

CORRIGENDUM À “GROUPES PLEINS-TOPOLOGIQUES, D’APRÈS MATUI, JUSCHENKO, MONOD...”

Soit X un espace métrique. On définit $\text{TM}(X)$ comme le groupe des permutations σ de X à déplacement borné, au sens où $\sup_{x \in X} d(\sigma(x), x) < \infty$.

Dans le chapitre 4 de [Cor13], le résultat principal, dû à l’origine à Juschenko et Monod [JM13] est le suivant [Cor13, Théorème 4.2.1]:

Soit G un groupe agissant sur $\mathbf{Z}$ via un morphisme $G \rightarrow \text{TM}(\mathbf{Z})$. On suppose que le stabilisateur $\{g \in G : g\mathbf{N} = \mathbf{N}\}$ de $\mathbf{N}$ est moyennable. Alors G est moyennable.

La preuve consiste un premier temps à montrer le résultat suivant (non énoncé dans [Cor13]). Si un groupe G agit sur un ensemble X , et Y est une partie de X , on dit que G *commensure* Y si pour tout $g \in G$, la partie $gY \Delta Y$ est finie.

Si X est un espace métrique et l’action est donnée par un morphisme $G \rightarrow \text{TM}(X)$, cette hypothèse est automatique si Y est de bord fini, au sens où pour tout n , la partie $\{x \in X - Y : d(x, Y) \leq n\}$ est finie. En particulier pour une action $G \rightarrow \text{TM}(\mathbf{Z})$, c’est automatique pour $Y = \mathbf{N}$.

Proposition 1. *Soit X un espace métrique à boules finies, à croissance sous-exponentielle (au sens où les boules pour un centre fixé ont une croissance sous-exponentielle). Soit G agissant sur X , via un morphisme $G \rightarrow \text{TM}(X)$, et commensurant une partie Y de X . Supposons que le stabilisateur G_Y de Y est moyennable. Alors pour toute partie Y' de X telle que $Y \Delta Y'$ est fini, le stabilisateur $G_{Y'}$ de Y' est moyennable.*

Preuve. Il suffit de montrer, pour tout $x \in X$, et notant $Y' = Y \cup \{x\}$ si $x \notin Y$ et $Y' = Y \setminus \{x\}$ si $x \in Y$, que $G_{Y'}$ est moyennable.

Comme X est à croissance sous-exponentielle, $G_{Y'}$ préserve une moyenne sur son orbite $G_{Y'}x$. De plus le stabilisateur $(G_{Y'})_x$ de x est inclus dans G_Y dans les deux cas de figure (puisque Y est égal à $Y' \setminus \{x\}$ ou $Y' \cup \{x\}$). Donc ce stabilisateur est moyennable. Cela implique que G_Y est moyennable (c’est le fait 4.2.2 dans [Cor13], dans le cas particulier d’une action transitive). $\square$

Le début de la preuve du théorème 4.1.1, dans [Cor13], contient grosso modo cet argument (pour $X = \mathbf{Z}$, $Y = \mathbf{N}$), de manière un peu moins concise. Elle suppose implicitement que $G \subset \text{TM}(\mathbf{Z})$ ce qui est valide, mais semble supposer que G contient le groupe W des permutations à support fini ce qui n’est pas clair. Car pour s’y ramener, il faut montrer que GW vérifie l’hypothèse que $(GW)_{\mathbf{N}}$ est moyennable. Or justement montrer ce fait revient essentiellement à reprouver

la proposition ci-dessus, et la preuve se mord donc la queue. La preuve ci-dessus montre que ce détour par les permutations à support fini est inutile.

Cette erreur mineure n’apparaît pas dans [JM13] car eux énonçaient le théorème avec l’hypothèse apparemment plus forte que le stabilisateur de toute partie Y telle que $Y \cap \mathbf{N}$ est fini est moyennable. Autrement dit, en prenant comme hypothèse la conclusion de la proposition.

REFERENCES

- [Cor13] Y. Cornulier. Groupes pleins-topologiques [d’après Matui, Juschenko, Monod...] Dans: Séminaire Bourbaki, volume 2012/2013, exposés 1059-1073 Astérisque 361 (2014).
- [JM13] K. Juschenko, N. Monod. Cantor systems, piecewise translations and simple amenable groups. *Annals of Mathematics* 178 (2013), 775–787.