

Rappels sur les anneaux

Exercice 1

1. Soit A un anneau (commutatif unitaire) et J un idéal de A . Montrer que les idéaux de A/J sont en bijection avec les idéaux de A contenant J .
2. Quels sont les idéaux de l'anneau $\mathbb{Z}/3^37^2\mathbb{Z}$? Quelles sont les relations d'inclusions entre eux? Lesquels sont premiers?

Exercice 2

Soit A un anneau commutatif intègre. Soit I l'idéal de $A[X, Y]$ engendré par $X + Y$.

1. Montrer que $A[X, Y]/I$ est isomorphe à l'anneau $A[X]$.
2. L'idéal I est-il premier? Est-il maximal?

Exercice 3

Soit A un anneau commutatif. On dit que $x \in A$ est nilpotent s'il existe $n > 0$ tel que $x^n = 0$.

1. Montrer que l'ensemble N des éléments nilpotents de A est un idéal de A .
2. Montrer que le quotient A/N n'a pas d'élément nilpotent.
3. Trouver un exemple d'anneau A avec deux éléments x et y nilpotents tels que $x + y$ n'est pas nilpotent.
4. Montrer que A n'a pas d'élément nilpotent si et seulement si tout élément inversible de $A[X]$ est constant.

Entiers algébriques

Exercice 4

1. Montrer que le polynôme $2X^3 - 2X + 5$ n'a pas de racine rationnelle.

2. Soit ζ une solution complexe de l'équation $2X^3 - 2X + 5$. Est-ce un entier algébrique ? Déterminer un entier naturel c tel que $c\zeta$ soit un entier algébrique.
3. Les solutions complexes de l'équation

$$X^2 + \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) X - 1$$

sont-elles des nombres algébriques ? sont-elles des entiers algébriques ? Déterminer pour elles, un polynôme annulateur sur \mathbb{Z} .

4. Déterminer un polynôme annulateur sur \mathbb{Z} de $\sqrt{2} + \sqrt[3]{5}$.

Exercice 5

1. Déterminer le degré sur \mathbb{Q} de l'extension $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$.
2. Le nombre réel $\sqrt{5}$ est-il dans $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{5})$? et dans $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$?
3. Le nombre complexe $\theta = j\sqrt[3]{5}$ est-il dans l'image de tous les plongements complexes de $\mathbb{Q}(\theta)$?
4. Existe-t-il un plongement de $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$ dans \mathbb{C} qui envoie $\sqrt[3]{5}$ sur 5 ?

Exercice 6

1. Soit K un corps de nombres. Soit a un élément primitif de K . Rappeler le lien entre le polynôme minimal de a sur \mathbb{Q} et la trace ou la norme de a .
2. Calculer la norme de $a + 1$ et celle de $a^2 + a$ dans $\mathbb{Q}[X]/(X^3 - X - 2)$ où a est la classe de X .

Exercice 7

1. Montrer qu'après un changement de variable affine tout polynôme P unitaire de $\mathbb{Q}[X]$ de degré 3 s'écrit sous la forme $X^3 + pX + q$. Montrer que P est alors irréductible si et seulement si $X^3 + pX + q$ l'est.
2. Montrer que si a et b sont deux entiers algébriques alors $\text{Tr}(ab)$ est un entier.
3. Soit $X^3 + pX + q$ un polynôme irréductible de $\mathbb{Q}[X]$. Soient $K = \mathbb{Q}[X]/(X^3 + pX + q)$ et a un élément de $\sigma(K)$, où σ est un plongement complexe de K . Montrer que si a est un entier algébrique alors $\text{Tr}(a)$, $\text{Tr}(a^2)$ et $\text{Tr}(a^3)$ sont des entiers relatifs.

Exercice 8

Soient p un nombre premier et $P \in \mathbb{Z}[X]$. On note \bar{P} la réduction modulo p de P , c'est à dire l'élément de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$ dont les coefficients sont les coefficients de P réduits modulo p .

1. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme unitaire. Montrer que si le polynôme \bar{P} est irréductible dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$, alors P est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.
2. Le polynôme $X^3 - X - 1$ est-il irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$?
3. Montrer que $X^2 + 4$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ mais réductible dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 9

1. Énoncer le critère d'Eisenstein.
2. L'équation $X^5 + 6X^4 - 12$ a-t-elle des solutions dans \mathbb{Z} , dans \mathbb{Q} ?

Anneaux d'entiers

Exercice 10

On considère l'anneau $A = \mathbb{Z}[i]$. Montrer que $(1 - i)$ est irréductible dans A . Vérifier que l'on a dans A

$$5 = (2 + i)(2 - i) = (1 + 2i)(1 - 2i),$$

et que ceci ne contredit pas la factorialité de A .

Exercice 11

Soit $N \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$, sans facteur carré et congru à 1 modulo 4.

1. Montrer que l'anneau $\mathbb{Z}[(1 + \sqrt{N})/2]$ est le \mathbb{Z} -module libre de base $(1, (1 + \sqrt{N})/2)$
2. Montrer que si a et b sont deux entiers de même parité $\frac{a+b\sqrt{N}}{2}$ est dans $\mathbb{Z}[(1 + \sqrt{N})/2]$.

Exercice 12

Considérons l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{13}]$. À tout élément $x = a + b\sqrt{13}$ de $\mathbb{Z}[\sqrt{13}]$ on associe son conjugué $\bar{x} = a - b\sqrt{13}$.

1. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{13}]$ on a

$$\overline{x + y} = \bar{x} + \bar{y} \quad \text{et} \quad \overline{xy} = \bar{x}\bar{y}.$$

2. En considérant l'application $N: \mathbb{Z}[\sqrt{13}] \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto x\bar{x}$, caractériser le groupe U des éléments inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{13}]$. Vérifier que $\pm 1, \pm 18 \pm 5\sqrt{13}$ sont dans U .

3. Montrer que les éléments $2, 3 + \sqrt{13}, -3 + \sqrt{13}$ sont irréductibles dans $\mathbb{Z}[\sqrt{13}]$.
4. Montrer que l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{13}]$ n'est pas factoriel.

Exercice 13

1. Montrer que les unités de l'anneau des entiers d'un corps de nombres sont de norme 1 ou -1 .
2. Soit ζ un entier algébrique, unité de l'anneau des entiers d'un corps de nombres, de polynôme minimal sur $\mathbb{Z} : P(X) = a_d X^d + a_{d-1} X^{d-1} + \dots + a_1 X + a_0$. Que peut-on dire de a_d et de a_0 ? Déterminer en fonction de ζ et des a_i l'inverse de ζ .
3. Montrer qu'un entier de norme 1 ou -1 est une unité de l'anneau des entiers.