UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Théorie des nombres

Examen — 2e session

Durée : 2h
Les notes de cours et de TD sont autorisées. Les calculatrices sont autorisées. Les téléphones sont interdits.

Exercice 1

Soit $z \in \mathbb{C}^\times$ un entier algébrique. Soit f son polynôme minimal (sur $\mathbb{Q}$). Montrer que $\frac{1}{z}$ est un entier algébrique si et seulement si $f(0) = \pm 1$. Montrer que c'est aussi équivalent à $\frac{1}{z} \in \mathbb{Z}[z]$.

Exercice 2

Soit K un corps fini. Montrer que tout élément de K peut s'écrire comme la somme de deux carrés d'éléments de K.

Exercice 3

Calculer le symbole de Jacobi $\left(\frac{6547}{8731}\right)$.

Exercice 4

Soit $K = \mathbb{Q}(2^{1/3})$. Notons $\mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers de K.

1. Calculer l'image de $x + y2^{1/3} + z2^{2/3} \in K$ par l'application trace $\mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}$ et par l'application norme $\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}$.
2. Calculer le discriminant de la $\mathbb{Q}$-base $\left(1, 2^{1/3}, 2^{2/3}\right)$ de K.
3. En déduire que $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}\left[2^{1/3}\right]$.
4. Montrer que l'équation diophantienne $x^3 + 2y^3 + 4z^3 - 6xyz = 1$ a une infinité de solutions $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$.