Exercices : Exponentielle et logarithme

EXERCICE 1

Partie A : Étude d'une fonction

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $I = [0\ ;\ 120]$ par $f(t) = 10^5\ e^{-0{,}05t}$.

1. a) Vérifier que $f'(t) = -5.10^3\ e^{-0{,}05t}$.

b) Etudier le signe de $f'(t)$.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f dans lequel seront notées les valeurs exactes de $f(0)$ et de $f(120)$.

2. Reproduire et compléter le tableau des valeurs suivants (*les résultats seront donnés à la dizaine près*) :

t	0	15	30	45	60	75	90	120
$f(t)$		47 240	22 310		4 980			250

3. Le plan est muni d'un repère orthogonal avec pour unités :
- 1 cm pour 10 unités sur l'axe des abscisses ;
- 2 cm pour 10^4 unités sur l'axe des ordonnées.

Tracer soigneusement sur la feuille de papier millimétré fournie avec le sujet la courbe représentative de la fonction f dans ce repère.

Partie B : Application

La destruction de cellules bactériennes par la chaleur peut-être mise en évidence en chauffant à une température donnée, pendant des durées variables, une suspension de telles cellules et en dénombrant les survivants.
On admet que $f(t)$ est une approximation convenable du nombre de survivants à l'instant t (t exprimé en minutes).

1. a) Quel est le nombre de bactéries à l'instant initial ?

b) Quel est le nombre de survivants au bout de 2 heures de chauffage ?

c) Peut-on dire qu'au bout d'une heure le nombre de bactéries a été divisé par 20 ?

2. a) Déterminer graphiquement, en laissant apparentes les constructions utiles, le temps nécessaire pour que le nombre de survivants soit égal à 10^4.

b) Retrouver par le calcul la réponse à la question précédente (**2.** a). (*Le résultat sera arrondi à l'unité près*).

EXERCICE 2

Partie A :

Cette partie concerne l'étude et la représentation graphique de la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0; \frac{5}{2}\right]$ par : $f(x) = \ln(4x+1) - x + 1$.

1. Calculer $f'(x)$ et vérifier que : $f'(x) = \dfrac{-4x+3}{4x+1}$.

2. **a)** Résoudre l'équation $f'(x) = 0$.

b) Etudier le signe de $f'(x)$.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $\left[0; \frac{5}{2}\right]$.

(Les valeurs utiles de $f(x)$ seront données sous forme exacte.)

3. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant *(arrondir les résultats à 10^{-2} près)* :

x	0	0,5	0,75	1	1,5	2	2,5
$f(x)$		1,60			1,45	1,20	

4. Sur la feuille de papier millimétré fournie, tracer la courbe représentative de la fonction f en prenant pour unité graphique 5 cm pour 1 unité sur les deux axes.

Partie B :

Dans cette partie, on utilise les résultats précédents pour étudier la glycémie (taux de glucose sanguin) d'une personne observée après ingestion de sirop de glucose.

On suppose que cette glycémie (en g.L^{-1}) en fonction du temps x (en heures) est donnée par $f(x) = \ln(4x+1) - x + 1$ où x varie dans l'intervalle $\left[0; \frac{5}{2}\right]$.

1. Déterminer l'instant (en minutes) auquel la glycémie de cette personne est maximale.

2. Toute modification de la glycémie qui s'écarte de 25% de la valeur moyenne de 1g.L^{-1} provoque des perturbations plus ou moins graves chez l'homme.
Déterminer l'intervalle dans lequel doit rester la glycémie pour éviter toute perturbation.

3. Une glycémie supérieure à 1,25 g.L^{-1} est appelée hyperglycémie ; une glycémie inférieure à 0,75 g.L^{-1} est appelée hypoglycémie.

a) Déterminer graphiquement le ou les intervalles de temps (en heures) pendant lesquels la personne observée est en hyperglycémie *(faire apparaître les traits de construction utiles).*

b) Même question pour l'hypoglycémie.

EXERCICE 3

Partie A – Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;10]$ par : $f(t) = 8te^{-\frac{1}{2}t} + 2$.

1) Calculer les valeurs exactes de $f(0)$, $f(2)$, $f(10)$.

2) Calculer $f'(t)$ et vérifier que : $f'(t) = 4(2-t)e^{-\frac{1}{2}t}$.

3) Résoudre l'équation $f'(t) = 0$.

4) Etudier le signe de $f'(t)$ sur $[0\,;10]$.

5) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

6) Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant (*arrondir les résultats à 0,1 près).*

t	0	0,5	1	1,5	2	3	4	6	8	10
$f(t)$		5,1		7,7		7,4	6,3		3,2	

7) On appelle (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal d'unités graphiques 2 cm.
Tracer la courbe (C) sur la feuille de papier millimétré fournie.

Partie B – Application

L'ADH est une hormone d'origine hypothalamique intervenant dans la régulation de l'eau dans l'organisme.
Lors d'une hémorragie accidentelle chez l'homme, on a enregistré le taux d'ADH présent dans le sang. On admet que ce taux d'ADH (en μg/ml) en fonction du temps t (en minutes) écoulé après l'hémorragie est donné par : $f(t) = 8te^{-\frac{1}{2}t} + 2$.

1) Calculer le taux d'ADH présent dans le sang cinq minutes après l'hémorragie.

2) Au bout de combien de minutes le taux est-il maximal ? Quel est ce taux ?

3) Pendant combien de temps (en minutes, secondes) le taux d'ADH est-il supérieur à 6 μg/ml ?
On utilisera la représentation graphique et on fera apparaître les tracés utiles.

EXERCICE 4

La partie A est indépendante des parties B et C.

Partie A :

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) $y' = 0,18\,y$ où y est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ de la variable réelle t.

2. Déterminer la solution particulière de (E) qui vérifie $y(0) = \frac{5}{3}$.

Partie B :

On considère la fonction f définie sur $[10\,;38]$ par $f(t) = \frac{5}{3}e^{0,18t}$.

1. a) Calculer $f'(t)$.

b) Etudier le signe de $f'(t)$.

c) Dresser le tableau de variation de f sur $[10\,;38]$. On y indiquera les valeurs exactes de $f(10)$ et $f(38)$.

2. Reproduire et compléter le tableau suivant en donnant les résultats arrondis à la dizaine près.

t	10	20	25	30	32	35	38
$f(t)$			150			910	

3. Tracer la courbe représentative de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthogonal en prenant pour unités graphiques :
- en abscisse : 1cm pour 5 unités ;
- en ordonnée : 1cm pour 100 unités.

Partie C :

Au début de la croissance d'une espèce donnée de coton, on estime que la masse exprimée en grammes, de la plante est donnée en fonction du temps t, exprimé en jours, par la formule : $f(t) = \frac{5}{3}e^{0,18\,t}$ où t varie de 10 à 38 .

1. En utilisant le graphique de la partie B, déterminer le jour où la masse est de 250 g. On laissera apparentes les constructions utiles.

2. Pour retrouver ce résultat par le calcul, il faut résoudre une équation.

a) Écrire cette équation.

b) Résoudre cette équation.

(Source : Bac SMS 2004).