$$\varrho = S + \sum_{1}^{n} x_{i-1} (x_i^m - x_{i-1}^m) \leqq S + m \sum_{1}^{n} x_{i-1}^m (x_i - x_{i-1}) =$$

$$= S + m\, s \leqq (m + 1)\, S$$

$$\varrho = s + \sum_{1}^{n} x_i (x_i^m - x_{i-1}^m) \geqq s + m \sum_{1}^{n} x_i^m (x_i - x_{i-1}) =$$

$$= s + m\, S \geqq (m + 1)\, s,$$

ma è chiaro che anche da queste segue la (7). Analoga modificazione subirebbero (8) e (10) se $0 > m > -1$.

Sostituzioni sopra un'infinità numerabile di elementi.

del Prof. Giuseppe Vitali

I numeri interi $>$ o si possono ordinare in infinite maniere in guisa da formare una successione, o, come noi diremo, una *permutazione*.

Noi chiameremo *sostituzione* il passaggio dalla permutazione

(1) $\quad 1, 2, 3, \ldots\ldots N, N+1, \ldots\ldots$

ad una permutazione qualsiasi.

Le sostituzioni sopra un numero finito di elementi si dividono, come è noto, in *positive* (o pari) e *negative* (o dispari) in modo che il prodotto (in qualsiasi ordine) di due dello stesso nome è una sostituzione positiva, e quello di due di nome diverso è una sostituzione negativa.

È possibile una simile divisione per le sostituzioni qui definite?

La risposta, come andremo a vedere, è negativa.

Supponiamo possibile una tale divisione. Si avrebbe subito:

1. *Il prodotto di due cicli dello stesso ordine è positivo.*

Esso è infatti un quadrato, poichè

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_p)\,(\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots \beta_p) = (\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots\ldots \alpha_p\, \beta_p)^2$$

e

$$(\ldots\ldots \alpha_{-2}, \alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \ldots\ldots)\,(\ldots\ldots \beta_{-2}, \beta_{-1}, \beta_0, \beta_1, \beta_2 \ldots\ldots)$$
$$= (\ldots\ldots \alpha_{-2}, \beta_{-2}, \alpha_{-1}, \beta_{-1}, \alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \ldots\ldots)^2.$$

2. *Una sostituzione i cui cicli si possono dividere in coppie di cicli dello stesso ordine è positiva.*

Infatti, per il teor. precedente, essa è un quadrato.

3. *Una sostituzione di infiniti cicli tutti dello stesso ordine è positiva.* Consegue dal precedente.

4. *Un ciclo è una sostituzione positiva.*

Intanto se C è un ciclo, ed esistono infiniti elementi di (1) che non figurano in C, si può con questi elementi formare una sostituzione Σ composta di infiniti cicli dello stesso ordine di C. Ma Σ è positiva, quindi anche $C \,.\, \Sigma$ è una sostituzione positiva e quindi C è una sostituzione positiva.

Se C è un ciclo infinito non che escluda infiniti elementi di (1), e se

$$C = (\ldots\ldots p_{-2}, q_{-2}, p_{-1}, q_{-1}, p_0, q_0, p_1, q_1, p_2, q_2 \ldots\ldots),$$

posto

$$C_1 = (\ldots\ldots q_{-2}, q_{-1}, q_0, q_1, q_2 \ldots\ldots)$$

e

$$\Sigma = (\ldots\ldots (p_{-2}, q_{-2})\,(p_{-1}, q_{-1})\,(p_0, q_0)\,(p_1, q_1)\,(p_2, q_2) \ldots\ldots),$$

si ha subito

$$C = \Sigma\, C_1$$

Ma C_1 è un ciclo che esclude infiniti elementi e quindi è una sostituzione positiva, Σ è il prodotto di infiniti cicli di 2° ordine e quindi è una sostituzione positiva, dunque C è una sostituzione positiva.

5. *Ogni sostituzione uguale al prodotto di un numero finito di cicli è positiva.*

Consegue dal teorema precedente.

6. *Il prodotto di infiniti cicli finiti è una sostituzione positiva.*

Invero se

$$\Sigma = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_{r_1})\,(\alpha_{r_1+1}, \alpha_{r_1+2} \ldots\ldots \alpha_{r_2}) \ldots\ldots,$$

posto

$$\Sigma' = (\alpha_{r_1}, \alpha_{r_1+1})\,(\alpha_{r_2}, \alpha_{r_2+1}) \ldots\ldots,$$

si ha

$$\Sigma'\,\Sigma = (\ldots\ldots \alpha_{r_2}, \alpha_{r_1}, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{r_1-1}, \alpha_{r_1+1}, \alpha_{r_1+2} \ldots \alpha_{r_2-1} \ldots\ldots)$$

e poichè un ciclo è una sostituzione positiva, $\Sigma'.\Sigma$ è una sostituzione positiva. Ma anche Σ' è una sostituzione positiva e quindi Σ è pure una sostituzione positiva.

6. *Ogni sostituzione è positiva.*

Infatti ogni sostituzione è il prodotto di cicli finiti e infiniti. Indicando con S il prodotto dei cicli finiti e con Σ quello dei suoi cicli infiniti, risulta subito, per i risultati precedenti, che S e Σ sono due sostituzioni positive e quindi che il loro prodotto, cioè la sostituzione data, è una sostituzione positiva.

Il teorema 6 dimostra appunto l'impossibilità della distinzione delle nostre sostituzioni in positive e negative.

La nozione di permutazione è qui più ampia di quella di cui Helge von Kock fa uso nei suoi studi sui determinanti infiniti. Egli diffatti chiama permutazione di (1) ciò che diventa la (1) quando si eseguisce una sostituzione sopra un numero finito di suoi elementi.

La estensione che egli fa ai determinanti infiniti della formula dello sviluppo dei determinanti finiti suggerisce la ricerca da me fatta (con esito purtroppo negativo) allo scopo di dare alla definizione di un determinante infinito una forma più indipendente dall'ordine delle linee e delle colonne. Ormai resta provato che un tale scopo non può essere pienamente raggiunto.

Definitione de numeros irrationale secundo Euclide

Nota de G. PEANO

[Il presente articolo è scritto in Interlingua; e così il lettore può farsi un'idea del movimento, accentuatosi in questi ultimi anni, in favore della lingua internazionale.

Sonvi più specie d'Interlingua, con varii nomi; tutti basati su grammatica minima, e sul vocabolario oggi internazionale. Alcuni gior-