UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Théorie des nombres

Corrigé de l'interrogation n°3

Exercice 1

Question 1

On considère le corps de nombres $K = \mathbb{Q}(3^{1/3})$.
Montrer que 1, $3^{1/3}$, $3^{2/3}$ sont des éléments de l'anneau $\mathcal{O}_K$ des entiers de K.

Par définition de $K = \mathbb{Q}(3^{1/3})$, 1, $3^{1/3}$, $3^{2/3}$ sont des éléments de K.
Comme $1 \in \mathbb{Z}$, on a $1 \in \mathcal{O}_K$.
Comme $3^{1/3}$ est racine du polynôme unitaire $X^3 - 3 \in \mathbb{Z}[X]$, on a $3^{1/3} \in \mathcal{O}_K$.
Comme $3^{2/3}$ est racine du polynôme unitaire $X^3 - 9 \in \mathbb{Z}[X]$, on a $3^{2/3} \in \mathcal{O}_K$.

Question 2

Calculer l'image de ces trois éléments par la trace $\mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}$ et la norme $\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}$.

Comme $1 \in \mathbb{Q}$, on a $\mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(1) = [K : \mathbb{Q}] = 3$ et $\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(1) = 1^{[K:\mathbb{Q}]} = 1$.

Le polynôme $X^3 - 3$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ (par exemple parce que c'est un polynôme d'Eisenstein), il a $3^{1/3}$ pour racine, et son degré est égal à $[K : \mathbb{Q}]$, donc c'est le polynôme caractéristique de $3^{1/3}$, donc $\mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}\left(3^{1/3}\right) = 0$ et $\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}\left(3^{1/3}\right) = 3$.

Le polynôme $X^3 - 9$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ (par exemple parce qu'il est de degré 3 et n'a pas de racine dans $\mathbb{Q}$ puisque $\sqrt[3]{9} \notin \mathbb{Q}$), il a $3^{2/3}$ pour racine, et son degré est égal à $[K : \mathbb{Q}]$, donc c'est le polynôme caractéristique de $3^{2/3}$, donc $\mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}\left(3^{2/3}\right) = 0$ et $\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}\left(3^{2/3}\right) = 9$.

Question 3

Calculer le discriminant de la base $(1, 3^{1/3}, 3^{2/3})$ de K sur $\mathbb{Q}$.

On a :

$$\begin{aligned}
\operatorname{disc}\left(1, 3^{1/3}, 3^{2/3}\right) &= \begin{vmatrix} \operatorname{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(1) & \operatorname{Tr}_{K/\mathbb{Q}}\left(3^{1/3}\right) & \operatorname{Tr}_{K/\mathbb{Q}}\left(3^{2/3}\right) \\ \operatorname{Tr}_{K/\mathbb{Q}}\left(3^{1/3}\right) & \operatorname{Tr}_{K/\mathbb{Q}}\left(3^{2/3}\right) & \operatorname{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(3) \\ \operatorname{Tr}_{K/\mathbb{Q}}\left(3^{2/3}\right) & \operatorname{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(3) & \operatorname{Tr}_{K/\mathbb{Q}}\left(3^{4/3}\right) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & 9 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{d'après la question précédente et la linéarité de la trace} \\
&= -3^5 \\
&= -243.
\end{aligned}$$

Question 4

Montrer que si $\frac{1}{3}(a + b3^{1/3} + c3^{2/3}) \in \mathcal{O}_K$, avec $a, b, c \in \{0, 1, 2\}$, alors $a = 0$. (On pourra considérer la trace du carré de cet élément de K).

On a :

$$\left(\frac{1}{3}(a + b3^{1/3} + c3^{2/3})\right)^2 = \frac{1}{9}\left(a^2 + b^2 3^{2/3} + 3c^2 3^{1/3} + 2ab3^{1/3} + 2ac3^{2/3} + 6bc\right),$$

donc, d'après la question 2,

$$\operatorname{Tr}_{K/\mathbb{Q}}\left(\left(\frac{1}{3}(a + b3^{1/3} + c3^{2/3})\right)^2\right) = \frac{1}{3}(a^2 + 6bc) = \frac{a^2}{3} + 2bc.$$

Si $\frac{1}{3}(a + b3^{1/3} + c3^{2/3}) \in \mathcal{O}_K$, on a alors $\frac{a^2}{3} + 2bc \in \mathbb{Z}$ (car c'est la trace d'un entier) donc $\frac{a^2}{3} \in \mathbb{Z}$, donc $3 \mid a^2$, donc $3 \mid a$. Comme $a \in \{0, 1, 2\}$, on a donc $a = 0$.

Question 5

Sous les mêmes hypothèses, montrer que l'on a aussi $b = c = 0$. (On pourra considérer sa norme).

On a :

$$\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}\left(\frac{1}{3}(a + b3^{1/3} + c3^{2/3})\right) = 3^{-3}\begin{vmatrix} a & 3c & 3b \\ b & a & 3c \\ c & b & a \end{vmatrix}$$

en écrivant la matrice de la multiplication par $\frac{1}{3}(a+b3^{1/3}+c3^{2/3})$ dans la base $\left(1, 3^{1/3}, 3^{2/3}\right)$

$$= \frac{1}{27}\left(a^3 + 3b^3 + 9c^3 - 9abc\right).$$

Comme $a = 0$ d'après la question précédente, on trouve

$$\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}\left(\frac{1}{3}(a + b3^{1/3} + c3^{2/3})\right) = \frac{1}{9}\left(b^3 + 3c^3\right).$$

Comme $\frac{1}{3}(a + b3^{1/3} + c3^{2/3}) \in \mathcal{O}_K$, on en déduit $\frac{1}{9}\left(b^3 + 3c^3\right) \in \mathbb{Z}$, donc $b^3 + 3c^3 \equiv 0 \pmod 9$.

On a en particulier $b^3 \equiv 0 \pmod 3$, donc $3 \mid b$, or $b \in \{0, 1, 2\}$ donc $b = 0$.

On a donc $c^3 \equiv 0 \pmod 3$, donc $3 \mid c$, or $c \in \{0, 1, 2\}$ donc $c = 0$.

Question 6

En déduire une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{O}_K$.

Si $\left(1, 3^{1/3}, 3^{2/3}\right)$ n'était pas une base de $\mathcal{O}_K$, il existerait un nombre premier p tel que $p^2 \mid \mathrm{disc}\left(1, 3^{1/3}, 3^{2/3}\right)$ et des entiers $a, b, c \in \{0, \ldots, p-1\}$, non tous nuls, tels que $\frac{1}{p}\left(a + b3^{1/3} + c3^{2/3}\right) \in \mathcal{O}_K$. Or, d'après la question 3, on a $\mathrm{disc}\left(1, 3^{1/3}, 3^{2/3}\right) = -3^5$, donc on aurait $p = 3$, et les questions 4 et 5 montrent que $a = b = c = 0$, ce qui est une contradiction. Donc $\left(1, 3^{1/3}, 3^{2/3}\right)$ est une base du $\mathbb{Z}$-module libre $\mathcal{O}_K$.

Question 7

Montrer que $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}\left[3^{1/3}\right]$.

Comme $1, 3^{1/3}, 3^{2/3} \in \mathbb{Z}\left[3^{1/3}\right]$, le $\mathbb{Z}$-module libre qu'ils engendrent est inclus dans la $\mathbb{Z}$-algèbre $\mathbb{Z}\left[3^{1/3}\right]$, donc $\mathcal{O}_K \subseteq \mathbb{Z}\left[3^{1/3}\right]$ d'après la question précédente.

D'autre part, $3^{1/3} \in \mathcal{O}_K$ (d'après la question 1), et $\mathcal{O}_K$ est une $\mathbb{Z}$-algèbre, donc $\mathbb{Z}\left[3^{1/3}\right] \subseteq \mathcal{O}_K$.

On a donc $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}\left[3^{1/3}\right]$.