GÉOMÉTRIES MODÈLES DE DIMENSION TROIS

YVES DE CORNULIER

RÉSUMÉ. On expose une preuve détaillée de la classification par Thurston des huit géométries modèles de dimension trois.

ABSTRACT. In this expository article, we give a detailed proof of the classification by Thurston of the eight model geometries in dimension three.

Le but de cette rédaction est de donner une preuve de la classification des géométries modèles de Thurston de dimension 3. Ces géométries on été introduites par ce dernier pour énoncer la conjecture de géométrisation, qui classifie, en un certain sens, les variétés de compactes de dimension trois ; cette conjecture, partiellement prouvée par Thurston lui-même [11, 12] (voir aussi Scott [10]), englobe en particulier la conjecture de Poincaré (toute variété compacte simplement connexe de dimension trois est homéomorphe à la sphère) et a été récemment prouvée par Perelman dans quelques courtes notes non publiées [7, 8, 9]. Pour les développements récents, le lecteur est renvoyé au survols de Morgan [6] et Bessières [1], aux notes détaillées de Kleiner-Lott [4] et à l'ouvrage en préparation [2].

Thurston introduit la notion de géométrie modèle ; ce sont des espaces riemanniens homogènes, avec certaines conditions supplémentaires rappelées plus bas ; il classifie ces dernières, en dimension trois, dans son ouvrage [13]. Nous donnons ici une exposition détaillée de cette classification. L'approche proposée ici, fortement inspirée de [13], utilise essentiellement des résultats simples sur les groupes de Lie de petite dimension, et ne requiert pas plus de technicité que les résultats fondamentaux sur la correspondance groupes-algèbres de Lie. On a pris un soin très particulier à prouver, dans chaque cas, l'axiome de (c) de maximalité (tous les détails ne sont pas développés dans la démonstration donnée dans [13]).

TABLE DES MATIÈRES

1. GÉOMÉTRIES MODÈLES

Si X est une variété différentielle, on note $\mathrm{Diff}(X)$ le groupe des difféomorphismes de X, muni de la topologie compacte-ouverte (pour qui la convergence est la convergence uniforme sur les compacts), qui en fait un groupe topologique.

Date: 31 janvier 2010.

Définition 1.1. Une géométrie modèle est un couple (G, X), X étant une variété différentielle et G un groupe de difféomorphismes de X, vérifiant les hypothèses (a) et (b) suivantes :
(a) X est simplement connexe.
(b) L'action de G sur X est transitive, à stabilisateurs compacts.

Commençons par observer les conséquences suivantes :
- Si (G, X) est une géométrie modèle, alors il existe sur X, grâce à (b), une métrique riemannienne μ invariante par G. Une telle métrique est forcément complète, car G agit transitivement. Mais elle n'est pas toujours unique à multiple scalaire près : elle l'est si et seulement si le stabilisateur G_x d'un point x (et donc de tout point) agit irréductiblement sur l'espace tangent T_xX.
- Si (G, X) est une géométrie modèle, alors G est un groupe de Lie. En effet, le stabilisateur K d'un point $p \in X$ est compact, et s'envoie dans $\mathrm{O}(T_pX)$; l'image de cette application est un groupe de Lie (car tout sous-groupe fermé d'un groupe de Lie est de Lie). De plus, l'action de K sur un petit voisinage de p est conjuguée à l'action de K sur T_pX par l'exponentielle en p. Cela montre en particulier que l'ensemble X^ϕ des points fixes de $\phi \in K$ est une sous-variété fermée de X. Par connexité de X, si $\phi \neq 1$ alors X^ϕ est d'intérieur vide, et en particulier en p. Cela montre que l'action de K sur T_pX est fidèle, si bien que K est un groupe de Lie. De plus, G/K s'identifie à X donc est aussi une variété. Donc, comme la projection $G \to G/K$ est un fibré de base X et de fibre K, et que K et X sont des variétés, G possède une unique structure de variété qui fait de ce fibré un fibré différentiable.
- Soit G^0 la composante neutre de G. Alors G^0 agit transitivement sur X, et les stabilisateurs de G^0 sont connexes. En effet, les orbites de G^0 sont ouvertes (car G^0 est ouvert dans G, et ce car G est un groupe de Lie), donc G^0 agit transitivement par connexité de X. Ensuite, pour $x \in X$, l'inclusion $(G_x)^0 \subset (G^0)_x$ induit un revêtement $G^0/(G_x)^0 \to G^0/(G^0)_x = X$, trivial par simple connexité de X.

On définit une variété modelée sur (G, X) comme un quotient de X par un sous-groupe discret de G agissant librement sur X. Une variété modelée sur X hérite de toute métrique riemannienne invariante sur X.

Définition 1.2. On dira qu'une géométrie modèle (G, X) est de Thurston si elle vérifie les axiomes supplémentaires (c) et (d) suivants :
(c) G est maximal parmi les groupes de difféomorphismes de X agissant avec stabilisateurs compacts.
(d) Il existe une variété compacte modelée sur (G, X).

- Si (G, X) est une géométrie modèle vérifiant l'axiome (c), et si μ est une métrique riemannienne invariante par G, alors $G = \mathrm{Isom}(X, \mu)$. En effet, on sait que $G \subset \mathrm{Isom}(X, \mu)$; or le groupe de isométries d'une variété riemannienne connexe agit toujours avec stabilisateurs compacts, donc par maximalité de G l'inclusion ci-dessus est une égalité. Ceci permet de voir que l'axiome (c) est équivalent au suivant : pour toute métrique μ G-invariante sur X, $G = \mathrm{Isom}(X, \mu)$.
- Si (G, X) est une géométrie modèle vérifiant l'axiome (d), alors G est un groupe de Lie unimodulaire. En effet, il existe une variété compacte $M = \Gamma\backslash G$ modelée sur (G, X). Si, par choix d'un point-base on écrit $X = G/K$, on a $M = \Gamma\backslash G/K$ pour un certain sous-groupe discret Γ de G. Alors, comme K est compact, $\Gamma\backslash G$ est également compact, i.e. Γ est un réseau cocompact de G, ce qui impose à G d'être unimodulaire (car il possède un réseau). La réciproque n'étant pas vraie en général, on devra par la suite prouver au cas par cas l'existence d'un réseau dans les groupes que nous aurons à étudier.

Plan. La partie 2 parle des espaces à courbure sectionnelle constante, ce qui permet de décrire les gómetries modèles en dimension deux. La partie 3 décrit les géometries en dimension trois, et contient le cœur de la preuve, en suivant pour l'essentiel la démarche gómetrique de Thurston [13] ; elle se réfère pour certains points techniques à l'appendice qui contient des résultats élementaires sur les groupes de Lie de petite dimension, nécessaires à la complétude de la preuve, ainsi que quelques résultats auxiliaires. Il peut pour l'essentiel être lu indépendamment des parties qui le précedent.

2. EXEMPLES FONDAMENTAUX

Des exemples classiques et fondamentaux de géométries modèles sont données par les espaces à courbure constante : l'espace euclidien $\mathbf{E}^n$ ($n \geq 1$) à courbure nulle, la sphère $\mathbf{S}^n$ ($n \geq 2$) à courbure constante positive, et l'espace hyperbolique $\mathbf{H}^n$ ($n \geq 2$) à courbure constante négative. La métrique invariante est dans ces cas-là unique à multiple scalaire près, et le groupe des isométries ne dépend donc pas de ce choix, il s'agit respectivement de $\mathcal{E}(n)$, $\mathrm{O}(n+1)$, et $\mathrm{PO}(n,1)$ (ce dernier étant isomorphe à $\mathrm{PGL}(2,\mathbf{R})$ si $n = 2$), si bien que l'axiome (c) est vérifié.

Pour ces géométries modèles, l'axiome (d) est aussi respecté et ce sont donc des géométries de Thurston : c'est trivial dans le cas de la sphère puisqu'elle est elle-même compacte, et facile dans le cas de l'espace euclidien (prendre un tore). Reste à voir le cas hyperbolique bien connu. Il est très facile de "bricoler" des exemples en dimension 2 (en recollant quelques triangles hyperboliques), mais c'est plus difficile en dimension supérieure. L'argument le plus expéditif est d'utiliser l'argument général d'existence, dû en toute généralité à A. Borel [3], d'un réseau cocompact sans torsion dans tout groupe de Lie semi-simple (ici $\mathrm{PO}(n,1)$, pour $n \geq 2$). Donnons quand même un exemple explicite de variété compacte en dimension en dimension 3 : l'espace dodécaédral de Seifert-Weber (voir [13, page 36] pour plus de détails). Pour l'obtenir, on considére, dans l'espace hyperbolique orienté de dimension 3, un dodécaèdre régulier d'angles dièdres $2\pi/5$ (cela existe bien). On identifie deux faces opposées de la façon suivante : on prend une face F, on considère l'axe partant du centre de cette face jusqu'au centre de la face opposée F', et on translate F suivant cet axe jusqu'à F', et on la tourne de $3\pi/5$ (dans le sens positif déterminé par l'orientation), l'identifiant ainsi à la face opposée. On vérifie que ce recollement définit bien une structure de variété hyperbolique.

Le théorème qui suit dit que les espaces à courbure constante sont les seules géométries modèles en dimension 1 et 2.

Théorème 2.1 (Géométries modèles de dimension 1 et 2). *La seule géométrie modèle de dimension 1 est* $\mathbf{E}^1 \simeq \mathcal{E}(1)/\mathrm{O}(1)$.

Les géométries modèles de Thurston de dimension 2 sont le plan euclidien $\mathbf{E}^2 \simeq \mathcal{E}(2)/\mathrm{O}(2)$, *la sphère* $\mathbf{S}^2 \simeq \mathrm{O}(3)/\mathrm{O}(2)$, *et le plan hyperbolique* $\mathbf{H}^2 = \mathrm{PGL}(2,\mathbf{R})/\mathrm{PO}(2)$.

Remarque 2.2. La preuve qui suit montre que le résultat de ce théorème est valable sans utiliser l'axiome (d).

Elle montre également que c'est encore le cas si on remplace l'axiome (c) par sa forme faible suivante : la composante neutre G^0 est maximal parmi les groupes connexes de difféomorphismes agissant sur X (donc, ici, si G^0 est dimension 3), les mêmes arguments montrent qu'on obtient forcément comme espace l'un de ces trois, avec, comme groupe agissant, soit tout le groupe des isométries, soit le groupe des isométries directes.

Preuve : On fixe une métrique invariante. Pour le cas de dimension 1, on sait que toutes les métriques complètes sur $\mathbf{R}$ sont isométriques. Pour la dimension deux, par homogénéité, la courbure est constante. Or il est bien connu qu'une variété riemannienne complète simplement connexe à courbure constante est, à multiplication de la métrique par un scalaire près, la sphère euclidienne (courbure 1), l'espace euclidien (courbure 0), ou l'espace hyperbolique (courbure -1). Dans tous les cas, l'axiome (c) implique $G = \mathrm{Isom}(X)$. ■

Ce résultat ne tient plus en dimension ≥ 3 : on a par exemple les géométries produits $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{E}^1$ et $\mathbf{H}^2 \times \mathbf{E}^1$: la métrique invariante est unique à deux scalaires près : on peut la multiplier sur chaque facteur, ce qui ne change pas le groupe des isométries, qui est le produit des groupes des isométries de chaque facteur (cette remarque ne tient pas pour $\mathbf{E}^2 \times \mathbf{E}^1$), si bien que l'axiome (c) est vérifié (et l'axiome (d) l'est clairement, en prenant le produit d'une sphère ou d'une surface hyperbolique compacte avec un cercle).

Nous allons décrire un procédé qui permet de construire certaines géométries modèles de Thurston moins triviales.

Soit G un groupe de Lie unimodulaire simplement connexe. On pourrait espérer obtenir quelquechose d'intéressant avec les géométries modèles $(G, X = G)$ pour l'action par multiplication à gauche, mais il y a bien peu de chances que l'axiome (c) soit vérifié. Mais faisons la chose suivante : soit K un groupe compact d'automorphismes du groupe G. Notons G_ℓ l'ensemble des translations à gauche sur G (G_ℓ s'identifie à G). Considérons le sous-groupe G' de Diff(G) engendré par G_ℓ et K. Si on note L_g la multiplication à gauche par $g \in G$, on a la relation $\varphi \circ L_g \circ \varphi^{-1} = L_{\varphi(g)}$ pour tout $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ et $\mathfrak{g} \in G$. Ceci montre que G' s'identifie naturellement au produit semi-direct $G \rtimes K$. L'action de G' sur G est transitive (car $G_\ell \subset G'$) et à stabilisateurs compacts (car le stabilisateur de $1 \in G$ est K).

Pour que l'axiome (c) soit vérifié, il faut que K soit un sous-groupe compact maximal de Aut(G). Or, un résultat général, dit que, pour tout groupe de Lie G ayant un nombre fini de compasantes connexes, Aut(G) possède un sous-groupe compact maximal K, et que tout sous-groupe compact de Aut(G) est conjugué à un sous-groupe de K [5]. Mais on le vérifiera explicitement pour chacun des cas dont on aura besoin par la suite, i.e. pour tous les groupes unimodulaires simplement connexes de dimension 3 (appendice 4.1). Pour chaque G, on fixe donc un groupe compact maximal d'automorphismes et on se demande si (c) est vérifié. Ce ne sera pas toujours vrai, si bien qu'il faudra raisonner au cas par cas.

3. Étude de la dimension 3

Il est remarquable que les méthodes décrites ci-dessus permettent de produire *toutes* les géométries modèles de dimension 3.

Il existe, à isomorphisme près, 6 groupes de Lie unimodulaires simplement connexes de dimension 3 (voir l'appendice, théorème 4.2) : SU(2), $\widetilde{\mathcal{E}^+}(2)$, $\mathbf{R}^3$, $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbf{R})$, NIL, et SOL.

Commençons par quelques observations utiles. Pour une géométrie modèle (G, X) de dimension 3, le stabilisateur d'un point est isomorphe à un sous-groupe fermé de O(3). En particulier, sa composante neutre est soit tout SO(3), soit triviale, soit l'ensemble des rotations autour d'un axe.

Dans le premier cas, i.e. si le stabilisateur d'un point est de dimension 3, il agit transitivement sur les 2-plans tangents en ce point, et donc G agit transitivement sur tous les 2-plans de TX. Si on choisit une métrique riemannienne invariante, sa courbure sectionnelle est donc constante, et on a donc affaire à $\mathbf{E}^3$, $\mathbf{S}^3$, ou $\mathbf{H}^3$ et à son groupe d'isométries.

Maintenant vérifions si $(G_\ell \rtimes K, G)$ vérifie l'axiome (c), pour chacun des groupes G simplement connexes unimodulaires de dimension 3.

- $G = \mathrm{SU}(2)$. Alors $K = \mathrm{Aut}(G) = \mathrm{SO}(3)$. En particulier, les stabilisateurs sont de dimension 3, donc la géométrie est à courbure constante, et $\mathrm{Isom}(G) = \mathrm{O}(3)$ quel que soit le choix de la métrique $(G \rtimes K)$-invariante sur G. Donc (c) n'est pas vérifié, sinon on aurait $G \rtimes K = \mathrm{Isom}(G)$, mais $G \rtimes K$ est connexe (c'est en fait la composante neutre SO(3) de $\mathrm{Isom}(G) = \mathrm{O}(3)$).

- $G = \widetilde{\mathcal{E}^+}(2)$. Alors $\mathrm{Aut}(G) = \mathrm{Aut}(\mathfrak{e}(2)) = \mathcal{E}(2)$, et un sous-groupe compact maximal de $\mathcal{E}(2)$ est le stabilisateur K de l'origine de $\mathbf{E}^2$. Pour comprendre à quoi ressemble $(G \rtimes K, G)$, considérons un sous-groupe à un paramètre V de $\mathcal{E}(3)$ donné par un vissage sur un axe vertical, et considérons le sous-groupe de $\mathcal{E}(3)$ engendré par V et les translations horizontales. Il est isomorphe à $G = \widetilde{\mathcal{E}^+}(2)$, et agit simplement transitivement sur $\mathbf{E}^3$. On voit alors K comme le groupe des isométries qui fixent l'axe vertical point par point (les rotations autour de cet axe et les reflexions sur un plan contenant cet axe), et donc l'action de $G \rtimes K$ sur G s'identifie à l'action sur $\mathbf{E}^3$ de toutes les isométries qui respectent les droites verticales orientées. En particulier, l'axiome (c) n'est pas vérifié.

- $G = \mathbf{R}^3$. Alors $\mathrm{Aut}(G) = \mathrm{GL}(3, \mathbf{R})$, et un sous-groupe compact maximal est donné par $K = \mathrm{O}(3)$. Alors $G \rtimes K = \mathrm{Isom}(\mathbf{R}^3) = \mathcal{E}(3)$ quel que soit le choix de la métrique riemannienne invariante, et donc l'axiome (c) est vérifié.

Pour les trois cas restants, on aura besoin des deux lemmes suivants. Dans le groupe G, L_g ($g \in G$) désigne la translation $h \mapsto gh$.

Lemme 3.1. *Soit G un groupe, et N le normalisateur de G_ℓ dans l'ensemble $S(G)$ des permutations de G. Alors N est le produit semi-direct $G_\ell \rtimes N_1$, et $N_1 = \mathrm{Aut}(G)$. Pour tous $u \in \mathrm{Aut}(G)$, $g \in G$, on a $uL_gu^{-1} = L_{u(g)}$.*

Le même résultat vaut si G est un groupe topologique, en remplaçant $S(G)$ par le groupe des homéomorphismes de G, et $\mathrm{Aut}(G)$ désignant alors l'ensemble des automorphismes du groupe topologique G.

Preuve : Puisque G_ℓ agit simplement transitivement sur G et est distingué dans N, on a $N = G_\ell \rtimes N_1$. Si $u \in N_1$, on écrit $uL_gu^{-1} = L_h$. En évaluant en 1, on obtient $u(g) = h$, puis en évaluant en $g' \in G$, on obtient $u(gg') = u(g)u(g')$. Le cas topologique est obtenu de la même façon. ■

Lemme 3.2. *Soit G un groupe de Lie connexe, et K un sous-groupe compact maximal de $\mathrm{Aut}(G)$. On suppose que G_ℓ est un sous-groupe caractéristique de $G_\ell \rtimes K$. Alors $G_\ell \rtimes K$ est maximal parmi les groupes de difféomorphismes agissant avec stabilisateurs de la même dimension que K.*

Preuve : Soit $H \supset G' = G_\ell \rtimes K$ un groupe agissant avec stabilisateurs compacts sur G. Alors, comme $\dim(G') = \dim(H)$, G' est ouvert dans H et $H^0 = G'^0$. Donc, comme G_ℓ est caractéristique dans G'^0 qui est distingué dans H, il est distingué dans H. Donc, par le lemme 3.1, H_1 est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(G)$, or il contient K et est compact, et donc, par maximalité de K, $H_1 = K$. Comme H est engendré par H_1 et G_ℓ, cela prouve bien que $H \subset G_\ell \rtimes K$. ■

Revenons à G parmi les groupes $\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbf{R})$, NIL, et SOL, K un sous-groupe compact maximal d'automorphismes de G. Soit $H \supset G' = G \rtimes K$ un groupe agissant avec stabilisateurs compacts sur G. Alors H agit avec stabilisateurs de dimension d, avec $d \in \{0, 1, 3\}$ et $d \geq \dim(K)$. Le cas $d = 3$ est exclu dans les trois cas : en effet, par la proposition 4.4, G' ne se plonge pas dans le groupe des isométries d'un espace de dimension 3 à courbure constante. Le lemme 3.2 permet de ramener le cas $d = \dim(K)$ à montrer que, dans les trois cas, G_ℓ est caractéristique dans $G_\ell \rtimes K$. Après cela, il ne restera plus qu'à étudier le cas $G =$ SOL et $d = 1$.

- $G = \widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbf{R})$ ou NIL. Il faut montrer que G est caractéristique dans $G \rtimes K$. C'est vérifié, car dans les deux cas, l'algèbre de Lie de G est engendrée par l'algèbre de Lie dérivée de $G \rtimes K$. Dans le cas de $G = \widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbf{R})$, il suffit de remarquer que l'algèbre de Lie de G est un facteur direct de l'algèbre de Lie de $G \rtimes K$, le facteur direct engendrant le centralisateur de G dans $G \rtimes K$. Dans le cas de NIL, l'algèbre de Lie de $G \rtimes K$ possède une base (K, X, Y, Z), avec Z central et $[K, X] = Y$, $[K, Y] = -X$, $[X, Y] = Z$.
- $G =$ SOL. Cette fois, il est clair que G est caractéristique dans $G \rtimes K$, puisque c'est sa composante neutre. Il reste donc à envisager l'existence d'un groupe $H \supset G' = G \rtimes K$ agissant avec stabilisateurs compacts de dimension 1 ou 3 sur G.

  Si H agit avec stabilisateurs de dimension 1 (i.e. $\dim(H) = 4$), la proposition 4.5 prouve que H est alors localement isomorphe à SOL $\times\, \mathbf{R}$. Comme le centre de ce dernier est $\{1\} \times \mathbf{R}$, on en déduit que la composante neutre de H est isomorphe à SOL $\times\, \mathbf{R}$ ou SOL $\times\, \mathbf{R}/\mathbf{Z}$. Le premier de contient aucun sous-groupe compact non trivial donc est exclu, le second aussi car son unique sous-groupe compact maximal est central.

  Si H agit avec stabilisateurs de dimension 3, c'est le groupe des isométries (ou sa composante neutre) d'une des trois géométries de dimension trois à courbure constante. La proposition 4.4 permet d'exclure cette possibilité.

Théorème 3.3 (Classification en dimension 3)**.** *À isomorphisme près, il y a huit géométries modèles de Thurston (G, X) de dimension 3.*

• Si les stabilisateurs sont de dimension 3, X est l'espace euclidien $\mathbf{E}^3$, la sphère euclidienne $\mathbf{S}^3$, ou l'espace hyperbolique $\mathbf{H}^3$; G est son groupe des isométries, soit $\mathcal{E}(3)$, $\mathrm{O}(4)$, ou $\mathrm{PO}(3,1)$.

• Si les stabilisateurs sont de dimension 1, alors il y a un fibré naturel de X sur une géométrie modèle de dimension 2. Alors, X est soit un produit $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{E}^1$ ou $\mathbf{H}^2 \times \mathbf{E}^1$, soit la "Nil-géométrie" $(\mathrm{NIL} \rtimes \mathrm{O}(2), \mathrm{NIL})$ (qui fibre sur $\mathbf{E}^2$), soit la géométrie $(\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbf{R}) \rtimes \mathrm{O}(2), \widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbf{R}))$ (qui fibre sur $\mathbf{H}^2$).

• *Si les stabilisateurs sont finis, la seule géométrie possible est la "Sol-géométrie"* $(\mathrm{SOL} \rtimes D_4, \mathrm{SOL})$*, qui fibre naturellement sur* $\mathbf{E}^1$.

On va montrer en fait le résultat ci-dessous un peu plus fort :

Théorème 3.4. *Soit* (G, X) *une géométrie modèle de dimension 3.*

• *Si les stabilisateurs sont de dimension 3, alors* X *est un des trois espaces à courbure constante, et* G *est soit* $\mathrm{Isom}(X)$*, soit* $\mathrm{Isom}^+(X)$*, l'axiome (d) est vérifié, et (c) est vérifié dans le premier cas.*

• *Si les stabilisateurs sont de dimension 1 ou 0 et si la géométrie est de Thurston, alors on obtient une des 5 géométries citées dans le théorème précédent.*

• *Si l'axiome (d) est vérifié, alors il existe un groupe* G' *de difféomophismes de* X *contenant* G *tel que* (G', X) *est une géométrie modèle vérifiant l'axiome (c).*

Preuve :

• Le cas où les stabilisateurs sont de dimension 3 a déjà été mentionné ; on obtient une géométrie à courbure constante. Dans les trois cas, le groupe des isométries ne dépend pas du choix de la métrique, et a 2 composantes connexes.

• Considérons une géométrie modèle (G, X) ayant des stabilisateurs de dimension 1, et vérifiant l'axiome (d).

Pour tout point x de X, G_x^0 agit sur l'espace tangent T_xX par rotations autour d'un axe D_x. Le champ de droites D_x est canonique, invariant par G en particulier. Par simple connexité de X, il est orientable. En faisant le choix d'une orientation, on définit un champ de vecteurs unitaires V, V_x engendrant D_x pour tout x. Alors V est invariant par G^0. Il définit un flot (ϕ_t) qui commute donc à l'action de G^0.

On va montrer que le flot (ϕ_t) agit par isométries, ce qui utilisera l'axiome (d).

Appelons "feuilles" les trajectoires de ce flot. Soit $x \in X$ et $r \in G_x^0$. Alors $r \circ \phi_t(x) = \phi_t \circ r(x) = \phi_t(x)$, et donc r fixe point par point la feuille qui le contient. Ainsi, tous les points d'une même feuille ont le même stabilisateur.

Montrons que les feuilles sont des sous-variétés fermées de X. Pour $x \in X$, on note F_x la feuille contenant x. Comme G_x^0 est compact, son action au voisinage de x est conjuguée à son action sur T_xX. Donc pour tout $x \in X$, il existe un voisinage C_x de x, un difféomorphisme u_x de x vers un cylindre standard (le produit cartésien d'un disque euclidien et d'un segment), envoyant l'action de G_x^0 vers l'action de $\mathrm{SO}(2)$ par rotation isométrique de C, et envoyant x vers le centre de C.

Si on fixe une métrique G-invariante sur X, on peut définir C_{x_0} pour un $x_0 \in X$ et définir C_x comme $g.C_{x_0}$ pour $g \in G$ envoyant x_0 sur x (C_x ne dépend pas du choix de g).

Soit A l'axe de C, et $A_x = u_x^{-1}(A)$. Alors, pour tout x, montrons que $F_x \cap C_x = A_x$. D'abord, l'inclusion $F_x \cap C_x \supset A_x$ est évidente. Réciproquement, si $y \in F_x \cap C_x$, alors $G_x^0(y) \subset F_x$. Mais cela veut dire que $u_x(F_x)$ contient alors l'orbite par $\mathrm{SO}(2)$ de $u_x(y)$, qui est un cercle, i.e. F_x contient un cercle ne contenant pas x, ce qui est contradictoire (rappelons que F_x est l'image d'une immersion injective de $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$).

Cela implique déjà que les feuilles sont des sous-variétés localement fermées.

Supposons par l'absurde qu'il existe une feuille non fermée F. Alors il existe une autre feuille F', telle que $\overline{F} \cap F'$ est non vide. Soit $x \in F$ et $y \in \overline{F} \cap F'$. Alors G_x^0 fixe F point par point, donc fixe un point de F', dont fixe F' point par point, donc $G_x^0 \subset G_y^0$. Or ces deux groupes sont connexes de même dimension (car conjugués), donc ces groupes sont égaux. Or, au voisinage de y, l'action de G_y est conjuguée, via l'exponentielle, à son action sur T_yX. Donc, au voisinage de y, G_y^0 ne fixe que des points de F', ce qui est contradictoire puisqu'elle fixe les points de F. Donc toutes les feuilles sont des sous-variétés fermées de X.

Notons G_F le stabilisateur global de la feuille F ; G_F est fermé car F l'est. Si $x \in F$, $G_x^0 \lhd G_F$ (en effet $mG_x^0m^{-1} = G_{m(x)}^0 = G_x^0$). Donc G_F agit sur G_x^0 par conjugaison. L'action de G_F sur G_x^0 donne un morphisme continu $G_F \to \mathrm{Aut}(G_x^0) \simeq \mathbf{Z}$, qui est donc trivial sur $(G_F)^0$. Comme $(G_F)^0$ est ouvert dans G_F et G_F agit transitivement sur F, $(G_F)^0$ est aussi transitif sur F, et commute donc aux éléments de G_x^0.

Soit alors t et $g \in G_F^0$ qui ramène $\phi_t(x)$ en x. Alors $g \circ \phi_t$ fixe x et commute à tous les éléments de G_x^0. Or, dans une base adaptée, les éléments de G_x^0 sont les $\begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour $t \in \mathbf{R}$. Cela impose à $g \circ \phi_t$ d'être de la forme $\begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$. De plus, forcément $c = 1$ car g et ϕ_t préservent le champ V. L'axiome (d) impose à ϕ de préserver le volume, ce qui impose $a^2 + b^2 = 1$. Cela prouve que la différentielle de ϕ_t est une isométrie pour tout t, donc le flot est par isométries. Il est donc contenu dans G (par l'axiome (c)), et il est même central dans G.

Notons Z le sous-groupe de G correspondant au flot. Vérifions que Z est fermé, et pour cela montrons que, pour toute feuille F, $Z = \mathcal{Z}(G) \cap G_F^0$. L'inclusion de gauche à droite est acquise. Soit $z \in \mathcal{Z}(G) \cap G_F^0$. Quitte à composer par un élément du flot, on peut supposer que z fixe F point par point. Mais alors, pour tout $g \in G$ et $x \in F$, $zgx = gzx = gx$, donc z agit par l'identité (par transitivité), donc $z = 1$.

Soient F et F' deux feuilles distinctes, et soit $x \in F$, et ε la distance de x à F'. Alors $\varepsilon > 0$ car F' est fermée, et, comme le flot agit par isométries préservant F et F' et agissant transitivement sur F, cela implique que la distance de F à F' est > 0. Ainsi, le quotient Y par le flot est séparé.

Comme Z est central, on a l'égalité $Z \backslash G^0/K = G^0/ZK$. Comme ce dernier est séparé, ZK est fermé dans G^0, si bien que le quotient Y est une surface, il hérite de l'action de G ainsi que de la métrique riemannienne obtenue en oubliant la valeur de la métrique le long du flot, et la projection $X \to Y$ est un fibré. La suite exacte de ce fibré donne $\pi_1(X) \to \pi_1(Y) \to 0$ car la fibre KZ est connexe, donc Y est simplement connexe.

Alors Y est l'une des géométries modèles de dimension 2 (car les stabilisateurs de l'action de G/Z sur Y sont de dimension 1, c.f. la remarque 2.2). Soit g dans le noyau de cette action, i.e. g stabilise globalement toutes les feuilles. Par composition par un élément de Z, on peut supposer que g fixe un point x, mais cela l'oblige à être l'identité (car l'action de g autour de x est par "rotations" autour d'un feuille, donc ne stabilise pas les autres feuilles au voisinage de x). Donc le noyau de cette action est Z. On a donc l'extension centrale

$$1 \longrightarrow Z \longrightarrow G^0 \longrightarrow G/Z \longrightarrow 1$$

et G^0/Z est l'un des groupes SO(3), $\mathcal{E}^+(2)$, $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$. Cela induit une extension centrale d'algèbres de Lie

$$0 \longrightarrow \mathbf{R} \longrightarrow \mathfrak{g}' \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow 0$$

où $\mathfrak{g}$ est l'une des algèbres de Lie $\mathfrak{so}(3)$, $\mathfrak{e}(2)$, $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$. Le stabilisateur d'un point se voit comme une inclusion $\mathfrak{so}(2) \subset \mathfrak{g}'$ induisant une inclusion $\mathrm{SO}(2) \subset G^0$ d'image non centrale.

On classifie en appendice (propositions 4.6, 4.7, et 4.11) toutes les extensions centrales de ce type et toutes les sous-algèbres $\mathfrak{so}(2) \subset \mathfrak{g}'$ possibles, à automorphisme près. Il y a 6 possibilités. Pour chaque possibilité, donnée par une algèbre de Lie $\mathfrak{g}'$ et une sous-algèbre de Lie non centrale de dimension 1 $\mathfrak{k}$, on obtient la composante neutre du groupe correspondant en considérant le groupe de Lie simplement connexe G' correspondant à $\mathfrak{g}'$, et posant $G_0 = G'/(Z(G') \cap K')$, où K' est le sous-groupe à un paramètre de G' engendré par $\mathfrak{k}$. Si K est l'image de K dans ce quotient, K est par hypothèse compact et $G^0 = G_0$, et $X \simeq G_0/K$.

- $\mathfrak{e}(2) \times \mathbf{R}/\mathfrak{so}(2) \times \{0\}$: cela correspond, en termes de groupes, à $\mathcal{E}^+(2)/\mathrm{SO}(2) \times \mathbf{R} = \mathbf{E}^2 \times \mathbf{E}^1$. La géométrie modèle correspondante pour G^0 est $(\mathcal{E}^+(2) \times \mathcal{E}^+(1), \mathbf{E}^2 \times \mathbf{E}^1)$. Les métriques G^0-invariantes sont uniques à deux scalaires près (on peut multiplier sur chaque facteur). Dans tous les cas, le groupe se plonge dans le groupe de toutes les isométries de $\mathbf{E}^3$. C'est a fortiori le cas si la métrique est G-invariante. Donc l'axiome (c) n'est pas vérifié, et la géométrie (G, X) se plonge dans la géométrie euclidienne de dimension 3.
- $\mathfrak{so}(3) \times \mathbf{R}/\mathfrak{so}(2) \times \{0\}$, soit $\mathrm{SO}(3)/\mathrm{SO}(2) \times \mathbf{R} = \mathbf{S}^2 \times \mathbf{E}^1$. La géométrie modèle correspondante pour G^0 est $(\mathrm{SO}(3) \times \mathcal{E}^+(1)/\mathrm{SO}(2) \times \{1\}$. Les métriques G^0 invariantes sont uniques à 2 scalaires près (on peut multiplier les composantes verticale et horizontale

de la métrique), ce qui ne change pas le groupe des isométries, qui est $\mathrm{O}(3) \times \mathcal{E}(1)$. Alors G est contenu ce groupe, et, si égalité, l'axiome (c) est bien vérifié. Enfin, l'axiome (d) est vérifié (on peut modeler $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^1$).

– $\mathfrak{sl}(2,\mathbf{R}) \times \mathbf{R}/\mathfrak{so}(2) \times \{0\}$, soit $\mathrm{PSL}(2,\mathbf{R})/\mathrm{PSO}(2) \times \mathbf{R} = \mathbf{H}^2 \times \mathbf{E}^1$. Comme dans le cas précédent, les métriques G^0-invariantes sont uniques à deux scalaires près, ce qui ne change pas le groupe des isométries qui est $\mathrm{PGL}(2,\mathbf{R}) \times \mathcal{E}(1)$. À nouveau, G est contenu ce groupe, et, si égalité, l'axiome (c) est bien vérifié. Enfin, l'axiome (d) est vérifié (on peut modeler $M \times \mathbf{S}^1$ pour M surface hyperbolique compacte).

– $\mathfrak{so}(3) \times \mathfrak{so}(2)/\mathrm{diag}(\mathfrak{so}(2) \times \mathfrak{so}(2))$ (on identifie l'algèbre de Lie $\mathbf{R}$ à $\mathfrak{so}(2)$ pour la bonne cause). Cela correspond à $\mathrm{SO}(3) \times \mathrm{SO}(2)/\mathrm{diag}(\mathrm{SO}(2) \times \mathrm{SO}(2))$, ou encore à $\mathrm{U}(2)/\mathrm{U}(1)$. On reconnaît là la fibration de Hopf.
Le sous-groupe $\mathrm{SU}(2)$ agit simplement transitivement sur X. Il est caractéristique dans G^0 (car c'est le sous-groupe dérivé de G^0). Alors $\mathrm{SU}(2)$ est distingué dans G, et, par le lemme 3.1, les éléments du stabilisateur G_1 de $1 \in \mathrm{SU}(2)$ sont des automorphismes de $\mathrm{SU}(2)$. Donc la géométrie (G, X) ne vérifie pas l'axiome (c) : G est contenu dans le groupe engendré par les translations à gauche de $\mathrm{SU}(2)$ et les multiplications à gauche, qui donne la géométrie $(\mathrm{SO}(4), \mathbf{S}^3)$, elle-même contenue dans la géométrie de Thurston $(\mathrm{O}(4), \mathbf{S}^3)$.

– $\mathfrak{sl}(2,\mathbf{R}) \times \mathfrak{so}(2)/\mathrm{diag}(\mathfrak{so}(2) \times \mathfrak{so}(2))$. Alors X peut s'écrire $\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbf{R}) \times \widetilde{SO}(2)/\mathrm{diag}(\widetilde{SO}(2) \times \widetilde{SO}(2))$. Le groupe n'agit $\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbf{R}) \times \widetilde{SO}(2)$ n'agit pas fidèlement, le noyau de l'action étant cyclique infini : c'est $\mathrm{diag}(N \times N)$, où N est le noyau du revêtement universel $\widetilde{SO}(2) \to \mathrm{SO}(2)$. Le facteur direct $\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbf{R})$ agit simplement transitivement sur X, et est caractéristique dans G^0.
Par conséquent, $\widetilde{\mathrm{SL}}(2)$ est distingué dans G, et, par le lemme 3.1, les éléments du stabilisateur G_1 de $1 \in \widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbf{R})$ sont des automorphismes de $\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbf{R})$. Donc G_1 est contenu dans un sous-groupe compact maximal K de $\mathrm{Aut}(\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbf{R})) = \mathrm{PGL}(2,\mathbf{R})$, et en cas d'égalité, on reconnaît bien la géométrie $(\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbf{R}) \rtimes K, \widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbf{R}))$, dont on a montré en préliminaires qu'elle vérifie bien l'axiome (c).

– $\mathfrak{e}^*(2)/\mathfrak{k}$, où $\mathfrak{k}$ est engendrée par K. Notons $\mathcal{E}^*(2)$ le groupe correspondant, et $\mathrm{SO}(2)$ le sous-groupe engendré par K. Le sous-groupe de Lie engendré par l'algèbre de Lie dérivée agit simplement transitivement sur X, et est isomorphe à NIL. Il est caractéristique dans G^0. La suite est entièrement analogue au cas précédent.

• Supposons maintenant que les stabilisateurs sont finis.
Alors, pour tout $x \in X$, $G^0 \to X : g \to gx$ est un revêtement, donc un difféomorphisme car X est simplement connexe. On peut donc identifier X à G^0. Alors G^0 est un groupe de Lie simplement connexe de dimension 3 unimodulaire.
Alors G est produit semi-direct de G^0 par le stabilisateur G_x de $x \in X$. De plus comme G agit fidèlement, par le lemme 3.1, l'action de G_x sur G par conjugaison est une action fidèle par automorphismes. Donc G_x est contenu dans un sous-groupe compact maximal d'automorphismes de G, et on a déjà étudié une par une les géométries de ce type, et elles se plongent toutes dans une géométrie vérifiant l'axiome (c). Pour que (G, X) vérifie lui-même l'axiome (c), il faut que G_x soit un sous-groupe compact maximal d'automorphismes de G, et la seule possibilité pour cela est que $G^0 = \mathrm{SOL}$ et $G_x \simeq D_4$.

L'axiome (d) reste à prouver pour les trois derniers cas ($\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbf{R})$, NIL, et SOL) ; c'est fait en appendice (paragraphe 4.4).

Lorsqu'on a montré que $(\mathrm{SOL} \rtimes D_4, \mathrm{SOL})$ vérifiait bien l'axiome (c), on a eu besoin du résultat que, pour toute géométrie modèle (G, X) avec stabilisateurs de dimension au moins 1, G se plongeait dans l'un des groupes des 7 géométries modèles de Thurston ayant des stabilisateurs de dimension 1. Ce résultat a maintenant été prouvé, ce qui achève la preuve. ■

4. APPENDICE

4.1. **Algèbres de Lie unimodulaires de dimension 3 et leurs sous-groupes compacts maximaux d'automorphismes.**

Soit G un groupe de Lie, et $\Delta : G \to \mathbf{R}_+^*$ sa fonction modulaire. Le morphisme induit d'algèbres de Lie :$\mathfrak{g} \to \mathbf{R}$ est la fonction $x \to \mathrm{Tr}(\mathfrak{ad}(x))$. On veut, dans ce paragraphe, classifier les algèbres de Lie $\mathfrak{g}$ de dimension 3, unimodulaires au sens où $\mathrm{Tr}(\mathfrak{ad}(x)) = 0$ pour tout x.

Le produit étant alterné, il est défini par une application linéaire $\Lambda^2\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. Fixons une structure euclidienne orientée sur $\mathfrak{g}$. Alors $\Lambda^2\mathfrak{g}$ s'identifie à $\mathfrak{g}$, et la donnée du produit est équivalente à celle d'une une application linéaire $L : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, le crochet étant alors donné par $[x, y] = L(x \times y)$, où $\times$ désigne le produit vectoriel. On voit que l'unimodularité est équivalente au fait que L soit un endomorphisme symétrique.

Il existe donc une base orthonormale directe (e_1, e_2, e_3) qui diagonalise L. On écrit $L = \mathrm{diag}(a_1, a_2, a_3)$: autrement dit, $[e_i, e_{i+1}] = a_{i+2}e_{i+2}$, où les indices sont pris modulo 3. Un changement diagonal (α_i) de la structure euclidienne change a_i en $a_i(\alpha_{i-1}\alpha_{i+1}/\alpha_i)$ pour des réels $\alpha_i > 0$. Prenant $\alpha_{i-1} = \alpha_{i+1} = \sqrt{\alpha}$ pour un $\alpha > 0$ et $\alpha_i = 1$, on voit qu'on peut se ramener à $a_i \in \{-1, 0, 1\}$ pour tout i. On peut également permuter les éléments de la base, mais en changeant tous les signes si la permutation est impaire. Si on change le signe d'un vecteur de base, on change tous les signes des a_i. Ces opérations permettent de supposer $a_1 \geq a_2 \geq a_3$, et $a_1 + a_3 \geq 0$, $a_2 \geq 0$, soit

$$(a_1, a_2, a_3) \in \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 1, -1), (1, 0, 0), (1, 0, -1), (0, 0, 0)\}$$

Identifions tous ces cas :
- $(1, 1, 1)$ définit $\mathfrak{so}(3)$.
- $(1, 1, -1)$ définit $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$.
- $(1, 0, 0)$ définit l'algèbre de Heisenberg $\mathfrak{nil}$.
- $(0, 0, 0)$ définit l'algèbre de Lie abélienne.
- $(1, 0, -1)$ définit $\mathfrak{e}(2)$, algèbre de Lie du groupe des isométries du plan euclidien, qui est résoluble non nilpotente.
- $(1, 1, 0)$ est appelée $\mathfrak{sol}$, elle est aussi résoluble et non nilpotente.

On va maintenant s'intéresser aux groupes compacts d'automorphismes de chacune de ces algèbres de Lie.

• Commençons par étudier $G = \mathrm{Aut}(\mathfrak{sol})$. On choisit une base (X, Y, H) de $\mathfrak{sol}$ vérifiant $[H, X] = X$, $[H, Y] = -Y$, et $[X, Y] = 0$. Dans cette base, on voit facilement que

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & x \\ 0 & b & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b & x \\ a & 0 & y \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ a, b \in \mathbf{R}^*, x, y \in \mathbf{R} \right\}$$

Il a 8 composantes connexes. La composante neutre de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{sol})$ est l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & 0 & x \\ 0 & b & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour $a, b > 0$. Elle ne contient aucun sous-groupe compact non trivial : en effet, si une telle matrice A appartenait à un sous-groupe compact K de G, les valeurs propres a et b seraient alors forcément 1, et donc A agirait de façon unipotente, et donc serait trivial. Donc tout sous-groupe compact de G s'injecte dans G/G^0.

Soit G' le sous-groupe d'indice 2 des matrices de la première forme (i.e. dont l'action sur le quotient par l'algèbre de Lie dérivée est triviale).

Notons K_0 le sous-groupe

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ a, b \in \{\pm 1\} \right\}.$$

Alors K_0 est fini d'ordre 8, isomorphe au groupe diédral D_4.

Comme $|K_0| = 8 = |G/G^0|$, K_0 est un sous-groupe compact maximal de G ; en particulier $G/G^0 \simeq K_0 \simeq D_4$. On veut montrer que tout sous-groupe compact K de G est conjugué à un sous-groupe de K_0 par un élément de G^0. Rappelons que K s'identifie à un sous-groupe de $G/G^0 \simeq D_4$.

Exercice 4.1. Tout élément d'ordre 2 ou 4 est conjugué à un élément de K_0 par un élément de G^0.

Cela règle déjà le cas où K est un groupe cyclique. Les sous-groupes non cycliques de D_4 sont lui-même et les deux groupes engendrés par deux reflexions sur des axes orthogonaux. Si K est non cyclique, il contient le centre de D_4 (qui est d'ordre 2).

Quitte à conjuguer, grâce à l'exercice, cet élément est $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors K est inclus dans son commutant, ce qui ramène le problème à montrer que dans l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{pmatrix}$, tout sous-groupe fini est conjugué par des matrices diagonales à coefficients positifs au groupes des matrices de cette forme n'ayant comme coefficients que des 0 ou ± 1, et c'est laissé en exercice.

- Passons à $\mathfrak{e}(2)$.Dans la base (K, X, Y) vérifiant $[K, X] = Y$, $[K, Y] = -X$, $[X, Y] = 0$, on a

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{e}(2)) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b & x \\ b & a & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & x \\ b & -a & y \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ a^2 + b^2 > 0 \right\} = \mathcal{E}(2) \times \mathbf{R}_+^*$$

(c'est l'ensemble des similitudes du plan euclidien).

Si K est un sous-groupe compact de $\mathcal{E}(2) \times \mathbf{R}_+^*$, son image dans $\mathbf{R}_+^*$ est un sous-groupe compact, donc est trivial. Donc K est contenu dans $\mathcal{E}(2)$.

Or, on sait que tous les sous-groupes compacts maximaux de $\mathcal{E}(2)$ sont conjugués à $\mathrm{O}(2)$ (par un argument géométrique : un groupe compact d'isométries du plan doit fixer un point).

- Passons à l'algèbre de Lie de Heisenberg $\mathfrak{nil}$.

On prend la base habituelle (X, Y, Z), avec Z central et $[X, Y] = Z$. On vérifie immédiatement que, dans la base (X, Y, Z), le groupe G des automorphismes de $\mathfrak{nil}$ est l'ensemble des matrices de la forme $B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ x & y & \lambda \end{pmatrix}$ avec $ad - bc = \lambda \neq 0$. Remarquons la particularité que tout automorphisme de $\mathfrak{nil}$ préserve l'orientation.

Un sous-groupe compact d'automorphismes est donné par

$$K_0 = \left\{ \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & \det(R) \end{pmatrix}, \ R \in \mathrm{O}(2) \right\}.$$

Montrons que tout groupe compact K d'automorphismes de $\mathfrak{nil}$ est conjugué à un sous-groupe de K_0 (par un élément de G^0).

Comme tout sous-groupe compact de $\mathrm{GL}(2, \mathbf{R})$ est conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{O}(2)$ (par des matrices de $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ si on veut), K est conjugué à un sous-groupe du groupe H des matrices $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ x & y & \lambda \end{pmatrix}$ pour $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(2)$ et $\lambda = ad - bc \in \{\pm 1\}$.

Or H est isomorphe à $\mathcal{E}(2)$: prendre le morphisme

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ X^\intercal & 1 \end{pmatrix} \mapsto \left(\det(A) \begin{pmatrix} A^\intercal & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1}$$

Donc, comme K_0 est isomorphe à $\mathrm{O}(2)$, c'est un sous-groupe maximal de H, et donc tout sous-groupe compact de H est conjugué (par un élément de H^0) à sous-groupe de K_0.

- Passons à $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ et $\mathfrak{so}(3)$. Pour ces deux algèbres de Lie, la forme de Killing, définie par $B(x, y) = \mathrm{Tr}(\mathfrak{ad}(x)\mathfrak{ad}(y))$, est quadratique non dégénérée, de signature respectivement $(2, 1)$, $(0, 3)$. Les automorphismes doivent préserver la forme de Killing, et forment donc un sous-groupe de $\mathrm{O}(2, 1)$, resp. $\mathrm{O}(3)$. Dans chaque cas, on vérifie que les applications préservant la forme de Killing sont tous des automorphismes ou des antiautomorphismes. Dans le second cas, on en conclut $\mathrm{Aut}(\mathfrak{so}(3)) = \mathrm{SO}(3)$, l'action étant donnée par conjugaison. Dans le cas de $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$, on prend l'action par conjugaison de $\mathrm{PGL}(2, \mathbf{R})$, qui est isomorphe à un sous-groupe d'indice 2 de $\mathrm{O}(2, 1)$, d'où on conclut $\mathrm{Aut}(\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})) = \mathrm{PGL}(2, \mathbf{R})$. Dans ce cas aussi, remarquons que les automorphismes préservent l'orientation.

Dans le cas de $\mathfrak{so}(3)$, le groupe $\mathrm{SO}(3)$ des automorphismes est compact, donc l'assertion que tout sous-groupe fermé de $\mathrm{SO}(3)$ est conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{SO}(3)$ est tautologique.

L'assertion analogue est aussi vraie pour $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$: tout sous groupe compact de $\mathrm{PGL}(2, \mathbf{R})$ est conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{PO}(2)$ (c'est une conséquence immédiate du résultat analogue connu dans $\mathrm{GL}(2, \mathbf{R})$).

• Enfin, pour $\mathbf{R}^3$, l'algèbre de Lie abélienne de dimension 3, le groupe des automorphismes est $\mathrm{GL}(3, \mathbf{R})$, et on sait que tout sous-groupe compact est conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{O}(3)$.

Énonçons enfin le théorème que l'on a démontré.

Théorème 4.2. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie unimodulaire de dimension 3. Alors*

- *À isomorphisme près, $\mathfrak{g}$ est l'une des six algèbres de Lie suivantes : $\mathfrak{so}(3)$, $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$, $\mathfrak{e}(2)$, $\mathfrak{sol}$, $\mathfrak{nil}$, $\mathbf{R}^3$.*
- *Dans $Aut(\mathfrak{g})$, tout sous-groupe compact est contenu dans un sous-groupe compact maximal, et tous les sous-groupes compacts maximaux sont conjugués.*

  Pour chacune des 6 algèbres de Lie unimodulaires de dimension 3, un sous-groupe compact maximal est donné respectivement par $\mathrm{SO}(3) \subset \mathrm{SO}(3)$, $\mathrm{PO}(2) \subset \mathrm{PGL}(2, \mathbf{R})$, $\mathrm{O}(2) \subset \mathcal{E}(2)$, K_0 $(\simeq D_4) \subset \mathrm{Aut}(\mathrm{SOL})$, K_0 $(\simeq \mathrm{O}(2)) \subset \mathrm{Aut}(\mathrm{NIL})$, $\mathrm{O}(3) \subset \mathrm{GL}(3, \mathbf{R})$.

4.2. **Quelques résultats de plongements.**

Lemme 4.3. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie unimodulaire de dimension 3, et $\mathfrak{h}$ une algèbre de Lie de dimension 3. Alors, si $\mathfrak{g}$ se plonge dans $\mathfrak{h} \times \mathbf{R}$, alors $\mathfrak{g}$ est soit abélienne, soit isomorphe à $\mathfrak{h}$.*

Preuve : . Soit i un plongement $\mathfrak{g} \to \mathfrak{h} \times \mathbf{R}$, et p la projection $\mathfrak{h} \times \mathbf{R} \to \mathfrak{R}$. Si $p \circ i$ est surjectif, alors il est bijectif et $\mathfrak{g}$ est isomorphe à $\mathfrak{h}$. Sinon, soit $\mathfrak{n} = p^{-1}(p \circ i(\mathfrak{g}))$. Alors $\mathfrak{g}$ est isomorphe à $i(\mathfrak{g}) = \mathfrak{n} \times \mathbf{R}$. Mais alors $\mathfrak{n}$ est une algèbre de Lie unimodulaire de dimension 2, donc abélienne, et donc $\mathfrak{g}$ aussi. ■

Étudions les commutants dans $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$, $\mathfrak{so}(3) \times \mathfrak{so}(3)$, et $\mathfrak{e}(3)$.

- Si $u \in \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ est non nul, alors son commutant est de dimension réelle 2 : c'est la droite complexe $\mathbf{C}u$.
- Soit $u = (v, w) \in \mathfrak{so}(3) \times \mathfrak{so}(3)$ non nul. Alors soit v et w sont tous les deux non nuls, et le commutant de u est de dimension 2, c'est $\mathbf{R}u \times \mathbf{R}v$, soit w, par exemple, est nul, et le commutant de u est alors de dimension 4, c'est $\mathbf{R} \times \mathfrak{so}(3)$.
- Dans $\mathfrak{e}(3)$, soit u un élément non nul. Soit u engendre un groupe de vissages (éventuellement de translations), et son commutant est de dimension 2 (il engendre tous les vissages sur le même axe), soit u engendre un groupe de translations, et alors son commutant est l'ensemble des translations, de dimension 3.

Proposition 4.4. *Les algèbres de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R}) \times \mathbf{R}$, $\mathfrak{nil}$, et $\mathfrak{sol}$ ne se plongent pas dans $\mathfrak{so}(4)$, $\mathfrak{e}(3)$, $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$.*

Preuve : On remarque que, pour un plongement $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R}) \times \mathbf{R} \to \mathfrak{g}$, l'image du facteur $\mathbf{R}$ doit avoir un commutant de dimension au moins 4. Cela exclut directement les possibilités $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}(3)$, $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$, et pour $\mathfrak{so}(4)$, cela impliquerait que $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R}) \times \mathbf{R}$ est isomorphe à $\mathfrak{so}(3) \times \mathbf{R}$, ce qui n'est pas le cas.

Pour le cas de $\mathfrak{nil}$, le centre doit être envoyé sur des éléments ayant un commutant de dimension au moins trois. Cela exclut directement $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$. Pour $\mathfrak{e}(3)$, son image serait abélienne, ce qui est exclu. Pour $\mathfrak{so}(4)$, cela impliquerait que $\mathfrak{nil}$ se plonge vers $\mathfrak{so}(3) \times \mathbf{R}$, et serait donc, par le lemme 4.3, isomorphe à $\mathfrak{so}(3)$, ce qui n'est pas le cas.

Si on avait un plongement $i : \mathfrak{sol} \to \mathfrak{so}(4) \simeq \mathfrak{so}(3) \times \mathfrak{so}(3)$, une des deux projections serait surjective (sinon les deux seraient de rang 1 et donc i serait de rang 2, absurde), et ce serait également absurde puisque $\mathfrak{sol}$ n'est pas isomorphe à $\mathfrak{so}(3)$. Si on avait un plongement $\mathfrak{sol} \to \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$, en prenant la base (H, X, Y) de $\mathfrak{sol}$ définie par $[H, X] = X$, $[H, Y] = -Y$, $[X, Y] = 0$, $i(X)$ et $i(Y)$ commuteraient donc seraient **C**-colinéaires, mais sont des vecteurs propres pour des valeurs propres distinctes de $\mathfrak{ad}(i(H))$, contradiction. Si on a un plongement $i : \mathfrak{sol} \to \mathfrak{e}(3)$, on regarde la composition avec le morphisme naturel $\mathfrak{e}(3) \to \mathfrak{so}(3)$. Il n'est pas de rang 3, puisque $\mathfrak{sol}$ n'est pas isomorphe à $\mathfrak{so}(3)$. Il est donc de rang au plus 1. On peut donc voir i comme un plongement de $\mathfrak{sol}$ vers $\mathbf{R}^3 \rtimes \mathfrak{so}(2) \simeq \mathfrak{e}(2) \times \mathbf{R}$. Cela contredit le lemme 4.3 car $\mathfrak{sol}$ n'est ni abélien ni isomorphe à $\mathfrak{e}(2)$. ■

Proposition 4.5. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie (sur un corps K de caractéristique $\neq 2$) unimodulaire de dimension 4 contenant une sous-algèbre de Lie isomorphe à $\mathfrak{sol}$. Alors $\mathfrak{g}$ est isomorphe à $\mathfrak{sol} \times K$.*

Preuve : Soit (H, X, Y) une famille libre de $\mathfrak{g}$ vérifiant $[H, X] = X$, $[H, Y] = -Y$, $[X, Y] = 0$. Soit Z un élément qui complète cette famille en une base. Si on écrit $[H, Z] = aX + bY + cH + dZ$, comme $\mathrm{Tr}(\mathfrak{ad}(H)) = 0$, on a $d = 0$. Ensuite, quitte à remplacer Z par $Z - aX + bY$, on se ramène à $a = b = 0$. Ainsi, $[H, Z] = cH$.

On écrit l'identité de Jacobi $[[H, Z], X] + [[Z, X], H] + [[X, H], Z] = 0$. Cela donne, en posant $U = [Z, X]$, $cX - [H, U] + U = 0$. Un coup d'oeil à $\mathfrak{ad}(H)$ fait voir que X n'est pas contenu dans l'image de $(1 - \mathfrak{ad}(H))$. Cela impose $c = 0$, et donc $U \in \mathrm{Ker}(1 - \mathfrak{ad}(H))$, or ce dernier est égal à KX (car la caractéristique est différente de 2), si bien que $U = \lambda X$ pour un $\lambda \in K$. De façon analogue, on obtient $V = [Z, Y] = \mu Y$, $\mu \in K$. Comme $\mathrm{Tr}(\mathfrak{ad}(Z)) = 0$, $\mu = -\lambda$. Par conséquent, quitte à remplacer Z par $Z - \lambda H$, on peut supposer que $[H, Z] = [X, Z] = [Y, Z] = 0$, et donc que $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{sol} \times K$. ■

4.3. **Extensions centrales des groupes d'isométries des surfaces.**

Une extension centrale entre algèbres de Lie est une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a} \xrightarrow{i} \mathfrak{g}' \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow 0$$

telle que $i(\mathfrak{a})$ est central dans $\mathfrak{g}'$. On dit alors que $\mathfrak{g}'$ est une extension centrale de $\mathfrak{g}$ par $\mathfrak{a}$.

On s'intéressera spécifiquement aux extensions centrales de $\mathfrak{g}$ par l'algèbre de Lie $\mathbf{R}$ abélienne de dimension 1, quand $\mathfrak{g}$ est l'une des trois algèbres de Lie $\mathfrak{so}(3)$, $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$, $\mathfrak{e}(2)$, i.e. l'algèbre de Lie du groupe des isométries directes d'une géométrie modèle de Thurston de dimension 2. Les cas possibles sont résumés dans les deux proposition qui suivent.

Proposition 4.6. *Toute extension centrale entre algèbres de Lie*

$$0 \longrightarrow \mathbf{R} \longrightarrow \mathfrak{g}' \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow 0, \quad \mathfrak{g} \in \{\mathfrak{so}(3), \mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})\}$$

est scindée (donc triviale).

Preuve : Rappelons que $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ a une base (H, X, Y) constituée de matrices H, X, Y vérifiant les relations

$$[H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y, \quad \text{et} \quad [X, Y] = H. \qquad (*)$$

Donc $\mathfrak{g}'$ a une base (H', X', Y', Z) telle que Z' est central et

$$[H', X'] = 2X' + 2aZ, \quad [H', Y'] = -2Y' - 2bZ \quad [X', Y'] = H' + cZ$$

pour des réels a, b, c. On vérifie immédiatement que la famille $(H' + c, X' + a, Y' + b)$ vérifie les relations $(*)$, et donc on a une section. Le cas de $\mathfrak{so}(3)$, qui a une base (K, X, Y) vérifiant $[K, X] = Y$, $[K, Y] = -X$, $[X, Y] = K$, est analogue. ■

Le résultat de la proposition est faux pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}(2)$. Rappelons que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}(2)$ a une base (K, X, Y) vérifiant les relations

$$[K, X] = Y \quad [K, Y] = -X \quad [X, Y] = 0.$$

Proposition 4.7. *Si $\mathfrak{g}'$ est une extension centrale de $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}(2)$ par $\mathbf{R}$, alors $\mathfrak{g}'$ possède une base (K, X, Y, Z) avec Z central, $[K, X] = Y$, $[K, Y] = -X$, et $[X, Y] = \varepsilon Z$, avec $\varepsilon \in \{0, 1\}$. Dans le cas où $\varepsilon = 1$, l'extension n'est pas scindée ; on notera $\mathfrak{e}^*(2)$ l'extension centrale non triviale de $\mathfrak{e}(2)$ par $\mathbf{R}$.*

Preuve : Il existe une base (K', X', Y', Z') avec Z' central vérifiant les relations $[K', X'] = Y' + aZ'$, $[K', Y'] = -X' - bZ'$, et $[X', Y'] = cZ'$. En posant $X = X' + bZ'$ et $Y = Y' + aZ'$, on regarde les relations dans la base (K', X, Y, Z') : $[K', X] = Y$, $[K', Y] = -X$, $[X, Y] = cZ'$. Si $c = 0$, l'extension est scindée. Si $c \neq 0$, le centre est inclus dans l'algèbre de Lie dérivée et donc l'extension n'est pas scindée. En posant $Z = cZ'$ et $K = K'$, la base (K, X, Y, Z) vérifie bien les relations voulues avec $\varepsilon = 1$. ■

Définition 4.8. Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie (réelle de dimension finie), on appelera ici sous-algèbre *compacte* toute sous-algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ de $\mathfrak{g}$ telle qu'il existe un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, et tel que le sous-groupe de Lie correspondant à $\mathfrak{k}$ soit compact. Deux sous-algèbres de Lie sont dites conjuguées s'il existe un automorphisme de $\mathfrak{g}$ envoyant l'une sur l'autre.

Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie, toute sous-algèbre de Lie de son centre $\mathfrak{z}$ est compacte. On dira qu'une sous-algèbre compacte $\mathfrak{h}$ est *effective* si $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{z} = \{0\}$.

On va chercher à classifier, à conjugaison près, les sous-algèbres compactes effectives de dimension 1 de $\mathfrak{g}'$, pour $\mathfrak{g}'$ parmi $\mathbf{R} \times \mathfrak{so}(3)$, $\mathbf{R} \times \mathfrak{e}(2)$, $\mathfrak{e}^*(2)$, $\mathbf{R} \times \mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$. On note $\mathfrak{g}$ le quotient de $\mathfrak{g}'$ par son centre, soit respectivement $\mathfrak{so}(3)$, $\mathfrak{e}(2)$, $\mathfrak{e}(2)$, $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$.

Commençons par observer que l'image dans $\mathfrak{g}$ d'une sous-algèbre compacte de $\mathfrak{g}'$ est compacte. On note dans les trois cas $\mathfrak{so}(2)$ l'algèbre de lie engendrée par K, avec, pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$, $K = X - Y$.

Proposition 4.9. *Soit* $\mathfrak{g} \in \{\mathfrak{so}(3), \mathfrak{e}(2), \mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})\}$. *Toute sous-algèbre compacte de dimension 1 de* $\mathfrak{g}$ *est conjuguée à* $\mathfrak{so}(2)$ *et est effective.*

Preuve : Soit G le groupe de Lie de centre trivial correspondant à $\mathfrak{g}$. Alors $G \in \{\mathrm{SO}(3), \mathcal{E}^+(2), \mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})\}$, et les sous-groupes compacts de dimension 1 de chacun de ces trois sont les stabilisateurs des points de respectivement $\mathbf{S}^2$, $\mathbf{R}^2$, et $\mathbf{H}^2$, donc sont conjugués. ■

Corollaire 4.10. *Toute sous-algèbre compacte de dimension 1 de* $\mathfrak{g} \times \mathbf{R}$ *est conjuguée à une sous-algèbre de* $\mathfrak{so}(2) \times \mathbf{R}$.

Soit $\mathfrak{k}$ une sous-algèbre compacte effective de dimension 1 de $\mathfrak{g} \times \mathbf{R}$ incluse dans $\mathfrak{so}(2) \times \mathbf{R}$. Soit (aK, b) un générateur de $\mathfrak{k}$. Comme $\mathfrak{k}$ est effective, $a \neq 0$, et on peut donc supposer que $a = 1$. Par une dilatation par rapport à $\mathbf{R}$, on peut supposer que $b \in \{0, 1)\}$. Dans les deux cas, on vérifie bien que $\mathfrak{k}$ est compacte. Il faut voir si les sous-algèbres compactes $\mathbf{R}(1, 0)$ et $\mathbf{R}(1, 1)$ sont conjuguées. Dans le cas où $\mathfrak{g}$ est simple, i.e. $\mathfrak{g} \in \{\mathfrak{so}(3), \mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})\}$, on vérifie immédiatement que $\mathfrak{g} \times \{0\}$ est le seul idéal de dimension 3 de $\mathfrak{g}$. Cela empêche $\mathbf{R}(K, 0)$ et $\mathbf{R}(K, 1)$ d'être conjuguées. En revanche, dans le cas de $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}(2)$, on voit que, l'application linéaire qui envoie $(K, 0)$ sur (K, t) et qui fixe $(X, 0)$, $(Y, 0)$, et $(0, 1)$ est un automorphisme de $\mathfrak{g} \times \mathbf{R}$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

Énonçons donc ce qu'on vient de démontrer, mais, avant cela, on choisira de noter $\mathfrak{so}(2)$ aussi bien $\mathbf{R}$ que la sous-algèbre compacte de dimension 1 choisie dans $\mathfrak{g}$.

Proposition 4.11. *Si* $\mathfrak{g} \in \{\mathfrak{so}(3), \mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})\}$, *à conjugaison près, les sous-algèbres compactes effectives de dimension 1 de* $\mathfrak{g} \times \mathfrak{so}(2)$ *sont* $\mathfrak{so}(2) \times \{0\}$ *et* $\mathrm{diag}(\mathfrak{so}(2) \times \mathfrak{so}(2))$.

À conjugaison près, la seule sous-algèbre compacte effective de dimension 1 de $\mathfrak{e}(2)$ *est* $\mathfrak{so}(2) \times \{0\}$.

Il reste le cas de $\mathfrak{g}' = \mathfrak{e}^*(2)$. Soit $\mathfrak{k}$ une sous-algèbre compacte dimension 1. Sa projection sur $\mathfrak{e}(2)$ est une sous-algèbre compacte. Il faut d'abord voir que les automorphismes conjuguant les sous-algèbres compactes de $\mathfrak{g}$ remontent à $\mathfrak{g}'$. Or les translations de $\mathbf{R}^2$ conjuguent les sous-algèbres compactes de $\mathfrak{g}$. L'action de la translation (a, b) sur $\mathfrak{g}$ est donnée par $K \mapsto K + bX - aY$, $X \mapsto X$, $Y \mapsto Y$. On peut la relever en un automorphisme de $\mathfrak{g}'$ par $K \mapsto K + bX - aY$, $X \mapsto X - bZ$, $Y \mapsto Y + aZ$, $Z \mapsto Z$.

Cela permet de supposer que $\mathfrak{k}$ est incluse dans le sous-espace engendré par K et Z. Comme $\mathfrak{k}$ n'est pas central, il possède un générateur de la forme $K + aZ$. Mais remarquons que, pour tout $t \in \mathbf{R}$ l'application linéaire qui envoie K sur $K + tZ$ et fixe X, Y, et Z est un automorphisme de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}'$. On peut donc supposer que $a = 0$. Il reste à vérifier que K engendre bien une sous-algèbre compacte, ce qui est clair grâce à le représentation matricielle :

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} 0 & -i/2 & 0 \\ 0 & 0 & i/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a prouvé

Proposition 4.12. *À conjugaison près, la seule sous-algèbre compacte de $\mathfrak{e}^*(2)$ est la sous-algèbre engendrée par K.*

4.4. **Construction de réseaux cocompacts.**

Pour démontrer l'axiome (d) pour une géométrie modèle (G, X), il suffit d'exhiber un réseau cocompact Γ sans torsion de G : $\Gamma\backslash X$ est alors une variété compacte modelée sur (G, X).

On l'a déjà fait pour les géométries à courbure constante : pour la géométrie euclidienne, prendre un réseau de translations, et pour la géométrie sphérique, le sous-groupe trivial est un réseau cocompact ; pour la géométrie hyperbolique de dimension 3, on a mentionné dans la partie 2 l'existence d'une variété hyperbolique compacte, l'espace dodécaédral de Seifert-Weber ; son groupe fondamental est donc un réseau cocompact sans torsion dans $\mathrm{PO}(3, 1)$.

Pour les géométries produits, il suffit d'exhiber un produit de réseaux cocompacts sans torsion.

Pour $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbf{R})$, il suffit de prendre l'image réciproque d'un réseau cocompact de $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$, il sera sans torsion car $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbf{R})$ lui-même est sans torsion.

Voici comment construire des réseaux cocompacts sans torsion dans SOL, NIL (et $\widetilde{\mathcal{E}^+}(2)$), ce qui règle les cas restants.

Soit (u_t) un sous-groupe à un paramètre de $\mathrm{GL}(E)$, où E est un espace vectoriel réel de dimension 2. On définit le sous-groupe à un paramètre de transformations affines de $E \times \mathbf{R}$: $g_t : (v, x) \mapsto (u_t(v), x + t)$ (on peut voir le voir comme un groupe de "vissages"). On considère le groupe G engendré par les translations de E et par (g_t). Alors G est un produit semi-direct $E \rtimes \mathbf{R}$ pour l'action de $\mathbf{R}$ par (u_t). Il agit sur $E \times \mathbf{R}$ de façon affine et simplement transitive.

Posons maintenant $E = \mathbf{R}^2$, et supposons que $A = u_1$ est une matrice dans $\mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})$. Alors le sous-groupe H engendré par les translations entières et par u_1 est un sous-groupe discret cocompact de G : en effet, le quotient de $E \times \mathbf{R}$ par H se construit comme suit : on part de $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2 \times [0, 1]$, et on recolle $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2 \times \{0\}$ et $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2 \times \{1\}$ en appliquant A, ce qui est possible car A est à coefficients entiers.

Comme A est de déterminant 1, le sous-groupe (u_t) doit être contenu dans $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$. Il y a essentiellement quatre possibilités. Soit il est trivial, et alors G est isomorphe à $\mathbf{R}^3$. Soit il est diagonalisable réel, et alors G est isomorphe à SOL. Soit il est diagonalisable complexe (mais pas réel), et alors G est isomorphe à $\widetilde{\mathcal{E}^+}(2)$. Soit il est unipotent, et alors G est isomorphe à NIL. Ceci prouve l'existence d'un réseau cocompact sans torsion dans chacun de ces groupes (car, dans chaque cas, on n'a aucune difficulté à exhiber un sous-groupe à un paramètre (u_t) de la bonne forme, tel que A soit une matrice entière).

4.5. **Structures de groupe sur les géométries modèles de Thurston.**

Presque toutes les géométries obtenues en dimension ≤ 3 possèdent une structure de groupe. Pour préciser cela, on va regarder, pour chacune des géométries modèles de Thurston (G, X) de dimension ≤ 3, les sous-groupes de Lie de G agissant sur X de façon simplement transitive.

- $\mathbf{E}^1$: le seul sous-groupe de G agissant de façon simplement transitive est $\mathcal{E}^+(1)$.
- $\mathbf{E}^2$: le seul sous-groupe de G agissant de façon simplement transitive est le groupe des translations $\mathbf{R}^2$.
- $\mathbf{S}^2$: tout élément de G^0 a un point fixe, donc il n'y a certainement pas de sous-groupe agissant simplement transitivement.

– $\mathbf{H}^2$: les sous-groupes de dimension 2 de $\mathrm{PSL}(2,\mathbf{R})$ sont tous conjugués au sous-groupe des matrices triangulaires supérieures. Il agissent de façon simplement transitive sur $\mathbf{H}^2$ (géométriquement, chacun de ces groupes s'obtient en prenant le stabilisateur dans $\mathrm{PSL}(2,\mathbf{R})$ d'un point à l'infini de $\mathbf{H}^2$). Ces groupes ne sont pas unimodulaires.

– $\mathbf{E}^3$. Soit H un tel groupe. L'image de H dans $\mathrm{SO}(3)$ n'est pas tout $\mathrm{SO}(3)$ (car $H \to \mathrm{SO}(3)$ serait un revêtement), donc est soit trivial, et H serait le groupe des translations (isomorphe à $\mathbf{R}^3$), soit l'ensemble des rotations autour d'un axe, et alors H est engendré par les translations orthogonales à cet axe et par un groupe de vissages sur cet axe, et est isomorphe à $\widetilde{\mathcal{E}^+}(2)$.

– $\mathbf{S}^3$. $\mathrm{SO}(4)$ possède exactement deux sous-groupes distingués isomorphes à $\mathrm{SU}(2)$, conjugués dans $\mathrm{O}(4)$. Ils agissent de façon simplement transitive sur la sphère (si on fixe une structure de groupe sur la sphère, on peut voir l'un comme l'ensemble des translations à gauche et l'autre comme l'ensemble des translations à droite). Les autres sous-groupes connexes de dimension trois dans $\mathrm{SO}(4)$ sont conjugués entre eux, et isomorphes à $\mathrm{SO}(3)$; leur action sur $\mathbf{S}^3$ ne peut donc pas être simplement transitive (étant donné un tel groupe, pour une structure de groupe convenable sur la sphère, il s'agit du groupe des automorphismes intérieurs).

– $\mathbf{H}^3$. Soit H un sous-groupe de Lie de dimension 3 de $\mathrm{PSL}(2,\mathbf{C})$ agissant librement sur $\mathbf{H}^3$, et $\mathfrak{h}$ sa sous-algèbre de Lie. Alors $\mathfrak{h}$ n'est pas isomorphe à $\mathfrak{so}(3)$, ni à $\mathfrak{sl}(2)$, car sinon elle engendrerait un groupe de Lie possédant un sous-groupe compact non trivial. Donc elle est résoluble de dimension 3, ce dont on déduit sans difficulté qu'elle contient une sous-algèbre abélienne de dimension 2, et donc la $\mathbf{C}$-algèbre de Lie qu'elle engendre est de dimension complexe 2, donc, quitte à conjuguer, est l'ensemble $\mathfrak{t}$ des matrices triangulaires supérieures de $\mathfrak{sl}(2,\mathbf{C})$. Alors $\mathfrak{h}$ est de codimension 1 dans $\mathfrak{t}$, et on voit facilement qu'il contient la sous-algèbre $\mathfrak{u}$ des matrices unipotentes (qui engendrent un sous-groupe U de H). Donc $\mathfrak{h}$ est engendré par $\mathfrak{u}$ et par une matrice diagonale non nulle $A = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & -u \end{pmatrix}$. Alors $\mathfrak{ad}(A)$ agit sur les matrices unipotentes par $z \mapsto uz$. Comme le groupe $\exp(\mathbf{R}A)$ n'est pas compact, $|u| \neq 1$. Donc $\mathfrak{h}$ n'est pas unimodulaire, et H est isomorphe à $\mathbf{R}^2 \rtimes_\alpha \mathbf{R}$, pour une action α de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}^2$ par des similitudes non isométriques.

  Concrètement, H fixe un point à l'infini, U préserve les horosphères en ce point, et les sous-groupes à un paramètre D de U non contenus dans H agissent par vissage sur une géodésique (dépendant de D), ce groupe de vissages dégénérant en un groupe de transvections dans le cas particulier où u est réel, i.e. quand l'action de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}^2$ est par homothéties.

– $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{E}^1$. Si H est un sous-groupe de $\mathrm{SO}(3) \times \mathcal{E}^+(1)$ agissant librement, alors sa projection vers $\mathcal{E}^+(1)$ est injective, donc H ne peut pas être de dimension > 1.

– $\mathbf{H}^2 \times \mathbf{E}^1$ et $\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbf{R})$. Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Lie de dimension 3 de $\mathfrak{sl}(2,\mathbf{R}) \times \mathbf{R}$. Si sa projection sur $\mathfrak{sl}(2,\mathbf{R})$ est surjective, elle est isomorphe à $\mathfrak{sl}(2,\mathbf{R})$, et donc sa projection sur $\mathbf{R}$ est nulle, et dans ce cas $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}(2,\mathbf{R}) \times \{0\}$. Sinon, la projection sur $\mathfrak{sl}(2,\mathbf{R})$ est de dimension 2, et $\mathfrak{h}$ est conjuguée à $\mathfrak{b} \times \mathbf{R}$, où $\mathfrak{b}$ est la sous-algèbre de dimension 2 de $\mathfrak{sl}(2,\mathbf{R})$ formée des matrices triangulaires supérieures, et n'est pas unimodulaire dans ce cas.

  Il faut voir si ces groupes agissent librement. Dans le cas de $\mathbf{H}^2 \times \mathbf{E}^1$, seuls $B \times \mathcal{E}^+(1)$ et ses conjugués agissent librement, où B est le groupe des matrices triangulaires supérieures dans $\mathrm{PSL}(2,\mathbf{R})$ Dans le cas de $\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbf{R})$, $\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbf{R})$ agit librement, aussi bien que les conjugués du groupe B' (non unimodulaire) engendré par $\mathfrak{b} \times \mathbf{R}$.

– NIL. Le seul sous-groupe agissant simplement transitivement est NIL lui-même, qui est le sous-groupe dérivé de G^0. En effet, soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Lie de dimension 3 de $\mathfrak{e}^*(2)$. Comme l'extension centrale est non triviale, elle contient le centre (sinon, ce serait un facteur direct). Modulo le centre, c'est donc une sous-algèbre de dimension 2 de $\mathfrak{e}(2)$, donc c'est son algèbre de Lie dérivée.

– SOL. Puisque le groupe des isométries est de dimension 3, le seul sous-groupe agissant de façon simplement transitive est SOL lui-même.

4.6. **Petit tableau récapitulatif.** On inclut là-dedans (pour des raisons d'analogie qui apparaissent clairement quand on regarde les colonnes de droite) deux des géométries modèles ne vérifiant pas l'axiome (c), mais qui sont naturellement apparues au cours de la démonstration.

X	(c) vérifié	G	$\mathfrak{g}$	dim (G_x)	$\#(G/G^0)$	G préserve une orientation	Fibre sur $\mathbf{E}^1$	Fibre sur surface modèle
$\mathbf{E}^3$	+	$\mathcal{E}(3)$	$\mathfrak{e}(3)$	3	2	-	-	-
$\mathbf{S}^3$	+	$\mathrm{O}(4)$	$\mathfrak{so}(4)$	3	2	-	-	-
$\mathbf{H}^3$	+	$\mathrm{PO}(3,1)$	$\mathfrak{sl}(2,\mathbf{C})$	3	2	-	-	-
$\mathbf{E}^2\times\mathbf{E}^1$	non	$\mathcal{E}(2)\times\mathcal{E}(1)$	$\mathfrak{e}(2)\times\mathbf{R}$	1	4	-	oui	$\mathbf{E}^2$
$\mathbf{S}^2\times\mathbf{E}^1$	+	$\mathrm{O}(3)\times\mathcal{E}(1)$	$\mathfrak{so}(3)\times\mathbf{R}$	1	4	-	oui	$\mathbf{S}^2$
$\mathbf{H}^2\times\mathbf{E}^1$	+	$\mathrm{PGL}(2,\mathbf{R})\times\mathcal{E}(1)$	$\mathfrak{sl}(2,\mathbf{R})\times\mathbf{R}$	1	4	-	oui	$\mathbf{H}^2$
NIL	+	$\mathrm{NIL}\rtimes\mathrm{O}(2)$	$\mathfrak{e}^*(2)$	1	2	oui	-	$\mathbf{E}^2$
HOPF	non	$\mathrm{SU}(2)\rtimes\mathrm{U}(1)$	$\mathfrak{so}(3)\times\mathbf{R}$	1	2	oui	-	$\mathbf{S}^2$
$\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbf{R})$	+	$\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbf{R})\rtimes\mathrm{O}(2)$	$\mathfrak{sl}(2,\mathbf{R})\times\mathbf{R}$	1	2	oui	-	$\mathbf{H}^2$
SOL	+	$\mathrm{SOL}\rtimes D_4$	$\mathfrak{sol}$	0	8	-	oui	-

RÉFÉRENCES

[1] Laurent Bessières. *Conjecture de Poincaré : la preuve de R. Hamilton et G. Perelman*. Gaz. Math. No. 106 (2005), 7–35.

[2] Laurent Bessières, Gérard Besson, Michel Boileau, Sylvain Maillot, Joan Porti. "Geometrisation of 3-manifolds". Livre en préparation (juin 2009).

[3] Armand Borel. *Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces*. Topology 2 1963 111–122.

[4] Bruce Kleiner, John Lott. *Notes on Perelman's papers*. Geom. Topol. 12 (2008), no. 5, 2587–2855.

[5] George D. Mostow, *Self Adjoint Groups*, Ann. of Math. (2) 62, (1955). 44–55.

[6] John W. Morgan. *Recent progress on the Poincaré conjecture and the classification of 3-manifolds*. Bull. Amer. Math. Soc. 42 (2005) no. 1, 57–78.

[7] Grigori Perelman. *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications* (2002) arXiv/0211.5159.

[8] Grigori Perelman. *Ricci flow with surgery on three-manifolds* (2003) arXiv/0303.5109.

[9] Grigori Perelman. *Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds* (2003) arXiv/0307.5245.

[10] Peter Scott. *The Geometries of 3-Manifolds*. Bull. London Math. Soc. **15** (1983), 401–487.

[11] William P. Thurston. *The Geometry and Topology of Three-Manifolds*, 1980 Princeton lecture notes on geometric structures on 3-manifolds. (available at `http://www.msri.org/publications/books/gt3m/`).

[12] William P. Thurston. *Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry*. Bull. Amer. Math. Soc. 6 (1982), no. 3, 357–381.

[13] William P. Thurston. "Three-Dimensional Geometry and Topology", Vol. 1, édité by Silvio Levy. Princeton Mathe. Series, 35. Princeton Univ. Press, 1997.

IRMAR, CAMPUS DE BEAULIEU, 35042 RENNES CEDEX, FRANCE

E-mail address: `yves.decornulier@univ-rennes1.fr`