DÉCOMPOSITIONS DE GROUPES PAR PRODUIT DIRECT ET GROUPES DE COXETER

Yves de Cornulier et Pierre de la Harpe

Le 7 juillet 2005

ABSTRACT. We provide examples of groups which are indecomposable by direct products, and more generally which are uniquely decomposable in direct products of indecomposable groups. Examples include Coxeter groups, for which we give an alternative approach to recent results of L. Paris.

For a finitely generated linear group Γ, we establish an upper bound on the number of factors of which Γ can be the direct product. If Γ is moreover torsion-free, it follows that Γ is uniquely decomposable in direct products of indecomposable groups.

RÉSUMÉ. Nous montrons des exemples de groupes indécomposables par produits directs, et plus généralement uniquement décomposables en produits de groupes indécomposables. Les exemples considérés incluent les groupes de Coxeter, pour lesquels nous redémontrons des résultats récents de L. Paris.

Pour un groupe linéaire de type fini Γ, nous établissons une borne supérieure sur le nombre de facteurs dont Γ puisse être produit direct. Si Γ est de plus sans torsion, il en résulte que Γ est uniquement décomposable en produits de groupes indécomposables.

1. Introduction

Il existe plusieurs procédés pour "décomposer" certains groupes en constituants qu'on peut imaginer d'étude "plus simple". L'objet du présent article est la décomposition en *produit direct*.

Un groupe est *indécomposable* s'il n'est pas un produit direct de manière non banale. Notre premier but est d'établir l'indécomposabilité de certains groupes apparaissant dans

---

Key words and phrases. Groupes indécomposables, produits directs, groupes uniquement directement décomposables, groupes de Coxeter, groupes de Wedderburn-Remak-Krull-Schmidt.

Nous remercions le Fonds National Suisse de la Recherche Scientifique pour son soutien.

des contextes géométriques ; par exemple des sous-groupes “assez grands” ou même des réseaux dans certains groupes de Lie ou groupes algébriques.

La condition pour un groupe d'être isomorphe à un produit fini de groupes indécomposables n'est pas très restrictive, et il est bien connu que de nombreux groupes possèdent plusieurs telles décompositions qui sont essentiellement différentes. Voir l'exemple $A_{2,2} \times A_{3,3}$ de [Kuro, § 42] et les exemples abéliens rappelés ci-dessous (numéros (xiv) et (xvii) du chapitre 2) ; il y a aussi des exemples “plus dramatiques” dus à Baumslag : pour toute paire d'entiers $m, n \geq 2$, il existe des groupes de type fini $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_n$, nilpotents et sans torsion, indécomposables et non isomorphes deux à deux, tels que les produits directs $A_1 \times \cdots \times A_m$ et $B_1 \times \cdots \times B_n$ sont isomorphes [Baum]. Il existe de nombreux autres cas de “mauvais comportements” du point de vue des produits directs : par exemple des groupes Γ de type fini[1] isomorphes à $\Gamma \times \Delta$, $\Delta \neq \{1\}$ [Hi86] ou même à $\Gamma \times \Gamma$ ([Ty74], [Ty80], [Meie]).

La situation est donc beaucoup moins simple que celle qui prévaut pour les produits libres, puisque le théorème de Grushko assure que tout groupe de type fini est produit libre d'un nombre fini de groupes librement indécomposables, et ceci de manière essentiellement unique (voir par exemple [Stal] ou [ScWa]).

La plupart des complications qui apparaissent dans les décompositions d'un groupe G par produit direct sont liées au centre de G. En effet, si celui-ci est réduit à un élément, une décomposition de G en produit fini de groupes indécomposables est nécessairement unique ; ce fait, bien connu, est rappelé ci-dessous comme conséquence de la proposition 2.

Convenons qu'un groupe est *uniquement directement décomposable*[2] s'il est somme restreinte de groupes indécomposables, et ceci de manière unique à isomorphisme près des facteurs. (Rappelons que la *somme restreinte* d'une famille $(\Gamma_\iota)_{\iota \in I}$ désigne le sous-groupe du groupe produit des G_ι formé des éléments $(\gamma_\iota)_{\iota \in I}$ tels que $\gamma_\iota = 1$ pour presque tout ι ; dans le cas où I est fini, nous suivons Bourbaki en écrivant aussi “produit direct” au lieu de “somme restreinte”.) Remarquons qu'un groupe uniquement directement décomposable qui est de type fini est nécessairement produit direct d'un nombre *fini* de facteurs indécomposables.

Notre second but est d'établir que certaines classes de groupes sont uniquement directement décomposables (propositions 3, 5 et 14). Après des rappels d'exemples standard, nous analysons en particulier la décomposabilité des *sous-groupes Zariski-denses de groupes algébriques.*

Nous illustrons notre méthode par les *groupes de Coxeter* (proposition 8). Dans [Par2], Paris a montré de manière complètement différente que les groupes de Coxeter de type fini sont uniquement directement décomposables. L'origine du présent travail est la recherche d'une autre preuve de ce fait.

---

[1] C'est un problème ouvert bien établi de savoir s'il existe un groupe Γ infini de présentation finie qui soit isomorphe à $\Gamma \times \Gamma$. Voici une question peut-être moins ambitieuse : existe-t-il un groupe Γ infini de présentation finie tel que, pour tout entier $m_0 \geq 1$, il existe des groupes $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ ($m \geq m_0$) non réduits à un élément dont le produit direct soit isomorphe à Γ ?

[2] D'autres auteurs [Hi90] écrivent “groupe R.K.S.”, en référence à Remak, Krull et Schmidt. Pour une notion de décomposabilité apparentée mais distincte, voir ci-dessous le numéro 2.5.

Enfin, nous établissons une borne supérieure pour le nombre de facteurs non réduits à un élément dans une décomposition en produits directs d'un groupe linéaire de type fini (théorème 13).

La décomposition des groupes par produit direct intervient dans certains résultats de décomposition d'espaces topologiques. Par exemple, soit Γ le groupe fondamental d'une variété riemannienne compacte à courbure négative ou nulle ; supposons le centre de Γ réduit à un élément. C'est un cas particulier de résultats classiques de Gromoll-Wolf (1971) et Lawson-Yau (1972) qu'une décomposition du groupe en produit direct $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$ correspond nécessairement à une décomposition de la variété en produit riemannien. Voici un corollaire de résultats plus récents (voir [BrHa], chapitre II.6, ainsi que [Schr] et le chapitre 10 de [Eber]).

Soit Y un espace géodésique compact qui possède la propriété d'extension des géodésiques et qui est à courbure négative ou nulle. Supposons que le groupe fondamental de Y est un produit direct $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$ et que le centre de Γ est réduit à un élément. Alors Y est un produit d'espaces métriques $Y_1 \times Y_2$ de telle sorte que le groupe fondamental de Y_i est Γ_i ($i = 1, 2$).

2. Premiers exemples

Un groupe Γ est *indécomposable* si[3] $\Gamma \neq \{1\}$ et si, pour tout isomorphisme de Γ avec un produit direct $\Gamma_1 \times \Gamma_2$, l'un des groupes Γ_1, Γ_2 est réduit à un élément. La notion est classique : voir parmi d'autres [Kuro, § 17], [Rotm, chap. 6] et [Suzu, § 2.4].

(i) Tout groupe simple est indécomposable.

(ii) Il existe de nombreux groupes finis indécomposables qui ne sont pas simples. Par exemple, pour tout $n \geq 2$, le groupe symétrique Sym_n, qui est un groupe de Coxeter de type A_n, est indécomposable (cela résulte de ce que tout sous-groupe normal distinct de $\{1\}$ contient le groupe alterné simple Alt_n si $n \neq 2, 4$, et d'un argument direct si $n = 2$ ou 4) ; pour tout $n \geq 3$, le produit semi-direct standard $\mathrm{Sym}_n \ltimes (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{n-1}$, qui est un groupe de Coxeter de type D_n, est indécomposable (l'argument de la proposition 1 ci-dessous s'applique). En revanche, on sait que certains des groupes de Coxeter irréductibles finis sont décomposables, et alors décomposables en produit direct d'un groupe indécomposable et du centre à deux éléments ; ce sont les groupes diédraux d'ordres $8n + 4$ et les groupes de Coxeter de type type B_n pour $n \geq 3$ impair (la vérification est laissée au lecteur), ainsi que les groupes de type H_3 et E_7 (voir [BouL], chapitre 6, § 4, exercices 3 et 11).

Pour tout entier n pair, il existe un groupe fini métabélien indécomposable d'ordre n ; par exemple le produit semi-direct

$$(\mathbf{Z}/2^k\mathbf{Z}) \ltimes_{\pm} (\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}) \;=\; \langle a, b \mid a^{2^k} = 1, b^m = 1, a^{-1}ba = b^{-1} \rangle,$$

[3] Nous adoptons ici une terminologie selon laquelle le groupe $\{1\}$ n'est ni indécomposable, ni décomposable (mais néanmoins le produit de la famille vide de groupes indécomposables). Ceci est cohérent avec la convention (par exemple de Bourbaki) selon laquelle le groupe à un élément n'est pas simple !

où $k, m \geq 1$ sont tels que $n = 2^k m$ avec m impair. En revanche, les entiers impairs qui sont des ordres de groupes finis indécomposables constituent un ensemble d'entiers de densité nulle [ErPa].

(iii) Les groupes abéliens $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Q}$ sont indécomposables ; plus généralement, tout sous-groupe de $\mathbf{Q}$ non réduit à un élément est indécomposable (pour la description de ces groupes, voir par exemple le chapitre 10 de [Rotm]). Soient p un nombre premier et $m \geq 1$ un entier ; un groupe cyclique d'ordre p^m est indécomposable, de même que le sous-groupe $\mathbf{Z}(p^\infty)$ de $\mathbf{C}^*$ des racines de l'unité d'ordres des puissances de p. En effet, dans chacun de ces groupes, l'intersection de deux sous-groupes non réduits à un élément n'est jamais réduite à un élément. Le groupe additif $\mathbf{Z}_p$ des entiers p-adiques (vu comme groupe discret) est indécomposable [Kapl, Section 15].

Un groupe abélien divisible indécomposable est isomorphe à l'un de $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Z}(p^\infty)$; les groupes abéliens divisibles sont uniquement directement décomposables [Fuch, § 23]. Un groupe abélien indécomposable est ou bien de torsion ou bien sans torsion ; s'il est de torsion, il est isomorphe à l'un de $\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}(p^\infty)$; voir [Kapl, Section 9]. Les groupes abéliens sans torsion sont beaucoup moins bien compris, et certainement pas tous uniquement directement décomposables (voir le début du chapitre 3 ci-dessous).

(iv) Un groupe nilpotent Γ dont le centre est indécomposable est lui-même indécomposable. En effet, soit $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$ une décomposition en produit direct. Le centre de Γ étant égal au produit des centres de Γ_1 et Γ_2, l'un de ceux-ci est réduit à un élément. L'assertion résulte de ce qu'un groupe nilpotent dont le centre est réduit à un élément est lui-même réduit à un élément.

En particulier, le *groupe de Heisenberg* $\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{Z} & \mathbf{Z} \\ 0 & 1 & \mathbf{Z} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est indécomposable.

Notons $\Gamma = C^1(\Gamma) \supset \cdots \supset C^{j+1}(\Gamma) = [\Gamma, C^j(\Gamma)] \supset \cdots$ la série centrale descendante d'un groupe Γ. Soient $k, j \geq 2$ des entiers et F_k le groupe non abélien libre à k générateurs ; le *groupe nilpotent libre* de classe j à k générateurs $\Gamma = F_k/C^{j+1}(F_k)$ est indécomposable.

En effet, soit $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$ une décomposition en produit direct. Soient l, m les rangs des groupes abéliens libres $\Gamma_1/C^2(\Gamma_1), \Gamma_2/C^2(\Gamma_2)$, respectivement ; notons que le rang k du groupe abélien libre $\Gamma/C^2(\Gamma) = F_k/C^2(F_k)$ est égal à la somme $l + m$. D'une part, le rang du groupe abélien libre $C^2(\Gamma)/C^3(\Gamma) = C^2(F_k)/C^3(F_k)$ est le coefficient binomial $\binom{k}{2}$. D'autre part, le rang du groupe abélien libre $C^2(\Gamma_1)/C^3(\Gamma_1)$ est majoré par le rang $\binom{l}{2}$ de $C^2(F_l)/C^3(F_l)$, et de même pour Γ_2 et $\binom{m}{2}$. Comme

$$C^2(\Gamma)/C^3(\Gamma) \approx \left(C^2(\Gamma_1)/C^3(\Gamma_1)\right) \times \left(C^2(\Gamma_2)/C^3(\Gamma_2)\right),$$

il en résulte que $\binom{k}{2} \leq \binom{l}{2} + \binom{m}{2}$, donc que l'un de k, l est zéro, et par suite que l'un de Γ_1, Γ_2 est réduit à un élément.

(v) Un groupe résiduellement résoluble Γ dont l'abélianisé $\Gamma/[\Gamma, \Gamma]$ est indécomposable est lui-même indécomposable. Par exemple, le groupe $\begin{pmatrix} 2^{\mathbf{Z}} & \mathbf{Z}[1/2] \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est indécomposable. (L'argument de la proposition 3 permet de remplacer 2 par un autre nombre rationnel.)

Plus généralement un groupe résiduellement résoluble $\Gamma \neq \{1\}$ est indécomposable dès qu'un des quotients $\Gamma/C^j(\Gamma)$ ou $\Gamma/D^j(\Gamma)$ est indécomposable pour un entier $j \geq 2$, où $\Gamma = D^0(\Gamma) \supset \cdots \supset D^{i+1}(\Gamma) = [D^i(\Gamma), D^i(\Gamma)] \supset \cdots$ désigne la série dérivée.

Détaillons par exemple l'argument pour C^j : soit $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$ un groupe résiduellement résoluble tel que $\Gamma/C^j(\Gamma)$ est indécomposable ; nous pouvons supposer les notations telles que $\Gamma_2/C^j(\Gamma_2)$ est réduit à un élément ; *a fortiori,* $\Gamma_2/[\Gamma_2, \Gamma_2]$ est réduit à un élément, ce qui implique que $\Gamma_2 = \{1\}$ puisque Γ_2 est résiduellement résoluble.

(vi) Le groupe fondamental $\Gamma = \langle x, y \mid xyx^{-1} = y^{-1}\rangle$ d'une bouteille de Klein est indécomposable.

En effet, soit $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$ une décomposition en produit direct. Le groupe dérivé $D\Gamma = D\Gamma_1 \times D\Gamma_2$ est engendré par y^2 ; il est cyclique infini, et donc indécomposable, de sorte qu'on peut supposer $D\Gamma_2 = \{1\}$, c'est-à-dire Γ_2 abélien. Pour $j = 1, 2$, notons x_j [respectivement y_j] la projection de x [resp. y] sur Γ_j. Alors $D\Gamma_2 = \{1\}$ implique $y_2^2 = 1$, et en fait $y_2 = 1$ puisque Γ est sans torsion. Le centre $Z(\Gamma) = Z(\Gamma_1) \times Z(\Gamma_2)$ est engendré par x^2 ; il est également cyclique infini, donc indécomposable. Si nous avions $Z(\Gamma_1) = \{1\}$, nous aurions aussi $x_1 = 1$ comme ci-dessus, donc $\Gamma = \langle y_1\rangle \times \langle x_2\rangle$ serait abélien, ce qui est absurde. C'est donc $Z(\Gamma_2)$ qui est réduit à un élément, ce qui montre enfin que Γ_2 lui-même est réduit à un élément.

(vii) Un produit libre de deux groupes non réduits à un élément est indécomposable [Kuro, § 24].[4]

(viii) Soit Γ un sous-groupe non réduit à un élément d'un groupe qui est hyperbolique au sens de Gromov et sans torsion. Alors Γ est indécomposable car, pour tout élément $\gamma \neq 1$ dans un tel groupe, le centralisateur de γ est cyclique infini.

(ix) Soit G un groupe de Lie réel connexe semi-simple, à centre fini et sans facteur compact, de rang réel au moins deux, et soit Γ un réseau irréductible dans G. On suppose le centre de Γ réduit à un élément. C'est une conséquence immédiate du théorème de Margulis concernant les sous-groupes normaux de Γ (voir le chapitre 8 de [Zimm]) que Γ est indécomposable ; ceci s'applique par exemple à $\Gamma = \mathrm{PSL}_d(\mathbf{Z})$ pour $d \geq 3$. Avec des formulations plus générales (voir le chapitre VIII de [Marg]), on montre de même que des groupes comme $\mathrm{PSL}_d(\mathbf{Z}[1/p])$, qui est un réseau irréductible dans $\mathrm{PSL}_d(\mathbf{R}) \times \mathrm{PSL}_d(\mathbf{Q}_p)$, sont indécomposables ($p$ est un nombre premier, d un entier, $d \geq 2$).

Le même type de résultat (et d'argument) vaut encore plus généralement pour des réseaux irréductibles dans certains produits de groupes localement compacts [BaSh].

Dans de nombreux cas, ces affirmations peuvent être démontrées par des arguments plus économiques. Par exemple, les groupes $\mathrm{PSL}_d(\mathbf{Z}[1/p])$ sont denses dans le groupe de

[4] Notons la conséquence suivante pour le problème de décision relatif à la décomposition en produit direct : le problème de savoir si un groupe donné par une présentation est décomposable ou non n'est pas algorithmiquement résoluble. En effet, soient A et B deux groupes de présentation finie non réduits à un élément (par exemple $A = B = \mathbf{Z}$) et Δ un groupe de présentation finie. Le groupe $\Gamma = (A \times B) * \Delta$ est décomposable si et seulement si Δ est réduit à un élément, et il est bien connu qu'il n'existe pas d'algorithme permettant de savoir si un groupe donné par une présentation finie est ou n'est pas réduit à un élément.

Lie $\mathrm{PSL}_d(\mathbf{R})$, a fortiori Zariski-denses dans le groupe algébrique $\mathrm{PSL}_d(\mathbf{C})$, et sont donc indécomposables en vertu de la proposition 3 ci-dessous.

(x) Soit Γ un groupe tel que, pour toute paire N_1, N_2 de sous-groupes normaux non réduits à un élément, l'intersection $N_1 \cap N_2$ ne l'est pas non plus ; alors Γ est évidemment indécomposable. Dans ce cas, les sous-groupes normaux non réduits à un élément forment une base de voisinage de 1 pour une topologie sur Γ qu'on appelle la *topologie pro-normale* et qui est étudiée dans [GeGl].

Un sous-groupe Zariski-dense Γ d'un groupe de Lie G connexe simple à centre trivial possède cette propriété. En effet, soient N_1 et N_2 deux sous-groupes non réduits à un élément de Γ. Désignons par $\overline{N}_1$ et $\overline{N}_2$ leurs adhérences de Zariski ; ce sont des sous-groupes normaux du groupe simple G, de sorte qu'ils coïncident avec G. Si nous avions $N_1 \cap N_2 = \{1\}$, nous aurions aussi $[N_1, N_2] = \{1\}$ et $[\overline{N}_1, \overline{N}_2] = [G, G] = \{1\}$, ce qui est absurde.

Le "groupe de Grigorchuk" possède aussi cette propriété. C'est le 2-groupe infini de type fini qui apparaît dans [Grig] ; voir aussi, par exemple, le théorème VIII.42 de [Harp]. Ceci s'étend à tout groupe *juste infini*, c'est-à-dire à tout groupe infini dont tous les quotients propres sont finis ; voir [SaSS], en particulier le chapitre rédigé par J. Wilson.

De même pour le "groupe F de Thompson", dont on sait que le groupe dérivé est d'une part simple et d'autre part contenu dans tout sous-groupe normal non réduit à un élément (théorème 4.5 et preuve du théorème 4.3 dans [CaFP]).

(xi) Nous démontrons ci-dessous l'indécomposabilité des groupes de Coxeter irréductibles infinis (corollaire de la proposition 1 et proposition 8).

(xii) Soit Γ un groupe non réduit à un élément qui est de présentation finie et de dimension cohomologique au plus 2. Alors Γ est ou bien indécomposable, ou bien un produit direct de deux groupes libres. En effet, s'il existe deux sous-groupes Γ_1, Γ_2 de Γ tels que $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$, un résultat de Bieri implique que Γ_1 et Γ_2 sont de dimension cohomologique au plus un [Bier, corollaire 8.6], de sorte que Γ_1 et Γ_2 sont libres par un théorème de Stallings (voir par exemple [Bier, theoreme 7.6]).

Voici deux familles d'exemples de groupes de dimension cohomologique au plus 2 : les sous-groupes sans torsion des groupes à un relateur ([Bier, théorème 7.7], résultat dû a Lyndon pour un groupe à un relateur sans torsion), et les groupes fondamentaux des variétés non compactes de dimension 3, en particulier les groupes de noeuds (voir par exemple [Serr], no 1.5 et lemme 5 du no 2.1).

Bagherzadeh a montré un résultat plus précis : les seuls sous-groupes décomposables des groupes à un relateur sans torsion sont des produits directs d'un groupe cyclique infini et d'un groupe libre (voir le corollaire 4.9 de [Bagh]). En particulier, tout sous-groupe décomposable de type fini d'un groupe à un relateur sans torsion est isomorphe à $\mathbf{Z}^2$.

(xiii) Pour toute paire k, l d'entiers, $k, l \geq 2$, le produit amalgamé

$$A_{k,l} \;=\; \langle a_1, a_2 \;\mid\; a_1^k = a_2^l \rangle$$

est indécomposable ; répétons l'argument simple du livre de Kurosh.

Le groupe $A_{k,l}$ est sans torsion, et son centre est cyclique infini engendré par $a_1^k = a_2^l$ (ce sont des conséquences immédiates de résultats concernant les formes normales dans les produits amalgamés, voir par exemple le § 4.2 de [MaKS]). Si $A_{k,l} = X \times Y$ est une décomposition en produit direct et si $(x, y) \in X \times Y$ est l'écriture du générateur a_1^k du centre de $A_{k,l}$, il en résulte que l'un de x, y est 1 ; sans restreindre la généralité de ce qui suit, nous pouvons supposer que $y = 1$. Notons $a_1 = (x_1, y_1)$, $a_2 = (x_2, y_2)$ les écritures dans le produit $X \times Y$ des générateurs a_1, a_2 de $A_{k,l}$; remarquons que le groupe X [respectivement le groupe Y] est engendré par x_1 et x_2 [resp. par y_1 et y_2]. Comme Y est sans torsion et comme $y_1^k = y_2^l = 1$, nous avons $y_1 = y_2 = 1$. Il en résulte que Y est réduit à un élément.

(xiv) Avec les notations de (xiii), considérons un entier $k \geq 2$ et le produit direct

$$\Gamma = A_{k,k} \times A_{k+1,k+1} = \langle a_1, a_2 \mid a_1^k = a_2^k \rangle \times \langle b_1, b_2 \mid b_1^{k+1} = b_2^{k+1} \rangle.$$

Posons $a = a_1^k = a_2^k$, qui est un générateur du centre de $A_{k,k}$, et $b = b_1^{k+1} = b_2^{k+1}$, qui est un générateur du centre de $A_{k+1,k+1}$. Dans Γ, posons

$$\begin{aligned} c_1 &= ab^{-1}a_1, \quad c_2 = ab^{-1}a_2, \quad c_3 = ab^{-1}b_1, \quad c_4 = ab^{-1}b_2 \\ c &= c_1^k = c_2^k = c_3^{k+1} = c_4^{k+1}, \qquad d = ab^{-1}. \end{aligned}$$

On vérifie que le sous-groupe C de Γ engendré par c_1, c_2, c_3, c_4 a un centre cyclique infini engendré par c, et on montre comme en (xiii) que C est indécomposable.

L'intérêt de ces exemples est le suivant : le groupe $A_{k,k} \times A_{k+1,k+1}$ est isomorphe au produit direct du groupe C et du groupe cyclique infini D engendré par d ; et les groupes $A_{k,k}, A_{k+1,k+1}, C, D$, tous indécomposables, sont non isomorphes deux à deux. En particulier, le groupe de présentation finie $A_{k,k} \times A_{k+1,k+1}$ n'est pas uniquement directement décomposable. Tout ceci apparaît dans [Kuro, § 42], pour $k = 2$.

Ces exemples montrent aussi qu'un réseau dans un groupe de Lie réel semi-simple peut ne pas être uniquement directement décomposable. En effet, pour $k \geq 3$, le quotient $\langle a_1, a_2 \mid a_1^k = a_2^k = 1 \rangle$ de $A_{k,k}$ par son centre est un réseau dans le groupe de Lie $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$; c'est un groupe fuchsien qui possède un quadrilatère fondamental dans le demi-plan de Poincaré ayant deux sommets opposés d'angle π/k et les deux autres sommets à l'infini. Le groupe $A_{k,k}$ lui-même est un réseau dans le revêtement universel $\tilde{G}$ de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$. Par suite, $A_{k,k} \times A_{k+1,k+1}$ est un réseau réductible dans le groupe de Lie semi-simple qui est produit direct de deux copies de ce revêtement universel.

Notons enfin que les groupes $A_{k,k} \times A_{k+1,k+1}$ sont linéaires. En effet, bien que le groupe $\tilde{G}$ ne soit pas linéaire, ses réseaux $A_{k,k}$ le sont (comparer avec la proposition de Toledo, Millson et Gersten qui apparaît au no IV.48 de [Harp]).

Citons plus brièvement quelques exemples illustrant la notion d'unique décomposabilité directe.

(xv) Un groupe indécomposable est évidemment uniquement directement décomposable. Avec nos conventions, le groupe à un élément est uniquement directement décomposable.

(xvi) Tout groupe fini est uniquement directement décomposable. C'est une conséquence immédiate du théorème de Wedderburn-Remak-Krull-Schmidt, mais un résultat non banal ! (Voir aussi ci-dessous la démonstration de la proposition 8.)

(xvii) Un groupe abélien de type fini est uniquement directement décomposable (voir par exemple [BouA'], chap. VII, § 4, no 8). Un groupe abélien libre est uniquement directement décomposable ; par exemple, le groupe multiplicatif $\mathbf{Q}_+^*$, isomorphe à la somme restreinte de copies de $\mathbf{Z}$ indexées par les nombres premiers, est uniquement directement décomposable. Une somme restreinte de groupes abéliens de rang 1, c'est-à-dire de sous-groupes de $\mathbf{Q}$, est uniquement directement décomposable. (C'est un résultat de Baer ; voir par exemple [Fuch, Section 86].)

En revanche, les groupes abéliens de rang fini sans torsion sont loins d'être tous uniquement directement décomposables. Par exemple, pour tout entier $n \geq 2$, il existe des groupes abéliens de rang fini sans torsion $A, A', A_1, \dots, A_n$, indécomposables et non isomorphes deux à deux, tels que $A \oplus A'$ et $A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$ sont isomorphes. Pour ceci et d'autres exemples de décompositions non isomorphes, voir les § 90–91 de [Fuch] ; voir aussi [Baum], déjà cité dans l'introduction.

Nous revenons à des exemples indécomposables, et en particulier à certains groupes de Coxeter.

Proposition 1. *Soit Γ un groupe possédant un sous-groupe normal abélien T avec les propriétés suivantes :*

(i) *il existe un entier $d \geq 1$ tel que T est isomorphe à $\mathbf{Z}^d$;*
(ii) *l'action de Γ/T sur T est fidèle ;*
(iii) *la représentation associée de Γ/T sur $T \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} \approx \mathbf{Q}^d$ est irréductible.*

Alors Γ est indécomposable.

Démonstration. Montrons d'abord que tout sous-groupe normal abélien N de Γ est contenu dans T.

Le sous-groupe $[N, T]$ de Γ est dans T et Γ/T-invariant. La propriété (iii) implique qu'il est ou bien d'indice fini dans T ou bien réduit à un élément. S'il était d'indice fini, il existerait un entier $k \geq 1$ tel que $[N, T]$ contienne un sous-groupe $kT \approx k\mathbf{Z}^d$; par la propriété (ii), N agirait non trivialement sur $[N, T]$ (qui est dans N), ce qui est impossible puisque N est abélien. Donc $[N, T] = \{1\}$; il en résulte que l'action de N sur T est triviale, de sorte que $N \subset T$ par la propriété (ii).

Soient Γ_1, Γ_2 des sous-groupes de Γ tels que $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$. Posons

$$\begin{aligned} N_1 &= \{a \in \Gamma_1 \mid \text{il existe} \quad b \in \Gamma_2 \quad \text{tel que} \quad (a, b) \in T\}, \\ N_2 &= \{b \in \Gamma_2 \mid \text{il existe} \quad a \in \Gamma_1 \quad \text{tel que} \quad (a, b) \in T\}, \\ N &= N_1 \times N_2. \end{aligned}$$

Alors N_1 est un sous-groupe normal abélien de Γ_1 et N_2 un sous-groupe normal abélien de Γ_2, donc N est un sous-groupe normal abélien de Γ ; de plus, N contient T. Il résulte de la maximalité de T établie plus haut que $N = T$. La propriété (iii) implique que l'un des facteurs N_1, N_2 est réduit à un élément ; convenons que $N_2 = \{1\}$. Comme Γ_2 centralise N_1, la propriété (ii) implique que $\Gamma_2 = \{1\}$. □

Corollaire. *Un groupe de Coxeter irréductible de type affine est indécomposable.*

Démonstration. Un groupe de Coxeter W_a de type affine est un produit semi-direct $Q \rtimes W$, où W est un groupe de Weyl, en particulier un groupe fini, et Q le groupe des poids radiciels correspondant, en particulier un groupe abélien libre de type fini ([BouL], chapitre 6, § 2, no 1, proposition 1). De plus, les conditions suivantes sont équivalentes : (i) W_a est irréductible comme groupe de Coxeter, (ii) W est irréductible comme groupe de Coxeter, (iii) la représentation de W dans $Q \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ est irréductible ([BouL], chapitre 6, § 1, no 1 et chapitre 5, § 3, no 7).

La proposition 1 s'applique donc à la situation du corollaire. □

3. Décompositions de sous-groupes de groupes algébriques

Il est bien connu qu'un groupe dont le centre est réduit à un élément possède au plus une décomposition en produit direct d'un nombre fini de sous-groupes indécomposables. Nous commençons par rappeler ce résultat et quelques-unes de ses conséquences, notamment le fait que la propriété d'indécomposabilité convenablement formulée passe de certains groupes topologiques à leurs sous-groupes denses.

Nous notons $Z(H)$ le centre d'un groupe H. Si H est sous-groupe d'un groupe G, nous écrivons H' son centralisateur dans G. Lorsque G est un produit direct $A \times B$, nous avons $A' = Z(A) \times B$. Si de plus $Z(G) = \{1\}$, alors $A' = B$ et $A = B'$.

Proposition 2. *Soient G un groupe de centre réduit à un élément et $G_1, \ldots, G_n$ des sous-groupes indécomposables de G tels que $G = G_1 \times \cdots \times G_n$.*

Si A, B sont deux sous-groupes de G tels que $G = A \times B$, il existe une renumérotation des G_i et un entier $m \in \{0, \ldots, n\}$ tels que

$$A = G_1 \times \cdots \times G_m \qquad \textit{et} \qquad B = G_{m+1} \times \cdots \times G_n.$$

Démonstration. Notons $g = (g_1, \ldots, g_n)$ l'écriture d'un élément $g \in G$ selon la décomposition $G = G_1 \times \cdots \times G_n$. Pour tout $i \in I \doteqdot \{1, \ldots, n\}$, notons $\pi_i : G \longrightarrow G_i, g \longmapsto g_i$ la projection canonique ; posons $A_i = A \cap G_i$ et $B_i = B \cap G_i$.

Nous affirmons que $A = A_1 \times \cdots \times A_n$, de sorte que $A_i = \pi_i(A)$ pour tout $i \in I$. En effet, soit $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A$. Comme $a \in B'$, nous avons

$$[(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n)] = ([a_1, b_1], \ldots, [a_n, b_n]) = (1, \ldots, 1)$$

pour tout $(b_1, \ldots, b_n) \in B$. Il en résulte que, pour $i \in I$, nous avons aussi $[a_i, b_j] = 1$ pour tous $j \in J$ et $b_j \in B_j$, et par suite $a_i \in B' = A$. L'affirmation en résulte. De même $B = B_1 \times \cdots \times B_n$ et $B_i = \pi_i(B)$ pour tout $i \in I$.

Soit $i \in I$; vu que $G = A \times B$ et $[A, B] = 1$, nous avons $G_i = A_i \times B_i$. De plus, l'un des groupes A_i, B_i est réduit à un élément parce que G_i est indécomposable. La proposition en résulte. □

Conséquence. *Un groupe G qui satisfait aux hypothèses de la proposition 2 est bien sûr uniquement directement décomposable, mais les sous-groupes indécomposables dont G est le produit direct sont de plus uniquement déterminés comme sous-groupes (et non pas seulement à isomorphisme près).*

L'argument de la preuve précédente est suffisamment robuste pour s'adapter à d'autres cas. Nous considérons ci-dessous un corps algébriquement clos K et des groupes algébriques définis sur K. Un tel groupe G est *indécomposable* s'il n'est pas produit direct *de sous-groupes algébriques* de manière non banale. Pour des raisons de dimension, tout G est produit direct d'une famille finie de sous-groupes algébriques indécomposables ; lorsque de plus $Z(G) = \{1\}$, ces sous-groupes sont uniquement déterminés à l'ordre près.

Proposition 3. *Soient G un groupe algébrique de centre réduit à un élément et $G_1, \ldots, G_n$ des sous-groupes algébriques indécomposables de G tels que $G = G_1 \times \cdots \times G_n$. Soit Γ un sous-groupe Zariski-dense de G.*

Si A, B sont deux sous-groupes de Γ tels que $\Gamma = A \times B$, il existe une renumérotation des G_i et un entier $m \in \{0, \ldots, n\}$ tels que

$$A \subset G_1 \times \cdots \times G_m \qquad \textit{et} \qquad B \subset G_{m+1} \times \cdots \times G_n.$$

En particulier, si G est de plus indécomposable comme groupe algébrique, c'est-à-dire si $n = 1$, tout sous-groupe Zariski-dense de G est indécomposable.

Démonstration (voir aussi l'exemple (x) du chapitre 2). Notons $\overline{A}$ et $\overline{B}$ les adhérences de Zariski de A et B. Alors $[\overline{A}, \overline{B}] = \{1\}$ ([Bore], no 2.4) ; de plus, $\overline{A}\,\overline{B}$ est fermé dans G ([Bore], no 1.4), de sorte que $G = \overline{A}\,\overline{B}$. Comme $\overline{A} \cap \overline{B}$ est central dans G, cette intersection est réduite à un élément et G est le produit direct $\overline{A} \times \overline{B}$.

L'argument de la démonstration précédente montre que, après renumérotation éventuelle des G_j, il existe un entier $m \in \{0, \ldots, n\}$ tel que $A \subset \overline{A} = G_1 \times \cdots \times G_m$ et $B \subset \overline{B} = G_{m+1} \times \cdots \times G_n$. □

Exemple. Considérons le groupe $\Gamma = \mathbf{Z} \ltimes \mathbf{Z}[1/pq]$, où $p \neq 0$, $q \geq 2$ sont deux entiers premiers entre eux, et où le générateur 1 de $\mathbf{Z}$ agit sur $\mathbf{Z}[1/pq]$ par multipication par p/q. C'est un groupe métabélien de type fini ; dans le cas où $|p| = 1$, c'est aussi un groupe de Baumslag-Solitar. Notons G le groupe des matrices triangulaires de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec $a \in \mathbf{C}^*$ et $b \in \mathbf{C}$; c'est un groupe algébrique connexe indécomposable (parce que son algèbre de Lie l'est, puisque c'est l'algèbre de Lie résoluble non abélienne de dimension 2, voir ci-dessous avant la proposition 6). Comme Γ est Zariski-dense dans G, il résulte de la proposition 3 que Γ est indécomposable. En particulier, tout groupe de Baumslag-Solitar résoluble qui n'est pas abélien libre de rang deux est indécomposable. (Les autres groupes de Baumslag-Solitar sont également indécomposables ; voir l'exemple (xii) du chapitre 1.)

Avant de généraliser ces propositions à certains cas avec centres, nour rappelons les points suivants concernant la notion d'hypercentre.

Considèrons à nouveau un groupe G, sans autre structure. La *suite centrale ascendante* de G est la suite $(\zeta^\alpha(G))_\alpha$, indexée par les ordinaux α, définie par récurrence transfinie comme suit (où π_β désigne la projection canonique de G sur $G/\zeta^\beta(G)$) :

si $\alpha = 0$, alors $\zeta^0(G) = \{1\}$;
si $\alpha = \beta + 1$, alors $\zeta^\alpha(G) = \pi_\beta^{-1}\big(Z(G/\zeta^\beta(G))\big)$;
si α est un ordinal limite, alors $\zeta^\alpha(G) = \cup_{\beta<\alpha}\zeta^\beta(G)$.
Chaque $\zeta^\alpha(G)$ est un sous-groupe caractéristique de G. *L'hypercentre* de G est la réunion $\zeta^\uparrow(G)$ des $\zeta^\alpha(G)$; il suffit de prendre la réunion sur l'ensemble des ordinaux dont le cardinal ne dépasse pas celui de G. L'hypercentre de G est un sous-groupe normal tel que $Z(G/\zeta^\uparrow(G)) = \{1\}$, et qui est minimal pour cette propriété. En particulier, $\zeta^\uparrow(G) = \{1\}$ si et seulement si $Z(G) = \{1\}$.

Soit maintenant G un groupe algébrique *connexe*. Son centre $Z(G) = \zeta^1(G)$ est ou bien de dimension strictement positive ou bien fini. Dans le second cas, $\zeta^2(G)$ est ou bien de dimension strictement positive ou bien fini, et alors égal à $Z(G)$ puisque tout sous-groupe normal fini d'un groupe connexe est central. Plus généralement, pour tout entier $k \geq 1$, l'une au moins des deux relations

$$\dim\big(\zeta^k(G)\big) \;>\; \dim\big(\zeta^{k-1}(G)\big)\,, \qquad \zeta^{k+1}(G) \;=\; \zeta^k(G)$$

est vraie. Il en résulte qu'il existe un entier h tel que $\zeta^\uparrow(G) = \zeta^h(G)$; en particulier l'hypercentre de G est un sous-groupe algébrique de G. De même, l'hypercentre d'un groupe de Lie réel ou complexe connexe est un sous-groupe fermé.

Proposition 4. *Soient G un groupe, $H = G/\zeta^\uparrow(G)$ le quotient de G par son hypercentre et $\pi : G \longrightarrow H$ la projection canonique. Soit $H = H_1 \times \cdots \times H_n$ la décomposition canonique de H en produit de sous-groupes indécomposables ; posons $G_i = \pi^{-1}(H_i)$, de sorte que $G = G_1 \cdots G_n$ et $G_i \cap \prod_{j\neq i} G_j = \zeta^\uparrow(G)$ pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$.*

Si A, B sont deux sous-groupes de G tels que $G = A \times B$, il existe une renumérotation des G_i et un entier $m \in \{0,\dots,n\}$ tels que

$$A \,\subset\, G_1 \cdots G_m \qquad \textit{et} \qquad B \,\subset\, G_{m+1} \cdots G_n.$$

Démonstration. Il est évident que $H = \pi(A)\pi(B)$. Par ailleurs, tout élément de $\pi(A)$ commute à tout élément de $\pi(B)$; par suite, tout élément de $\pi(A)\cap\pi(B)$ commute à tout élément de $\pi(A)\pi(B)$. Comme $Z(H) = \{1\}$, il en résulte que H est le produit direct de ses sous-groupes $\pi(A)$ et $\pi(B)$.

La proposition 4 est donc une conséquence immédiate de la proposition 2. □

Proposition 5. *Soient G un groupe algébrique, $H = G/\zeta^\uparrow(G)$ le quotient de G par son hypercentre et $\pi : G \longrightarrow H$ la projection canonique. Soit $H = H_1 \times \cdots \times H_n$ la décomposition canonique de H en produit de sous-groupes algébriques indécomposables ; posons $G_i = \pi^{-1}(H_i)$, de sorte que $G = G_1 \cdots G_n$ et $G_i \cap \prod_{j\neq i} G_j = \zeta^\uparrow(G)$ pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$. Soit Γ un sous-groupe Zariski-dense de G.*

Si A, B sont deux sous-groupes de Γ tels que $\Gamma = A \times B$, il existe une renumérotation des G_i et un entier $m \in \{0,\dots,n\}$ tels que

$$A \,\subset\, G_1 \cdots G_m \qquad \textit{et} \qquad B \,\subset\, G_{m+1} \cdots G_n.$$

En particulier, si de plus H est indécomposable comme groupe algébrique, l'un des facteurs A, B est contenu dans l'hypercentre $\zeta^{\uparrow}(G)$.

Démonstration. Nous avons $\pi(\overline{A}) = \overline{\pi(A)}$, $\pi(\overline{B}) = \overline{\pi(B)}$ et $[\overline{\pi(A)}, \overline{\pi(B)}] = \{1\}$ ([Bore], numéros 1.4 et 2.4). L'argument de la démonstration de la proposition 3 montre que $H = \pi(A) \times \pi(B)$.

La proposition 5 est alors une conséquence immédiate de la proposition 3. □

Exemple. La proposition 5 s'applique à un groupe réductif G tel que $G/Z(G)$ soit simple, donc en particulier au groupe $\mathrm{GL}_n(K)$; c'est alors la proposition 10 de [Mari].

Exemple. Un groupe algébrique connexe indécomposable dont le centre n'est pas réduit à un élément peut contenir un sous-groupe Zariski-dense décomposable. Considérons en effet le groupe $G = \mathrm{SL}_4(\mathbf{C})$. Notons A le noyau de la réduction $\mathrm{SL}_4(\mathbf{Z}) \longrightarrow \mathrm{SL}_4(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$ modulo 3 et B le centre $\{\pm 1\}$ de $\mathrm{SL}_4(\mathbf{Z})$. Alors le produit direct $\Gamma = A \times B$ est un sous-groupe Zariski-dense de G. (Voir néanmoins le numéro 6 sur la c-indécomposabilité.)

Pour appliquer les propositions 3 et 5, il convient de disposer du critère d'indécomposabilité suivant pour les groupes algébriques. Rappelons qu'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est *indécomposable* si $\mathfrak{g} \neq \{0\}$ et si, pour tout isomorphisme de $\mathfrak{g}$ avec un produit d'algèbres de Lie $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$, l'une de $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ est réduite à zéro.

Critère. *Pour qu'un groupe algébrique connexe G soit indécomposable, il suffit que son algèbre de Lie le soit.*

Stratégie. *Soient K un corps algébriquement clos, G un groupe algébrique connexe à centre fini dont l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est indécomposable, Γ un sous-groupe de G et $\Gamma = A \times B$ une décomposition en produit direct.*

Il résulte de ce critère et des propositions qui précèdent que, si Γ est Zariski-dense dans G, l'un des groupes A, B est central d'ordre majoré par l'ordre du centre de G.

Supposons de plus que G est un L-groupe, où L est un sous-corps de K, et que Γ est un sous-groupe du groupe $G(L)$ des points rationnels. Supposons aussi que L est un corps parfait, de sorte que $G(L)$ est Zariski-dense dans G (corollaire 18.3 de [Bore]*). Si Γ est Zariski-dense dans $G(L)$, alors de même l'un des groupes A, B est central d'ordre majoré par l'ordre du centre de $G(L)$.*

Il y a des exemples immédiats d'algèbres de Lie indécomposables : une algèbre de Lie simple, une algèbre de Lie non abélienne de dimension 2, une algèbre de Lie nilpotente à centre de dimension 1. Voici deux autres familles : pour tout entier $n \geq 1$, le produit semi-direct standard $\mathbf{C}^n \rtimes \mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})$ est indécomposable ; une algèbre de Lie isomorphe à une sous-algèbre de Lie parabolique d'une algèbre de Lie complexe simple est indécomposable ; voir les théorèmes 4.2 et 4.7 de [Meng].

Nous verrons au numéro suivant une famille d'exemples d'algèbres de Lie réelles indécomposables permettant d'appliquer aux groupes de Coxeter la stratégie ci-dessus.

Digression. Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de dimension finie (sur un corps arbitraire) s'écrit comme produit direct d'algèbres indécomposables (la vérification par récurrence sur la dimension est de pure routine). De plus, il y a unicité au sens de la proposition suivante, du type

Wedderburn-Remak-Krull-Schmidt-Azumaya. Bien que ce soit un résultat classique, nous n'avons pas su en trouver la formulation qui nous convient.

Proposition 6. *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps* K *et*

$$(*) \qquad \mathfrak{g} \;=\; \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_m \;=\; \mathfrak{b}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{b}_n$$

deux décompositions de $\mathfrak{g}$ *en produits directs d'idéaux indécomposables.*

Alors $m = n$ *et il existe une permutation* σ *de* $\{1, \ldots, m\}$ *telle que* $\mathfrak{a}_j$ *et* $\mathfrak{b}_{\sigma(j)}$ *sont isomorphes pour tout* $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Démonstration. C'est un résultat tout à fait standard qu'il y a unicité de la décomposition de $\mathfrak{g}$ en *sous-*$\mathfrak{g}$*-modules* indécomposables (voir par exemple le "théorème de Krull-Schmidt-Azumaya", no 19.21 dans [Lam], appliqué à l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$).

Pour une application linéaire entre deux idéaux de $\mathfrak{g}$, les conditions d'être un morphisme de $\mathfrak{g}$-module et d'être un morphisme d'algèbres de Lie sont *différentes*. Toutefois, les isomorphismes fournis par *la preuve* du théorème invoqué sont des compositions d'injections et de projections canoniques associées aux décompositions de (*) ; ce sont donc *à la fois* des morphismes de $\mathfrak{g}$-modules et des morphismes d'algèbres de Lie. Par suite, le théorème standard fournit bien des isomorphismes d'algèbres de Lie $\mathfrak{a}_j \longrightarrow \mathfrak{b}_{\sigma(j)}$. □

4. Groupes de Coxeter et groupes d'Artin

Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie et B une forme bilinéaire symétrique sur E. Notons r_B la dimension du noyau

$$\mathrm{Ker}(B) \;=\; \{v \in E \mid B(v,w) = 0 \text{ pour tout } w \in E\}$$

de B ; soit p_B [respectivement q_B] la dimension maximale d'un sous-espace U de E tel que $B(u,u) > 0$ [resp. $B(u,u) < 0$] pour tout $u \in U$, $u \neq 0$. On sait que $p_B + q_B + r_B$ est la dimension de E, désormais notée n_B, et nous appelons *signature* de B le triplet (p_B, q_B, r_B). Considérons le groupe algébrique

$$\mathrm{Of}(B) \;=\; \left\{ g \in \mathrm{GL}(E) \;\middle|\; \begin{array}{c} B(gv,gw) = B(v,w) \text{ pour tout } v,w \in E \text{ et} \\ gv = v \text{ pour tout } v \in \mathrm{Ker}(B) \end{array} \right\},$$

qui est un produit semi-direct de la forme $(\mathbf{R}^{p_B+q_B})^{r_B} \rtimes O(p_B, q_B)$.

Son algèbre de Lie $\mathfrak{of}(B)$ est isomorphe à l'algèbre de Lie des $(n_B \times n_B)$-matrices d'écriture par blocs

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ x & y & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad \begin{pmatrix} {}^t a & {}^t c \\ {}^t b & {}^t d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;=\; 0$$

relativement à la décomposition $n_B = p_B + q_B + r_B$ (les préfixes ^{t} indiquent des transpositions, et I_p la $(p \times p)$-matrice unité).

Lorsque $p_B + q_B \geq 3$, on vérifie que le centre de $\mathrm{Of}(B)$ est le groupe $\pm \mathrm{Id}_E$ d'odre 2, et qu'il coïncide avec son hypercentre.

Proposition 7. *Conservons les notations ci-dessus ; supposons de plus*

$$p_B + q_B \ \geq\ 2 \qquad et \qquad (p_B, q_B, r_B)\ \neq\ (4,0,0),\ (2,2,0),\ (0,4,0).$$

Alors l'algèbre de Lie $\mathfrak{of}(B)$ *est indécomposable.*

Remarques. Si $p_B + q_B \leq 1$, l'algèbre de Lie $\mathfrak{of}(B)$ est abélienne. Par ailleurs, les algèbres de Lie $\mathfrak{so}(4) = \mathfrak{so}(3) \times \mathfrak{so}(3)$ et $\mathfrak{so}(2,2) = \mathfrak{so}(2,1) \times \mathfrak{so}(2,1) \approx \mathfrak{sl}_2(\mathbf{R}) \times \mathfrak{sl}_2(\mathbf{R})$ sont décomposables. Notons que $\mathfrak{so}(3,1) = \mathfrak{so}(1,3) \approx \mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$ est simple (il faut voir ici $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$ comme une algèbre de Lie *réelle*), même si l'algèbre de Lie complexifiée ne l'est pas.

Démonstration. Si $r_B = 0$ et $(p_B, q_B) \ \neq\ (4,0),\ (2,2),\ (0,4)$, l'algèbre de Lie $\mathfrak{of}(B) = \mathfrak{so}(p_B, q_B)$ est ou bien simple (si $p_B + q_B \geq 3$) ou bien de dimension un (si $p_B + q_B = 2$), donc indécomposable dans tous ces cas. Supposons désormais $r_B \geq 1$.

Comme les signatures (q_B, p_B, r_B) et (p_B, q_B, r_B) donnent lieu à des algèbres de Lie isomorphes, nous pouvons aussi supposer $p_B \geq q_B$ sans restreindre la généralité de ce qui suit. Soient $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ deux idéaux de $\mathfrak{of}(B)$ tels que $\mathfrak{of}(B) = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$; il s'agit de montrer que $\mathfrak{a} = 0$ ou $\mathfrak{b} = 0$. Nous séparons la discussion en trois cas.

(i) Cas où $p_B + q_B \geq 3$ *et* $(p_B, q_B) \neq (4,0), (2,2)$. Soit $\mathfrak{s}$ une sous-algèbre de Levi de $\mathfrak{of}(B)$; c'est une algèbre de Lie simple. Sa projection sur $\mathfrak{a}$ est ou bien isomorphe à $\mathfrak{s}$ ou bien nulle, et de même pour sa projection sur $\mathfrak{b}$. Supposons les notations telles que sa projection sur $\mathfrak{b}$ soit nulle, c'est-à-dire telles que l'algèbre de Lie $\mathfrak{b}$ soit résoluble. Une vérification de routine établit que l'algèbre de Lie $\mathfrak{of}(B)$ est parfaite (rappelons qu'une algèbre de Lie est dite *parfaite* si elle coïncide avec son idéal dérivé). L'algèbre de Lie $\mathfrak{b}$ est donc résoluble et parfaite, c'est-à-dire réduite à zéro.

(ii) Cas où $p_B + q_B = 2$. L'algèbre $\mathfrak{of}(B)$, résoluble, correspond aux matrices de la forme $\begin{pmatrix} 0 & c & 0 \\ c & 0 & 0 \\ x & y & 0 \end{pmatrix}$ avec $c \in \mathbf{R}$ et $x, y \in \mathbf{R}^{r_B}$. Son radical nilpotent $\mathfrak{n}$, correspondant aux matrices pour lesquelles $c = 0$, est de codimension 1 ; il se projette donc surjectivement sur au moins l'un des facteurs $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$. Ce facteur étant à la fois nilpotent et parfait (puisque $\mathfrak{n} = [\mathfrak{of}(B), \mathfrak{of}(B)]$), il est réduit à zéro, et $\mathfrak{of}(B)$ est bien indécomposable.

(iii) Cas où $(p_B, q_B) = (4,0)$ *ou* $(p_B, q_B) = (2,2)$. Notons à nouveau $\mathfrak{s}$ une sous-algèbre de Levi de $\mathfrak{of}(B)$; elle possède deux idéaux simples isomorphes $\mathfrak{u}$ et $\mathfrak{v}$ tels que $\mathfrak{s} = \mathfrak{u} \times \mathfrak{v}$. Vu l'argument du cas (i), il suffit de considérer ici le cas où la projection de $\mathfrak{s}$ sur $\mathfrak{a}$ serait isomorphe à $\mathfrak{u}$ et sa projection sur $\mathfrak{b}$ isomorphe à $\mathfrak{v}$; nous allons montrer que ce cas ne se produit pas.

En effet, le facteur $\mathfrak{a}$ possèderait une sous-algèbre simple de dimension trois centralisant le radical résoluble du facteur $\mathfrak{b}$, et de même pour le facteur $\mathfrak{b}$ et sa sous-algèbre simple $\mathfrak{v}$ centralisant le radical résoluble de $\mathfrak{a}$. La représentation naturelle (par restriction de la représentation adjointe) de $\mathfrak{s}$ sur le radical résoluble de $\mathfrak{of}(B)$ contiendrait donc des sous-représentations irréductibles non fidèles. Or ceci est absurde, car les sous-espaces irréductibles de l'action de $\mathfrak{s} = \mathfrak{so}(p_B, q_B)$ sur le radical résoluble $(\mathbf{R}^{p_B+q_B})^{r_B}$ sont tous isomorphes au $\mathfrak{so}(p_B, q_B)$-module fidèle $\mathbf{R}^{p_B+q_B}$. $\square$

Soit (W, S) un système de Coxeter, avec S fini. Notons E l'espace vectoriel $\mathbf{R}^S$ et B la forme de Tits associée à (W, S). Alors W possède une *représentation géométrique* sur E pour laquelle la forme B est invariante. Cette représentation est fidèle, et fournit donc une injection $W \subset \mathrm{Of}(B)$, où $\mathrm{Of}(B)$ est le groupe algébrique introduit plus haut ; de plus W est un sous-groupe discret du groupe des points réels de $\mathrm{Of}(B)$.

Le groupe W est dit *irréductible* si le graphe de Coxeter associé au système (W, S) est connexe. Dans ce cas, la représentation géométrique de W est indécomposable ; de plus, les trois conditions suivantes sont équivalentes : cette représentation est irréductible, elle est absolument irréductible, le noyau de B est réduit à zéro.

Pour tout ceci, voir [BouL], chapitre 5, § 4.

Rappelons quelques propriétés de la signature (p_B, q_B, r_B) de B lorsque W est irréductible ; comme plus haut, $n_B = p_B + q_B + r_B$ désigne la dimension de E, c'est-à-dire le cardinal de S.

- ◦ $p_B = n_B$ si et seulement si W est fini ;
- ◦ $p_B = n_B - 1$ et $r_B = 1$ si et seulement si W est infini et contient un sous-groupe abélien libre d'indice fini (W est alors dit *de type affine*) ;
- ◦ si $q_B = 0$, alors $r_B \leq 1$;
- ◦ si $n_B \leq 4$, alors $p_B \geq n_B - 1$; en particulier, $(p_B, q_B, r_B) \neq (2, 2, 0)$;
- ◦ si $n_B \geq 4$, alors $p_B \geq 3$;

voir [BouL] pour les trois premières propriétés, et [Par1] pour les dernières.

La proposition suivante apparaît dans [Par2].

Propositionn 8. *Soit (W, S) un système de Coxeter, avec S fini.*

(i) Si W est irréductible infini, W est indécomposable.

(ii) Si W est irréductible infini non affine, tout sous-groupe d'indice fini de W est indécomposable.

(iii) Dans tous les cas, W est uniquement directement décomposable.

Démonstration. Notons que l'assertion (i) pour W de type affine est une répétition du corollaire de la proposition 1.

Soit $\mathcal{G}$ le graphe de Coxeter associé à la paire (W, S). Notons $\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_k$ les composantes connexes de ce graphe et $W_1, \ldots, W_k$ les groupes de Coxeter correspondants, qui sont les *composants irréductibles* du groupe W, et dont W est produit direct. Ceux des W_i qui sont infinis ont un centre réduit à un élément ([BouL], chapitre 5, § 4, exercice 3). Si W_i est infini et de plus n'est pas de type affine, alors W_i est Zariski-dense dans un groupe du type $\mathrm{Of}(B_i)$ [BeHa] ; il en résulte en particulier que le centre de tout sous-groupe d'indice fini de W_i est encore réduit à un élément.

Il suffit donc d'appliquer la proposition 5 pour démontrer les assertions (i) et (ii), ainsi que l'assertion (iii) lorsque les W_i sont des groupes de Coxeter à centres triviaux (par exemple sont tous des groupes de Coxeter infinis).

Pour le cas général de l'assertion (iii), nous invoquons la proposition suivante, qui est un cas particulier du "théorème fondamental" du § 47 de [Kuro]. □

Proposition 9. *Considèrons un entier $m \geq 1$, des groupes indécomposables $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$ et le produit direct $\Gamma = \Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_m$; supposons*[5] *que le centre de Γ est fini. Alors Γ est uniquement directement décomposable.*

Soient W un groupe de Coxeter fini irréductible d'un des types A, D, E et Γ le groupe d'Artin correspondant, de quotient W. I. Marin a montré qu'il existe un entier d et une représentation irréductible de Γ dans $\mathrm{GL}_d(\mathbf{C})$ d'image Zariski-dense. La proposition 5 permet donc une autre démonstration du résultat suivant de [Mari].

Proposition 10. *Soit Γ_0 un sous-groupe d'indice fini dans un groupe d'Artin Γ comme ci-dessus. Si Γ_0 est directement décomposable, alors Γ_0 est produit direct de deux facteurs indécomposables exactement, dont l'un est central.*

En utilisant un autre type d'argument, Paris a montré que tout groupe d'Artin irréductible de type sphérique est indécomposable (voir la proposition 4.2 de [Par3]).

Considérons en particulier le cas du groupe d'Artin B_n des tresses à $n \geq 2$ brins. On sait que le centre de B_n est cyclique infini ; plus généralement, tout sous-groupe d'indice fini Γ de B_n possède un centre $Z(\Gamma) = Z(B_n) \cap \Gamma$ qui est d'indice fini dans $Z(B_n) \approx \mathbf{Z}$. Par suite, si un tel groupe Γ n'est pas indécomposable, alors Γ est produit direct d'un groupe indécomposable Γ_1 et de son centre isomorphe à $\mathbf{Z}$; de plus, Γ_1 est isomorphe au quotient de Γ par son centre, et sa classe d'isomorphisme est donc déterminée par celle de Γ. En particulier, Γ est uniquement directement décomposable.

Ceci s'applique au groupe P_n des tresses pures pour tout $n \geq 3$. En effet, nous avons une suite d'extensions scindées

$$(\sharp) \qquad 1 \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow P_n \xrightarrow{\pi_n} P_{n-1} \longrightarrow 1$$

telles que l'image par π_n du centre de P_n coïncide avec le centre de P_{n-1} (le noyau F_{n-1} de π_n est un groupe libre à $n-1$ générateurs). Définissons par récurrence une suite $(Q_n)_{n \geq 2}$ de sous-groupes des P_n en posant $Q_2 = \{1\}$ et $Q_n = \pi_n^{-1}(Q_{n-1})$ pour $n \geq 3$. (Notons que $Q_3 = P_3$ est un groupe non abélien libre à deux générateurs. Notons aussi que, pour $n \geq 3$, Q_n dépend du brin choisi pour définir l'extension $(\sharp)$ ci-dessus, et n'est donc pas uniquement défini comme sous-groupe de P_n.) Il est facile de vérifier que P_n est produit direct de son centre, cyclique infini, et du groupe Q_n, indécomposable.

5. Variation sur la notion d'indécomposabilité

Un groupe Γ est dit *c-décomposable* s'il existe deux sous-groupes normaux infinis Γ_1, Γ_2 de Γ tels que $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ est fini et $\Gamma_1\Gamma_2$ d'indice fini dans Γ. Un groupe qui n'est pas c-décomposable est dit *c-indécomposable.* (Voir [Marg], chap. IX, no 2.2 ; nous écrivons "c-décomposable" où Margulis écrit "décomposable". La lettre "c" est l'initiale de "commensurable".)

[5]Cette hypothèse ne peut en aucun cas être omise, comme le montrent plusieurs des exemples déjà cités (nos (xiv) et (xvii) du chapitre 1). Le point important est que tout sous-groupe du centre de Γ possède une série principale de sous-groupes normaux.

Soient Γ un groupe, Γ_0 un sous-groupe d'indice fini, et F un sous-groupe normal fini de Γ. Il est facile de vérifier que les trois conditions suivantes sont équivalentes : Γ est c-indécomposable, Γ_0 est c-indécomposable, Γ/F est c-indécomposable.

Soient A un ensemble fini non vide. Pour tout $\alpha \in A$, soient k_α un corps local et G_α un k_α-groupe algébrique connexe, presque k_α-simple, et tel que le groupe $G_\alpha(k_\alpha)$ n'est pas compact. Soient G le produit direct $\prod_{\alpha\in A} G_\alpha(k_\alpha)$ et Γ un réseau dans G. Alors Γ est c-indécomposable (comme groupe abstrait) si et seulement si Γ est irréductible (comme réseau dans G) ; voir [Marg], chap. IX, no 2.3.

Remarque. Soit Δ un groupe résiduellement fini qui possède un sous-groupe d'indice fini Γ héréditairement indécomposable, ce qui veut dire que tout sous-groupe d'indice fini de Γ est indécomposable. Alors Δ est c-indécomposable.

En effet, soient Δ_1, Δ_2 deux sous-groupes normaux de Δ tels que $\Delta_1 \cap \Delta_2$ est fini et $\Delta_1\Delta_2$ d'indice fini dans Δ. Il s'agit de montrer que l'un des groupes Δ_1, Δ_2 est fini. Pour $j = 1, 2$, posons $\Gamma'_j = \Delta_j \cap \Gamma$. Vu l'hypothèse de finitude résiduelle, nous pouvons choisir un sous-groupe d'indice fini Γ_j de Γ'_j $(j = 1, 2)$ de telle sorte que que $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \{1\}$. Quitte à remplacer à nouveau Γ_j par un sous-groupe d'indice fini, nous pouvons supposer de plus que $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ est un sous-groupe de Γ. Les hypothèses impliquent alors que l'un des groupes Γ_1, Γ_2 est fini, de sorte que le groupe Δ_j correspondant est aussi fini.

6. Conditions Max et Min

Un groupe satisfait à la *condition Max-n* si toute chaîne ascendante de sous-groupes normaux de Γ est ultimement stationnaire, et à la condition *Min-n* si toute chaîne descendante de sous-groupes normaux est ultimement stationnaire. On définit de même les *conditions Max-fd et Min-fd*, en termes de facteurs directs. Un groupe satisfaisant à l'une de ces quatre conditions est évidemment produit direct d'un nombre fini de groupes indécomposables.

Un groupe satisfaisant[6] aux deux conditions Max-n et Min-n est uniquement directement décomposable : c'est le théorème de Wedderburn-Remak-Krull-Schmidt ; voir par exemple le dernier théorème du § 47 de [Kuro], ou le théorème 6.36 de [Rotm], ou le théorème 4.8 de [Suzu, Chap. 2]. Les exemples de Baumslag cités dans l'introduction montrent qu'un groupe satisfaisant la seule condition Max-n n'est pas nécessairement uniquement directement décomposable, puisqu'un groupe polycyclique satisfait même la condition de chaîne ascendante pour les sous-groupes (non nécessairement normaux).

Notons qu'un groupe de Coxeter infini ne possède jamais la propriété Min-n. Plus généralement, un groupe infini résiduellement fini ne possède pas cette propriété. Or les groupes de Coxeter sont résiduellement finis : c'est en effet un fait général, connu sous le nom de “lemme de Mal'cev”, que tout groupe linéaire de type fini est résiduellement fini ; pour l'esquisse d'un argument valant pour les groupes de Coxeter, voir [BouL], chapitre 5, § 4, exercice 9.

Nous allons montrer qu'un groupe de Coxeter qui n'est pas virtuellement abélien ne possède jamais la propriété Max-n. Il résulte néanmoins de la proposition 8 qu'un groupe de Coxeter possède les propriétés Min-fd et Max-fd.

[6] Autrement dit : un groupe possédant une suite de composition distinguée principale, selon la terminologie de Bourbaki ([BouA], chapitre I, § 4, exercice 17).

Lemme. *(i) Un quotient d'un groupe qui satisfait la condition Max-n la satisfait aussi.*

(ii) Un sous-groupe d'indice fini d'un groupe qui satisfait la condition Max-n la satisfait aussi.

(iii) Un groupe libre non abélien ne satisfait pas la condition Max-n.

Démonstration. L'assertion (i) est banale et l'assertion (ii) est un résultat de [Wil1].

C'est une conséquence immédiate de la définition qu'un groupe Γ satisfait la condition Max-n si et seulement si tout sous-groupe normal de Γ peut être engendré *comme sous-groupe normal* par un ensemble fini. Il résulte de l'existence de groupes à deux générateurs qui ne sont pas de présentation finie [Neum] que le groupe libre de rang deux ne satisfait pas la condition Max-n, et donc de (i) qu'un groupe libre non abélien de rang quelconque ne la satisfait pas non plus. □

Proposition 11. *Un groupe de Coxeter qui n'est pas virtuellement abélien ne satisfait pas la condition Max-n.*

Démonstration. Selon un résultat établi indépendamment dans [Gonc] et [MaVi] un groupe de Coxeter qui n'est pas virtuellement abélien possède un sous-groupe d'indice fini qui se surjecte sur un groupe libre non abélien. La proposition est alors une conséquence immédiate du lemme précédent. □

7. Groupes à quotients majorés

Soit n un entier, $n \geq 2$. Un groupe Γ est dit *à quotients n-majorés*, ou *n-QM*, si tout sous-groupe de type fini $\Delta \neq \{1\}$ de Γ possède un sous-groupe normal propre d'indice au plus n. Un groupe Γ est dit *à quotients majorés* s'il existe un entier $n \geq 2$ pour lequel il est à quotients n-majorés. Nous collectons quelques exemples et propriétés simples relatifs à cette notion.

(i) Un groupe fini est évidemment un groupe à quotients majorés.

Pour un nombre premier p, un groupe qui est résiduellement un p-groupe fini est p-QM. En particulier, les groupes abéliens libres et les groupes non abéliens libres sont 2-QM.

Le groupe $\oplus_{p\in\mathbf{P}}\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, où $\mathbf{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers, n'est pas QM. Plus généralement, un groupe contenant des sous-groupes simples d'ordres arbitrairement grands n'est pas QM.

(ii) Pour la définition de la propriété QM, l'exemple qui suit montre qu'on ne pourrait pas omettre la condition sur Δ d'être de type fini sans changer la notion.

Rappelons d'abord un fait élémentaire : soient p un nombre premier et A un groupe abélien dans lequel tout élément d'une part est divisible par p et d'autre part a un ordre qui est une puissance de p ; alors A est un groupe divisible. En effet, soient $a \in A$ et ℓ un nombre premier distinct de p ; soit n tel que a soit d'ordre p^n, et soient $s, t \in \mathbf{Z}$ tels que $s\ell + tp^n = 1$; si on pose $b = a^s$, alors $b^\ell = a^{s\ell}\left(a^{p^n}\right)^t = a$.

En particulier, le groupe $\Gamma = \mathbf{Z}[1/p]/\mathbf{Z}$ est divisible, et n'a donc aucun sous-groupe propre d'indice fini. Toutefois, un sous-groupe propre de type fini de Γ est un sous-groupe $(p^{-k}\mathbf{Z})/\mathbf{Z}$, qui est cyclique d'ordre p^k, pour un entier $k \geq 1$ convenable. Par suite, Γ est p-QM.

(iii) Il est évident que tout sous-groupe d'un groupe n-QM est aussi n-QM. Une somme restreinte (finie ou infinie) de groupes est n-QM si et seulement si chaque facteur est n-QM.

(iv) Soit Γ un groupe qui s'insère dans une extension

$$\{1\} \longrightarrow \Gamma' \longrightarrow \Gamma \xrightarrow{\pi} \Gamma'' \longrightarrow \{1\}.$$

Si Γ' est n'-QM et si Γ'' est n''-QM, alors Γ est $\max(n', n'')$-QM.

En effet, soit Δ un sous-groupe de type fini de Γ. Si $\Delta \subset \Gamma'$, alors Δ possède un sous-groupe normal propre d'indice fini au plus n'. Sinon, soit Δ_0'' un sous-groupe normal propre d'indice $k \leq n''$ de $\pi(\Delta)$; alors $\pi^{-1}(\Delta_0'')$ est un sous-groupe normal propre d'indice k dans Δ.

En particulier, si un groupe Γ possède un sous-groupe normal d'indice fini qui est à quotients majorés, alors Γ est également à quotients majorés.

(v) Pour les groupes de type fini, aucune des propriétés “QM” et “résiduellement fini” n'implique l'autre, comme le montrent les considérations suivantes.

D'une part, soit S un groupe non abélien et T un groupe infini. Le produit en couronne $\Gamma = S \wr T$ n'est pas résiduellement fini (théorème 3.2 de [Grue]). Si S et T sont deux groupes qui sont de type fini et n-QM pour un entier n, il résulte de (iii) et (iv) que le groupe de type fini Γ est aussi n-QM. [Voir aussi (vi) ci-dessous.]

D'autre part, tout groupe dénombrable résiduellement fini se plonge dans un groupe de type fini et résiduellement fini [Wil2]. Il résulte donc de (i) et (iii) qu'il existe des groupes de type fini résiduellement finis qui ne sont pas QM.

(vi) Rappelons un exemple de groupe résoluble de type fini dû à P. Hall [HalP].

Soient R est un anneau commutatif avec unité, dont nous notons R^* le groupe des unités, et R_0 un sous-groupe additif de R. Posons

$$G(R) = \begin{pmatrix} 1 & R & R \\ 0 & R^* & R \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad Z(R_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & R_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le groupe $G(R)$ est résoluble de classe 3, son centre s'identifie à $Z(R)$, et $Z(R_0)$ est un sous-groupe central de $G(R)$.

Soit p un nombre premier ; le groupe multiplicatif $p^{\mathbf{Z}}$ est un sous-groupe d'indice deux dans le groupe des unités de $\mathbf{Z}[1/p]$. Le groupe

$$G_+(\mathbf{Z}[1/p]) = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{Z}[1/p] & \mathbf{Z}[1/p] \\ 0 & p^{\mathbf{Z}} & \mathbf{Z}[1/p] \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

qui est d'indice deux dans $G(\mathbf{Z}[1/p])$, est engendré par les trois matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notons $\tilde{\alpha}$ l'automorphisme extérieur de $G_+(\mathbf{Z}[1/p])$ obtenu en conjugant les matrices par la matrice diagonale de coefficients diagonaux $p, 1, 1$. On vérifie que $\tilde{\alpha}(Z(\mathbf{Z})) = Z(p\mathbf{Z})$ est d'indice p dans $Z(\mathbf{Z})$.

L'exemple de Hall est le quotient H de $G_+(\mathbf{Z}[1/p])$ par $Z(\mathbf{Z})$. L'automorphisme $\tilde{\alpha}$ de $G_+(\mathbf{Z}[1/p])$ induit un endomorphisme α de H qui est surjectif de noyau $Z(p^{-1}\mathbf{Z})/Z(\mathbf{Z})$, c'est-à-dire de noyau cyclique d'ordre p. En particulier, le groupe H est de type fini, résoluble (c'est même une extension centrale d'un groupe métabélien) et non Hopfien. Nous avons une suite exacte courte

$$\{1\} \longrightarrow \mathbf{Z}[1/p]/\mathbf{Z} \longrightarrow H \longrightarrow G_+(\mathbf{Z}[1/p])/Z(\mathbf{Z}[1/p]) \longrightarrow \{1\}$$

dont le noyau est le groupe p-QM de l'exemple (ii). Son quotient, isomorphe à $\mathbf{Z} \ltimes (\mathbf{Z}[1/p])^2$, est un groupe linéaire de type fini, et c'est donc aussi un groupe QM (argument direct, ou proposition 12 ci-dessous). Il résulte de (iv) que le groupe de type fini non Hopfien H est un groupe QM.

(vii) Notre intérêt pour la propriété QM vient du fait que les groupes linéaires de type fini l'ont.

Proposition 12. *Soit Γ un groupe de type fini qui est linéaire, c'est-à-dire qui est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_d(K)$ pour un entier d et un corps K convenables. Alors il existe un nombre premier p tel que Γ possède un sous-groupe d'indice fini qui est résiduellement un p-groupe fini.*

En particulier, Γ est un groupe à quotients majorés.

Démonstration. Soit A le sous-anneau de K engendré par les coefficients matriciels des éléments d'un système fini de générateurs de Γ ; c'est un anneau commutatif intègre de type fini. Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de A ; le quotient $A/\mathfrak{m}$ est un corps fini (voir par exemple [BoAC], chapitre 5, § 3, no 4, corollaire 1 du théorème 3) dont nous notons p la caractéristique. Pour tout entier $k \geq 0$, notons N_k le noyau de l'application naturelle $\mathrm{GL}_d(A) \longrightarrow \mathrm{GL}_d(A/\mathfrak{m}^k)$.

L'intersection des idéaux $\mathfrak{m}^k$ est réduite à zéro (résultat de Krull, voir par exemple [BoAC], chap. 3, § 3, no 2), et donc l'intersection des sous-groupes N_k est réduite à un élément. Par ailleurs, le quotient N_k/N_{k+1} est fini pour tout $k \geq 0$, et c'est un p-groupe abélien élémentaire pour tout $k \geq 1$. Il en résulte que N_1 est résiduellement un p-groupe fini qui est d'indice fini dans $\mathrm{GL}_d(A)$, et par conséquent que $\Gamma \cap N_1$ est de même résiduellement un p-groupe fini qui est d'indice fini dans Γ.

La seconde assertion du lemme résulte alors des points (i) et (iv) ci-dessus. $\square$

8. Majorations de nombres de facteurs directs

L'objet de ce numéro est d'apporter dans certains cas une précision quantitative aux propriétés Min-fd et Max-fd définies au numéro 6.

Soit Γ un groupe. Pour un entier $n \geq 1$, notons $K_n(\Gamma)$ l'intersection de tous les sous-groupes normaux de Γ d'indices au plus n et $k_n(\Gamma)$ l'indice de $K_n(\Gamma)$ dans Γ.

(i) Pour un produit direct, nous avons $K_n(\prod_{j=1}^m \Gamma_j) = \prod_{j=1}^m K_n(\Gamma_j)$ et $k_n(\prod_{j=1}^m \Gamma_j) = \prod_{j=1}^m k_n(\Gamma_j)$. Par exemple : $k_n(\mathbf{Z}^m) = n^m$ pour tout $m \geq 1$.

Si Γ est simple infini, alors $k_n(\Gamma) = 1$ pour tout $n \geq 1$.

(ii) Soit $\pi : \Gamma \longrightarrow \Delta$ un epimorphisme. Alors $K_n(\Gamma) \subset \pi^{-1}(K_n(\Delta))$ et $k_n(\Gamma) \geq k_n(\Delta)$. En particulier $k_n(\Gamma) \leq k_n(F_g)$ pour un groupe Γ à g générateurs.

Pour une majoration grossière de $k_n(F_g)$, notons que $\log_n(k_n(F_g)) \leq s_n^{\lhd}(F_g)$, et rappelons que les résultats du chapitre 2 de [LuSe] fournissent une majoration du nombre $s_n^{\lhd}(F_g)$ des sous-groupes normaux d'indices au plus n dans F_g.

(iii) Soit $\Gamma = \Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_m$; supposons que Γ possède un système de g générateurs. Notons m_0 le nombre des indices $j \in \{1, \ldots, m\}$ tels que $k_n(\Gamma_j) \geq 2$. Il résulte immédiatement des points (i) et (ii) ci-dessus que $m_0 \leq \log_2(k_n(F_g))$.

Théorème 13. *Soit Γ un groupe qui possède un système de g générateurs et qui est un produit $\Gamma = \Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_m$, de groupes non réduits à $\{1\}$. S'il existe un entier $n \geq 2$ tel que Γ est n-QM, alors $m \leq \log_2(k_n(F_g))$.*

En particulier, si Γ est un groupe linéaire de type fini, Γ peut toujours s'écrire comme produit direct d'un nombre fini de groupes indécomposables et il existe une borne sur le nombre de facteurs des décompositions de Γ en produits directs.

Démonstration. Si le groupe de type fini Γ est n-QM, chaque facteur Γ_j l'est ausssi, et la première assertion de la proposition résulte du point (iii) ci-dessus. La seconde assertion résulte alors de la proposition 12. □

Remarque. Etant donné deux entiers $d, g \geq 1$ et un anneau de type fini K, il résulte des preuves ci-dessus qu'il existe une constante $M = M(d, g, K)$ telle que tout sous-groupe $\Gamma \subset \mathrm{GL}_d(K)$ à au plus g générateurs possède une décomposition $\Gamma = \Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_m$ en produits de groupes indécomposables, avec $m \leq M$.

Voici pour terminer une conséquence de la proposition 2 et du théorème 13.

Proposition 14. *Soit Γ un groupe linéaire de type fini dont le centre est réduit à un élément. Alors Γ est uniquement directement décomposable.*

Nous remercions Yves Benoist pour une indication précieuse ainsi que Martin Bridson, Ken Brown, Luis Paris, Alain Valette et Thierry Vust pour plusieurs observations concernant notre texte.

Bibliographie

Bagh. G.H. Bagherzadeh, *Commutativity in one-relator groups*, J. London Math. Soc. **13** (1976), 459–471.

BaSh. U. Bader et Y. Shalom, *Factor and normal subgroup theorems for lattices in products of groups* (à paraître).

Baum. G. Baumslag, *Direct decompositions of finitely generated torsion-free nilpotent groups*, Math. Z. **145** (1975), 1–10.

BeHa. Y. Benoist et P. de la Harpe, *Adhérence de Zariski des groupes de Coxeter*, Compositio Math. **140** (2004), 1357–1366.

Bier. R. Bieri, *Homological dimension of discrete groups*, Queen Mary College Mathematics Notes, 1976.

BoAC. N. Bourbaki, *Algèbre commutative, chapitres 1 à 4*, Masson, 1985.

Bore. A. Borel, *Linear algebraic groups, Second enlarged Edition*, Springer, 1991.

BouA. N. Bourbaki, *Algèbre, chapitres 1 à 3*, Diffusion C.C.L.S., 1970.

BouA'. N. Bourbaki, *Algèbre, chapitres 4 à 7*, Masson, 1981.

BoAC. N. Bourbaki, *Algèbre commutative, chapitres 5 et 6*, Hermann, 1966.

BouL. N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie, chapitres 4, 5 et 6*, Hermann, 1968.

BrHa. M.R. Bridson et A. Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, Springer, 1999.

CaFP. J.W. Cannon, W.J. Floyd, and W.R. Parry, *Introductory notes on Richard Thompson's groups*, l'Enseignement math. **42** (1996), 215–256.

Eber. P.B. Eberlein, *Geometry of nonpositively curved manifolds*, The University of Chicago Press, 1996.

ErPa. P. Erdös et P. Pálfy, *On the orders of directly indecomposable groups*, Discrete Math. (Paul Erdös memorial collection) **200** (1999), 165–179.

Fuch. L. Fuchs, *Infinite abelian groups, Vol. I & II*, Academic Press, 1970 & 1973.

GeGl. T. Gelander et Y. Glasner, *Infinite primitive groups*, arXiv:math. GR/0503001 (2005).

Gonc. C. Gonciulea, *Non virtually abelian Coxeter groups virtually surject onto* $\mathbf{Z} \star \mathbf{Z}$, preprint, Ohio State University, 1998.

Grig. R. Grigorchuk, *Burnside's problem on periodic groups*, Functional Anal. Appl. **14** (1980), 41–43.

Grue. L. Gruenberg, *Residual properties of infinite soluble groups*, Proc. London Math. Soc. **7** (1957), 29–62.

HalP. P. Hall, *The Frattini subgroups of finitely generated groups*, Proc. London Math. Soc. **11** (1961), 327–352 [= Collected Works, 581–608].

Harp. P. de la Harpe, *Topics in geometric group theory*, The University of Chicago Press, 2000.

Hi86. R. Hirshon, *Finitely generated groups L with $L \approx L \times M$, $M \neq 1$, M finitely presented*, J. of Algebra **99** (1986), 232–238.

Hi90. R. Hirshon, *On uniqueness of direct decompositions of groups into directly indecomposable factors*, J. Pure Appl. Algebra **63** (1990), 155–160.

Kapl. I. Kaplansky, *Infinite abelian groups*, Univ. of Michigan Press, 1954.

Kuro. A.G. Kurosh, *The theory of groups (Volumes I & II)*, Chelsea, 1956.

Lam. T.Y. Lam, *A first course in noncommutative rings*, Springer, 1991.

LuSe. A. Lubotzky et D. Segal, *Subgroup growth*, Birkhäuser, 2003.

MaKS. W. Magnus, A. Karras et D. Solitar, *Combinatorial group theory*, Interscience, 1966.

Marg. G.A. Margulis, *Discrete subgroups of semisimple Lie groups*, Springer, 1991.

Mari. I. Marin, *Sur les représentations de Krammer génériques*, arXiv:math.RT/0504143 v2 (13 Apr. 2005).

MaVi. G.A. Margulis et E.B. Vinberg, *Some linear groups virtually having a free quotient*, J. Lie Theory **10** (2000), 171–180.

Meie. D. Meier, *Non-Hopfian groups*, J. London Math. Soc. (2) **26** (1982), 265–270.

Meng. D.J. Meng, *Some results on complete Lie algebras*, Comm. in Algebra **22(13)** (1994), 5457–5507.

Neum. B.H. Neumann, *Some remarks on infinite groups*, J. London Math. Soc. **12** (1937), 120–127.

Par1. L. Paris, *Signatures des graphes de Coxeter*, Thèse, Université de Genève (1989).

Par2. L. Paris, *Irreducible Coxeter groups* (Prépublication).

Par3. L. Paris, *Artin groups of spherical type up to isomorphism*, J. of Algebra **281** (2004), 666–678.

Rotm. J.J. Rotman, *An introduction to the theory of groups, Fourth Edition*, Springer, 1995.

SaSS. M. du Sautoy, D. Segal, and A. Shalev, *New horizons in pro-p-groups*, Birkhäuser, 2000.

Schr. V. Schroeder, *A splitting theorem for spaces of nonpositive curvature*, Inventiones Math. **79** (1985), 323–327.

ScWa. P. Scott et T. Wall, *Topological methods in group theory*, in "Homological group theory, Durham 1977", C.T.C. Wall Editor, Cambridge Univ. Press (1979), 137–203.

Serr. J-P. Serre, *Cohomologie des groupes discrets*, in "Prospects in mathematics", Annals of Math. Studies **70**, Princeton Univ. Press (1971), 77–169.

Stal. J. Stallings, *A topological proof of Grushko's theorem on free products*, Math. Z. **90** (1965), 1–8.

Suzu. M. Suzuki, *Group theory I*, Springer, 1982.

Ty74. J.M. Tyrer Jones, *Direct products and the Hopf property (Collection of articles dedicated to the memory of Hanna Neumann, VI)*, J. Austral. Math. Soc. **17** (1974), 174–196.

Ty80. J.M. Tyrer Jones, *On isomorphisms of direct powers, in "Word problems, II (Conf. on Decision Problems in Algebra, Oxford, 1976)"* (1980), North-Holland, 215–245.

Wil1. J.S. Wilson, *Some properties of groups inherited by normal subgroups of finite index*, Math. Z. **114** (1970), 19–21.

Wil2. J.S. Wilson, *Embedding theorems for residually finite groups*, Math. Z. **174** (1980), 149–157.

Zimm. R. Zimmer, *Ergodic theory and semisimple groups*, Birkhäuser, 1984.

Yves de Cornulier, IGAT, EPFL, CH-1015 Lausanne. Mel : decornul@clipper.ens.fr

Pierre de la Harpe, Section de Mathématiques, Université de Genève, C.P. 64, CH-1211 Genève 4. Mel : Pierre.delaHarpe@math.unige.ch