TSSI — 2008-10-24 — Exercices (suites et exponentielles) — correction

Exercice 1

a. $u_2 = 2$, $u_3 = 7$, $u_4 = 20$, $u_5 = 61$

b. La relation (R) s'écrit alors $a^{n+2} = 2a^{n+1} + 3a^n$, soit $a^n(a^2 - 2a - 3) = 0$, ou encore $a^n(a-3)(a+1) = 0$, ce qui donne $a = 0$ ou $a = 3$ ou $a = -1$.

c. $v_{n+2} + w_{n+2} = (2v_{n+1} + 3v_n) + (2w_{n+1} + 3w_n) = 2(v_{n+1} + w_{n+1}) + 3(v_n + w_n)$

$kv_{n+2} = k(2v_{n+1} + 3v_n) = 2(kv_{n+1}) + 3(kv_n)$

d. Toutes les suites de la forme $A3^n + B(-1)^n$ vérifient (R).

e. On essaie la relation précédente pour u et on cherche A et B à partir de u_0 et u_1 :

$$\left\{\begin{array}{l} A + B = 0 \\ 3A - B = 1 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} A = \frac{1}{4} \\ B = -\frac{1}{4} \end{array}\right.$$

Donc $u_n = \dfrac{3^n - (-1)^n}{4}$.

Exercice 2

a. La situation « 0 divisé par 0 » est précisément une situation de forme indéterminée.

b. $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad g'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}$

c. $L = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)(x-a)}{g(x)(x-a)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{x-a} \dfrac{x-a}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{\frac{f(x)}{x-a}}{\frac{g(x)}{x-a}}$

d. Par hypothèse, et d'après la définition de la dérivée, $\dfrac{f(x)}{x-a}$ et $\dfrac{g(x)}{x-a}$ ont toutes les deux une limites en a et la seconde limite est non nulle. Donc, par passage au quotient :

$$\lim_{x \to a} \frac{\frac{f(x)}{x-a}}{\frac{g(x)}{x-a}} = \frac{\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{x-a}}{\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{x-a}}$$

Soit : $L = \dfrac{f'(a)}{g'(a)}$

e. $e^0 - 1 = 0$; $\tan 0 = 0$; la dérivée de $x \mapsto e^x - 1$ est $x \mapsto e^x$; celle de $\tan x$ est $x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2 x}$, qui est non nulle en 0, on est donc dans la situation précédente :

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\tan x} = \frac{e^0}{\frac{1}{\cos^2 0}} = 1$$

$\cos 0 - 1 = 0$; $\sin 0 = 0$; la dérivée du numérateur est $x \mapsto -\sin x$, celle du dénominateur est $x \mapsto \cos x$ qui est non nulle en 0, donc :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x} = \frac{-\sin 0}{\cos 0} = 0$$

Exercice 3

a. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} -\dfrac{1}{x} = -\infty$; $\lim\limits_{y \to -\infty} \exp(y) = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

b. $f'(x) = \dfrac{1}{x^2} \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right) \; f''(x) = \dfrac{1 - 2x}{x^4} \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right)$

c. Montrons par récurrence que $f^{(n)} = Qf$ avec Q fonction rationnelle.

Pour $n = 0$, $f^{(0)} = f = 1f$, et 1 est bien une fonction rationnelle.

Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $f^{(n)} = Qf$ avec Q rationnelle. Alors $f^{(n+1)} = (f^n)' = Q'f + Qf'$. Or on a vu que $f' = Q_1 f$ avec $Q_1(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Donc $f^{(n+1)} = (Q' + QQ_1)f$. $Q' + QQ_1$ est bien une fonction rationnelle.

Donc par récurrence, pour tout n, $f^{(n)}$ s'écrit Qf avec Q fonction rationnelle.

d. C'est un cas particulier de la question e, pour aider à comprendre comment ça marche.

e. Montrons par récurrence que $f^{(n)}(0)$ existe et vaut 0 pour tout n.

Pour $n = 0$, $f^{(0)}(0) = f(0) = 0$ par hypothèse.

Soit $n \geqslant 0$, supposons que $f^{(n)}(0) = 0$, et montrons que $f^{(n+1)}(0) = 0$. Exceptionnellement (pour un exercice de terminale S), le calcul de la récurrence va être difficile.

$f^{(n+1)}(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f^{(n)}(x)}{x}$

On a démontré plus haut que $f^{(n)} = Qf$ avec Q rationnelle. Soient R définie par $R(x) = \dfrac{Q(x)}{x}$ et S définie par $S(x) = R\left(-\frac{1}{x}\right)$. R et S sont encore des fonctions rationnelles. Donc, d'après les croissances comparées, $\lim\limits_{y\to-\infty} S(y)\exp(y) = 0$.

Or $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} -\dfrac{1}{x} = -\infty$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} S\left(-\frac{1}{x}\right)\exp\left(-\frac{1}{x}\right) = 0$.

Or il se trouve que $S\left(-\frac{1}{x}\right) = R(x) = \dfrac{Q(x)}{x}$, donc : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \dfrac{Q(x)\exp\left(-\frac{1}{x}\right)}{x} = 0$, ce qui est bien ce qu'on cherchait.

Donc par récurrence, $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout n.

f. *Note : ici, c'est un exercice totalement différent qui aurait dû commencer. D'ailleurs, la question f n'est pas une question.*

g. f est définie sur $\mathbb{R}$ entier, $(-x)^2 = x^2$, donc f est paire.

$x \mapsto -\dfrac{x^2}{2}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, exp est strictement croissante, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} -\dfrac{x^2}{2} = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.

h. $f''(x) = (x^2-1)\exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$, donc f'' est négative entre -1 et 1 et positive à l'extérieur.

i. $y = e^{-1/2}(2-x)$

j. Cf. calculatrice.

Exercice 4

a. $e^{f(x)} = x$ par définition.

b. $\exp(f(\exp x)) = \exp x$ en remplaçant x par $\exp x$ dans ce qui précède.

Comme $\exp A = \exp B$ équivant à $A = B$, on a donc $f(e^x) = x$.

c. $f(1) = f(e^0) = 0$

c. Comme exp est strictement croissante, $f(x) < f(y)$ est équivalent à $\exp f(x)) < \exp f(y)$, ce qui équivaut à $x < y$. Donc f est strictement croissante.

d. Pour M arbitrairement grand, cherchons comment $f(x)$ peut être plus grand que M. Si $x > e^M$ alors $f(x) > f(e^M) = M$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

De même, pour M arbitrairement grand dans les négatifs, si $0 < x < e^M$, alors $f(x) < f(e^M) = M$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

e. $g' = f' \times \exp' \circ f = f' \times \exp \circ f$

f. Comme $g(x) = x$, $g'(x) = 1$, donc $f'(x)\exp f(x) = 1$. Or $\exp f(x) = x$, donc $f'(x)x = 1$, donc $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Exercice 5

$(1+\sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$

$(1+\sqrt{2})^3 = 7 + 5\sqrt{2}$

$(1+\sqrt{2})^4 = 17 + 12\sqrt{2}$

Montrons par récurrence que pour tout n $(1+\sqrt{2})^n$ peut s'écrire comme $u_n + v_n\sqrt{2}$ avec u_n et v_n entiers.

Pour $n = 0$, $(1+\sqrt{2})^0 = 1 = 1 + 0\sqrt{2}$, donc la relation est vraie avec $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que $(1+\sqrt{2})^n = u_n + v_n\sqrt{2}$ avec u_n et v_n entiers. Montrons alors que

$(1+\sqrt{2})^{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1}\sqrt{2}$ avec u_{n+1} et v_{n+1} entiers.
$(1+\sqrt{2})^{n+1} = (1+\sqrt{2})^n \times (1+\sqrt{2}) = (u_n + v_n\sqrt{2})(1+\sqrt{2}) = (u_n + 2v_n) + (u_n + v_n)\sqrt{2}$
On a donc $u_{n+1} = u_n + 2v_n$ et $v_{n+1} = u_n + v_n$ qui sont bien des entiers.
Donc par récurrence, $(1+\sqrt{2})^n = u_n + v_n\sqrt{2}$ avec u_n et v_n entiers.

Exercice 10 p. 161 Commençons par simplifier $(n+1)!$:
$(n+1)! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n \times (n+1) = (1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n) \times (n+1)$
Donc : $(n+1)! = n! \times (n+1)$
Montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, $n! \geqslant 2^{n-1}$.
Pour $n = 1$, on a $1! = 1$ et $2^{1-1} = 1$, donc la propriété est vraie.
Soit $n \geqslant 1$, supposons que $n! \geqslant 2^{n-1}$, et montrons alors que $(n+1)! \geqslant 2^{n+1-1}$.
$n \geqslant 1$, donc $n+1 \geqslant 2$, alors $n! \times (n+1) \geqslant n! \times 2$.
On a supposé que $n! \geqslant 2^{n-1}$, alors $n! \times 2 \geqslant 2^{n-1} \times 2$.
En enchaînant les deux inégalités précédentes, on obtient : $n! \times (n+1) \geqslant 2^{n-1} \times 2$
Soit : $(n+1)! \geqslant 2^{n+1-1}$, ce qui est précisément ce qu'on voulait démontrer.
Donc par récurrence, pour tout $n \geqslant 1$, $n! \geqslant 2^{n-1}$.