UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Théorie des nombres

Interrogation n°2

Durée : 1h
Les notes de cours et de TD sont autorisées.

Exercice 1

Le but de cet exercice est de résoudre l'équation diophantienne $x^3 = y^2 + 2$.

1. L'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ est-il factoriel ?
2. Quels sont les inversibles de cet anneau ?
3. On suppose que $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ vérifie $x^3 = y^2 + 2$. Montrer que y ne peut pas être pair.
4. Soit $t \in \mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ un facteur commun de $y + \sqrt{-2}$ et $y - \sqrt{-2}$. Montrer que t divise $2y$ et $2\sqrt{-2}$.
5. En déduire que $N_{\mathbb{Q}(\sqrt{-2})/\mathbb{Q}}(t)$ divise $4y^2$ et 8, puis que $N_{\mathbb{Q}(\sqrt{-2})/\mathbb{Q}}(t) \in \{1, 2, 4\}$.
6. En déduire que $t \in \{\pm 1, \pm\sqrt{-2}, \pm 2\}$.
7. Montrer que $y + \sqrt{-2}$ et $y - \sqrt{-2}$ sont premiers entre eux.
8. En déduire que $y + \sqrt{-2}$ est un cube dans $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$.
9. Si $y + \sqrt{-2} = (a + b\sqrt{-2})^3$, pour $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, montrer que $(3a^2 - 2b^2)b = 1$.
10. Résoudre l'équation diophantienne $(3a^2 - 2b^2)b = 1$.
11. En déduire l'ensemble des $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $x^3 = y^2 + 2$.