

Durée : 1h

Les notes de cours et de TD sont autorisées.

Exercice 1

Calculer le symbole de Jacobi $\left(\frac{53}{89}\right)$.

Exercice 2

Posons $F_n = 2^{2^n} + 1$, pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $F_n \equiv 2 \pmod{5}$ si $n \geq 2$.
2. Calculer les symboles de Jacobi $\left(\frac{F_n}{5}\right)$ et $\left(\frac{5}{F_n}\right)$.
3. Montrer que si F_n est premier et $n \neq 1$, alors $5^{2^{2^n-1}} \equiv -1 \pmod{F_n}$.
4. On suppose que $5^{2^{2^n-1}} \equiv -1 \pmod{F_n}$. Soit p un diviseur premier de F_n , et soit e l'ordre de 5 dans \mathbb{F}_p^\times . Montrer que e divise 2^{2^n} mais pas 2^{2^n-1} .
5. Sous les mêmes hypothèses, en déduire que $e = 2^{2^n}$.
6. Sous les mêmes hypothèses, montrer que e divise $p - 1$, puis que $p \geq F_n$.
7. Montrer que F_n est premier si et seulement si $n = 1$ ou $5^{2^{2^n-1}} \equiv -1 \pmod{F_n}$.