Exemples de groupes non C*-simples

Yves Cornulier

October 16, 2016

Abstract

These are written notes from talk in a *Groupe de Travail* in Orsay, December 3rd, 2015, organized by C. Houdayer.

Uffe Haagerup and Kristian Olesen pointed out a simple recipe to construct non-C*-simple groups without making use of non-triviality of the amenable radical. Adrien Le Boudec then observed that some of the groups he studied in detail indeed satisfy this criterion; thus yielding the first known examples of non-C*-simple discrete groups with trivial amenable radical. We explain this, focussing on a single example.

1 Représentations

On convient ici que tous les groupes sont discrets; toutes les représentations sont complexes.

Toute représentation ρ d'un groupe G s'étend en une représentation de l'algèbre de groupe $\mathbf{C}G$.

Disons qu'une représentation de G est *fortement fidèle* si la représentation obtenue de $\mathbf{C}G$ est fidèle.

Si ρ est une représentation unitaire de G, elle induit une semi-norme N_ρ sur $\mathbf{C}G$; on dit qu'une autre représentation unitaire σ est *faiblement contenue* dans ρ si $N_\sigma \le N_\rho$, et on note $\sigma \prec \rho$. Lorsque ρ est la représentation régulière gauche λ_G dans $\ell^2(G)$, on dit que σ est *tempérée*. Remarquons que, pour un sous-groupe H de G, la représentation quasi-régulière $\ell^2(G/H)$ est tempérée si et seulement si H est moyennable[1].

Disons que qu'une représentation unitaire ρ de G est *monolithique* si pour tout $\sigma \neq 0$, on a $\sigma \prec \rho$ implique $\rho \prec \sigma$. Un résultat standard est qu'un groupe G

[1] Dans le cadre plus général des groupes localement compacts, il peut arriver que $L^2(G/H)$ soit tempérée sans que H soit moyennable: Y. Benoist et T. Kobayashi [J. EMS, 2015] étudient le cas d'une inclusion de groupes réductifs réels; leur caractérisation donne notamment que pour $G = \mathrm{SL}_{m+n}\mathbf{R}$ et $H = \mathrm{SL}_m\mathbf{R} \times \mathrm{SL}_n\mathbf{R}$, la représentation $L^2(G/H)$ de G est tempérée si et seulement si $|m-n| \le 1$; par exemple $L^2(\mathrm{SL}_3\mathbf{R}/\mathrm{SL}_2\mathbf{R})$ est tempérée.

a une C*-algèbre réduite simple (abrégé: est C*-simple) si et seulement si $\ell^2(G)$ est monolithique; au besoin, on le prend comme définition.

Les deux lemmes suivants sont dus à Haagerup et Olesen (dans un travail en préparation, comprenant cette astuce qui circule depuis 2014).

Lemme 1. *Supposons que le groupe discret G est C*-simple. Alors pour tout sous-groupe moyennable H de G, la G-représentation $\ell^2(G/H)$ est fortement fidèle.*

Proof. Comme H est moyennable, $0 \neq \ell^2(G/H) \prec \ell^2(G)$ (faible contenance des G-représentations). Par C*-simplicité, on obtient $\ell^2(G) \prec \ell^2(G/H)$. Comme $\mathbf{C}G$ est une représentation fortement fidèle, ceci implique la fidélité comme $\mathbf{C}G$-représentation. □

Lemme 2. *Si G possède deux éléments u, v agissant non trivialement et avec support disjoints sur G/H (on dira que l'action de G sur G/H est bicéphale) alors $\ell^2(G/H)$ n'est pas fortement fidèle.*

Proof. Notons $(\delta_g)_{g\in G}$ la base canonique de $\mathbf{C}G$. Les éléments $1, u, v, uv$ sont alors distincts. L'élément $(1 - \delta_u)(1 - \delta_v)$ est donc non trivial, et est dans le noyau de l'action sur $\ell^2(G/H)$. □

En combinant, on a donc

Corolaire 3 (Observation de Haagerup-Olesen)**.** *Si un groupe discret G admet un sous-groupe moyennable H tel que l'action de G sur G/H est bicéphale, alors G n'est pas C*-simple.*

2 Arbres

Rappelons qu'une action d'un groupe sur un arbre est dite minimale s'il n'y a aucun sous-arbre propre non vide invariant; elle est dite de type général s'il existe deux éléments de g agissant par isométries loxodromiques avec 4 extrémités distinctes (ceci implique l'existence d'un sous-groupe libre sur 2 générateurs, et donc la non-moyennabilité).

Le lemme suivant est banal.

Lemme 4. *Si un groupe G a une action fidèle, minimale et de type général sur un arbre T, alors son radical moyennable R est trivial.*

Proof. L'action de R ne peut pas être de type général. Si elle préserve un (unique) axe ou un unique point au bord, celui-ci est invariant par G ce qui est contradictoire, donc elle est bornée. L'enveloppe convexe des points fixés par R (dans le 1-squelette) est un sous-arbre G-invariant non vide, donc égal à T. Donc R agit trivialement sur T et donc est trivial par fidélité. □

Dans un arbre, si v, w sont des sommets contigus, le sous-arbre constitué des sommets plus proches de v que de w est un sous-arbre $T_{v,w}$, appelé demi-arbre.

On dira que l'action d'un groupe sur un arbre est *riche*, s'il existe des sommets contigus v, w tels que que le fixateur (= stabilisateur point par point) de $T_{v,w}$ et de $T_{w,v}$ sont tous deux non triviaux. On dira qu'elle est très riche si tout demi-arbre a un fixateur non trivial.

Lemme 5. *Soit G agissant sur un arbre. On suppose l'action minimale, de type général et riche. Soit G/H une orbite au bord. Alors l'action de G sur G/H est bicéphale.*

Proof. Il existe par hypothèse deux demi-arbres complémentaires dont les fixateurs sont non triviaux. Comme l'action est minimale et non bornée, aucun sommet n'est de valence 1 et donc le bord de chacun de ces demi-arbres est non vide. Ceci partitionne donc le bord en deux ouverts fermés non vides. On choisit g_1, g_2 non triviaux et agissant trivialement d'un côté et de l'autre. Par densité de l'orbite, ils agissent non trivialement dessus, et avec support disjoints. □

3 Actions prescrites presque partout

On va construire un certain sous-groupe W du groupe des automorphismes d'un arbre 3-régulier T_3. Dans l'article [2] d'A. Le Boudec, qui contient un construction plus générale, W apparaît comme le groupe $G(\mathrm{Alt}_3, \mathrm{Sym}_3)$.

On munit T_3 d'un coloriage c des arêtes par $\{1, 2, 3\}$ de sorte que chaque sommet a ses 3 arêtes de couleurs distinctes. (Remarque: il existe un seul tel coloriage modulo automorphisme, et pour un arbre planaire, modulo le choix de la couleur d'une arête, il y a un choix canonique consistant à dire que pour tout sommet, si on tourne autour dans le sens trigonométrique, on fait 123123...)

Alors pour tout automorphisme g de T_3 et tout sommet v, les arêtes en v vont sur les arêtes en gv et la permutation obtenue de $\{1, 2, 3\}$ est notée $\sigma(g, v)$. On a $\sigma(gh, v) = \sigma(g, hv)\sigma(h, v)$ pour tous g, h, v.

Si $g \in \mathrm{Aut}(T_3)$, on dira que qu'un sommet v de T_3 est *singulier* si $\sigma(g, v) \notin A_3$ (c'est-à-dire que g ne préserve pas le sens positif 123123... autour de v).

Soit W (resp. W') le groupe des automorphismes g de T_3 ayant un nombre fini (resp. nul) de sommets singuliers.

On a $W' \subset W$. On voit que W' agit transitivement sur les sommets (en effet, pour toute arête on voit qu'il existe un unique élément de W' échangeant ses extrémités et préservant le coloriage, et en propageant on obtient la transitivité). Donc G est aussi transitif (donc minimal). Par le lemme 4, on voit ainsi que W a un radical moyennable trivial (W' aussi).

Lemme 6. *Le groupe W' (resp. W) a des stabilisateurs d'arêtes dirigées (= paires ordonnées de points contigus) triviaux (resp. localement finis).*

Proof. Fixons une arête dirigée et soit M son stabilisateur dans W.

Si $g \in M \cap W'$, il agit trivialement sur la n-boule autour de cette arête, par une récurrence immédiate sur la distance à cette arête, donc $M \cap W'$ est trivial.

Notons M_n l'ensemble des éléments de M dont toutes les singularités sont dans la n-boule autour de g. C'est un sous-groupe, et M est la réunion croissante des M_n. On voit que M_n est fini: en effet, le noyau de l'action de M_n sur la $(n+1)$-boule autour de l'arête fixée est d'indice fini, et est inclus dans $M \cap W'$ qui est trivial. □

En conséquence, W' est discret dans $\mathrm{Aut}(T_3)$, car les stabilisateurs d'arêtes orientées sont triviaux. Donc W' est un réseau cocompact de $\mathrm{Aut}(T_3)$, et ainsi W' est virtuellement libre. L'action de W' est de type général (on peut faire une translation de longueur 2 le long d'une géodésique ...12121212... préservant le coloriage, et trouver deux telles géodésiques disjointes), donc celle de W aussi.

Proposition 7 (A. Le Boudec)**.** *L'action de W sur T_3 est très riche.*

Proof. Fixons un demi-arbre Q dans T_3 délimité par une arête coloriée 1, dont on note v l'extrémité dans Q. Montrons qu'il existe un unique automorphisme de T fixant le complémentaire de Q et ayant v comme unique singularité. Pour l'unicité, on voit que si g, h sont deux tels automorphismes, alors $g^{-1}h$ n'a aucune singularité et fixe le complémentaire de Q, donc par le lemme 6 est trivial. L'existence est obtenue comme ceci: on considère un sommet dans Q: il est codé par une suite finie $a_0 \dots a_n$ d'éléments dans $\{1, 2, 3\}$ avec $a_0 = 1$, $a_i \neq a_{i+1}$ pour tout i, décrivant le coloriage du segment géodésique le joignant à l'arête bordant Q. On l'envoie alors sur le sommet codé par $b_0 \dots b_n$, avec $b_0 = 1$, b_1 l'unique élément de $\{2, 3\} \smallsetminus \{a_1\}$. Pour $n \geq 2$, $b_n \in \{1, 2, 3\}$ est déterminé par la règle suivante: modulo 3, on a $b_n - b_{n-1} = a_n - a_{n-1}$. Comme cette application commute avec la fonction $a_0 \dots a_n \mapsto a_0 \dots a_{n-1}$, c'est bien un automorphisme d'arbre enraciné, et on voit qu'elle a v comme unique sommet singulier. □

Il découle du lemme 5 que l'action de W sur toute orbite au bord est bicéphale.

Lemme 8 (A. Le Boudec)**.** *Les points au bord de T_3 ont des stabilisateurs dans W localement fini par cyclique, donc moyennables.*

Proof. Le stabilisateur d'un point du bord a un morphisme canonique vers $\mathbf{Z}$, dont le noyau K est une réunion croissante d'intersection de fixateurs d'arêtes, qui sont localement finis par le lemme 6, donc K est localement fini. □

4 Conclusion

On a observé que W a un radical moyennable trivial.

Théorème 9 (A. Le Boudec [3])**.** *W n'est pas C^*-simple.*

Proof. On combine tous les lemmes! □

Le groupe W' l'est (en tant que réseau cocompact dans $\mathrm{Aut}(T_3)$) et on peut remplacer W par le sous-groupe $\langle W, u, v\rangle$, où on a choisi une arête une fois pour toutes et on a choisi u, v à supports disjoints, la preuve fonctionne sans changement et fournit sans effort un exemple de type fini; toutefois, A. Le Boudec [2, Cor. 3.8] montre que W est de type fini.

Par ailleurs, A. Le Boudec [2] a des analogues de W définis pour des arbres de degrés plus grand, pour qui il montre, en plus de l'engendrement fini, l'existence d'un sous-groupe simple d'indice fini.

Le groupe W est de dimension asymptotique 1, car il agit sur un arbre localement fini avec stabilisateurs localement finis; il n'est pas virtuellement libre; or un groupe de présentation finie et de dimension asymptotique 1 est forcément virtuellement libre (Fujiwara-Whyte 2007); par conséquent W n'est pas de présentation finie, et ses sous-groupes non virtuellement libres ne le sont pas non plus. On ne connaît pas de groupes de présentation finie non C*-simples et à radical moyennable trivial; on ne sait pas si le groupe de Thompson T (qui a motivé le travail [1]) est un exemple.

Le groupe W ainsi que ses analogues les plus immédiats ne sont pas sans torsion. Toutefois, A. Le Boudec considère dans [3] des analogues sur des arbres de valence infinie, qui soulèvent des difficultés supplémentaires, mais permettant de construire des exemples sans torsion, et permettent également de plonger tout groupe dénombrable dans un groupe dénombrable non C*-simple à radical moyennable trivial.

Une autre question naturelle serait de classifier les idéaux bilatères maximaux dans la C*-algèbre réduite de W (ou de ses cousins analogues).

References

[1] U. Haagerup, K.K. Olesen, On conditions towards the non-amenability of Richard Thompson's group F. En préparation.

[2] A. Le Boudec. Groups acting on trees with prescribed action almost everywhere. Arxiv 1505.01363 (2015).

[3] A. Le Boudec. C*-simplicity and the amenable radical. Arxiv 1507.03452 (2015).