Groupes et algèbres de Lie

Yves de Cornulier

1 Groupe de Lie

Définition 1. Un *groupe de Lie* réel (resp. complexe) est une variété différentiable (resp. analytique complexe) munie d'une structure de groupe, telle que les applications produit et inverse soient lisses (resp. analytiques). La dimension de la variété sous-jacente est constante, on l'appelle la *dimension* du groupe de Lie.

On observera que tout groupe de Lie complexe est aussi un groupe de Lie réel, de dimension réelle deux fois sa dimension complexe. Les morphismes entre groupes de Lie sont les morphismes de groupes lisses (resp. analytiques). La notion de sous-groupe de Lie est moins évidente : d'abord on définit :

Définition 2. Une *immersion* entre groupes de Lie est un morphisme dont la différentielle est partout injective.

On voit immédiatement qu'un morphisme est une immersion dès que sa différentielle en l'identité est injective. On voit qu'un morphisme est une immersion si et seulement si son noyau est discret. On peut maintenant définir les sous-groupes de Lie :

Définition 3. Un *sous-groupe de Lie* (connexe) d'un groupe de Lie G est l'image d'une immersion injective i d'un groupe de Lie (connexe) H vers G.

Attention, les sous-groupes de Lie (connexes) de G ne sont pas forcéments fermés dans G, la topologie de $i(H)$ comme partie de G n'est pas forcément localement compacte, comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 1. L'image d'une droite de pente irrationnelle (resp. une droite complexe de pente non dans $\mathbb{Q}[i]$) du plan $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{C}^2$) , dans le tore $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ (resp. $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}[i]^2$), est un sous-groupe de Lie dense, pas fermé.

Remarque 1. Pour définir un sous-groupe de Lie (pas forcément connexe), on demande que l'application i ci-dessus vérifie de plus que $i(H^0)$ soit ouvert dans $i(H)$ (de façon générale on note G^0 la composante connexe du neutre du groupe topologique G).

Voici des exemples de groupes, qui, pour $k = \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), sont des $\mathbb{K}$-groupes de Lie :

- $GL_n(k)$
- $SL_n(k) = \{u \in GL_n(k), det(u) = 1\}$
- $O_n(k) = \{u \in GL_n(k), u^t u = 1\}$
- $SO_n(k) = O_n(k) \cap SL_n(k)$
- $Sp_n(k) = \{u \in GL_{2n}(k), u^t J u = J\}$ où J est la matrice par blocs (I_n désignant la matrice identité de taille n) :
  $$\begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$
  qui sont les matrices préservant une forme bilinéaire alternée non dégénerée.
- $D_n(k)$ groupe commutatif des matrices diagonales inversibles.
- $T_n(k)$ ensemble des matrices triangulaires supérieures inversibles.
- $Unip_n(k)$ ensembles des matrices de $T_n(k)$ unipotentes (i.e. avec des 1 sur la diagonale).

On a aussi les $\mathbb{R}$-groupes de Lie :

- $U_n(\mathbb{C}) = \{u \in GL_n(\mathbb{C}), u^* u = 1\}$
- $SU_n(\mathbb{C}) = U_n(\mathbb{C}) \cap SL_n(\mathbb{C})$
- $O(p, q)$ ensemble des matrices réelles de taille $n = p + q$ préservant une forme bilinéaire symétrique de signature (p, q).
- Et similairement : $SO(p, q)$, $U(p, q)$, $SU(p, q)$.

Ce sont des groupes de Lie grâce à la proposition :

Proposition 1.
- *Tout sous-groupe fermé d'un groupe de Lie est un $\mathbb{R}$-groupe de Lie.*
- *Tout sous-groupe de $SL_n(\mathbb{C})$, défini comme ensemble des zéros d'un système d'équations holomorphes, est un $\mathbb{C}$-groupe de Lie.*

Attention, $U_n(\mathbb{C})$, etc., ne sont pas des groupes de Lie complexes. C'est dû au fait que leurs équations font intervenir des conjugaisons complexes, et ne sont donc pas holomorphes.

2 Revêtements

Si X est un espace topologique connexe et $X \to G$ un revêtement de X vers un groupe topologique, alors il existe une unique structure de groupe sur X faisant de $X \to G$ un morphisme de groupes. En particulier, si G est un groupe de Lie, X en est aussi un.
On a la proposition :

Proposition 2. *Si G est un groupe topologique connexe par arcs, alors son groupe fondamental est commutatif.*

La proposition se déduit du lemme élémentaire :

Lemme 1. *Soit G un groupe topologique connexe et H un sous-groupe discret distingué de G. Alors H est dans le centre de G.*

Exemples :
- $\pi_1(SO_2(\mathbb{K})) = \mathbb{Z}$
- $\pi_1(SO_n(\mathbb{K})) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour $n \geq 3$ On appelle $Spin(n)$ le revêtement universel (à 2 feuillets) de $SO_n(\mathbb{R})$, $n \geq 3$.
- $\pi_1(SU_n(\mathbb{C})) = 0$ pour $n \geq 1$.
  Par décomposition polaire, $SL_n(\mathbb{K})$ se rétracte par déformation sur $SO_n(\mathbb{R})$ (resp. $SU_n(\mathbb{C})$), ce qui donne leurs groupes fondamentaux respectifs.

3 Algèbre de Lie d'un groupe de Lie

Rappelons que si $f : E \to F$ est un morphisme étale entre variétés (i.e. la différentielle est partout inversible) on définit, pour tout champ de vecteurs X sur F, un champ de vecteurs f^*X sur E, appelé image réciproque par f de X :

$$f^*X(x) := df(x)^{-1}.X(f(x))$$

Si G est un groupe de Lie, et si t_g est le difféomorphisme de G donné par multiplication à gauche par $g \in G$, alors on écrit, pour tout champ de vecteurs X sur G, $g^*X := (t_g)^*X$.

On dit que X st un champ de vecteurs invariant à gauche si $g^*X = X$ pour tout $g \in G$. La proposition suivante classifie les champs de vecteurs invariants à gauche sur un groupe de Lie :

Proposition 3. *L'application qui à un champ de vecteurs X associe sa valeur en l'élément neutre identifie canoniquement l'ensemble des champs de vecteurs invariants à gauche avec l'espace tangent $\mathfrak{g} = T(G)$ en l'élément neutre.*

On doit maintenant définir la notion d'algèbre de Lie.

Définition 4. Soit k un anneau commutatif (dans ce qui suivra, k sera toujours un corps de caractéristique 0, le plus souvent $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Une *k-algèbre de Lie* est un k-espace vectoriel $\mathfrak{g}$, muni d'une application *bilinéaire antisymétrique*, notée $[\cdot, \cdot]$, et vérifiant de plus l'*identité de Jacobi* :

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$$

On a une notion évidente de morphismes entre k-algèbres de Lie, de sous-algèbres de Lie et d'idéaux d'une algèbre de Lie.

Exemple 2 (exemples fondamentaux). (i) Si A est une k-algèbre associative, alors $[x, y] := xy - yx$ définit sur A une structure d'algèbre de Lie.
(ii) Soit A une k-algèbre associative. Alors l'ensemble $Der_k(A)$ des R-dérivations de A est une sous-algèbre de Lie de $End_{k-mod}(A)$.

Rappelons qu'on peut identifier champs de vecteurs et dérivations sur une variété. On obtient donc (par (ii) de l'exemple précédent) une structure d'algèbre de Lie sur les champs de vecteurs.

Si on est sur un groupe de Lie G, par restriction, on identifie les dérivations invariantes (à gauche) avec les champs de vecteurs invariants (à gauche) et donc à l'espace tangent $\mathfrak{g} = T(G)$, qui se trouve ainsi muni d'une structure d'algèbre de Lie (réelle ou complexe).

Proposition 4. *Si $f : G \to H$ est un morphisme entre groupes de Lie, alors $df := df(1) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ est un morphisme d'algèbres de Lie.*

On a donc un foncteur T de la catégorie $\mathbb{K} - Lie$ (ou Lie s'il n'y a pas ambiguïté) des groupes de Lie réels (resp. complexes) vers la catégorie $\mathfrak{Lie}$ des algèbres de Lie réelles (resp. complexes). Dans les deux cas, on a le théorème très puissant :

Théorème 1.

1 Toute algèbre de Lie (de dimension finie) est (isomorphe à) l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie (i.e. T est essentiellement surjectif).

2 Pour tous groupes de Lie G et H d'algèbres de Lie $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$, si G est simplement connexe, la différentiation : $Hom(G, H) \to \mathfrak{Hom}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est une bijection. Par conséquent, en restriction aux groupes de Lie simplement connexes, T est un foncteur pleinement fidèle.

3 Soit $f : G \to H$ un morphisme entre groupes de Lie connexes. Alors $df : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ est un isomorphisme si et seulement si f est un revêtement.

La restriction de T aux groupes de Lie simplement connexes est donc une équivalence de catégories. En particulier, à une algèbre de Lie est associé un groupe de Lie connexe, unique à revêtement près.
Si G est un groupe de Lie donné, on a donc une identification entre les sous-groupes de Lie connexes de G et les sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$; entre les sous-groupes de Lie connexes *distingués* de G et idéaux de $\mathfrak{g}$.

Pour tout groupe de Lie G, on définit l'exponentielle comme l'unique fonction $\mathfrak{g} \to G$ satisfaisant :

$$\frac{d}{dt}(exp(tx))_{t=0} = x, \quad x \in \mathfrak{g}, t \in \mathbb{K}$$

On montre l'existence d'une telle fonction en utilisant le théorème, qui donne des identifications naturelles :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{Hom}(\mathbb{K}, \mathfrak{g}) = Hom(\mathbb{K}, G)$$

L'exponentielle commute avec les morphismes (exp est une transformation naturelle du foncteur T vers le foncteur identité).
Dans le cas de $GL_n(\mathbb{K})$, on voit que l'exponentielle coïncide avec l'exponentielle des matrices $A \mapsto \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} A^n$.

Proposition 5. *Soit f un morphisme entre groupes de Lie. Alors :*
- $\exp(Im(df))$ *engendre* $Im(f)^0$.
- $\exp(Ker(df))$ *engendre* $Ker(f)^0$.

En particulier, l'application qui à un sous-groupe de Lie connexe H de G associe son algèbre de Lie, i.e. $Im(di(1))$ où i est l'immersion associée à H, admet pour réciproque l'application qui à une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ associe le sous-groupe engendré par $\exp(h)$.

Au voisinage de $0 \in \mathfrak{g}$, l'exponentielle est un difféomorphisme ; mais, pour un groupe de Lie connexe, réel ou complexe, elle n'est pas forcément partout étale, ni fermée, ni surjective, ni injective, ni ouverte (ex. $SL_2(\mathbb{C})$).

Donnons maintenant des exemples d'algèbres de Lie. On écrit avec des lettres gothiques l'algèbre de Lie correspondant aux groupes décrits plus haut :

- $\mathfrak{sl}_n(k) = \{u \in \mathfrak{gl}_n(k), tr(u) = 0\}$
- $\mathfrak{so}_n(k) = \mathfrak{o}_n(k)$ ensemble des matrices antisymétriques.
- $\mathfrak{sp}_n(k) = \{u \in gl_{2n}(k), u^t j + ju = 0\}$, soit

$$\mathfrak{sp}_n(k) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^t \end{pmatrix},\ \ B = B^t,\ C = C^t$$

- $\mathfrak{t}_n(k)$ matrices triangulaires supérieures.
- $\mathfrak{unip}_n(k)$ matrices triangulaires supérieures strictes.
- $\mathfrak{u}_n(\mathbb{C})$ ensemble des matrices antihermitiennes.
- $\mathfrak{su}_n(k) = \mathfrak{u}_n(\mathbb{C}) \cap \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$.
- etc.

4 Représentations

Soit k un corps. Si V est un k-espace vectoriel de dimension finie, on note $\mathfrak{gl}(V,k)$ ou, s'il n'y a pas ambiguïté, $\mathfrak{gl}(V)$ l'algèbre de Lie des endomorphismes k-linéaires de V, et $GL(V)$ le groupe des automorphismes k-linéaires de V.

Définition 5. On appelle représentation d'une k-algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ un morphisme de $\mathfrak{g}$ vers $\mathfrak{gl}(V)$, pour un l-espace vectoriel V de dimension finie, où, l est une extension de k. On dit, de même, que V est un l-$\mathfrak{g}$-module.
On appelle $\mathbb{L}$-représentation d'un $\mathbb{K}$-groupe de Lie G un morphisme de G vers $GL(V)$, pour un $\mathbb{L}$-espace vectoriel V de dimension finie ($\mathbb{L} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$). On dit alors que V est un $\mathbb{L}$-G-module.

Mentionnons sans preuve la proposition suivante :

Proposition 6 (Ado).
- *Si k est un corps de caractéristique zéro, toute k-algèbre de Lie de dimension finie se plonge dans un $\mathfrak{gl}(V)$, i.e. admet une représentation fidèle.*
- *Tout $\mathbb{K}$-groupe de Lie est localement isomorphe à un sous-groupe de Lie d'un $GL(V)$.*

Remarque 2. Un groupe de Lie ne peut pas forcément s'immerger injectivement dans un GL. Voici deux contre-exemples :
Tout revêtement non trivial de $SL_2(\mathbb{R})$.
Le groupe de Heisenberg $Unip_3(\mathbb{K})$ divisé par un sous-groupe discret non trivial de son centre (qui est isomorphe au groupe additif $\mathbb{K}$).

On a une notion immédiate de morphisme entre représentations, de sous-module, de module irréductible (module non nul n'admettant pas de sous-module non trivial), de module indécomposable (module non nul qui ne s'écrit pas comme somme directe de deux modules non triviaux).

Exemple 3 (Représentations adjointes). Soit G un $\mathbb{K}$-groupe de Lie et α_g la conjugaison par $g : x \mapsto gxg^{-1}$. On note $Ad(g) := d(\alpha_g)$ l'automorphisme de $\mathfrak{g}$ correspondant. Alors $g \mapsto Ad(g)$ est une $\mathbb{K}$-représentation de G dans l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$.
Soit $\mathfrak{g}$ une k-algèbre de Lie et $x \in \mathfrak{g}$. On note $ad(x) : y \mapsto [x,y]$. Alors $g \mapsto ad(g)$ est une k-représentation de $\mathfrak{g}$ dans l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$.

Insistons sur la définition suivante :

Définition 6. Un groupe ou une algèbre de Lie est dit semi-simple si tout module (sur le même corps) est somme directe de modules irréductibles, ou de façon équivalente, si tout module indécomposable est irréductible.

Exemple 4. Tout groupe de Lie compact est semi-simple.

En effet, un groupe compact admet une unique mesure de probabilité invariante par translation, dite mesure de Haar. Grâce à cette mesure on montre que toute représentation est conjuguée à une représentation orthogonale, donc que tout sous-espace stable admet un supplémentaire stable.

Remarque 3. Un groupe de Lie semi-simple n'a pas toujours une algèbre de Lie semi-simple. Par exemple, $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est semi-simple car compact ; tandis que son algèbre de Lie $\mathbb{R}$ ne l'est pas : la représentation $x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est indécomposable mais pas irréductible. Attention, pour certains auteurs un groupe de Lie est dit semi-simple si et seulement si son algèbre de Lie l'est, et pour cette définition-là $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ n'est pas semi-simple.

5 Groupes de Lie commutatifs

Proposition 7. *Soit G un groupe de Lie commutatif. Alors* $\exp$ *est un morphisme de groupes de Lie, et c'est un revêtement, de noyau isomorphe à $\pi_1(G)$.*

Ainsi, tout $\mathbb{K}$-groupe de Lie commutatif connexe s'obtient comme quotient de $\mathbb{K}^n$ par un sous-groupe discret. Dans le cas, souvent vérifié, où le groupe discret G/G^0 est de type fini, G^0 est facteur direct de G.

Proposition 8. *Tout groupe de Lie réel commutatif connexe est isomorphe à $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^m$, pour un unique couple d'entiers (n,m).*

On voit que dans le cas réel la classification est particulièrement simple. En revanche, dans le cas complexe, la classification des groupes de Lie commutatifs n'est pas du tout évidente (ex. variétés abéliennes).
En dimension 1, les groupes de Lie complexes commutatifs connexes sont, à isomorphisme près : $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^* \sim \mathbb{C}/\mathbb{Z}$, et les courbes elliptiques, i.e. les quotients de $\mathbb{C}$ par un réseau (unique à similitude près). On montre que les classes d'isomorphisme de courbes elliptiques sont naturellement parametrées par $\mathbb{C}$; en particulier, contrairement au cas réel, où on n'a que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, elles sont en nombre infini.

Par contre, un groupe de Lie connexe commutatif complexe qui s'immerge dans un $GL_n(\mathbb{C})$ est forcément isomorphe à $\mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}/\mathbb{Z})^m$, pour un (unique) couple d'entiers (n, m).

Enfin, mentionnons le fait que tout groupe de Lie complexe compact connexe est commutatif ; c'est bien sûr faux dans le cas réel.

6 Complexification

Soit G un groupe de Lie réel. Une complexification de G est la donnée d'un morphisme de G vers un groupe de Lie complexe G', tel que tout morphisme de G vers un groupe de Lie complexe se factorise de façon unique par G'. Comme pour toute propriété universelle, la donnée de $G \to G'$ est unique à isomorphisme unique près, et on parle *du* complexifié de G.
De façon analogue on définit la complexification d'une algèbre de Lie réelle. Dans ce cas, on en a une construction immédiate, par tensorisation par $\mathbb{C}$. On en déduit l'existence du complexifié pour tout groupe de Lie réel.

Exemple de complexifications :
- $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$
- $\mathfrak{so}_{p,q}(\mathbb{R}) \mapsto \mathfrak{so}_{p+q}(\mathbb{C})$
- $\mathfrak{su}_{p,q}(\mathbb{C}) \mapsto \mathfrak{sl}_{p+q}(\mathbb{C})$
- $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \mapsto \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$

7 Representations de $\mathfrak{sl}_2(k)$

On suppose ici que k est un corps de caractéristique 0. L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(k)$ possède comme base (H, X, Y) :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

vérifiant les relations :

$$[H, X] = 2X; \ \ [H, Y] = -2Y; \ \ [X, Y] = H.$$

Dans ce qui suit, on considérera des $\mathfrak{sl}_2(k)$-modules V. On y verra X, Y et H comme opérateurs, ce qui permettra de parler des produits XY, etc. Attention, ce produit n'a a priori rien à voir avec le produit dans $\mathfrak{gl}_2(k)$.

Proposition 9. $\mathfrak{sl}_2(k)$ *est semi-simple.*

Supposons d'abord k algébriquement clos. D'abord classons les représentations irréductibles. Fixons les notations : $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ et V un $\mathfrak{g}$-module irréductible.

Lemme 2. $\ker(X)$ *contient un vecteur propre de* H.

En effet supposons le contraire. Comme k est algébriquement clos, il existe v un vecteur propre de H pour la valeur propre λ. Alors, par hypothèse, Xv est non nul, et on voit qu'il est vecteur propre de H pour la valeur propre $\lambda + 2$. En itérant on voit que $\lambda + 2n$ est valeur propre de H pour tout n, et donc, comme $car(k) = 0$, H a une infinité de valeurs propres : c'est absurde car V est de dimension finie. □

Il existe donc $u \neq 0$ et $\lambda \in k$ tels que $Hu = \lambda u$ et $Xu = 0$. En raisonnant de façon analogue, il existe m minimal tel que $Y^m u = 0$.

Lemme 3. *La famille* $(u, Yu, ...Y^{m-1}u)$ *est une base de* V.

Cette famille est libre car, pour $l < m$, $Y^l u$ est vecteur propre de H pour la valeur propre $\lambda - 2l$. On voit immédiatement qu'elle engendre un sous-$\mathfrak{g}$-module de V. Comme V est irréductible, c'est donc une base de V. □

On en déduit notamment que X et Y sont nilpotents de rang $\dim(V) - 1 = m - 1$.
Enfin en remarquant que $Tr(H) = Tr(XY - YX) = 0$ (et en utilisant que k est de caractéristique nulle), on obtient que les valeurs propres de H sont $n, n-2, n-4, ..., -n+2, -n$ avec $n = m-1$.

Posons enfin $e_i = \frac{1}{i!}Y^i v$. Alors $e_0, ..., e_n$ est une base de V dans laquelle on a :

$$H = \begin{pmatrix} n & & & (0) \\ & n-2 & & \\ & & ... & \\ & & & \\ (0) & & & -n \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & n & & (0) \\ & ... & n-1 & \\ & & & ... \\ & & & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 0 & & & & (0) \\ 1 & ... & & & \\ & 2 & & & \\ & & ... & & \\ (0) & & & n & 0 \end{pmatrix}$$

Réciproquement, il est immédiat que, muni de ces opérateurs, k^{n+1} est un $\mathfrak{sl}_2(k)$-module irréductible, qu'on notera V_n. On a donc montré :

Proposition 10. *Les* $\mathfrak{sl}_2(k)$*-modules irréductibles sont les* V_n, $n \geq 0$.

Plus précisément, on a montré le lemme suivant qui servira par la suite :

Lemme 4. *Soit* V *un* $\mathfrak{sl}_2(k)$*-module, et soit* $v \in V$ *non nul tel que* $Xv = 0$ *et* $Hv = \lambda v$. *Alors* λ *est un entier* n *et* V *le module engendré par* v *est isomorphe à* V_n.

Montrons maintenant la semi-simplicité. Il faut montrer que tout module est somme directe de modules irréductibles. Cela se montre par récurrence sur la dimension, en utiliant le lemme :

Lemme 5. *Soit* $(m, n) \in \mathbb{N}^2$. *Toute suite exacte courte :* $0 \to V_n \to V \to V_m \to 0$ *est scindée.*

Preuve : Notons V' l'image de V_n dans V. Soit $l = \sup(m, n)$. Remarquons que les valeurs propres de H dans V sont exactement $\{l, l-2, ..., -l\}$: cela se déduit du fait général que si u est un endomorphisme d'un espace vectoriel E, et F un sous-espace stable, alors $Spec(u, E) = Spec(u, F) \cup Spec(u, E/F)$.
Si $m > n$, soit v un vecteur propre de H dans V, pour la valeur propre m. Alors $Xv = 0$, et on déduit du lemme précédent que le $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-sous-module engendré par v est isomorphe à V_m. Par irréductibilité, son intersection avec V' est nulle, et on a bien une section.
Si $m \leq n$, remarquons que le sous-espace caractéristique de H dans V, pour la valeur propre λ est de dimension ≤ 2 si $|\lambda| \geq m$, et ≤ 1 si $|\lambda| > m$. Comme V est somme de ses sous-espaces caractéristiques, ce sont des égalités.
Supposons $m < n$. Soit alors $v \notin V'$ dans le sous-espace caractéristique de H pour la valeur propre m. Comme ce dernier est de dimension 2, on a $(H - m)^2 v = 0$, dont on déduit que Xv est dans le sous-espace caractéristique de H pour la valeur propre m. Mais celui-ci est de dimension 1 et est inclus dans V'. Donc $HXv = (m+2)Xv$, d'où on déduit $X(H-m)v = 0$. Donc, si $(H-m)v \in V'$, alors $(H - m)v$ est nul, car sinon il serait à la fois valeur propre pour m et n. Dans ce cas v est valeur propre pour H. Si $Xv = 0$, on prend le module engendré par v et c'est terminé grâce au lemme précédent. Sinon, Xv est valeur propre pour $m + 2$, donc est dans V'. Soit w un vecteur propre de H dans V_n pour la valeur propre m. Alors il existe un scalaire μ tel que $Xv = \mu Xw$. Donc, quitte à remplacer v par $v - \mu w$ on peut supposer $Xv = 0$ et ce cas est réglé. Enfin, si

$(H-m)v \notin V'$, on prend le module qu'il engendre et, grâce au lemme, il forme une section.
Maintenant supposons $m = n$. Supposons qu'il existe une valeur propre pour H qui n'est pas dans V'. Quitte à la translater par X on peut supposer que c'est n. Alors on peut à nouveau conclure grâce au lemme précédent.
Supposons donc que les valeurs propres de H dans V soient toutes dans V'. Soit $(e_0, ..., e_n)$ la base de V' définie plus haut, et soit $v \notin V'$ dans le sous-espace caractéristique de n. $(H-n)(H-n)v = 0$ donc il existe $\lambda \neq 0$ tel que $\lambda(H-n)v = e_0$. Soit alors $f_0 = \lambda v$ et $f_i = \lambda_i Y^i f_0$, où les λ_i sont choisis de telle façon que $(H - n + 2i)f_i = e_i$.
Dans la base $(e_0, f_0, e_1, f_1, ...)$, X est une matrice subdiagonale par blocs 2×2, Y est sous-diagonale par blocs 2×2, et H est une diagonale par blocs 2×2 de la forme :

$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix} \quad i \in \{n, n-2, ..., -n\}$$

Maintenant, en écrivant la relation $[X,Y] = H$ par blocs, étant donné que tous les blocs commutent entre eux, on voit que la somme des blocs diagonaux de H est nulle, et on a une contradiction.

On a donc montré, pour k algébriquement clos de caractéristique zéro, la semi-simplicité de $\mathfrak{sl}_2(k)$. Soit k est un corps de caractéristique zéro quelconque, et soit V est un $\mathfrak{sl}_2(k)$-module irréductible, de dimension n. En utilisant le plongement $\mathfrak{gl}_n(k) \subset \mathfrak{gl}_n(l)$, où l est une clôture algébrique de k, et en utilisant la classification des $\mathfrak{sl}_2(l)$-modules, on voit que H est conjuguée à une matrice D diagonale à coefficients entiers par une matrice de $GL_n(l)$. Par conséquent, comme k est infini, H et D sont aussi conjugués par une matrice de $GL_n(k)$. Il existe donc un vecteur propre pour H, et ensuite il suffit de tout refaire comme dans la preuve dans le cas algébriquement clos.