteLn('Choisissez les dimensions de la matrice');
ReadLn(n,p);
FOR i := 1 TO n DO
FOR j := 1 TO p DO
BEGIN
WriteLn('Coefficient ligne ',i,' colonne ',j,' ?');
ReadLn(t[i,j]);
END;
WriteLn('Quel est le réel à chercher dans la matrice ?');
ReadLn(a);
c := 0;
FOR i := 1 TO n DO
FOR j := 1 TO p DO
IF t[i,j]=a THEN
BEGIN
c := c+1;
WriteLn('Le coefficient ligne ',i,' colonne ',j,' est égal à ',a);
```

```
END ;
WriteLn('Le réel ',a,' apparait ',c,' fois dans la matrice') ;
END.
```

TD10 : Probabilités en Pascal

Quelques rappels sur les instructions aléatoires

Il y a en fait bien peu de choses à savoir concernant les probabilités en Pascal, puisque les instructions que nous utiliserons se limitent au nombre faramineux de deux, que nous avons qui plus est déjà rencontrées lors de TD antérieurs. Rappelons donc que :

- Il est indispensable de mettre la ligne **Randomize ;** en début de programme si on veut ensuite utiliser les générateurs aléatoires (celà initialise le générateur).
- La commande **Random(n)** renvoit un entier aléatoire compris entre 0 et $n-1$ (c'est-à-dire que si on veut un nombre suivant une loi $\mathcal{U}(n)$, on devra faire du Random(n)+1).
- La même commande **Random** sans argument renvoit un réel aléatoire compris entre 0 et 1 (en fait un nombre pseudo-aléatoire, mais évitons de rentrer dans les détails techniques).

Voilà, vous savez tout, il est temps de passer aux exercices !

Petits exercices

- Écrire un programme demandant un entier n à l'utilisateur et effectuant 1 000 simulations de loi uniforme de paramètre n (on renverra le résultat sous forme de tableau de fréquences).
- Écrire un programme effectuant 1 000 simulation d'une loi de Bernoulli de paramètre p.
- Écrire un programme effectuant 1 000 simulations de la variable aléatoire donnant la somme de deux dés lancés simultanément.
- Écrire un programme effectuant 1 000 simulations d'une loi binômiale de paramètre (n, p) (n et p étant évidemment choisis par l'utilisateur).

Corrigé du TD10

Petits exercices

- Le programme suivant (tout comme les autres programmes du TD) demande également à l'utilisateur le nombre de simulations qu'il souhaite effectuer :
```
PROGRAM simuuniforme;
USES wincrt;
VAR t : ARRAY[1..99] OF longint; n,a,i : longint; z : integer;
BEGIN
Randomize;
WriteLn('Choisissez le paramètre voulu pour la loi uniforme');
ReadLn(n);
WriteLn('Choisissez le nombre de simulations');
ReadLn(a);
FOR i := 1 TO n DO t[i] := 0;
FOR i := 1 T0 a DO
BEGIN
z := random(n)+1;
t[z] := t[z]+1;
END;
FOR i := 1 TO n DO WriteLn('La valeur ',i,' a été obtenue ',t[i],' fois');
END.
```
-
```
PROGRAM simubernoulli;
USES wincrt;
VAR a,i,z : longint; p : real;
BEGIN
Randomize;
WriteLn('Choisissez le paramètre voulu pour la loi de Bernoulli');
ReadLn(p);
WriteLn('Choisissez le nombre de simulations');
ReadLn(a);
z := 0;
FOR i := 1 T0 a DO
IF random <p THEN z := z+1;
END;
WriteLn('La valeur 0 a été obtenue ',a-z,' fois');
WriteLn('La valeur 1 a été obtenue ',z,' fois');
END.
```
-
```
PROGRAM simusommedes;
USES wincrt;
VAR t : ARRAY[2..12] OF longint; a,i : longint; z : integer;
BEGIN
Randomize;
WriteLn('Choisissez le nombre de simulations');
ReadLn(a);
FOR i := 2 TO 12 DO t[i] := 0;
FOR i := 1 T0 a DO
BEGIN
z := random(6)+random(6)+2;
t[z] := t[z]+1;
END;
FOR i := 2 TO 12 DO WriteLn('La valeur ',i,' a été obtenue ',t[i],' fois');
```

END.

- Cf TP11.

Corrigé du TP11

Au programme de ce TP, simulation de loi binômiale, en laissant à l'utilisateur le choix des paramètres et du nombre de simulations :

```
PROGRAM simubinomiale;
USES wincrt;
VAR t : ARRAY[0..99] OF longint; n,i,j,a,z : longint; p : real;
BEGIN
Randomize;
WriteLn('Choisissez les paramètres de la loi binômiale');
ReadLn(n,p);
FOR i := 0 TO n DO t[i] := 0;
WriteLn('Choisissez le nombre de simulations');
ReadLn(a);
FOR i := 1 TO a DO
BEGIN
z := 0;
FOR j := 1 TO n DO
IF random < p THEN z := z+1;
t[z] := t[z]+1;
END;
FOR i := 0 TO n DO WriteLn('La valeur ',i,' a été obtenue ',t[i],' fois');
END.
```

Nous avons continué avec une simulation de loi géométrique (pas encore étudiée en cours de maths, et donc vue comme le temps d'attente du premier Pile sur une pièce désequilibrée) :

```
PROGRAM simugeometrique;
USES wincrt;
VAR t : ARRAY[1..99] OF longint; i,a,z : longint; p : real;
BEGIN
Randomize;
WriteLn('Choisissez la probabilité que la pièce tombe sur Pile');
ReadLn(p);
WriteLn('Choisissez le nombre de simulations');
ReadLn(a);
FOR i := 1 TO 99 DO t[i] := 0;
FOR i := 1 TO a DO
BEGIN
z := 0;
REPEAT
z := z+1;
UNTIL random < p;
t[z] := t[z]+1;
END;
FOR i := 0 TO 25 DO WriteLn('La valeur ',i,' a été obtenue ',t[i],' fois');
END.
```

TD11 : Sujets de concours 2009

Le concept de ce TD est très simple : une compilation des questions de Pascal posées aux épreuves de concours ECE en 2009. Comme vous allez le voir, on sait déjà à peu près tout faire :

HEC 2009

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. On demande tout d'abord de compléter la fonction suivante pour qu'elle renvoie la valeur de u_n :

```
Function f(n : integer) : integer;
var temp,u,v,k : integer;
Begin
u := 0; v := 1;
for k := 1 to n-1 do
  Begin;
  temp := _____; v := _____; u := _____;
  end;
f := _____;
end;
```

Je vous donne toute la fin de l'exercice, nécessaire pour comprendre la deuxième question de Pascal :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que n admet une Z-décomposition s'il existe un entier $r \in \mathbb{N}^*$ tel que l'on puisse écrire $n = u_{k_1} + \cdots + u_{k_r}$, où les k_i sont des entiers supérieurs ou égaux à 2 et vérifiant $k_{i+1} - k_i \geqslant 2$. Montrer que 37 et 272 admettent une Z-décomposition.
2. Soit n admettant une Z-décomposition $n = u_{k_1} + \cdots + u_{k_r}$. Montrer par récurrence sur r que $n < u_{k_r+1}$. En déduire l'unicité de r.
3. Montrer que, $\forall p \geqslant 2$, tout entier vérifiant $1 \leqslant n \leqslant u_p$ admet une unique Z-décomposition.
4. On suppose qu'on a définie en Pascal une constante **p** et un type **tab** de la façon suivante :
   const := 20; type tab=array[2..20] of integer;
   On suppose également que l'on a défini une variable u de type tab telle que, $\forall k \in \{2; 3; \ldots; p\}$, $u[k]$ contient la valeur de u_k. On se donne un entier n vérifiant $1 \leqslant n \leqslant u_p$. Écrire un programme Z renvoyant un tableau dont la case numéro k contient la valeur de u_{k_i} si k est l'un des entiers k_i apparaissant dans la Z-décomposition de n, et 0 sinon.

EMLyon 2009

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{e^{u_n} - 1}$. Cette suite converge vers un réel α et vérifie $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}(1 - \alpha)$ (inégalité donnée par l'énoncé).

L'unique question de Pascal demande d'écrire un programme calculant et affichant la plus petite valeur de n tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$.

EDHEC 2009

La variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre p (cela correspond par xemple au temps d'attente du premier pile avec une pièce déséquilibrée), la variable T est égale à X si X est pair, à $\dfrac{1+X}{2}$ sinon. La question de Pascal demande de compléter le programme suivant pour qu'il simule les lois de X et de T :

```
Program edhec2009;
Var x,t,lancer : integer;
```

```
Begin
  Randomize ; x := 0 ;
  Repeat lancer := random ; x := _____ ; until (lancer <= p) ;
  If (x mod 2=0) then _____ else _____ ;
  WriteLn(t) ;
End.
```

Ecricome 2009

On définit l'application φ sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\varphi(x) = 2\ln\frac{x}{2} + \frac{1}{x}$. Cette fonction s'annule deux fois sur $]0;+\infty[$ pour des valeurs α et β vérifiant $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} < \beta$. Écrire un programme Pascal permettant d'encadrer α dans un intervalle d'amplitude 10^{-2}.

ESC 2009

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n^4 + 1}{4}$. La question de Pascal demande d'écrire un programme demandant une valeur de n et affichant la valeur de u_n (les questions de maths de ce même sujet sont à peu près du même niveau de difficulté que la question d'info...).

Corrigé du TD11

HEC 2009

Fonction complète :

```
Function f(n : integer) : integer;
var temp,u,v,k : integer;
Begin
u := 0; v := 1;
for k := 1 to n-1 do
  Begin;
  temp := v; v := u+v; u := temp;
  end;
f := v;
end;
```

Pour la fin de l'exercice :

1. Écrivons donc les premiers termes de la suite (en excluant u_0 et u_1) : 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 233. On observe que $37 = 34 + 3$ et $272 = 233 + 34 + 5$ sont deux décompositions convenables.
2. Vérifions la propriété si $r = 1$. Cela signifie que n peut se décomposer à l'aide d'un seul terme de la suite, autrement dit que $n = u_{k_1}$. La suite (u_n) étant strictement croissante, on a bien dans ce cas $n < u_{k_1+1}$. Supposons désormais $n = u_{k_1} + \cdots + u_{k_r} + u_{k_{r+1}}$, avec par hypothèse de récurrence $u_{k_1} + \cdots + u_{k_r} < u_{k_r+1}$ (attention à ne pas confondre ce dernier nombre avec $u_{k_{r+1}}$...). Or, une Z-décomposition ne pouvant faire aparaitre deux termes consécutifs de la suite (u_n), on a $k_r + 1 \leqslant k_{r+1} - 1$, donc $u_{k_r+1} \leqslant u_{k_{r+1}-1}$, et on en déduit que $n < u_{k_{r+1}-1} + u_{k_r} = u_{k_r} + 1$ (ceci par définition de la suite (u_n)), ce qui achève la récurrence. On a donc en fait pas le choix sur u_{k_r} : il s'agit nécessairement du plut gros terme de la suite inférieur ou égal à n. Une fois choisi u_{k_r} chercher une Z-décomposition de n revient à en chercher une de $n - u_{k_r}$, ce pour quoi on a pas le choix non plus. On peut faire une jolie récurrence si on le souhaite, mais la conclusion est celle-ci : la Z-décomposition, si elle existe, est nécessairement unique.
3. Encore une récurrence ? Mais oui. Pour 2, la décomposition est évidente. Supposons que tout entier strictement inférieur à n possède une Z-décomposition (récurrence forte), et notons p le plus grand entier pour lequel $u_p \leqslant n$ (cet entier existe forcément), alors $n - u_p < n$, donc il admet une Z-décomposition $u_{k_1} + \cdots + u_{k_r}$, et $n = u_{k_1} + \cdots + u_{k_r} + u_p$ aussi. L'unicité a déjà été prouvée à la question précédente.
4. Evidemment, le programme va être très moche si on s'interdit d'utiliser la récursivité, mais c'est tout de même faisable :

```
PROGRAM hec;
VAR r,s,i : integer;
BEGIN
s := p;
REPEAT
r := 2;
WHILE t[r] <= n DO r := r+1;
FOR i := r TO s DO t[i] := 0;
s := r-1;
n := n-t[r];
UNTIL n=0;
FOR i := 2 TO r-1 DO t[i] := 0;
```

EMLyon 2009

Cette question est en fait difficilement faisable si on ne connait pas la valeur de la limite, en l'occurence $\ln 2$. Si on la connait, pas contre, c'est un programme idiot :

```
PROGRAM emlyon;
USES wincrt;
VAR u : real; n : integer;
BEGIN
u := 1; n := 0;
REPEAT n := n+1; u := u/(exp(u)-1);
UNTIL abs(u-ln(2)) < 0.000 000 001;
WriteLn(n);
END.
```

EDHEC 2009

Voila le programme complété :

```
Program edhec2009;
Var x,t,lancer : integer;
Begin
  Randomize; x := 0;
  Repeat lancer := random; x := x+1; until (lancer <= p);
  If (x mod 2=0) then t := x else t := (1+x)/2;
  WriteLn(t);
End.
```

Ecricome 2009

On peut bien sûr faire une belle dichotomie mais aussi, la méthode n'étant pas imposée, des choses beaucoup plus rudimentaires et moches, comme le programme qui suit, qui se contente de tester des valeurs de x écartées de 0.01 jusqu'à ce que la fonction change de signe :

```
PROGRAM ecricome;
USES wincrt;
VAR x : real;
FUNCTION phi (t : real) : real;
BEGIN
phi := 2*ln(x/2)+1/x;
END;
BEGIN
x := 0;
REPEAT x := x+0.01 UNTIL phi(x) < 0;
WriteLn('alpha est compris entre ',x-0.01,' et ',x);
END.
```

ESC 2009

```
PROGRAM esc;
USES wincrt;
VAR u : real; i,n : integer;
BEGIN
WriteLn('Choisissez la valeur de n');
ReadLn(n);
```

```
u := 0 ;
FOR i := 1 TO n DO u := (u*u*u*u+1)/4 ;
WriteLn('u_n=',u) ;
END.
```

TP12 : Encore un peu de probas

Exercice 1

Le but de cet exercice est de simuler la loi de la variable aléatoire étudiée dans l'exemple 2 du cours (chapitre sur les variables infinies). Rappelons-en la définition : on effectue dans une urne contenant une boule blanche, une verte et une rouge une seccession de tirages jusqu'à avoir tiré deux boules blanches, et on note X le nombre de tirages effectués au moment de l'apparution de cette deuxième boule blanche. Écrire un programme Pascal effectuant n simulations de cette loi (n étant un entier choisi par l'utilisateur, et les résultats stockés dans un tableau dont on affichera les 20 premières lignes). Pour les plus courageux, comparer les résultats obtenus avec ceux d'une simulation de loi géométrique de paramètre $p = \dfrac{1}{6}$ (les deux lois ont une espérance égale à 6).

Exercice 2

Encore une simulation de loi vue en cours de maths : vous n'avez certainement pas oublié le très bel exercice 3 de la feuille n°23 : une urne contient une boule blanche et une boule noire, et on tire dans cette urne jusqu'à obtention d'une boule blanche, sachant qu'à chaque tirage d'une boule noire, on remet la boule noire et on en ajoute une autre. On a vu que cette variable aléatoire n'admettait pas d'espérance. Écrire un programme Pascal simulant n fois de suite cette loi (n étant choisi par l'utilisateur). Pour une fois, on ne présentera pas les résultats sous forme de tableau, mais on affichera après chaque simulation une phrase du style « On a tiré la première boule blanche au tirage 1 276 ». On évitera de prendre donc de prendre de grandes valeurs de n quand on fera tourner le programme...

Exercice 3

Un ivrogne se ballade dans la rue. À chaque pas qu'il effectue, il a une chance sur deux d'avancer d'un mètre, et une chance sur deux de reculer d'autant. On note X_k la distance parcourue (qui sera comptée négativement si l'ivrogne a plus reculé qu'il n'a avance) par l'ivrogne au bout de k pas. Écrire un programme Pascal effectuant n simulations de la variable aléatoire X_k (pour la présentation des résultats, on notera que Pascal autorise à définir des indices négatifs dans ses tableaux).

Soit maintenant j un entier strictement positif. Écrire un programme Pascal simulant la marche aléatoire de l'ivrogne jusqu'à ce que celui-ci soit repassé j fois par son point de départ, et afficher le nombre de pas effectués pas l'ivrogne lors de cette marche. Comparer les résultats obtenus lorsqu'on fait grandir la valeur de j (si on est courageux, on pourra effectuer toute une série de simulations pour chaque valeur de j pour avoir des résultats plus faciles à interpréter).

Corrigé du TP12

Exercice 1

```
PROGRAM loipascal ;
USES wincrt ;
VAR t : ARRAY[2..99] OF real ; n, i, z : longint ;
BEGIN
Randomize ;
WriteLn('Choisissez le nombre de simulations') ;
ReadLn(n) ;
FOR i := 2 TO 99 DO t[i] := 0 ;
FOR i := 1 TO n DO
BEGIN
z := 0 ;
REPEAT z := z+1 UNTIL random < 1/3 ;
REPEAT z := z+1 UNTIL random < 1/3 ;
t[z] := t[z]+1 ;
END ;
FOR i := 2 TO 20 DO WriteLn('On a obtenu ',t[i],' fois la valeur ',i) ;
END.
```

Voici les résultats obtenus pour 10 000 simulations de cette loi (la sommes des valeurs ne donne pas 10 000, la variable aléatoire ayant pris des valeurs plus grandes que 20) :

k	2	3	4	5	6	7	8	9
$\|X = k\|$	1 112	1 517	1 450	1 291	1 154	868	689	519

k	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\|X = k\|$	369	272	222	163	109	84	57	38	27	25	7

Pour une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{6}$, on obtient la répartition suivante :

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\|X = k\|$	1 692	1 391	1 099	980	814	656	542	478	412

k	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\|X = k\|$	319	271	226	171	168	138	120	78	78	61	49

On peut constater, outre bien entendu le fait que la loi géométrique peut prendre la valeur 1, ce qui occasionne une diminution du nombre d'occurence des valeurs faibles, que la loi géométrique prend plus souvent de grandes valeurs que la première loi simulée.

Exercice 2

```
PROGRAM mengoli ;
USES wincrt ;
VAR n,i,k : longint ;
BEGIN
Randomize ;
Writeln('Choisissez le nombre de simulations') ;
ReadLn(n) ;
```

```
FOR i := 1 TO n DO
BEGIN
k := 0;
REPEAT k := k+1 UNTIL random < 1/(k+1);
WriteLn('On a tiré une boule blanche au tirage numéro ',k);
END;
END.
```

Exercice 3

```
PROGRAM ivrogne;
USES wincrt;
VAR t : ARRAY[-99..99] OF longint; n,k,i,j,z : longint;
BEGIN
Randomize;
WriteLn('Choisissez le nombre de pas effectués par l'ivrogne à chaque simulation');
ReadLn(k);
WriteLn('Choissez le nombre de simulations');
ReadLn(n);
FOR i := -99 TO 99 DO t[i] := 0;
FOR i := 1 TO n DO
BEGIN
z := 0;
FOR j := 1 TO k DO
IF random<1/2 THEN z := z+1 ELSE z := z-1;
t[z] := t[z]+1;
END;
FOR i := -k TO k DO WriteLn('On a obtenu ',t[i],' fois la valeur ',i);
END.
```

Voici maintenant un programme qui effectue n simulations du temps d'attente de la j-ème fois où on repasse par la case départ, n et j étant demandés à l'utilisateur :

```
PROGRAM ivrognebis;
USES wincrt;
VAR n,i,j,z,a,b : longint;
BEGIN
Randomize;
WriteLn('Choissez le nombre de simulations');
ReadLn(n);
WriteLn('Choisissez le nombre de fois que l'ivrogne doit repasser par son point de départ');
ReadLn(j);
FOR i := 1 TO n DO
BEGIN
z := 0; a := 0; b :=0;
REPEAT
a := a+1;
IF random<1/2 THEN z := z+1 ELSE z := z-1;
IF z=0 THEN b := b+1;
UNTIL b=j;
WriteLn('Notre ivrogne a effectué ',a,' pas avant de revenir ',j,'fois au départ');
END;
END.
```

On constate, assez logiquement, que le temps moyen de la ballade augmente quand on augmente j, mais qu'il semble que l'ivrogne finisse toujours par revenir autant de fois qu'on le souhaite pas son point de départ (attention tout de même à ne pas prendre un j trop grand si on ne veut pas faire planter notre cher Pascal).

TD12 : Intégration numérique

Pour calculer une intégrale à la main, rien de plus facile, il suffit de maîtriser à la perfection primitives, changements de variables et autres intégrations par parties. La machine, elle, va compenser comme d'habitude son intelligence limitée par une capacité de calcul impressionnante. Nous allons étudier dans ce TD quelques méthodes permettant de calculer des valeurs approchées d'intégrale à l'aide de calculs de sommes, et essayer de comparer ces méthodes entre elles.

Méthode des rectangles

C'est une méthode que nous avons déjà abordée en cours de maths lorsque nous avons parlé de sommes de Riemann. Il s'agit simplement de découper l'intervalle d'intégration en n morceaux et, sur chacun de ces morceaux, d'approcher la courbe de la fonction f par un rectangle dont la hauteur est donnée par l'image par f du point situé à gauche du rectangle. Ainsi, on effectue le calcul suivant : $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \simeq \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$. Maintenant, à vous de travailler (pour plus de simplicité, on note $a_i = a + k\dfrac{b-a}{n}$ dans ce qui suit)

1. Montrer que, $\forall x \in [a_i; a_{i+1}]$, $|f(x) - f(a_i)| \leqslant M_1|x - a_i|$, où M_1 est un majorant de f' sur $[a; b]$.
2. En déduire une majoration de l'erreur commise en approchant $\displaystyle\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt$ par $f(a_i)\dfrac{b-a}{n}$, puis majorer l'erreur commise lorsqu'on calcule l'intégrale de f sur $[a; b]$ par cette méthode.
3. On suppose dans cette question $a = 0$ et $b = 1$, et on admet que pour les fonctions qu'on cherchera à intégrer, on aura toujours $M_1 \leqslant 10$. Déterminer les plus petites valeurs de n pour lesquelles notre calcul d'intégrale sera valable à 0.01 près, puis à 10^{-9} près.

Méthode des trapèzes

Le principe est très similaire à celui de la méthode des rectangles, la seule différence étant qu'au lieu d'approcher la courbe par un rectangle de hauteur $f(a_i)$, on utilise cette fois un trapèze dont le dernier côté joint les points $(a_i, f(a_i))$ et $(a_{i+1}, f(a_{i+1}))$.

1. Faire un petit dessin pour représenter la situation, puis écrire la valeur approchée sous forme d'une somme similaire à celle utilisée pour la méthode des rectangles.
2. On admet la généralisation suivante de l'inégalité des accroissements finis : pour tout x appartenant à l'intervalle $[a_i, a_{i+1}]$, l'écart entre $f(x)$ et la valeur aobtenue sur le trapèze est majoré en valeur absolue par $(a_{i+1} - x)(x - a_i)\dfrac{M_2}{2}$, où M_2 est un majorant de $|f''|$ sur $[a; b]$. En déduire, comme ci-dessus, une majoration de l'erreur commise en utilisant la méthode des trapèzes pour approcher notre intégrale.
3. En reprenant à nouveau $a = 0$ et $b = 1$, et en admettant cette fois-ci qu'on aura $M_2 \leqslant 100$, donner des valeurs de n pour lesquelles l'erreur est plus petite que 0.01, puis plus petite que 10^{-9}.
4. Comparer le nombre de calculs effectués par chaque méthode. Laquelle semble la plus efficace ?

Et le Pascal dans tout ça ?

Il serait grand temps en effet de revenir à de la programmation. Votre but est simple : écrire un programme calculant une valeur approchée de l'intégrale d'une fonction f donnée (on ne peut pas demander à l'utilisateur de saisir la fonction en Pascal, c'est trop compliqué) entre deux bornes a et b choisies par l'utilisateur, tout d'abord en utilisant la méthode des rectangles, puis en utilisant la méthode des trapèzes (on fera deux programmes distincts, et on laissera également le choix à l'utilisateur de l'entier n représentant le nombre de morceaux dans le découpage de l'intervalle).

TD13 : Procédures

Procédures en Pascal

Un dernier TD un peu hybride, dans lequel je vais commencer par dire quelques mots sur la notion de procédures en Pascal. Elle est techniquement très proche de celle de fonction, puisqu'elle se déclare comme elle avant le corps du programme, s'applique à des variables dont on précisera le type, et peut contenir ses propres déclarations de variables locales. Les principales différences avec les fonctions sont qu'une procédure n'a pas à renvoyer de résultat (pas besoin de préciser de type de résultat donc, ni d'insérer une ligne de type f := dans une procédure), et qu'elles sont donc principalement utilisées pour effectuer des actions modifiant souvent les valeurs de variables globales du programme (ce qu'on évite de faire avec les fonctions). En fait, il s'agit d'une sorte de sous-programme effectuant une certaine tâche revenant à plusieurs reprises dans le corps du programme qu'on est en train d'écrire. Ainsi, lorsqu'on écrit des algorithmes de tri de tableaux, on aura souvent intérêt à écrire une procédure effectuant l'échange de deux éléments du tableau. Par exemple, le tri à bulles d'un tableau de 10 éléments :

```
PROGRAM triabulles;
USES wincrt;
VAR t : ARRAY[1..10] OF real; i,j : integer;
PROCEDURE echange(a,b : integer);
VAR x : real;
BEGIN
x := t[a]; t[a] := t[b]; t[b] := x;
END;
BEGIN
WriteLn('Choisissez les éléments du tableau');
FOR i := 1 TO 10 DO ReadLn(t[i]);
FOR i := 1 T0 9 DO
FOR j := 1 TO 9 DO
IF t[j] > t[j+1] THEN echange(j,j+1);
FOR i := 1 TO 10 DO WriteLn(t[i]);
END.
```

Calcul d'intégrale par la méthode de Simpson

Pour achever notre étude de calcul numérique d'intégrales débutée au TD précédent, voici une dernière méthode de calcul approchée qui, comme les deux déjà abordées, consiste à découper l'intervalle d'intégration en n morceaux, et à approcher l'intégrale de la fonction sur chacun de ces morceaux par une combinaison linéaire d'images par f de points de l'intervalle. Dans le cas de la méthode des rectangles, on se contente d'utiliser $\displaystyle\int_{a_i}^{a_{i+1}} f \simeq f(a)(a_{i+1} - a_i)$; pour les trapèzes, on a besoin de deux valeurs : $\displaystyle\int_{a_i}^{a_{i+1}} f \simeq \frac{f(a_i) + f(a_{i+1})}{2}(a_{i+1}-a_i)$. Pour Simpson, on passe à trois images, avec des coefficients un peu inattendus : $\displaystyle\int_{a_i}^{a_{i+1}} f \simeq \frac{f(a_i) + 4f(\frac{a_i+a_{i+1}}{2}) + f(a_{i+1})}{6}(a_{i+1}-a_i)$. On admettra que cette méthode donne des valeurs approchées meilleures que les deux précédentes, et on se contentera de constater via le calcul qui suit qu'elle donne même des valeurs exactes pour des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 (on se contente de vérifier pour x^2) :

$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \dfrac{b-a}{6}\left(a^2 + \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 + b^2\right) = \dfrac{(b-a)(a^2+a^2+2ab+b^2+b^2)}{6}$

$$= \frac{2a^2b + 2ab^2 + 2b^3 - 2a^3 - 2a^2b - 2ab^2}{6} = \frac{b^3 - a^3}{3} = \left[\frac{t^3}{3}\right]_a^b = \int_a^b t^2 dt.$$

Corrigé des TD 12 et 13

Un premier programme pour la méthode des rectangles (le nom de la fonction sera à compléter au cas par cas selon la fonction à intégrer) :

```
PROGRAM rectangles;
USES wincrt;
VAR n,i : longint; a,b,z : real;
FUNCTION f(x : real) : real;
BEGIN
f := ;
END;
BEGIN
WriteLn('Choisissez les bornes de l'intervalle d'intégration');
ReadLn(a,b);
WriteLn('Choisissez le nombre d'intervalles du découpage');
ReadLn(n);
z := 0;
FOR i := 0 TO n-1 DO z := z + f(a+i*(b-a)/n);
WriteLn(z*(b-a)/n);
END.
```

Un deuxième avec les trapèzes :

```
PROGRAM trapezes;
USES wincrt;
VAR n,i : longint; a,b,z : real;
FUNCTION f(x : real) : real;
BEGIN
f := ;
END;
BEGIN
WriteLn('Choisissez les bornes de l'intervalle d'intégration');
ReadLn(a,b);
WriteLn('Choisissez le nombre d'intervalles du découpage');
ReadLn(n);
z := f(a)/2;
FOR i := 1 TO n-1 DO z := z + f(a+i*(b-a)/n);
z := z+f(b)/2;
WriteLn(z*(b-a)/n);
END.
```

Un dernier pour la méthode de Simpson :

```
PROGRAM rectangles;
USES wincrt;
VAR n,i : longint; a,b,z : real;
FUNCTION f(x : real) : real;
BEGIN
f := ;
END;
BEGIN
WriteLn('Choisissez les bornes de l'intervalle d'intégration');
ReadLn(a,b);
```

```
WriteLn('Choisissez le nombre d'intervalles du découpage') ;
ReadLn(n) ;
z := f(a)/6 ;
FOR i := 1 TO n-1 DO z := z + f(a+i*(b-a)/n)/3 ;
FOR i := 0 TO n-1 DO z := z + 2*f(a+(2*i+1)*(b-a)/(2*n))/3 ;
z := z+f(b)/6 ;
WriteLn(z*(b-a)/n) ;
END.
```

TP13 : Intégration numérique

1. Faire tourner les trois algorithmes d'intégration étudiés lors des précédents TD pour calculer une valeur approchée de $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ (dont on sait par ailleurs qu'elle est égale à $\ln 2$). En comparant avec la valeur donnée pour $\ln 2$ par votre calculatrice (par exemple), déterminer le nombre de rectangles/trapèzes/morceaux nécessaires pour obtenir une valeur correcte à 0.01, puis à 10^{-10} près, pour chacune des trois méthodes.
2. Pour finir de façon plus ludique, un (gros) programme montrant ce qu'on peut faire avec toutes les notions vues cette année en Pascal. Que fait ce programme ? Quel petit bug comporte-t-il ?

```
PROGRAM lastbutnotleast ;
USES wincrt ;
VAR t,u : ARRAY[1..5] of integer ; i,a,b : integer ;
PROCEDURE test(v, z : integer) ;
VAR j : integer ;
BEGIN
IF v = t[z] THEN a := a+1 ;
FOR j := 1 TO 5 DO
IF v = t[j] THEN b := b+1 ;
END ;
BEGIN
Randomize ;
FOR i := 1 TO 5 DO
t[i] := random(10) ;
REPEAT
a := 0 ; b := 0 ;
WriteLn('Choisissez cinq chiffres') ;
FOR i := 1 TO 5 DO
BEGIN
ReadLn(u[i]) ;
test(u[i],i) ;
END ;
WriteLn('Vous avez ',a,' chiffres bien placés') ;
WriteLn('Les chiffres choisis apparaissent au total ',b,' fois dans le nombre cherché') ;
UNTIL a = 5 ;
WriteLn('Bravo, vous avez gagné !') ;
END.
```

Corrigé du TP13

1. Un petit tableau comparatif des résultats obtenus par les trois méthodes pour diverses valeurs de n :

n	rectangles	trapèzes	Simpson
10	0.7187714032	0.6937714032	0.6931473747
100	0.6956534305	0.6931534305	0.6931471806
1 000	0.6933972431	0.6931472431	0.6931471806
10 000	0.6931721812	0.6931471812	0.6931471806
100 000	0.6931496806	0.6931471806	0.6931471806
1 000 000	0.6931474305	0.6931471806	0.6931471806

   On constate donc qu'avec les trapèzes il faut entre 100 et 1 000 morceaux (136 pour être précis sur cet exemple) pour atteindre une précision de 2 chiffres après la virgule, alors qu'on y est déjà avec 10 morceaux pour les deux autres méthodes (il en faut au moins 6 avec les trapèzes, et un seul suffit avec Simpson). Pour une précision de 10^{-10}, il faudrait un bon milliard de morceaux avec les rectangles, un peu plus de 20 000 avec les trapèzes, et seulement 69 avec Simpson. En gros, il n'y a pas photo !

2. Ce programme tente de simuler une partie de MasterMind. Le problème est qu'il compte n'importe comment les bons chiffres mal placés, se plantant en gros systématiquement dès qu'il y a un même chiffre apparaissant deux fois dans le nombre à trouver, ou dans le nombre proposé par le joueur (il compte alors beaucoup trop d'occurences des chiffres en question). Un problème pas si simple à régler sans surcharger atrocement le programme...

Annexe A

Trombinoscope

En guise d'appendice à ce gros volume, quelques documents de nature un peu moins mathématique (mais pas forcément plus anecdotique), à commencer par une galerie de portraits des principaux protagonistes de cette grande aventure : les élèves (sans qui nous serions, quoi qu'en disent régulièrement bon nombre de collègues, bien malheureux) ! Sont présents sur ce trombinoscope les 46 élèves présents début septembre. Quelques uns parmi eux auront passé moins de temps au lycée Carnot que la majorité des autres, mais j'espère sincèrement qu'ils auront trouvé une voie qui leur convient pour la suite de leur études. Une dernière remarque, ou plutôt une excuse de la part du photographe très amateur que je suis : certains de ces portraits, pris sur le vif et dans la précipitation le jour de la rentrée dans notre humble salle de cours, ne rendent guère justice aux charmant(e)s pensionnaires de l'ECE3, j'en suis bien conscient et espère que vous m'en excuserez...

Amram
Maylis

Banguy
Anaïs

Bendjebbour
Sonia

Bodier
Alexandre

Boutevin
Chloe

Caradec
Paul

Carré
Pierre

Cheneson
Brandon

Chibane
Manel

Cousseran
Mathilde

Duparc
Sophie

Eschylles
Sandra


Francisco
Juan Jose


Guillot
Audrey


Hayaud
Laura


Issaad
Yasmina


Jurkiewicz
Martin


Lafitte
Mélissa


Lalane
Clément


Le Gall
Cyrielle


Leshaf
Samia


Lipnitzki
Marie


Malejac
Cattleya


Marbot
Mélanie

Maruzzo
Estelle

Mathoulin
Anne-Laure

Miralles
Guillaume

Moingeon
Camille

Oudrhiri
Rita

Ozcan
Isabelle

Paly
Camille

Pees
Alexandra

Pellissier
Pierre

Prudent
Julie

Riesco
Caroline

Robert
Marion

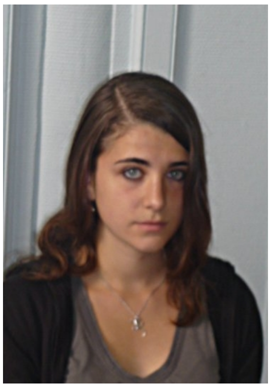

ROUSSELET
Sidney


SAILLY
Marie


SALIGNON
Thibault


SICCARDI
Olivia


SIMON
Sandra


SPER
Angélique


TCHOUMAKOV
Tania


TOURNIE
Éric


VERBRUGGHE
Caroline


YING PING
Mélody

Annexe B

Goûter de fin d'année

Toujours dans la catégorie photos, un petit témoignage du couronnement de notre année scolaire : le goûter de fin d'année (qui a curieusement attiré plus de gens que le « cours de maths » à 8 heures le lendemain (dans lequel il n'a, admettons-le, guère été question de maths). En tout cas, force est de constater qu'entre le premier et le dernier jour de l'année, je n'ai pas vraiment évolué en tant que photographe, les clichés sont à peu près aussi réussis que ceux du trombinoscope. Enfin, on reconnait quand même les élèves qui figurent sur ces quelques photos (je n'ai même pas pris tous les présents, d'ailleurs). Et Raphaël a été ravi d'avoir une classe entière (ou presque) de baby-sitters pour lui tout seul (il a fait une énorme sieste une fois revenu à la maison ...).

La canapé a accueilli ses premières occupantes qui, vu l'état dudit canapé, ne devraient pas s'en extraire de sitôt.

Du beau monde également sur l'autre canapé (qui, techniquement, devrait plutôt être considéré comme un lit, mais nous a été refilé sous l'intitulé mensonger « canapé », qu'il a gardé depuis).

Devant le bar, il n'y a que des garçons. Est-ce un signe ?

Un autre groupe d'élèves n'a pas trouvé de quoi s'asseoir, les places sont chères.

Raphaël, particulièrement bien entouré, ne sais plus où donner de la tête.

Le canapé commence à être franchement surchargé. Ce bilan de l'année également, et j'aurai beau faire tous les efforts possibles et imaginables, je ne lui ferai pas atteindre le millier de pages. Quoique, à la réflexion, si je fais une liste de toutes les horreurs vues dans vos copies au cours de l'année, ça pourrait très vite prendre beaucoup de place... Mais comme je n'ai pas gardé de preuves, autant s'arrêter là !