Exercices sur les ensembles et applications : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

14 octobre 2009

Exercice 1

On a $\overline{A} = \mathbb{N}\backslash\{1;3;5;7\}$ (non, pas la peine d'insister, on ne peut pas l'écrire plus simplement) ; $B\backslash A = \{2;4;6\}$; $A \cup B \cup C = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$; $\overline{C} \cap \overline{B} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 11\}$ et $A \cup (B \cap C) = \{1;3;5;6;7;9\}$.

Exercice 2

On a $A \cup B = [4;12] \cup [-5;5] = [-5;12]$; $A \cap C = \{4;5;6;7;8;9;10;11;12\}$;
$\mathbb{R}\backslash B = \mathbb{R}\backslash[-5;5] =]-\infty;-5[\cup]5;+\infty[$; $A\cap\overline{C} = [4;5[\cup]5;6[\cup]6;7[\cup]7;8[\cup]8;9[\cup]9;10[\cup]10;11[\cup]11;12]$;
$(A \cup B) \cap C = \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12\}$;
$A \cup (B \cap C) = [4;12] \cup \{0;1;2;3\}$ et $\overline{A} \cap (\overline{B} \cup C) =]-\infty;-5] \cup \{0;1;2;3\} \cup [12;+\infty[$.

Exercice 3

On a $C \subset R \subset A \subset Q$, mais aussi $C \subset L \subset P \subset T \subset Q$, et enfin $R \subset P$. Par contre, pas d'inclusion entre P ou T et A, ni entre L et R.

On a $A \cap L = C$, $A \cap P = R$ et $L \cap R = C$.

Exercice 4

Il faut montrer séparément chacune des deux équivalences. Dans un sens c'est simple : si $A = B$ alors $A \cup B = A \cup A = A$ et $A \cap B = A \cap A = A$, donc on a bien $A \cup B = A \cap B$. Dans l'autre sens, supposons que $A \cup B = A \cap B$ et montrons par double inclusion que $A = B$. Soit $x \in A$, on a a fortiori $x \in A \cup B$, donc en utilisant notre hypothèse $x \in A \cap B$, mais alors $x \in B$, donc $A \subset B$. La deuxième inclusion se démontre exactement de la même manière, on en conclut que $A = B$.

Exercice 5

Considérons un élément x appartenant à $(A \cup B \cup C)\backslash(A \cap B \cap C)$. Cela signifie que x appartient à au moins un des trois ensembles A, B et C (puisqu'il appartient à leur union), mais pas aux trois à la fois (puisqu'il n'appartient pas à l'intersection). Autrement dit, x appartient à exactement un ou deux ensembles parmi les trois. S'il appartient à un seul, par exemple A (les trois ensembles jouent un rôle symétrique), alors il appartient à $A\backslash B$, donc à l'ensemble de gauche. S'il appartient à deux des ensembles, par exemple A et B, alors il appartient à $B\backslash C$, et encore une fois à l'ensemble de gauche. Dans tous les cas, $x \in (A\backslash B) \cup (B\backslash C) \cup (C\backslash A)$.

Dans l'autre sens, si x appartient à l'union de gauche, il appartient à (au moins) l'un des trois ensembles $A\backslash B$, $B\backslash C$ et $C\backslash A$, donc à l'un des trois ensembles A, B et C. Ceci prouve que $x \in A \cup B \cup C$. mais le fait que x soit dans l'ensemble de gauche signifie aussi qu'il y a un des trois ensembles A, B et C auquel x n'appartient pas, donc $x \notin A \cap B \cap C$, ce qui prouve qu'il appartient à l'ensemble de droite. Les deux ensembles sont donc bien égaux.

Exercice 6

On constate d'abord que $(A \star A) = \overline{A \cap A} = \overline{A}$, puis en utilisant ce résultat $(A \star A) \star (B \star B) = \overline{A} \star \overline{B} = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}} = \overline{\overline{A}} \cup \overline{\overline{B}} = A \cup B$ (n utilisant les lois de Morgan pour l'avant-dernière inégalité. De même, $(A \star B) \star (A \star B) = (\overline{A \cap B}) \cap (\overline{A \cap B}) = \overline{(\overline{A \cap B}) \cap (\overline{A \cap B})} = \overline{\overline{A \cap B}} = A \cap B$. La conclusion de l'exercice c'est qu'on peut exprimer à l'aide d'une seule opération certes un peu étrange (l'opération $\star$) toutes les opérations usuelles (complémentaire, union et intersection).

Exercice 7

L'application $x \mapsto 2x$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (si $2x = 2x'$ alors $x = x'$, donc l'application est injective ; et si $y \in \mathbb{R}$, $\frac{y}{2}$ est un antécédent de y, donc elle est surjective), mais pas de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ car les entiers impairs n'ont alors pas d'antécédent. Par contre, elle également bijective de $\mathbb{Q}$ dans lui-même, les mêmes arguments s'appliquant que pour $\mathbb{R}$.

Exercice 8

- L'application f_1 est injective puisque $n + 5 = n' + 5 \Rightarrow n = n'$, mais pas surjective car 0 par exemple n'a pas d'antécédent par f_1.
- L'application f_2 est injective : en effet, $n^2 = n'2 \Rightarrow n = n'$ quand n et n' sont positifs. Par contre, elle n'est pas surjective, 2 par exemple n'ayant pas d'antécédent par f_2.
- L'application f_3 est un peu plus pénible à étudier que les autres mais elle est en fait bijective. Les entiers pairs sont envoyés sur les entiers impairs donc un entier pair ne peut pas avoir la même image qu'un entier impair. Comme la restriction de f aux entiers pairs, et celle aux entiers impairs, sont manifestement injectives, f_3 est injective. Elle est également surjective car si p est pair, $p + 1$ est un antécédent de p, et si p est impair, c'est $p - 1$ qui marche.
- L'application f_4 n'est pas surjective car 1 et 2 ont par exemple la même image. Par contre, elle est surjective, $3p$ étant toujours un antécédent de p (il n'est pas très compliqué de constater que chaque entier a en fait trois antécédents par f_4).
- Cette dernière application n'est pas injective, 3 et 17 ayant par exemple la même image. Par contre, elle est surjective car $p + 10$ est toujours un antécédent de p.

Exercice 9

Si f est la fonction inverse, $f([2;4]) = \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$; $f(]0;2]) = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ et $f([-1;5]) =]-\infty;-1] \cup \left[\frac{1}{5}; +\infty\right[$. Les images réciproques sont exactement les mêmes que les images directes (c'est du au fait que la fonction inverse est sa propre réciproque).

La fonction g est définie sur $\mathbb{R} \backslash \{-2; 2\}$, et a pour dérivée $f'(x) = \frac{4x(x^2 - 4) - 2x(2x^2 + 1)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-18x}{(x^2 - 4)^2}$. On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f(x)$	2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{1}{4}$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	2

Je vous épargne le détail du calcul des limites, qui ne sont pas franchement insurmontables. À partir du tableau, et à l'aide de quelques calculs d'images, on peut en tout cas lire $g([-1;1]) =$

$\left[-1;-\frac{1}{4}\right]$ (après avoir constaté que $g(-1)=g(1)=-1$) ; $g([-6;-3[)=\left[\frac{73}{32};\frac{19}{5}\right[$; $g^{-1}(]-\infty;1])=\,]-2;2[$ et $g^{-1}([0;1])=\emptyset$.

Exercice 10

Il est plus simple de démontrer la contraposée : supposons qu'une fonction f n'est pas injective. Il existe alors deux réels distincts x_1 et x_2 tels que $f(x_1)=f(x_2)$. On peut supposer que $x_1<x_2$ par exemple, ceci contredit alors le fait que f soit strictement croissante.

La fonction $f : x\mapsto x+e^x$ étant strictement croissante, elle est d'après ce qui précède injective. En particulier, 1 ne peut avoir plus d'un antécédent par f, donc l'équation $x+e^x=1$ a au plus une solution. Or, on connait une solution de cette équation, $x=0$, qui est donc la seule.

Exercice 11

1. Les antécédents de y sont les réels x vérifiant $\frac{2x}{1+x^2}=y$, soit $2x=y+yx^2$ ou encore $yx^2-2x-y=0$. Si $y=0$, on obtient comme seul antécédent $x=0$. Sinon, on a une équation du second degré, dont le discriminant vaut $4-4y^2=4(1-y^2)$. Si $y<-1$ ou $y>1$, le discriminant est négatif, et y n'a pas d'antécédent. Si $y=-1$, il y a une seule solution (donc un antécédent) qui est $x=-1$, et si $y=1$, on a aussi un seul antécédent qui est $x=1$. Enfin, si $-1<y<1$ (avec $y\neq 0$), on a deux antécédents qui valent $\frac{2\pm\sqrt{4(1-y^2}}{2y}=\frac{1\pm\sqrt{1-y^2}}{y}$.
2. L'application f n'est ni injective ni surjective (et donc pas bijective) puisque certains réels n'ont pas d'antécédent et que d'autres en ont plusieurs.
3. On a en fait $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)\in[-1;1]$. En effet, $\forall x\in\mathbb{R}$, $(x+1)^2\geq 0$, donc $x^2+2x+1\geq 0$, ou encore $-2x\leq x^2+1$. Il suffit de diviser par x^2+1, qui est toujours positif, pour obtenir $f(x)\geq -1$. De même, $(x-1)^2=x^2-2x+1\geq 0$, donc $2x\leq x^2+1$, ce qui donne $f(x)\leq 1$. De plus, sur $[-1;1]$, la fonction f est strictement croissante (sa dérivée vaut $\frac{2+2x^2-4x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$, qui est toujours positive sur $[-1;1]$). Elle est donc injective, et prend toutes les valeurs entre -1 et 1, puisque $f(-1)=-1$ et $f(1)=1$. On en conclut que f réalise une bijection de $[-1;1]$ sur lui-même.

Exercice 12

Pas vraiment d'autre moyen que d'étudier les variations de f : $f'(x)=\frac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}=\frac{e^{2x}+e^{-2x}+2e^x-e^{2x}-e^{-2x}+2e^x}{(e^x+e^{-x})^2}=\frac{4e^x}{(e^x+e^{-x})^2}$. Une exponentielle étant toujours positive, cette dérivée est toujours positive, et la fonction f strictement croissante. Elle est donc injective. Pour savoir si elle est surjective, il suffit de calculer ses limites à l'infini. Comme $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^x(1-e^{-2x})}{e^x(1+e^{-2x})}=\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$. Les deux termes tendent vers 1 en $+\infty$, donc $\lim_{x\to+\infty}f(x)=1$. De même, en factorisant par e^{-x}, on obtient $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-1$. La fonction f n'est donc pas surjective sur $\mathbb{R}$. Par contre, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1;1[$.

Exercice 13

Ca se fait en une ligne si on pense à appliquer le bon résultat du cours : $f \circ (f \circ f) = (f \circ f) \circ f = id_E$, donc les applications f et $f \circ f$ sont réciproques l'une de l'autre. Autrement dit, f est bijective, de réciproque $f^{-1} = f \circ f$.

Exercice 14

Bon, si le prof a mis quatre étoiles, c'est que l'exo doit être super dur, non ? En fait, la grosse difficulté, c'est qu'il faut passer par une récurrence forte pour s'en sortir. Notons donc P_n : $\forall k \leq n$, $f(k) = k$ (autrement dit, la restriction de f aux n premiers entiers est l'identité). Pour $n = 0$, la propriété nous dit simplement que $f(0) = 0$, ce qui est vrai puisque par hypothèse $f(0) \leq 0$, et $f(0) \in \mathbb{N}$. Supposons donc P_n vérifiée, et cherchons à prouver P_{n+1}. On sait déjà par hypothèse de récurrence que $f(k) = k$ pour tous les entiers kjusqu'à n inclus. Il ne reste donc en fait qu'à prouver que $f(n+1) = n+1$. L'énoncé nous indique que $f(n+1) = n+1$, et par ailleurs, f étant injective, $f(n+1)$ doit être différent de toutes les valeurs prises par f sur les entiers compris entre 0 et n. Or, ces valeurs sont par hypothèse de récurrence tous les entiers compris entre 0 et n. Il ne reste donc plus qu'une possibilité pour $f(n+1)$: être égal à $n+1$. Ceci prouve la propriété P_{n+1} et achève la récurrence. La propriété P_n est donc vérifiée quel que soit l'entier n, ce qui prouve entre autres que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) = n$, c'est-à-dire que $f = id_{\mathbb{N}}$.