Le dual de $\mathbb{Z}^X$

Résumé

Pour un $\mathbb{Z}$-module M on note $M^* := Hom_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z})$ l'ensemble des morphismes de groupes de M vers $\mathbb{Z}$. On a le résultat suivant : $(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}})^* = \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$, qu'on cherche à généraliser en remplaçant $\mathbb{N}$ par un ensemble X quelconque. On obtient $(\mathbb{Z}^X)^* = \mathbb{Z}^{(X)}$ pour tout ensemble X de cardinal strictement inférieur à un certain κ très gros.

1 Présentation

Soit X un ensemble. On a une suite exacte de groupes abéliens :

$$0 \to \mathbb{Z}^{(X)} \to \mathbb{Z}^X \to \mathbb{Z}^X/\mathbb{Z}^{(X)} \to 0$$

qui induit, par application du foncteur contravariant exact à gauche Hom(-,$\mathbb{Z}$), une suite exacte :

$$0 \to (\mathbb{Z}^X/\mathbb{Z}^{(X)})^* \to (\mathbb{Z}^X)^* \to \mathbb{Z}^X$$

où on a identifié $(\mathbb{Z}^{(X)})^*$ et $\mathbb{Z}^X$.

On procède en deux étapes :

1)On montre que l'image de la flèche de droite est réduite à $\mathbb{Z}^{(X)}$. On obtient alors une suite exacte :

$$0 \to (\mathbb{Z}^X/\mathbb{Z}^{(X)})^* \to (\mathbb{Z}^X)^* \to \mathbb{Z}^{(X)} \to 0$$

2)On montre, pourvu que X ne soit pas trop gros, que $(\mathbb{Z}^X/\mathbb{Z}^{(X)})^* = 0$
On a alors, dans ce cas, le résultat recherché : $(\mathbb{Z}^X)^*$ s'identifie naturellement à $\mathbb{Z}^{(X)}$.

La seule restriction ici est $|X| < \kappa$, le plus petit cardinal "mesurable", sachant que c'est peu restrictif : on ne peut pas démontrer l'éventuelle existence de κ qui serait le κ-ième cardinal inaccessible ! Voir le §6.2. L'intervention de κ provient du fait que si $\alpha < \kappa$, alors tout ultrafiltre sur α stable par intersections dénombrables est principal.

Enfin, on montre que, réciproquement, si $|X| \geq \kappa$, alors $(\mathbb{Z}^X/\mathbb{Z}^{(X)})^* \neq 0$, et donc que $(\mathbb{Z}^X)^*$ est strictement plus gros que $\mathbb{Z}^{(X)}$.

2 Étape 1

Soit $\ell \in (\mathbb{Z}^X)^*$. On doit montrer que $\{x \in X, \ell(\delta_x) \neq 0\}$ est fini : raisonnons par l'absurde et supposons donc le contraire : quitte à changer ℓ en $-\ell$, on choisit des éléments distincts $x_n, n \in \mathbb{N}$ tels que $\ell(\delta_{x_n}) > 0$. On pose $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n(\sum_{i=0}^n u_i \ell(\delta_{x_i}) + 1)$. Alors, pour tout n, u_n divise u_{n+1}. On a :

$$\ell\left(\sum_{i=0}^{\infty} u_i \delta_{x_i}\right) = \ell\left(\sum_{i=0}^{n} u_i \delta_{x_i}\right) + \ell\left(\sum_{i=n+1}^{\infty} u_i \delta_{x_i}\right)$$

Donc :

$$\ell\left(\sum_{i=0}^{\infty} u_i \delta_{x_i}\right) = \ell\left(\sum_{i=0}^{n} u_i \delta_{x_i}\right) \mod u_{n+1}$$

Comme le premier terme est constant, et le second est $< u_{n+1}$, et comme $u_{n+1} \to \infty$, on a, à partir d'un certain rang :

$$\ell\left(\sum_{i=0}^{\infty} u_i \delta_{x_i}\right) = \ell\left(\sum_{i=0}^{n} u_i \delta_{x_i}\right)$$

Ce qui implique $u_n \ell(\delta_{x_n}) = 0$ pour n grand, une contradiction.

Notons que cette démonstration est essentiellement la même que celle du cas "classique" où X est dénombrable.

3 Étape 2 pour le cas $X = \mathbb{N}$

La démonstration dans le cas général fait appel à ce cas particulier.

On doit montrer que $(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}/\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})})^* = 0$, i.e tout morphisme $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{Z}$ nul sur $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ est nul. Mais si ℓ est un tel morphisme, on constate immédiatement que pour tout $u \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, $\ell((2^n u_n)_{n\in\mathbb{N}})$ est divisible par 2^n pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\ell((2^n u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = 0$. De même, $\ell((3^n v_n)_{n\in\mathbb{N}}) = 0$ pour tout $v \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$. On écrit alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ une relation de Bézout $2^n u'_n + 3^n v'_n = 1$, alors pour tout $w \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, on a $\ell(w) = \ell((2^n u'_n w_n)_{n\in\mathbb{N}}) + \ell((3^n v'_n w_n)_{n\in\mathbb{N}}) = 0$, donc $\ell = 0$.

4 Étape 2 pour X quelconque

On fait l'hypothèse qu'il n'existe pas sur X d'ultrafiltre (cf. appendice) non principal et σ-complet, i.e. stable par intersections dénombrables. Cette hypothèse sera discutée plus loin : elle est clairement vérifiée par $X = \mathbb{N}$, mais on montrera qu'elle est vérifiée par tout cardinal "pas trop gros", notamment $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$, etc.

Montrons alors que $(\mathbb{Z}^X/\mathbb{Z}^{(X)})^* = 0$. Soit donc $\ell \in (\mathbb{Z}^X)^*$ nulle sur $\mathbb{Z}^{(X)}$. On suppose $\ell \neq 0$. Pour toute partie $Y \subset X$ on a une injection naturelle $\mathbb{Z}^Y \to \mathbb{Z}^X$, d'où une opération naturelle de restriction : $R_Y : (\mathbb{Z}^X)^* \to (\mathbb{Z}^Y)^*$. Soit $F = \{Y \subset X, R_Y(\ell) \neq 0\}$. Il est clair que si $Y \subset Z \subset X$ et $Y \in F$, alors $Z \in F$ (F est filtrant à droite). On dira que Y est *simple* s'il n'existe pas dans F deux parties disjointes de Y.

Lemme 1. *Il existe $Y \in X$ simple.*

Preuve. Sinon, X n'est pas simple et on peut écrire $X = X_0 \coprod X'_1; X_0, X'_1 \in F$: puis par récurrence : $X'_n = X_n \coprod X'_{n+1}, X_n, X'_{n+1} \in F$
On a ainsi construit des parties $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans F, deux à deux disjointes.
Comme $X_n \in F$, on choisit $u_n \in \mathbb{Z}^X$ à support dans X_n tel que $\ell(u_n) \neq 0$. On définit alors $m \in (\mathbb{Z}^X)^*$ par $m(v) = \ell(\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n u_n)$, qui est bien définie car les u_n sont à supports disjoints. Grâce à l'étape 2 pour $X = \mathbb{N}$, on sait que $\ell(\delta_n) = 0$ pour n assez grand, ce qui contredit $\ell(u_n) \neq 0$.
□

Le lemme permet de se ramener à X simple. Mais alors F est un ultrafiltre : pour cela il suffit de montrer qu'il est stable par intersections finies. Montrons qu'en fait F est même stable par intersections dénombrables. Soit $G = \{A^c, A \in F\} = \{Y \subset X, R_Y(\ell) = 0\}$. On veut donc montrer que G est stable par union dénombrable. Comme G est filtrant à gauche, on peut se se contenter de montrer que G est stable par union disjointe dénombrable. Mais cela découle directement du fait que $(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}/\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})})^* = 0$.

Ainsi F est un ultrafiltre non principal stable par intersections dénombrables, ce qui contredit l'hypothèse faite sur X, et on a bien montré que $(\mathbb{Z}^X/\mathbb{Z}^{(X)})^* = 0$, et, en combinant avec l'étape 1, que $(\mathbb{Z}^X)^* = \mathbb{Z}^{(X)}$.

5 Réciproque

Supposons qu'on dispose d'un ultrafiltre U σ-complet non principal sur X. À l'aide de U on va construire un élément non trivial de $(\mathbb{Z}^X/\mathbb{Z}^{(X)})^*$, i.e. un élément non nul de $(\mathbb{Z}^X)^*$ nul sur $\mathbb{Z}^{(X)}$. Pour tout $u \in \mathbb{Z}^X$ on a une partition de X indexée par $\mathbb{Z}$ donnée par l'image réciproque de u. Comme U est σ-complet, il existe dans U un unique élément $u^{-1}(n)$ de la partition. On appelle n la limite de u suivant U. La fonction $u \mapsto \lim_U u$ est linéaire, car si $u, v \in \mathbb{Z}$, alors $\forall m, n \in \mathbb{Z}, u^{-1}(m) \cap v^{-1}(n) \subset (u+v)^{-1}(n+m)$. De plus, comme U est non principal, il ne contient aucun ensemble fini ; par conséquent si u est à support fini, alors $\lim_U u = 0$. Donc $\lim_U$ est un élément non nul de $(\mathbb{Z}^X/\mathbb{Z}^{(X)})^*$.

6 Ultrafiltres σ-complets

Maintenant, il faut caractériser les cardinaux qui possèdent un ultrafiltre non principal σ-complet (i.e. stable par intersections dénombrables).

6.1 Premiers tâtonnements

Un premier exercice facile est de montrer qu'un cardinal au plus dénombrable n'en possède pas.

Le fait que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'en possède pas non plus est un cas particulier du lemme suivant, qui servira par la suite dans toute sa généralité.

Lemme 2. *Tout ultrafiltre U sur une partie $Z \subset \mathcal{P}(\alpha)$ stable par intersections indexées par tout $\beta \leq \alpha$ est principal.*

On peut commencer par remplacer Z par $\mathcal{P}(\alpha)$ (quitte à prolonger U).

On écrit $\mathcal{P}(\alpha) = \{0,1\}^\alpha$. On va définir par induction une suite $u = (u_\beta) \in \{0,1\}^\alpha$.

Supposant avoir défini u_δ pour $\delta < \beta$, on définit $X_\beta = \{v \in \{0,1\}^\alpha, \forall \delta < \beta, v_\delta = u_\delta\}$. On écrit :

$$X_\beta = \{u \in X_\beta, u_\beta = 0\} \amalg \{u \in X_\beta, u_\beta = 1\}$$

De ces deux parties, si la première est dans U, on pose $u_\beta = 0$, sinon, on pose $u_\beta = 1$.

Prouvons maintenant par induction que $X_\beta \in U$. D'abord $X_0 = \mathcal{P}(\alpha) \in U$. Si β est un ordinal limite, $X_\beta = \bigcap_{\delta<\beta} X_\delta$, les X_δ sont dans U par hypothèse d'induction, et U est stable par intersection indexée par β, puisque $\beta \leq \alpha$, donc $X_\beta \in U$. Enfin, si $\beta = \delta + 1$ est successeur, par définition, $X_\beta = X_\delta \cap \{v \in \{0,1\}^\alpha, v_\delta = u_\delta\} = \{v \in X_\delta, v_\delta = u_\delta\}$. Comme, par hypothèse d'induction, $X_\delta \in U$, un des deux $\{v \in X_\delta, v_\delta = 0\}$ ou $\{v \in X_\delta, v_\delta = 1\}$ est dans U, et le choix de u_δ fait donc que $X_\beta \in U$.

Mais alors $\bigcap_{\beta<\alpha} X_\beta = \{u\} \in U$, et U est bien principal, C.Q.F.D. $\square$

6.2 Cardinaux mesurables

Définition 1. *Un cardinal $\alpha > \omega$ est dit mesurable s'il existe sur α un ultrafiltre non principal stable par intersections indexées par tout $\beta < \alpha$.*

Proposition 1. *Le plus petit cardinal κ possédant un ultrafiltre non principal σ-complet est mesurable.*

Preuve. Soit κ ce cardinal, et U un ultrafiltre non principal σ-complet sur κ. Si κ n'est pas mesurable, alors $\exists \lambda < \kappa$ et $(A_\alpha)_{\alpha\in\lambda}$ dans U^c, qu'on peut supposer 2 à 2 disjoints (car U^c est filtrant à gauche), tels que $\coprod A_\alpha \in U$. $\square$

Soit $U^* = \{X \subset \lambda, (\bigcup_{\alpha\in X} A_\alpha \in U)\}$ Alors U^* est un ultrafiltre σ-complet non principal sur lambda, ce qui contredit la minimalité de κ.

Rappelons qu'un cardinal α est inaccessible s'il satisfait aux deux conditions suivantes :

Pour tout cardinal $\beta < \alpha$, $2^\beta < \alpha$;

Pour tout cardinal $\beta < \alpha$ et toute famille de cardinaux (γ_i) indexée par β, satisfaisant $\gamma_i < \alpha$ pour tout i, on a $\sup_i \gamma_i < \alpha$.

Proposition 2. *κ est inaccessible.*

Preuve. Le lemme 2 montre déjà que $\alpha < \kappa \Rightarrow \mathcal{P}(\alpha) < \kappa$.

Il reste donc à montrer que si $|I| < \kappa$ et $(\beta_\alpha)_{\alpha\in I}$ est une suite d'ordinaux $< \kappa$, alors $\sup_\alpha(\beta_\alpha) < \kappa$. Dans le cas contraire, il existerait une partition $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ de κ telle que $|A_\alpha| < \kappa$. Fixons un ultrafiltre σ-complet non principal sur κ, et soit $V = \{X \subset I, \bigcup_{x\in X} A_x \in U\}$. Il est immédiat que V est un ultrafiltre σ-complet sur I, donc, comme $|I| < \kappa$ et par minimalité de κ, V est principal ; par conséquent $\exists \alpha$ tel que $A_\alpha \in U$. La restriction de U à A_α est un ultrafiltre σ-complet, donc est principal puisque $|A_\alpha| < \kappa$. Donc U est lui-même principal, une contradiction. $\square$

7 Appendice : ultrafiltres

Soit X un ensemble. On appelle filtre sur X un ensemble de parties F de X vérifiant :

1)$X \in F$

2)$\emptyset \notin F$
3)($A \subset B$ et $A \in F$) $\Rightarrow B \in F$ (F est filtrant à droite).
4)$A, B \in F \Rightarrow A \cap B \in F$

Soit U un filtre sur X. On dit que U est un ultrafiltre s'il vérifie l'une des conditions suivantes équivalentes :
5)U est maximal parmi les filtres.
5')$\forall A \subset X, A \in U$ ou $A^c \in U$

Exemple 1 (Prolongement d'un ultrafiltre). Si $X \subset Y$ et U est un ultrafiltre sur X, on peut définir un ultrafiltre U' sur Y par $A \in U'$ si $A \cap X \in U$.

Exemple 2 (Restriction à une partie de l'ultrafiltre). Si U est un ultrafiltre sur X, et A est une partie de X telle que $A \in U$, la restriction $P(A) \cap U$ de U est un ultrafiltre.

Exemple 3 (Ultrafiltres principaux). Soit $x \in X$. Alors on a un ultrafiltre $U_x = \{A \subset X, x \in A\}$. De tels ultrafiltres sont dits principaux (ou triviaux). Il est immédiat que tout ultrafiltre contenant un ensemble fini est principal.

Exemple 4 (Construction d'ultrafiltres non principaux). Une conséquence immédiate du lemme de Zorn est que tout filtre est contenu dans un ultrafiltre. Cela permet de construire des ultrafiltres non principaux : en effet, si X est infini, tout ultrafiltre contenant le filtre des complémentaires des parties finies est non principal.

Remarque 1. En logique, on montre qu'il est impossible, en un sens convenable, d'exhiber un ultrafiltre non principal. De ce fait, pour fabriquer des ultrafiltres non principaux, on utilise systématiquement des méthodes non constructives, typiquement le lemme de Zorn.

Remarque 2. Un ultrafiltre est dit σ-complet s'il est stable par intersections dénombrables. Cette fois le lemme de Zorn ne suffit pas pour produire des ultrafiltres non principaux σ-complets. On montre ici que le plus petit cardinal κ possédant un ultrafiltre non principal σ-complet est nécéssairement inaccessible ; en fait il est même le κ-ième cardinal inaccessible ! De plus on sait que si ZF est consistant, alors ZFC + "il n'existe pas de cardinal inaccessible" est consistant.

Je remercie David Madore pour m'avoir appris la notion de cardinal mesurable, et notamment m'a signalé le lemme 2, ainsi que la réciproque, tout cela via le forum (informatique) des élèves de l'ENS. Je remercie également Joël Bellaïche pour m'avoir posé ce problème.

Après la rédaction de ce papier, j'ai trouvé un ouvrage qui contient tous ces résultats, dans un cadre plus général : Laszlo FUCHS, *Abelian Groups* 1 et 2, Academic Press, 1970 et 1973.