Représentations de $SL_2(\mathbb{R})$

Yves de Cornulier

Dans ce qui suit, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Exponentielle

Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On note $\mathfrak{gl}(V)$ l'algèbre des endomorphismes linéaires de V et $GL(V)$ (resp. $SL(V)$) le groupe des automorphismes de V (resp. de déterminant 1). On définit l'application

$$\exp : \mathfrak{gl}(V) \to GL(V)$$
$$A \mapsto \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} A^n$$

Elle vérifie notamment les propriétés :

(1) Si $[A, B](= AB - BA) = 0$ alors $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$.
(2) $\exp(PAP^{-1}) = P\exp(A)P^{-1}$
(3) $\forall A \in \mathfrak{gl}(V)$, $(\frac{d}{dt}\exp(tA))_{t=0} = A$
(4) $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{Tr}(A))$

(1) se vérifie élémentairement ; (2) et (3) sont immédiats ; (4) est immédiat sur les matrices diagonales, donc, grâce à (2), sur les matrices diagonalisables, puis on conclut grâce à la densité des matrices diagonalisables complexes.

Par conséquent, si on note $\mathfrak{sl}(V) := \{A \in \mathfrak{gl}(V), Tr(A) = 0\}$, alors exp envoie $\mathfrak{sl}(V)$ dans $SL(V)$.

Proposition 1. *Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel (de dimension finie), et ϕ un morphisme continu : $\mathbb{R} \to GL(V)$. Alors il existe un unique $A \in \mathfrak{gl}(V)$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi(t) = \exp(tA)$.*

Preuve :

L'unicité est immédiate grâce à (3).

Disons qu'un sous-espace vectoriel de V est ϕ-stable s'il est stable par $\phi(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On peut supposer que V est ϕ-indécomposable, i.e. que V n'est pas somme directe de deux sous-espaces non nuls ϕ-stables et $V \neq 0$.

Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. Alors V est somme directe des sous-espaces caractéristiques de $\phi(t_0)$, et ceux-ci sont ϕ-stables, car $\phi(t_0)$ et $\phi(t)$ commutent pour tout $t \in \mathbb{R}$. Par conséquent, comme on suppose que V est ϕ-indécomposable, $\phi(t_0)$ a un unique sous-espace caractéristique, pour une valeur propre qu'on appelle $\lambda(t_0)$. Remarquons que $t \mapsto \lambda(t)$ est un morphisme continu de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}^*$. En effet, soit $E_t = Ker(\phi(t) - \lambda(t))$ le sous-espace propre de $\phi(t)$. Comme les $\phi(t)$ commutent, on voit facilement par récurrence que les intersections finies des E_t sont non nulles. Par conséquent, l'intersection E des E_t est non nulle. L'action de ϕ sur E est scalaire et continue, et $t \mapsto \lambda(t)$ est bien un morphisme continu. Ensuite, toujours par la commutativité de la famille $(\phi(t))$, on peut choisir une base telle que l'action de ϕ soit par matrices triangulaires supérieures. Donc, dans cette base, l'action de $t \mapsto \psi(t) = \lambda(t)^{-1}\phi(t)$ définit un morphisme continu $\mathbb{R} \to \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$, où $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ est le groupe des matrices $n \times n$ triangulaires supérieures unipotentes, i.e. avec des 1 sur la diagonale. Grâce au lemme qui suit, ϕ est différentiable et $\forall t \in \mathbb{R}$, $\phi(t) = \exp(td\phi(0))$. $\square$

Lemme 1.

(i) Tout morphisme continu λ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}^*$ s'écrit $t \mapsto \exp(t\lambda)$ pour un unique $\alpha \in \mathbb{C}$.

(ii) Tout morphisme continu ψ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ s'écrit $t \mapsto \exp(tA)$ pour une unique matrice triangulaire supérieure stricte A.

Preuve :

Dans les deux cas l'unicité est claire en différentiant en 0, cf. (3) plus haut. Passons à l'existence.

(i) Par la continuité de λ en 0, il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $|t| \leq a \Rightarrow \Re(\lambda(t)) > 0$. Notons $\lambda(a) = r.\exp(i\theta)$, avec $|\theta| < \pi/2$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $m \leq 2^n$, $\lambda(\frac{ma}{2^n}) = r^{\frac{m}{2^n}} \exp(\frac{im\theta}{2^n}) = \exp(\frac{m}{2^n}(i\theta + \log(r)))$. Par densité, $\forall t \in [0, a]$, $\lambda(t) = \exp(\frac{t}{a}(i\theta + \log(r)))$, puis enfin c'est vrai pour tout $t \in \mathbb{R}$. Donc $\alpha = \frac{i\theta+\log(r)}{a}$ convient.

(ii) Il faut remarquer que les séries entières sont définies sans restriction sur les matrices nilpotentes. Rappelons que, pour $t \in \mathbb{C}$, la série entière "$(1 + X)^t$ " est définie comme égale à $1 + tX + \frac{t(t-1)}{2}X^2 + \cdots$. Elle vérifie la relation $(1+X)^t(1+X)^{t'} = (1+X)^{t+t'}$. Par suite, on peut définir canoniquement U^t pour $U \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$, qui dépend polynômialement de $t \in \mathbb{C}$. Et forcément $\psi(t) = \psi(1)^t = \exp(t \log(\psi(1)))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$: en effet c'est vrai sur $\mathbb{Q}$ puis sur $\mathbb{R}$ par continuité.

Lemme 2. *Soit V un espace vectoriel, réel ou complexe. Le sous-groupe $SL(V)$ de $GL(V)$ est une sous-variété fermée dont l'espace tangent en 1 est $\mathfrak{sl}(V)$.*

Preuve :

D'abord, $SL(V) = \det^{-1}(\{1\})$ est fermé. Par translation, il suffit de montrer que $SL(V)$ est une sous-variété au voisinage de 1, ce qui est une conséquence du fait que l'application $\mathfrak{gl}(V) \to \mathfrak{gl}(V)$, $x \mapsto x + \frac{1}{n}(\det(x) - 1 - \mathrm{Tr}(x))\mathrm{Id}_V$ envoie $SL(V)$ sur $\mathfrak{sl}(V)$. Comme, de plus, elle a pour différentielle en 1 l'identité, on obtient bien que l'espace tangent en 1 est $\mathfrak{sl}(V)$.

Lemme 3. *Soient V, W deux espaces vectoriels, W réel ou complexe, et V complexe. Soit f un morphisme continu : $G \to GL(V)$, où $G = SL(W)$ ou $GL^+(W)(= \det^{-1}(\mathbb{R}_+^*))$. Alors f est C^∞ (et même $\mathbb{R}$-analytique).*

Preuve :

Soit $\mathfrak{g}$ l'espace tangent de G, i.e. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(W)$ ou $\mathfrak{gl}(W)$, et soit $x \in \mathfrak{g}$. Alors $t \mapsto f(\exp(tx))$ est un morphisme continu, il s'écrit donc $t \mapsto \exp(tA(x))$ avec $A(x) \in \mathfrak{gl}(V)$. Soit $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathfrak{g}$. Soit $\Phi : \mathbb{R}^n \to G$ défini par $\Phi(t_1, \ldots, t_n) = \prod_{i=1}^n \exp(t_i u_i)$. Alors Φ est C^∞ (et même $\mathbb{R}$-analytique), et étale en 0, avec $\Phi(0) = 1$. Donc Φ admet un inverse au voisinage de $1 \in G$. Or

$$f \circ \Phi(t_1, \ldots, t_n) = f(\prod_{i=1}^n \exp(t_i u_i)) = \prod_{i=1}^n f(\exp(t_i u_i)) = \prod_{i=1}^n \exp(t_i A(u_i))$$

On voit que $f \circ \Phi$, est partout C^∞ (et même $\mathbb{R}$-analytique), donc f l'est aussi au voisinage de 1, donc partout puisque f est un morphisme de groupes.

Désormais on pourra donc parler de la différentielle d'un tel morphisme continu.

Lemme 4. *Soit V, W deux espaces vectoriels, chacun réel ou complexe. Soit f un morphisme continu : $GL^+(W) \to GL(V)$, et soit $\mathrm{d}f$ sa différentielle en 1. Alors, pour tout $A, B \in \mathfrak{gl}(W)$, $\mathrm{d}f([A, B]) = [\mathrm{d}f(A), \mathrm{d}f(B)]$, i.e. $\mathrm{d}f$ est un morphisme d'algèbres de Lie.*

Preuve :

Notons $D = \mathrm{d}f(1)$ et $Q = \mathrm{d}^2 f(1)$. En développant à l'ordre 2 l'égalité $f((1 + h)(1 + h')) = f(1 + h)f(1 + h')$, on obtient :

$$D(hh') + Q(h + h') = Q(h) + Q(h') + D(h)D(h')$$

En échangeant h et h' puis en soustrayant, on élimine les termes avec Q et on obtient $D(hh' - h'h) = D(h)D(h') - D(h')D(h)$, qui est le résultat recherché.

Supposons désormais que W est réel (cette hypothèse ne sert qu'à simplifier que ce qui suit). Alors $GL^+(W)$ est isomorphe à $\mathbb{R}_+^* \times SL(W)$ et on en déduit que tout morphisme $SL(W) \to GL(V)$ se prolonge à $GL(W)$. En particulier, grâce au lemme précédent, $\mathrm{d}f : \mathfrak{sl}(W) \to \mathfrak{gl}(V)$ est un morphisme d'algèbres de Lie.

Soit $f : SL(W) \to GL(V)$ un morphisme continu, et soit $x \in \mathfrak{sl}(W)$. Alors on sait qu'on peut écrire $f(\exp(tx)) = \exp(tA(x))$ avec $A(x) \in \mathfrak{gl}(V)$. En différentiant, on obtient $A(x) = \mathrm{d}f(x)$ et $f \circ \exp = \exp \circ \mathrm{d}f$. On en déduit, comme $\exp(\mathfrak{sl}(W))$ contient un voisinage de 1 dans $SL(W)$, que $f \mapsto \mathrm{d}f$ est une injection de l'ensemble des morphismes différentiables $SL(W) \to GL(V)$ vers l'ensemble des morphismes de $\mathbb{R}$-algèbres de Lie : $\mathfrak{sl}(W) \to \mathfrak{gl}(V)$.

Résumons ce qu'on vient de montrer :

Proposition 2. *Soit W un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, $G = SL(W)$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(W)$. Alors :*

- *Tout morphisme continu $f : G \to GL(V)$ est C^∞ et l'application $\mathrm{d}f = \mathrm{d}f(1) : \mathfrak{sl}(W) \to \mathfrak{gl}(V)$ vérifie $\mathrm{d}f([u,v]) = [\mathrm{d}f(u), \mathrm{d}f(v)]$, i.e. $\mathrm{d}f$ est un morphisme d'algèbres de Lie.*
- *L'application d est une injection de l'ensemble des morphismes continus $G \to GL(V)$ vers l'ensemble des morphismes $\mathbb{R}$-linéaires $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ qui commutent au crochet, i.e. l'ensemble des morphismes de $\mathbb{R}$-algèbres de Lie : $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$.*

2 Représentations de $SL_2(\mathbb{R})$

Supposons désormais que W est de dimension 2. On connaît explicitement les représentations de $\mathfrak{sl}(W)$. On peut montrer explicitement que l'application ci-dessus est surjective (donc bijective).

Soit G un groupe topologique. Ici on entendra par G-module la donnée d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie V et d'un morphisme continu : $\rho : G \to GL(V)$, ou, de façon équivalente, d'une action continue $\alpha : G \times V \to V$.
Un sous-module de V est un sous-espace W stable par $\rho(G)$, un facteur direct de V est un sous-module de V admettant un sous-module supplémentaire. Un G-module non nul V est dit irréductible (resp. indécomposable) s'il ne possède pas de sous-module (resp. de facteur direct) distinct de 0 et V.

Soit $A = \mathbb{C}[X,Y]$ l'algèbre $\mathbb{N}$-graduée des polynômes à deux indéterminées. Le groupe $SL_2(\mathbb{R})$ agit sur A par $g.P(X,Y) = P(g^{-1}(X,Y))$. L'application $P \mapsto g.P$ est un automorphisme de $\mathbb{C}$-algèbre graduée. L'action induit donc une action par automorphismes linéaires sur l'espace vectoriel A_n des polynômes homogènes de degré n, qui est de dimension $n+1$. On note W_n le $\mathbb{C}$-espace-vectoriel A_n muni de cette action.

Théorème 1.
- *Pour tout $n \geq 0$, W_n est un $SL_2(\mathbb{R})$-module irréductible, i.e. W_n est l'unique sous-$\mathbb{C}$-espace non nul de V_n stable par $SL_2(\mathbb{R})$.*
- *Tout $SL_2(\mathbb{R})$-module complexe de dimension finie est isomorphe à $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} W_n^{\alpha_n}$ pour une unique suite $(\alpha_n) \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$.*

Preuve :
Considérons la base $(u_i)_{0\leq i\leq n} = (X^iY^{n-i})_{0\leq i\leq n}$ de W_n. L'action est donc donnée par :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} X^iY^{n-i} = (dX - BY)^i(-cX + aY)^{n-i} \quad (ad - bc = 1)$$

En développant à l'ordre 1 en la matrice identité, on obtient l'action dérivée de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ sur W_n :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} u_i = (n-2i)u_i - ibu_{i-1} - (n-i)cu_{i+1}$$

en convenant $u_{-1} = u_{n+1} = 0$. Dans la base $(v_i) = ((-1)^i \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} u_i)$ on reconnaît la représentation irréductible V_n de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$. En particulier, l'action de $SL_2(\mathbb{R})$ est irréductible, car tout sous-espace stable est stable pour l'action dérivée.

Prouvons maintenant la deuxième proposition. Soit $\phi : SL_2(\mathbb{R}) \to GL(V)$ un morphisme continu, V étant un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Soit $u = \mathrm{d}\phi$. Alors u est une représentation complexe de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, qui se prolonge donc de façon unique en une représentation complexe de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Donc il existe (paragraphe suivant) des sous-espaces F_j dont V est la somme directe et tels que l'action de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ sur F_j soit irréductible. Prenons une base (v_{ij}) de F_j telle que $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ agit par des matrices comme dans (*) (voir plus loin). En identifiant v_{ij} à $(-1)^iX^jY^{n_j-i}$, on obtient un morphisme $\psi : SL_2(\mathbb{R}) \to GL(V)$ tel que $\mathrm{d}\psi = \mathrm{d}\phi$, tel que ψ stabilise F_j et tel que l'action de $SL_2(\mathbb{R})$ par ψ sur F_j soit isomorphe à celle sur V_{n_j}. Par l'injectivité démontrée plus haut, $\psi = \phi$ et ϕ fait bien de V une somme directe de modules irréductibles.
Terminons par l'unicité. Supposons que V soit isomorphe à $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} W_n^{\alpha_n}$. Alors, comme $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$-module, V est isomorphe à $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} V_n^{\alpha_n}$. La multiplicité μ_i de la valeur propre i pour H est donc $\sum_{j\geq 0} \alpha_{i+2j}$. Donc $\alpha_i = \mu_i - \mu_{i+2}$ est uniquement déterminé.

3 Représentations de $\mathfrak{sl}_2(k)$

On suppose ici que k est un corps de caractéristique 0. On renvoie à l'appendice pour les notions de base sur les algèbres de Lie.

L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(k)$ possède comme base (H, X, Y), avec

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

vérifiant les relations

$$[H, X] = 2X \quad [H, Y] = -2Y \quad [X, Y] = H.$$

Dans ce qui suit, on considérera des $\mathfrak{sl}_2(k)$-modules V (cf. l'appendice). On y verra X, Y et H comme opérateurs linéaires sur V, ce qui permettra de parler des produits XY, etc. Attention, ce produit n'a a priori rien à voir avec le produit dans $\mathfrak{gl}_2(k)$.

Théorème 2. *L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(k)$ est semi-simple, i.e. toute représentation est somme de représentations irréductibles.*

Supposons d'abord k algébriquement clos. D'abord classons les représentations irréductibles. Fixons les notations : notons $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ et soit V un $\mathfrak{g}$-module irréductible.

Lemme 5. *Il existe dans* $\ker(X)$ *un vecteur propre de H.*

En effet supposons le contraire : on suppose que X n'annule aucun vecteur propre de H. Comme k est algébriquement clos et $V \neq 0$, il existe v un vecteur propre de H pour une valeur propre λ. Alors, par hypothèse, Xv est non nul, et on voit qu'il est vecteur propre de H pour la valeur propre $\lambda + 2$. En itérant on voit que $\lambda + 2n$ est valeur propre de H pour tout n, et donc, comme $car(k) = 0$, H a une infinité de valeurs propres : c'est absurde car V est de dimension finie. □

Il existe donc $u \neq 0$ et $\lambda \in k$ tels que $Hu = \lambda u$ et $Xu = 0$. En raisonnant de façon analogue, il existe m minimal tel que $Y^m u = 0$.

Lemme 6. *La famille $(u, Yu, ..., Y^{m-1}u)$ est une base de V.*

Cette famille est libre car, pour $l < m$, $Y^l u$ est vecteur propre de H pour la valeur propre $\lambda - 2l$. Grâce à la relation $[X, Y^n] = nY^{n-1}(H - (n-1))$, qu'on obtient directement par récurrence, on voit immédiatement que l'espace vectoriel engendré par les $Y^i u, i \in \mathbb{N}$ est un sous-$\mathfrak{g}$-module non nul de V. Comme V est irréductible, c'est donc une base de V. □

On en déduit notamment que X et Y sont nilpotents de rang $\dim(V) - 1 = m - 1$.
Enfin en remarquant que $\mathrm{Tr}(H) = \mathrm{Tr}(XY - YX) = 0$ (et en utilisant que k est de caractéristique nulle), on obtient que $\lambda = m-1$, donc que les valeurs propres de H sont $n, n-2, n-4, ..., -n+2, -n$, en posant $n = m - 1$.

Posons enfin $e_i = \frac{1}{i!}Y^i v$. Alors $(e_0, ..., e_n)$ est une base de V dans laquelle on a (*) :

$$H = \begin{pmatrix} n & & & (0) \\ & n-2 & & \\ & & ... & \\ (0) & & & -n \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & n & & & (0) \\ & 0 & n-1 & & \\ & & & ... & \\ & & & 0 & 1 \\ (0) & & & & 0 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & & & & (0) \\ 1 & 0 & & & \\ & 2 & & & \\ & & & ... & 0 \\ (0) & & & n & 0 \end{pmatrix}$$

Réciproquement, il est immédiat que, muni de ces opérateurs, k^{n+1} est un $\mathfrak{sl}_2(k)$-module irréductible, qu'on notera V_n. On a donc montré :

Proposition 3. *Les $\mathfrak{sl}_2(k)$-modules irréductibles sont les V_n, $n \geq 0$.*

Plus précisément, on a montré le lemme suivant qui servira par la suite :

Lemme 7. *Soit V un $\mathfrak{sl}_2(k)$-module, et soit $v \in V$ non nul tel que $Xv = 0$ et $Hv = \lambda v$. Alors λ est un entier n et V le module engendré par v est isomorphe à V_n.*

Montrons maintenant la semi-simplicité. Il faut montrer que tout module est somme directe de modules irréductibles. Cela se montre par récurrence sur la dimension, en utiliant le lemme :

Lemme 8. *Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$. Toute suite exacte courte de $\mathfrak{sl}_2(k)$-modules $0 \to V_n \to V \to V_m \to 0$ est scindée.*

Preuve :

Notons V' l'image de V_n dans V, et, pour $\lambda \in k$, E_λ (resp. N_λ) le sous-espace propre (resp. caractéristique) de H dans V, pour la valeur propre λ. Soit $l = \sup(m,n)$. Remarquons que les valeurs propres de H dans V sont exactement $\{l, l-2, ..., -l\}$: cela se déduit du fait général que si u est un endomorphisme d'un espace vectoriel E, et F un sous-espace stable, alors $Spec(u,E) = Spec(u,F) \cup Spec(u, E/F)$.

Si $m > n$, soit v un vecteur propre de H dans V, pour la valeur propre m. Alors, comme $m+2$ n'est pas valeur propre de H, $Xv = 0$, et on déduit du lemme précédent que le $\mathfrak{sl}_2(k)$-sous-module engendré par v est isomorphe à V_m. Par irréductibilité, son intersection avec V' est nulle, et, son image dans le module irréductible V/V' étant non nulle, on a bien une section.

Si $m \leq n$, remarquons que N_λ est de dimension ≤ 2 si $|\lambda| \geq m$, et ≤ 1 si $|\lambda| > m$. Comme V est la somme directe des N_λ, ce sont des égalités.

Supposons que $m < n$. Soit alors $v \in N_m \backslash V'$. Comme N_m est de dimension 2, on a $(H-m)^2 v = 0$, dont on déduit que Xv est dans N_{m+2}. Mais celui-ci est de dimension 1 et est inclus dans V'. Donc $HXv = (m+2)Xv$, i.e. $Xv \in E_{m+2}$, d'où on déduit $X(H-m)v = 0$. Donc, si $(H-m)v \in V'$, alors $(H-m)v$ est nul, car sinon il serait à la fois valeur propre pour m et n (parce que dans V_n, $\ker(X) = \ker(H-n)$). Dans ce cas v est vecteur propre pour H. Si $Xv = 0$, on prend le module engendré par v et c'est terminé grâce au lemme précédent. Sinon, Xv est valeur propre pour $m+2$, donc est dans V'. Soit $w \in E_m \cap V'$ m. Alors il existe un scalaire μ tel que $Xv = \mu Xw$. Donc, quitte à remplacer v par $v - \mu w$ on peut supposer $Xv = 0$ et ce cas est réglé. Enfin, si $(H-m)v \notin V'$, on prend le module engendré par $(H-m)v$ et, grâce au lemme, il forme une section.

Maintenant supposons que $m = n$. Supposons qu'il existe un vecteur propre pour H qui n'est pas dans V'. Quitte à le translater par X on peut supposer que c'est pour la valeur propre n. Alors on peut à nouveau conclure grâce au lemme précédent.

Supposons donc que les vecteurs propres de H dans V soient tous dans V'. Soit $(e_0, ..., e_n)$ la base de V' définie plus haut, et soit $v \notin V'$ dans le sous-espace caractéristique de n. On a $(H-n)(H-n)v = 0$, donc il existe $\lambda \neq 0$ tel que $\lambda(H-n)v = e_0$. Soit alors $f_0 = \lambda v$ et $f_i = \lambda_i Y^i f_0$, où les λ_i sont choisis de telle façon que $(H - n + 2i)f_i = e_i$.
Dans la base $(e_0, f_0, e_1, f_1, ...)$,

X est une matrice subdiagonale par blocs 2×2, Y est sous-diagonale par blocs 2×2, et

H est diagonale par blocs 2×2 de la forme :

$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix} \quad i \in \{n, n-2, ..., -n\}$$

et X et Y s'écrivent par blocs 2×2 $(A_{ij})_{0 \leq i,j \leq n}$, où on peut écrire

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{ij} & b_{ij} \\ 0 & a_{ij} \end{pmatrix} \quad a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{C}$$

Maintenant, en écrivant la relation $[X,Y] = H$ par blocs, étant donné que tous les blocs commutent entre eux, on voit que la somme des blocs diagonaux de H est nulle, et on a une contradiction.

On a donc montré, pour k algébriquement clos de caractéristique zéro, la semi-simplicité de $\mathfrak{sl}_2(k)$. Soit k est un corps de caractéristique zéro quelconque, et soit V un $\mathfrak{sl}_2(k)$-module irréductible, de dimension n. En utilisant le plongement $\mathfrak{gl}_n(k) \subset \mathfrak{gl}_n(l)$, où ℓ est une clôture algébrique de k, et en utilisant la classification des $\mathfrak{sl}_2(\ell)$-modules, on voit que H est conjuguée à une matrice D diagonale à coefficients entiers par une matrice de $GL_n(l)$. Par conséquent, comme k est infini, H et D sont aussi conjugués par une matrice de $GL_n(k)$. Il existe donc un vecteur propre pour H, et ensuite il suffit de tout refaire comme dans la preuve dans le cas algébriquement clos.

4 Appendice : algèbres de Lie

Soit k un corps de caractéristique 0. Une k-algèbre de Lie est un k-espace vectoriel A muni d'une loi k-bilinéaire $[\cdot, \cdot] : A \times A \to A$, avec de plus :

- $[\cdot, \cdot]$ est antisymétrique : $\forall x, y \in A,\ [x,y] + [y,x] = 0$.

– $[\cdot, \cdot]$ satisfait à l'identité de Jacobi : $\forall x, y, z \in A,\ [x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0.$

On a des notions évidentes de morphisme entre algèbres de Lie, de sous-algèbre de Lie, d'idéal d'une algèbre de Lie.

Exemple 1. Soit V un k-espace vectoriel de dimension finie. Alors $\mathfrak{gl}(V)$ est une algèbre de Lie pour la loi $[A, B] := AB - BA$, et $\mathfrak{sl}(V)$ en est une sous-algèbre de Lie (et même un idéal).

Soit $k \subset \ell$ deux corps (ici on aura $k = \mathbb{R}$ et $\ell = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Une ℓ-représentation d'une k-algèbre de Lie A est la donnée d'un ℓ-espace vectoriel V et d'un morphisme de k-algèbres de Lie : $A \to \mathfrak{gl}(V)$, ou de façon équivalente, d'une action k-ℓ-bilinéaire : $A \times V \to V$ satisfaisant à :

$$\forall x, y \in A,\ v \in V,\ [x, y].v = x(y.v) - y.(x.v)$$

On appelle alors V un A-module sur ℓ. Un *sous-module est un sous-espace vectoriel A-stable. Un module est dit irréductible s'il est non nul et n'admet que* 0 *et lui-même comme sous-modules, il est dit totalement réductible s'il est isomorphe à une somme directe de modules irréductibles.*