

Durée : 1h

Les notes de cours et de TD sont autorisées.

### Exercice 1

---

Calculer le symbole de Jacobi  $\left(\frac{53}{89}\right)$ .

### Exercice 2

---

Posons  $F_n = 2^{2^n} + 1$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Montrer que  $F_n \equiv 2 \pmod{5}$  si  $n \geq 2$ .
2. Calculer les symboles de Jacobi  $\left(\frac{F_n}{5}\right)$  et  $\left(\frac{5}{F_n}\right)$ .
3. Montrer que si  $F_n$  est premier et  $n \neq 1$ , alors  $5^{2^{2^n-1}} \equiv -1 \pmod{F_n}$ .
4. On suppose que  $5^{2^{2^n-1}} \equiv -1 \pmod{F_n}$ . Soit  $p$  un diviseur premier de  $F_n$ , et soit  $e$  l'ordre de 5 dans  $\mathbb{F}_p^\times$ . Montrer que  $e$  divise  $2^{2^n}$  mais pas  $2^{2^n-1}$ .
5. Sous les mêmes hypothèses, en déduire que  $e = 2^{2^n}$ .
6. Sous les mêmes hypothèses, montrer que  $e$  divise  $p - 1$ , puis que  $p \geq F_n$ .
7. Montrer que  $F_n$  est premier si et seulement si  $n = 1$  ou  $5^{2^{2^n-1}} \equiv -1 \pmod{F_n}$ .