

UNIVERSITÉ D'AIX-MARSEILLE

**THÉORIE DE L'HOMOTOPIE DES
 ∞ -CATÉGORIES STRICTES**

Mémoire présenté par

Dimitri Ara

en vue d'obtenir

l'habilitation à diriger des recherches
(spécialité : mathématiques)

le 30 mars 2023 devant le jury composé de :

Denis-Charles Cisinski	Universität Regensburg
André Joyal	Université du Québec à Montréal
Yves Lafont	Université d'Aix-Marseille
Georges Maltsiniotis	Université Paris Cité
Ieke Moerdijk	Universiteit Utrecht
Carlos Simpson	Université Côte d'Azur
Christine Vespa	Université d'Aix-Marseille

après avis des rapporteurs :

Michael Batanin	Akademie věd České republiky
André Joyal	Université du Québec à Montréal
Carlos Simpson	Université Côte d'Azur

Dimitri Ara

**THÉORIE DE L'HOMOTOPIE
DES ∞ -CATÉGORIES STRICTES**

Dimitri Ara

Université d'Aix Marseille, CNRS, I2M, Marseille, France.

E-mail : `dimitri.ara@univ-amu.fr`

Url : `http://www.i2m.univ-amu.fr/perso/dimitri.ara/`

À celle qui m'a fait toucher l'infini ❤️

THÉORIE DE L'HOMOTOPIE DES ∞ -CATÉGORIES STRICTES

Dimitri Ara

Résumé. — Ce mémoire est une synthèse d'une série de travaux, pour la plupart réalisés en collaboration avec Georges Maltsiniotis, sur une généralisation ∞ -catégorique de la théorie de l'homotopie des petites catégories, telle que développée par Quillen, Thomason et Grothendieck.

Plus précisément, nous développons une théorie de l'homotopie des ∞ -catégories strictes vues à travers leur type d'homotopie classifiant. Pour définir ce type d'homotopie, on a besoin de réaliser, par exemple simplicialement, une ∞ -catégorie stricte. Nous démontrons que les différentes réalisations usuelles sont équivalentes. On en déduit une notion d'équivalence de Thomason pour les ∞ -catégories strictes.

Dans le but de généraliser les célèbres théorèmes A et B de Quillen, nous développons une théorie des tranches ∞ -catégoriques. Nous définissons ces tranches par adjonction à partir d'une construction joint pour les ∞ -catégories strictes que nous introduisons. Nous étudions les functorialités de cette construction et proposons de très générales conjectures de functorialité en termes de ∞ -foncteurs dit de Gray.

Nous démontrons l'analogie ∞ -catégorique du théorème A de Quillen, à savoir qu'un ∞ -foncteur qui est localement une équivalence de Thomason est une équivalence de Thomason. Nous étendons ce théorème A au cas des triangles commutant uniquement à une transformation lax près. La preuve de ce résultat est basée sur une théorie des ∞ -catégories comma que nous développons.

Nous démontrons un théorème B ∞ -catégorique, affirmant que, sous des hypothèses adéquates, les ∞ -catégories comma que nous avons définies sont des produits fibrés homotopiques. En particulier, sous ces hypothèses, les tranches sont des fibres homotopiques. Nous donnons quelques applications de ce résultat, notamment au calcul de modèles ∞ -catégoriques pour les espaces de lacets et les espaces d'Eilenberg-Mac Lane.

Nous associons à tout complexe simplicial une ∞ -catégorie stricte de nature géométrique dont nous conjecturons qu'elle modélise son type d'homotopie. Nous prouvons cette conjecture lorsque le complexe simplicial est subdivisé. En particulier, on obtient un modèle ∞ -catégorique pour les CW-complexes réguliers.

Enfin, nous discutons l'existence d'une structure de catégorie de modèles « à la Thomason » sur la catégorie des ∞ -catégories strictes munie des équivalences de Thomason. Nous réduisons cette question à une conjecture sur le comportement homotopique de certaines sommes amalgamées. Nous démontrons cette conjecture en dimension 2, obtenant ainsi une structure de catégorie de modèles pour les 2-catégories.

REMERCIEMENTS

Ces remerciements me ressembleront, ils seront peu bavards :

Je suis honoré que Denis-Charles Cisinski, André Joyal, Yves Lafont, Georges Maltsiniotis, Ieke Moerdijk, Carlos Simpson et Christine Vespa aient accepté de faire partie de mon jury et je les remercie vivement pour cela.

Je remercie chaleureusement Michael Batanin, André Joyal et Carlos Simpson d'avoir accepté la tâche intimidante de rapporter ce mémoire, bavard lui.

Les mathématiques présentées dans ce texte sont issues d'une longue collaboration avec Georges Maltsiniotis. C'est l'occasion de lui dire la chance que j'ai de l'avoir pour maître, pour collaborateur et pour ami. L'amour lui a ravi de peu la dédicace de ce mémoire.

Enfin, je remercie toutes et tous les collègues qui rendent le quotidien au laboratoire un plaisir, que ce soit au fond d'un canapé, un café à la main, ou autour d'un tableau. Qu'on me pardonne de n'avoir osé dresser une liste !

TABLE DES MATIÈRES

0. Introduction	1
0.1. Théorie de l'homotopie de <i>Cat</i>	1
0.2. Théorie de l'homotopie de <i>2-Cat</i>	3
0.3. Théorie de l'homotopie de ∞ - <i>Cat</i>	5
0.4. Perspectives.....	15
0.5. Organisation du mémoire.....	17
1. Théorie de l'homotopie des petites catégories	21
1.1. Les petites catégories comme modèle des types d'homotopie.....	21
1.2. Les théorèmes A et B de Quillen.....	23
1.3. La structure de catégorie de modèles de Thomason.....	26
2. Le langage des ∞-catégories strictes	29
2.1. La catégorie des ∞ -catégories strictes.....	29
2.2. Théorie de Steiner.....	34
2.3. La catégorie Θ de Joyal.....	40
3. Constructions ∞-catégoriques	43
3.1. Produit de Gray.....	43
3.2. Transformations.....	47
3.3. Joint.....	51
3.4. Tranches.....	57
3.5. Fonctorialités des tranches et ∞ -catégories de Gray.....	61
3.6. Construction comma.....	64
4. Nerfs ∞-catégoriques	69
4.1. Nerf de Street.....	69
4.2. Nerf cellulaire.....	72
4.3. Nerf multisimplicial.....	73
4.4. Généralités sur les comparaisons de nerfs.....	74
4.5. Comparaison des nerfs n -catégoriques.....	77

5. Équivalences de Thomason	81
5.1. Définition et premières propriétés.....	81
5.2. Transformations oplax et homotopies simpliciales.....	83
5.3. Rétractes par transformation.....	86
5.4. Les ∞ -catégories comme modèle des types d'homotopie.....	89
6. Théorème A de Quillen	93
6.1. Le théorème A pour les triangles commutatifs.....	93
6.2. Localisateurs fondamentaux ∞ -catégoriques.....	97
6.3. Le théorème A pour les 2-triangles.....	99
7. Théorème B de Quillen	103
7.1. Le théorème B.....	103
7.2. Quelques applications.....	109
8. Types d'homotopie ∞-catégoriques	113
8.1. L'oriental associé à un complexe simplicial.....	113
8.2. Objets initiaux et finaux.....	116
8.3. Le type d'homotopie de l'oriental associé à un ensemble ordonné.....	121
9. Vers une structure de catégorie de modèles à la Thomason	123
9.1. Théorème de Thomason abstrait.....	123
9.2. Vers un théorème de Thomason pour les n -catégories.....	125
9.3. La structure à la Thomason sur 2-Cat	127
9.4. Structures à la Thomason sur 2-Cat et 2-localisateurs fondamentaux.....	131
A. Autres travaux	137
A.1. Un modèle pour les (∞, n) -catégories : les n -quasi-catégories.....	137
A.2. Autour des ∞ -opérides.....	144
A.3. Le point de vue <i>folk</i> sur les ∞ -catégories.....	144
Travaux présentés	147
Autres travaux	149
Références	151

CHAPITRE 0

INTRODUCTION

Le but de ce mémoire est de présenter mes travaux de recherche sur la théorie de l'homotopie des ∞ -catégories strictes, pour la plupart en collaboration avec Georges Maltsiniotis. Cette théorie est une généralisation de la théorie de l'homotopie des petites catégories, telle que développée par Quillen, Thomason et Grothendieck, dont nous allons maintenant rappeler quelques éléments.

0.1. Théorie de l'homotopie de Cat

La théorie de l'homotopie de Cat , la catégorie des petites catégories, naît avec l'introduction par Grothendieck du foncteur nerf $N : Cat \rightarrow \widehat{\Delta}$ qui associe à toute petite catégorie C un ensemble simplicial NC , et donc un type d'homotopie. Les foncteurs entre petites catégories qui induisent des équivalences de types d'homotopie sont appelés des *équivalences de Thomason*. Autrement dit, un foncteur $u : A \rightarrow B$ est une équivalence de Thomason si Nu est une équivalence d'homotopie faible simpliciale. La théorie de l'homotopie de Cat est l'étude de Cat muni de la classe des équivalences de Thomason.

Lorsqu'on étudie cette théorie de l'homotopie de Cat , on étudie les catégories à travers leur type d'homotopie. Mieux, un théorème de Quillen, rédigé dans la thèse d'Illusie [50], affirme que le foncteur nerf $N : Cat \rightarrow \widehat{\Delta}$ induit une équivalence de catégories $\overline{N} : Ho(Cat) \rightarrow Ho(\widehat{\Delta})$, où $Ho(Cat)$ désigne la localisée de Cat par les équivalences de Thomason et $Ho(\widehat{\Delta})$ la catégorie homotopique usuelle des ensembles simpliciaux, c'est-à-dire la localisée par la classe des équivalences d'homotopie faibles. Ainsi, la théorie de l'homotopie de Cat est une étude de la théorie usuelle des types d'homotopie mais sous un angle radicalement différent.

Une des premières applications spectaculaires de la théorie de l'homotopie de Cat est la définition et les premiers résultats de Quillen [65] sur les groupes de K-théorie algébrique supérieure, disons d'un anneau commutatif R . En effet, Quillen définit ces

groupes comme les groupes d'homotopie du type d'homotopie d'une certaine petite catégorie associée à R (ou plutôt à la catégorie des modules projectifs de type fini sur R).

Afin d'étudier ces groupes, Quillen introduit ses célèbres théorèmes A et B. Il est *a priori* difficile de montrer qu'un foncteur est une équivalence de Thomason. Une condition suffisante évidente est que le foncteur admette un inverse à transformations naturelles (pas nécessairement inversibles) près. En particulier, une petite catégorie admettant un objet initial ou final a le type d'homotopie du point, c'est-à-dire est faiblement contractile. Cette condition suffisante est extrêmement restrictive. Le théorème A de Quillen donne une autre condition suffisante, plus souple. Essentiellement, ce théorème affirme qu'un foncteur qui est localement une équivalence de Thomason est une équivalence de Thomason. Cette notion de localité doit se comprendre au sens des tranches catégoriques : si $u : A \rightarrow B$ est un foncteur et b est un objet de B , la tranche A/b est la catégorie dont les objets sont les couples $(a, f : ua \rightarrow b)$, où a est un objet de A et f une flèche de B ; le théorème A affirme que si $u : A \rightarrow B$ est un foncteur tel que, pour tout objet b de B , le foncteur induit $A/b \rightarrow B/b$ est une équivalence de Thomason, alors u est une équivalence de Thomason. Quant au théorème B, il affirme que, sous certaines hypothèses, la fibre homotopique d'un foncteur $u : A \rightarrow B$ en un objet b de B est la tranche A/b . Quillen déduit de ce résultat une suite exacte longue pour ses groupes de K-théorie algébrique.

Cette étude de la théorie de l'homotopie de Cat est poursuivie par Thomason, également motivé par la K-théorie algébrique. Thomason montre en particulier que la théorie de l'homotopie de Cat est quillenisable [75], au sens où il existe une structure de catégorie de modèles de Quillen sur Cat dont les équivalences faibles sont les équivalences de Thomason. (C'est en référence à cette structure que nous nommons « équivalences de Thomason » les foncteurs dont le nerf est une équivalence d'homotopie faible.) Les cofibrations et fibrations de cette structure ne sont pas canoniques et sont peu maniables, de sorte que l'intérêt de cette structure réside plus dans son existence, qui permet de se placer dans le cadre de Quillen, que dans sa description explicite. En particulier, le résultat d'Illusie-Quillen affirmant l'équivalence entre les catégories $\text{Ho}(Cat)$ et $\text{Ho}(\widehat{\Delta})$ se renforce en une équivalence de Quillen entre Cat muni de la structure de Thomason et $\widehat{\Delta}$ muni de celle de Kan-Quillen.

La troisième contribution majeure à la théorie de l'homotopie de Cat est due à Grothendieck. Son point de vue est radicalement différent. Celui-ci propose dans *Pursuing Stacks* [43] de fonder la théorie de l'homotopie des espaces sur Cat muni des équivalences de Thomason. Il observe en particulier que grâce au foncteur « catégorie des éléments » on peut envoyer n'importe quelle catégorie de préfaisceaux vers Cat , et donc vers les types d'homotopie. Il fonde sa théorie des « catégories test », c'est-à-dire, en première approximation, des petites catégories A telles que les préfaisceaux sur A modélisent canoniquement les types d'homotopie, sur cette observation. Par ailleurs,

dans son étude, Grothendieck remplace la classe des équivalences de Thomason par ce qu'il appelle un *localisateur fondamental*, c'est-à-dire une classe de foncteurs vérifiant certains axiomes, l'axiome le plus notable étant l'analogue du théorème A de Quillen. Grothendieck conjecture que la classe des équivalences de Thomason forme le plus petit localisateur fondamental. Ce résultat a été démontré par Cisinski [25]. On obtient donc une caractérisation purement catégorique de la notion d'équivalence de Thomason.

On renvoie au premier chapitre du présent mémoire pour une présentation plus détaillée de la théorie de l'homotopie de Cat .

0.2. Théorie de l'homotopie de 2-Cat

On notera 2-Cat la catégorie des petites *2-catégories strictes*, c'est-à-dire des catégories enrichies dans Cat . Ainsi, dans une 2-catégorie stricte C , on dispose d'un ensemble d'objets $\text{Ob}(C)$ et, pour chaque couple x, y d'objets, d'une catégorie $\underline{\text{Hom}}_C(x, y)$ des morphismes de x vers y . On appelle les objets de $\underline{\text{Hom}}_C(x, y)$ des *1-cellules* et ses flèches des *2-cellules*. Une 2-cellule α se représente par un diagramme

$$x \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \alpha \Downarrow \\ \xrightarrow{g} \end{array} y .$$

Les 1-cellules se composent comme dans une catégorie ordinaire et on peut composer les 2-cellules de deux manières : verticalement

$$x \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \alpha \Downarrow \\ \xrightarrow{g} \\ \beta \Downarrow \\ \xrightarrow{h} \end{array} y \mapsto x \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \beta \alpha \\ \xrightarrow{h} \end{array} y ,$$

et horizontalement

$$x \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \alpha \Downarrow \\ \xrightarrow{g} \end{array} y \begin{array}{c} \xrightarrow{h} \\ \beta \Downarrow \\ \xrightarrow{i} \end{array} z \mapsto x \begin{array}{c} \xrightarrow{hf} \\ \Downarrow \beta * \alpha \\ \xrightarrow{ig} \end{array} z .$$

On dispose également d'identités pour les objets et les 1-cellules. Les axiomes des 2-catégories assurent que pour une certaine classe de diagrammes simples, il existe une unique manière de composer tous les morphismes, par exemple pour

$$x \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \alpha \Downarrow \\ \xrightarrow{g} \\ \beta \Downarrow \\ \xrightarrow{h} \end{array} y \begin{array}{c} \xrightarrow{i} \\ j \Downarrow \gamma \\ \xrightarrow{k} \\ \delta \Downarrow \\ \xrightarrow{l} \\ \varepsilon \Downarrow \end{array} z \xrightarrow{m} t .$$

Un des exemples importants de 2-catégorie est celui de Cat , qu'on peut voir comme une 2-catégorie dont les objets sont les petites catégories, les 1-cellules les foncteurs et les 2-cellules les transformations naturelles. Les exemples qui nous intéresseront par la suite sont plutôt de nature combinatoire et peuvent souvent se dessiner. Voici un tel exemple de 2-catégories :

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & 3 \\ \downarrow & \searrow & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & 2 \end{array} = \begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & 3 \\ \downarrow & \swarrow & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & 2 \end{array} .$$

La théorie de l'homotopie de Cat a été en grande partie généralisée à $2-Cat$. Tout d'abord, afin de définir l'analogue 2-catégorique des équivalences de Thomason, on a besoin d'un foncteur nerf pour les 2-catégories strictes. Il existe deux foncteurs nerf naturels : le nerf « géométrique » $N : 2-Cat \rightarrow \widehat{\Delta}$ (qu'on appelle parfois nerf de Duskin [34] bien qu'il ait été introduit par Street [72]) et le nerf bisimplicial $N_{\Delta^2} : 2-Cat \rightarrow \widehat{\Delta \times \Delta}$. Si C est une 2-catégorie, les p -simplexes $(NC)_p$ du nerf géométrique de C sont les 2-foncteurs oplax normalisés (c'est-à-dire ne respectant les compositions qu'à des 2-cellules orientées près mais respectant strictement les identités) de $\Delta_p = \{0 \leq \dots \leq p\}$ vers C . En particulier, si C est une 1-catégorie, vue comme une 2-catégorie discrète, on retrouve le nerf usuel. Par ailleurs, les (p, q) -simplexes du nerf bisimplicial de C sont les q -simplexes du nerf usuel de la catégorie

$$\coprod_{c_0, \dots, c_p} \underline{\text{Hom}}_C(c_{p-1}, c_p) \times \dots \times \underline{\text{Hom}}_C(c_0, c_1) .$$

En composant le nerf bisimplicial par le foncteur diagonal $\delta^* : \widehat{\Delta \times \Delta} \rightarrow \widehat{\Delta}$, on obtient un foncteur $\delta^* N_{\Delta^2} : 2-Cat \rightarrow \widehat{\Delta}$. Ballejos et Cegarra ont montré que les foncteurs

$$N, \delta^* N_{\Delta^2} : 2-Cat \rightarrow \widehat{\Delta}$$

sont homotopiquement équivalents [14]. En particulier, si u est un 2-foncteur, morphisme de 2-catégories, le morphisme simplicial Nu est une équivalence d'homotopie faible si et seulement si il en est de même de $\delta^* N_{\Delta^2} u$. Il est ainsi naturel d'appeler *équivalence de Thomason* un 2-foncteur qui a cette propriété. La théorie de l'homotopie de $2-Cat$ est l'étude de $2-Cat$ muni de la classe des équivalences de Thomason.

Cegarra et ses coauteurs ont généralisé la plupart des résultats de la théorie de l'homotopie de Cat à celle de $2-Cat$. Ils ont notamment étendu les théorèmes A et B de Quillen à ce cadre [14, 17]. Notons que pour énoncer ces résultats, on a besoin de définir les tranches de 2-catégories au-dessus ou au-dessous d'un objet. Del Hoyo a généralisé le théorème A 2-catégorique aux 2-foncteurs *lax* [49] et Chiche aux triangles de 2-foncteurs lax commutant à une transformation près [22].

Chiche a par ailleurs établi l'analogue du théorème d'Illusie-Quillen pour $2-Cat$ [23], à savoir que le nerf géométrique $N : 2-Cat \rightarrow \widehat{\Delta}$ induit une équivalence de catégories

entre les catégories homotopiques $\overline{N} : \text{Ho}(2\text{-Cat}) \rightarrow \text{Ho}(\widehat{\Delta})$. Il a généralisé la notion de localisateur fondamental de Cat en une notion de *localisateur fondamental de 2-Cat* et il a produit une bijection croissante entre les localisateurs fondamentaux de Cat et ceux de 2-Cat . Une conséquence de ce résultat est le fait que la classe des équivalences de Thomason 2-catégoriques est le plus petit localisateur fondamental de 2-Cat . En particulier, les équivalences de Thomason 2-catégoriques peuvent se définir de manière purement interne à 2-Cat .

L'analogie de la structure de catégorie de modèles de Thomason sur Cat a été défini pour 2-Cat . Le résultat a été annoncé dans [77] mais la preuve contient deux trous sérieux. Ceux-ci sont comblés dans un des mes articles en collaboration avec Maltsiniotis [T3]. Un des deux trous a également été corrigé par un argument différent dans un corrigendum [78] à [77]. En combinant ce résultat avec la généralisation par Chiche du théorème d'Illusie-Quillen, on obtient que 2-Cat muni de la structure « à la Thomason » est équivalente au sens de Quillen à la structure de Kan-Quillen sur $\widehat{\Delta}$.

De plus, dans [T1], j'étends la structure de catégorie de modèle à la Thomason sur 2-Cat à tout localisateur fondamental de 2-Cat au sens de Chiche (vérifiant une hypothèse ensembliste anodine dite d'*accessibilité*). On obtient ainsi sur 2-Cat des structures de catégories de modèles modélisant toutes les localisations de Bousfield combinatoires de la théorie de l'homotopie des espaces.

Enfin, Cegarra et ses coauteurs ont généralisé une partie de leurs résultats au cadre plus général des bicatégories, c'est-à-dire des 2-catégoriques dans lesquelles les axiomes ne sont vérifiés qu'à des 2-cellules inversibles près, 2-cellules satisfaisant des conditions de cohérence. En particulier, ils ont obtenu un théorème A et un théorème B [15, 20], et une comparaison de divers foncteurs nerf pour les bicatégories [16], et même les tricatégories [18], analogue tridimensionnel des bicatégories.

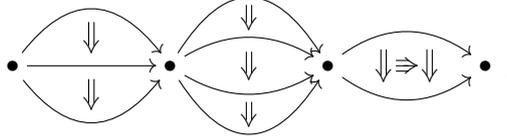
0.3. Théorie de l'homotopie de ∞ -Cat

Le sujet de ce mémoire est la généralisation en dimension supérieure de la théorie de l'homotopie de Cat et 2-Cat , c'est-à-dire la généralisation à $\infty\text{-Cat}$, la catégorie des petites ∞ -catégoriques strictes.

∞ -catégoriques strictes

Une ∞ -catégorie stricte est la donnée d'objets (aussi appelés 0-cellules), de 1-cellules entre les objets, de 2-cellules entre les 1-cellules et, plus généralement, pour $i \geq 0$, de $(i + 1)$ -cellules entre les i -cellules, ainsi que d'opérations sur ces cellules vérifiant certains axiomes simples. On a vu que, dans une 2-catégorie, il y a deux manières de composer les 2-cellules. En général, dans une ∞ -catégorie, il y a i manières de composer des i -cellules, qui correspondent aux recollements de deux boules de dimension i le long d'une boule de dimension j , avec $0 \leq j < i$. On dispose également d'identités.

Comme dans le cas 2-catégorique, les axiomes affirment que pour une certaine classe de diagrammes simples formés de cellules, par exemple de forme



il existe un unique composé maximal. On parle de ∞ -catégorie *stricte* par opposition à *faible* car les axiomes sont exprimés sous la forme d'égalités, et non pas d'existence de cellules supérieures de cohérence.

La théorie de l'homotopie de ∞ -*Cat* est l'étude de ∞ -*Cat* muni d'une notion d'équivalence de Thomason qu'il va nous falloir définir. Mais avant de définir cette notion, nous allons tenter de répondre à la question « pourquoi les ∞ -catégories strictes ? ». Cette question se scinde en deux questions. Tout d'abord, pourquoi généraliser en dimension supérieure la théorie de l'homotopie de *Cat*, alors qu'en vertu du théorème d'Illusie-Quillen, les petites catégories (ou 1-catégories) suffisent à modéliser tous les types d'homotopie ? Certes, les 1-catégories modélisent bien les types d'homotopie mais ceci de manière souvent peu naturelle et sans signification géométrique. Idéalement, on voudrait modéliser un espace de dimension n par une n -catégorie (∞ -catégorie dont les cellules sont triviales au-dessus de la dimension n) qui aurait la « forme » de l'espace. Ainsi, passer des 1-catégories aux ∞ -catégories permet plus de flexibilité, puisqu'on a plus de choix pour un modèle d'un espace, et plus de géométrie. Ensuite, pourquoi des ∞ -catégories *strictes* ? En théorie de l'homotopie abstraite, on s'intéresse plutôt aux ∞ -catégories *faibles*. En effet, les structures algébriques supérieures s'organisent en ∞ -catégories faibles, et non pas strictes. Néanmoins, lorsqu'on s'intéresse uniquement aux types d'homotopie, les ∞ -catégories strictes suffisent (mais pas les ∞ -groupoïdes stricts !). Si on veut réconcilier le point de vue strict avec le point de vue faible, il faut penser à la ∞ -catégorie stricte C comme à une présentation du ∞ -groupoïde faible (c'est-à-dire de la ∞ -catégorie faible dans laquelle toute cellule est inversible) obtenue à partir de C en inversant formellement toutes les cellules en un sens faible.

Dans la suite de cette introduction, toutes les ∞ -catégories et tous les ∞ -foncteurs, c'est-à-dire les morphismes de ∞ -catégories, seront supposés stricts. On se permettra donc d'omettre cet adjectif.

Comparaisons des nerfs et équivalences de Thomason

Revenons à la définition des équivalences de Thomason ∞ -catégoriques. Pour les définir, nous avons *a priori* besoin d'un foncteur nerf de source ∞ -*Cat*. Or, il existe plusieurs tels foncteurs. Tout d'abord, le nerf $N : \infty$ -*Cat* $\rightarrow \widehat{\Delta}$ introduit par Street [72] qui prolonge le nerf usuel $N : \text{Cat} \rightarrow \widehat{\Delta}$. Si C est une ∞ -catégorie, un n -simplexe

de NC est un diagramme en forme de n -simplexe dans C (formellement, il s'agit d'un ∞ -foncteur du n -ième oriental de Street \mathcal{O}_n vers C). Par exemple, un 2-simplexe de NC est un triangle

$$\begin{array}{ccc} & & c_2 \\ & \nearrow^{c_{02}} & \uparrow^{c_{12}} \\ c_0 & \xrightarrow[c_{01}]{c_{012}} & c_1 \end{array},$$

où c_0, c_1, c_2 sont des objets de C , c_{01}, c_{12}, c_{02} des 1-cellules de C et $c_{012} : c_{02} \Rightarrow c_{12}c_{01}$ une 2-cellule de C . On dispose également du nerf cellulaire $N_\Theta : \infty\text{-Cat} \rightarrow \widehat{\Theta}$, à valeurs dans les préfaisceaux sur la catégorie Θ de Joyal [51], introduit par Batanin et Street [7] et étudié notamment par Berger [8]. Si C est une ∞ -catégorie, les « cellules » de $N_\Theta C$ sont des diagrammes dans C de certaines formes, correspondant aux objets de Θ , comme par exemple

$$\begin{array}{ccccc} & f & & & \\ & \curvearrowright & & & \\ & \downarrow \alpha & & & \\ c & \xrightarrow{g} & d & \xrightarrow{i} & e \\ & \downarrow \beta & & & \\ & \curvearrowleft & & & \\ & h & & & \end{array}$$

Enfin, si on se restreint à la sous-catégorie pleine $n\text{-Cat}$ des n -catégories, on a le nerf multi-simplicial $N_{\Delta^n} : n\text{-Cat} \rightarrow \widehat{\Delta^n}$, à valeurs dans les ensembles n -simpliciaux. Par exemple, lorsque C est une 2-catégorie, les (p, q) -simplexes de $N_{\Delta^2} C$ sont les diagrammes

$$\overbrace{\left. \begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} f_{1,0} & & \\ \downarrow \alpha_{1,1} & & \\ f_{1,1} & \searrow & \\ \vdots & & \\ f_{1,q-1} & \searrow & \\ \downarrow \alpha_{1,q} & & \\ f_{1,q} & & \end{array} & \cdots & \begin{array}{ccc} f_{p,0} & & \\ \downarrow \alpha_{p,1} & & \\ f_{p,1} & \searrow & \\ \vdots & & \\ f_{p,q-1} & \searrow & \\ \downarrow \alpha_{p,q} & & \\ f_{p,q} & & \end{array} \end{array} \right\} q}$$

dans C . Dans [T8], nous montrons avec Maltsiniotis que ces trois foncteurs nerf sont homotopiquement équivalents en un sens adéquat. Précisons cet énoncé. Si A est une petite catégorie, on dispose d'un foncteur $k_A : \widehat{A} \rightarrow \mathcal{H}ot$, de la catégorie des préfaisceaux sur A vers la catégorie homotopique des espaces $\mathcal{H}ot = \mathbf{Ho}(\widehat{\Delta})$, associant à un préfaisceau le type d'homotopie du nerf de sa catégorie des éléments. Nous montrons que les foncteurs

$$k_{\Delta} N, k_{\Theta} N_{\Theta} : \infty\text{-Cat} \rightarrow \mathcal{H}ot,$$

ainsi que les foncteurs

$$k_{\Delta} N_{\iota}, k_{\Theta} N_{\Theta \iota}, k_{\Delta^n} N_{\Delta^n} : n\text{-Cat} \rightarrow \mathcal{H}ot,$$

où on a noté $\iota : n\text{-Cat} \hookrightarrow \infty\text{-Cat}$ l'inclusion canonique, sont isomorphes. En particulier, on peut définir une équivalence de Thomason ∞ -catégorique comme un ∞ -foncteur qui est envoyé sur un isomorphisme de $\mathcal{H}ot$ par, ou bien le nerf de Street, ou bien le nerf cellulaire, ou bien, dans le cas d'un n -foncteur, le nerf multi-simplicial.

L'intérêt de cette comparaison des nerfs est d'une part de s'assurer de la canonicité des équivalences de Thomason, mais surtout de pouvoir utiliser suivant les circonstances les spécificités de chacun des foncteurs nerf. Par exemple, le fait que la catégorie Θ de Joyal soit stable par toutes les dualités de $\infty\text{-Cat}$ implique facilement que la classe des équivalences de Thomason définies par le nerf cellulaire est également stable par ces dualités. De même, certaines propriétés des équivalences de Thomason se démontrent en utilisant le nerf de Street ou le nerf multi-simplicial.

Maintenant que nous disposons d'équivalences de Thomason pour $\infty\text{-Cat}$, nous pouvons poser la question de la généralisation du théorème d'Illusie-Quillen. Cette généralisation a été établie par mon étudiant Andrea Gagna [39, 38]. Celui-ci a démontré que le nerf de Street $N : \infty\text{-Cat} \rightarrow \widehat{\Delta}$ induit une équivalence de catégories $\overline{N} : \mathbf{Ho}(\infty\text{-Cat}) \rightarrow \mathbf{Ho}(\widehat{\Delta})$, où $\mathbf{Ho}(\infty\text{-Cat})$ désigne la localisation de $\infty\text{-Cat}$ par les équivalences de Thomason. La preuve est basée sur un résultat que nous avons démontré avec Maltsiniotis [T4] sous le nom de condition (e) et sur lequel nous reviendrons dans cette introduction. Gagna donne également une seconde preuve de ce résultat.

Ainsi, la théorie de l'homotopie de $\infty\text{-Cat}$, c'est-à-dire l'étude de $\infty\text{-Cat}$ muni des équivalences de Thomason, est bien une théorie des types d'homotopie d'espaces.

Produit de Gray et transformations

L'outil le plus élémentaire pour étudier les équivalences de Thomason dans Cat est la notion de transformation naturelle, qui joue le rôle d'homotopie. Par exemple, si $\alpha : u \Rightarrow v$ est une transformation naturelle entre deux foncteurs u et v , alors u et v ont même image dans la catégorie homotopique $\mathbf{Ho}(Cat)$ et, en particulier, u est une équivalence de Thomason si et seulement si il en est de même de v . Notons qu'une transformation naturelle entre foncteurs de A vers B peut s'exprimer comme un foncteur $D_1 \times A \rightarrow B$, où D_1 est la catégorie correspondant à l'ensemble ordonné $\{0 < 1\}$.

Si A et B sont maintenant des ∞ -catégories, la notion de transformation qu'on obtient en considérant les ∞ -foncteurs $D_1 \times A \rightarrow B$ est celle de *transformation stricte*. Celles-ci se comportent également comme des homotopies mais sont beaucoup trop restrictives. Il n'existe essentiellement aucune telle transformation dans la nature. Pour obtenir une notion d'homotopie plus utile, il faut remplacer le produit cartésien par le produit de Gray.

Le produit de Gray est une des opérations fondamentales de la théorie des ∞ -catégories. Si A et B sont deux ∞ -catégories, leur *produit de Gray* $A \otimes B$ est une version du produit cartésien dans laquelle tous les carrés de naturalité sont remplacés

par des carrés commutant à une cellule supérieure orientée près. En particulier, on a

$$D_1 \otimes D_1 = \begin{array}{ccc} (0, 0) & \longrightarrow & (0, 1) \\ \downarrow & \Downarrow & \downarrow \\ (1, 0) & \longrightarrow & (1, 1) \end{array} .$$

Le produit de Gray a été originellement défini dans le cas 2-catégorique par Gray [41]. Il a ensuite été étendu aux ∞ -catégories par Al-Agl et Steiner [1], et étudié systématiquement par Crans [31]. Nous avons également contribué à son étude avec Maltiniotis dans [T7, Appendices A et B].

Définissons une *transformation oplax* entre ∞ -foncteurs de A vers B comme un ∞ -foncteur $D_1 \otimes A \rightarrow B$. Dans [T6, Appendice A], nous montrons comment associer à une transformation oplax $\alpha : u \Rightarrow v$ une homotopie simpliciale entre les nerfs de Street Nu et Nv . Les transformations oplax se comportent donc bien comme des homotopies pour la théorie de l'homotopie de ∞ -Cat. On obtient la notion de transformation *lax* en remplaçant $D_1 \otimes A$ par $A \otimes D_1$. Cette notion est différente mais les transformations lax se comportent également comme des homotopies.

Ainsi, pour montrer qu'un ∞ -foncteur u est une équivalence de Thomason, il suffit de produire un inverse de u à transformations oplax ou lax près. Ceci nous conduit à introduire une notion de *rétracte par transformation oplax ou lax*, qui sera un de nos outils importants pour montrer qu'un ∞ -foncteur est une équivalence de Thomason. En particulier, pour montrer qu'une ∞ -catégorie C est faiblement contractile, on pourra produire une transformation oplax ou lax entre le ∞ -foncteur identité $1_C : C \rightarrow C$ et un ∞ -foncteur constant $c : C \rightarrow C$, pour c un objet de C . On utilise par exemple cette technique pour montrer que les orientaux \mathcal{O}_n sont faiblement contractiles, résultat d'utilisation constante dans la théorie et qui joue un rôle important dès la comparaison des nerfs.

Le produit de Gray permet également de définir des transformations supérieures. Ainsi, en notant

$$D_2 = 0 \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Downarrow \\ \curvearrowleft \end{array} 1 ,$$

on obtient une notion de *2-transformation oplax* entre transformations oplax entre ∞ -foncteurs de A vers B en considérant les ∞ -foncteurs $D_2 \otimes A \rightarrow B$. Plus généralement, en remplaçant D_2 par le n -disque D_n , on obtient la notion de *n -transformation oplax*.

Notre principal outil pour comprendre le produit de Gray et en particulier pour produire des transformations oplax ou lax est la théorie des complexes dirigés augmentés de Steiner [70] qui joue un rôle majeur dans tous nos travaux sur la théorie de l'homotopie de ∞ -Cat. En effet, les résultats dans *Cat* et *2-Cat* mentionnés précédemment sont démontrés en utilisant des formules explicites et semblent impossibles à généraliser à la dimension infinie sans un changement de paradigme. La théorie de

Steiner permet de manipuler certaines ∞ -catégories, que nous appelons ∞ -catégories de Steiner fortes, comme des complexes de chaînes augmentés, munis d'une information supplémentaire d'orientation. Cette classe des ∞ -catégories de Steiner fortes contient de nombreuses ∞ -catégories intéressantes, comme les orientaux de Street, les disques D_n et plus généralement les objets de Θ , et est stable par produit de Gray. De plus, elle forme une sous-catégorie dense de $\infty\text{-Cat}$. Ainsi, certaines constructions peuvent s'effectuer ou certains résultats se prouver d'abord pour ces ∞ -catégories de Steiner fortes, *via* les complexes dirigés augmentés, et ensuite s'étendre par densité aux ∞ -catégories quelconques.

Dans [T7, Appendice B], nous montrons comment construire des transformations oplax à partir d'homotopies de chaînes de complexes dirigés augmentés. Ainsi, par exemple, pour montrer que les orientaux sont faiblement contractiles, on se ramène à montrer que le complexe des chaînes normalisées du n -simplexe est contractile en un sens dirigé.

Tranches et joint

Les transformations naturelles, c'est-à-dire les homotopies, sont un outil très limité pour étudier les équivalences de Thomason dans Cat . Un outil beaucoup plus puissant est le théorème A de Quillen. Afin d'énoncer son analogue ∞ -catégorique, on a besoin de définir des tranches pour les ∞ -catégories, au-dessus ou au-dessous d'un objet. Par ailleurs, en essayant de démontrer le théorème A ∞ -catégorique, on se rend compte qu'il est utile de disposer de tranches plus générales, au-dessus ou au-dessous d'un diagramme (et notamment d'un diagramme indexé par un oriental).

Avec Maltsiniotis, nous avons développé une théorie systématique des tranches ∞ -catégoriques [T7]. Les fondements de cette théorie sont inspirés par le cas des tranches dans le contexte des quasi-catégories étudié par Joyal [52]. Joyal définit les tranches comme les adjoints à droite d'un foncteur induit par une opération joint sur les ensembles simpliciaux, analogue simplicial du joint topologique.

Dans [T7], nous introduisons le *joint* $A \star B$ de deux ∞ -catégories. Intuitivement, cette ∞ -catégorie est obtenue à partir de $A \amalg B$ en ajoutant pour chaque i -cellule a de A et chaque j -cellule b de B , une $(i+1+j)$ -cellule $a \star b$ qui « relie » a et b . Ainsi, lorsque A est la ∞ -catégorie ponctuelle

$$D_0 = \{0\},$$

le joint $D_0 \star B$ est une sorte de cône sur B . Par exemple, en notant

$$D_1 = 0 \longrightarrow 1 \quad \text{et} \quad D_2 = 0 \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Downarrow \\ \curvearrowleft \end{array} 1,$$

on a

$$D_0 \star D_0 = \bullet \longrightarrow \bullet = D_1 \quad , \quad D_0 \star D_1 = \bullet \begin{array}{c} \nearrow \bullet \\ \searrow \bullet \\ \downarrow \bullet \end{array} ,$$

$$D_0 \star D_2 = \bullet \begin{array}{c} \nearrow \bullet \\ \searrow \bullet \\ \downarrow \bullet \end{array} \begin{array}{c} \nearrow \bullet \\ \searrow \bullet \\ \downarrow \bullet \end{array} .$$

En itérant cette construction à partir de D_0 , on obtient les orientaux de Street. Par exemple, l'oriental de dimension 3 s'obtient comme

$$D_0 \star D_0 \star D_0 \star D_0 = \begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\ \downarrow & \searrow & \downarrow \\ \bullet & & \bullet \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\ \downarrow & \searrow & \downarrow \\ \bullet & & \bullet \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \end{array} .$$

Nous montrons que le joint définit une structure de catégorie monoïdale (non symétrique) sur $\infty\text{-Cat}$, d'unité la ∞ -catégorie vide \emptyset . Si A est une ∞ -catégorie, on dispose d'un foncteur

$$\begin{aligned} \infty\text{-Cat} &\rightarrow A \backslash \infty\text{-Cat} \\ B &\mapsto (A \star B, \iota_1 : A \rightarrow A \star B) , \end{aligned}$$

où $\iota_1 : A \rightarrow A \star B$ désigne le morphisme $A \simeq A \star \emptyset \xrightarrow{A \star \emptyset_B} A \star B$, avec \emptyset_B l'unique ∞ -foncteur de \emptyset vers B . Nous montrons que ce foncteur admet un adjoint à droite et nous définissons la *tranche* $u \backslash C$ de C au-dessous de $u : A \rightarrow C$ comme étant l'image de (C, u) par cet adjoint. On a donc une adjonction

$$\begin{array}{ccc} \infty\text{-Cat} \rightarrow A \backslash \infty\text{-Cat} & \dashv & A \backslash \infty\text{-Cat} \rightarrow \infty\text{-Cat} \\ B \mapsto (A \star B, \iota_1) & & (C, A \xrightarrow{u} C) \mapsto u \backslash C . \end{array}$$

Ainsi, si C est une ∞ -catégorie, $u : A \rightarrow C$ un ∞ -foncteur et B une ∞ -catégorie, on a une bijection naturelle

$$\text{Hom}_{A \backslash \infty\text{-cat}}((A \star B, \iota_1), (C, u)) \simeq \text{Hom}_{\infty\text{-Cat}}(B, u \backslash C) .$$

Lorsque $A = D_0$, la donnée d'un ∞ -foncteur $D_0 \rightarrow C$ correspond à celle d'un objet c de C et on obtient une définition de la tranche $c \backslash C$. On décrit explicitement cette ∞ -catégorie. En particulier, lorsque C est une 1-catégorie ou une 2-catégorie, on retrouve les définitions usuelles.

On définit de manière analogue les tranches au-dessus, même si des subtilités liées aux dualités de $\infty\text{-Cat}$ viennent rendre la situation plus compliquée qu'à première vue.

Motivés par la démonstration du théorème A ∞ -catégorique, nous étudions les fonctorialités de ces tranches. Nous dégageons de très générales conjectures de fonctorialité par rapport aux i -transformations oplax ou lax. Ces conjectures s'expriment dans le langage des ∞ -catégories de Gray, c'est-à-dire des catégories enrichies dans ∞ -Cat muni du produit de Gray. Nous prouvons des cas particuliers de ces conjectures en basse dimension. Ces résultats de fonctorialité seront suffisants pour démontrer le théorème A.

La construction du joint, des tranches, ainsi que nos résultats de fonctorialités, s'appuient de manière essentielle sur la théorie des complexes dirigés augmentés de Steiner.

Théorèmes A

Dans [T5] et [T6], nous démontrons avec Maltsiniotis, par deux preuves différentes, le théorème A ∞ -catégorique : si $u : A \rightarrow B$ est un ∞ -foncteur au-dessus d'une ∞ -catégorie C tel que, pour tout objet c de C , le ∞ -foncteur induit $c \setminus u : c \setminus A \rightarrow c \setminus B$ est une équivalence de Thomason, alors u est une équivalence de Thomason.

Les deux démonstrations commencent de la même manière, suivant la preuve originelle de Quillen [65]. On se ramène ainsi à montrer que si $c : \mathcal{O}_m \rightarrow C$ est un ∞ -foncteur, alors le morphisme simplicial $c \setminus NC \rightarrow c_0 \setminus NC$, où c_0 désigne le 0-simplexe $D_0 \xrightarrow{0} \mathcal{O}_m \xrightarrow{c} C$, est une équivalence d'homotopie faible. (Les tranches apparaissant ici sont les classiques tranches simpliciales.)

C'est à partir de ce point que les deux preuves divergent. Dans [T5], nous montrons que ce morphisme est la rétraction d'un rétracte par déformation simpliciale et produisons explicitement une section et une homotopie simpliciale. Notons que si cette preuve, un peu *ad hoc*, court-circuite en partie notre travail sur les tranches ∞ -catégoriques, elle utilise tout de même certains de nos résultats originaux de [T7], ainsi que la théorie des complexes dirigés augmentés de Steiner.

Dans [T6], nous identifions le morphisme $c \setminus NC \rightarrow c_0 \setminus NC$ au nerf de Street d'un ∞ -foncteur $c \setminus C \rightarrow c_0 \setminus C$. Remarquons que la tranche $c_0 \setminus C$ est une tranche au-dessous d'un objet, du type de celle qui apparaît dans l'énoncé du théorème A, mais que la tranche $c \setminus C$ est par contre une tranche au-dessous d'un oriental et nécessite donc la pleine puissance de notre théorie des tranches. Pour conclure, nous devons montrer que $c \setminus C \rightarrow c_0 \setminus C$ est une équivalence de Thomason. Or, nous avons montré que le ∞ -foncteur $0 : D_0 \rightarrow \mathcal{O}_m$ est un rétracte par transformation lax et, grâce à nos résultats de fonctorialité des tranches, on en déduit que le foncteur $c \setminus C \rightarrow c_0 \setminus C$ est la rétraction d'un rétracte par transformation oplax, et donc une équivalence de Thomason.

Grâce à la comparaison des nerfs qui nous a permis d'obtenir la stabilité des équivalences de Thomason par dualité, nous déduisons des variantes de ce théorème A pour d'autres types de tranches et en particulier pour les tranches au-dessus.

En filigrane dans [T6] et de manière explicite dans ce mémoire, nous introduisons une notion de *localisateur fondamental* de ∞ -Cat, généralisation de la notion de Grothendieck dans Cat. Un localisateur fondamental \mathcal{W} de ∞ -Cat est une classe de ∞ -foncteurs vérifiant trois axiomes : un axiome de saturation classique ; pour toute ∞ -catégorie C , le ∞ -foncteur canonique $D_1 \otimes C \rightarrow C$ est dans \mathcal{W} (ce qui a par exemple pour conséquence qu'un rétracte par transformation oplax est dans \mathcal{W}) ; \mathcal{W} vérifie le théorème A. Ainsi, on a montré que les équivalences de Thomason forment un localisateur fondamental de ∞ -Cat. Nous conjecturons qu'elles forment le plus petit localisateur fondamental de ∞ -Cat.

Toujours dans [T6], nous montrons que tout localisateur fondamental \mathcal{W} de ∞ -Cat vérifie un théorème A pour les 2-triangles, c'est-à-dire les triangles commutant à une transformation oplax près. Cela signifie que ce théorème A pour les 2-triangles peut se déduire formellement du théorème A pour les triangles commutatifs, ainsi que de quelques propriétés simples.

Pour démontrer cela, nous introduisons un nouvel outil : les ∞ -catégories comma. Ces ∞ -catégories comma généralisent les catégories comma usuelles ou les 2-catégories comma introduites par Gray [41]. On utilise ces ∞ -catégories comma comme un substitut à l'intégration de Grothendieck qui joue un rôle fondamental dans la preuve en dimension 2 du théorème pour les 2-triangles par Chiche [22]. On étudie les functorialités supérieures de cette construction comma. Un des points clés de notre démonstration du théorème A pour les 2-triangles est l'application de ces functorialités à la transformation oplax rendant la tranche $c \setminus C$, pour C une ∞ -catégorie et c un objet quelconque de C , faiblement contractile.

Théorème B

Le second des deux théorèmes importants que Quillen prouve dans [65] sur les équivalences de Thomason est le théorème B, qui affirme que sous certaines hypothèses les tranches calculent les fibres homotopiques. Dans [T2], nous démontrons l'analogie ∞ -catégorique de ce théorème. La preuve s'appuie sur notre théorie des ∞ -catégories comma et notamment sur nos résultats de functorialité. D'ailleurs, nous démontrons une forme plus générale du théorème B qui dans le cas 1-catégorique est due à Barwick et Kan [3], et qui donne une condition suffisante pour que la construction comma fournisse un produit fibré homotopique.

Nous présentons plusieurs applications de ce théorème B. Tout d'abord, nous obtenons une nouvelle démonstration du théorème A, mais uniquement dans le cas non relatif, c'est-à-dire d'un foncteur et pas d'un triangle commutatif. Ensuite, nous donnons une description ∞ -catégorique, sous certaines hypothèses, du type d'homotopie de l'espace des lacets d'une ∞ -catégorie. Plus précisément, nous énonçons une condition suffisante pour que, pour C une ∞ -catégorie et c_0 un objet de C , la ∞ -catégorie $\underline{\text{Hom}}_C(c_0, c_0)$ ait le type d'homotopie de l'espace des lacets de C en c_0 . Nous en déduisons un modèle ∞ -catégorique des espaces d'Eilenberg-Mac Lane. En combinant ce

théorème et le théorème A, nous obtenons que la n -catégorie $B^n\mathbb{N}$ engendrée par un objet et une n -cellule a le type d'homotopie de l'espace d'Eilenberg-Mac Lane $K(\mathbb{Z}, n)$. Enfin, nous montrons que l'espace des lacets d'un ∞ -groupoïde strict, c'est-à-dire une ∞ -catégorie stricte dont toutes les cellules sont strictement inversibles, est un produit d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane (en convenant qu'un type d'homotopie discret est un $K(E, 0)$, pour E un ensemble), ce qui est une restriction très forte sur leur type d'homotopie.

Type d'homotopie d'un complexe simplicial

Nous avons mentionné qu'une de nos motivations pour étudier cette théorie de l'homotopie de ∞ -Cat est d'obtenir des modèles catégoriques d'espaces plus géométriques que ceux qu'on a dans Cat . Le but de [T4] est d'établir des résultats dans ce sens.

Nous associons à tout complexe simplicial K , une ∞ -catégorie \mathcal{O}_K dont les générateurs de dimension i correspondent aux i -simplexes de K . Lorsque K est le n -simplexe standard, on retrouve l'oriental \mathcal{O}_n . Nous conjecturons que l'oriental généralisé \mathcal{O}_K a le type d'homotopie de K . Cette conjecture donnerait donc un modèle géométrique de tout complexe simplicial.

Dans [T4], nous prouvons avec Maltiniotis cette conjecture dans le cas d'un complexe simplicial provenant d'un ensemble ordonné ou, en termes géométriques, dans le cas d'un complexe simplicial qui est la subdivision d'un autre complexe simplicial. Autrement dit, si K est un complexe simplicial, alors la ∞ -catégorie $\mathcal{O}_{\text{Sd}K}$, où $\text{Sd}K$ désigne la subdivision barycentrique de K , a le type d'homotopie de K . On en déduit que si X est un CW-complexe régulier, alors, en notant F_X l'ensemble ordonné par inclusion de ses cellules fermées, la ∞ -catégorie \mathcal{O}_{F_X} a le type d'homotopie de X .

La démonstration de ce théorème est une belle application de nos résultats. Elle repose sur la comparaison des nerfs ainsi que sur le théorème A. Elle nécessite par ailleurs une étude des objets initiaux et finaux en un sens lax dans une ∞ -catégorie. En particulier, le fait que les orientaux admettent à la fois des objets initiaux et finaux en un sens adéquat joue un rôle important dans la preuve.

Vers une structure à la Thomason

Dans [T3], nous étudions avec Maltiniotis la question de l'existence d'une structure de catégorie de modèles « à la Thomason » sur n -Cat, pour $1 \leq n \leq \infty$. Notre approche est axiomatique. Inspirés par la reformulation de Cisinski [26, section 5.2] de la preuve originelle de Thomason [75], nous dégageons une liste de conditions sur un objet cosimplicial $\Delta \rightarrow n$ -Cat pour qu'il induise une structure de catégorie de modèles « à la Thomason » sur n -Cat, les cas nous intéressant étant celui des orientaux $\mathcal{O} : \Delta \rightarrow \infty$ -Cat pour $n = \infty$, et celui des troncations en dimension n des orientaux si n est fini.

Dans ces cas, toutes les conditions se vérifient sans difficulté sauf deux d'entre elles : les conditions (d) et (e). La condition (e) résulte de nos travaux sur les orientaux associés à des complexes simpliciaux et a été établie dans [T4] (qui est postérieur à [T3]). La condition (d) n'est à ce jour pas démontrée. Elle affirme que, pour certaines inclusions d'ensembles ordonnés $E' \hookrightarrow E$, le ∞ -foncteur associé $\mathcal{O}_{E'} \rightarrow \mathcal{O}_E$ est une équivalence de Thomason et le reste après tout cochangement de base.

Dans le cas $n = 1$, cette condition est facile à vérifier et on retrouve donc le théorème de Thomason usuel. Dans le cas $n = 2$, nous la démontrons au prix de pages de calculs fastidieux. C'est de cette manière qu'on obtient la structure de catégorie de modèles à la Thomason sur 2-Cat qu'on a mentionnée dans la partie 2-catégorique de cette introduction.

Le cas $n > 2$ reste ouvert.

0.4. Perspectives

Ce mémoire est un état des lieux sur une théorie en plein développement. Voici quelques exemples de phénomènes à mieux comprendre, de conjectures à trancher et d'outils à façonner :

- (a) Nous définissons dans ce mémoire une notion de localisateur fondamental de $\infty\text{-Cat}$, notion qui apparaît de manière implicite dans [T6]. Ces localisateurs fondamentaux restent à explorer. En particulier, on s'attend à pouvoir développer la théorie de l'homotopie de $\infty\text{-Cat}$ en remplaçant les équivalences de Thomason par un localisateur fondamental quelconque. Essentiellement, cela signifie pouvoir développer cette théorie avec pour seuls outils les transformations oplax et le théorème A. On s'attend également à ce que tout localisateur fondamental jouisse de certaines des propriétés de la classe des équivalences de Thomason, comme par exemple la stabilité par toutes les dualités de $\infty\text{-Cat}$. Enfin, nous conjecturons que les localisateurs fondamentaux de $\infty\text{-Cat}$ sont en bijection croissante avec ceux de Cat , ce qui entraînerait que la classe des équivalences de Thomason fournit le plus petit localisateur fondamental de $\infty\text{-Cat}$, analogue de la conjecture de Grothendieck et théorème de Cisinski [25] dans Cat et du théorème de Chiche [23] dans 2-Cat .
- (b) Un des outils importants pour l'étude des localisateurs fondamentaux de Cat est la théorie de l'intégration de Grothendieck qui associe à tout foncteur $F : I \rightarrow \text{Cat}$ une catégorie $\int F$ au-dessus de I . C'est par exemple avec cet outil qu'on montre que les localisateurs fondamentaux de Cat sont stables par passage à la catégorie opposée. La construction de Grothendieck 2-catégorique joue également un rôle central dans les développements de Chiche [21] sur la théorie de l'homotopie de 2-Cat . Une des raisons de l'importance de cette construction est que, d'après un théorème de Thomason, si $F : I \rightarrow \infty\text{-Cat}$ est

un foncteur, alors $\int F$ calcule la limite inductive homotopique de F . Ce résultat a été généralisé à 2-Cat par Cegarra et Heredia [19].

Grâce aux tranches ∞ -catégoriques ou aux ∞ -catégories comma que nous avons introduites, on peut définir la construction de Grothendieck d'un ∞ -foncteur $F : I \rightarrow \infty\text{-Cat}$. L'étude de cette construction et de ses propriétés reste à mener. On peut espérer qu'elle permette de montrer que les localisateurs fondamentaux de $\infty\text{-Cat}$ sont stables par dualité. Par ailleurs, on s'attend à ce que la construction de Grothendieck d'un diagramme $F : I \rightarrow \infty\text{-Cat}$, où I est une petite catégorie, calcule la limite inductive homotopique de F , analogue ∞ -catégorique du théorème de Thomason.

- (c) Les ∞ -catégories, ∞ -foncteurs et transformations oplax ne forment pas une 2-catégorie car on ne peut pas composer horizontalement deux transformations oplax. Elles forment néanmoins ce qu'on appelle une catégorie de Gray. Plus généralement, les ∞ -catégories, ∞ -foncteurs et i -transformations oplax, pour $i \geq 1$, forment une ∞ -catégorie de Gray $\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}$, c'est-à-dire une catégorie enrichie dans $\infty\text{-Cat}$ muni du produit monoïdal de Gray. Pour des raisons formelles, si C est une ∞ -catégorie, le foncteur $- \otimes C : \infty\text{-Cat} \rightarrow \infty\text{-Cat}$ s'étend naturellement en un ∞ -foncteur de Gray, c'est-à-dire un foncteur enrichie, $\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}} \rightarrow \infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}$. On peut montrer, mais ce n'est plus formel, que le foncteur $- \star C : \infty\text{-Cat} \rightarrow \infty\text{-Cat}$ s'étend également en un ∞ -foncteur de Gray $\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}} \rightarrow \infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}$.

On s'attend à ce que toutes les constructions ∞ -catégoriques proviennent de ∞ -foncteurs de Gray (ou de leur variante duale, les ∞ -foncteurs de Gray gauche). Avec Maltsiniotis, nous proposons des conjectures précises à ce sujet pour les foncteurs de tranches [T7, appendice C]. De même, on peut formuler des conjectures analogues pour la construction comma ∞ -catégorique. Pour l'instant, nous n'avons été capable de prouver ces conjectures qu'en basse dimension, et parfois même avec des hypothèses restrictives supplémentaires. L'étude des ∞ -catégories de Gray et des functorialités des constructions ∞ -catégoriques dans ce cadre est centrale à la théorie des ∞ -catégories et aura de nombreuses conséquences non triviales, au-delà de la théorie de l'homotopie de $\infty\text{-Cat}$.

- (d) Un des résultats importants de la théorie de l'homotopie de Cat est l'existence de la structure de catégorie de modèles de Thomason [75], structure de catégorie de modèles sur Cat dont les équivalences faibles sont les équivalences de Thomason. Ce résultat n'a toujours pas été généralisé à $\infty\text{-Cat}$. En vertu de nos travaux [T3, T7], pour établir l'existence de cette structure, il suffit de démontrer ce que nous appelons la condition (d) : si $E' \hookrightarrow E$ est une inclusion close vers le bas d'ensembles ordonnés qui admet une rétraction qui est aussi un adjoint à droite, alors le ∞ -foncteur $\mathcal{O}_{E'} \rightarrow \mathcal{O}_E$ entre les orientaux généralisés associés est une équivalence de Thomason et le reste après tout cochage de base.

La difficulté à prouver cet énoncé vient du fait que les équivalences de Thomason ne sont pas stables par cochangement de base. Ainsi, pour conclure, la stratégie évidente est de dégager une classe des ∞ -foncteurs incluse dans les équivalences de Thomason qui contiendrait les $\mathcal{O}_{E'} \rightarrow \mathcal{O}_E$ et serait stable par cochangement de base. C'est ce que nous avons fait avec Maltsiniotis dans le cas 2-catégorique [T3]. Malheureusement nous n'avons pour l'instant pas réussi à adapter cette stratégie, même au cas $n = 3$.

Une autre stratégie en cours d'étude est la suivante. En vertu d'un théorème de Simon Henry [45] (de type théorème de Smith), il existe une structure de catégorie de modèles sur $\infty\text{-Cat}$ dont les cofibrations sont les cofibrations de la conjecturale structure à la Thomason et dont les équivalences faibles sont engendrées, en un certain sens, par les cofibrations triviales de la structure conjecturale. Pour conclure, il suffirait de montrer que les équivalences faibles de cette structure de catégorie de modèles sont exactement les équivalences de Thomason.

- (e) Un des buts de la théorie de l'homotopie de $\infty\text{-Cat}$ est d'obtenir des modèles géométriques des types d'homotopie. On a déjà mentionné la conjecture suivante : si X est un complexe simplicial, alors la ∞ -catégorie « géométrique » associée \mathcal{O}_X [T4] a le type d'homotopie de X . Cette conjecture, pas même établie en dimension 2, semble nécessiter de nouveaux outils. Plus généralement, on souhaiterait savoir associer à un type d'homotopie une ∞ -catégorie « géométrique » la plus simple possible. S'il y a parfois des conjectures évidentes, la vérification de celles-ci est toujours délicate. Nous manquons de techniques pour calculer le type d'homotopie d'une ∞ -catégorie. Ce problème est bien illustré en dimension 2 dans la thèse de Guetta [44]. Une des priorités du développement de la théorie de l'homotopie de $\infty\text{-Cat}$ est la recherche d'outils pour calculer ces types d'homotopie.

0.5. Organisation du mémoire

Dans le premier chapitre de ce mémoire, nous présentons la théorie de l'homotopie de la catégorie $\mathcal{C}at$ des petites catégories telle que développée par Quillen, Thomason et Grothendieck. Aucun des résultats de ce chapitre ne nous est dû. Le but du chapitre est de familiariser le lecteur avec les théorèmes qu'on va ensuite généraliser au cadre ∞ -catégorique. On introduit le foncteur nerf , la notion d'équivalence de Thomason et on énonce le théorème d'Illusie-Quillen affirmant que les petites catégories forment un modèle des types d'homotopie. On présente les théorèmes A et B de Quillen. On définit la notion de localisateur fondamental de $\mathcal{C}at$ et on énonce la conjecture de Grothendieck et théorème de Cisinski de minimalité du localisateur fondamental des équivalences de Thomason. Enfin, on décrit la structure de catégorie de modèles de Thomason sur $\mathcal{C}at$.

Le deuxième chapitre est consacré à des préliminaires ∞ -catégoriques. Ce chapitre non plus ne contient aucun résultat personnel. On introduit la catégorie $\infty\text{-Cat}$ des ∞ -catégories strictes, ainsi que quelques constructions simples comme les dualités ou la suspension. On discute la notion de ∞ -catégorie libre au sens des polygraphes. On présente la théorie des complexes dirigés augmentés de Steiner qui joue un rôle crucial dans ce mémoire. Enfin, on introduit la catégorie Θ de Joyal.

Le but du troisième chapitre est de présenter quelques constructions ∞ -catégoriques plus sophistiquées. Nous commençons par le produit de Gray, défini par Al-Alg et Steiner. Ceci nous conduit à introduire les notions de transformations oplax et lax, et plus généralement de i -transformations oplax ou lax. Nous donnons les formules explicites décrivant les transformations oplax et nous expliquons le lien avec la notion d'homotopie de complexes dirigés augmentés. Nous introduisons ensuite le joint ∞ -catégorique et ses adjoints, les tranches. Nous décrivons explicitement les tranches au-dessous d'un objet. Nous présentons de très générales conjectures de fonctorialité des tranches formulées dans le langage des ∞ -catégories de Gray. Enfin, nous introduisons la construction comma ∞ -catégorique. Nous faisons le lien entre tranches et comma. Nous énonçons un théorème de fonctorialité de la construction comma.

Le quatrième chapitre est consacré à l'étude des foncteurs nerf pour les n -catégories strictes, $1 \leq n \leq \infty$. On définit les orientaux et le nerf de Street, le nerf cellulaire, induit par l'inclusion de la catégorie Θ de Joyal dans $\infty\text{-Cat}$, et le nerf multi-simplicial qu'on déduit du nerf cellulaire mais qui peut également s'obtenir par itération du nerf classique. On expose des résultats généraux de Grothendieck permettant de comparer des foncteurs nerf. En utilisant ces résultats, on esquisse la preuve du fait que les nerfs de Street, cellulaire et multi-simplicial sont équivalents en un sens précisé par la théorie de Grothendieck.

Dans le cinquième chapitre, nous introduisons les équivalences de Thomason ∞ -catégoriques. En vertu du résultat principal du chapitre précédent, celles-ci peuvent être définies en utilisant n'importe quel foncteur nerf. Nous montrons que la classe des équivalences de Thomason est stable par toutes les dualités de $\infty\text{-Cat}$. Nous expliquons comment les transformations oplax ou lax induisent des homotopies simpliciales après application du nerf de Street. Ceci nous conduit à introduire une notion de rétracte par transformation qui est une condition suffisante pour qu'un ∞ -foncteur soit une équivalence de Thomason. On démontre que les tranches au-dessus ou au-dessous d'un objet se rétractent par transformation sur le point. On montre qu'il en est de même des orientaux. Enfin, on énonce l'analogue du théorème d'Illusie-Quillen, démontré par mon étudiant Gagna : les ∞ -catégories strictes modélisent les types d'homotopie.

Le sixième chapitre traite de l'analogue ∞ -catégorique du théorème A de Quillen. On énonce le théorème A ∞ -catégorique relatif. On esquisse deux démonstrations :

l'une de nature simpliciale et l'autre de nature ∞ -catégorique. On introduit une notion de localisateur fondamental de ∞ -*Cat*. Les résultats de ce chapitre et du chapitre précédent montrent que la classe des équivalences de Thomason ∞ -catégoriques forme un localisateur fondamental de ∞ -*Cat*. On conjecture qu'il s'agit du plus petit tel localisateur. On montre que tout localisateur fondamental de ∞ -*Cat* vérifie un théorème A relatif en un sens lax, ce qui est une manière de formuler que le théorème A relatif strict implique le théorème A relatif lax.

Le septième chapitre est consacré au théorème B ∞ -catégorique. On en démontre une forme générale qui dans le cas 1-catégorique est due à Barwick et Kan. Plus précisément, nous montrons que l'analogue ∞ -catégorique de la condition de Quillen est une condition suffisante pour que la construction comma calcule le produit fibré homotopique. On donne quelques applications de ce théorème, notamment au calcul d'espaces de lacets ∞ -catégoriques et de modèles ∞ -catégoriques pour les espaces d'Eilenberg-Mac Lane.

Dans le huitième chapitre, on s'intéresse aux modèles ∞ -catégoriques d'un complexe simplicial. On montre comment associer à tout complexe simplicial une ∞ -catégorie qui est une sorte de version ∞ -catégorique du complexe simplicial. On conjecture que cette ∞ -catégorie a le type d'homotopie du complexe simplicial de départ. Afin d'étudier cette conjecture, on introduit différentes notions d'objets initiaux et finaux en un sens lax dans une ∞ -catégorie. On montre que les orientaux admettent de tels objets initiaux et finaux. On en déduit une preuve de notre conjecture dans le cas où le complexe simplicial est la subdivision d'un autre complexe simplicial. Comme cas particulier, on obtient un modèle ∞ -catégorique simple pour un CW-complexe régulier.

Le dernier chapitre de ce mémoire traite de la structure de catégorie de modèles à la Thomason sur la catégorie n -*Cat* des n -catégories strictes, pour $1 \leq n \leq \infty$. On travaille de manière axiomatique et dégage des conditions suffisantes sur un objet cosimplicial dans n -*Cat* pour qu'il induise une structure de catégorie de modèles sur n -*Cat* à partir de celles de Kan-Quillen sur les ensembles simpliciaux. Dans le cas qui nous intéresse, à savoir celui des orientaux, toutes les conditions sauf deux, les conditions (d) et (e), sont faciles à obtenir. On montre que la condition (e) est conséquence des résultats du chapitre précédent. La condition (d) reste ouverte dans le cas général. On esquisse la preuve de cette condition dans le cas 2-catégorique. On obtient ainsi une structure à la Thomason sur 2-*Cat*. Enfin, on étudie les localisations de Bousfield à gauche de cette structure en lien avec la notion de localisateur fondamental de 2-*Cat* de Chiche.

Pour finir, dans un appendice, on présente nos travaux menés après la thèse qui ne sont pas en rapport direct avec le sujet de ce mémoire. On insiste sur nos résultats à propos d'un modèle des n -catégories faibles (plus précisément des (∞, n) -catégories) que nous avons introduit : les n -quasi-catégories.

CHAPITRE 1

THÉORIE DE L'HOMOTOPIE DES PETITES CATÉGORIES

Dans ce chapitre, nous présentons la théorie de l'homotopie des petites catégories de Quillen, Thomason et Grothendieck, c'est-à-dire l'étude de la catégorie des petites catégories munie de la classe des équivalences de Thomason, foncteurs dont le nerf est une équivalence d'homotopie faible simpliciale.

L'objet des chapitres suivants sera de présenter nos travaux, pour la plupart en collaboration avec Georges Maltsiniotis, vers une généralisation de cette théorie aux ∞ -catégories strictes.

Aucun des résultats présentés dans ce chapitre ne nous est dû.

1.1. Les petites catégories comme modèle des types d'homotopie

La théorie de l'homotopie des petites catégories naît avec l'introduction par Grothendieck du foncteur nerf [42] qui permet d'associer à toute petite catégorie un type d'homotopie. Commençons par rappeler sa définition.

1.1.1. — On notera Cat la *catégorie des petites catégories*, c'est-à-dire la catégorie dont les objets sont les petites catégories et dont les morphismes sont les foncteurs entre petites catégories.

1.1.2. — La *catégorie des simplexes* Δ est la catégorie dont les objets sont les ensembles ordonnés

$$\Delta_n = \{0 \leq 1 \leq \dots \leq n\}, \quad n \geq 0,$$

et dont les morphismes sont les applications croissantes au sens large entre ces ensembles ordonnés. On considérera souvent cette catégorie comme une sous-catégorie pleine de Cat .

Un *ensemble simplicial* est un préfaisceau sur Δ . Ainsi, la catégorie des ensembles simpliciaux est la catégorie $\widehat{\Delta}$ des préfaisceaux sur Δ .

1.1.3. — Le foncteur d'inclusion $\Delta \hookrightarrow \text{Cat}$ induit, par le procédé de Kan, une adjonction

$$c : \widehat{\Delta} \rightarrow \text{Cat} \quad \dashv \quad N : \text{Cat} \rightarrow \widehat{\Delta}.$$

On appelle l'adjoint à droite N le *foncteur nerf*. Explicitement, si C est une petite catégorie, l'ensemble des n -simplexes de NC est

$$(NC)_n = \text{Hom}_{\text{Cat}}(\Delta_n, C).$$

Autrement dit, un n -simplexe de NC correspond à un diagramme

$$c_0 \longrightarrow c_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow c_n$$

dans C .

Le foncteur nerf permet d'associer à toute petite catégorie un type d'homotopie comme suit.

1.1.4. — La catégorie des ensembles simpliciaux sera toujours munie de la classe des *équivalences d'homotopie faibles*, qu'on peut par exemple définir comme les morphismes envoyés par le foncteur de réalisation topologique sur une équivalence d'homotopie. On notera $\mathcal{H}ot$ la localisée $\text{Ho}(\widehat{\Delta})$ de la catégorie des ensembles simpliciaux par cette classe d'équivalences faibles. C'est la *catégorie des types d'homotopie*. On dispose d'un foncteur canonique $p : \widehat{\Delta} \rightarrow \mathcal{H}ot$.

Remarque 1.1.5. — De manière plus classique, la catégorie des types d'homotopie est définie comme la localisée de la catégorie des espaces topologiques Top par les équivalences d'homotopie faibles. Il résulte d'un théorème de Milnor que la catégorie qu'on obtient ainsi est équivalente à celle définie à partir des ensembles simpliciaux.

1.1.6. — On obtient donc un foncteur

$$\text{Cat} \xrightarrow{N} \widehat{\Delta} \xrightarrow{p} \mathcal{H}ot,$$

associant à une catégorie *son type d'homotopie*.

1.1.7. — On dit qu'un foncteur $u : A \rightarrow B$ entre petites catégories est une *équivalence de Thomason* si son nerf Nu est une équivalence faible simpliciale ou, ce qui revient au même, si pNu est un isomorphisme de types d'homotopie. On notera \mathcal{W}_∞ la classe des équivalences de Thomason.

La « théorie de l'homotopie de Cat » est l'étude de Cat munie de la classe des équivalences de Thomason. Le théorème suivant affirme que cette étude est en fait celle des types d'homotopie :

1.1.8. Théorème d'Illusie-Quillen. — *Le foncteur nerf $N : \text{Cat} \rightarrow \widehat{\Delta}$ induit une équivalence de catégories*

$$\overline{N} : \text{Ho}(\text{Cat}) \rightarrow \text{Ho}(\widehat{\Delta}) = \mathcal{H}ot,$$

où $\text{Ho}(\text{Cat})$ désigne la localisée de Cat par les équivalences de Thomason.

Démonstration. — Voir [50, chapitre VI, corollaire 3.3.1]. (Le résultat est rédigé par Illusie mais est attribué par celui-ci à Quillen.) \square

Remarque 1.1.9. — Il faut se garder de croire que l'adjoint à gauche $c : \widehat{\Delta} \rightarrow \mathit{Cat}$ du nerf induit un quasi-inverse de \overline{N} . En effet, ce foncteur a un mauvais comportement homotopique et en particulier n'envoie par les équivalences faibles simpliciales sur des équivalences de Thomason. Un quasi-inverse de \overline{N} est induit par le foncteur « catégorie des éléments »

$$\begin{aligned} i_{\Delta} : \widehat{\Delta} &\rightarrow \mathit{Cat} \\ X &\mapsto \Delta/X. \end{aligned}$$

(Rappelons que si A est une petite catégorie, on dispose d'un foncteur

$$\begin{aligned} i_A : \widehat{A} &\rightarrow \mathit{Cat} \\ F &\mapsto A/F, \end{aligned}$$

où A/F est la catégorie des éléments du préfaisceau F , c'est-à-dire la catégorie dont les objets sont les couples $(a, f : a \rightarrow F)$, où a est un objet de A et f un morphisme de préfaisceaux, et les morphismes de (a, f) vers (a', f') sont les morphismes $u : a \rightarrow a'$ de A tels que $f'u = f$.)

Remarque 1.1.10. — La preuve de Quillen permet en fait de montrer que le nerf N induit une équivalence de $(\infty, 1)$ -catégories faibles, ou de dérivateurs, entre $\mathit{Ho}(\mathit{Cat})$ et Hot .

1.2. Les théorèmes A et B de Quillen

Une des premières applications spectaculaires de la théorie de l'homotopie des petites catégories est la définition des groupes de K -théorie algébrique supérieure comme les groupes d'homotopie du type d'homotopie d'une certaine petite catégorie [65]. C'est afin d'étudier ces groupes que Quillen a introduit ses célèbres théorèmes A et B.

Une condition suffisante pour qu'un foncteur soit une équivalence de Thomason est qu'il soit en quelque sorte une équivalence d'homotopie, c'est-à-dire qu'il admette un inverse à transformations naturelles près :

1.2.1. — Soient $u, v : A \rightarrow B$ deux foncteurs entre petites catégories. La donnée d'une transformation naturelle $\alpha : u \Rightarrow v$ est équivalente à celle d'un foncteur $h_{\alpha} : \Delta_1 \times A \rightarrow B$ tel que $h_{\alpha}(0, -) = u$ et $h_{\alpha}(1, -) = v$. Le foncteur nerf commutant au produit, le morphisme simplicial $N(h_{\alpha})$ est donc une homotopie simpliciale de Nu vers Nv .

Ainsi, si $u : A \rightarrow B$ est un foncteur entre petites catégories qui admet un inverse à transformations naturelles près, alors Nu est une équivalence d'homotopie et u est donc une équivalence de Thomason. En particulier, si u est un adjoint (à gauche ou à droite), alors Nu est une équivalence de Thomason.

Cette condition est extrêmement restrictive. Le théorème A de Quillen fournit une condition suffisante beaucoup plus souple pour qu'un foncteur soit une équivalence de Thomason. Commençons par quelques rappels.

1.2.2. — Soit $u : A \rightarrow B$ un foncteur. Si b est un objet de B , on notera A/b la catégorie dont les objets sont les couples $(a, f : u(a) \rightarrow b)$, où a est un objet de A et f une flèche de B , et dont les morphismes d'un objet (a, f) vers un objet (a', f') sont les morphismes $g : a \rightarrow a'$ de A faisant commuter le triangle évident, c'est-à-dire tels que $f'u(g) = f$. C'est la *tranche de A au-dessus de b* , sous-entendu relativement à u . On dispose d'un foncteur d'oubli $U : A/b \rightarrow A$. Lorsque u est le foncteur identité de B , on retrouve la tranche usuelle B/b . Par ailleurs, on a un isomorphisme canonique

$$A/b \simeq A \times_B B/b,$$

où les flèches intervenant dans le produit fibré sont u et le foncteur d'oubli.

On définit de même, toujours pour $u : A \rightarrow B$ un foncteur et b un objet de B , une catégorie $b \setminus A$ dont les objets sont les couples $(a, f : b \rightarrow u(a))$ et les morphismes les morphismes évidents. C'est la *tranche de A au-dessous de b* . On vérifie immédiatement qu'on a

$$b \setminus A = (A^\circ/b)^\circ,$$

ce qui permet de déduire de tout énoncé catégorique pour les tranches au-dessus un énoncé analogue pour les tranches au-dessous. En particulier, on dispose également d'un foncteur d'oubli pour ces tranches.

1.2.3. — On dit qu'une petite catégorie C est *asphérique* si son type d'homotopie est trivial, c'est-à-dire si son nerf NC est faiblement contractile.

Remarque 1.2.4. — Les petites catégories admettant un objet initial ou final sont asphériques. En effet, si C est une telle catégorie, alors le foncteur $C \rightarrow e$, où e est la catégorie finale, est un adjoint, et donc une équivalence de Thomason.

1.2.5. Théorème A de Quillen. — Soit $u : A \rightarrow B$ un foncteur entre petites catégories. Si pour tout objet b de B , la catégorie A/b est asphérique, alors u est une équivalence de Thomason.

Démonstration. — Voir [65, théorème A]. □

1.2.6. — On dira d'un foncteur $u : A \rightarrow B$ qui vérifie les hypothèses du théorème A, c'est-à-dire tel que, pour tout objet b de B , la catégorie A/b est asphérique, qu'il est *asphérique*. Le théorème A affirme alors que tout foncteur asphérique est une équivalence de Thomason.

Remarque 1.2.7. — Si C est une petite catégorie, on vérifie facilement que C et C° ont même type d'homotopie. On en déduit que si $u : A \rightarrow B$ est un foncteur tel que, pour tout objet b de B , la catégorie $b \setminus A$ est asphérique, alors u est une équivalence

de Thomason. (C'est en fait ce résultat que démontre Quillen.) Un foncteur vérifiant cette hypothèse est dit *coasphérique*.

1.2.8. Théorème A de Quillen relatif. — *Considérons un triangle commutatif*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ & \searrow v & \swarrow w \\ & & C \end{array}$$

de Cat . Si pour tout objet c de C , le foncteur canonique

$$\begin{aligned} u/c : A/c &\rightarrow B/c \\ (a, f) &\mapsto (u(a), f) \end{aligned}$$

est une équivalence de Thomason, alors il en est de même de u .

Démonstration. — Ce résultat, qui semble avoir été énoncé pour la première fois par Grothendieck [43], peut se démontrer exactement comme le théorème A classique. \square

Remarque 1.2.9. — Le théorème A classique est le cas du triangle

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ & \searrow u & \swarrow 1_B \\ & & B \end{array} .$$

Le caractère fondamental du théorème A a été mis en évidence par une conjecture de Grothendieck, démontrée par Cisinski :

1.2.10. — On dit qu'une classe de foncteurs \mathcal{W} entre petites catégories est un *localisateur fondamental* si

- (a) la classe \mathcal{W} est *faiblement saturée*, c'est-à-dire contient les identités, vérifie la propriété du deux sur trois et contient les foncteurs i admettant une rétraction r telle que ir soit dans \mathcal{W} ;
- (b) les petites catégories admettant un objet final sont \mathcal{W} -*asphérique* au sens où, si C est une telle petite catégorie, le foncteur $C \rightarrow e$ vers la catégorie finale est dans \mathcal{W} ;
- (c) la classe \mathcal{W} satisfait au théorème A relatif au sens où, pour tout foncteur $u : A \rightarrow B$ entre petites catégories au-dessus d'une petite catégorie C , si pour tout objet c de C le foncteur $A/c \rightarrow B/c$ est dans \mathcal{W} , alors u est dans \mathcal{W} .

Théorème 1.2.11 (Cisinski). — *La classe \mathcal{W}_∞ des équivalences de Thomason est le plus petit localisateur fondamental.*

Démonstration. — C'est le résultat principal de [25]. \square

Ce résultat montre qu'en un certain sens, le théorème A est le seul outil non trivial dont on dispose pour montrer qu'un foncteur est une équivalence de Thomason.

Passons maintenant au théorème B de Quillen.

1.2.12. — On dit qu'un foncteur $u : A \rightarrow B$ entre petites catégories est *localement homotopiquement constant* si, pour toute flèche $f : b \rightarrow b'$ de B , le foncteur

$$\begin{aligned} A/f : A/b &\rightarrow A/b' \\ (a, g) &\mapsto (a, fg) \end{aligned}$$

est une équivalence de Thomason.

1.2.13. Théorème B de Quillen. — Soit $u : A \rightarrow B$ un foncteur homotopiquement localement constant entre petites catégories. Alors le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} A/b & \longrightarrow & A \\ \downarrow \lrcorner & & \downarrow u \\ B/b & \longrightarrow & B \end{array} ,$$

où les foncteurs horizontaux sont les foncteurs d'oubli, est homotopiquement cartésien, au sens où son nerf est un carré homotopiquement cartésien d'ensembles simpliciaux.

Démonstration. — Voir [65, théorème B]. □

Remarque 1.2.14. — Comme pour le théorème A, on peut déduire immédiatement de ce résultat un analogue pour les tranches au-dessous.

Remarque 1.2.15. — Le théorème B peut se reformuler en affirmant que, sous ses hypothèses, la fibre homotopique de $u : A \rightarrow B$ est A/b , au sens où la fibre homotopique de Nu est $N(A/b)$.

Remarque 1.2.16. — Tout foncteur asphérique est homotopiquement localement constant. Ainsi, en vertu du théorème B, si $u : A \rightarrow B$ est asphérique, pour tout objet b de B , la fibre homotopique de Nu est $N(A/b)$ et est donc triviale par asphéricité de u . Ainsi, le morphisme Nu est une équivalence d'homotopie faible et u est une équivalence de Thomason. On a donc montré que le théorème B entraîne le théorème A (non relatif). Néanmoins, les formes les plus générales du théorème A ne sont pas conséquence du théorème B.

1.3. La structure de catégorie de modèles de Thomason

Thomason a montré dans [75] que le couple $(\mathcal{Cat}, \mathcal{W}_\infty)$, des catégories munies des équivalences de Thomason, est *quillenisable* au sens où il existe une structure de

catégorie de modèles sur Cat dont les équivalences faibles sont les équivalences de Thomason⁽¹⁾ : c'est la structure de Thomason.

Commençons par des rappels sur la structure de Kan-Quillen sur les ensembles simpliciaux.

1.3.1. — Les ensembles simpliciaux sont munis d'une structure de catégorie de modèles dont les équivalences faibles sont les équivalences d'homotopie faibles, morphismes dont la réalisation topologique est une équivalence d'homotopie, les cofibrations sont les monomorphismes et les fibrations sont les fibrations de Kan (voir plus bas pour une définition) : c'est la structure de Kan-Quillen [64, chapitre II, § 3, théorème 3].

Cette structure est combinatoire. Explicitons des ensembles de cofibrations et de cofibrations triviales génératrices. Pour $n \geq 0$, on notera $i_n : \partial\Delta_n \hookrightarrow \Delta_n$ l'inclusion du bord du n -simplexe dans le n -simplexe. L'ensemble

$$I = \{i_n : \partial\Delta_n \hookrightarrow \Delta_n \mid n \geq 0\}$$

est un ensemble de cofibrations génératrices. Pour $0 \leq k \leq n$ avec $n > 0$, on notera $j_{n,k} : \Lambda_n^k \hookrightarrow \Delta_n$ l'inclusion du k -ième cornet dans Δ_n . Rappelons que ce cornet est obtenu à partir de $\partial\Delta_n$ en enlevant la k -ième face. L'ensemble

$$J = \{j_{n,k} : \Lambda_n^k \hookrightarrow \Delta_n \mid 0 \leq k \leq n, n > 0\}$$

est un ensemble de cofibrations triviales génératrices. En particulier, une fibration de Kan est un morphisme ayant la propriété de relèvement à droite par rapport à J .

La structure de Thomason est obtenue par transfert le long d'une adjonction à partir de la structure de Kan-Quillen sur les ensembles simpliciaux en utilisant ce résultat classique :

1.3.2. Lemme de transfert. — Soit \mathcal{M} une catégorie de modèles combinatoire de classes d'équivalences faibles \mathcal{W} et de fibrations Fib , de cofibrations génératrices I et de cofibrations triviales génératrices J , soit \mathcal{N} une catégorie localement présentable et soit

$$F : \mathcal{M} \rightleftarrows \mathcal{N} : G$$

une adjonction. On suppose que

$$G(\text{Cell}(F(J))) \subset \mathcal{W},$$

où Cell désigne la clôture par image directe et composition transfinie. Alors \mathcal{N} est munie d'une structure de catégorie de modèles d'équivalences faibles $G^{-1}(\mathcal{W})$ et de fibrations $G^{-1}(\text{Fib})$, de cofibrations génératrices $F(I)$ et de cofibrations triviales génératrices $F(J)$. En particulier, l'adjonction $F \dashv G$, pour \mathcal{N} munie de cette structure, est une adjonction de Quillen.

⁽¹⁾La terminologie « équivalence de Thomason » provient de ce résultat.

Démonstration. — Voir par exemple [47, théorème 11.3.2]. □

Les hypothèses du lemme de transfert ne sont pas satisfaites pour l'adjonction $c : \widehat{\Delta} \rightleftharpoons \text{Cat} : N$. Cela est dû au mauvais comportement homotopique du foncteur c . Néanmoins, comme l'a observé Thomason, celui-ci se comporte bien sur des ensembles simpliciaux suffisamment subdivisés.

1.3.3. — On notera $\text{Sd} : \widehat{\Delta} \rightarrow \widehat{\Delta}$ le foncteur de subdivision barycentrique de Kan. Rappelons que celui-ci est l'unique foncteur commutant aux limites inductives qui envoie Δ_n sur le nerf de l'ensemble ordonné des parties finies non vides de $\{0, \dots, n\}$. Ce foncteur admet un adjoint à droite $\text{Ex} : \widehat{\Delta} \rightarrow \widehat{\Delta}$.

1.3.4. Théorème de Thomason. — *La catégorie Cat des petites catégories est munie d'une structure de catégorie de modèles combinatoire propre dont les équivalences faibles sont les équivalences de Thomason, de cofibrations génératrices $c\text{Sd}^2(I)$ et de cofibrations triviales génératrices $c\text{Sd}^2(J)$. De plus, pour cette structure, l'adjonction*

$$c\text{Sd}^2 : \widehat{\Delta} \rightleftharpoons \text{Ex}^2 N : \text{Cat}$$

est une adjonction de Quillen.

Démonstration. — C'est le résultat principal de [75]. □

Corollaire 1.3.5. — *L'adjonction*

$$c\text{Sd}^2 : \widehat{\Delta} \rightleftharpoons \text{Ex}^2 N : \text{Cat}$$

est une équivalence de Quillen entre la catégorie de modèles de Thomason et celle de Kan-Quillen.

Démonstration. — Cela résulte du théorème d'Illusie-Quillen et du théorème de Thomason. Il est à noter que ces deux résultats sont complètement indépendants. □

Le résultat précédent affirme donc que la théorie de l'homotopie des petites catégories est équivalente à celle des types d'homotopie, et qu'étudier cette théorie revient bien à étudier les types d'homotopie sous un angle nouveau.

CHAPITRE 2

LE LANGAGE DES ∞ -CATÉGORIES STRICTES

Dans ce chapitre, on introduit la catégorie $\infty\text{-Cat}$ des ∞ -catégories strictes, objet central de ce texte. On donne les premières définitions, notations et propriétés relatives aux ∞ -catégories strictes. On introduit la puissante théorie de Steiner qui permet de manipuler certaines ∞ -catégories strictes comme des complexes de chaînes. Enfin, on introduit la catégorie Θ de Joyal, sous-catégorie pleine de $\infty\text{-Cat}$ dont les objets indexent les opérations des ∞ -catégories.

Aucun des résultats présentés dans ce chapitre ne nous est dû.

2.1. La catégorie des ∞ -catégories strictes

Commençons par rappeler brièvement la définition des ∞ -catégories strictes. De même qu'une catégorie possède un graphe sous-jacent, une ∞ -catégorie stricte possède un ensemble globulaire sous-jacent :

2.1.1. — Un *ensemble globulaire* est un diagramme d'ensembles

$$\cdots \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} X_i \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} \cdots \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} X_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} X_0 \quad ,$$

satisfaisant aux relations

$$ss = st \quad \text{et} \quad ts = tt .$$

Si X est un ensemble globulaire, on appelle X_i l'ensemble des *i-cellules* de X . Pour $i = 0$, on parle également d'*objets*. Si x est une *i-cellule* de X , pour j tel que $0 \leq j \leq n$, on appelle *j-source* de x et *j-but* de x les *j-cellules*

$$s_j(x) = (s \cdots s)(x) \quad \text{et} \quad t_j(x) = (t \cdots t)(x) ,$$

où s et t sont itérés $i - j$ fois. Lorsque $j = i - 1$, on parle simplement de *source* et de *but*.

On dit que deux *i-cellules* x et y d'un ensemble globulaire sont *parallèles* si, ou bien $i = 0$, ou bien $i > 0$ et on a $s(x) = s(y)$ et $t(x) = t(y)$.

Si X et Y sont deux ensembles globulaires, un *morphisme* $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme de diagrammes, c'est-à-dire la donnée pour tout $i \geq 0$ d'une application $f_i : X_i \rightarrow Y_i$, et ceci de manière compatible aux opérations source et but. Si x est une i -cellule de X , on notera simplement $f(x)$ pour $f_i(x)$. La compatibilité aux sources et buts s'exprime alors par

$$sf(x) = fs(x) \quad \text{et} \quad tf(x) = ft(x)$$

pour toute cellule x de dimension $i > 0$.

Dans une catégorie, on peut obtenir une flèche à partir de chacun des diagrammes

$$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z \quad \text{ou} \quad x$$

(la composition dans le premier cas et l'identité dans le second) de sorte que, pour des diagrammes plus complexes comme par exemple

$$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z \xrightarrow{h} t \xrightarrow{i} u \quad ,$$

il existe un unique composé. De même, dans une 2-catégorie stricte, on peut obtenir une 2-cellule à partir des diagrammes

$$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z \quad , \quad x \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \alpha \Downarrow \\ \xrightarrow{g} \end{array} y \begin{array}{c} \xrightarrow{h} \\ \beta \Downarrow \\ \xrightarrow{i} \end{array} z \quad , \quad x \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \alpha \Downarrow \\ \xrightarrow{g} \\ \beta \Downarrow \\ \xrightarrow{h} \end{array} y \quad ,$$

$$x \quad \text{ou} \quad x \xrightarrow{f} y \quad ,$$

de sorte que, pour des diagrammes plus complexes comme par exemple

$$x \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \alpha \Downarrow \\ \xrightarrow{g} \\ \beta \Downarrow \\ \xrightarrow{h} \end{array} y \begin{array}{c} \xrightarrow{i} \\ j \Downarrow \gamma \\ \xrightarrow{k} \\ \delta \Downarrow \\ \xrightarrow{l} \end{array} z \xrightarrow{m} t \quad ,$$

il existe un unique composé. Plus généralement, dans une ∞ -catégorie stricte, on se donne des composés et des identités pour certains diagrammes élémentaires de dimension fini arbitraire et on impose des axiomes garantissant l'existence d'un unique composé pour une vaste classe de diagrammes :

2.1.2. — Une ∞ -catégorie C consiste en la donnée d'un ensemble globulaire muni des opérations suivantes :

- *compositions* : pour tous $0 \leq j < i$ et tout couple x, y de i -cellules de C j -composables au sens où $s_j(x) = t_j(y)$, on se donne une i -cellule $x *_j y$ de source et but respectifs sy et tx si $j = i - 1$, et $sx *_j sy$ et $tx *_j ty$ si $j < i - 1$;

- *identités* : pour tout $i \geq 0$ et toute i -cellule x de C , on se donne une $(i+1)$ -cellule 1_x de source x et de but x ;

vérifiant les axiomes suivants :

- *associativité* : pour tous $0 \leq j < i$ et tout triplet x, y, z de i -cellules de C , on a

$$(x *_j y) *_j z = x *_j (y *_j z)$$

dès que ces deux expressions ont un sens, c'est-à-dire dès que $s_j(x) = t_j(y)$ et $s_j(y) = t_j(z)$;

- *loi d'échange* : pour tous $0 \leq k < j < i$ et tout quadruplet x, y, z, t de i -cellules de C , on a

$$(x *_j y) *_k (z *_j t) = (x *_k z) *_j (y *_k t)$$

dès que ces deux expressions ont un sens, c'est-à-dire dès que $s_j(x) = t_j(y)$, $s_j(z) = t_j(t)$ et $s_k(y) = t_k(z)$;

- *unitarité* : pour tous $0 \leq j < i$ et toute i -cellule x de C , on a

$$x *_j 1_{s_j(x)} = x = 1_{t_j(x)} *_j x,$$

où on a noté $1_{s_j(x)}$ et $1_{t_j(x)}$ les i -cellules obtenues en itérant $i-j$ fois l'opération $z \mapsto 1_z$ à partir de $s_j(x)$ et $t_j(x)$ respectivement ;

- *fonctorialité des identités* : pour tous $0 \leq j < i$ et tout couple x, y de i -cellules de C , on a

$$1_{x *_j y} = 1_x *_j 1_y$$

dès que ces expressions ont un sens, c'est-à-dire dès que $s_j(x) = t_j(y)$.

2.1.3. — On adoptera les conventions suivantes sur les opérations d'une ∞ -catégorie stricte :

- Si $i > j \geq 0$, la composition $*_j$ sera prioritaire sur la composition $*_i$. Ainsi, par exemple, si l'expression $x *_i (y *_j z)$ a un sens dans une ∞ -catégorie stricte, on la notera plus simplement $x *_i y *_j z$.
- On identifiera parfois une cellule à ses identités itérées dans les formules. Par exemple, si l'expression $1_x *_i y$, où 1_x désigne l'identité itérée de x en la dimension de y , a un sens dans une ∞ -catégorie stricte, on pourra la noter $x *_i y$.

2.1.4. — Si C et D sont deux ∞ -catégories strictes, un ∞ -foncteur strict $u : C \rightarrow D$ est un morphisme de l'ensemble globulaire sous-jacent à C vers celui sous-jacent à D qui est compatible aux compositions et aux identités. Cela signifie que dès que le composé $x *_j y$ est défini dans C , alors

$$u(x *_j y) = u(x) *_j u(y)$$

et que pour tout cellule x de C , on a

$$u(1_x) = 1_{u(x)}.$$

2.1.5. — On notera $\infty\text{-Cat}$ la catégorie des ∞ -catégories strictes et des ∞ -foncteurs stricts.

Remarque 2.1.6. — De manière plus expéditive, la catégorie ∞ -*Cat*, et donc la notion de ∞ -catégorie stricte, peut être définie de la manière suivante : par récurrence, on définit la catégorie $(n + 1)$ -*Cat* comme étant la catégorie des catégories enrichies dans n -*Cat*, où 0 -*Cat* est la catégorie des ensembles, et on définit ∞ -*Cat* comme la limite projective du diagramme

$$\cdots \longrightarrow n\text{-Cat} \longrightarrow \cdots \longrightarrow 1\text{-Cat} \longrightarrow 0\text{-Cat} \quad ,$$

les flèches étant les foncteurs associant à une n -catégorie stricte la $(n - 1)$ -catégorie stricte obtenue en oubliant ses n -cellules.

Dans ce texte, toutes les ∞ -catégories et tous les ∞ -foncteurs seront stricts et on se permettra donc à partir de maintenant d'omettre cet adjectif.

2.1.7. — On vérifie que la catégorie ∞ -*Cat* est équivalente à la catégorie des catégories enrichies dans ∞ -*Cat*. En particulier, si C est une ∞ -catégorie et c et c' sont deux objets de C , on dispose d'une ∞ -catégorie $\underline{\text{Hom}}_C(c, c')$. Explicitement, les i -cellules de cette ∞ -catégorie sont les $(i + 1)$ -cellules de C de 0-source c et de 0-but c' , la structure de ∞ -catégorie étant héritée de façon évidente de celle de C .

2.1.8. — On dit qu'une cellule d'une ∞ -catégorie est *triviale* si elle est l'identité d'une cellule de dimension strictement inférieure. Pour $n \geq 0$, une n -catégorie (stricte) est une ∞ -catégorie dont toutes les i -cellules pour $i > n$ sont triviales. On notera n -*Cat* la sous-catégorie pleine de ∞ -*Cat* formée des n -catégories. Les catégories 0 -*Cat* et 1 -*Cat* s'identifient respectivement à *Ens* et *Cat*. En particulier, on considérera *Ens* et *Cat* comme des sous-catégories pleines de ∞ -*Cat*.

2.1.9. — Pour $n \geq 0$, le foncteur d'inclusion n -*Cat* \hookrightarrow ∞ -*Cat* admet des adjoints à gauche et à droite

$$\tau_n^i : \infty\text{-Cat} \rightarrow n\text{-Cat} \quad \dashv \quad n\text{-Cat} \hookrightarrow \infty\text{-Cat} \quad \dashv \quad \tau_n^b : \infty\text{-Cat} \rightarrow n\text{-Cat}$$

appelés respectivement le n -tronqué intelligent et le n -tronqué bête. Si C est une n -catégorie, on a

$$\tau_n^i(C) = \begin{cases} C_i & \text{si } i < n, \\ C_n / \sim & \text{si } i \geq n, \end{cases} \quad \text{et} \quad \tau_n^b(C) = \begin{cases} C_i & \text{si } i < n, \\ C_n & \text{si } i \geq n, \end{cases}$$

où \sim est la relation d'équivalence sur les n -cellules de C qui identifie deux n -cellules reliées par un zigzag de $(n + 1)$ -cellules, les sources, buts, compositions et identités étant hérités de la manière évidente de celles de C . On notera parfois $C_{\leq n}$ pour $\tau_n^b(C)$.

On dispose de deux ∞ -foncteurs canoniques

$$C \rightarrow \tau_n^i(C) \quad \text{et} \quad \tau_n^b(C) \hookrightarrow C$$

provenant des adjonctions.

On peut montrer que le foncteur $\tau_n^b : n$ -*Cat* \rightarrow ∞ -*Cat* admet lui-même un adjoint à droite et qu'il commute donc aux limites inductives comme projectives.

2.1.10. — Pour tout $i \geq 0$, on notera D_i le i -disque, c'est-à-dire la i -catégorie qui représente le foncteur i -cellules

$$\begin{aligned} \infty\text{-Cat} &\rightarrow \mathcal{E}ns \\ C &\mapsto C_i . \end{aligned}$$

Ainsi, si C est une ∞ -catégorie, la donnée d'une i -cellule x de C correspond à celle d'un ∞ -foncteur $x : D_i \rightarrow C$. Explicitement, on a

$$D_0 = \{0\}, \quad D_1 = 0 \longrightarrow 1, \quad D_2 = 0 \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Downarrow \\ \curvearrowleft \end{array} 1, \quad D_3 = 0 \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Downarrow \Rightarrow \Downarrow \\ \curvearrowleft \end{array} 1.$$

On appellera l'unique i -cellule non triviale de D_i sa *cellule principale*.

Les opérations source et but induisent, pour $i > 0$, des ∞ -foncteurs $\sigma : D_{i-1} \rightarrow D_i$ et $\tau : D_{i-1} \rightarrow D_i$.

De même, on notera ∂D_i le *bord du i -disque*, également appelé $(i-1)$ -sphère, obtenu à partir de D_i en enlevant sa cellule principale. On a donc

$$\partial D_0 = \emptyset, \quad \partial D_1 = \{0 \quad 1\}, \quad \partial D_2 = 0 \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} 1, \quad \partial D_3 = 0 \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Downarrow \Downarrow \\ \curvearrowleft \end{array} 1.$$

Si C est une ∞ -catégorie, la donnée d'un ∞ -foncteur $\partial D_{i+1} \rightarrow C$, pour $i \geq 0$, correspond à celle de deux i -cellules parallèles de C .

On a un ∞ -foncteur canonique d'inclusion $\partial D_i \hookrightarrow D_i$.

2.1.11. — Soit C une ∞ -catégorie. On dit que C est *libre au sens des polygraphes* si, pour tout $i \geq 0$, il existe un ensemble G_i de i -cellules de C tel que le carré

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{x \in G_i} \partial D_i & \xrightarrow{(sx, tx)} & C_{\leq i} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{x \in G_i} D_i & \xrightarrow{(x)} & C_{\leq i+1} \end{array},$$

où les flèches verticales sont les inclusions canoniques, soit cocartésien. Intuitivement, cela signifie que les $(i+1)$ -cellules de C s'obtiennent librement à partir des i -cellules en ajoutant l'ensemble G_i de $(i+1)$ -cellules.

On peut montrer que si C est libre au sens des polygraphes, les ensembles G_i sont uniques. On peut donc parler de l'ensemble des *générateurs des i -cellules* ou des *i -cellules génératrices* de C .

Remarque 2.1.12. — Les ∞ -catégories librement engendrées par un ensemble global sont libres au sens des polygraphes mais la notion est plus générale : par

exemple, la 2-catégorie

$$\mathcal{O}_2 = \begin{array}{ccc} & & 2 \\ & \nearrow & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

est libre au sens des polygraphes mais n'est pas libre sur un ensemble globulaire.

2.1.13. — Soit J une partie de $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. Si C est une ∞ -catégorie, on définit une nouvelle ∞ -catégorie $D_J(C)$ en renversant l'orientation des j -cellules de C lorsque j appartient à J . On obtient ainsi un foncteur $D_J : \infty\text{-Cat} \rightarrow \infty\text{-Cat}$, automorphisme involutif de $\infty\text{-Cat}$.

Trois de ces automorphismes jouent un rôle particulièrement important dans la théorie des ∞ -catégories. Lorsque $J = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on note C° pour $D_J(C)$ et on parle du *dual total* de C . Si J est constitué de l'ensemble des nombres pairs strictement positifs, on note C^{co} pour $D_J(C)$ et on parle du *dual pair* de C ; de même, si J consiste en l'ensemble des nombres impairs positifs, on note C^{op} pour $D_J(C)$ et on parle de *dual impair*. On a évidemment

$$C^\circ = (C^{\text{co}})^{\text{op}} = (C^{\text{op}})^{\text{co}},$$

raison pour laquelle la ∞ -catégorie C° est parfois notée C^{coop} .

Remarque 2.1.14. — On peut montrer que toute auto-équivalence de la catégorie $\infty\text{-Cat}$ est isomorphe à un D_J pour un certain J .

2.1.15. — Si C est une ∞ -catégorie, on notera ΣC la ∞ -catégorie définie de la manière suivante :

- les objets de ΣC sont 0 et 1;
- si x et y sont deux objets de ΣC , on a

$$\underline{\text{Hom}}_{\Sigma C}(x, y) = \begin{cases} C & \text{si } x = 0 \text{ et } y = 1, \\ \{*\} & \text{si } x = y, \\ \emptyset & \text{si } x = 1 \text{ et } y = 0; \end{cases}$$

- les compositions et identités sont définies de la manière évidente.

Les objets 0 et 1 définissent deux ∞ -foncteurs $D_0 \rightarrow \Sigma C$ qu'on notera respectivement σ et τ .

Remarque 2.1.16. — C'est une variante de la ∞ -catégorie introduite dans le paragraphe précédent qui est notée ΣC dans [T7, section B.6].

2.2. Théorie de Steiner

Le but de cette section est de rappeler quelques éléments de la théorie des complexes dirigés augmentés de Steiner [70]. Cette théorie joue un rôle fondamental dans

essentiellement tous les travaux présentés dans ce texte. Les résultats de Steiner permettent de manipuler certaines ∞ -catégories libres au sens des polygraphes comme des complexes de chaînes.

2.2.1. — Un *complexe dirigé augmenté* est un complexe de chaînes de groupes abéliens en degrés positifs augmenté

$$\cdots \xrightarrow{d} K_n \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} K_1 \xrightarrow{d} K_0 \xrightarrow{e} \mathbb{Z}$$

muni, pour tout $n \geq 0$, d'un sous-monoïde K_n^* de K_n des n -chaînes *positives*. Un *morphisme* $f : K \rightarrow L$ entre deux tels complexes est un morphisme de complexes de chaînes augmentés qui respecte la positivité des chaînes au sens où, pour tout $n \geq 0$, on a l'inclusion $f(K_n^*) \subset L_n^*$.

Les complexes dirigés augmentés forment une catégorie \mathcal{C}_{da} . On peut vérifier que cette catégorie est localement présentable (et en particulier complète et cocomplète).

Exemple 2.2.2. — Si X est un ensemble simplicial, on définit un complexe dirigé augmenté cX de la manière suivante :

- le complexe sous-jacent à cX est le complexe réduit usuel associé à X : pour $n \geq 0$, on a

$$(cX)_n = \mathbb{Z}^{(X_n^{\text{nd}})},$$

où X_n^{nd} désigne l'ensemble des n -simplexes non dégénérés de X , et si x est un n -simplexe non dégénéré de X , pour $n > 0$, on a

$$d(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \overline{d^i(x)},$$

où $d^i(x)$ désigne la i -ième face de x , et \overline{y} vaut y si y est non dégénéré et 0 sinon ;

- l'augmentation $e : \mathbb{Z}^{(X_0)} \rightarrow \mathbb{Z}$ envoie tout élément de X_0 sur 1 ;
- pour $n \geq 0$, le monoïde $(cX)_n^*$ est $\mathbb{N}^{(X_n^{\text{nd}})}$.

On vérifie immédiatement qu'on définit ainsi un foncteur

$$c : \widehat{\Delta} \rightarrow \mathcal{C}_{\text{da}}.$$

On peut montrer que ce foncteur commute aux limites inductives (voir [T4, proposition 5.8]).

2.2.3. — Steiner introduit un foncteur de « linéarisation » $\lambda : \infty\text{-Cat} \rightarrow \mathcal{C}_{\text{da}}$ de la manière suivante.

Soit C une ∞ -catégorie. On définit $\lambda(C)$ par :

- pour $n \geq 0$, le groupe abélien $\lambda(C)_n$ est engendré par des éléments

$$[x],$$

où x varie parmi les n -cellules de C , soumis aux relations

$$[x *_i y] = [x] + [y],$$

- pour tout $0 \leq i < n$ et toutes n -cellules x et y i -composables ;
- pour $n \geq 1$, la différentielle $d : \lambda(C)_n \rightarrow \lambda(C)_{n-1}$ est définie sur les générateurs par

$$d[x] = [tx] - [sx] ;$$

- pour x un objet de C , on a

$$e[x] = 1 ;$$

- pour tout $n \geq 0$, le monoïde $\lambda(C)_n^*$ est le sous-monoïde $\lambda(C)_n$ engendré par les $[x]$, où x varie parmi les n -cellules de C .

Si $u : C \rightarrow D$ est un ∞ -foncteur, on vérifie immédiatement qu'on définit un morphisme de complexes dirigés augmentés $\lambda(u) : \lambda(C) \rightarrow \lambda(D)$ en posant

$$\lambda(u)([x]) = [u(x)]$$

sur les générateurs.

On obtient bien ainsi un foncteur $\lambda : \infty\text{-Cat} \rightarrow \mathcal{C}_{\text{da}}$.

Remarque 2.2.4. — On vérifie facilement que si C est une ∞ -catégorie et x est une n -cellule triviale de C , alors on a $[x] = 0$ dans $\lambda(C)_n$.

2.2.5. — Steiner montre que le foncteur de linéarisation λ admet un adjoint à droite $\nu : \mathcal{C}_{\text{da}} \rightarrow \infty\text{-Cat}$. Explicitons cet adjoint.

Si K est un complexe dirigé augmenté, pour tout $i \geq 0$, les i -cellules de la ∞ -catégorie $\nu(K)$ sont les tableaux

$$\begin{pmatrix} x_0^0 & \cdots & x_i^0 \\ x_0^1 & \cdots & x_i^1 \end{pmatrix},$$

où

- x_k^ε appartient à K_k^* pour $0 \leq k \leq i$ et $\varepsilon = 0, 1$;
- $x_i^1 = x_i^0$;
- $d(x_k^\varepsilon) = x_{k-1}^1 - x_{k-1}^0$ pour $1 \leq k \leq i$ et $\varepsilon = 0, 1$;
- $e(x_0^\varepsilon) = 1$ pour $\varepsilon = 0, 1$.

Pour $i \geq 1$, la source et le but d'une telle i -cellule x sont

$$sx = \begin{pmatrix} x_0^0 & \cdots & x_{i-2}^0 & x_{i-1}^0 \\ x_0^1 & \cdots & x_{i-2}^1 & x_{i-1}^1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad tx = \begin{pmatrix} x_0^0 & \cdots & x_{i-2}^0 & x_{i-1}^1 \\ x_0^1 & \cdots & x_{i-2}^1 & x_{i-1}^1 \end{pmatrix}.$$

En particulier, deux i -cellules x et y sont j -composables, pour $0 \leq j < i$, si

- $x_k^\varepsilon = y_k^\varepsilon$ pour $0 \leq k < j$ et $\varepsilon = 0, 1$;
- $x_j^0 = y_j^1$.

Dans ce cas, leur composée est définie par

$$x *_j y = \begin{pmatrix} y_0^0 & \cdots & y_j^0 & x_{j+1}^0 + y_{j+1}^0 & \cdots & x_i^0 + y_i^0 \\ x_0^1 & \cdots & x_j^1 & x_{j+1}^1 + y_{j+1}^1 & \cdots & x_i^1 + y_i^1 \end{pmatrix}.$$

Enfin, l'identité d'une i -cellule x est définie par

$$1_x = \begin{pmatrix} x_0^0 & \dots & x_i^0 & 0 \\ x_0^1 & \dots & x_i^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie qu'on obtient bien ainsi une ∞ -catégorie.

De plus, si $f : K \rightarrow L$ est un morphisme de complexes dirigés augmentés, alors en posant

$$f \begin{pmatrix} x_0^0 & \dots & x_i^0 \\ x_0^1 & \dots & x_i^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1^0) & \dots & f(x_i^0) \\ f(x_1^1) & \dots & f(x_i^1) \end{pmatrix}$$

on obtient bien un ∞ -foncteur $\nu(f) : \nu(K) \rightarrow \nu(L)$.

On vérifie qu'on définit bien ainsi un foncteur $\nu : \mathcal{C}_{\text{da}} \rightarrow \infty\text{-Cat}$.

Proposition 2.2.6 (Steiner). — *Les foncteurs*

$$\lambda : \infty\text{-Cat} \rightarrow \mathcal{C}_{\text{da}} \quad \dashv \quad \nu : \mathcal{C}_{\text{da}} \rightarrow \infty\text{-Cat}$$

forment un couple de foncteurs adjoints.

Démonstration. — Voir [70, théorème 2.11]. □

Nous allons maintenant définir, selon Steiner, une classe de complexes dirigés augmentés pour laquelle cette adjonction induit une équivalence de catégories. Nous appellerons ces complexes les complexes de Steiner. La définition de ces complexes, technique, nécessite quelques préliminaires.

2.2.7. — Soit K un complexe dirigé augmenté. Pour tout $i \geq 0$, on définit une relation d'ordre sur les i -chaînes de K en posant

$$x \leq y \stackrel{\text{déf}}{\iff} y - x \in K_i^*.$$

En particulier, avec cette définition, une i -chaîne est bien positive si et seulement si elle appartient à K_i^* .

2.2.8. — Une *base* d'un complexe dirigé augmenté K est un sous-ensemble gradué $(B_i)_{i \geq 0}$ de $(K_i)_{i \geq 0}$ tel que, pour tout $i \geq 0$,

- (a) $B_i \subset K_i^*$;
- (b) B_i est une base du \mathbb{Z} -module K_i .

On vérifie immédiatement que si un ensemble B_i vérifie ces propriétés, alors les éléments de B_i sont les éléments strictement positifs minimaux de K_i pour l'ordre défini au paragraphe précédent. Ainsi, un complexe dirigé augmenté admet au plus une base. S'il en admet une, on parlera de *complexe dirigé augmenté à base*.

Exemple 2.2.9. — Si X est un ensemble simplicial, l'ensemble gradué $(X_i^{\text{nd}})_{i \geq 0}$ est une base du complexe dirigé augmenté cX .

2.2.10. — Soit K un complexe dirigé augmenté à base et soit x une i -chaîne de K . Notons $B = (B_i)$ la base (unique) de K .

Puisque B_i est une base de K_i , on a une écriture unique

$$x = \sum_{b \in B_i} x_b b$$

et on appelle *support* de x l'ensemble

$$\text{supp}(x) = \{b \in B_i \mid x_b \neq 0\}.$$

Par ailleurs, on vérifie qu'on peut écrire x de manière unique

$$x = x_+ - x_-,$$

où x_+ et x_- sont des i -chaînes positives à supports disjoints. Explicitement, on a

$$x_+ = \sum_{\substack{b \in B \\ x_b > 0}} x_b b \quad \text{et} \quad x_- = - \sum_{\substack{b \in B \\ x_b < 0}} x_b b.$$

2.2.11. — Soit K un complexe dirigé augmenté à base. Si x est une i -chaîne positive de K , on définit un tableau

$$\langle x \rangle = \begin{pmatrix} x_0^0 & \dots & x_i^0 \\ x_0^1 & \dots & x_i^1 \end{pmatrix}$$

par récurrence descendante sur k variant de i à 0 en posant

$$\begin{aligned} - x_i^\varepsilon &= x \text{ pour } \varepsilon = 0, 1; \\ - x_k^0 &= (d(x_{k+1}^0))_- \text{ et } x_k^1 = (d(x_{k+1}^1))_+ \text{ pour } 0 \leq k < i. \end{aligned}$$

Par définition, le tableau $\langle x \rangle$ est une i -cellule de la ∞ -catégorie $\nu(K)$ si et seulement si $e(x_0^0) = 1$ et $e(x_0^1) = 1$.

On dit que le complexe K est à *base unitaire* si pour tout élément x de la base de K , on a bien $e(x_0^0) = 1$ et $e(x_0^1) = 1$. Ainsi, si K est à base unitaire, tout élément x de la base de K définit une cellule $\langle x \rangle$ de $\nu(K)$. On appelle ces cellules les *atomes* de $\nu(K)$. Les atomes de $\nu(K)$ sont donc en bijection avec les éléments de la base de K .

Pour pouvoir enfin définir la notion de complexe de Steiner, nous avons besoin d'une dernière définition, sans doute la plus technique de la théorie, dont le but est d'exclure des phénomènes de boucles par l'existence d'une relation d'ordre sur la base vérifiant des propriétés de compatibilités à d_+ et d_- . Steiner définit deux variantes de cette notion :

2.2.12. — Soit K un complexe dirigé augmenté à base. Notons (B_i) sa base.

On dit que K est *sans boucle* s'il existe une relation d'ordre sur $\prod_{i \geq 0} B_i$ telle que, pour tout $i > 0$ et tout x dans B_i , pour tout k tel que $0 \leq k < i$, tout élément du support de $\langle x \rangle_k^0$ est inférieur, pour cette relation d'ordre, à tout élément du support de $\langle x \rangle_k^1$.

On dit que K est *fortement sans boucle* si la plus petite relation de préordre $\leq_{\mathbb{N}}$ sur $B = \coprod_{i \geq 0} B_i$ qui satisfasse

$$x \leq_{\mathbb{N}} y \quad \text{si} \quad \begin{cases} \text{ou} & |x| \geq 1 \text{ et } y \text{ appartient au support de } d(x)_+ \\ & |y| \geq 1 \text{ et } x \text{ appartient au support de } d(y)_- , \end{cases}$$

où $|z|$ désigne le degré d'une chaîne z , est une relation d'ordre.

Steiner démontre que tout complexe fortement sans boucle est sans boucle.

2.2.13. — On appellera *complexe de Steiner* un complexe dirigé augmenté à base unitaire sans boucle. De même, on appellera *complexe de Steiner fort* un complexe dirigé augmenté à base unitaire fortement sans boucle. On notera \mathcal{St} et \mathcal{St}_f les sous-catégories pleines de \mathcal{C}_{da} formées respectivement des complexes de Steiner et des complexes de Steiner forts. Ainsi, on a des inclusions pleines $\mathcal{St}_f \subset \mathcal{St} \subset \mathcal{C}_{\text{da}}$.

Exemple 2.2.14. — En général, si X est un ensemble simplicial, le complexe dirigé augmenté à base cX n'est ni unitaire, ni sans boucle. Steiner démontre néanmoins que $c\Delta_n$ est un complexe de Steiner fort [70, exemple 3.8]. On retrouvera ce résultat comme conséquence de notre théorie du joint (voir le paragraphe 4.1.2). On montrera par ailleurs plus généralement que cX est un complexe de Steiner fort si l'ensemble simplicial X provient d'un complexe simplicial (voir le théorème 8.1.5).

L'intérêt de la classe des complexes de Steiner provient des deux théorèmes suivants, qui affirment que travailler dans \mathcal{St} , c'est travailler dans une certaine sous-catégorie pleine de $\infty\text{-Cat}$ formée de ∞ -catégories libres au sens des polygraphes :

Théorème 2.2.15 (Steiner). — *Le foncteur*

$$\nu_{\mathcal{St}} : \mathcal{St} \rightarrow \infty\text{-Cat}$$

est pleinement fidèle et induit donc une équivalence de catégories sur son image. Ainsi, si K est un complexe de Steiner, le morphisme d'adjonction

$$\lambda(\nu(K)) \rightarrow K$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — Voir [70, théorème 5.6]. □

Théorème 2.2.16 (Steiner). — *Le foncteur*

$$\nu_{\mathcal{St}} : \mathcal{St} \rightarrow \infty\text{-Cat}$$

prend son image dans les ∞ -catégories engendrées librement au sens des polygraphes. Plus précisément, si K est un complexe de Steiner, alors $\nu(K)$ est engendrée librement au sens des polygraphes par ses atomes.

Démonstration. — Voir [70, théorème 6.1]. □

Remarque 2.2.17. — L'intérêt de la notion de complexe de Steiner fort par rapport à celle de complexe de Steiner apparaîtra au chapitre suivant : ceux-ci jouissent de meilleures propriétés de stabilité, notamment par produit tensoriel ou joint.

2.3. La catégorie Θ de Joyal

Dans cette section, nous définissons la catégorie Θ , introduite par Joyal dans [51]. Cette catégorie forme une sous-catégorie dense de la catégorie $\infty\text{-Cat}$ et joue un rôle analogue à celui que joue Δ pour Cat .

2.3.1. — Soit $l \geq 1$ et soient i_1, \dots, i_l et j_1, \dots, j_{l-1} des entiers positifs ou nuls tels que

$$i_k > j_k < i_{k+1}, \quad \text{pour } 0 < k < l.$$

À ces données, on associe le diagramme



de $\infty\text{-Cat}$, où on a noté σ et τ des itérations des ∞ -foncteurs du paragraphe 2.1.10. On appellera *somme globulaire* la limite inductive d'un tel diagramme, limite inductive qu'on notera simplement

$$D_{i_1} \amalg_{D_{j_1}} \cdots \amalg_{D_{j_{l-1}}} D_{i_l}.$$

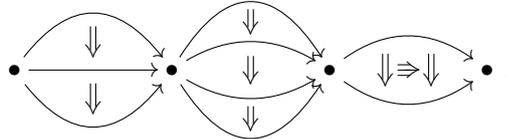
Exemples 2.3.2. — Voici quelques exemples de sommes globulaires :

$$D_1 \amalg_{D_0} D_1 \amalg_{D_0} D_1 = \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet ,$$

$$D_2 \amalg_{D_0} D_2 = \bullet \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Downarrow \\ \curvearrowleft \end{array} \bullet \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Downarrow \\ \curvearrowleft \end{array} \bullet ,$$

$$D_1 \amalg_{D_0} D_2 \amalg_{D_1} D_2 = \bullet \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Downarrow \\ \curvearrowleft \end{array} \bullet \longrightarrow \bullet ,$$

$$D_3 \amalg_{D_0} D_2 \amalg_{D_1} D_2 \amalg_{D_1} D_2 \amalg_{D_0} D_2 \amalg_{D_1} D_2 =$$



2.3.3. — Par définition, la catégorie Θ est la sous-catégorie pleine de $\infty\text{-Cat}$ dont les objets sont les sommes globulaires.

On définit de même la catégorie Θ_+ comme la sous-catégorie pleine de $\infty\text{-Cat}$ dont les objets sont les sommes globulaires, ainsi que la ∞ -catégorie vide.

Proposition 2.3.4. — *La catégorie Θ est dense dans $\infty\text{-Cat}$. Autrement dit, pour toute ∞ -catégorie C , le morphisme canonique*

$$\lim_{S \rightarrow C \in \Theta/C} S \rightarrow C$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — C'est essentiellement formel avec la définition que l'on a choisie de Θ . Avec la définition originale de Joyal, ça a été montré indépendamment par Berger [8] et Makkai et Zawadowski [59]. \square

Remarque 2.3.5. — Il en résulte que la catégorie Θ_+ est également dense dans $\infty\text{-Cat}$.

Proposition 2.3.6 (Steiner). — *Pour tout objet S de Θ , le complexe dirigé augmenté $\lambda(S)$ est un complexe de Steiner fort et le morphisme d'adjonction*

$$S \rightarrow \nu(\lambda(S))$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — Voir [71] ou [T7, proposition 4.13]. \square

2.3.7. — Soit $n \geq 0$. Par définition, la catégorie Θ_n est l'intersection des sous-catégorie pleine Θ et $n\text{-Cat}$ de $\infty\text{-Cat}$. Ainsi, les objets de Θ_n sont les sommes globulaires qui font intervenir des disques de dimension au plus n . En particulier, la catégorie Θ_0 est la catégorie ponctuelle et Θ_1 est canoniquement isomorphe à la catégorie Δ .

2.3.8. — La catégorie des *ensembles cellulaires* est la catégorie $\widehat{\Theta}$ des préfaisceaux sur Θ . De même, pour $n \geq 0$, la catégorie des *ensembles n -cellulaires* est la catégorie des préfaisceaux sur Θ_n . Ainsi, un ensemble 1-cellulaire n'est autre qu'un ensemble simplicial.

CHAPITRE 3

CONSTRUCTIONS ∞ -CATÉGORIQUES : PRODUIT DE GRAY, JOINT ET TRANCHES, COMMA

Le but de ce chapitre est de présenter quelques constructions fondamentales de la théorie des ∞ -catégories : le produit de Gray et ses adjoints, qui donnent les transformations oplax et lax ; le joint ∞ -catégorique et ses adjoints, les tranches ; la construction comma ∞ -catégorique.

La présentation que nous donnons du produit de Gray et de ses adjoints est issue de l'appendice A de la monographie [T7], écrite avec Georges Maltsiniotis. Nous nous basons sur une définition due à Steiner. La notion de joint et des tranches ∞ -catégoriques est l'objet principal de notre monographie et nous la suivons dans l'exposition de ces notions. Enfin, notre présentation de la construction comma ∞ -catégorique est essentiellement extraite de notre article [T6], également écrit avec Maltsiniotis.

3.1. Produit de Gray

Le produit de Gray est une version « lax » du produit cartésien. Il a été défini dans le cas des 2-catégories par Gray [41]. Par exemple, si le produit cartésien $\Delta_1 \times \Delta_2$ de

$$\Delta_1 = 0 \longrightarrow 1$$

et de

$$\Delta_2 = 0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2$$

est la 1-catégorie

$$\begin{array}{ccccc} (0, 0) & \longrightarrow & (0, 1) & \longrightarrow & (0, 2) \\ \downarrow & = & \downarrow & = & \downarrow \\ (1, 0) & \longrightarrow & (1, 1) & \longrightarrow & (1, 2) \end{array}$$

formée de carrés commutatifs, leur produit de Gray $\Delta_1 \otimes \Delta_2$ est la 2-catégorie

$$\begin{array}{ccccc} (0, 0) & \longrightarrow & (0, 1) & \longrightarrow & (0, 2) \\ \downarrow & \not\cong & \downarrow & \not\cong & \downarrow \\ (1, 0) & \longrightarrow & (1, 1) & \longrightarrow & (1, 2) \end{array}$$

formée de « 2-carrés ». (Il est à noter que chez Gray les 2-cellules vont dans le sens opposé.) Le produit de Gray définit une structure de catégorie monoïdale (non symétrique) sur 2-Cat .

Un des intérêts du produit de Gray est qu'il permet d'encoder de manière agréable les transformations oplax entre 2-foncteurs de A vers B comme des 2-foncteurs (stricts) de $D_1 \otimes A$ vers B . Mieux, cette structure monoïdale est biformée et son \mathbf{Hom} interne à droite $\mathbf{Hom}_{\text{oplax}}(A, B)$ est la 2-catégorie des 2-foncteurs stricts de A vers B , transformations oplax entre eux et modifications. De même, le \mathbf{Hom} interne à gauche est lié aux transformations lax.

Le produit tensoriel de Gray a été généralisé aux ∞ -catégories par Al-Agl et Steiner [1]. Crans a donné deux définitions alternatives de cette généralisation et en a mené une étude systématique [31], si bien que ce produit tensoriel est parfois appelé produit tensoriel de Crans-Gray. Dans nos travaux, nous utilisons une autre définition, également due à Steiner, basée sur sa théorie des complexes dirigés augmentés [70], dont nous avons rappelé quelques éléments dans la section 2.2. La rédaction que nous donnons ici est inspirée de l'appendice A de [T7], dans lequel nous justifions que l'approche de Steiner est correcte.

L'idée de Steiner est de définir le produit tensoriel de deux complexes dirigés augmentés, ce qui se fait de manière relativement évidente, pour ensuite l'étendre par limites inductives aux ∞ -catégories, en se servant de la densité du foncteur pleinement fidèle de la catégorie \mathcal{St}_f des complexes de Steiner forts vers $\infty\text{-Cat}$.

Commençons par définir le produit tensoriel des complexes dirigés augmentés.

3.1.1. — Soient K et L deux complexes dirigés augmentés. Steiner définit leur produit tensoriel $K \otimes L$ de la manière suivante :

- le complexe de chaînes sous-jacent est le produit tensoriel des complexes de chaînes sous-jacents :

$$(K \otimes L)_n = \bigoplus_{i+j=n} K_i \otimes L_j$$

$$d(x \otimes y) = dx \otimes y + (-1)^{|x|} x \otimes dy,$$

où $|x|$ désigne le degré de x et, par convention, la différentielle d'un élément de degré 0 est nulle ;

– l’augmentation est définie de la manière évidente :

$$\begin{aligned} K_0 \otimes L_0 &\rightarrow \mathbb{Z} \\ x \otimes y &\mapsto e(x)e(y) ; \end{aligned}$$

– le monoïde de positivité $(K \otimes L)_n^*$, pour $n \geq 0$, est défini par

$$(K \otimes L)_n^* = \bigoplus_{i+j=n} K_i^* \otimes K_j^* ,$$

c’est-à-dire comme l’ensemble des sommes de produits tensoriels de chaînes positives.

3.1.2. — Le produit tensoriel introduit au paragraphe précédent définit une structure de catégorie monoïdale sur \mathcal{C}_{da} . Cette structure n’est pas symétrique. (La symétrie du produit tensoriel des complexes $x \otimes y \mapsto (-1)^{|x||y|} y \otimes x$ ne respecte pas les monoïdes de positivité.) L’unité est le complexe $\lambda(D_0)$.

Steiner montre que cette structure se restreint à la sous-catégorie pleine des complexes de Steiner fort $\mathcal{S}t_f$ (voir [70, exemple 3.10]). Autrement dit, si K et L sont des complexes de Steiner forts, alors il en est de même de $K \otimes L$. (Notons que l’unité $\lambda(D_0)$ est bien un complexe de Steiner fort.) De plus, si B_K est une base de K et B_L est une base de L , alors $B_K \otimes B_L$ est une base de $K \otimes L$.

Théorème 3.1.3 (Steiner, Ara-Maltsiniotis). — *Il existe une unique structure de catégorie monoïdale bifermée (c’est-à-dire admettant des Hom internes) sur $\infty\text{-Cat}$, à unique isomorphisme monoïdal près, faisant du foncteur*

$$\nu|_{\mathcal{S}t_f} : \mathcal{S}t_f \rightarrow \infty\text{-Cat} ,$$

où $\mathcal{S}t_f$ est muni du produit tensoriel, un foncteur monoïdal.

Démonstration. — C’est le contenu de [70, théorème 7.3]. Néanmoins, la preuve présentée par Steiner dans ce texte n’est pas complète. Celui-ci nous a assuré savoir compléter sa preuve. Nous avons donné avec Maltsiniotis une preuve de ce résultat dans [T7] (voir le théorème A.15). Notre preuve est basée sur une stratégie due à Street [74]. On se ramène formellement, en utilisant un théorème « à la Day » [32, 33], à montrer que, pour tous complexes de Steiner forts K et L , et toute ∞ -catégorie C , il existe des ∞ -catégories $\underline{\text{Hom}}_{\text{oplax}}(\nu(L), C)$ et $\underline{\text{Hom}}_{\text{lax}}(\nu(K), C)$, et des bijections

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\infty\text{-Cat}}(\nu(K) \otimes \nu(L), C) &\simeq \text{Hom}_{\infty\text{-Cat}}(\nu(K), \underline{\text{Hom}}_{\text{oplax}}(\nu(L), C)) \\ &\simeq \text{Hom}_{\infty\text{-Cat}}(\nu(L), \underline{\text{Hom}}_{\text{lax}}(\nu(K), C)) \end{aligned}$$

naturelles en K , L et C . La construction de ces ∞ -catégories (voir [T7, proposition A.13 et paragraphe A.14]) utilise de nouveaux résultats de commutation du foncteur $\nu : \mathcal{C}_{\text{da}} \rightarrow \infty\text{-Cat}$ à certaines limites inductives de complexes de Steiner forts, que nous développons dans la section 3 de [T7] (voir en particulier [T7, théorème 3.8]). \square

3.1.4. — On appellera *produit de Gray* le produit monoïdal sur ∞ -Cat défini par le théorème précédent. On le notera \otimes .

Par définition, si K et L sont deux complexes de Steiner forts, on a

$$\nu(K) \otimes \nu(L) \simeq \nu(K \otimes L).$$

En particulier, en vertu de la proposition 2.3.6, si S et T sont dans Θ , on a

$$S \otimes T \simeq \nu(\lambda(S) \otimes \lambda(T)).$$

Le produit de Gray étant bifermé, il commute aux limites inductives en chacun de ses arguments et on en déduit par densité de la catégorie Θ dans ∞ -Cat que, si C et D sont deux ∞ -catégories, alors on a un isomorphisme canonique

$$C \otimes D \simeq \lim_{\substack{S \rightarrow C \in \Theta/C \\ T \rightarrow D \in \Theta/D}} S \otimes T.$$

Par définition, l'unité du produit de Gray est la ∞ -catégorie $\nu(\lambda(D_0))$, c'est-à-dire la ∞ -catégorie finale D_0 .

Proposition 3.1.5. — *Les foncteurs*

$$\lambda : \infty\text{-Cat} \rightarrow \mathcal{C}_{\text{da}} \quad \text{et} \quad \nu : \mathcal{C}_{\text{da}} \rightarrow \infty\text{-Cat}$$

sont monoïdal et monoïdal lax respectivement, pour le produit tensoriel.

Démonstration. — L'assertion sur ν est conséquence formelle de celle sur λ par adjonction. Quant à celle sur λ , elle résulte des formules du paragraphe précédent, de la commutation du foncteur λ aux limites inductives, du théorème de Steiner (théorème 2.2.15) et du fait que les complexes de Steiner forts sont stables par produit tensoriel. Voir [T7, proposition A.19] pour plus de détails. \square

3.1.6. — Si C est une m -catégorie et D est une n -catégorie, on montre que $C \otimes D$ est une $(m+n)$ -catégorie.

On vérifie que la $(m+n)$ -catégorie $D_m \otimes D_n$ admet une unique $(m+n)$ -cellule non triviale. On appellera cette cellule la *cellule principale* de $D_m \otimes D_n$.

Proposition 3.1.7. — *Si C et D sont des ∞ -catégories, on a des isomorphismes canoniques*

$$(C \otimes D)^{\text{op}} \simeq D^{\text{op}} \otimes C^{\text{op}}, \quad (C \otimes D)^{\text{co}} \simeq D^{\text{co}} \otimes C^{\text{co}} \quad \text{et donc} \quad (C \otimes D)^{\circ} \simeq C^{\circ} \otimes D^{\circ}.$$

Démonstration. — Voir par exemple [T7, proposition A.22]. \square

3.2. Transformations

Un des intérêts du produit de Gray est qu'il permet de manipuler de manière agréable les transformations oplax et lax, ainsi que leurs analogues supérieurs. Dans cette section, nous allons définir les transformations oplax et lax en termes du produit de Gray, et nous allons expliquer le lien avec la définition plus concrète de Métayer, lien que nous avons établi dans l'appendice B de [T7]. Nous allons par ailleurs montrer comment le foncteur ν de Steiner permet d'associer à une homotopie de complexes dirigés augmentés une transformation oplax, selon nos résultats de [T7, section B.4]. Cette construction sera notre principal outil pour produire des transformations oplax, chose que nous serons très souvent amené à faire.

3.2.1. — En vertu du théorème 3.1.3, le produit de Gray est bifermé. Cela signifie précisément qu'il existe des foncteurs

$$\underline{\mathbf{Hom}}_{\text{oplax}}, \underline{\mathbf{Hom}}_{\text{lax}} : \infty\text{-Cat}^\circ \times \infty\text{-Cat} \rightarrow \infty\text{-Cat}$$

et des bijections

$$\mathbf{Hom}_{\infty\text{-Cat}}(A, \underline{\mathbf{Hom}}_{\text{oplax}}(B, C)) \simeq \mathbf{Hom}_{\infty\text{-Cat}}(A \otimes B, C) \simeq \mathbf{Hom}_{\infty\text{-Cat}}(B, \underline{\mathbf{Hom}}_{\text{lax}}(A, C))$$

naturelles en A , B et C dans $\infty\text{-Cat}$.

Si C et D sont deux ∞ -catégories, par adjonction, les i -cellules de $\underline{\mathbf{Hom}}_{\text{oplax}}(C, D)$ correspondent aux ∞ -foncteurs $D_i \otimes C \rightarrow D$. En particulier, puisque D_0 est l'unité du produit de Gray, les objets correspondent aux ∞ -foncteurs $C \rightarrow D$. Les 1-cellules, qui correspondent aux ∞ -foncteurs $D_1 \otimes C \rightarrow D$, sont appelées *transformations oplax*. Plus précisément, si $u, v : C \rightarrow D$ sont deux ∞ -foncteurs de C vers D , une *transformation oplax* α de u vers v est une 1-cellule de $\underline{\mathbf{Hom}}_{\text{oplax}}(C, D)$ de source u et de but v . On écrira alors parfois $\alpha : u \Rightarrow v$. Explicitement, une telle transformation correspond à un ∞ -foncteur $h : D_1 \otimes C \rightarrow D$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} C & & D \\ \{0\} \otimes C \downarrow & \searrow u & \\ D_1 \otimes C & \xrightarrow{h} & D \\ \{1\} \otimes C \uparrow & \nearrow v & \\ C & & \end{array}$$

Plus généralement, pour $i \geq 1$, on appelle *i -transformations oplax* les i -cellules de $\underline{\mathbf{Hom}}_{\text{oplax}}(C, D)$.

De même, les objets de $\underline{\mathbf{Hom}}_{\text{lax}}(C, D)$ s'identifient aux ∞ -foncteurs de C vers D et on obtient une notion de *i -transformation lax* en remplaçant $\underline{\mathbf{Hom}}_{\text{oplax}}$ par $\underline{\mathbf{Hom}}_{\text{lax}}$. En particulier, les *transformations lax*, c'est-à-dire les 1-transformations lax, s'identifient aux ∞ -foncteurs $C \otimes D_1 \rightarrow D$.

3.2.2. — Soient C et D deux ∞ -catégories. La structure de ∞ -catégorie sur $\underline{\text{Hom}}_{\text{oplax}}(C, D)$ et la functorialité en C et D de cette ∞ -catégorie fournissent des opérations sur les transformations oplax.

Ainsi, si $u : C \rightarrow D$ est un ∞ -foncteur, on dispose d'une transformation oplax identité $1_u : u \Rightarrow u$.

Si $\alpha : u \Rightarrow v$ est une transformation oplax entre ∞ -foncteurs de C vers D et si $s : B \rightarrow C$ est un ∞ -foncteur, on dispose d'une transformation oplax $\alpha * s : us \Rightarrow vs$. De même, si $t : D \rightarrow E$ est un ∞ -foncteur, on a une transformation oplax $t * \alpha : tu \Rightarrow tv$.

Enfin, si $\beta : v \Rightarrow w$ est une seconde transformation oplax entre ∞ -foncteurs de C vers D , on dispose d'une transformation oplax $\beta\alpha : u \Rightarrow w$.

Évidemment, toutes ces opérations admettent des analogues pour les transformations lax.

3.2.3. — Soient $u, v : C \rightarrow D$ deux ∞ -foncteurs et soit $\alpha : u \Rightarrow v$ une transformation oplax donnée par un ∞ -foncteur $h : D_1 \otimes C \rightarrow D$. À toute i -cellule x de C , on associe une $(i + 1)$ -cellule α_x de D en composant les ∞ -foncteurs

$$D_{i+1} \longrightarrow D_1 \otimes D_i \xrightarrow{D_1 \otimes x} D_1 \otimes C \xrightarrow{h} D \quad ,$$

où le ∞ -foncteur de gauche correspond à la cellule principale de $D_1 \otimes D_i$.

On peut montrer que la donnée de la correspondance $x \mapsto \alpha_x$, où x varie parmi les cellules de C , détermine complètement α . Mieux, on peut définir les transformations oplax en termes de ces α_x :

Proposition 3.2.4 (Ara-Maltsiniotis). — *Soient $u, v : C \rightarrow D$ deux ∞ -foncteurs. La donnée d'une transformation oplax de u vers v correspond à la donnée, pour tout $i \geq 0$ et toute i -cellule x de C , d'une $(i + 1)$ -cellule*

$$\alpha_x : \alpha_{t_{i-1}(x)} *_{i-1} \cdots *_{i-1} \alpha_{t_0(x)} *_{i-1} u(x) \longrightarrow v(x) *_{i-1} \alpha_{s_0(x)} *_{i-1} \cdots *_{i-1} \alpha_{s_{i-1}(x)}$$

de D satisfaisant aux axiomes suivants :

– pour tout $i \geq 0$ et toute i -cellule x de C , on a

$$\alpha_{1_x} = 1_{\alpha_x} ;$$

– pour tous $i > j \geq 0$ et tout couple x, y de i -cellules j -composables de C , on a

$$\begin{aligned} \alpha_{x *_{j+1} y} &= (v(t_{j+1}(x)) *_{i-1} \alpha_{s_0(y)} *_{i-1} \cdots *_{i-1} \alpha_{s_{j-1}(y)} *_{i-1} \alpha_y) \\ &\quad *_{i-1} (\alpha_x *_{j+1} \alpha_{t_{j-1}(x)} *_{i-1} \cdots *_{i-1} \alpha_{t_0(x)} *_{i-1} u(s_{j+1}(y))) . \end{aligned}$$

Démonstration. — Voir [T7, corollaire B.2.6]. □

Remarque 3.2.5. — Si α est une transformation oplax comme dans l'énoncé de la proposition, alors, si x est un objet de C , on dispose d'une 1-cellule

$$\begin{array}{c} u(x) \\ \downarrow \alpha_x \\ v(x) \end{array}$$

de D ; si x est une 1-cellule de C , on dispose d'une 2-cellule

$$\begin{array}{ccc} u(s_0(x)) & \xrightarrow{u(x)} & u(t_0(x)) \\ \alpha_{s_0(x)} \downarrow & \swarrow \alpha_x & \downarrow \alpha_{t_0(x)} \\ v(s_0(x)) & \xrightarrow{v(x)} & v(t_0(x)) \end{array}$$

de D ; si x est une 2-cellule de C , on dispose d'une 3-cellule

$$\begin{array}{ccc} u(s_0(x)) & \xrightarrow{u(s_1(x))} & u(t_0(x)) \\ \alpha_{s_0(x)} \downarrow & \begin{array}{c} \xrightarrow{u(x)} \\ \downarrow \alpha_x \\ \xrightarrow{u(t_1(x))} \end{array} & \downarrow \alpha_{t_0(x)} \\ v(s_0(x)) & \xrightarrow{v(s_1(x))} & v(t_0(x)) \\ & \begin{array}{c} \downarrow v(x) \\ \xrightarrow{v(t_1(x))} \end{array} & \end{array}$$

de D de source $\alpha_{t_1(x)} *_1 (\alpha_{t_0(x)} *_0 u(x))$ et de but $(v(x) *_0 \alpha_{s_0(x)}) *_1 \alpha_{s_1(x)}$; etc.

Remarque 3.2.6. — Les formules ci-dessus apparaissent déjà dans le travail de Métayer [62] mais sans lien avec le produit de Gray.

Proposition 3.2.7. — Si C et D sont des ∞ -catégories, on a des isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{Hom}}_{\text{oplax}}(C, D)^{\text{op}} &\simeq \underline{\mathbf{Hom}}_{\text{lax}}(C^{\text{op}}, D^{\text{op}}), \\ \underline{\mathbf{Hom}}_{\text{oplax}}(C, D)^{\text{co}} &\simeq \underline{\mathbf{Hom}}_{\text{lax}}(C^{\text{co}}, D^{\text{co}}), \\ \underline{\mathbf{Hom}}_{\text{oplax}}(C, D)^{\circ} &\simeq \underline{\mathbf{Hom}}_{\text{oplax}}(C^{\circ}, D^{\circ}). \end{aligned}$$

En particulier, si $u, v : C \rightarrow D$ sont deux ∞ -foncteurs, les données

$$u \xrightarrow[\circ]{\Rightarrow} v, \quad v^{\text{op}} \xrightarrow[\text{I}]{\Rightarrow} u^{\text{op}}, \quad u^{\text{co}} \xrightarrow[\text{I}]{\Rightarrow} v^{\text{co}}, \quad v^{\circ} \xrightarrow[\circ]{\Rightarrow} u^{\circ},$$

où $\xrightarrow[\circ]{\Rightarrow}$ désigne une transformation oplax et $\xrightarrow[\text{I}]{\Rightarrow}$ une transformation lax, sont équivalentes.

Démonstration. — Voir par exemple [T7, proposition A.23]. □

Notre principal outil pour produire des transformations oplax sera la théorie de Steiner. En effet, nous allons voir que les homotopies entre complexes dirigés augmentés induisent des transformations oplax entre les ∞ -catégories associées.

3.2.8. — Soient $f, g : K \rightarrow L$ deux morphismes de complexes dirigés augmentés. Une *homotopie* h de f vers g est un morphisme des complexes dirigés augmentés

$$h : \lambda(D_1) \otimes K \rightarrow L$$

rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} K & & \\ \{0\} \otimes K \downarrow & \searrow u & \\ \lambda(D_1) \otimes K & \xrightarrow{h} & L \\ \{1\} \otimes K \uparrow & \nearrow v & \\ K & & \end{array} .$$

Explicitement, se donner une telle homotopie revient à se donner une homotopie des complexes de chaînes sous-jacents respectant les monoïdes de positivité, c'est-à-dire des morphismes de groupes abéliens

$$h_i : K_i \rightarrow L_{i+1} ,$$

pour $i \geq 0$, satisfaisant aux conditions suivantes :

– pour tout $i \geq 0$, on a

$$d_{i+1}h_i + h_{i-1}d_i = g_i - f_i ,$$

en convenant que $h_{-1} = 0$ et $d_0 = 0$ (en particulier, pour $i = 0$, on a $d_1h_0 = g_0 - f_0$);

– pour tout $i \geq 0$, on a

$$h_i(K_i^*) \subset L_{i+1}^* .$$

De même, une *antihomotopie* k de f vers g est un morphisme

$$k : K \otimes \lambda(D_1) \rightarrow L$$

rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} K & & \\ K \otimes \{0\} \downarrow & \searrow u & \\ K \otimes \lambda(D_1) & \xrightarrow{k} & L \\ K \otimes \{1\} \uparrow & \nearrow v & \\ K & & \end{array} ,$$

ce qui correspond à la donnée de morphismes de groupes abéliens

$$k_i : K_i \rightarrow L_{i+1},$$

pour $i \geq 0$, satisfaisant aux conditions suivantes :

- pour tout $i \geq 0$, on a

$$d_{i+1}k_i - k_{i-1}d_i = (-1)^i(g_i - f_i),$$

en convenant toujours que $k_{-1} = 0$ et $d_0 = 0$ (en particulier, pour $i = 0$, on a $d_1k_0 = g_0 - f_0$);

- pour tout $i \geq 0$, on a

$$k_i(K_i^*) \subset L_{i+1}^*.$$

Proposition 3.2.9. — *Soient $f, g : K \rightarrow L$ deux morphismes de complexes dirigés augmentés.*

- (a) *Si h est une homotopie de f vers g , alors*

$$D_1 \otimes \nu(K) \xrightarrow{m} \nu(\lambda(D_1) \otimes K) \xrightarrow{\nu(h)} \nu(L) \quad ,$$

où m est la contrainte de monoïdalité de ν , est une transformation oplax de $\nu(f)$ vers $\nu(g)$.

- (b) *Si k est une antihomotopie de f vers g , alors*

$$\nu(K) \otimes D_1 \xrightarrow{m} \nu(K \otimes \lambda(D_1)) \xrightarrow{\nu(p)} \nu(L) \quad ,$$

où m est toujours la contrainte de monoïdalité de ν , est une transformation lax de $\nu(f)$ vers $\nu(g)$.

Démonstration. — C'est immédiat. □

Remarque 3.2.10. — Steiner a montré que la structure de catégorie monoïdale définie par le produit tensoriel sur les complexes dirigés augmentés est bifermée. Les 1-chaînes du \mathbf{Hom} interne à droite (resp. à gauche) sont exactement les homotopies (resp. les antihomotopies). Plus généralement, les i -chaînes, pour $i \geq 1$, sont appelées i -homotopies (resp. i -antihomotopies) et on peut montrer qu'une i -homotopie (resp. une i -antihomotopie) induit une i -transformation oplax (resp. une i -transformation lax). On renvoie notamment à [T7, section B.4] pour plus de détails sur cette question.

3.3. Joint

Dans cette section, nous donnons un résumé de la théorie du joint ∞ -catégorique, sujet de notre monographie [T7], que nous avons introduit, avec Maltsiniotis, dans le but d'étudier les tranches ∞ -catégoriques, apparaissant notamment dans les théorèmes A et B de Quillen.

Commençons par rappeler la théorie du joint et des tranches dans la cadre catégorique usuel.

3.3.1. — Si C est une catégorie et c est un objet de C , on dispose de deux catégories tranches : la *tranche au-dessus* C/c , dont les objets sont les couples $(d, f : d \rightarrow c)$, et la *tranche au-dessous* $c \backslash C$, dont les objets sont les couples $(d, f : c \rightarrow d)$. Dans les deux cas, les morphismes sont les morphismes de C faisant commuter le triangle évident.

Ces tranches ont une description explicite simple. Néanmoins, comme l'a observé Joyal dans son travail sur les quasi-catégories [52], afin de généraliser les tranches à des dimensions supérieures, il est utile de les penser en termes d'une autre opération : le joint.

3.3.2. — Si C et D sont deux catégories, on définit une catégorie $C \star^c D$, qu'on appelle leur *joint catégorique*, de la manière suivante :

– on pose

$$\text{Ob}(C \star^c D) = \text{Ob}(C) \amalg \text{Ob}(D) ;$$

– si x et y sont deux objets de $C \star^c D$, on pose

$$\text{Hom}_{C \star^c D}(x, y) = \begin{cases} \text{Hom}_C(x, y) & \text{si } x \text{ et } y \text{ sont dans } \text{Ob}(C), \\ \text{Hom}_D(x, y) & \text{si } x \text{ et } y \text{ sont dans } \text{Ob}(D), \\ \{*\} & \text{si } x \text{ est dans } \text{Ob}(C) \text{ et } y \text{ dans } \text{Ob}(D), \\ \emptyset & \text{si } x \text{ est dans } \text{Ob}(D) \text{ et } y \text{ dans } \text{Ob}(C); \end{cases}$$

– la composition et les identités sont définies de la manière évidente.

Par exemple, lorsque D est la catégorie finale D_0 , la catégorie $C \star^c D_0$ est la catégorie obtenue à partir de C en ajoutant librement un objet final. On en déduit par récurrence que $\Delta_m \star^c \Delta_n \simeq \Delta_{m+n}$ pour $m, n \geq 0$.

3.3.3. — Le joint catégorique définit une structure de catégorie monoïdale (non symétrique) sur \mathcal{Cat} d'unité la catégorie vide \emptyset . Cette structure n'est pas bifermée. En effet, si A est une catégorie, le foncteur

$$\begin{aligned} \mathcal{Cat} &\rightarrow \mathcal{Cat} \\ B &\mapsto A \star B \end{aligned}$$

envoie l'objet initial \emptyset de \mathcal{Cat} sur $A \star \emptyset \simeq A$ et n'admet donc pas d'adjoint à droite si A est non vide. Néanmoins, le foncteur

$$\begin{aligned} \mathcal{Cat} &\rightarrow A \backslash \mathcal{Cat} \\ B &\mapsto (A \star B, A \xrightarrow{\iota_1} A \star B), \end{aligned}$$

où ι_1 désigne l'inclusion canonique, admet lui un adjoint à droite. On obtient donc un foncteur

$$\begin{aligned} A \backslash \mathcal{C}at &\rightarrow \mathcal{C}at \\ (C, A \xrightarrow{u} C) &\mapsto u \backslash C \end{aligned}$$

et une bijection naturelle

$$\mathrm{Hom}_{A \backslash \mathcal{C}at}((A \star^c B, \iota_1), (C, u)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}at}(B, u \backslash C).$$

Par adjonction, les objets de $u \backslash C$ correspondent aux foncteurs $A \star^c D_0 \rightarrow C$ faisant commuter le triangle

$$\begin{array}{ccc} A \star^c D_0 & \longrightarrow & C \\ \iota_1 \uparrow & \searrow u & \\ A & & \end{array},$$

c'est-à-dire aux cônes inductifs sur u . On vérifie de même que les morphismes sont les morphismes de cônes inductifs en un sens évident. Lorsque $A = D_0$, le foncteur $u : A \rightarrow C$ correspond à un objet c de C et la catégorie $u \backslash C$ s'identifie à la tranche au-dessous $c \backslash C$. Ainsi, dans le cas général, la catégorie $u \backslash C$ est une tranche au-dessous en un sens généralisé.

De même, si on fixe la catégorie B , le foncteur

$$\begin{aligned} \mathcal{C}at &\rightarrow B \backslash \mathcal{C}at \\ A &\mapsto (A \star B, B \xrightarrow{\iota_2} A \star B), \end{aligned}$$

où ι_2 désigne l'inclusion canonique, admet un adjoint à droite et on obtient donc un foncteur

$$\begin{aligned} B \backslash \mathcal{C}at &\rightarrow \mathcal{C}at \\ (C, B \xrightarrow{v} C) &\mapsto C/v \end{aligned}$$

et une bijection naturelle

$$\mathrm{Hom}_{B \backslash \mathcal{C}at}((A \star^c B, \iota_2), (C, v)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}at}(A, C/v).$$

Remarque 3.3.4. — Soit \mathcal{C} une catégorie monoïdale de produit monoïdal \otimes dont l'unité est l'objet initial \emptyset de \mathcal{C} . Si X et Y sont deux objets de \mathcal{C} , on définit des morphismes

$$X \xrightarrow{\iota_1} X \otimes Y \xleftarrow{\iota_2} Y$$

en composant

$$X \simeq X \otimes \emptyset \xrightarrow{X \otimes \emptyset_Y} X \otimes Y \xleftarrow{\emptyset_X \otimes Y} \emptyset \otimes Y \simeq Y,$$

où, si Z est un objet, \emptyset_Z désigne l'unique morphisme $\emptyset \rightarrow Z$. On peut ainsi définir des foncteurs

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &\rightarrow X \backslash \mathcal{C} & \mathcal{C} &\rightarrow Y \backslash \mathcal{C} \\ Y &\mapsto (X \otimes Y, X \xrightarrow{\iota_1} X \otimes Y) & \text{et} & X \mapsto (X \otimes Y, Y \xrightarrow{\iota_2} X \otimes Y), \end{aligned}$$

où on a fixé l'objet X pour le premier foncteur et l'objet Y pour le second. On dit que la structure de catégorie monoïdale est *localement bifermée* si ces foncteurs admettent des adjoints à droite. (On renvoie à [T7, section 5] pour plus de détails sur cette notion que nous avons introduite avec Maltsiniotis.) Ainsi, le paragraphe précédent affirme que le joint catégorique définit une structure de catégorie monoïdale localement bifermée.

Notre but est maintenant de généraliser les constructions du joint et des tranches au cadre ∞ -catégorique. Nous commençons par définir le joint, les tranches s'en déduisant par adjonction. Pour construire le joint, nous procédons comme pour le produit de Gray : nous le définissons pour les complexes dirigés augmentés, puis nous l'étendons par densité aux ∞ -catégories.

3.3.5. — Soient K et L deux complexes dirigés augmentés. On définit leur *joint* $K \star L$ de la manière suivante :

- pour tout $n \geq 0$, on pose

$$(K \star L)_n = \bigoplus_{\substack{i+1+j=n, \\ i \geq -1, j \geq -1}} K_i \otimes L_j,$$

où par convention $K_{-1} = \mathbb{Z}$ et $L_{-1} = \mathbb{Z}$ de sorte qu'on a

$$(K \star L)_0 = K_0 \otimes \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \otimes L_0 \simeq K_0 \oplus L_0 ;$$

si x est dans K_i et y est dans L_j , on notera $x \star y$ l'élément correspondant de $(K \star L)_{i+1+j}$; par ailleurs, on notera \emptyset le générateur positif de \mathbb{Z} de sorte que si x est dans K_0 et y est dans L_0 , on a des éléments $x \star \emptyset$ et $\emptyset \star y$ dans $(K \star L)_0$;

- si x est dans K_i et y est dans L_j , avec $i \geq -1$, $j \geq -1$ et $i + 1 + j \geq 0$, on pose

$$d(x \star y) = dx \star y + (-1)^{i+1} x \star dy,$$

où, par convention, si z est de degré 0, alors $dz = e(z)\emptyset$, et $d(\emptyset) = 0$;

- l'augmentation est définie par

$$e(x \star \emptyset) = e(x) \quad \text{et} \quad e(\emptyset \star y) = e(y)$$

pour x dans K_0 et y dans L_0 ;

- le monoïde de positivité $(K \star L)_n^*$, pour $n \geq 0$, est défini par

$$(K \star L)_n^* = \bigoplus_{\substack{i+1+j=n, \\ i \geq -1, j \geq -1}} K_i^* \otimes L_j^*.$$

On vérifie qu'on obtient bien ainsi un complexe dirigé augmenté.

Remarque 3.3.6. — On peut définir le joint $K \star L$ de manière plus conceptuelle en fonction du produit tensoriel comme

$$K \star L = \Sigma^{-1}(\Sigma K \otimes \Sigma L),$$

où Σ est une opération de suspension. On renvoie le lecteur à [T7, paragraphe 6.5] pour une telle définition.

3.3.7. — On vérifie que le joint définit une structure de catégorie monoïdale (non symétrique) sur \mathcal{C}_{da} . L'unité est $\lambda(\emptyset)$, unique complexe dirigé augmenté de complexe sous-jacent le complexe nul. Notons que ce complexe est de Steiner fort.

Proposition 3.3.8 (Ara-Maltsiniotis). — *Si K est un complexe de Steiner fort de base B_K et L est un complexe de Steiner fort de base B_L , alors $K \star L$ est un complexe de Steiner fort de base*

$$B_K \star B_L = \{x \star \emptyset \mid x \in B_K\} \cup \{x \star y \mid x \in B_K, y \in B_L\} \cup \{\emptyset \star y \mid y \in B_L\}.$$

En particulier, le joint induit une structure de catégorie monoïdale sur St_f .

Démonstration. — Voir [T7, corollaire 6.21]. □

Théorème 3.3.9 (Ara-Maltsiniotis). — *Il existe une unique structure de catégorie monoïdale localement bifermée (voir la remarque 3.3.4) sur $\infty\text{-Cat}$, à unique isomorphisme monoïdal près, faisant du foncteur*

$$\nu|_{\text{St}_f} : \text{St}_f \rightarrow \infty\text{-Cat},$$

où St_f est muni du joint, un foncteur monoïdal.

Démonstration. — C'est [T7, théorème 6.29]. Pour démontrer ce résultat, on procède ainsi. On généralise un résultat classique de Day des catégories monoïdales bifermées aux catégories monoïdales localement bifermées [T7, théorème 5.13]. En utilisant ce résultat, on se ramène à montrer que, si K et L sont des complexes de Steiner forts et C une ∞ -catégorie, alors pour tout ∞ -foncteur $u : \nu(K) \rightarrow C$, il existe une ∞ -catégorie $u \setminus C$ et une bijection

$$\text{Hom}_{\nu(K) \setminus \infty\text{-Cat}}((\nu(K \star L), \nu(\iota_1)), (C, u)) \simeq \text{Hom}_{\infty\text{-Cat}}(\nu(L), u \setminus C),$$

naturelle en L et u , et, pour tout ∞ -foncteur $v : \nu(L) \rightarrow C$, il existe une ∞ -catégorie $C \overset{\text{co}}{\int} v$ et une bijection

$$\text{Hom}_{\nu(L) \setminus \infty\text{-Cat}}((\nu(K \star L), \nu(\iota_2)), (C, v)) \simeq \text{Hom}_{\infty\text{-Cat}}(\nu(K), C \overset{\text{co}}{\int} v),$$

naturelle en K et v . Pour produire les ∞ -catégories $u \setminus C$ et $C \overset{\text{co}}{\int} v$ (voir [T7, proposition 6.27 et remarque 6.28]), on utilise un nouveau résultat de commutation du foncteur $\nu : \mathcal{C}_{\text{da}} \rightarrow \infty\text{-Cat}$ à certaines limites inductives de complexes de Steiner forts [T7, théorème 3.8]. □

3.3.10. — On appellera *joint* le produit monoïdal sur $\infty\text{-Cat}$ défini par le théorème précédent et on le notera \star .

Par définition, si K et L sont deux complexes de Steiner forts, on a

$$\nu(K) \star \nu(L) \simeq \nu(K \star L).$$

En particulier, si S et T sont dans Θ_+ , on a

$$S \star T \simeq \nu(\lambda(S) \star \lambda(T)).$$

Le joint étant localement bifermé, il commute aux limites inductives connexes en chacun de ses arguments et on en déduit par densité de la catégorie Θ_+ dans $\infty\text{-Cat}$ que, si C et D sont deux ∞ -catégories, alors on a un isomorphisme canonique

$$C \star D \simeq \varinjlim_{\substack{S \rightarrow C \in \Theta_+/C \\ T \rightarrow D \in \Theta_+/D}} S \star T.$$

(La raison pour laquelle on utilise la catégorie Θ_+ plutôt que la catégorie Θ est que les limites inductives canoniques associées à Θ_+ sont connexes, autrement dit, que si C est une ∞ -catégorie, alors la catégorie Θ_+/C est connexe.)

Par définition, l'unité du joint est la ∞ -catégorie $\nu\lambda(\emptyset)$, c'est-à-dire la ∞ -catégorie vide \emptyset .

Si C et D sont deux ∞ -catégories, on notera

$$C \xrightarrow{l_1} C \star D \xleftarrow{l_2} D$$

les ∞ -foncteurs obtenus en composant

$$C \simeq C \star \emptyset \xrightarrow{C \star \emptyset_D} C \star D \xleftarrow{\emptyset_C \star D} \emptyset \star D \simeq D.$$

La proposition suivante permet de se faire une intuition géométrique de ce qu'est le joint de deux ∞ -catégories :

Proposition 3.3.11. — *Soient C et D deux ∞ -catégories. Alors $C \star D$ est canoniquement isomorphe à*

$$C \amalg_{C \otimes \{0\} \otimes D} (C \otimes D_1 \otimes D) \amalg_{C \otimes \{1\} \otimes D} D,$$

limite inductive du diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & C \otimes D_1 \otimes D & & \\ & \swarrow & & \nwarrow & \\ C & & & & D \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & C \otimes \{0\} \otimes D & & C \otimes \{1\} \otimes D \end{array},$$

où les ∞ -foncteurs de but C et D sont les « projections », et ceux de but $C \otimes D_1 \otimes D$ les inclusions.

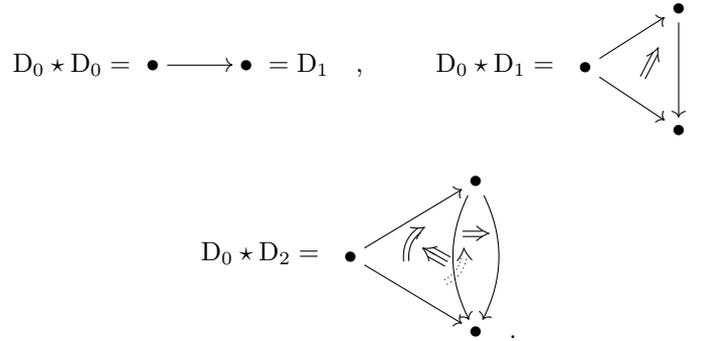
Démonstration. — Ce résultat ne se trouve pas dans la littérature. Il se démontre par un argument standard : par des propriétés de densité et de commutation aux limites inductives connexes, on se ramène au cas où A et B proviennent de complexes de Steiner forts ; ce cas se traite alors par un calcul explicite dans les complexes dirigés augmentés et en utilisant des propriétés de commutation du foncteur $\nu : \mathcal{C}_{\text{da}} \rightarrow \infty\text{-Cat}$ à certaines sommes amalgamées établies dans la section 3 de [T7]. \square

Corollaire 3.3.12. — Soit C une ∞ -catégorie. Alors $D_0 \star C$ est canoniquement isomorphe à

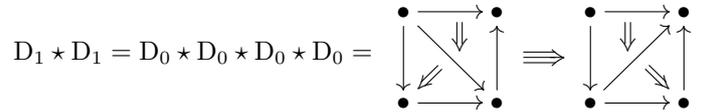
$$D_0 \amalg_{\{0\} \otimes C} D_1 \otimes C .$$

Démonstration. — C'est un cas particulier de la proposition précédente. Voir également [T7, corollaire B.5.6] pour une preuve indépendante de cette proposition. \square

Exemples 3.3.13. — Le corollaire précédent justifie l'intuition suivante : si C est une ∞ -catégorie, la ∞ -catégorie $D_0 \star C$ est obtenue à partir de C en ajoutant un objet initial en un sens oplax. Par exemple, on a



On verra qu'en itérant cette construction, on obtient les orientaux de Street. Par exemple, on a



Proposition 3.3.14. — Si C et D sont des ∞ -catégories, on a un isomorphisme canonique

$$(C \star D)^{\text{op}} \simeq D^{\text{op}} \star C^{\text{op}} .$$

Démonstration. — Voir [T7, proposition 6.35]. \square

Remarque 3.3.15. — On ne dispose d'un isomorphisme analogue pour aucune des autres dualités non triviales de ∞ -Cat. En particulier, on n'a pas $(C \star D)^{\text{co}} \simeq D^{\text{co}} \star C^{\text{co}}$.

3.4. Tranches

Dans cette section, on introduit les tranches ∞ -catégoriques en termes d'adjoints à droite relatifs au joint. Une des subtilités de cette théorie dans le cadre ∞ -catégorique est l'existence de variantes des tranches induites par les dualités. On se concentre ensuite sur le cas des tranches au-dessous d'un objet, cas dans lequel on donne une description concrète.

3.4.1. — Le fait que le joint ∞ -catégorique soit localement bifermé signifie exactement que les foncteurs

$$\begin{array}{ccc} \infty\text{-Cat} \rightarrow A \backslash \infty\text{-Cat} & & \infty\text{-Cat} \rightarrow B \backslash \infty\text{-Cat} \\ B \mapsto (A \star B, A \xrightarrow{\iota_1} A \star B) & \text{et} & A \mapsto (A \star B, B \xrightarrow{\iota_2} A \star B), \end{array}$$

où on a fixé une ∞ -catégorie A pour le premier foncteur et une ∞ -catégorie B pour le second, admettent des adjoints à droite. On obtient donc des couples de foncteurs adjoints

$$\begin{array}{ccc} \infty\text{-Cat} \rightarrow A \backslash \infty\text{-Cat} & \dashv & A \backslash \infty\text{-Cat} \rightarrow \infty\text{-Cat} \\ B \mapsto (A \star B, \iota_1) & & (C, A \xrightarrow{u} C) \mapsto u \backslash C \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} \infty\text{-Cat} \rightarrow B \backslash \infty\text{-Cat}, & \dashv & B \backslash \infty\text{-Cat} \rightarrow \infty\text{-Cat} \\ A \mapsto (A \star B, \iota_2) & & (C, B \xrightarrow{v} C) \mapsto C / v^{\text{co}}. \end{array}$$

Ainsi, si C est une ∞ -catégorie et $u : A \rightarrow C$ et $v : B \rightarrow C$ sont des ∞ -foncteurs, on a des bijections naturelles

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{A \backslash \infty\text{-Cat}}((A \star B, \iota_1), (C, u)) &\simeq \text{Hom}_{\infty\text{-Cat}}(B, u \backslash C), \\ \text{Hom}_{B \backslash \infty\text{-Cat}}((A \star B, \iota_2), (C, v)) &\simeq \text{Hom}_{\infty\text{-Cat}}(A, C / v^{\text{co}}). \end{aligned}$$

On appelle $u \backslash C$ la *tranche de C au-dessous de u* . La *tranche de C au-dessus de v* est la ∞ -catégorie

$$C / v = (v \circ \backslash C^\circ)^\circ.$$

De même, on notera

$$u^{\text{co}} \backslash C = (C^\circ / u^\circ)^\circ.$$

On a des bijections naturelles

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{B \backslash \infty\text{-Cat}}(((B^\circ \star A^\circ)^\circ, \iota_2'), (C, v)) &\simeq \text{Hom}_{\infty\text{-Cat}}(A, C / v), \\ \text{Hom}_{A \backslash \infty\text{-Cat}}(((B^\circ \star A^\circ)^\circ, \iota_1'), (C, u)) &\simeq \text{Hom}_{\infty\text{-Cat}}(B, u^{\text{co}} \backslash C), \end{aligned}$$

où ι_1' et ι_2' sont les ∞ -foncteurs évidents.

Remarque 3.4.2. — On verra (voir la remarque 5.3.6) que les ∞ -catégories $u \backslash C$ et C / v admettent respectivement un objet initial et un objet final en un sens oplax.

Ainsi, moralement, ce sont des tranches oplax. Au contraire, les ∞ -catégories $u^{\text{co}} \backslash C$ et C / v^{co} admettent respectivement un objet initial et un objet final en un sens lax. Ce sont donc moralement des tranches lax.

3.4.3. — Soient C une ∞ -catégorie et $u : A \rightarrow C$ un ∞ -foncteur. Par adjonction, les i -cellules de $u \backslash C$ correspondent aux ∞ -foncteurs

$$A \star D_i \rightarrow C$$

faisant commuter le triangle

$$\begin{array}{ccc} A \star D_i & \longrightarrow & C \\ \uparrow \iota_1 & \nearrow u & \\ A & & \end{array} .$$

En particulier, les objets correspondent à des ∞ -foncteurs

$$A \star D_0 \rightarrow C$$

faisant commuter le triangle

$$\begin{array}{ccc} A \star D_0 & \longrightarrow & C \\ \uparrow \iota_1 & \nearrow u & \\ A & & \end{array} .$$

On peut penser à ces objets comme à des cônes inductifs sur u . De même, on peut penser aux objets de C/u comme à des cônes projectifs sur u .

Proposition 3.4.4. — *Si C est une ∞ -catégorie et $u : A \rightarrow C$ est un ∞ -foncteur, on a des isomorphismes canoniques*

$$\begin{aligned} (u \setminus C)^{\text{op}} &\simeq C^{\text{op}} / u^{\text{op}}, \\ (u \setminus C)^{\text{co}} &\simeq u^{\text{co}} \setminus C^{\text{co}}, \\ (u \setminus C)^\circ &\simeq C^\circ / u^\circ. \end{aligned}$$

Démonstration. — Voir [T7, proposition 6.36 et paragraphe 6.37]. \square

Nous allons maintenant décrire explicitement les tranches au-dessous d'un objet.

3.4.5. — Soient C une ∞ -catégorie et c un objet de C . On peut considérer c comme un ∞ -foncteur $D_0 \rightarrow C$ et on obtient donc des tranches

$$c \setminus C, \quad C/c, \quad C / c, \quad c^{\text{co}} \setminus C.$$

Proposition 3.4.6. — *Soient C une ∞ -catégorie et c un objet de C . Pour $i \geq 0$, les i -cellules de $c \setminus C$ sont en bijection canonique avec l'ensemble des couples (d, α) , où d est une i -cellule de C et α est une famille de cellules α_k^ε de C , pour $0 \leq k \leq i$ et $\varepsilon = 0, 1$, avec $\alpha_i^0 = \alpha_i^1$,*

$$\alpha_0^\varepsilon : c \rightarrow d_0^\varepsilon, \quad 1\text{-cellule},$$

$$\alpha_k^\varepsilon : \alpha_{k-1}^1 \rightarrow d_k^\varepsilon *_0 \alpha_0^0 *_1 \cdots *_{k-1} \alpha_{k-1}^0, \quad (k+1)\text{-cellule}, \quad \text{pour } 0 < k \leq i,$$

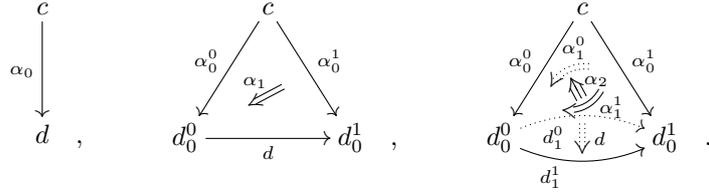
où on a posé

$$d_k^\varepsilon = \begin{cases} s_k(d) & \text{si } \varepsilon = 0, \\ t_k(d) & \text{si } \varepsilon = 1. \end{cases}$$

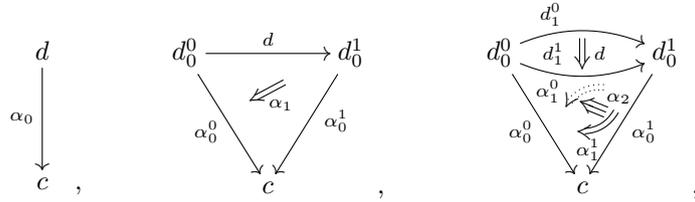
Démonstration. — Cela résulte de la description explicite du joint $D_0 \star D_i$ qu'on obtient par la théorie de Steiner, voir [T7, proposition 9.6]. \square

Remarque 3.4.7. — On peut décrire les opérations de la ∞ -catégorie $c \setminus C$ en termes de la description des cellules de la proposition précédente. Voir [T7, proposition 9.15].

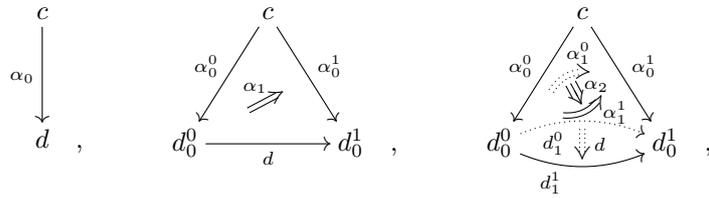
Remarque 3.4.8. — Voici une représentation graphique des i -cellules de $c \setminus C$, pour $i = 0, 1, 2$:



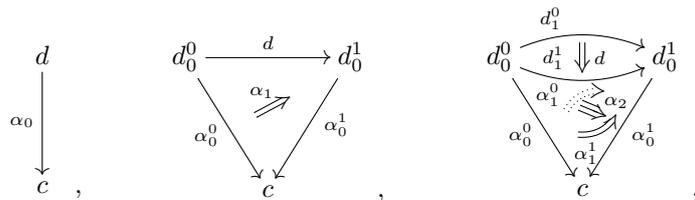
On en déduit par dualité une représentation graphique de ces mêmes cellules pour C/c ,



pour $c^{\text{co}} \setminus C$,



et pour C^{co}/c ,



Remarque 3.4.9. — En particulier, si C est une 1-catégorie, les tranches ∞ -catégoriques coïncident avec les tranches catégoriques usuelles (dans ce cas, on a $c \setminus C = c^{\text{co}} \setminus C$ et $C/c = C^{\text{co}}/c$). De plus, lorsque C est une 2-catégorie, on retrouve les tranches 2-catégoriques déjà étudiées dans la littérature, notamment par Cegarra [17] et Chiche [21].

Les théorèmes *A* et *B* de Quillen, déjà dans leur version 1-catégorique, font intervenir des tranches relatives :

3.4.10. — Fixons $u : A \rightarrow B$ un ∞ -foncteur. Pour tout ∞ -foncteur $b : T \rightarrow B$, on définit la *tranche* $b \setminus A$ relative à u au-dessous de b par le produit fibré

$$b \setminus A = b \setminus B \times_B A,$$

les deux ∞ -foncteurs apparaissant dans le produit fibré étant le ∞ -foncteur d'oubli $b \setminus B \rightarrow B$ et u . On définit de même les tranches A/b , $b^{\text{co}} \setminus A$ et A/b^{co} .

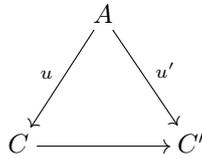
3.5. Functorialités des tranches et ∞ -catégories de Gray

Les tranches ∞ -catégoriques vérifient des propriétés de functorialité subtiles qui s'expriment en termes de ∞ -catégories de Gray. L'appendice C de notre monographie [T7] énonce de très générales conjectures de functorialité. Une grande partie de cette monographie est consacrée à la démonstration de cas particuliers de ces conjectures, cas particuliers qui interviennent dans une de nos preuves de la version ∞ -catégorique du théorème A de Quillen.

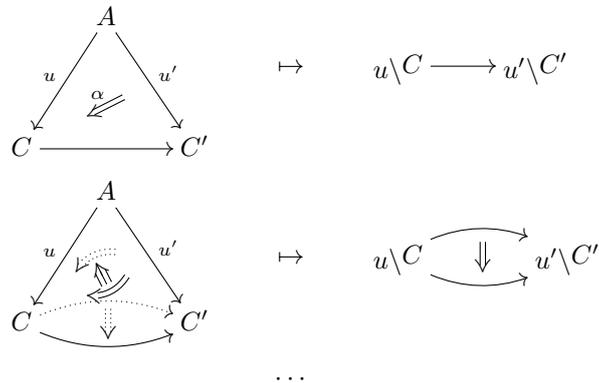
3.5.1. — Fixons A une ∞ -catégorie. Par définition, la construction tranche donne lieu à un foncteur

$$\begin{aligned} A \setminus \infty\text{-Cat} &\rightarrow \infty\text{-Cat} \\ (C, A \xrightarrow{u} C) &\mapsto u \setminus C. \end{aligned}$$

Cela signifie que pour tout triangle commutatif



de $\infty\text{-Cat}$, on dispose d'un ∞ -foncteur $u \setminus C \rightarrow u' \setminus C'$. Dans [T7, appendice C], on conjecture que cette functorialité s'étend en des functorialités



où les 2-cellules sont des transformations lax et la 3-cellule une 2-transformation lax.

Nous allons préciser ces conjectures de functorialité en introduisant le vocabulaire des ∞ -catégories de Gray.

3.5.2. — Nous appelons *∞ -catégorie de Gray* une ∞ -catégorie enrichie dans $\infty\text{-Cat}$ munie du produit de Gray. Pour des raisons formelles, les ∞ -catégories, ∞ -foncteurs, transformations oplax, 2-transformations oplax, etc. forment naturellement une ∞ -catégorie de Gray qu'on notera $\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}$. Si A et B sont deux ∞ -catégories, on a

$$\underline{\text{Hom}}_{\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}}(A, B) = \underline{\text{Hom}}_{\text{oplax}}(A, B).$$

Les ∞ -catégories, ∞ -foncteurs, transformations lax, 2-transformations lax, etc. ne forment pas une ∞ -catégorie de Gray mais une *∞ -catégorie de Gray gauche* $\infty\text{-Cat}_{\text{lax}}$, c'est-à-dire une ∞ -catégorie enrichie dans $\infty\text{-Cat}$ munie du produit de Gray transposé $(A, B) \mapsto B \otimes A$.

On appelle *∞ -foncteur de Gray* et *∞ -foncteur de Gray gauche* les foncteurs enrichis correspondants.

Si \mathbb{C} est une ∞ -catégorie de Gray, on obtient une ∞ -catégorie de Gray gauche \mathbb{C}° (et réciproquement) en « inversant les sens des flèches » et en particulier en posant

$$\underline{\text{Hom}}_{\mathbb{C}^\circ}(x, y) = \underline{\text{Hom}}_{\mathbb{C}}(y, x).$$

Nous pouvons maintenant formuler notre première conjecture de functorialité :

Conjecture 3.5.3 ([T7, conjecture C.27.(e)]). — *Soit A une ∞ -catégorie. Le foncteur*

$$\begin{aligned} A \backslash \infty\text{-Cat} &\rightarrow \infty\text{-Cat} \\ (C, A \xrightarrow{u} C) &\mapsto u \backslash C \end{aligned}$$

s'étend en un ∞ -foncteur de Gray gauche

$$A \backslash \infty\text{-Cat}_{\text{lax}} \rightarrow \infty\text{-Cat}_{\text{lax}},$$

où $A \backslash \infty\text{-Cat}_{\text{lax}}$ est une ∞ -catégorie de Gray gauche tranche dont on conjecture l'existence.

3.5.4. — La conjecture précédente traite de la functorialité en C de l'opération tranche $(C, A \xrightarrow{u} C) \mapsto u \backslash C$. Cette construction est également functorielle en A . En effet, on montre, en utilisant la propriété universelle des tranches, que si

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad} & A' \\ & \searrow u & \swarrow u' \\ & & C \end{array}$$

est un triangle commutatif de $\infty\text{-Cat}$, alors on dispose d'un ∞ -foncteur canonique $u'\backslash C \rightarrow u\backslash C$, et on obtient ainsi un foncteur

$$\begin{aligned} (\infty\text{-Cat}/C)^\circ &\rightarrow \infty\text{-Cat} \\ (A, A \xrightarrow{u} C) &\mapsto u\backslash C. \end{aligned}$$

Dans [T7, appendice C], on conjecture que cette fonctorialité s'étend en des fonctorialités

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad} & A' \\ & \searrow u & \swarrow u' \\ & C & \end{array} & \mapsto & u'\backslash C \longrightarrow u\backslash C \\ \\ \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad} & A' \\ \downarrow & \searrow u & \swarrow u' \\ & C & \end{array} & \mapsto & u'\backslash C \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \uparrow \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} u\backslash C \\ \\ \dots & & \end{array}$$

où les 2-cellules à gauche du signe \mapsto sont des transformations lax, la 3-cellule est une 2-transformation lax et la 2-cellule à droite du signe \mapsto est une transformation oplax.

Plus précisément :

Conjecture 3.5.5 ([T7, conjecture C.27.(f)]). — Soit C une ∞ -catégorie. Le foncteur

$$\begin{aligned} (\infty\text{-Cat}/C)^\circ &\rightarrow \infty\text{-Cat} \\ (A, A \xrightarrow{u} C) &\mapsto u\backslash C \end{aligned}$$

s'étend en un ∞ -foncteur de Gray

$$(\infty\text{-Cat}_{\text{lax}}^{\text{co}}/C)^\circ \rightarrow \infty\text{-Cat}_{\text{oplax}},$$

où $\infty\text{-Cat}_{\text{lax}}^{\text{co}}/C$ est une ∞ -catégorie de Gray gauche tranche dont on conjecture l'existence.

3.5.6. — Dans [T7, chapitre 11], nous démontrons, avec Maltsiniotis, quelques cas particuliers de ces fonctorialités en basse dimension sous des hypothèses techniques faisant intervenir la notion de complexe de Steiner fort, ainsi que celle d'inclusion rigide ordonnée que nous n'avons pas exposée dans ce texte.

Ces résultats partiels suffisent à obtenir l'application qui a motivé nos conjectures générales et qui est un des points clés de notre preuve ∞ -catégorique du théorème A, application que nous énonçons ici en utilisant des notations et des termes qui seront introduits plus loin : la structure de rétracte par transformation lax sur $0 : D_0 \rightarrow \mathcal{O}_n$

induit, pour toute ∞ -catégorie C et tout ∞ -foncteur $c : \mathcal{O}_n \rightarrow C$, une structure de rétracte par transformation oplax sur la section canonique du ∞ -foncteur $c \setminus C \rightarrow c_0 \setminus C$ (voir la preuve du théorème 6.1.1).

3.6. Construction comma

Dans cette section, nous introduisons la théorie de la construction comma ∞ -catégorique, telle que nous l'avons développée avec Maltsiniotis dans la section 6 de [T6]. Cette construction, qui généralise la construction catégorique standard et la construction 2-catégorique de Gray, a été définie dans le but de démontrer que le théorème A ∞ -catégorique pour les triangles strictement commutatifs entraîne un énoncé analogue pour les triangles commutant à une transformation près.

Commençons par rappeler la situation catégorique usuelle.

3.6.1. — Si

$$A \xrightarrow{u} C \xleftarrow{v} B$$

est un diagramme de foncteurs, on rappelle qu'on définit la *catégorie comma* $u \downarrow v$ de la manière suivante : les objets de $u \downarrow v$ sont les triplets (a, k, b) , où a est un objet de A , b un objet de B et $k : ua \rightarrow vb$ un morphisme de C , les morphismes étant définis de la manière évidente. On dispose d'un « 2-carré »

$$\begin{array}{ccc} & u \downarrow v & \\ p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\ A & \xrightarrow{\kappa} & B \\ u \searrow & & \swarrow v \\ & C & \end{array},$$

où p_1 et p_2 sont les projections et κ est la transformation naturelle $(a, k, b) \mapsto k$. Ce 2-carré est universel en un sens évident et caractérise la catégorie comma $u \downarrow v$.

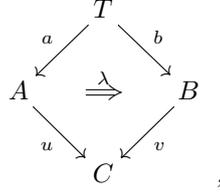
Proposition 3.6.2. — *Soit*

$$A \xrightarrow{u} C \xleftarrow{v} B$$

un diagramme de ∞ -foncteurs. Il existe une unique ∞ -catégorie $u \downarrow v$, à unique isomorphisme près, munie d'un 2-carré

$$\begin{array}{ccc} & u \downarrow v & \\ p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\ A & \xrightarrow{\kappa} & B \\ u \searrow & & \swarrow v \\ & C & \end{array},$$

où κ est une transformation oplax, qui soit universel au sens où, pour toute ∞ -catégorie T munie d'un 2-carré



il existe un unique ∞ -foncteur $(a, \lambda, b) : T \rightarrow u \downarrow v$ factorisant ce 2-carré (c'est-à-dire tel que $p_1(a, \lambda, b) = a$, $p_2(a, \lambda, b) = b$ et $\kappa * (a, \lambda, b) = \lambda$).

Démonstration. — L'unicité est immédiate. Pour l'existence, on pose

$$u \downarrow v = A \times_C \underline{\mathbf{Hom}}_{\text{lax}}(D_1, C) \times_C B ,$$

limite projective du diagramme

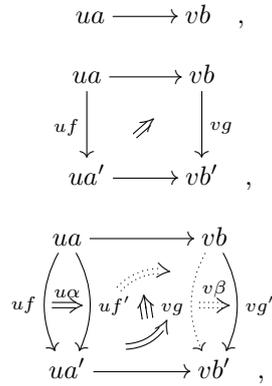
$$A \xrightarrow{u} C \xleftarrow{\pi_0} \underline{\mathbf{Hom}}_{\text{lax}}(D_1, C) \xrightarrow{\pi_1} C \xleftarrow{v} B ,$$

où $\pi_0 = \underline{\mathbf{Hom}}_{\text{lax}}(\sigma, C)$ et $\pi_1 = \underline{\mathbf{Hom}}_{\text{lax}}(\tau, C)$. On vérifie alors facilement la propriété universelle. \square

3.6.3. — Si $A \xrightarrow{u} C \xleftarrow{v} B$ sont deux ∞ -foncteurs, on appellera ∞ -catégorie comma associée à u et v la ∞ -catégorie $u \downarrow v$ de la proposition précédente. Comme on l'a vu dans la démonstration de cette proposition, on a

$$u \downarrow v = A \times_C \underline{\mathbf{Hom}}_{\text{lax}}(D_1, C) \times_C B .$$

Une i -cellule de $u \downarrow v$ est donc donnée par une i -cellule x de A , une i -cellule y de B et un « i -cylindre » de ua vers vb . Pour $i = 0, 1, 2$, on peut représenter ce i -cylindre de la manière suivante :



où suivant la dimension on a noté a, f ou α la cellule x , et b, g ou β la cellule y .

3.6.4. — La ∞ -catégorie comma que l'on vient de définir est une comma *oplax*. En remplaçant la transformation oplax par une transformation lax dans l'énoncé de la proposition 3.6.2, on obtient une autre ∞ -catégorie : la *∞ -catégorie comma lax* $u \downarrow' v$ associée à u et v . Explicitement, on a

$$u \downarrow' v = A \times_C \underline{\mathbf{Hom}}_{\text{oplax}}(D_1, C) \times_C B.$$

Proposition 3.6.5. — Soit $A \xrightarrow{u} C \xleftarrow{v} B$ des ∞ -foncteurs. On a des isomorphismes canoniques naturels

$$(u \downarrow v)^{\text{op}} \simeq v^{\text{op}} \downarrow' u^{\text{op}}, \quad (u \downarrow v)^{\text{co}} \simeq u^{\text{co}} \downarrow' v^{\text{co}}, \quad (u \downarrow v)^{\circ} \simeq v^{\circ} \downarrow' u^{\circ}.$$

Démonstration. — Cela résulte immédiatement de l'effet des dualités sur les transformations (proposition 3.2.7). \square

Les ∞ -catégories comma généralisent les tranches relatives au-dessus ou au-dessous d'un objet :

Proposition 3.6.6. — Soit $u : A \rightarrow B$ un ∞ -foncteur et soit b un objet de B . On a des isomorphismes canoniques

$$b \setminus A \simeq b \downarrow u, \quad A / b \simeq u \downarrow b, \quad b \setminus^{\text{co}} A \simeq b \downarrow' u, \quad A / b \simeq u \downarrow' b.$$

Démonstration. — Cela résulte du corollaire 3.3.12. Pour plus de détails, voir [T6, proposition 7.1]. \square

Plus généralement, les ∞ -catégories comma généralisent les tranches généralisées relatives :

Proposition 3.6.7. — Soient $u : A \rightarrow B$ et $b : T \rightarrow B$ des ∞ -foncteurs. Alors la tranche $b \setminus A$ est canoniquement isomorphe à la ∞ -catégorie comma associée au diagramme

$$D_0 \xrightarrow{b} \underline{\mathbf{Hom}}_{\text{lax}}(T, B) \xleftarrow{\iota u} A,$$

où $\iota : B \rightarrow \underline{\mathbf{Hom}}_{\text{lax}}(T, B)$ est le ∞ -foncteur induit par $T \rightarrow D_0$ (et l'isomorphisme $B \simeq \underline{\mathbf{Hom}}_{\text{lax}}(D_0, B)$).

Démonstration. — Ce résultat ne se trouve pas dans la littérature. On se ramène immédiatement au cas non relatif, c'est-à-dire où $A = B$ et u est l'identité. Dans ce cas, on montre que la ∞ -catégorie comma vérifie la propriété universelle de la tranche en utilisant la description du joint donnée par la proposition 3.3.11. \square

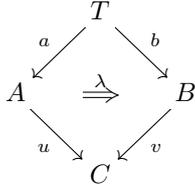
3.6.8. — La construction comma est fonctorielle au sens suivant. Si

$$\begin{array}{ccccc} A & & & & B \\ & \searrow u & & \swarrow v & \\ & & C & & \\ & \nearrow u' & & \nwarrow v' & \\ A' & & & & B' \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \alpha \nearrow \\ \\ \beta \searrow \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ f \downarrow \\ \\ g \downarrow \\ \end{array}$$

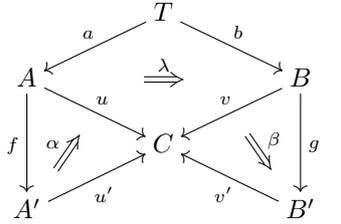
est un diagramme dans $\infty\text{-Cat}$, où les 2-cellules sont des transformations oplax, alors on obtient un ∞ -foncteur

$$(f, \alpha) \downarrow (\beta, g) : u \downarrow v \rightarrow u' \downarrow v'.$$

Ce ∞ -foncteur se définit par le lemme Yoneda en associant à un diagramme



le diagramme composé



On notera plus simplement $(f, \alpha) \downarrow B$ ou $A \downarrow (\beta, g)$, si un des deux 2-triangles en jeu est trivial (au sens où f et α , ou g et β , sont des identités).

Proposition 3.6.9. — *La correspondance*

$$\begin{array}{ccc}
 A \xrightarrow{u} C \xleftarrow{v} B & \mapsto & u \downarrow v \\
 \begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{u} & C \\
 f \downarrow & \nearrow \alpha & \nearrow \\
 A' & \xrightarrow{u'} & C
 \end{array}
 & \mapsto & (f, \alpha) \downarrow (\beta, g) : u \downarrow v \rightarrow u' \downarrow v'
 \end{array}$$

définit un foncteur à valeurs dans $\infty\text{-Cat}$.

Démonstration. — Cela résulte de calculs simples (il faut bien sûr commencer par définir la catégorie source), voir [T6, proposition 6.8]. \square

Voici notre principal résultat sur la construction comma (dans une forme imprécise) :

Théorème 3.6.10. — *La correspondance précédente s'étend en un sesquifoncteur de but la catégorie $\infty\text{-Cat}$ munie des transformations oplax.*

Démonstration. — On renvoie à [T6, théorème B.2.6] pour un énoncé précis et sa démonstration. \square

Une des raisons pour lesquelles nous avons introduit les ∞ -catégories comma est qu'elles permettent de définir une factorisation de type *mapping space* pour les ∞ -foncteurs :

Proposition 3.6.11. — *Tout ∞ -foncteur $u : A \rightarrow B$ se factorise en*

$$A \xrightarrow{j} B \downarrow u \xrightarrow{p_1} B \quad ,$$

où j désigne le ∞ -foncteur induit par le diagramme de carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ j \downarrow \lrcorner & & \downarrow \iota \\ B \downarrow u & \longrightarrow & \mathbf{Hom}_{\text{laX}}(D_1, B) \\ p_2 \downarrow \lrcorner & & \downarrow \pi_1 \\ A & \xrightarrow{u} & B \quad . \end{array}$$

Démonstration. — C'est immédiat, voir [T2, paragraphe 2.16]. □

Remarque 3.6.12. — On verra plus loin (proposition 5.3.10) que le ∞ -foncteur j de l'énoncé précédent est en un certain sens un rétracte par déformation ∞ -catégorique.

Remarque 3.6.13. — On dispose de trois autres factorisations analogues utilisant respectivement $u \downarrow B$, $B \downarrow' u$ et $u \downarrow' B$.

CHAPITRE 4

NERFS ∞ -CATÉGORIQUES

Nous avons défini la notion d'équivalence de Thomason dans $\mathcal{C}at$ à partir du foncteur nerf. Ainsi, pour définir une notion d'équivalence de Thomason entre n -catégories, on a besoin d'un foncteur nerf de source $n\text{-}\mathcal{C}at$. Or il existe de multiples tels foncteurs, et notamment le nerf de Street, le nerf cellulaire et le nerf multisimplicial. Ces foncteurs nerf définissent trois notions d'équivalence faible sur $n\text{-}\mathcal{C}at$ qui pourraient *a priori* être différentes.

Le but de ce chapitre est de présenter nos résultats de comparaison de nerfs établis avec Maltsiniotis dans l'article [T8]. On y démontre que les trois foncteurs nerf mentionnés ci-dessus sont équivalents en un sens adéquat et, en particulier, qu'ils définissent une unique notion d'équivalence de Thomason, qu'on étudiera dans le prochain chapitre.

4.1. Nerf de Street

Le but de cette section est de définir le nerf de Street $N : \infty\text{-}\mathcal{C}at \rightarrow \widehat{\Delta}$, introduit par Street dans [72]. C'est le nerf le plus délicat à définir parmi les trois nerfs que nous considérerons. Sa définition est basée sur les « orientaux », l'oriental \mathcal{O}_n étant une n -catégorie qui est en un certain sens engendrée librement par les faces du n -simplexe standard. Dans cette section, nous allons définir les orientaux en utilisant le joint et donner quelques-unes de leurs propriétés en utilisant la théorie de Steiner.

4.1.1. — L'objet D_0 étant un objet final de la catégorie $\infty\text{-}\mathcal{C}at$, il est muni d'une unique structure de monoïde dans la catégorie monoïdale $\infty\text{-}\mathcal{C}at$ munie du joint ∞ -catégorique. Ainsi, en vertu de la propriété universelle de la catégorie Δ_+ (c'est-à-dire du fait que Δ_+ , munie du produit monoïdal $(\Delta_m, \Delta_n) \mapsto \Delta_m \star^c \Delta_n = \Delta_{m+1+n}$ et du monoïde donné par l'objet final Δ_0 , est la catégorie monoïdale universelle munie d'un monoïde), il existe un unique foncteur monoïdal

$$\mathcal{O}_+ : \Delta_+ \rightarrow \infty\text{-}\mathcal{C}at$$

qui envoie Δ_0 sur D_0 . Pour $n \geq -1$, on notera

$$\mathcal{O}_n = \mathcal{O}_+(\Delta_n).$$

C'est le n -ième *oriental* de Street. Explicitement, on a

$$\mathcal{O}_n = D_0 \star \cdots \star D_0,$$

où D_0 apparaît $n + 1$ fois. En particulier, $\mathcal{O}_{-1} = \emptyset$. On notera

$$\mathcal{O} : \mathbf{\Delta} \rightarrow \infty\text{-Cat}$$

la restriction de \mathcal{O}_+ à $\mathbf{\Delta}$. C'est l'*objet cosimplicial de Street*.

Nous allons maintenant décrire plus concrètement les orientaux en utilisant la théorie de Steiner.

4.1.2. — Puisqu'on a $D_0 \simeq \nu(\lambda(D_0))$ et que $\lambda(D_0)$ est un complexe de Steiner fort, on a

$$\mathcal{O}_n \simeq \nu(\lambda(D_0) \star \cdots \star \lambda(D_0)).$$

Or, il est facile de décrire explicitement le complexe dirigé augmenté $\lambda(D_0) \star \cdots \star \lambda(D_0)$:

– une base du \mathbb{Z} -module des k -chaînes est donnée par l'ensemble

$$B_k = \{(i_0, \dots, i_k) \mid 0 \leq i_0 < \cdots < i_k \leq n\};$$

– si $k \geq 1$, la différentielle est donnée sur les éléments de la base par

$$d(i_0, \dots, i_k) = \sum_{l=0}^k (-1)^l (i_0, \dots, \widehat{i}_l, \dots, i_k),$$

où $(i_0, \dots, \widehat{i}_l, \dots, i_k) = (i_0, \dots, i_{l-1}, i_{l+1}, \dots, i_k)$;

– l'augmentation est donnée sur la base par

$$e(i_0) = 1;$$

– les monoïdes de positivité sont les monoïdes engendrés librement par les B_k .

Ainsi, ce complexe dirigé augmenté $\lambda(D_0) \star \cdots \star \lambda(D_0)$ est canoniquement isomorphe au complexe $c\Delta_n$ de l'exemple 2.2.2. On a donc

$$\mathcal{O}_n \simeq \nu c(\Delta_n).$$

Notons que puisque $c(\Delta_n)$ s'obtient comme un joint itéré du complexe de Steiner fort $\lambda(D_0)$, il est également de Steiner fort.

Ainsi, en vertu des résultats de Steiner, la ∞ -catégorie \mathcal{O}_n est la n -catégorie librement engendrée au sens des polygraphes par les

$$\langle (i_0, \dots, i_k) \rangle, \quad 0 \leq i_0 < \cdots < i_k \leq n.$$

Voici une représentation graphique des premiers orientaux :

$$\mathcal{O}_0 = D_0 = \{0\}, \quad \mathcal{O}_1 = D_1 = 0 \longrightarrow 1, \quad \mathcal{O}_2 = \begin{array}{ccc} & & 2 \\ & \nearrow & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & 1 \end{array},$$

$$\mathcal{O}_3 = \begin{array}{ccccc} & 0 & \longrightarrow & 3 & \\ & \downarrow & \searrow & \downarrow & \uparrow \\ & 1 & \longrightarrow & 2 & \\ & \downarrow & \swarrow & \downarrow & \uparrow \\ & 0 & \longrightarrow & 3 & \\ & \downarrow & \searrow & \downarrow & \uparrow \\ & 1 & \longrightarrow & 2 & \end{array} \implies \begin{array}{ccccc} & 0 & \longrightarrow & 3 & \\ & \downarrow & \searrow & \downarrow & \uparrow \\ & 1 & \longrightarrow & 2 & \\ & \downarrow & \swarrow & \downarrow & \uparrow \\ & 0 & \longrightarrow & 3 & \\ & \downarrow & \searrow & \downarrow & \uparrow \\ & 1 & \longrightarrow & 2 & \end{array}.$$

4.1.3. — Il résulte de la description de l'oriental \mathcal{O}_n donnée au paragraphe précédent que son 1-tronqué bête est la catégorie dont les objets sont les entiers $0, \dots, n$ et dont les morphismes sont engendrés librement par des morphismes $\langle i, j \rangle : i \rightarrow j$, pour $0 \leq i < j \leq n$. De plus, pour tous $0 \leq i < j < k \leq n$, le triangle associé est commutatif à une 2-cellule $\langle i, j, k \rangle$ près. Ainsi, le 1-tronqué intelligent de \mathcal{O}_n est

$$\tau_1^i(\mathcal{O}_n) = \Delta_n.$$

On renvoie au paragraphe 8.1.7 pour une description des 2-cellules de \mathcal{O}_n et de ces 3-cellules génératrices.

4.1.4. — L'objet cosimplicial de Street $\mathcal{O} : \Delta \rightarrow \infty\text{-Cat}$ induit un couple de foncteurs adjoints

$$c_\infty : \widehat{\Delta} \rightarrow \infty\text{-Cat} \quad \dashv \quad N : \infty\text{-Cat} \rightarrow \widehat{\Delta}.$$

L'adjoint à droite

$$N : \infty\text{-Cat} \rightarrow \widehat{\Delta}$$

s'appelle le *nerf de Street*. Explicitement, si C est une ∞ -catégorie et $n \geq 0$, on a

$$(NC)_n = \text{Hom}_{\infty\text{-cat}}(\mathcal{O}_n, C).$$

Ainsi, un n -simplexe de NC est un diagramme de la forme du n -ième oriental dans C . En particulier, pour $0 \leq n \leq 3$, on a

$$(NC)_0 = C_0 = \{c_0\}, \quad (NC)_1 = C_1 = \left\{ c_0 \xrightarrow{c_{01}} c_1 \right\},$$

$$(NC)_2 = \left\{ \begin{array}{ccc} & & c_2 \\ & \nearrow^{c_{02}} & \uparrow^{c_{12}} \\ c_0 & \xrightarrow{c_{012}} & c_1 \\ & \searrow_{c_{01}} & \end{array} \right\},$$

$$(NC)_3 = \left\{ \begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} C_0 & \xrightarrow{c_{03}} & C_3 \\ \downarrow c_{01} & \searrow & \downarrow c_{023} \\ C_1 & \xrightarrow{c_{12}} & C_2 \end{array} & \xRightarrow{c_{0123}} & \begin{array}{ccc} C_0 & \xrightarrow{c_{03}} & C_3 \\ \downarrow c_{01} & \searrow & \downarrow c_{023} \\ C_1 & \xrightarrow{c_{12}} & C_2 \end{array} \end{array} \right\}.$$

4.1.5. — Soit $n \geq 0$. En composant le nerf de Street avec le foncteur d'inclusion $n\text{-Cat} \hookrightarrow \infty\text{-Cat}$, on obtient un foncteur

$$N_n : n\text{-Cat} \rightarrow \widehat{\Delta},$$

qu'on appellera le *nerf de Street n -catégorique*. Par adjonction, ce foncteur nerf est induit par l'objet cosimplicial

$$\Delta \xrightarrow{\mathcal{O}} \infty\text{-Cat} \xrightarrow{\tau_n^i} n\text{-Cat}.$$

Ainsi, en vertu du paragraphe 4.1.3, le foncteur N_1 n'est autre que le nerf usuel, ce qui justifie de noter N le nerf de Street.

4.2. Nerf cellulaire

Dans cette section, nous définissons le nerf cellulaire $N_\Theta : \infty\text{-Cat} \rightarrow \widehat{\Theta}$, introduit par Batanin et Street [7] et étudié notamment par Berger [8].

4.2.1. — Le foncteur d'inclusion $\Theta \hookrightarrow \infty\text{-Cat}$ induit une adjonction

$$c_\Theta : \widehat{\Theta} \rightarrow \infty\text{-Cat} \dashv N_\Theta : \infty\text{-Cat} \rightarrow \widehat{\Theta}.$$

L'adjoint à droite

$$N_\Theta : \infty\text{-Cat} \rightarrow \widehat{\Theta}$$

s'appelle le *nerf cellulaire*. Explicitement, si C est une ∞ -catégorie et S est un objet de Θ , on a

$$(N_\Theta C)_S = \text{Hom}_{\infty\text{-Cat}}(S, C).$$

Ainsi, un élément de $(N_\Theta C)_S$ est un diagramme globulaire de la forme S dans C . Par exemple, si

$$S = \begin{array}{ccc} & \curvearrowright & \\ & \Downarrow & \\ \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\ & \Downarrow & \\ & \curvearrowleft & \end{array} \longrightarrow \bullet,$$

on a

$$(N_\Theta C)_S = \left\{ \begin{array}{ccc} & \curvearrowright & \\ & \Downarrow \alpha & \\ c & \xrightarrow{g} & d \\ & \Downarrow \beta & \\ & \curvearrowleft & \end{array} \xrightarrow{i} e \right\}.$$

Proposition 4.2.2. — *Le nerf cellulaire $N_\Theta : \infty\text{-Cat} \rightarrow \widehat{\Theta}$ est pleinement fidèle.*

Démonstration. — C'est une reformulation de la proposition 2.3.4. \square

4.2.3. — De même, pour tout $n \geq 0$, le foncteur d'inclusion $\Theta_n \hookrightarrow n\text{-Cat}$ induit un foncteur *nerf n -cellulaire*

$$N_{\Theta_n} : n\text{-Cat} \rightarrow \widehat{\Theta}_n$$

qui est également pleinement fidèle. Il est immédiat que si C est une n -catégorie, alors on a

$$N_{\Theta_n}(C) = \iota^* N_\Theta(C),$$

où $\iota^* : \widehat{\Theta} \rightarrow \widehat{\Theta}_n$ désigne le foncteur de restriction de long de l'inclusion $\iota : \Theta_n \hookrightarrow \Theta$.

4.3. Nerf multisimplicial

Dans cette section, nous introduisons le nerf n -simplicial $N_{\Delta^n} : n\text{-Cat} \rightarrow \widehat{\Delta^n}$, où n est fini. Celui-ci peut se déduire du nerf cellulaire par l'intermédiaire d'un foncteur canonique $\Delta^n \rightarrow \Theta_n$.

Fixons un entier $n \geq 0$.

4.3.1. — Rappelons qu'un *ensemble n -simplicial* est un préfaisceau sur la catégorie Δ^n . On parlera parfois d'*ensemble multisimplicial* pour ne pas avoir à expliciter la valeur de n . On notera $\delta : \Delta \rightarrow \Delta^n$ le foncteur diagonal. Celui-ci induit par précomposition un foncteur

$$\delta^* : \widehat{\Delta^n} \rightarrow \widehat{\Delta}$$

des ensembles n -simpliciaux vers les ensembles simpliciaux. On appellera *équivalence faible diagonale n -simpliciale* un morphisme d'ensembles n -simpliciaux f tel que $\delta^* f$ soit une équivalence faible simpliciale.

4.3.2. — On définit un foncteur $m_n : \Delta^n \rightarrow \Theta_n$ par récurrence sur $n \geq 0$ de la manière suivante :

- si $n = 0$, ce foncteur est l'identité ;
- si $n > 0$, on pose

$$m_n(\Delta_{k_1}, \dots, \Delta_{k_n}) = \begin{cases} D_0 & \text{si } k_1 = 0, \\ S & \text{si } k_1 = 1, \\ S \amalg_{D_0} \dots \amalg_{D_0} S & \text{si } k_1 \geq 2, \end{cases}$$

où

$$S = \Sigma(m_{n-1}(\Delta_{k_2}, \dots, \Delta_{k_n})),$$

4.4.1. — Soit \mathcal{M} une catégorie (on pourra penser à $\mathcal{M} = n\text{-Cat}$), et soient $i : A \rightarrow \mathcal{M}$ et $j : B \rightarrow \mathcal{M}$ deux foncteurs de source des petites catégories A et B . Considérons les deux foncteurs « nerf » associés :

$$\begin{aligned} N_i : \mathcal{M} &\rightarrow \widehat{A} & N_j : \mathcal{M} &\rightarrow \widehat{B} \\ X &\mapsto (a \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{M}}(i(a), X)), & X &\mapsto (b \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{M}}(j(b), X)). \end{aligned}$$

Que signifie comparer ces foncteurs nerf ?

Rappelons (voir la remarque 1.1.9) que si C est une petite catégorie, on dispose du foncteur catégorie des éléments

$$\begin{aligned} i_C : \widehat{C} &\rightarrow \text{Cat} \\ F &\mapsto C/F, \end{aligned}$$

et qu'en le composant avec le foncteur de localisation $p : \text{Cat} \rightarrow \text{Hot}$, on obtient donc un foncteur

$$k_C : \widehat{C} \rightarrow \text{Hot}$$

associant à tout préfaisceau sur C un type d'homotopie.

Comparer les foncteurs nerf N_i et N_j , c'est montrer que les foncteurs composés

$$\mathcal{M} \xrightarrow{N_i} \widehat{A} \xrightarrow{k_A} \text{Hot} \quad \text{et} \quad \mathcal{M} \xrightarrow{N_j} \widehat{B} \xrightarrow{k_B} \text{Hot}$$

sont isomorphes. En pratique, on produira un zigzag de transformations naturelles entre

$$\mathcal{M} \xrightarrow{N_i} \widehat{A} \xrightarrow{i_A} \text{Cat} \quad \text{et} \quad \mathcal{M} \xrightarrow{N_j} \widehat{B} \xrightarrow{i_B} \text{Cat}$$

qui sont des équivalences de Thomason argument par argument.

Une telle comparaison entraîne que les « équivalences faibles » définies par les deux foncteurs coïncident, au sens où si f est un morphisme de \mathcal{M} , alors le morphisme $k_A N_i(f)$ est un isomorphisme si et seulement si il en est de même du morphisme $k_B N_j(f)$.

On verra que sous des hypothèses peu restrictives, l'existence d'un isomorphisme entre $k_A N_i$ et $k_B N_j$, l'existence d'un zigzag d'équivalences de Thomason argument par argument entre $i_A N_i$ et $i_B N_j$, et le fait que N_i et N_j définissent les mêmes équivalences faibles sont des conditions équivalentes.

Nous allons maintenant exposer deux critères de comparaison de nerfs, issus de la théorie de l'homotopie de Grothendieck [43]. Commençons par un préliminaire lié à la notion de foncteur asphérique (voir le paragraphe 1.2.6).

4.4.2. — Rappelons qu'un préfaisceau F sur une petite catégorie A est dit *asphérique* si la catégorie A/F des éléments de F est asphérique, c'est-à-dire si son nerf est un ensemble simplicial faiblement contractile, et qu'un foncteur $u : A \rightarrow B$ entre petites catégories est *asphérique* si pour tout objet b de B , la catégorie A/b est asphérique.

4.4.3. — Soit $u : A \rightarrow B$ un foncteur entre petites catégories. Notons $u^* : \widehat{B} \rightarrow \widehat{A}$ le foncteur d'image inverse par u , c'est-à-dire de précomposition par u . Pour tout préfaisceau F sur B , on dispose d'un foncteur

$$\begin{aligned} A/u^*(F) &\rightarrow B/F \\ (a, f) &\mapsto (u(a), f), \end{aligned}$$

où f est vu tantôt comme un morphisme $f : a \rightarrow u^*(F)$, tantôt comme un morphisme $f : u(a) \rightarrow F$, ces deux morphismes correspondant en vertu du lemme de Yoneda à un élément de $F(u(a))$. Ce foncteur est naturel en F et on dispose donc d'une transformation naturelle

$$\begin{array}{ccc} \widehat{B} & \xrightarrow{u^*} & \widehat{A} \\ & \searrow i_B & \swarrow i_A \\ & \text{Cat} & \end{array} \quad \lambda_u$$

Proposition 4.4.4 (Grothendieck). — *Un foncteur $u : A \rightarrow B$ entre petites catégories est asphérique si et seulement si la transformation naturelle λ_u est une équivalence de Thomason argument par argument.*

Démonstration. — C'est l'équivalence entre (a) et (c) de [60, proposition 1.2.9]. \square

Nous pouvons maintenant énoncer les critères de comparaison de foncteurs nerf.

Proposition 4.4.5 (Grothendieck). — *Soit*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ & \searrow i & \swarrow j \\ & \mathcal{M} & \end{array}$$

un triangle commutatif de foncteurs, où A et B sont des petites catégories. Si u est asphérique, alors les foncteurs composés

$$\mathcal{M} \xrightarrow{N_i} \widehat{A} \xrightarrow{k_A} \mathcal{H}ot \quad \text{et} \quad \mathcal{M} \xrightarrow{N_j} \widehat{B} \xrightarrow{k_B} \mathcal{H}ot$$

sont isomorphes. Plus précisément, la transformation naturelle λ_u induit une transformation naturelle entre

$$\mathcal{M} \xrightarrow{N_i} \widehat{A} \xrightarrow{i_A} \text{Cat} \quad \text{et} \quad \mathcal{M} \xrightarrow{N_j} \widehat{B} \xrightarrow{i_B} \text{Cat}$$

qui est une équivalence de Thomason argument par argument.

Démonstration. — Cela résulte facilement de la proposition précédente, voir [T8, proposition 4.12]. \square

Théorème 4.4.6 (Grothendieck). — Soient $i : A \rightarrow \mathcal{M}$ et $j : B \rightarrow \mathcal{M}$ deux foncteurs de source une petite catégorie. On suppose que pour tout objet a de A et tout objet b de B , les préfaisceaux $N_i i(a)$ et $N_j j(b)$ sont asphériques. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) pour tout objet a de A et tout objet b de B , les préfaisceaux $N_j i(a)$ et $N_i j(b)$ sont asphériques ;
- (b) les foncteurs composés

$$\mathcal{M} \xrightarrow{N_i} \widehat{A} \xrightarrow{k_A} \mathcal{H}ot \quad \text{et} \quad \mathcal{M} \xrightarrow{N_j} \widehat{B} \xrightarrow{k_B} \mathcal{H}ot$$

sont isomorphes ;

- (c) il existe un zigzag de transformations naturelles de la forme

$$i_A N_i \Rightarrow \bullet \Leftarrow i_B N_j$$

qui sont des équivalences de Thomason argument par argument ;

et elles entraînent la condition suivante :

- (d) les foncteurs nerf N_i et N_j définissent les mêmes équivalences faibles sur \mathcal{M} au sens où, pour tout morphisme f de \mathcal{M} , le morphisme $k_A N_i(f)$ est un isomorphisme si et seulement si $k_B N_j(f)$ en est un.

De plus, si A et B sont asphériques et \mathcal{M} possède un objet final, alors ces quatre conditions sont équivalentes.

Démonstration. — Voir [T8, proposition 4.13 et corollaire 4.14]. □

4.5. Comparaison des nerfs n -catégoriques

Dans cette section, nous présentons nos résultats de comparaison de nerfs n -catégoriques, résultats principaux de [T8]

Nous commençons par la comparaison la plus simple, celle du nerf n -simplicial et du nerf n -cellulaire. Par définition, le foncteur induisant le nerf n -simplicial s'obtient à partir de celui induisant le nerf n -cellulaire par précomposition par le foncteur

$$m_n : \Delta^n \rightarrow \Theta_n$$

(voir le paragraphe 4.3.2). Ainsi, en vertu d'un des résultats généraux de comparaison de nerfs de la section précédente, il suffit de montrer que ce foncteur est asphérique.

Proposition 4.5.1. — Pour tout $n \geq 0$, le foncteur

$$m_n : \Delta^n \rightarrow \Theta_n$$

est asphérique.

Démonstration. — C'est [T8, corollaire 5.5]. Le résultat se prouve par récurrence sur n en utilisant la description de Θ_n comme produit en couronne au sens de Berger [9] de Δ et Θ_{n-1} , c'est-à-dire l'isomorphisme $\Theta_n \simeq \Delta \wr \Theta_{n-1}$. On prouve plus

généralement que si C est une petite catégorie totalement asphérique (c'est-à-dire asphérique et telle que si c et c' sont deux préfaisceaux représentables, alors $C/c \times c'$ est asphérique), alors le foncteur canonique $\Delta \times C \rightarrow \Delta \wr C$ est asphérique. Le fait, non trivial, que Θ_n est totalement asphérique a été obtenu par Cisinski et Maltsiniotis [27, exemples 5.8]. \square

Théorème 4.5.2. — *Pour tout $n \geq 0$, le nerf n -simplicial et le nerf n -cellulaire sont équivalents au sens où les foncteurs composés*

$$n\text{-Cat} \xrightarrow{N_{\Delta^n}} \widehat{\Delta^n} \xrightarrow{k_{\Delta^n}} \mathcal{H}ot \quad \text{et} \quad n\text{-Cat} \xrightarrow{N_{\Theta_n}} \widehat{\Theta_n} \xrightarrow{k_{\Theta_n}} \mathcal{H}ot$$

sont isomorphes. Plus précisément, la transformation naturelle

$$\lambda_{m_n} : i_{\Delta^n} N_{\Delta^n} \Rightarrow i_{\Theta_n} N_{\Theta_n}$$

(voir le paragraphe 4.4.3) est une équivalence de Thomason argument par argument.

Démonstration. — Cela résulte de la proposition précédente, en vertu de la proposition 4.4.5. \square

Passons maintenant à la comparaison du nerf n -simplicial et du nerf de Street n -catégorique. C'est de très loin la comparaison la plus difficile à obtenir. On va procéder par récurrence en décomposant le nerf n -cellulaire en n étapes successives. Dans ce but, on introduit une construction S :

4.5.3. — Si C est une ∞ -catégorie, on notera SC l'objet simplicial dans $\infty\text{-Cat}$ défini par

$$\begin{aligned} \Delta^{\text{op}} &\rightarrow \infty\text{-Cat} \\ \Delta_p &\mapsto S_p C = \coprod_{c_0, \dots, c_p \in \text{Ob}(C)} \underline{\text{Hom}}_C(c_0, c_1) \times \cdots \times \underline{\text{Hom}}_C(c_{p-1}, c_p). \end{aligned}$$

Si C est une ∞ -catégorie, en itérant cette construction, on obtient un objet n -simplicial $S^n C$ dans $\infty\text{-Cat}$. Explicitement, on a

$$\begin{aligned} (\Delta^n)^\circ &\rightarrow \infty\text{-Cat} \\ (\Delta_{p_1}, \dots, \Delta_{p_n}) &\mapsto S_{p_n} \cdots S_{p_1} C. \end{aligned}$$

Il résulte de la formule définissant $S_p C$ que si C est une n -catégorie, alors $S_{p_n} \cdots S_{p_1} C$ est un ensemble et on obtient donc un foncteur

$$\begin{aligned} n\text{-Cat} &\rightarrow \widehat{\Delta^n} \\ C &\mapsto S^n C. \end{aligned}$$

Notons que, lorsque $n = 1$, ce foncteur n'est autre que le nerf usuel.

Proposition 4.5.4. — *Si C est une n -catégorie, alors $S^n C$ est canoniquement isomorphe au nerf n -simplicial $N_{\Delta^n}(C)$ de C .*

Démonstration. — Voir [T8, proposition 3.9]. \square

Proposition 4.5.5. — Pour toute ∞ -catégorie C , il existe un zigzag de morphismes d'ensembles bisimpliciaux de la forme

$$NC \rightarrow \bullet \leftarrow NSC,$$

où NC est vu comme un ensemble bisimplicial constant en la seconde variable, naturels en C , qui sont des équivalences faibles diagonales.

Démonstration. — Ce résultat est le cœur technique des théorèmes de comparaison de nerfs n -catégoriques et nécessite l'introduction de plusieurs outils. Il est obtenu en interprétant la construction S en termes d'un \mathbf{Hom} interne pour un certain produit tensoriel (non associatif) de ∞ -catégories, noté \circledast , introduit pour l'occasion : $S_p C \simeq \underline{\mathbf{Hom}}_{\circledast}(\Delta_p, C)$. L'ensemble bisimplicial XC au milieu du zigzag est alors défini par

$$X_{p,q}C = \mathbf{Hom}_{\infty\text{-Cat}}(\mathcal{O}_p \circledast \mathcal{O}_q, C).$$

Le résultat utilise de manière cruciale des compatibilités de $\underline{\mathbf{Hom}}_{\circledast}$ aux transformations lax et oplax, ainsi que le fait qu'une transformation lax ou oplax d'un ∞ -foncteur u vers un ∞ -foncteur v induit une homotopie simpliciale de Nu vers Nv , résultat obtenu avec Maltsiniotis dans [T6, appendice A] que nous présenterons dans la section 5.2 de ce texte. On utilise par ailleurs le classique lemme bisimplicial affirmant qu'un morphisme d'ensembles bisimpliciaux qui est une équivalence faible simpliciale argument par argument dans une direction est une équivalence faible diagonale. \square

Théorème 4.5.6. — Pour tout $n \geq 0$, le nerf de Street n -catégorique et le nerf n -simplicial sont équivalents au sens où les foncteurs composés

$$n\text{-Cat} \xrightarrow{N_n} \widehat{\Delta} \xrightarrow{k_{\Delta}} \mathcal{H}ot \quad \text{et} \quad n\text{-Cat} \xrightarrow{N_{\Delta^n}} \widehat{\Delta}^n \xrightarrow{k_{\Delta^n}} \mathcal{H}ot$$

sont isomorphes. Plus précisément, il existe un zigzag de transformations naturelles de la forme

$$i_{\Delta} N_n \Rightarrow \bullet \Leftarrow i_{\Delta^n} N_{\Delta^n}$$

qui sont des équivalences de Thomason argument par argument.

Démonstration. — Voir [T8, théorème 3.16 et remarque 4.17]. Le résultat se déduit de la proposition précédente, par une récurrence s'appuyant sur le lemme bisimplicial, en invoquant le théorème 4.4.6. \square

Remarque 4.5.7. — On peut également comparer ces deux nerfs de la manière suivante : les foncteurs

$$n\text{-Cat} \xrightarrow{N_n} \widehat{\Delta} \quad \text{et} \quad n\text{-Cat} \xrightarrow{N_{\Delta^n}} \widehat{\Delta}^n \xrightarrow{\delta^*} \widehat{\Delta}$$

sont faiblement équivalents, au sens où il existe un zigzag de transformations naturelles entre ceux-ci qui sont des équivalences faibles simpliciales argument par argument. Cela résulte du théorème précédent mais c'est en fait sous cette forme qu'est

obtenu la comparaison du nerf de Street et du nerf multisimplicial dans [T8] (voir le théorème 3.16).

Remarque 4.5.8. — Le cas $n = 2$ du théorème précédent est dû à Bullejos et Cegarra [14] et le cas $n = 3$ à Cegarra et Heredia [18].

Corollaire 4.5.9. — *Pour tout $n \geq 0$, le nerf de Street n -catégorique, le nerf n -simplicial et le nerf n -cellulaire définissent tous les trois les mêmes équivalences de n -catégories, au sens où si $u : A \rightarrow B$ est un n -foncteur, alors un des morphismes*

$$k_{\Delta} N_n u, \quad k_{\Theta_n} N_{\Theta_n} u, \quad k_{\Delta^n} N_{\Delta^n} u$$

est un isomorphisme si et seulement si les autres le sont.

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate des deux théorèmes de comparaison de nerfs précédents. \square

Remarque 4.5.10. — Quillen a montré que si f est un morphisme d'ensembles simpliciaux, alors f est une équivalence d'homotopie faible si et seulement si $k_{\Delta} f$ est un isomorphisme (voir [50, chapitre VI, théorème 3.3.(ii)] pour une rédaction d'Illusie). Ainsi, $k_{\Delta} N u$ est un isomorphisme si et seulement si $N u$ est une équivalence faible simpliciale. De même, il résulte de l'asphéricité du foncteur diagonal $\delta : \Delta \rightarrow \Delta^n$ qu'un morphisme f d'ensembles n -simpliciaux est une équivalence faible diagonale si et seulement si $k_{\Delta^n} f$ est un isomorphisme. Ainsi, $k_{\Delta^n} N_{\Delta^n} u$ est un isomorphisme si et seulement si $N_{\Delta^n} u$ est une équivalence faible diagonale.

Par transitivité, nous avons comparé le nerf n -cellulaire et le nerf de Street n -catégorique pour n fini. La comparaison de ces nerfs dans le cas ∞ s'en déduit.

Théorème 4.5.11. — *Le nerf de Street et le nerf cellulaire sont équivalents au sens où les foncteurs composés*

$$\infty\text{-Cat} \xrightarrow{N} \widehat{\Delta} \xrightarrow{k_{\Delta}} \mathcal{H}ot \quad \text{et} \quad \infty\text{-Cat} \xrightarrow{N_{\Theta}} \widehat{\Theta} \xrightarrow{k_{\Theta}} \mathcal{H}ot$$

sont isomorphes. Plus précisément, il existe un zigzag de transformations naturelles de la forme

$$i_{\Delta} N \Rightarrow \bullet \Leftarrow i_{\Theta} N_{\Theta}$$

qui sont des équivalences de Thomason argument par argument.

Démonstration. — C'est [T8, théorème 5.8]. Le résultat se déduit du cas fini en utilisant le théorème 4.4.6 et le fait, non trivial, que le nerf de Street d'un oriental est faiblement contractile (voir la proposition 5.3.9). \square

Corollaire 4.5.12. — *Le nerf de Street et le nerf cellulaire définissent les mêmes équivalences faibles de ∞ -catégories, au sens où si $u : A \rightarrow B$ est un ∞ -foncteur, alors $k_{\Delta} N u$ est un isomorphisme si et seulement si il en est de même de $k_{\Theta} N_{\Theta} u$.*

Démonstration. — Cela résulte immédiatement du théorème précédent. \square

CHAPITRE 5

ÉQUIVALENCES DE THOMASON

Nous avons établi au chapitre précédent que les principaux foncteurs nerf pour les n -catégories ou les ∞ -catégories définissent les mêmes équivalences faibles. On appellera « équivalences de Thomason » les équivalences définies par ces nerfs. La théorie de l'homotopie de ∞ -Cat est l'étude de ∞ -Cat munie de la classe de ces équivalences de Thomason.

Dans ce chapitre, on étudie les premières propriétés des équivalences de Thomason. Par exemple, on démontre que la classe des équivalences de Thomason est stable par toutes les dualités de ∞ -Cat [T8, section 6]. On montre par ailleurs que les transformations oplax induisent des homotopies simpliciales sur les nerfs de Street [T6, appendice A], ce qui nous permet de définir une notion de rétracte par transformation oplax qui se réalise en un rétracte par déformation simplicial sur les nerfs de Street. On fournit plusieurs exemples de tels rétractes par transformation provenant de nos articles [T2, T6, T4]. On en déduit en particulier que le nerf de Street d'un oriental est faiblement contractile, et de même pour le nerf de Street d'une tranche au-dessous ou au-dessus d'un objet. Enfin, on expose un résultat fondamental démontré par mon étudiant Andrea Gagna [39], analogue ∞ -catégorique du théorème d'Illusie-Quillen : la localisation de ∞ -Cat par les équivalences de Thomason est équivalente à la catégorie *Hot* des types d'homotopie. Ce théorème justifie l'idée que la théorie de l'homotopie de ∞ -Cat est l'étude des types d'homotopie, sous un aspect nouveau.

5.1. Définition et premières propriétés

Dans cette section, nous définissons les équivalences de Thomason et nous démontrons deux de leurs propriétés non triviales qui résultent de la comparaison des différents nerfs [T8].

5.1.1. — Soit $u : A \rightarrow B$ un ∞ -foncteur. On dit que u est une *équivalence de Thomason* si son nerf de Street $Nu : NA \rightarrow NB$ est une équivalence d'homotopie faible simpliciale.

On dira qu'une ∞ -catégorie C est *asphérique* si le ∞ -foncteur $C \rightarrow D_0$ est une équivalence de Thomason, ce qui revient à dire que son nerf de Street est un ensemble simplicial faiblement contractile.

Remarque 5.1.2. — Puisque le nerf de Street restreint aux 1-catégories coïncide avec le nerf usuel, les deux notions d'équivalence de Thomason coïncident sur \mathcal{Cat} .

Remarque 5.1.3. — En vertu du corollaire 4.5.12, on peut également définir les équivalences de Thomason en utilisant le nerf cellulaire. Autrement dit, un ∞ -foncteur $u : A \rightarrow B$ est une équivalence de Thomason si et seulement si $k_{\Theta}N_{\Theta}u$ est un isomorphisme. De même, si A et B sont des n -catégories, alors u est une équivalence de Thomason si et seulement si $\delta^*N_{\Delta^n}u$ est une équivalence d'homotopie faible simpliciale (voir le corollaire 4.5.9 et la remarque 4.5.10).

Théorème 5.1.4. — Soit $u : A \rightarrow B$ un ∞ -foncteur. Pour toute partie J de $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, le ∞ -foncteur u est une équivalence de Thomason si et seulement si son dual $D_J(u)$ (voir paragraphe 2.1.13) en est une.

Démonstration. — On déduit de la stabilité de la catégorie Θ de Joyal par la dualité D_J que $k_{\Theta}N_{\Theta}u$ est un isomorphisme si et seulement si $k_{\Theta}N_{\Theta}D_J(u)$ en est un. Le théorème résulte alors de la comparaison du nerf de Street et du nerf cellulaire. Voir [T8, théorème 6.6] pour plus de détails. \square

Remarque 5.1.5. — Si l'on définit les équivalences de Thomason en utilisant le nerf de Street, comme on l'a fait, on ne sait pas démontrer le résultat précédent autrement qu'en comparant le nerf de Street au nerf cellulaire. La seule dualité pour laquelle on dispose d'un argument plus simple est le dual impair. En effet, ce cas résulte du fait que, si A est une ∞ -catégorie, on a un isomorphisme canonique naturel

$$N(A^{\text{op}}) \simeq N(A)^{\text{op}},$$

où le op de droite désigne l'ensemble simplicial opposé.

Corollaire 5.1.6. — Soit J une partie de $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pour toute ∞ -catégorie C , les ∞ -catégories C et $D_J(C)$ ont le même type d'homotopie, au sens où leur nerf de Street ont le même type d'homotopie.

Démonstration. — Cela résulte du théorème précédent en vertu du théorème 4.4.6, voir [T8, corollaire 6.7] pour plus de détails. \square

Le résultat suivant est un théorème de type Dwyer-Kan pour les équivalences de Thomason :

Théorème 5.1.7. — Soit $u : C \rightarrow D$ un ∞ -foncteur. On suppose que
(a) u induit une bijection $\text{Ob}(C) \xrightarrow{\sim} \text{Ob}(D)$;

(b) pour tous objets c et c' de C , le ∞ -foncteur

$$\underline{\mathrm{Hom}}_C(c, c') \rightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_D(u(c), u(c'))$$

induit par u est une équivalence de Thomason.

Alors u est une équivalence de Thomason.

Démonstration. — Cela résulte de la proposition 4.5.5 par une application du lemme bisimplicial. Voir [T8, théorème 6.2] pour plus de détails. \square

5.2. Transformations oplax et homotopies simpliciales

Dans cette section, nous allons voir qu'on peut associer à toute transformation oplax ou lax $\alpha : u \Rightarrow v$ une homotopie simpliciale entre les nerfs de Street Nu et Nv (c'est le résultat principal de [T6, appendice A]). Ainsi, ces transformations jouent le rôle d'homotopies dans la théorie de l'homotopie de $\infty\text{-Cat}$.

5.2.1. — Soient $u, v : A \rightarrow B$ deux ∞ -foncteurs et soit $\alpha : u \Rightarrow v$ une transformation oplax. La donnée de α est équivalente à celle d'un ∞ -foncteur $h : D_1 \otimes A \rightarrow B$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & & B \\ \downarrow \{0\} \otimes A & \searrow u & \\ D_1 \otimes A & \xrightarrow{h} & B \\ \uparrow \{1\} \otimes A & \nearrow v & \\ A & & \end{array} .$$

En appliquant le nerf de Street à ce foncteur, on obtient donc un morphisme simplicial $N(D_1 \otimes A) \rightarrow NB$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} NA & & NB \\ \downarrow N(\{0\} \otimes A) & \searrow Nu & \\ N(D_1 \otimes A) & \xrightarrow{Nh} & NB \\ \uparrow N(\{1\} \otimes A) & \nearrow Nv & \\ NA & & \end{array} .$$

Ainsi, si on était capable de définir un morphisme simplicial

$$\Delta_1 \times NA = ND_1 \times NA \rightarrow N(D_1 \otimes A),$$

compatible aux extrémités au sens où le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 & NA & \\
 \{0\} \times NA \swarrow & & \searrow N(\{0\} \otimes A) \\
 \Delta_1 \times NA & \longrightarrow & N(D_1 \otimes A) \\
 \nwarrow \{1\} \times NA & & \nearrow N(\{1\} \otimes A) \\
 & NA &
 \end{array}$$

serait commutatif, on obtiendrait par composition

$$\Delta_1 \times NA \longrightarrow N(D_1 \otimes A) \xrightarrow{Nh} NB$$

une homotopie simpliciale de Nu vers Nv . *A priori*, on dispose d'un morphisme canonique dans l'autre sens : $N(D_1 \otimes A) \rightarrow \Delta_1 \times NA$. Le résultat principal de [T6, appendice A] affirme que ce ∞ -foncteur admet une unique section naturelle compatible aux extrémités.

Proposition 5.2.2. — *Le ∞ -foncteur*

$$\nabla : \mathcal{O}_n \rightarrow \mathcal{O}_n \otimes \mathcal{O}_n$$

obtenu en appliquant le foncteur $\nu : \mathcal{C}_{\text{da}} \rightarrow \infty\text{-Cat}$ à la diagonale d'Alexander-Whitney

$$\begin{aligned}
 c(\Delta_n) &\rightarrow c(\Delta_n) \otimes c(\Delta_n) \\
 (i_0, \dots, i_p) &\mapsto \sum_{l=0}^p (i_0, \dots, i_l) \otimes (i_l, \dots, i_p)
 \end{aligned}$$

fait de \mathcal{O}_n une cogèbre coassociative coïtatoire de coïtité l'unique ∞ -foncteur de \mathcal{O}_n vers \mathcal{D}_0 .

Démonstration. — Cela résulte immédiatement du fait que la diagonale d'Alexander-Whitney fait de $c(\Delta_n)$ une cogèbre coassociative coïtatoire de coïtité donnée par l'augmentation de $c(\Delta_n)$. \square

Proposition 5.2.3. — *La structure de cogèbre sur les orientaux induit un morphisme simplicial*

$$s : NA \times NB \rightarrow N(A \otimes B)$$

qui est une section du ∞ -foncteur canonique

$$N(A \otimes B) \rightarrow NA \times NB,$$

naturelle en A et B .

Démonstration. — On définit le morphisme s de la manière suivante. Soit $n \geq 0$ et soit $(x, y) : \Delta_n \rightarrow NA \times NB$ un n -simplexe de $NA \times NB$. Les morphismes x et y

correspondent à des ∞ -foncteurs $\mathcal{O}_n \rightarrow A$ et $\mathcal{O}_n \rightarrow B$ respectivement qu'on notera également x et y . Par définition, le n -simplexe $s(x, y)$ de $N(A \otimes B)$ est le composé

$$\mathcal{O}_n \xrightarrow{\nabla} \mathcal{O}_n \otimes \mathcal{O}_n \xrightarrow{x \otimes y} A \otimes B .$$

On vérifie qu'on définit bien ainsi un morphisme simplicial et qu'il satisfait aux conditions de l'énoncé, voir [T6, propositions A.4 et A.5]. \square

Proposition 5.2.4. — *Il existe un et un seul morphisme*

$$s : \Delta_1 \times NA \rightarrow N(D_1 \otimes A)$$

qui soit une section naturelle en A du morphisme canonique

$$N(D_1 \otimes A) \rightarrow \Delta_1 \times NA$$

et qui soit compatible aux extrémités au sens du paragraphe 5.2.1.

Démonstration. — L'existence est un cas particulier du résultat précédent, la compatibilité aux extrémités résultant de la naturalité de s en la première variable. L'unicité résulte d'un calcul fastidieux dans les complexes dirigés augmentés, voir [T6, proposition A.9]. \square

5.2.5. — Soient $u, v : A \rightarrow B$ deux ∞ -foncteurs et soit $\alpha : u \Rightarrow v$ une transformation oplax. On définit une homotopie simpliciale $N\alpha$ de Nu vers Nv par

$$\Delta_1 \times NA \xrightarrow{s} N(D_1 \otimes A) \xrightarrow{Nh} NB ,$$

où s désigne le ∞ -foncteur de la proposition précédente et h le ∞ -foncteur associé à α .

5.2.6. — Si $u, v : A \rightarrow B$ sont toujours deux ∞ -foncteurs et $\alpha : u \Rightarrow v$ est maintenant une transformation lax, on obtient une homotopie simpliciale $N\alpha$ de Nu vers Nv par la formule

$$N\alpha = (N(\alpha^{\text{op}}))^{\text{op}} ,$$

α^{op} étant une transformation oplax de v^{op} vers u^{op} (voir la proposition 3.2.7). On peut également définir cette homotopie simpliciale directement par un composé

$$NA \times \Delta_1 \longrightarrow N(A \otimes D_1) \xrightarrow{Nk} NB ,$$

où k désigne le ∞ -foncteur associé à α .

5.3. Rétractes par transformation

Le but de cette section est de présenter la notion de rétracte par transformation oplax ou lax qui, grâce aux résultats de la section précédente, jouera le rôle des rétractes par déformation dans la théorie de l'homotopie de $\infty\text{-Cat}$. Ces rétractes par transformation seront un de nos principaux outils pour montrer qu'un ∞ -foncteur est une équivalence de Thomason. On donne trois exemples de tels rétractes, issues de nos articles [T2, T6, T4]. On en déduit que les orientaux, ainsi que les tranches au-dessus ou au-dessous d'un objet, sont asphériques, c'est-à-dire de nerf de Street faiblement contractile.

5.3.1. — Soit $i : A \rightarrow B$ un ∞ -foncteur. Une *structure de rétracte par transformation oplax à gauche* (resp. *à droite*) sur i consiste en la donnée de :

- (a) une rétraction $r : B \rightarrow A$ de i (de sorte qu'on a $ri = 1_A$) ;
- (b) une transformation oplax α de ir vers 1_B (resp. de 1_B vers ir).

On omettra parfois les indications « à gauche » ou « à droite » dans les énoncés abstraits qui sont valables pour les deux variantes (à condition de rester cohérent dans un même énoncé).

Si on dispose d'un ∞ -foncteur $q : B \rightarrow C$, on dira que la structure est *au-dessus de C* si on a

$$qir = q \quad \text{et} \quad q * \alpha = 1_q.$$

On dira que la structure est *forte* si on a

$$\alpha * i = 1_i.$$

On dit que i est un *rétracte par transformation oplax à gauche* (resp. *à droite*) si i admet une structure de rétracte par transformation oplax à gauche (resp. à droite). On qualifiera un tel rétracte d'*au-dessus de C* ou de *fort* en fonction des propriétés des structures que i peut admettre.

Toutes les notions introduites dans ce paragraphe admettent également des variantes lax obtenues en remplaçant la transformation oplax α par une transformation lax. On parlera parfois de « rétracte par transformation » pour désigner à la fois les rétractes par transformation oplax et les rétractes par transformation lax.

Proposition 5.3.2. — *Le nerf de Street d'un rétracte par transformation est un rétracte par déformation. En particulier, un rétracte par transformation est une équivalence de Thomason.*

Démonstration. — Cela résulte immédiatement du fait qu'une transformation oplax ou lax induit une homotopie simpliciale sur les nerfs de Street (voir les paragraphes 5.2.5 et 5.2.6). \square

Proposition 5.3.3. — Si $i : A \rightarrow B$ est un rétracte par transformation au-dessus d'une ∞ -catégorie C , alors tout changement de base de i au-dessus de C est un rétracte par transformation. Autrement dit, pour tout ∞ -foncteur $D \rightarrow C$, le ∞ -foncteur

$$i \times_C D : A \times_C D \rightarrow B \times_C D$$

est un rétracte par transformation.

Démonstration. — Cela résulte de propriétés générales de changement de base pour les transformations oplax ou lax, voir [T6, proposition 5.6]. \square

Corollaire 5.3.4. — Un rétracte par transformation au-dessus d'une ∞ -catégorie C reste une équivalence de Thomason après tout changement de base au-dessus de C .

Démonstration. — Cela résulte immédiatement des propositions précédentes. \square

Proposition 5.3.5. — Soient C une ∞ -catégorie et c un objet de C . Les ∞ -foncteurs

$$D_0 \rightarrow {}_c\backslash C, \quad D_0 \rightarrow C/c, \quad D_0 \rightarrow {}_c^{\text{co}}\backslash C, \quad D_0 \rightarrow C/c^{\text{co}},$$

correspondant à l'objet $(c, 1_c)$ (voir la proposition 3.4.6 et la remarque 3.4.8), sont respectivement

- un rétracte par transformation oplax à gauche fort,
- un rétracte par transformation oplax à droite fort,
- un rétracte par transformation lax à gauche fort,
- un rétracte par transformation lax à droite fort.

Démonstration. — En vertu des propositions 3.2.7 et 3.4.4, il suffit de traiter le cas de ${}_c\backslash C$. Il s'agit donc de construire un ∞ -foncteur $D_1 \otimes {}_c\backslash C \rightarrow {}_c\backslash C$ définissant une transformation oplax du ∞ -foncteur constant ${}_c\backslash C \rightarrow {}_c\backslash C$ de valeur $(c, 1_c)$ vers l'identité de ${}_c\backslash C$. En vertu du corollaire 3.3.12, cela revient à se donner un ∞ -foncteur $D_0 \star {}_c\backslash C \rightarrow {}_c\backslash C$, au-dessous de ${}_c\backslash C$, envoyant l'objet de $D_0 \star {}_c\backslash C$ provenant de D_0 sur $(c, 1_c)$. Par adjonction, il s'agit de définir un ∞ -foncteur ${}_c\backslash C \rightarrow (c, 1_c)\backslash({}_c\backslash C)$, au-dessus de ${}_c\backslash C$. Or, on a un isomorphisme canonique $(c, 1_c)\backslash({}_c\backslash C) \simeq {}_{1_c}\backslash C$. On vérifie que le ∞ -foncteur $\kappa^* : {}_c\backslash C \rightarrow {}_{1_c}\backslash C$ induit par functorialité des tranches par le triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} D_1 & \xrightarrow{\kappa} & D_0 \\ & \searrow 1_c & \swarrow c \\ & & C \end{array},$$

où κ désigne l'unique ∞ -foncteur de D_1 vers D_0 , convient. On renvoie à [T6, proposition 5.22] pour plus de détails. \square

Remarque 5.3.6. — Cette proposition exprime le fait que $(c, 1_c)$ est un objet initial de $c \setminus C$ en un sens oplax, un objet final de C/c en un sens oplax, un objet initial de ${}^{\text{co}}c \setminus C$ en un sens lax et un objet final de $C / {}^{\text{co}}c$ en un sens lax.

Corollaire 5.3.7. — Soient C une ∞ -catégorie et c un objet de C . Les nerfs de Street des tranches

$$c \setminus C, \quad C/c, \quad C / {}^{\text{co}}c, \quad {}^{\text{co}}c \setminus C$$

sont faiblement contractiles.

Démonstration. — C'est une conséquence de l'énoncé précédent en vertu de la proposition 5.3.2. \square

Proposition 5.3.8. — Soit $n \geq 0$.

- (a) Le ∞ -foncteur $D_0 \rightarrow \mathcal{O}_n$ correspondant à l'objet 0 est à la fois un rétracte par transformation oplax à gauche fort et un rétracte par transformation lax à gauche fort.
- (b) Le ∞ -foncteur $D_0 \rightarrow \mathcal{O}_n$ correspondant à l'objet n est à la fois un rétracte par transformation oplax à droite fort et un rétracte par transformation lax à droite fort.

Démonstration. — En vertu de la proposition 3.3.14, on a un isomorphisme canonique $(\mathcal{O}_n)^{\text{op}} \simeq \mathcal{O}_n$ et la proposition 3.2.7 entraîne qu'il suffit de traiter le cas des transformations oplax. Il s'agit donc de produire une transformation oplax du ∞ -foncteur constant $0 : \mathcal{O}_n \rightarrow \mathcal{O}_n$ vers l'identité de \mathcal{O}_n , et une transformation oplax de l'identité de \mathcal{O}_n vers le ∞ -foncteur constant $n : \mathcal{O}_n \rightarrow \mathcal{O}_n$. En vertu de la proposition 3.2.9, cela peut se faire en définissant des homotopies de complexes dirigés augmentés entre des endomorphismes de $c(\Delta_n)$ (voir le paragraphe 4.1.2). Les homotopies h et h' en question sont définies par les formules

$$h(i_0, \dots, i_p) = (0, i_0, \dots, i_p),$$

pour $p \geq 0$, et

$$h'(i_0) = \sum_{i_0 < k \leq n} (k-1, k),$$

$$h'(i_0, \dots, i_p) = \sum_{i_0 < k < i_1} (k-1, k, i_1, \dots, i_p),$$

pour $p \geq 1$, où par convention $(j_0, \dots, j_q) = 0$ si les j_i ne sont pas distincts. On renvoie à [T4, propositions 6.3 et 6.5], ainsi qu'à [T2, proposition A.8] et [T6, proposition 5.16] pour plus de détails. \square

Corollaire 5.3.9. — Pour tout $n \geq 0$, le nerf de Street $N\mathcal{O}_n$ du n -ième oriental est faiblement contractile.

Démonstration. — Cela résulte de la proposition précédente. \square

Terminons par un dernier exemple de rétracte par transformation en lien avec les ∞ -catégories comma qui justifie l'intuition de *mapping space* pour la ∞ -catégorie $B \downarrow u$:

Proposition 5.3.10. — *Pour tout ∞ -foncteur $u : A \rightarrow B$, le ∞ -foncteur j de la factorisation*

$$A \xrightarrow{j} B \downarrow u \xrightarrow{p_1} B$$

(voir la proposition 3.6.11) *est un rétracte par transformation oplax à droite fort, et en particulier une équivalence de Thomason.*

Démonstration. — Cela résulte des propriétés de functorialité de $\mathbf{Hom}_{\text{lax}}$ vis à vis des transformations et de la proposition 5.3.3, voir [T2, proposition 2.17]. \square

Remarque 5.3.11. — De même, tout ∞ -foncteur $u : A \rightarrow B$ se factorise en

$$A \xrightarrow{j'} u \downarrow B \xrightarrow{p_2} B,$$

où j' est un rétracte par transformation oplax à gauche fort.

5.4. Les ∞ -catégories comme modèle des types d'homotopie

L'objet de cette section est de présenter la version ∞ -catégorique du théorème d'Illusie-Quillen, démontré par mon étudiant Andrea Gagna [39], qui s'énonce de la manière suivante :

Théorème 5.4.1 (Gagna). — *Le nerf de Street*

$$N : \infty\text{-Cat} \rightarrow \widehat{\Delta}$$

induit une équivalence de catégories

$$\overline{N} : \mathbf{Ho}(\infty\text{-Cat}) \rightarrow \mathcal{H}ot,$$

où $\mathbf{Ho}(\infty\text{-Cat})$ désigne la localisée de la catégorie des ∞ -catégories par les équivalences de Thomason.

Démonstration. — Nous allons suivre la présentation que donne Gagna de ce théorème dans [39], en séparant la partie indépendante du nerf de Street (théorème 5.4.4) de la partie spécifique et centrale (théorème 5.4.5). Le théorème est conséquence de ces deux résultats. \square

Nous commençons par introduire la terminologie nécessaire à la version abstraite du théorème d'Illusie-Quillen mentionnée dans la preuve précédente.

5.4.2. — Soit \mathcal{C} une catégorie cocomplète munie d'un objet cosimplicial $c : \Delta \rightarrow \mathcal{C}$. On en déduit un foncteur nerf

$$N_c : \mathcal{C} \rightarrow \widehat{\Delta}$$

$$X \mapsto (\Delta_n \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c\Delta_n, X))$$

et on appelle *équivalence faible* de \mathcal{C} les morphismes f tels que $N_c f$ soit une équivalence d'homotopie faible. Le foncteur N_c admet pour adjoint à gauche le foncteur $\tau_c : \mathcal{C} \rightarrow \widehat{\Delta}$, unique foncteur prolongeant c et commutant aux limites inductives.

Ainsi, lorsque $\mathcal{C} = \infty\text{-Cat}$ et c est l'objet cosimplicial \mathcal{O} des orientaux, on retrouve le nerf de Street et les équivalences de Thomason.

On dira que l'objet cosimplicial c *permet un théorème d'Illusie-Quillen* si, pour tout ensemble ordonné E , le morphisme d'adjonction

$$NE \rightarrow N_c \tau_c NE$$

est une équivalence d'homotopie faible.

Remarque 5.4.3. — Gagna utilise la terminologie « satisfait à la condition (e) » plutôt que « permet un théorème d'Illusie-Quillen ». En effet, cette condition est l'hypothèse (e) de [T3, théorème 4.11], dont notre théorème 9.1.3 est une version simplifiée.

Théorème 5.4.4 (Gagna). — *Si \mathcal{C} est une catégorie cocomplète munie d'un objet cosimplicial $c : \Delta \rightarrow \mathcal{C}$ permettant un théorème d'Illusie-Quillen, alors le foncteur*

$$N_c : \mathcal{C} \rightarrow \widehat{\Delta}$$

induit une équivalence de catégories

$$\overline{N_c} : \text{Ho}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{H}ot,$$

où $\text{Ho}(\mathcal{C})$ désigne la localisée de \mathcal{C} par les équivalences faibles définies par N_c .

Démonstration. — Nous reformulons ici la preuve de Gagna [39, théorème 2.4].

Admettons provisoirement l'existence d'un endofoncteur $Q : \widehat{\Delta} \rightarrow \widehat{\Delta}$ de la catégorie des ensembles simpliciaux et d'une transformation naturelle $\alpha : Q \Rightarrow 1_{\widehat{\Delta}}$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

- pour tout ensemble simplicial X , il existe un ensemble ordonné E tel que QX soit isomorphe au nerf de E ;
- la transformation naturelle α est une équivalence d'homotopie faible argument par argument.

On va montrer que $\tau_c Q$ envoie les équivalences d'homotopie faibles sur des équivalences faibles de \mathcal{C} et induit un quasi-inverse du foncteur $\overline{N_c}$.

On dispose d'un zigzag de transformations naturelles

$$N_c \tau_c Q \xleftarrow{\eta_Q} Q \xrightarrow{\alpha} 1_{\widehat{\Delta}},$$

où η désigne l'unité de l'adjonction $\tau_c \dashv N_c$. L'hypothèse sur l'objet cosimplicial c et le fait que Q soit à valeurs dans les nerfs d'ensembles ordonnés montre que la flèche de gauche est une équivalence d'homotopie faible argument par argument. La seconde l'est par hypothèse.

Par ailleurs, on a une transformation naturelle

$$\tau_c Q N_c \xrightarrow{\tau_c \alpha N_c} \tau_c N_c \xrightarrow{\varepsilon} 1_C ,$$

où ε désigne la coïunité de l'adjonction $\tau_c \dashv N_c$, et, pour conclure, il suffit de montrer qu'en appliquant N_c à cette transformation naturelle on obtient une équivalence d'homotopie faible argument par argument. Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} Q N_c & \xrightarrow{\alpha N_c} & N_c \\ \eta Q N_c \downarrow & & \downarrow \eta N_c \\ N_c \tau_c Q N_c & \xrightarrow{N_c \tau_c \alpha N_c} & N_c \tau_c N_c \xrightarrow{N_c \varepsilon} N_c \end{array} .$$

La flèche verticale de gauche est une équivalence d'homotopie faible argument par argument, toujours par hypothèse sur c et Q , et la flèche horizontale du haut en est une par hypothèse. On conclut donc par deux sur trois.

Il nous reste à justifier l'existence de Q et α . Notons Δ' la sous-catégorie de Δ ayant les mêmes objets mais comme morphisme uniquement les applications strictement croissantes entre ceux-ci. Soit $i : \Delta' \hookrightarrow \Delta$ le foncteur d'inclusion, i^* le foncteur image inverse, foncteur d'oubli des ensembles simpliciaux vers les ensembles semi-simpliciaux, et $i_!$ son adjoint à gauche. Nous prétendons que le foncteur

$$Q = \text{Sd}^2 i_! i^* ,$$

où Sd désigne la subdivision barycentrique de Kan, muni de la transformation naturelle

$$\text{Sd}^2 i_! i^* \xrightarrow{\sigma^2 \varepsilon} 1_{\widehat{\Delta}} ,$$

où $\sigma : \text{Sd} \Rightarrow 1_{\widehat{\Delta}}$ est la transformation naturelle canonique et ε la coïunité de l'adjonction $i_! \dashv i^*$, convient. En effet, la description standard du foncteur $i_!$ (voir par exemple [36, section 3.3]) montre que celui-ci est à valeurs dans les ensembles simpliciaux dont les faces des simplexes non dégénérés sont non dégénérées. Or, en vertu de [61, théorème 11.4.5] et [75, lemme 5.6], la subdivision double d'un tel ensemble simplicial est le nerf d'un ensemble ordonné. Par ailleurs, la transformation naturelle σ est bien sûr une équivalence d'homotopie faible argument par argument et il en est de même de ε d'après [36, section 3.4], d'où le résultat. \square

Théorème 5.4.5 (Ara-Maltsiniotis, Gagna). — *L'objet cosimplicial des orientaux permet un théorème d'Illusie-Quillen.*

Démonstration. — Il s’agit de montrer que, si E est un ensemble ordonné, alors le morphisme canonique $f : NE \rightarrow NcNE$ est une équivalence faible. Un des points clés est que la ∞ -catégorie cNE s’identifie à un « oriental généralisé » \mathcal{O}_E qui peut se définir en utilisant la théorie de Steiner (voir la section 8.1). Ainsi, on peut considérer f comme un morphisme $NE \rightarrow N\mathcal{O}_E$. Ce morphisme ne provient *pas* d’un ∞ -foncteur $E \rightarrow \mathcal{O}_E$ et doit être pensé comme un ∞ -foncteur lax. Il existe néanmoins un ∞ -foncteur canonique $t : \mathcal{O}_E \rightarrow E$ qui fournit une rétraction Nt à f et il s’agit de montrer que t est une équivalence de Thomason.

Dans [T4], nous démontrons avec Maltiniotis que le ∞ -foncteur t est une équivalence de Thomason en appliquant le théorème 5.1.7. Le ∞ -foncteur t étant bijectif sur les objets, il s’agit essentiellement de montrer que si $i < j$ sont des éléments de E , alors $\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{O}_E}(i, j)$ est asphérique. La preuve de ce fait utilise des outils que nous n’avons pas encore présentés ; nous l’exposerons plus loin, voir le théorème 8.3.3.

Dans [39, section 6], Gagna donne une seconde preuve de ce fait, plus directe, en produisant une homotopie simpliciale entre $f(Nt)$ et $1_{N\mathcal{O}_E}$ par des formules explicites ; la construction de cette homotopie s’appuie sur la théorie de Steiner. \square

Remarque 5.4.6. — De même, Gagna démontre que pour tout $n \geq 1$, la restriction du nerf de Street induit une équivalence de catégories

$$\overline{N} : \text{Ho}(n\text{-Cat}) \rightarrow \text{Hot}.$$

Le cas $n = 1$ est le théorème d’Illusie-Quillen à proprement parler. Il résulte immédiatement du théorème 5.4.4 puisque le morphisme $NE \rightarrow Nc_1NE$ est un isomorphisme par pleine fidélité du nerf 1-catégorique. La preuve qu’on obtient dans ce cas n’est pas celle de Quillen mais essentiellement celle de Fritsch et Latch [37].

Le cas $n = 2$ a d’abord été montré par Chiche par un argument totalement différent [22, théorème 7.8].

CHAPITRE 6

THÉORÈME A DE QUILLEN

Le théorème A de Quillen est le principal outil non trivial permettant de démontrer qu'un foncteur est une équivalence de Thomason. Dans ce chapitre, nous allons démontrer un analogue ∞ -catégorique de ce théorème A, ainsi que quelques variations sur cet énoncé.

Nous commençons par démontrer un théorème A relatif pour les ∞ -catégories, c'est-à-dire pour les triangles commutatifs. Nous présentons les deux preuves que nous avons données de ce résultat avec Maltiniotis [T5, T6]. La première, plus élémentaire, est de nature simpliciale ; la seconde, plus conceptuelle, est basée sur des functorialités de la construction tranche qui ont été exposées dans le chapitre 3. Nous introduisons ensuite une notion de localisateur fondamental de ∞ -Cat, généralisant celle de localisateur fondamental de Cat, notion qui était implicite dans [T6]. Comme conséquence de nos résultats, nous obtenons que la classe des équivalences de Thomason forme un tel localisateur fondamental, et nous conjecturons qu'elle forme le plus petit, au sens de l'inclusion. Enfin, nous étendons le théorème A ∞ -catégorique aux « 2-triangles », c'est-à-dire aux triangles commutant à une transformation lax ou oplax près. Nous montrons que ce théorème A pour les 2-triangles se déduit des propriétés des localisateurs fondamentaux de ∞ -Cat. Le principal outil de la démonstration est notre théorie des ∞ -catégories comma exposée au chapitre 3.

6.1. Le théorème A pour les triangles commutatifs

Nous commençons par le théorème A relatif pour les tranches au-dessous :

Théorème 6.1.1. — *Soit*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ & \searrow v & \swarrow w \\ & & C \end{array}$$

un triangle commutatif de ∞ -foncteurs. Si pour tout objet c de C , le ∞ -foncteur $c \setminus A \rightarrow c \setminus B$ induit par u est une équivalence de Thomason, alors il en est de même de u .

Démonstration. — Nous avons donné, avec Maltsiniotis, deux preuves de ce résultat : [T5, théorème 5.2] et [T6, théorème 5.19]. Le point de départ est la preuve originelle de Quillen dans le cas 1-catégorique. Elle repose sur un carré commutatif d'ensembles bisimpliciaux

$$\begin{array}{ccc} S(v) & \longrightarrow & S(w) \\ \downarrow & & \downarrow \\ NA & \longrightarrow & NB \end{array} ,$$

où

$$S(v)_{m,n} = \{(c, a) \in (NC)_{m+1+n} \times (NA)_n \mid c_{m+1, \dots, m+1+n} = (Nv)(a)\},$$

de même pour $S(w)$, et NA, NB sont considérés comme constants en la première variable. On montre, comme dans la preuve de Quillen, en utilisant le lemme bisimplicial, que les morphismes verticaux sont des équivalences faibles diagonales. Par deux sur trois, il suffit donc de montrer que le morphisme horizontal du haut est une équivalence faible diagonale. Or, si l'on fixe la première variable à m , ce morphisme s'identifie au morphisme

$$\coprod_{c: \mathcal{O}_m \rightarrow C} c \setminus NA \rightarrow \coprod_{c: \mathcal{O}_m \rightarrow C} c \setminus NB,$$

les tranches $c \setminus NA$ et $c \setminus NB$ étant des tranches simpliciales. Ainsi, il suffit de montrer que pour tout ∞ -foncteur $c : \mathcal{O}_m \rightarrow C$, le morphisme simplicial $c \setminus NA \rightarrow c \setminus NB$ est une équivalence faible. Or, ce morphisme s'inscrit dans un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} c \setminus NA & \longrightarrow & c \setminus NB \\ \downarrow & & \downarrow \\ c_0 \setminus NA & \longrightarrow & c_0 \setminus NB \end{array} ,$$

où c_0 est le 0-simplexe $D_0 \xrightarrow{0} \mathcal{O}_m \xrightarrow{c} C$. On montre que la flèche du bas s'identifie au nerf de Street du ∞ -foncteur $c_0 \setminus A \rightarrow c_0 \setminus B$. Par hypothèse, ce ∞ -foncteur est une équivalence de Thomason. Ainsi, il nous suffit de montrer que le morphisme simplicial $c \setminus NA \rightarrow c_0 \setminus NA$ est une équivalence faible (il en sera évidemment de même pour B). C'est ici que les deux preuves divergent.

Dans [T5], nous démontrons que ce morphisme simplicial est la rétraction d'un rétracte par déformation en produisant une section et une homotopie simpliciale par des formules explicites. Pour ce faire, on utilise de manière cruciale la théorie de Steiner et des résultats de commutation du foncteur ν à certaines sommes amalgamées établis dans [T7, chapitre 3]. Cette preuve « à la main » permet d'obtenir directement un

théorème A pour les 2-triangles et plus précisément le théorème 6.3.4. Dans le cas des 2-triangles, la définition du morphisme bisimplicial $S(v) \rightarrow S(w)$ est plus délicate et utilise notamment le produit de Gray.

Dans [T6], nous raisonnons de manière plus conceptuelle. On commence par identifier le morphisme simplicial $c \backslash NA \rightarrow c_0 \backslash NA$ avec le nerf de Street du ∞ -foncteur $c \backslash A \rightarrow c_0 \backslash A$. On montre que ce ∞ -foncteur est la rétraction d'un rétracte par transformation oplax. L'idée est que le ∞ -foncteur $0 : D_0 \rightarrow \mathcal{O}_m$, qui induit ce ∞ -foncteur, est lui un rétracte par transformation lax (voir la proposition 5.3.8) et qu'on obtient le résultat par functorialité de la construction $- \backslash A$. Les propriétés de functorialité de cette construction sont non triviales et sont prouvées uniquement en basse dimension et sous des hypothèses restrictives qui suffisent à montrer que la structure de rétracte par transformation lax sur $D_0 \rightarrow \mathcal{O}_m$ induit une structure de rétraction d'un rétracte par transformation oplax sur $c \backslash A \rightarrow c_0 \backslash A$ (voir les paragraphes 3.5.4 et 3.5.6).

On montre par ailleurs dans [T6, appendice C] que la section et la transformation oplax obtenues par functorialité induisent *via* le nerf de Street la section et l'homotopie simpliciale de [T5]. \square

Remarque 6.1.2. — Si l'énoncé du théorème A mentionne uniquement des tranches au-dessous d'un objet, dans sa preuve, nous avons été conduit à considérer des tranches au-dessous d'un ∞ -foncteur $\mathcal{O}_n \rightarrow C$. C'est précisément pour cette raison que nous avons développé avec Maltsiniotis une théorie des tranches généralisées.

Remarque 6.1.3. — Le cas non relatif du théorème A 2-catégorique, c'est-à-dire le cas $n = 2$, $B = C$ et $w = 1_B$ du théorème précédent (voir notre corollaire 6.1.5) est dû à Bullejos et Cegarra. La version générale dans le cas $n = 2$ est due à Chiche [22].

Par dualité, on obtient quatre variantes du théorème A (en comptant l'énoncé précédent) :

Corollaire 6.1.4. — *Soit*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ & \searrow v & \swarrow w \\ & & C \end{array}$$

un triangle commutatif de ∞ -foncteurs. Supposons que l'une des quatre conditions suivantes soit satisfaite :

- (a) *pour tout objet c de C , le ∞ -foncteur $c \backslash A \rightarrow c \backslash B$ induit par u est une équivalence de Thomason ;*
- (b) *pour tout objet c de C , le ∞ -foncteur $A/c \rightarrow B/c$ induit par u est une équivalence de Thomason ;*
- (c) *pour tout objet c de C , le ∞ -foncteur $c^{\text{co}} \backslash A \rightarrow c^{\text{co}} \backslash B$ induit par u est une équivalence de Thomason ;*

(d) pour tout objet c de C , le ∞ -foncteur $A \int_c^{\text{co}} \rightarrow B \int_c^{\text{co}}$ induit par u est une équivalence de Thomason.

Alors u est une équivalence de Thomason.

Démonstration. — L'énoncé dans le cas où la première condition est satisfaite est exactement le théorème précédent. Les autres cas se déduisent par dualité (voir la proposition 3.4.4) en utilisant la stabilité des équivalences de Thomason par dualité (proposition 5.1.4) \square

On en déduit quatre variantes absolues (par opposition à relatives) :

Corollaire 6.1.5. — Soit $u : A \rightarrow B$ un ∞ -foncteur. Supposons que l'une des quatre conditions suivantes soit satisfaite :

- (a) pour tout objet b de B , la ∞ -catégorie $b \setminus A$ est asphérique ;
- (b) pour tout objet b de B , la ∞ -catégorie A/b est asphérique ;
- (c) pour tout objet b de B , la ∞ -catégorie $b \setminus^{\text{co}} A$ est asphérique ;
- (d) pour tout objet b de B , la ∞ -catégorie $A \int b^{\text{co}}$ est asphérique.

Alors u est une équivalence de Thomason.

Démonstration. — C'est le corollaire précédent appliqué au triangle

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ & \searrow u & \swarrow 1_B \\ & B & \end{array} .$$

Par exemple, dans le premier cas, si b est un objet de B , alors le ∞ -foncteur $b \setminus A \rightarrow b \setminus B$ est une équivalence de Thomason si et seulement si $b \setminus A$ est asphérique puisque $b \setminus B$ est asphérique en vertu du corollaire 5.3.7, ce qui établit le résultat. \square

Enfin, nous terminons par une application du théorème A qui interviendra au chapitre 8 pour déterminer le type d'homotopie de l'oriental associé à un ensemble ordonné.

Corollaire 6.1.6. — Soit C une ∞ -catégorie admettant un objet c_0 ayant l'une des deux propriétés suivantes :

- (a) pour tout objet c de C , la ∞ -catégorie $\underline{\text{Hom}}_C(c_0, c)$ est asphérique ;
- (b) pour tout objet c de C , la ∞ -catégorie $\underline{\text{Hom}}_C(c, c_0)$ est asphérique.

Alors C est asphérique.

Démonstration. — Dans le premier cas, l'assertion résulte du cas (d) du corollaire précédent appliqué au ∞ -foncteur $c_0 : D_0 \rightarrow C$, voir [T6, théorème 5.27] pour plus de détails. Le second cas peut se déduire du premier par dualité ou se démontrer directement en appliquant cette fois le cas (c) du corollaire au même ∞ -foncteur. \square

6.2. Localisateurs fondamentaux ∞ -catégoriques

6.2.1. — On dira qu'une classe \mathcal{W} de ∞ -foncteurs est un *localisateur fondamental* de ∞ -Cat si elle satisfait aux conditions suivantes :

- (a) \mathcal{W} est faiblement saturée, c'est-à-dire contient les identités, vérifie la propriété du deux sur trois et contient les ∞ -foncteurs i admettant une rétraction r telle que ir soit dans \mathcal{W} ;
- (b) pour toute ∞ -catégorie C , le ∞ -foncteur de « projection » $D_1 \otimes C \rightarrow C$ appartient à \mathcal{W} ;
- (c) \mathcal{W} vérifie un théorème A pour les triangles commutatifs au sens où, pour tout triangle commutatif de ∞ -foncteurs

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ & \searrow v & \swarrow w \\ & C & \end{array},$$

si pour tout objet c de C , le ∞ -foncteur $c \setminus A \rightarrow c \setminus B$ induit par u est dans \mathcal{W} , alors le ∞ -foncteur u est dans \mathcal{W} .

Remarque 6.2.2. — La conjonction des deux premiers axiomes entraîne que les localisateurs fondamentaux de ∞ -Cat contiennent les rétractes par transformation oplax.

Proposition 6.2.3. — La classe des équivalences de Thomason ∞ -catégoriques forme un localisateur fondamental de ∞ -Cat.

Démonstration. — La faible saturation est évidente. Les deux autres axiomes résultent de la proposition 5.3.2 et du théorème 6.1.1. \square

Nous conjecturons, avec Maltsiniotis, que cette notion de localisateur fondamental de ∞ -Cat joue un rôle analogue à celle de *Cat*. Afin d'énoncer une conjecture précise, nous commençons par quelques rappels dans le cas de *Cat*.

6.2.4. — On dit qu'une classe W de morphismes d'ensembles simpliciaux est un *localisateur fondamental simplicial* si

- (a) W est faiblement saturée;
- (b) W est stable par petites sommes;
- (c) W vérifie le lemme bisimplicial au sens où, si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme d'ensembles bisimpliciaux tel que, pour tout $m \geq 0$, le morphisme simplicial $f_{m,\bullet}$ soit dans W , alors la diagonale de f est dans W ;
- (d) pour tout ensemble simplicial X , la projection $\Delta_1 \times X \rightarrow X$ est dans W .

La preuve du théorème d'Illusie–Quillen (théorème 1.1.8) permet de montrer que le foncteur nerf usuel induit une bijection

$$W \mapsto N^{-1}(W)$$

entre les localisateurs fondamentaux simpliciaux et les localisateurs fondamentaux de $\mathcal{C}at$ (voir le paragraphe 1.2.10).

Or, il est conséquence de résultats de Cisinski [25, section 4.2] que la classe W_∞ des équivalences d'homotopie faibles simpliciales forme le plus petit localisateur fondamental simplicial. Ainsi, la classe $N^{-1}(W_\infty)$ des équivalences de Thomason forme le plus petit localisateur fondamental de $\mathcal{C}at$.

Remarque 6.2.5. — La notion de localisateur fondamental simplicial n'apparaît pas explicitement dans les travaux de Cisinski [25]. Néanmoins, il est conséquence de ses résultats que cette notion est équivalente à sa notion de Δ -localisateur test [25, section 4.2]. C'est en utilisant cette notion de Δ -localisateur test que Cisinski démontre dans [25] la minimalité du localisateur fondamental des équivalences de Thomason.

Proposition 6.2.6. — *Pour tout localisateur fondamental simplicial W , la classe de ∞ -foncteurs $N^{-1}(W)$, où N est le nerf de Street, est un localisateur fondamental de $\infty\text{-Cat}$.*

Démonstration. — La faible saturation est évidente. Le second axiome résulte du fait que le ∞ -foncteur $D_1 \otimes C \rightarrow C$ est la rétraction d'un rétracte par transformation oplax, que son nerf de Street est donc la rétraction d'un rétracte par déformation simplicial (en vertu de la proposition 5.3.2) et que tout tel morphisme est dans tout localisateur fondamental simplicial. Enfin, nos deux preuves du théorème A pour les équivalences de Thomason ∞ -catégoriques (voir la preuve du théorème 6.1.1), c'est-à-dire pour $N^{-1}(W_\infty)$ où W_∞ désigne la classe des équivalences d'homotopie faibles simpliciales, s'adaptent immédiatement à un localisateur fondamental simplicial quelconque. \square

Remarque 6.2.7. — On a vu dans la preuve précédente que la preuve du théorème A ∞ -catégorique s'applique à un localisateur fondamental simplicial quelconque. Plus généralement, les résultats de [T3], [T4], [T5], [T6] et [T8] (mais pas ceux de [T2]!) restent vrais pour un localisateur fondamental simplicial quelconque.

Conjecture 6.2.8. — *L'application $W \mapsto N^{-1}(W)$ est une bijection entre l'ensemble des localisateurs fondamentaux simpliciaux et ceux de $\infty\text{-Cat}$. En particulier, la classe des équivalences de Thomason forme le plus petit localisateur fondamental de $\infty\text{-Cat}$.*

Remarque 6.2.9. — Chiche a démontré dans [23, section 6] le résultat analogue pour 2-Cat . (Son axiomatique est légèrement différente de la nôtre mais elle se révèle être équivalente.)

Remarque 6.2.10. — La conjecture précédente entraînerait, par une adaptation immédiate des méthodes conduisant à la démonstration du théorème 5.1.4, que les localisateurs fondamentaux de $\infty\text{-Cat}$ sont stables par toutes les dualités de $\infty\text{-Cat}$ et, en particulier, qu'ils satisfont à toutes les variantes du théorème A établies pour les équivalences de Thomason.

6.3. Le théorème A pour les 2-triangles

Nous commençons par un préliminaire nécessaire pour énoncer le théorème A pour les 2-triangles.

6.3.1. — Soit

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ & \searrow v & \nearrow w \\ & & C \end{array}$$

α (2-cellule)

un diagramme dans $\infty\text{-Cat}$, où la 2-cellule est une transformation oplax. Pour tout objet c de C , on dispose d'un ∞ -foncteur canonique

$$c \setminus (u, \alpha) : c \setminus A \rightarrow c \setminus B.$$

En effet, en vertu de la proposition 3.6.6, il revient au même de définir un ∞ -foncteur $c \downarrow v \rightarrow c \downarrow w$. Or, on dispose du ∞ -foncteur $c \downarrow (\alpha, u) : c \downarrow v \rightarrow c \downarrow w$ du paragraphe 3.6.8.

Remarque 6.3.2. — Le ∞ -foncteur $c \setminus (u, \alpha)$ peut également se définir sans utiliser la construction comma en utilisant la propriété universelle des tranches et la description de l'opération « joint par D_0 » donnée par le corollaire 3.3.12.

Remarque 6.3.3. — Par dualité, on peut définir des ∞ -foncteurs analogues pour les autres types de tranche *mais à partir de données différentes* (voir les différentes versions du théorème A ci-dessous).

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème A pour les 2-triangles dans le cadre d'un localisateur fondamental.

Théorème 6.3.4. — Fixons \mathcal{W} un localisateur fondamental de $\infty\text{-Cat}$. Soit

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ & \searrow v & \nearrow w \\ & & C \end{array}$$

α (2-cellule)

un triangle de ∞ -foncteurs commutatif à une transformation oplax α près. Si pour tout objet c de C , le ∞ -foncteur $c \setminus (u, \alpha) : c \setminus A \rightarrow c \setminus B$ est dans \mathcal{W} , alors il en est de même de u .

Démonstration. — On dispose d'un diagramme

$$\begin{array}{ccc} C \downarrow v & \xrightarrow{C \downarrow (\alpha, u)} & C \downarrow w \\ p_2 \downarrow & & \downarrow p_2 \\ A & \xrightarrow{u} & B \end{array},$$

où $C \downarrow (\alpha, u)$ est le ∞ -foncteur du paragraphe 3.6.8. Les projections p_2 sont des rétractions des ∞ -foncteurs de la proposition 5.3.10 et sont donc dans \mathcal{W} d'après la remarque 6.2.2. Ainsi, il suffit de montrer que $C \downarrow (\alpha, u)$ est dans \mathcal{W} .

Pour ce faire, on applique le théorème A au triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} C \downarrow v & \xrightarrow{C \downarrow (\alpha, u)} & C \downarrow w \\ & \searrow p_1 & \swarrow p_1 \\ & C & \end{array} .$$

On montre que pour tout objet c de C , le ∞ -foncteur $c \setminus (C \downarrow (\alpha, u))$ s'identifie au ∞ -foncteur

$$U \downarrow (\alpha, u) : U \downarrow v \rightarrow U \downarrow w ,$$

où $U : c \setminus C \rightarrow C$ est le ∞ -foncteur d'oubli. En utilisant des propriétés de functorialité de la construction comma, on produit un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} c \downarrow v & \xrightarrow{c \setminus (\alpha, u)} & c \downarrow w \\ \downarrow & & \downarrow \\ U \downarrow v & \xrightarrow{U \downarrow (\alpha, u)} & U \downarrow w \end{array} ,$$

dont on montre, en utilisant des propriétés de sesquifunctorialité de la construction comma (voir le théorème 3.6.10) et le fait que $c \setminus C$ se rétracte par transformation oplax sur D_0 , que les flèches verticales sont des rétractes par transformation oplax. On en déduit le résultat.

On revoie à [T6, théorème 7.8] pour plus de détails. \square

En particulier, on obtient ce théorème A pour les 2-triangles pour les équivalences de Thomason :

Corollaire 6.3.5. — *Soit*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ & \searrow v & \swarrow w \\ & C & \end{array}$$

α

un triangle de ∞ -foncteurs commutatif à une transformation oplax α près. Si pour tout objet c de C , le ∞ -foncteur $c \setminus (u, \alpha) : c \setminus A \rightarrow c \setminus B$ est une équivalence de Thomason, alors il en est de même de u .

Démonstration. — C'est le cas particulier du théorème précédent pour \mathcal{W} la classe des équivalences de Thomason. Le résultat est également démontré directement dans [T5]. En effet, la preuve de [T5, théorème 5.2], de nature simpliciale, qui est esquissée dans la preuve de notre théorème 6.1.1, permet de démontrer directement ce résultat

(contrairement à la preuve de [T6] qui nécessite les développements exposés dans la preuve précédente). \square

Remarque 6.3.6. — La version 2-catégorique du théorème précédent est due à Chiche [22].

Par dualité, on en déduit trois variantes, qui diffèrent par le caractère lax ou oplax de la 2-cellule, ainsi que par sa direction.

Corollaire 6.3.7. — Soit

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ v \searrow & \alpha \nearrow & \swarrow w \\ & C & \end{array}$$

un triangle de ∞ -foncteurs commutatif à une transformation lax α près. Si pour tout objet c de C , le ∞ -foncteur ${}^{\text{co}}_c(u, \alpha) : {}^{\text{co}}_c A \rightarrow {}^{\text{co}}_c B$ est une équivalence de Thomason, alors il en est de même de u .

Démonstration. — Cela résulte du corollaire précédent par stabilité des équivalences de Thomason par la dualité $D \mapsto D^{\text{co}}$ (théorème 5.1.4). \square

Corollaire 6.3.8. — Soit

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ v \searrow & \alpha \nwarrow & \swarrow w \\ & C & \end{array}$$

un triangle de ∞ -foncteurs commutatif à une transformation oplax α près. Si pour tout objet c de C , le ∞ -foncteur $(u, \alpha)/_c : A/_c \rightarrow B/_c$ est une équivalence de Thomason, alors il en est de même de u .

Démonstration. — Cela résulte cette fois de la stabilité des équivalences de Thomason par la dualité $D \mapsto D^{\circ}$. \square

Corollaire 6.3.9. — Soit

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ v \searrow & \alpha \swarrow & \swarrow w \\ & C & \end{array}$$

un triangle de ∞ -foncteurs commutatif à une transformation lax α près. Si pour tout objet c de C , le ∞ -foncteur $(u, \alpha)^{\text{co}}/_c : A^{\text{co}}/_c \rightarrow B^{\text{co}}/_c$ est une équivalence de Thomason, alors il en est de même de u .

Démonstration. — C'est la stabilité des équivalences de Thomason par la dualité $D \mapsto D^{\text{op}}$ qui entraîne cette fois le résultat. \square

Remarque 6.3.10. — La conjecture 6.2.8 entraînerait que les trois corollaires précédents sont également valables pour un localisateur fondamental de $\infty\text{-Cat}$ quelconque (voir la remarque 6.2.10).

CHAPITRE 7

THÉORÈME B DE QUILLEN

Le théorème B de Quillen permet, sous certaines hypothèses, de faire le lien entre les tranches catégoriques et les fibres homotopiques. Plus généralement, un résultat de Barwick et Kan de démonstration similaire permet de calculer certains produits fibrés homotopiques comme des catégories comma.

Ce chapitre suit la structure de notre article [T2]. Nous commençons par démontrer l’analogie ∞ -catégorique du théorème B de Quillen, sous la formulation générale de Barwick et Kan, faisant ainsi le lien entre nos ∞ -catégories comma [T6] et les produits fibrés homotopiques dans $\infty\text{-Cat}$. Nous donnons ensuite plusieurs applications de ce théorème, notamment autour des notions d’espace de lacets et de ∞ -groupeïde d’Eilenberg-Mac Lane. En particulier, nous montrons que l’espace des lacets d’un espace modélisé par un ∞ -groupeïde strict est un produit d’espaces d’Eilenberg-Mac Lane.

7.1. Le théorème B

Commençons par introduire le vocabulaire nécessaire à la formulation du théorème B.

7.1.1. — On dit qu’un ∞ -foncteur $u : A \rightarrow B$ est *colocalement homotopiquement constant* si, pour toute 1-cellule $f : b \rightarrow b'$ de B , le ∞ -foncteur induit $f \backslash A : b' \backslash A \rightarrow b \backslash A$ est une équivalence de Thomason.

7.1.2. — On dira qu’un carré commutatif dans $\infty\text{-Cat}$ est *homotopiquement cartésien* si son image par le nerf de Street est un carré homotopiquement cartésien d’ensembles simpliciaux (relativement aux équivalences d’homotopie faibles).

7.1.3. — Si

$$A \xrightarrow{u} C \xleftarrow{v} B$$

sont deux ∞ -foncteurs, alors la ∞ -catégorie comma $u \downarrow v$ (voir le paragraphe 3.6.3) peut se décomposer de la manière suivante :

$$\begin{aligned} u \downarrow v &= A \times_C \mathbf{Hom}_{\text{Iax}}(D_1, C) \times_C B \\ &\simeq A \times_C \mathbf{Hom}_{\text{Iax}}(D_1, C) \times_C C \times_C B \\ &\simeq (u \downarrow C) \times_C B. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} u \downarrow v & \longrightarrow & B \\ \downarrow \lrcorner & & \downarrow v \\ u \downarrow C & \xrightarrow{p_2} & C \end{array},$$

et on vérifie que la flèche horizontale du haut est la seconde projection et que la flèche verticale de gauche est induite par v par functorialité de la construction comma (avec les notations du paragraphe 3.6.8, c'est le ∞ -foncteur $A \downarrow (1_v, v)$).

Voici une version ∞ -catégorique du théorème B de Quillen sous une forme qui dans le cas 1-catégorique est due à Barwick et Kan :

Théorème 7.1.4. — *Soient*

$$A \xrightarrow{u} C \xleftarrow{v} B$$

deux ∞ -foncteurs. Si v est colocalement homotopiquement constant, alors le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} u \downarrow v & \longrightarrow & B \\ \downarrow \lrcorner & & \downarrow v \\ u \downarrow C & \xrightarrow{p_2} & C \end{array}$$

est homotopiquement cartésien.

Démonstration. — En considérant la factorisation

$$B \xrightarrow{j} C \downarrow v \xrightarrow{p_1} C$$

de v donnée par la proposition 3.6.11, le carré de l'énoncé se factorise en deux carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccc} u \downarrow v & \longrightarrow & B \\ j' \downarrow \lrcorner & & \downarrow j \\ \vdots & \longrightarrow & C \downarrow v \\ \downarrow \lrcorner & & \downarrow p_1 \\ u \downarrow C & \xrightarrow{p_2} & C \end{array}$$

et il suffit de montrer que chacun de ces carrés est homotopiquement cartésien. On montre que le ∞ -foncteur j' s'identifie au ∞ -foncteur $A \downarrow j : u \downarrow v \rightarrow u \downarrow p_1$. Or, en vertu de la proposition 5.3.10, le ∞ -foncteur j est un rétracte par transformation oplax à droite fort, et il en est donc de même de $A \downarrow j$ grâce à des propriétés de sesquifunctorialité de la construction comma (théorème 3.6.10). Ainsi, les deux flèches verticales du carré du haut sont des équivalences de Thomason et ce carré est donc homotopiquement cartésien.

Il s'agit donc maintenant de montrer que le carré du bas est homotopiquement cartésien. Cela résulte du fait plus général suivant, qui est le résultat clé pour démontrer le théorème B. \square

Proposition 7.1.5. — *Si $v : B \rightarrow C$ est un ∞ -foncteur colocalement homotopiquement constant, alors tout carré cartésien*

$$\begin{array}{ccc} D' & \longrightarrow & C \downarrow v \\ \downarrow \lrcorner & & \downarrow p_1 \\ D & \longrightarrow & C \end{array}$$

est homotopiquement cartésien.

Démonstration. — La preuve est basée sur le résultat suivant dû à Rezk : un morphisme simplicial $p : X \rightarrow Y$ a la propriété que tout carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & X \\ \downarrow \lrcorner & & \downarrow p \\ Y' & \longrightarrow & Y \end{array}$$

est homotopiquement cartésien si et seulement si pour tout diagramme de carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccc} X'' & \xrightarrow{u'} & X' & \longrightarrow & X \\ \downarrow \lrcorner & & \downarrow \lrcorner & & \downarrow p \\ \Delta_0 & \longrightarrow & \Delta_m & \longrightarrow & Y \end{array} ,$$

u' est une équivalence d'homotopie faible.

Ainsi, considérons un diagramme de carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccc} Q_i & \xrightarrow{f_i} & P & \longrightarrow & N(C \downarrow v) \\ \downarrow \lrcorner & & \downarrow \lrcorner & & \downarrow N(p_1) \\ \Delta_0 & \xrightarrow{i} & \Delta_m & \xrightarrow{x} & NC \end{array} .$$

On montre qu'un tel diagramme se factorise en

$$\begin{array}{ccccccc}
 N(x(i) \downarrow v) & \xrightarrow{f_i} & P & \xrightarrow{g} & N(x \downarrow v) & \longrightarrow & N(C \downarrow v) \\
 \downarrow N(p_1) & \lrcorner & \downarrow \lrcorner & & \downarrow N(p_1) & \lrcorner & \downarrow N(p_1) \\
 \Delta_0 & \xrightarrow{i} & \Delta_m & \xrightarrow{\eta} & N(\mathcal{O}_m) & \xrightarrow{Nx} & NC
 \end{array} ,$$

où η désigne le n -simplexe canonique de \mathcal{O}_n et $gf_i = N(i_*)$ avec

$$i_* : x(i) \downarrow v \rightarrow x \downarrow v$$

le ∞ -foncteur induit par i .

On procède en trois étapes :

- (a) On commence par montrer que f_0 est une équivalence faible. Plus précisément, on montre que c'est un rétracte par déformation fort, produit fibré de trois rétractes par déformation forts

$$\begin{array}{ccccc}
 N(x(0) \downarrow u) & \xrightarrow{N(p_1)} & N(\mathcal{O}_0) & \xleftarrow{\eta} & \Delta_0 \\
 \downarrow N(0_*) & & \downarrow N(0) & & \downarrow 0 \\
 N(x \downarrow u) & \xrightarrow{N(p_1)} & N(\mathcal{O}_m) & \xleftarrow{\eta} & \Delta_m
 \end{array} .$$

Pour ce faire, on utilise notamment le fait que $0 : D_0 \rightarrow \mathcal{O}_n$ est un rétracte par transformation oplax (proposition 5.3.8) et la sesquifonctorialité de la construction comma (théorème 3.6.10) pour obtenir qu'il en est de même de 0_* .

- (b) On en déduit par deux sur trois que g est une équivalence faible.
- (c) Ainsi, pour montrer que f_i est une équivalence faible, il suffit de montrer que i_* en est une. Or, en utilisant encore une fois la sesquifonctorialité de la construction comma, on obtient une transformation oplax

$$\begin{array}{ccc}
 x(i) \setminus B & \xrightarrow{x(l) \setminus B} & x(0) \setminus B \\
 \downarrow i_* & \swarrow \leftarrow & \downarrow 0_* \\
 & & x \downarrow u
 \end{array} ,$$

où l est n'importe quel morphisme de 0 vers m dans \mathcal{O}_m . Puisqu'on a supposé v colocalement homotopiquement constant, le ∞ -foncteur horizontal est une équivalence de Thomason. Par ailleurs, on a déjà montré que 0_* est une équivalence de Thomason. On obtient donc qu'il en est de même de i_* . □

Remarque 7.1.6. — Le résultat de Rezk utilisé dans la démonstration précédente est spécifique aux équivalences d'homotopie faibles et ne s'applique pas à un localisateur fondamental simplicial quelconque au sens du paragraphe 6.2.4. Le théorème B n'est pas valable pour un localisateur quelconque.

On déduit du théorème précédent le théorème B sous sa formulation plus classique :

Corollaire 7.1.7 (Théorème B). — *Si $u : A \rightarrow B$ est un ∞ -foncteur colocalement homotopiquement constant, alors, pour tout objet b de B , le carré cartésien*

$$\begin{array}{ccc} b \backslash A & \longrightarrow & A \\ b \backslash u \downarrow & \lrcorner & \downarrow u \\ b \backslash B & \longrightarrow & B \end{array}$$

est homotopiquement cartésien.

Démonstration. — C'est le théorème précédent appliqué à $D_0 \xrightarrow{b} B \xleftarrow{u} A$. \square

Remarque 7.1.8. — Le cas 2-catégorique du corollaire précédent a été montré par Cegarra [17].

Les deux théorèmes précédents peuvent se formuler en termes de produits fibrés homotopiques :

Corollaire 7.1.9. — *Soient*

$$A \xrightarrow{u} C \xleftarrow{v} B$$

deux ∞ -foncteurs. Si v est colocalement homotopiquement constant, alors la ∞ -catégorie comma $u \downarrow v$ est le produit fibré homotopique $A \times_C^h B$.

Démonstration. — En vertu du théorème 7.1.4, le carré

$$\begin{array}{ccc} u \downarrow v & \longrightarrow & B \\ u \downarrow \lrcorner & & \downarrow v \\ u \downarrow C & \xrightarrow{p_2} & C \end{array}$$

est homotopiquement cartésien. Or, en vertu de la remarque 5.3.11, le ∞ -foncteur u se factorise en

$$A \xrightarrow{j'} u \downarrow C \xrightarrow{p_2} C \quad ,$$

où j' est une équivalence de Thomason, ce qui entraîne le résultat. \square

Corollaire 7.1.10. — *Si $u : A \rightarrow B$ est un ∞ -foncteur colocalement homotopiquement constant et b est un objet de B , alors la tranche $b \backslash A$ est la fibre homotopique de u en b .*

Démonstration. — C'est un cas particulier du corollaire précédent. \square

Les énoncés précédents admettent des variantes pour les trois autres notions de tranche :

7.1.11. — On dit qu'un ∞ -foncteur $u : A \rightarrow B$ est *localement homotopiquement constant* si, pour toute 1-cellule $f : b \rightarrow b'$ de B , le ∞ -foncteur induit $A/f : A/b \rightarrow A/b'$ est une équivalence de Thomason.

Théorème 7.1.12. — *Soient*

$$A \xrightarrow{u} C \xleftarrow{v} B$$

deux ∞ -foncteurs. Si u est localement homotopiquement constant, alors le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} u \downarrow v & \longrightarrow & A \\ \downarrow \lrcorner & & \downarrow u \\ C \downarrow v & \xrightarrow{p_1} & C \end{array}$$

(variante du carré du paragraphe 7.1.3) est homotopiquement cartésien.

Démonstration. — Cela résulte du théorème 7.1.4 en utilisant la dualité $X \mapsto X^\circ$ qui échange les tranches au-dessus et les tranches au-dessous (proposition 3.4.4), renverse l'ordre dans la construction comma (proposition 3.6.5) et respecte les carrés homotopiquement cartésiens puisqu'elle préserve les équivalences de Thomason (théorème 5.1.4). \square

Théorème 7.1.13. — *Soient*

$$A \xrightarrow{u} C \xleftarrow{v} B$$

deux ∞ -foncteurs. Si pour toute 1-cellule $f : b \rightarrow b'$ de B , le ∞ -foncteur $b' \setminus^{\text{co}} B \rightarrow b \setminus^{\text{co}} B$ (resp. le ∞ -foncteur $B \int^{\text{co}} b \rightarrow B \int^{\text{co}} b'$) est une équivalence de Thomason, alors le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} u \downarrow' v & \longrightarrow & B \\ \downarrow \lrcorner & & \downarrow v \\ u \downarrow' C & \xrightarrow{p_2} & C \end{array} \quad (\text{resp.} \quad \begin{array}{ccc} u \downarrow' v & \longrightarrow & A \\ \downarrow \lrcorner & & \downarrow u \\ C \downarrow' v & \xrightarrow{p_1} & C \end{array})$$

(variante du carré du paragraphe 7.1.3 pour la construction comma lax \downarrow' introduite au paragraphe 3.6.4) est homotopiquement cartésien.

Démonstration. — Cela se démontre par dualité comme dans la preuve de la variante précédente. \square

Remarque 7.1.14. — Nous avons seulement énoncé les variantes du théorème 7.1.4 mais les trois corollaires qui le suivent admettent également des variantes analogues.

7.2. Quelques applications

Nous allons donner quelques applications du théorème B ∞ -catégorique. Tout d'abord, le théorème B entraîne le théorème A non relatif.

Théorème 7.2.1 (Théorème A). — *Soit $u : A \rightarrow B$ un ∞ -foncteur. Si pour tout objet b de B , la tranche $b \setminus A$ est asphérique, alors u est une équivalence de Thomason.*

Démonstration. — L'hypothèse entraîne trivialement que le ∞ -foncteur u est colocalement homotopiquement constant. Ainsi, en vertu du théorème B sous l'incarnation du corollaire 7.1.10, pour tout objet b de B , la fibre homotopique de u en b est $b \setminus A$ qui est asphérique. Or, un morphisme simplicial dont toutes les fibres homotopiques sont triviales est une équivalence d'homotopie faible, et u est bien une équivalence de Thomason. \square

Passons maintenant à une application aux espaces de lacets de ∞ -catégories.

Théorème 7.2.2. — *Soit C une ∞ -catégorie muni d'un objet c_0 . Supposons qu'une des deux conditions suivantes soit satisfaite :*

- (a) *pour toute 1-cellule $f : c \rightarrow c'$ de C , le ∞ -foncteur $\underline{\mathbf{Hom}}_C(c', c_0) \rightarrow \underline{\mathbf{Hom}}_C(c, c_0)$ induit par f est une équivalence de Thomason ;*
- (b) *pour toute 1-cellule $f : c \rightarrow c'$ de C , le ∞ -foncteur $\underline{\mathbf{Hom}}_C(c_0, c) \rightarrow \underline{\mathbf{Hom}}_C(c_0, c')$ induit par f est une équivalence de Thomason.*

Alors $\underline{\mathbf{Hom}}_C(c_0, c_0)$ est un modèle de l'espace des lacets de (C, c_0) , au sens où $N(\underline{\mathbf{Hom}}_C(c_0, c_0))$ a le type d'homotopie de l'espace des lacets de (NC, c_0) .

Démonstration. — On vérifie (voir [T7, proposition B.6.2]) que si x et y sont deux objets de C , alors la ∞ -catégorie comma $x \downarrow y$, où x et y sont vus comme des ∞ -foncteurs $D_0 \rightarrow C$, est canoniquement isomorphe à la catégorie $\underline{\mathbf{Hom}}_C(x, y)^\circ$. Ainsi, le corollaire 7.1.9 appliqué au ∞ -foncteur $D_0 \rightarrow C$ donne que, si pour toute 1-cellule $f : c \rightarrow c'$ de C , le ∞ -foncteur induit $\underline{\mathbf{Hom}}_C(c', c_0)^\circ \rightarrow \underline{\mathbf{Hom}}_C(c, c_0)^\circ$ est une équivalence de Thomason, alors $\underline{\mathbf{Hom}}_C(c_0, c_0)^\circ$ a le type d'homotopie du produit fibré homotopique $c_0 \times_C^h c_0$, c'est-à-dire de l'espace des lacets de (C, c_0) . On a donc obtenu le résultat à une dualité près, et on conclut en utilisant le théorème 5.1.4 et le corollaire qui le suit. \square

Nous allons maintenant donner quelques conséquences de ce résultat, notamment en lien avec les espaces d'Eilenberg-Mac Lane.

7.2.3. — Soit M un monoïde commutatif. Pour tout $n \geq 0$, on notera $B^n M$ la n -catégorie obtenue en suspendant n fois M . En particulier, on a

$$(B^n M)_k = \begin{cases} \{*\} & \text{si } 0 \leq k < n, \\ M & \text{si } k = n. \end{cases}$$

Théorème 7.2.4. — Pour tout groupe abélien π et tout $n \geq 1$, la ∞ -catégorie $B^n\pi$ est un $K(\pi, n)$, au sens où son nerf $N(B^n\pi)$ est un $K(\pi, n)$.

Démonstration. — Le résultat est bien connu si $n = 1$. Si $n \geq 2$, toutes les 1-cellules de $B^n\pi$ sont triviales et le théorème précédent entraîne donc qu'un modèle de l'espace des lacets de $B^n\pi$ est $\underline{\text{Hom}}_{B^n\pi}(*, *) \simeq B^{n-1}\pi$, d'où le résultat par récurrence. \square

Remarque 7.2.5. — Dans [9], Berger prouve que la réalisation topologique du nerf cellulaire de $B^n\pi$ est un $K(\pi, n)$, montrant ainsi que $B^n\pi$ est un $K(\pi, n)$ en un sens *a priori* différent (voir [9, corollaire 4.3 et section 4.10]). Il résulte de la comparaison du nerf de Street et du nerf cellulaire que nous avons établie avec Maltsiniotis que ces deux significations « d'être un $K(\pi, n)$ » coïncident.

Théorème 7.2.6. — Soit π un groupe commutatif ordonné dont l'ensemble ordonné sous-jacent est sphérique, en tant que catégorie. Notons π^+ son monoïde des éléments positifs. Alors, pour tout $n \geq 1$, la ∞ -catégorie $B^n\pi^+$ est un $K(\pi, n)$.

Démonstration. — L'inclusion $\pi^+ \subset \pi$ induit un ∞ -foncteur $B^n\pi^+ \hookrightarrow B^n\pi$ dont nous allons montrer qu'il est une équivalence de Thomason. Pour cela, nous allons utiliser le théorème A. Nous devons donc prouver que la ∞ -catégorie $*\backslash B^n\pi^+$ est sphérique, ce que nous allons faire par récurrence sur $n \geq 1$. On vérifie que cette ∞ -catégorie se décrit de la manière suivante : c'est la n -catégorie évidente dont la $(n-1)$ -catégorie sous-jacente est $B^{n-1}\pi$ et dont la catégorie des $(n-1)$ -cellules et n -cellules est l'ensemble ordonné π . En particulier, pour $n = 1$, on obtient l'ensemble ordonné π vu comme une catégorie, ce qui termine la démonstration dans ce cas. Si $n > 1$, on a un isomorphisme

$$\underline{\text{Hom}}_{*\backslash(B^n\pi^+)}(*, *) \simeq *\backslash(B^{n-1}\pi^+)$$

et, par hypothèse de récurrence, ces ∞ -catégories sont sphériques. On peut donc appliquer le théorème 7.2.2 et on obtient que l'espace des lacets de $*\backslash B^n\pi^+$ est sphérique. Puisque cette ∞ -catégorie est trivialement connexe, cela entraîne qu'elle est bien sphérique, d'où le résultat. \square

Exemple 7.2.7. — Pour tout $n \geq 1$, la ∞ -catégorie $B^n\mathbb{N}$ est un $K(\mathbb{Z}, n)$.

On termine par une application aux ∞ -groupoïdes stricts.

7.2.8. — Rappelons qu'un ∞ -groupoïde strict est une ∞ -catégorie dont toutes les i -cellules pour $i > 0$ admettent un inverse (strict) pour la composition $*_{i-1}$.

On dispose d'une notion bien connue de d'équivalence de ∞ -groupoïdes : un ∞ -foncteur $f : G \rightarrow H$ entre ∞ -groupoïdes est une *équivalence* si

- pour tout objet y de H , il existe un objet x de G et une 1-cellule $u(x) \rightarrow y$ de H ,

- pour tout $i \geq 0$, tout couple u, v de i -cellules parallèles de G et toute $(i+1)$ -cellule $\beta : f(u) \rightarrow f(v)$ de H , il existe une $(i+1)$ -cellule $\alpha : u \rightarrow v$ de G et une $(i+2)$ -cellule $f(\alpha) \rightarrow \beta$ de H .

On montre sans trop de difficulté (voir [T2, proposition 4.12]) que toute équivalence de ∞ -groupoïdes est une équivalence de Thomason. La réciproque entre ∞ -groupoïdes, plus délicate, est également vraie mais nous ne l'utiliserons pas dans la suite.

Théorème 7.2.9. — *Pour tout ∞ -groupoïde strict G muni d'un objet x , l'espace des lacets de (G, x) est un produit d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane (en incluant l'espace discret $K(E, 0)$, pour E un ensemble, parmi les espaces d'Eilenberg-Mac Lane).*

Démonstration. — Puisque toute 1-cellule de G est inversible, l'hypothèse du théorème 7.2.2 est satisfaite et on en déduit que $\underline{\mathbf{Hom}}_G(x, x)$ a le type d'homotopie de l'espace des lacets de (G, x) . Puisque toutes les composantes connexes d'un espace de lacets sont faiblement équivalentes, il suffit de montrer que la composante connexe de $1_x : x \rightarrow x$ dans $\underline{\mathbf{Hom}}_G(x, x)$ est équivalente à un produit d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane. Or, cette composante connexe est équivalente au sous- ∞ -groupoïde plein de $\underline{\mathbf{Hom}}_G(x, x)$ d'unique objet 1_x . Cet ∞ -groupoïde s'obtient en « désuspendant » un sous- ∞ -groupoïde G' de G d'unique objet x et d'unique 1-cellule 1_x . Mais l'argument d'Eckman-Hilton entraîne qu'un tel ∞ -groupoïde est isomorphe à un produit de $B^n\pi$, d'où le résultat. \square

CHAPITRE 8

TYPES D'HOMOTOPIE ∞ -CATÉGORIQUES

Dans ce chapitre, dont le contenu est extrait de [T4], écrit avec Maltsiniotis, nous allons associer à tout complexe simplicial une ∞ -catégorie libre au sens des polygraphes, sorte d'oriental généralisé, dont nous conjecturons qu'elle a le type d'homotopie du complexe simplicial de départ. Nous démontrons cette conjecture dans le cas particulier où le complexe simplicial provient d'un ensemble ordonné. Ce résultat suffit, au prix d'une subdivision barycentrique, à associer à tout CW-complexe régulier une ∞ -catégorie libre au sens des polygraphes de même type d'homotopie. Afin de démontrer ce résultat, en plus d'utiliser des conséquences du théorème A et de la comparaison des nerfs, on introduit diverses notions d'objet initial et d'objet final dans une ∞ -catégorie. On montre, en utilisant la théorie de Steiner, que les orientaux possèdent à la fois un objet « oplax-initial » et un objet « oplax-final », ce qui entraîne que certains Hom itérés dans les orientaux sont asphériques en un sens très fort, ce que l'on peut interpréter comme des résultats de cohérence.

8.1. L'oriental associé à un complexe simplicial

Commençons par quelques préliminaires sur les complexes simpliciaux.

8.1.1. — On rappelle qu'un *complexe simplicial* (E, Φ) est un ensemble ordonné E , muni d'un sous-ensemble Φ de l'ensemble ξE des parties finies non vides totalement ordonnées de E , vérifiant les deux conditions suivantes :

(a) pour tout x dans E , le singleton $\{x\}$ appartient à Φ ;

(b) si S appartient à Φ , alors tout sous-ensemble non vide de S appartient à Φ .

Si (E, Φ) et (E', Φ') sont deux complexes simpliciaux, un *morphisme* du premier vers le second est la donnée d'une application croissante (au sens large) $f : E \rightarrow E'$ envoyant tout élément de Φ sur un élément de Φ' . On notera \mathcal{CS} la catégorie des complexes simpliciaux et des morphismes entre ceux-ci. Cette catégorie est complète et cocomplète.

8.1.2. — Le foncteur « ensemble ordonné sous-jacent à un complexe simplicial » admet un adjoint à gauche et un adjoint à droite. On notera $\kappa : \mathcal{O}rd \rightarrow \mathcal{CS}$, où $\mathcal{O}rd$ désigne la catégorie des ensembles ordonnés, son adjoint à droite. Explicitement, si E est un ensemble ordonné, on a $\kappa(E) = (E, \xi E)$. On vérifie immédiatement que ce foncteur est pleinement fidèle et on identifiera $\mathcal{O}rd$ à une sous-catégorie pleine de \mathcal{CS} via le foncteur κ .

8.1.3. — En restreignant le foncteur $\kappa : \mathcal{O}rd \rightarrow \mathcal{CS}$, on obtient un foncteur $\kappa : \mathbf{\Delta} \rightarrow \mathcal{CS}$ et donc un couple de foncteurs adjoints

$$\kappa_! : \widehat{\mathbf{\Delta}} \rightarrow \mathcal{CS} \quad \dashv \quad \kappa^* : \mathcal{CS} \rightarrow \widehat{\mathbf{\Delta}},$$

la catégorie \mathcal{CS} étant cocomplète. Explicitement, si (E, Φ) est un complexe simplicial, on a

$$\begin{aligned} \kappa^*(E, \Phi)_n &= \text{Hom}_{\mathcal{CS}}((\Delta_n, \xi \Delta_n), (E, \Phi)) \\ &\simeq \{i_0 \leq \dots \leq i_n \in E \mid \{i_0, \dots, i_n\} \in \Phi\}. \end{aligned}$$

Nous allons maintenant associer à tout complexe simplicial une ∞ -catégorie libre au sens des polygraphes.

8.1.4. — Si (E, Φ) est un complexe simplicial, on lui associe une ∞ -catégorie $\mathcal{O}_{(E, \Phi)}$ en posant

$$\mathcal{O}_{(E, \Phi)} = \nu \kappa^*(E, \Phi).$$

Autrement dit, on définit un foncteur $\mathcal{O} : \mathcal{CS} \rightarrow \infty\text{-Cat}$ en composant

$$\mathcal{CS} \xrightarrow{\kappa^*} \widehat{\mathbf{\Delta}} \xrightarrow{c} \mathcal{C}_{\text{da}} \xrightarrow{\nu} \infty\text{-Cat}$$

(voir l'exemple 2.2.2 pour la définition de c et le paragraphe 2.2.5 pour celle de ν). Le composé

$$\mathbf{\Delta} \longrightarrow \mathcal{O}rd \xrightarrow{\kappa} \mathcal{CS} \xrightarrow{\kappa^*} \widehat{\mathbf{\Delta}},$$

où la flèche de gauche est l'inclusion canonique, n'étant autre que le plongement de Yoneda, on a

$$\mathcal{O}_n = \mathcal{O}_{(\Delta_n, \xi \Delta_n)}.$$

Lorsque E est un ensemble ordonné, on notera parfois

$$\mathcal{O}_E = \mathcal{O}_{(E, \xi E)}.$$

Théorème 8.1.5. — *Pour tout complexe simplicial (E, Φ) , le complexe dirigé augmenté $\kappa^*(E, \Phi)$ est un complexe de Steiner fort de base*

$$\{(i_0, \dots, i_p) \mid p \geq 0, i_0 < \dots < i_p, \{i_0, \dots, i_p\} \in \Phi\}.$$

En particulier, la ∞ -catégorie $\mathcal{O}_{(E, \Phi)}$ est libre au sens des polygraphes, engendrée par les atomes $\langle i_0, \dots, i_p \rangle$ correspondant.

Démonstration. — La preuve, essentiellement technique, est inspirée du cas de $c(\Delta_n)$, traité par Steiner [70, exemple 3.8]. Voir [T4, théorème 8.6]. \square

Théorème 8.1.6. — *Pour tout complexe simplicial (E, Φ) , la ∞ -catégorie $\mathcal{O}_{(E, \Phi)}$ est canoniquement isomorphe à $c_\infty \kappa^*(E, \Phi)$, où c_∞ désigne l'adjoint à gauche du nerf de Street.*

Démonstration. — On dispose d'un ∞ -foncteur canonique

$$c_\infty \kappa^*(E, \Phi) \longrightarrow \nu \lambda c_\infty \kappa^*(E, \Phi) \xrightarrow{\sim} \nu c \kappa^*(E, \Phi) = \mathcal{O}_{(E, \Phi)},$$

la flèche de gauche étant le morphisme d'adjonction, et celle de droite étant induite par l'isomorphisme $\lambda c_\infty \simeq c$ qui résulte du fait que ces deux foncteurs qui commutent aux limites inductives coïncident sur les représentables.

On vérifie qu'on a un isomorphisme canonique

$$\kappa^*(E, \Phi) \simeq \varinjlim_{S \in \Phi} \kappa^*(S, \xi S).$$

Par ailleurs, on montre, en utilisant le théorème précédent, qu'on a un isomorphisme canonique

$$\mathcal{O}_{(E, \Phi)} \simeq \varinjlim_{S \in \Phi} \mathcal{O}_{(S, \xi S)}.$$

On en déduit qu'on peut se ramener au cas où (E, Φ) est un ensemble totalement ordonné fini non vide, c'est-à-dire est isomorphe à un Δ_n , cas qui est immédiat. On renvoie à [T4, théorème 9.5] pour plus de détails. \square

8.1.7. — Si E est un ensemble ordonné, on peut décrire en basse dimension la ∞ -catégorie \mathcal{O}_E de la manière suivante.

Les objets de \mathcal{O}_E sont les éléments de E .

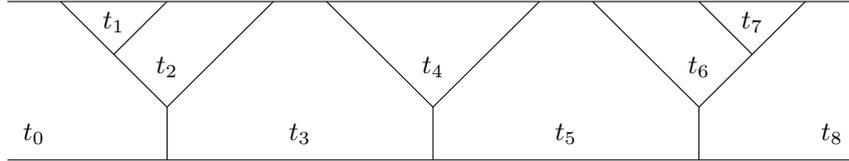
Pour tous $i < j$ dans E , on a une 1-cellule $\langle i, j \rangle : i \rightarrow j$ dans \mathcal{O}_E et les 1-cellules de \mathcal{O}_E sont engendrées librement par ces 1-cellules. Ainsi, si i et j sont deux objets de \mathcal{O}_E , il existe une 1-cellule de i vers j dans \mathcal{O}_E si et seulement si $i \leq j$ et, dans ce cas, les 1-cellules de i vers j sont en bijection avec les parties finies totalement ordonnées de E de plus petit élément i et de plus grand élément j .

Pour tous $i < j < k$ dans E , on a une 2-cellule $\langle i, j, k \rangle$ dans \mathcal{O}_E qui s'inscrit dans un triangle

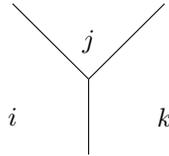
$$\begin{array}{ccc} & & k \\ & \nearrow \langle i, k \rangle & \uparrow \langle j, k \rangle \\ i & \xrightarrow{\langle i, j \rangle} & j \end{array}$$

et les 2-cellules de \mathcal{O}_E sont engendrées librement par ces 2-cellules. En particulier, si S et T sont deux parties de E correspondant à des 1-cellules d'un objet i vers un objet j , alors il existe une 2-cellule de S vers T dans \mathcal{O}_E si et seulement si $S \subset T$ et on peut alors représenter les 2-cellules de S vers T comme des forêts d'arbres trivalents comme suit. Si $S = \{s_0 < \dots < s_p\}$ et $T = \{t_0 < \dots < t_q\}$, avec $s_0 = t_0$, $s_p = t_q$

et $S \subset T$, alors les 2-cellules de S vers T sont en bijection avec les suites d'arbres trivalents planaires $(A_l)_{1 \leq l \leq p}$ tels que le nombre de feuilles de A_l , pour $1 \leq l \leq p$, soit le cardinal de l'ensemble des t dans T tels que $s_{l-1} < t \leq s_l$. Voici un exemple pour $T = \{t_0 < \dots < t_8\}$ et $S = \{t_0 < t_3 < t_5 < t_8\}$:

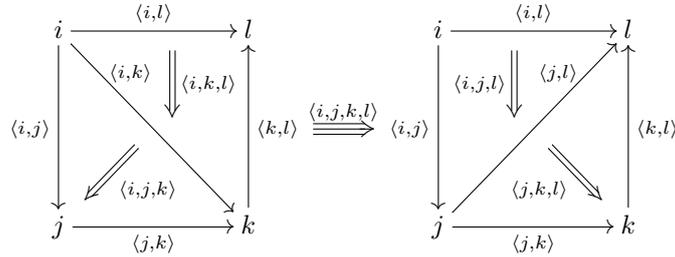


Dans cette représentation, l'arbre

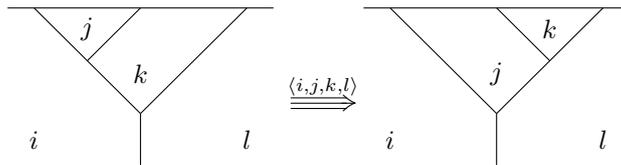


correspond à la 2-cellule génératrice $\langle i, j, k \rangle$.

Pour tous $i < j < k < l$ dans E , on a une 3-cellule $\langle i, j, k, l \rangle$ dans \mathcal{O}_E



ou, dans la représentation des 2-cellules en termes d'arbres,



et les 3-cellules de \mathcal{O}_E sont engendrées librement par ces 3-cellules.

8.2. Objets initiaux et finaux

Le but de cette section est de montrer que les orientaux admettent des objets initiaux et finaux en un sens adéquat, et d'en déduire des propriétés d'asphéricité de certaines ∞ -catégories de cellules des orientaux.

8.2.1. — Soient C une ∞ -catégorie et c_0 un objet de C . Une *contraction initiale* de C centrée en c_0 est une transformation oplax $\alpha : c_0 \Rightarrow 1_C$, où $c_0 : C \rightarrow C$ désigne le ∞ -foncteur constant de valeur c_0 , qui satisfait aux conditions supplémentaires suivantes :

- (a) $\alpha_{c_0} = 1_{c_0}$;
- (b) pour toute cellule x de C , on a $\alpha_{\alpha_x} = 1_{\alpha_x}$.

On dit qu'un objet c_0 d'une ∞ -catégorie C est *oplax-initial* s'il existe une contraction de C centrée en c_0 .

On définit de même la notion de *contraction finale* en renversant le sens de la transformation oplax en $\alpha : 1_C \Rightarrow c_0$. On obtient ainsi une notion d'objet *oplax-final*. Un objet oplax-final de C n'est rien d'autre qu'un objet oplax-initial de C° .

8.2.2. — On dit qu'un objet c_0 d'une ∞ -catégorie C est *quasi-initial* si, pour tout objet c de C , la ∞ -catégorie $\underline{\text{Hom}}_C(c_0, c)$ admet un objet quasi-initial. Cette définition, coïnductive, peut se comprendre de la manière suivante. On dit qu'un ensemble X de cellules de C est *quasi-initial* si, pour tout $i \geq 0$, toute i -cellule x de X et toute i -cellule y de C parallèle à x , il existe une $(i + 1)$ -cellule de x vers y dans X . Par définition, un objet c_0 de C est quasi-initial s'il appartient à un ensemble quasi-initial de cellules de C .

On définit de même la notion d'objet *quasi-final* d'une ∞ -catégorie. Un objet quasi-final de C est exactement un objet quasi-initial de C° .

Remarque 8.2.3. — Dans le cas où C est une n -catégorie pour n fini, on peut définir les notions d'objets initial et final plus simplement par récurrence. Par exemple, pour les objets quasi-initiaux :

- (a) un objet d'une 0-catégorie C est quasi-initial s'il est l'unique objet de C ;
- (b) un objet c_0 d'une n -catégorie, pour $n > 0$, est quasi-initial si, pour tout objet c de C , la $(n - 1)$ -catégorie $\underline{\text{Hom}}_C(c_0, c)$ admet un objet quasi-initial.

Proposition 8.2.4. — *Tout objet oplax-initial (resp. oplax-final) d'une ∞ -catégorie est quasi-initial (resp. quasi-final).*

Plus généralement, soit α une contraction initiale (resp. finale) d'une ∞ -catégorie C centrée en un objet c_0 . Alors toute cellule x de C telle que $\alpha_x = 1_x$ est un objet quasi-initial (resp. quasi-final) de $\underline{\text{Hom}}_C(sx, tx)$, où on convient que cette dernière ∞ -catégorie est C dans le cas où x est un objet.

Démonstration. — On vérifie que

$$X = \{c_0\} \cup \{\alpha_c \mid c \text{ cellule de } C\}$$

est un ensemble quasi-initial de C . Pour cela, on montre que si x est une cellule de X et y une cellule de C parallèle à x , alors α_y , qui est dans X , est bien une cellule de source x et de but y . On renvoie à [T4, proposition B.13] pour plus de détails. \square

Proposition 8.2.5. — *Si une ∞ -catégorie C admet un objet quasi-initial ou quasi-final, alors elle est asphérique.*

Démonstration. — Soit c_0 un objet quasi-initial de C . On commence par montrer le résultat par récurrence sur $n \geq 0$, dans le cas où C est une n -catégorie. Si $n = 0$, le résultat est clair. Si $n > 0$, alors pour tout objet c de C , la $(n-1)$ -catégorie $\underline{\text{Hom}}_C(c_0, c)$ admet un objet quasi-initial et est donc asphérique par hypothèse de récurrence. L'asphéricité de C résulte donc du corollaire 6.1.6.

Le cas général résulte de l'assertion suivante : pour qu'une ∞ -catégorie C soit asphérique, il suffit que, pour tout $k \geq 0$, la k -catégorie $\tau_k^i(C)$ soit asphérique. (C'est une conséquence immédiate du fait que le π_i d'un ensemble simplicial dépend uniquement de son $(i+1)$ -squelette.)

On renvoie à [T4, proposition B.7] pour plus de détails. \square

Notre principal outil pour construire des contractions sera la théorie de Steiner.

8.2.6. — On dira qu'un complexe dirigé augmenté K est *décent* si, pour tout x dans K_0^* , on a $e(x) \geq 0$. Si K est un tel complexe et c_0 est une 0-chaîne positive telle que $e(c_0) = 1$, on vérifie immédiatement qu'on définit un endomorphisme $f : K \rightarrow K$ en posant, pour x dans K_n ,

$$f(x) = \begin{cases} e(x)c_0 & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

On appellera ce morphisme le *morphisme constant de valeur c_0* et on le notera parfois $c_0 : K \rightarrow K$.

Notons qu'une 0-chaîne positive c_0 telle que $e(c_0) = 1$ correspond précisément à un objet de la ∞ -catégorie $\nu(K)$, qu'on notera également c_0 , et que $\nu(c_0) : \nu(K) \rightarrow \nu(K)$ est le ∞ -foncteur constant de valeur c_0 .

8.2.7. — Soit K un complexe dirigé augmenté *décent* et soit c_0 une 0-chaîne positive de K telle que $e(c_0) = 1$. Une *contraction initiale de K centrée en c_0* est une homotopie h (au sens des complexes dirigés augmentés, voir le paragraphe 3.2.8) de $c_0 : K \rightarrow K$ (voir le paragraphe précédent) vers 1_K , qui est de carré nul, au sens où pour toute chaîne x de K on a $hh(x) = 0$.

On définit de même la notion de *contraction finale* en renversant le sens de l'homotopie h .

Proposition 8.2.8. — *Soit K un complexe dirigé augmenté décent muni d'une contraction initiale (resp. finale) centrée en une 0-chaîne c_0 . Alors la transformation oplax associée à h (voir la proposition 3.2.9) est une contraction initiale (resp. finale) de $\nu(K)$ centrée en c_0 .*

Démonstration. — Donnons une indication sur la démonstration dans le cas initial. Il est immédiat que la transformation oplax α associée à h a pour source c_0 et but

de $1_{\nu(K)}$. Par ailleurs, on vérifie que la condition $hh = 0$ entraîne les deux conditions des contractions ∞ -catégoriques (voir [T4, proposition B.18]). \square

Nous allons déduire de cette proposition que les orientaux admettent un objet oplax-initial et un objet oplax-final.

Proposition 8.2.9. — *Soit $n \geq 0$. Le complexe dirigé augmenté $c\Delta_n$ satisfait les propriétés suivantes :*

(a) *La formule*

$$h(i_0, \dots, i_p) = (0, i_0, \dots, i_p),$$

pour $p \geq 0$, où par convention $(j_0, \dots, j_q) = 0$ si les j_l ne sont pas distincts, définit une contraction initiale de $c\Delta_n$ centrée en (0) .

(b) *Les formules*

$$\begin{aligned} h'(i_0) &= \sum_{i_0 < k \leq n} (k-1, k), \\ h'(i_0, \dots, i_p) &= \sum_{i_0 < k < i_1} (k-1, k, i_1, \dots, i_p), \end{aligned}$$

pour $p \geq 1$, avec la même convention, définissent une contraction finale de $c\Delta_n$ centrée en (n) .

Démonstration. — Il s'agit de vérifier des conditions purement calculatoires. Voir [T4, propositions 6.3 et 6.5]. \square

Remarque 8.2.10. — Les homotopies h et h' de l'énoncé précédent ont déjà été considérées dans la preuve de la proposition 5.3.8 pour montrer que les ∞ -foncteurs $0 : D_0 \rightarrow \mathcal{O}_n$ et $n : D_0 \rightarrow \mathcal{O}_n$ sont des rétractes par transformation oplax forts. En fait, si C est une ∞ -catégorie et c_0 un objet de C , alors une contraction initiale (resp. finale) de C centrée en c_0 correspond à une structure de rétracte par transformation oplax à gauche (resp. à droite) fort sur le ∞ -foncteur $c_0 : D_0 \rightarrow C$ dont la transformation oplax satisfait à la condition additionnelle (b) du paragraphe 8.2.1.

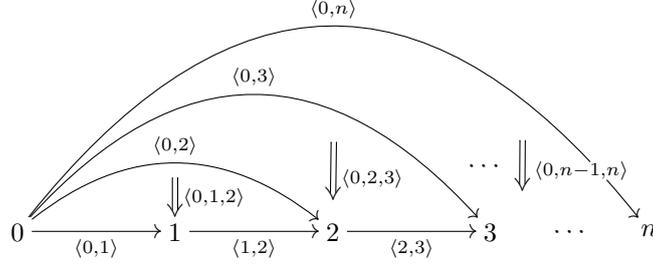
Théorème 8.2.11. — *Soit $n \geq 0$. L'oriental \mathcal{O}_n satisfait les propriétés suivantes :*

- (a) *les objets 0 et n sont respectivement un objet oplax-initial et un objet oplax-final de \mathcal{O}_n ;*
 (b) *si $n \geq 1$, les 1-cellules*

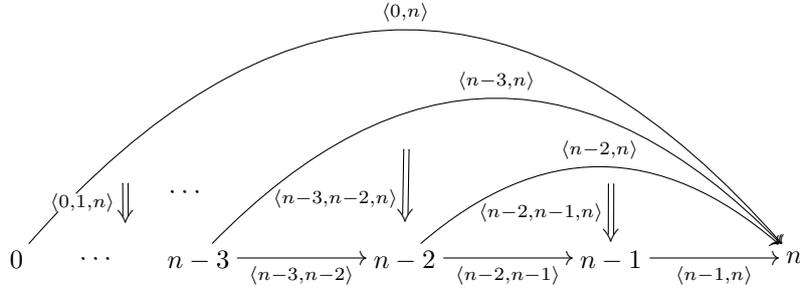
$$0 \xrightarrow{\langle 0, n \rangle} n \quad \text{et} \quad 0 \xrightarrow{\langle 0, 1 \rangle} 1 \xrightarrow{\langle 1, 2 \rangle} \dots \quad n-1 \xrightarrow{\langle n-1, n \rangle} n$$

sont respectivement un objet quasi-initial et un objet quasi-final de $\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{O}_n}(0, n)$;

(c) si $n \geq 2$, les 2-cellules



et



sont respectivement un objet quasi-initial et un objet quasi-final de la $(n-2)$ -catégorie $\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{O}_n}(\langle 0,n \rangle, \langle n-1,n \rangle \cdots \langle 0,1 \rangle)$.

Démonstration. — La première assertion résulte de la proposition précédente en vertu de la proposition 8.2.8. Pour les deux autres assertions, grâce à la proposition 8.2.4, en notant α et α' les transformations oplax associées à h et h' , il suffit de vérifier que $\alpha_x = 1_x$ et $\alpha'_{x'} = 1_{x'}$, pour x (resp. x') les deux objets quasi-initiaux (resp. quasi-finaux) apparaissant dans l'énoncé. En termes des homotopies h et h' , cela revient à vérifier que

$$h(0, n) = 0 \quad \text{et} \quad h'((0, 1) + (1, 2) + \cdots + (n-1, n)) = 0,$$

et

$$h((0, 1, 2) + (0, 2, 3) + \cdots + (0, n-1, n)) = 0,$$

$$h'((0, 1, n) + (1, 2, n) + \cdots + (n-2, n-1, n)) = 0,$$

ce qui résulte de simples calculs. On renvoie à la preuve de [T4, théorème 6.6] pour plus de détails. \square

8.3. Le type d'homotopie de l'oriental associé à un ensemble ordonné

8.3.1. — Soit (E, Φ) un complexe simplicial. On dispose d'un morphisme simplicial canonique

$$\kappa^*(E, \Phi) \rightarrow N\mathcal{O}_{(E, \Phi)}.$$

En effet, en vertu du théorème 8.1.6, la ∞ -catégorie $\mathcal{O}_{(E, \Phi)}$ est canoniquement isomorphe à $c_\infty \kappa^*(E, \Phi)$, et ce morphisme est donc induit par l'unité de l'adjonction $c_\infty \dashv N$.

Dans [T4, section 10], nous proposons avec Maltsiniotis la conjecture suivante :

Conjecture 8.3.2. — *Pour tout complexe simplicial (E, Φ) , le morphisme canonique*

$$\kappa^*(E, \Phi) \rightarrow N\mathcal{O}_{(E, \Phi)}$$

est une équivalence d'homotopie faible.

Nous prouvons ce résultat dans le cas particulier où le complexe simplicial provient d'un ensemble ordonné. Une forme équivalente de ce cas particulier est donnée par le théorème suivant :

Théorème 8.3.3. — *Pour tout ensemble ordonné E , l'unique ∞ -foncteur $\mathcal{O}_E \rightarrow E$ induisant l'identité sur les objets est une équivalence de Thomason.*

Démonstration. — Notons que cet unique ∞ -foncteur n'est autre que le morphisme de troncation (on a $\tau_1^!(\mathcal{O}_E) \simeq E$). En vertu du théorème 5.1.7, il suffit de montrer que pour tous objets i, j de \mathcal{O}_E , le ∞ -foncteur

$$\underline{\mathbf{Hom}}_{\mathcal{O}_E}(i, j) \rightarrow \underline{\mathbf{Hom}}_E(i, j)$$

est une équivalence de Thomason. Cela revient à montrer que la ∞ -catégorie $\underline{\mathbf{Hom}}_{\mathcal{O}_E}(i, j)$ est asphérique si $i \leq j$, et est vide sinon. Le second cas, ainsi que le cas $i = j$, se traitent facilement en utilisant la description de \mathcal{O}_E donnée par la théorie de Steiner (voir [T4, théorème 10.9]). Si $i < j$, alors on dispose d'une flèche $\langle i, j \rangle$ dans $\underline{\mathbf{Hom}}_{\mathcal{O}_E}(i, j)$ et, en vertu du corollaire 6.1.6, il suffit de montrer que pour toute 1-cellule $x : i \rightarrow j$ dans \mathcal{O}_E , la ∞ -catégorie $\underline{\mathbf{Hom}}_{\mathcal{O}_E}(\langle i, j \rangle, x)$ est asphérique. Or, une telle 1-cellule x est un composé $\langle i_{p-1}, i_p \rangle \cdots \langle i_0, i_1 \rangle$, avec $i_0 = i$ et $i_p = j$ et on montre que cette ∞ -catégorie est isomorphe à $\underline{\mathbf{Hom}}_{\mathcal{O}_p}(\langle 0, p \rangle, \langle p-1, p \rangle \cdots \langle 0, 1 \rangle)$, qui est bien une ∞ -catégorie asphérique puisqu'elle admet un objet quasi-initial en vertu du théorème 8.2.11. On en déduit le résultat. Voir [T4, théorème 10.8] pour plus de détails. \square

Remarque 8.3.4. — Gagna a donné dans [39, section 6] une seconde preuve, plus directe, de ce dernier théorème en montrant par des formules explicites que $N\mathcal{O}_E \rightarrow NE$ est la rétraction d'un rétracte par déformation fort simplicial.

Le théorème précédent permet de donner une représentation ∞ -catégorique agréable du type d'homotopie d'un CW-complexe régulier (c'est-à-dire dont les applications d'attachement de cellules sont des homéomorphismes) :

Corollaire 8.3.5. — *Soit X un CW-complexe régulier. Notons F_X l'ensemble ordonné de ses faces. Alors la ∞ -catégorie \mathcal{O}_{F_X} a canoniquement le type d'homotopie de X .*

Démonstration. — Cela résulte du théorème précédent, ainsi que du fait que, si X est un CW-complexe régulier, alors l'ensemble ordonné F_X de ses faces se réalise en une subdivision barycentrique de X , homéomorphe donc à X . \square

CHAPITRE 9

VERS UNE STRUCTURE DE CATÉGORIE DE MODÈLES À LA THOMASON POUR LES ∞ -CATÉGORIES

Dans ce chapitre, nous présentons nos travaux avec Maltiniotis en vue d'établir l'existence d'une structure de catégorie de modèles sur $n\text{-Cat}$, d'équivalences faibles les équivalences de Thomason : une structure « à la Thomason ». Nous commençons, suivant [T3], par énoncer un théorème de Thomason abstrait, donnant des conditions suffisantes sur un objet cosimplicial dans $n\text{-Cat}$ pour qu'il induise une structure de catégorie de modèles à partir de la structure de Kan-Quillen sur les ensembles simpliciaux. L'objet cosimplicial auquel on souhaite appliquer ce résultat est celui des orientaux. Pour celui-ci, on vérifie sans difficulté toutes les conditions du théorème sauf deux : les conditions (d) et (e). La démonstration de la condition (e) est l'objet d'un article [T4] qui a été présenté au chapitre précédent. Ainsi, la condition (d), qui reste à ce jour ouverte, entraînerait l'existence de la structure de la catégorie de modèles à la Thomason sur $n\text{-Cat}$. Nous démontrons cette dernière condition dans le cas $n = 2$, établissant ainsi l'existence de cette structure pour 2-Cat . Nous donnons quelques conditions nécessaires sur une 2-catégorie pour qu'elle soit un objet cofibrant de cette structure. Enfin, suivant [T1], nous montrons qu'à tout localisateur fondamental de 2-Cat au sens de Chiche, on peut associer une structure de catégorie de modèles à la Thomason, dont nous étudions les propriétés.

9.1. Théorème de Thomason abstrait

Dans toute cette section, on fixe $n \geq 1$, en incluant le cas $n = \infty$.

9.1.1. — Rappelons que si $c : \Delta \rightarrow n\text{-Cat}$ est un objet cosimplicial dans $n\text{-Cat}$, alors on obtient une adjonction

$$\tau_c : \widehat{\Delta} \rightarrow n\text{-Cat} \quad \dashv \quad N_c : n\text{-Cat} \rightarrow \widehat{\Delta},$$

où τ_c est l'unique extension de c à $\widehat{\Delta}$ commutant aux limites inductives et N_c est le foncteur nerf

$$C \mapsto (\Delta_n \mapsto \text{Hom}_{n\text{-Cat}}(c\Delta_n, C)).$$

Si $c : \Delta \rightarrow n\text{-Cat}$ est fixé, on appellera N_c -équivalences faibles les n -foncteurs dont l'image par N_c est une équivalence d'homotopie faible simpliciale.

Le théorème de Thomason abstrait donne des conditions suffisantes sur un objet cosimplicial $c : \Delta \rightarrow n\text{-Cat}$ pour qu'on puisse transférer la structure de catégorie de modèles de Kan-Quillen des ensembles simpliciaux sur $n\text{-Cat}$ à travers l'adjonction

$$\tau_c \text{Sd}^2 : \widehat{\Delta} \rightarrow n\text{-Cat} \quad \dashv \quad \text{Ex}^2 N_c : n\text{-Cat} \rightarrow \widehat{\Delta},$$

où Sd désigne le foncteur de subdivision barycentrique de Kan et Ex son adjoint à droite. Ces conditions sont extraites d'une analyse fine de la reformulation par Cisinski [26, section 5.2] de la preuve de Thomason, dans le cas de Cat . Elles font intervenir de manière cruciale les notions de crible et de cocrible.

9.1.2. — Rappelons qu'un *crible* d'une catégorie C est une sous-catégorie pleine C' de C vérifiant la propriété suivante : si $f : c \rightarrow c'$ est une flèche de C avec c' un objet de C' , alors c est un objet de C' . De même, une sous-catégorie pleine C' de C est un *cocrible* de C si dès que $f : c' \rightarrow c$ est un morphisme de C avec c' un objet de C' , alors c est un objet de C' .

On définit de manière analogue les notions de crible et de cocrible d'une n -catégorie. Soit C une n -catégorie. Un *crible* de C est une sous- n -catégorie pleine de C (c'est-à-dire telle que $\underline{\text{Hom}}_{C'}(x, y) = \underline{\text{Hom}}_C(x, y)$, pour tout couple x, y d'objets de C') telle que, pour toute cellule x de C , si le 0-but de x est dans C' , alors il en est de même de la 0-source. On définit la notion de *cocrible* en inversant le 0-but et la 0-source. Dans les deux cas, il est immédiat qu'il suffit de demander ces conditions lorsque x est une 1-cellule.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de Thomason abstrait :

Théorème 9.1.3. — Soit $c : \Delta \rightarrow n\text{-Cat}$ un objet cosimplicial dans $n\text{-Cat}$. On suppose que

- (a) le foncteur $N_c : n\text{-Cat} \rightarrow \widehat{\Delta}$ préserve les petites limites inductives filtrantes ;
- (b) le foncteur N_c envoie tout carré cocartésien formé de cocribles de $n\text{-Cat}$ sur un carré cocartésien ;
- (c) le foncteur $\tau_c N : \text{Cat} \rightarrow n\text{-Cat}$ envoie tout crible (resp. tout cocrible) entre ensembles ordonnés sur un crible (resp. un cocrible) de $n\text{-Cat}$;
- (d) si $i : E' \hookrightarrow E$ est un crible entre ensembles ordonnés qui admet une rétraction qui est aussi un adjoint à droite, alors $\tau_c N i$ est une N_c -équivalence faible coüniverselle, c'est-à-dire est une N_c -équivalence faible et le reste après tout cochage de base ;

(e) pour tout ensemble ordonné E , le morphisme d'adjonction $NE \rightarrow N_c\tau_c NE$ est une équivalence d'homotopie faible.

Alors il existe une structure de catégorie de modèles sur n -Cat dont les équivalences faibles sont les N_c -équivalences faibles et dont les fibrations sont les n -foncteurs u tels que $\text{Ex}^2 N_c u$ soit une fibration de Kan. Cette structure est combinatoire de cofibrations génératrices $\tau_c \text{Sd}^2(I)$ et de cofibrations triviales génératrices $\tau_c \text{Sd}^2(J)$, où Sd désigne le foncteur de subdivision barycentrique de Kan, et I et J les cofibrations et cofibrations triviales génératrices de la structure de Kan-Quillen présentées dans le paragraphe 1.3.1. De plus, cette structure est propre.

Démonstration. — C'est le cas particulier $\mathcal{C} = n$ -Cat de [T3, théorème 4.11] (au détail près que la condition (d) est remplacée par la condition (d') de [T3, remarque 4.13]). La preuve est inspirée de la démonstration du théorème originel de Thomason par Cisinski [26, section 5.2], elle-même inspirée de la preuve de Thomason [75]. \square

Remarque 9.1.4. — Dans [T3], le théorème de Thomason abstrait est énoncé dans un cadre plus général : la catégorie n -Cat est remplacée par une catégorie \mathcal{C} possédant une « bonne théorie des cribles et cocribles ».

9.2. Vers un théorème de Thomason pour les n -catégories

Le but de cette section est d'étudier les conditions du théorème de Thomason abstrait dans le cas particulier de l'objet cosimplicial des orientaux $\mathcal{O} : \Delta \rightarrow \infty$ -Cat, ou des orientaux tronqués $\tau_n^i \mathcal{O} : \Delta \rightarrow n$ -Cat.

On fixe toujours $n \geq 1$, en incluant le cas $n = \infty$.

9.2.1. — Notons

$$c_n : \widehat{\Delta} \rightarrow n\text{-Cat} \quad \dashv \quad N_n : n\text{-Cat} \rightarrow \widehat{\Delta},$$

l'adjonction associée à l'objet cosimplicial $\tau_n^i \mathcal{O} : \Delta \rightarrow n$ -Cat, où τ_n^i dans le cas $n = \infty$ désigne le foncteur identité. (Le foncteur N_n a déjà été introduit au paragraphe 4.1.5.) Si C est une n -catégorie, on a $N_n C = NC$ et, si X est un ensemble simplicial, on a un isomorphisme canonique $c_n X \simeq \tau_n^i c_\infty X$.

Proposition 9.2.2. — L'objet cosimplicial $\tau_n^i \mathcal{O} : \Delta \rightarrow n$ -Cat vérifie les trois premières conditions du théorème de Thomason abstrait. Autrement dit,

- (a) le foncteur N_n commute aux petites limites inductives filtrantes ;
- (b) le foncteur N_n envoie tout carré cocartésien de n -Cat formé de cocribles sur un carré cocartésien de $\widehat{\Delta}$;
- (c) le foncteur $c_n N$ envoie tout crible (resp. tout cocrible) entre ensembles ordonnés sur un crible (resp. un cocrible) de n -Cat.

Démonstration. — Voir [T3, proposition 5.3]. Donnons quelques éléments de preuve. La première assertion résulte facilement du fait que \mathcal{O}_n est une n -catégorie finie. La deuxième se démontre « à la main » une fois qu'on a observé qu'un carré cocartésien de cocribles est également cartésien. Enfin, la troisième assertion peut se montrer directement mais résulte également de la description concrète de la ∞ -catégorie $\mathcal{O}_E \simeq c_\infty NE$ (voir les théorèmes 8.1.5 et 8.1.6). \square

Proposition 9.2.3. — *L'objet cosimplicial $\tau_n^1 \mathcal{O} : \Delta \rightarrow n\text{-Cat}$ vérifie la dernière condition du théorème de Thomason abstrait. Autrement dit,*

- (e) *pour tout ensemble ordonné E , le morphisme d'adjonction $NE \rightarrow N_n c_n NE$ est une équivalence d'homotopie faible.*

Démonstration. — En vertu des égalités triangulaires, il s'agit de montrer que le morphisme $N_n c_n N_n E \rightarrow N_n E$ induit par la coïté de l'adjonction $c_n \dashv N_n$ est une équivalence faible simpliciale. Dans le cas $n = \infty$, le théorème 8.1.6 permet d'identifier ce morphisme avec le nerf de Street du ∞ -foncteur canonique $\mathcal{O}_E \rightarrow E$. La proposition découle donc du théorème 8.3.3 qui affirme que ce ∞ -foncteur est une équivalence de Thomason. Le cas n fini est conséquence du résultat analogue affirmant que le n -foncteur $c_n \mathcal{O}_E \rightarrow E$ est une équivalence de Thomason, résultat qui se démontre de manière similaire (voir [T4, théorème 10.9]). \square

Remarque 9.2.4. — Dans le cas $n = 1$, la flèche de l'énoncé est un isomorphisme par pleine fidélité du nerf, et le résultat est donc trivial.

9.2.5. — Ainsi, en vertu du théorème de Thomason abstrait (théorème 9.1.3) et des résultats de cette section, pour qu'il existe une structure de catégorie de modèles sur $n\text{-Cat}$ à la Thomason, il suffit de montrer la condition suivante :

- (d) si $i : E' \hookrightarrow E$ est un crible entre ensembles ordonnés qui admet une rétraction qui est aussi un adjoint à droite, alors le n -foncteur $c_n Ni$ est une équivalence de Thomason coïuniverselle.

Sous cette hypothèse, on obtiendrait une adjonction de Quillen

$$c_n \text{Sd}^2 : \widehat{\Delta} \rightarrow n\text{-Cat} \quad \dashv \quad \text{Ex}^2 N_n : n\text{-Cat} \rightarrow \widehat{\Delta},$$

qui, en utilisant le théorème de Gagna (théorème 5.4.1), serait une équivalence de Quillen.

Remarque 9.2.6. — Dans le cas $n = 1$, le foncteur $c_1 Ni$ s'identifie à i . Or, un i comme dans la condition (d) est un rétracte par transformation fort et cette propriété est stable par image directe. Un tel i est donc bien une équivalence de Thomason coïuniverselle et on retrouve le théorème de Thomason classique dans le cas de Cat .

La condition (d) n'a toujours pas été établie dans le cas général et l'existence de la structure à la Thomason sur $n\text{-Cat}$ reste conjecturale. Dans la section suivante, on présente la preuve du cas $n = 2$.

9.3. La structure à la Thomason sur 2-Cat

9.3.1. — Dans cette section, on présente la preuve de l'existence d'une structure à la Thomason sur 2-Cat. Comme on l'a vu dans la section précédente, pour obtenir une telle structure, il suffit de montrer que

- (d) si $i : E' \hookrightarrow E$ est un crible entre ensembles ordonnés qui admet une rétraction qui est aussi un adjoint à droite, alors le 2-foncteur c_2Ni est une équivalence de Thomason coïnverselle.

On a vu que dans le cas 1-catégorique, c_1Ni est un rétracte par transformation fort, ce qui permettait de conclure. Il est faux que c_2Ni soit un rétracte par transformation oplax ou lax. C'est un rétracte par déformation en un sens plus subtil.

9.3.2. — Rappelons que si C et D sont des 2-catégories, un 2-foncteur oplax normalisé $u : C \rightarrow D$ est un « 2-foncteur qui respecte strictement les identités mais ne respecte la composition horizontale qu'à une contrainte oplax près ». Plus précisément, un 2-foncteur oplax normalisé consiste en la donnée

- d'un morphisme u entre les 2-graphes sous-jacents ;
- pour tout couple $x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$ de 1-flèches composables de C , une *contrainte de functorialité oplax*, c'est-à-dire une 2-cellule

$$u(g, f) : u(gf) \Rightarrow u(g)u(f)$$

de D ,

satisfaisant aux conditions suivantes :

- u respecte les identités des objets et des 1-cellules ;
- u respecte la composition verticale des 2-cellules (c'est-à-dire la composition $*_1$) ;
- pour toute 1-cellule $f : x \rightarrow y$ de C , on a

$$u(f, 1_x) = 1_{u(f)} = u(1_y, f) ;$$

- pour tout triplet $x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z \xrightarrow{h} t$ de 1-flèches composables de C , on a

$$(u(h) *_0 u(g, f))u(h, gf) = (u(h, g) *_0 u(f))u(hg, f) ;$$

- pour tout couple

$$\begin{array}{ccc} x & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{g} \end{array} & y & \begin{array}{c} \xrightarrow{k} \\ \Downarrow \beta \\ \xrightarrow{l} \end{array} & z \end{array}$$

de 2-flèches composables horizontalement (c'est-à-dire pour la composition $*_0$) de C , on a

$$u(l, g)u(\beta *_0 \alpha) = (u(\beta) *_0 u(\alpha))u(k, f) .$$

9.3.3. — Si $u, v : C \rightarrow D$ sont deux 2-foncteurs stricts, une *homotopie oplax normalisée* H de u vers v , ce qu'on notera $H : u \Rightarrow v$, est un foncteur oplax normalisé

$$H : \Delta_1 \times C \rightarrow D$$

rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 C & & \\
 \downarrow \{0\} \times C & \searrow u & \\
 \Delta_1 \times C & \xrightarrow{H} & D \\
 \uparrow \{1\} \times C & \nearrow v & \\
 C & &
 \end{array}$$

Un *rétracte par déformation oplax normalisée* est un 2-foncteur strict $i : C \rightarrow D$ admettant une rétraction par un 2-foncteur strict $r : D \rightarrow C$ et une homotopie oplax normalisée $H : ir \Rightarrow 1_D$.

Dans la suite de cette section, tous les 2-foncteurs oplax (et donc toutes les homotopies et tous les rétractes par déformation oplax) qui apparaîtront seront normalisés et on se permettra donc d'omettre l'adjectif « normalisé ».

Proposition 9.3.4. — *Tout rétracte par déformation oplax est une équivalence de Thomason.*

Démonstration. — L'assertion n'est pas évidente *a priori* puisque, une homotopie $H : \Delta_1 \times C \rightarrow D$ d'un tel rétracte étant un 2-foncteur *oplax*, il n'est pas clair qu'elle induise une homotopie simpliciale. Néanmoins, on peut montrer que le nerf de Street 2-catégorique se prolonge naturellement aux 2-foncteurs oplax normalisés. En effet, on vérifie que ce foncteur est canoniquement isomorphe au foncteur de 2-Cat dans $\widehat{\Delta}$ défini par

$$C \mapsto (\Delta_n \mapsto \{2\text{-foncteurs oplax normalisés de } \Delta_n \text{ vers } C\})$$

(voir l'avant-dernier exercice de [73]). Or, cette expression est clairement fonctorielle en les 2-foncteurs oplax normalisés. \square

9.3.5. — On dit qu'un 2-foncteur strict $i : A \rightarrow B$ est un *crible rétracte par déformation oplax spécial* si i correspond à l'inclusion d'un crible et s'il existe une rétraction $r : D \rightarrow C$ et une homotopie oplax (normalisée) $H : ir \Rightarrow 1_D$ satisfaisant aux axiomes supplémentaires suivants :

- le rétracte par déformation est *fort* au sens où on a

$$H(1_{\Delta_1} \times i) = ip_A,$$

où $p_A : \Delta_1 \times A \rightarrow A$ désigne la deuxième projection ;

- pour tout couple $x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$ de 1-flèches composables de B avec f dans A , on a

$$H(0 \rightarrow 1, gf) = H(0 \rightarrow 1, g)H(0, f),$$

et la contrainte de functorialité correspondante est triviale.

Munis de cette notion de crible rétracte par déformation oplax spécial, nous pouvons passer à la démonstration de la condition (d) dans le cas de 2-Cat.

Proposition 9.3.6. — *Si $i : E' \hookrightarrow E$ est un crible entre ensembles ordonnés qui admet une rétraction qui est aussi un adjoint à droite, alors le 2-foncteur c_2Ni est un crible rétracte par déformation oplax spécial.*

Démonstration. — La rétraction est donnée par c_2Nr , où r est la rétraction de i qui est aussi un adjoint à droite. L'homotopie se définit par des formules explicites qui utilisent la description concrète de c_2NE , description qui résulte de celle de $cNE \simeq \mathcal{O}_E$ mais peut s'obtenir plus directement dans le cas 2-catégorique. Voir [T3, proposition 6.25]. \square

Proposition 9.3.7. — *La classe des cribles rétractes par déformation oplax spéciaux est stable par image directe dans 2-Cat.*

Démonstration. — Plus précisément, on montre que si $i : A \rightarrow B$, r et H sont comme dans la définition d'un crible rétracte par déformation oplax spécial, alors pour toute image directe i' de i , il existe r' et H' uniques, compatibles à r et H , satisfaisant aux conditions qui font de i' un crible rétracte par déformation oplax spécial. La démonstration de ce fait occupe la trentaine de pages de calcul de la section 7 de [T3]. \square

Corollaire 9.3.8. — *Tout crible rétracte par déformation oplax spécial est une équivalence de Thomason coïnniverselle de 2-Cat.*

Démonstration. — Cela résulte immédiatement de la proposition précédente et du fait que les rétractes par déformation oplax spéciaux sont des équivalences de Thomason (proposition 9.3.4). \square

On en déduit l'existence de la structure à la Thomason sur 2-Cat :

Théorème 9.3.9. — *Il existe une structure de catégorie de modèles sur 2-Cat dont les équivalences faibles sont les équivalences de Thomason et dont les fibrations sont les 2-foncteurs stricts u tels que Ex^2N_2u soit une fibration de Kan. Cette structure est combinatoire de cofibrations génératrices $c_2\text{Sd}^2(I)$ et de cofibrations triviales génératrices $c_2\text{Sd}^2(J)$. De plus, cette structure est propre.*

Par ailleurs, l'adjonction

$$c_2\text{Sd}^2 : \widehat{\Delta} \rightarrow 2\text{-Cat} \quad \dashv \quad \text{Ex}^2N_2 : 2\text{-Cat} \rightarrow \widehat{\Delta},$$

est une équivalence de Quillen.

Démonstration. — Le corollaire précédent établit la condition (d), dernière condition pour pouvoir appliquer le théorème de Thomason abstrait (voir le paragraphe 9.2.5). On obtient ainsi la structure de catégorie de modèles et l'adjonction de

Quillen. Le fait qu'on obtienne une équivalence de Thomason résulte du cas $n = 2$ du théorème de Gagna (théorème 5.4.1), cas particulier qui est dû à Chiche. \square

Remarque 9.3.10. — L'existence de cette structure de catégorie de modèles a été affirmée dans [77]. Néanmoins, la preuve qui y est exposée contient deux trous sérieux qui correspondent aux conditions (d) et (e) de notre théorème de Thomason abstrait. Un *corrigendum* a été publié [78]. La preuve qui y est donnée de la condition (e) est originale et de nature simpliciale; elle a inspiré la preuve de la condition (e) n -catégorique de Gagna. La preuve de la condition (d) reste incomplète.

Remarque 9.3.11. — Les foncteurs $c_2 \text{Sd}^2 : \widehat{\Delta} \rightarrow 2\text{-Cat}$ et $\text{Ex}^2 N_2 : 2\text{-Cat} \rightarrow \widehat{\Delta}$ respectent tous les deux les équivalences faibles. C'est évident pour le second et, pour le premier, cela résulte du fait qu'il est un foncteur de Quillen à gauche de source une catégorie de modèles dont tous les objets sont cofibrants. On en déduit que l'unité et la coïunité de l'équivalence de Quillen $c_2 \text{Sd}^2 \dashv \text{Ex}^2 N_2$ sont des équivalences faibles argument par argument. En particulier, si X est un ensemble simplicial, alors la 2-catégorie $c_2 \text{Sd}^2 X$ a le type d'homotopie de X , au sens où $N_2 c_2 \text{Sd}^2 X$ est faiblement équivalent à X (par l'intermédiaire de $\text{Ex}^2 N_2 c_2 \text{Sd}^2 X$).

En combinant le théorème précédent et le théorème B de Quillen, on peut mettre en évidence le mauvais comportement homotopique de l'adjoint à gauche du nerf de Street :

Proposition 9.3.12. — *Le foncteur $c_n : \widehat{\Delta} \rightarrow \infty\text{-Cat}$, pour $1 \leq n \leq \infty$, ne respecte pas les équivalences faibles, au sens où il existe une équivalence d'homotopie faible dont l'image par c_n n'est pas une équivalence de Thomason.*

Démonstration. — Considérons l'ensemble simplicial $\Delta_2/\partial\Delta_2$, obtenu en quotientant le 2-simplexe par son bord. Nous allons montrer que l'équivalence faible canonique

$$\text{Sd}^2(\Delta_2/\partial\Delta_2) \rightarrow \Delta_2/\partial\Delta_2$$

n'est pas envoyée par c_n sur une équivalence de Thomason. Le résultat étant bien connu pour $n = 1$, nous allons nous concentrer sur le cas $n \geq 2$. Observons tout d'abord que si X est un ensemble simplicial de dimension au plus 2 (c'est-à-dire dont tous les simplexes de dimension au moins 3 sont dégénérés), alors le n -foncteur canonique

$$c_n X \rightarrow \tau_2^j c_n X \simeq c_2 X$$

est un isomorphisme. Ainsi, quel que soit $n \geq 2$, $n = \infty$ compris, le n -foncteur

$$c_n \text{Sd}^2(\Delta_2/\partial\Delta_2) \rightarrow c_n(\Delta_2/\partial\Delta_2)$$

s'identifie au 2-foncteur

$$c_2 \text{Sd}^2(\Delta_2/\partial\Delta_2) \rightarrow c_2(\Delta_2/\partial\Delta_2).$$

Or, le type d'homotopie de la source de ce 2-foncteur est, en vertu de la remarque 9.3.11, celui de $\Delta_2/\partial\Delta_2$, c'est-à-dire celui d'une sphère de dimension 2, alors qu'on vérifie facilement que la 2-catégorie but $c_2(\Delta_2/\partial\Delta_2)$ n'est autre que la 2-catégorie $B^2\mathbb{N}$, et que son type d'homotopie est donc, d'après le théorème 7.2.6, celui d'un $K(\mathbb{Z}, 2)$. \square

Nous terminons cette section par quelques conditions nécessaires sur une 2-catégorie pour qu'elle soit cofibrante pour cette structure de catégorie de modèles à la Thomason.

Théorème 9.3.13. — *Soit C une 2-catégorie cofibrante au sens de la catégorie de modèles du théorème précédent. Alors*

- (a) *la catégorie $\tau_1^b(C)$ (voir le paragraphe 2.1.9) est libre sur un graphe ;*
- (b) *la catégorie $\tau_1^i(C)$ est un ensemble ordonné ;*
- (c) *pour tous objets x et y de C , la catégorie $\underline{\text{Hom}}_C(x, y)$ est un ensemble ordonné.*

Démonstration. — C'est [T3, théorème 8.2]. Voici quelques éléments de preuve.

La première assertion résulte du fait que τ_1^b commute aux limites inductives et que si i est une cofibration génératrice (ou même une inclusion entre ensembles ordonnés) alors $\tau_1^b c_2 Ni$ s'obtient comme composé transfini d'images directes de $\emptyset \hookrightarrow D_0$ et $\partial D_1 \hookrightarrow D_1$.

En ce qui concerne la deuxième, elle est conséquence du fait que le foncteur $\tau_1^i : 2\text{-Cat} \rightarrow \text{Cat}$ est un foncteur de Quillen à gauche pour les structures à la Thomason, et du fait que les objets cofibrants de la structure de Thomason sur Cat sont des ensembles ordonnés [75, proposition 5.7].

La dernière assertion est plus délicate à démontrer. Pour l'obtenir, on décrit explicitement les images directes d'un 2-foncteur de la forme $c_2 Ni$, où i est un crible d'ensembles ordonnés, le long de n'importe quel 2-foncteur strict [T3, proposition 8.16.4]. On en déduit que si $A \rightarrow B$ est une cofibration et que A est une catégorie enrichie en ensembles ordonnés, alors il en est de même de B , ce qui entraîne immédiatement le résultat. \square

9.4. Structures à la Thomason sur 2-Cat et 2-localisateurs fondamentaux

Dans cette section, nous allons généraliser à 2-Cat des résultats de Cisinski pour Cat , établissant en particulier, pour tout localisateur fondamental \mathcal{W} vérifiant une hypothèse ensembliste anodine, l'existence d'une structure de catégorie de modèles à la Thomason sur 2-Cat de classe d'équivalences faibles \mathcal{W} .

Commençons par rappeler les résultats de Cisinski.

9.4.1. — On dira qu'un localisateur fondamental de Cat (voir le paragraphe 1.2.10) est *accessible* s'il est engendré par un *ensemble* de foncteurs, c'est-à-dire s'il est le

plus petit localisateur fondamental de Cat au sens de l'inclusion qui contienne ledit ensemble.

De même, un localisateur fondamental simplicial (voir le paragraphe 6.2.4) est *accessible* s'il est engendré par un *ensemble* en un sens similaire.

On a vu au paragraphe 6.2.4 que le foncteur nerf $N : Cat \rightarrow \widehat{\Delta}$ induit une bijection

$$W \mapsto N^{-1}(W)$$

entre les localisateurs fondamentaux simpliciaux et les localisateurs fondamentaux de Cat , l'inverse de cette bijection étant l'application

$$\mathcal{W} \mapsto i_{\Delta}^{-1}(\mathcal{W}),$$

où i_{Δ} est le foncteur catégorie des éléments. On peut par ailleurs vérifier que ces applications préservent l'accessibilité des localisateurs.

Si \mathcal{W} est un localisateur fondamental de Cat , on notera \mathcal{W}_{Δ} le localisateur fondamental simplicial associé à \mathcal{W} par cette bijection. Autrement dit, on pose $\mathcal{W}_{\Delta} = i_{\Delta}^{-1}(\mathcal{W})$.

Remarque 9.4.2. — On peut déduire de résultats de Cisinski (et en particulier des deux théorèmes suivants) que les notions d'accessibilité du paragraphe précédent coïncident avec la plus classique notion de classe de flèches accessible dans une catégorie accessible. Voir [T1, corollaire 2.11 et 2.13].

Théorème 9.4.3 (Cisinski). — *Soit \mathcal{W} un localisateur fondamental simplicial accessible. La catégorie $\widehat{\Delta}$ admet une structure de catégorie de modèles combinatoire dont la classe des équivalences faibles est \mathcal{W} et dont les cofibrations sont les monomorphismes.*

Démonstration. — C'est une partie de [26, théorème 1.4.3]. □

Théorème 9.4.4 (Cisinski). — *Soit \mathcal{W} un localisateur fondamental de Cat accessible. La catégorie Cat admet une structure de catégorie de modèles combinatoire propre à gauche dont les équivalences faibles sont les éléments de \mathcal{W} , les cofibrations les cofibrations de la structure de Thomason sur Cat (voir le théorème 1.3.4) et les fibrations les foncteurs u tels que $\text{Ex}^2 Nu$ soit une fibration de la structure de catégorie de modèles sur $\widehat{\Delta}$ associée à \mathcal{W}_{Δ} par le théorème précédent.*

De plus, pour cette structure, l'adjonction

$$c_1 \text{Sd}^2 : \widehat{\Delta} \rightarrow Cat \quad \dashv \quad \text{Ex}^2 N : Cat \rightarrow \widehat{\Delta},$$

où $\widehat{\Delta}$ est munie de la structure associée à \mathcal{W}_{Δ} , est une équivalence de Quillen.

Démonstration. — Voir le théorème 5.2.15 de [26] et sa preuve. □

Théorème 9.4.5 (Cisinski). — *Soit \mathcal{W} un localisateur fondamental de Cat accessible. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a) la structure de catégorie de modèles sur Cat associée à \mathcal{W} par le théorème précédent est propre ;
- (b) la structure de catégorie de modèles sur $\widehat{\Delta}$ associée à \mathcal{W}_Δ par le théorème 9.4.3 est propre ;
- (c) \mathcal{W} est engendré par un ensemble de catégories, au sens où il existe un ensemble \mathcal{C} de catégories tel que \mathcal{W} soit engendré par $\{C \rightarrow e \mid C \in \mathcal{C}\}$, où e désigne la catégorie finale.

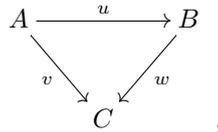
Démonstration. — C'est une conséquence directe de différents résultats de Cisinski. Voir [T1, théorème 6.2]. □

Nous allons maintenant généraliser les deux résultats précédents à 2-Cat. Nous commençons par introduire la notion de localisateur fondamental de 2-Cat qui est due à Chiche [23].

9.4.6. — On rappelle qu'on a défini au paragraphe 6.2.1 une notion de localisateur fondamental de ∞ -Cat. Cette notion s'adapte à n -Cat pour tout $n \geq 1$. En particulier, pour $n = 2$, on obtient la définition suivante.

Une classe \mathcal{W} de 2-foncteurs est un *localisateur fondamental* de 2-Cat si elle satisfait aux conditions suivantes :

- (a) \mathcal{W} est faiblement saturée ;
- (b) pour toute 2-catégorie C , le ∞ -foncteur de « projection » $D_1 \otimes_2 C \rightarrow C$, où \otimes_2 désigne le produit de Gray 2-catégorique, appartient à \mathcal{W} ;
- (c) \mathcal{W} vérifie un théorème A pour les triangles commutatifs au sens où, pour tout triangle commutatif de 2-foncteurs



si pour tout objet c de C , le 2-foncteur $c \setminus A \rightarrow c \setminus B$ induit par u est dans \mathcal{W} , alors le 2-foncteur u est dans \mathcal{W} .

Remarque 9.4.7. — Le produit de Gray 2-catégorique de deux 2-catégories A et B peut se définir par la formule

$$A \otimes_2 B = \tau_2^i(A \otimes B),$$

c'est-à-dire comme le 2-tronqué intelligent du produit de Gray ∞ -catégorique.

Remarque 9.4.8. — Le deuxième axiome de Chiche (voir [23, section 6]) diffère du nôtre mais lui est équivalent sous l'hypothèse des deux autres.

9.4.9. — De manière analogue au cas de Cat , on dit qu'un localisateur fondamental de 2-Cat est *accessible* s'il est engendré par un *ensemble* de 2-foncteurs.

Un résultat important de Chiche affirme l'existence d'une bijection croissante entre les localisateurs fondamentaux de $\mathcal{C}at$ et ceux de $2\text{-}\mathcal{C}at$.

Théorème 9.4.10 (Chiche). — *Le couple de foncteurs*

$$\iota : \mathcal{C}at \hookrightarrow 2\text{-}\mathcal{C}at, \quad i_{\Delta} N_2 : 2\text{-}\mathcal{C}at \rightarrow \mathcal{C}at,$$

où ι désigne l'inclusion canonique et $N_2 : 2\text{-}\mathcal{C}at \rightarrow \widehat{\Delta}$ la restriction du nerf de Street à $2\text{-}\mathcal{C}at$, induit des bijections réciproques

$$\mathcal{W} \mapsto \iota^{-1}(\mathcal{W}) = \mathcal{W} \cap \mathcal{C}at, \quad \mathcal{W} \mapsto N_2^{-1} i_{\Delta}^{-1}(\mathcal{W})$$

entre la classe des localisateurs fondamentaux de $2\text{-}\mathcal{C}at$ et celle des localisateurs fondamentaux de $\mathcal{C}at$. De plus, cette bijection préserve l'accessibilité.

Démonstration. — Voir le théorème 6.33 et les propositions 6.47 et 6.48 de [23]. \square

Remarque 9.4.11. — On déduit de ce résultat de Chiche et de la bijection de Cisinski du paragraphe 9.4.1 une « trijection » entre les localisateurs fondamentaux de $\mathcal{C}at$, de $2\text{-}\mathcal{C}at$ et ceux de $\widehat{\Delta}$. Cette trijection préserve l'accessibilité. En particulier, si \mathcal{W} est un localisateur fondamental de $2\text{-}\mathcal{C}at$, on obtient un localisateur fondamental simplicial, qu'on notera \mathcal{W}_{Δ} .

Énonçons maintenant nos résultats.

Théorème 9.4.12. — *Soit \mathcal{W} un localisateur fondamental de $2\text{-}\mathcal{C}at$ accessible. La catégorie $2\text{-}\mathcal{C}at$ admet une structure de catégorie de modèles combinatoire propre à gauche dont les équivalences faibles sont les éléments de \mathcal{W} , les cofibrations les cofibrations de la structure à la Thomason sur $2\text{-}\mathcal{C}at$ (voir le théorème 9.3.9) et les fibrations les 2-foncteurs u tels que $\text{Ex}^2 N_2 u$ soit une fibration de la catégorie de modèles associée à \mathcal{W}_{Δ} par le théorème 9.4.3.*

Par ailleurs, pour cette structure, l'adjonction

$$c_2 \text{Sd}^2 : \widehat{\Delta} \rightarrow 2\text{-}\mathcal{C}at \quad \dashv \quad \text{Ex}^2 N_2 : 2\text{-}\mathcal{C}at \rightarrow \widehat{\Delta},$$

où $\widehat{\Delta}$ est munie de la structure associée à \mathcal{W}_{Δ} , est une équivalence de Quillen.

Démonstration. — L'existence de la structure de catégorie de modèles s'établit en appliquant le lemme de transfert (lemme 1.3.2) à l'adjonction

$$c_2 \text{Sd}^2 : \widehat{\Delta} \rightarrow 2\text{-}\mathcal{C}at \quad \dashv \quad \text{Ex}^2 N_2 : 2\text{-}\mathcal{C}at \rightarrow \widehat{\Delta}$$

et à la structure de catégorie de modèles sur $\widehat{\Delta}$ associée à \mathcal{W}_{Δ} . Pour vérifier les conditions du lemme, on utilise le cas déjà démontré où \mathcal{W} est la classe \mathcal{W}_{∞} des 2-foncteurs qui sont des équivalences de Thomason, c'est-à-dire le théorème 9.4.12, et notamment le fait que dans ce cas l'équivalence de Quillen $\text{Ex}^2 N_2$ préserve les carrés homotopiquement cocartésiens. Voir [T1, théorème 4.6] pour plus de détails.

On obtient par le lemme de transfert que l'adjonction de l'énoncé est une adjonction de Quillen. Le fait qu'elle est une équivalence de Quillen résulte du cas de \mathcal{W}_{∞} et

de l'inclusion $\mathcal{W}_\infty \subset \mathcal{W}$, qui elle résulte du théorème de minimalité de Cisinski (théorème 1.2.11) et du fait que la bijection de Chiche entre les localisateurs fondamentaux de $\mathcal{C}at$ et de 2-Cat est croissante. Voir [T1, théorème 4.8]. \square

Théorème 9.4.13. — *Soit \mathcal{W} un localisateur fondamental de 2-Cat accessible. L'adjonction*

$$\tau : 2\text{-Cat} \rightarrow \mathcal{C}at \quad \dashv \quad \iota : \mathcal{C}at \hookrightarrow 2\text{-Cat},$$

où τ désigne l'adjoint à gauche du foncteur d'inclusion ι , est une équivalence de Quillen pour 2-Cat munie de la structure de catégorie de modèles associée à \mathcal{W} par le théorème précédent et $\mathcal{C}at$ de la structure associée à $\mathcal{W} \cap \mathcal{C}at$ par le théorème 9.4.4.

Démonstration. — Il résulte de la description des équivalences faibles et des fibrations des deux structures que le foncteur ι les préserve. Ainsi, l'adjonction de l'énoncé est une adjonction de Quillen. Puisque le foncteur ι préserve les équivalences faibles, pour conclure, il suffit de voir que celui-ci induit une équivalence entre les catégories homotopiques. Cela résulte de [23, théorème 6.33]. Voir [T1, théorème 5.6] pour plus de détails. \square

Théorème 9.4.14. — *Soit \mathcal{W} un localisateur fondamental de 2-Cat accessible. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a) *la structure de catégorie de modèles sur 2-Cat associée à \mathcal{W} par le théorème 9.4.12 est propre ;*
- (b) *la structure de catégorie de modèles sur $\mathcal{C}at$ associée à $\mathcal{W} \cap \mathcal{C}at$ par le théorème 9.4.4 est propre ;*
- (c) *la structure de catégorie de modèles sur $\widehat{\Delta}$ associée à \mathcal{W}_Δ par le théorème 9.4.3 est propre ;*
- (d) *\mathcal{W} est engendré par un ensemble de 2-catégories, au sens où il existe un ensemble \mathbf{C} de 2-catégories tel que \mathcal{W} soit engendré par $\{C \rightarrow e \mid C \in \mathbf{C}\}$, où e désigne la 2-catégorie finale.*
- (e) *\mathcal{W} est engendré par un ensemble de 1-catégories, au sens où il existe un ensemble \mathbf{C} de 1-catégories tel que \mathcal{W} soit engendré par $\{C \rightarrow e \mid C \in \mathbf{C}\}$, où e désigne la 2-catégorie finale.*

Démonstration. — Le résultat est conséquence du fait que les foncteurs

$$\mathcal{C}at \xrightarrow{\iota} 2\text{-Cat} \xrightarrow{\text{Ex}^2 N_2} \widehat{\Delta}$$

sont des foncteurs de Quillen à droite pour les catégories de modèles pertinentes, du théorème analogue pour $\mathcal{C}at$ (théorème 9.4.5) et du fait que, si $\mathcal{W} \cap \mathcal{C}at$ est engendré par un ensemble de catégories, alors \mathcal{W} est engendré par le même ensemble. Voir [T1, théorème 6.4]. \square

APPENDICE A

AUTRES TRAVAUX

Le corps de ce mémoire traite de mes travaux, pour la plupart en collaboration avec Georges Maltsiniotis, sur la théorie de l'homotopie des ∞ -catégories strictes. Dans cet appendice, je vais donner un aperçu de mes autres résultats [**A1**, **A2**, **A3**, **A4**, **A5**], en collaboration avec divers coauteurs, certains également en lien avec les ∞ -catégories strictes, mais la plupart à propos de structures dites faibles, en particulier les (∞, n) -catégories et les ∞ -opéades. J'insisterai surtout sur mes travaux sur les (∞, n) -catégories, qui me semblent être les plus importants.

A.1. Un modèle pour les (∞, n) -catégories : les n -quasi-catégories

Dans cette section, je présente mes travaux sur les (∞, n) -catégories et en particulier sur le modèle des n -quasi-catégories que j'ai introduit dans [**A1**].

A.1.1. Introduction aux (∞, n) -catégories

Les ∞ -catégories strictes étudiées dans le corps de ce mémoire se révèlent être un cadre trop restrictif lorsqu'on s'intéresse à ces ∞ -catégories non pas comme à des modèles des types d'homotopies mais comme à des structures supérieures permettant d'organiser, par exemple, des structures algébriques supérieures. Ainsi, on est naturellement conduit à relâcher la notion de ∞ -catégorie stricte en une notion de ∞ -catégorie faible, variante dans laquelle les axiomes, comme par exemple celui de l'associativité, ne sont vérifiés qu'à des cellules supérieures près, cellules vérifiant elles-mêmes des axiomes de cohérence, cohérences vérifiant elles-mêmes des cohérences supérieures, etc. La définition précise de ces ∞ -catégories faibles est délicate et est un domaine de recherche à elle seule, de nombreuses définitions ayant été proposées, certaines comparées entre elles, d'autres non.

Un type de ∞ -catégories faibles particulièrement important, notamment en théorie de l'homotopie, est celui des $(\infty, 1)$ -catégories. Moralement, une $(\infty, 1)$ -catégorie est

une ∞ -catégorie faible dont toutes les i -cellules, pour $i > 1$, sont (faiblement) inversibles. Ainsi, si x et y sont deux objets d'une $(\infty, 1)$ -catégorie C , alors $\underline{\text{Hom}}_C(x, y)$ est une ∞ -catégorie faible dont toutes les cellules sont inversibles, c'est-à-dire un ∞ -groupeïde faible. En vertu de l'*hypothèse homotopique* de Grothendieck, un tel ∞ -groupeïde faible correspond à un type d'homotopie. On peut donc penser aux $(\infty, 1)$ -catégories comme à des catégories faiblement enrichies en types d'homotopie. Une des raisons de l'importance des $(\infty, 1)$ -catégories est que si \mathcal{M} est une catégorie de modèles, alors la catégorie homotopique $\text{Ho}(\mathcal{M})$ est en fait naturellement une $(\infty, 1)$ -catégorie. Ainsi, les $(\infty, 1)$ -catégories abondent.

Il existe plusieurs manières de formaliser les $(\infty, 1)$ -catégories : on parle de modèles. Généralement, les modèles sont définis comme des catégories de modèles, et sont comparés entre eux par des zigzags d'équivalences de Quillen. Leurs catégories homotopiques (et même $(\infty, 1)$ -catégories homotopiques) sont donc équivalentes, et sont moralement la catégorie (ou la $(\infty, 1)$ -catégorie) des $(\infty, 1)$ -catégories.

Voici quelques exemples de modèles : les catégories simpliciales [35, 10], c'est-à-dire les catégories enrichies en ensembles simpliciaux, les espaces complets de Segal [66], les catégories de Segal [48], les quasi-catégories [52, 53], les catégories relatives [4]. Ces modèles sont tous reliés entre eux par des équivalences de Quillen [11, 54, 4].

Le modèle le plus utilisé est sans doute celui des quasi-catégories, introduit par Joyal [52, 53] puis développé de manière spectaculaire par Lurie [56, 58]. Par définition, une quasi-catégorie est un ensemble simplicial X tel que tout diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_n^k & \longrightarrow & X \\ j_{n,k} \downarrow & & \\ \Delta_n & & \end{array}$$

(voir le paragraphe 1.3.1 pour la définition de $j_{n,k}$), pour $n \geq 2$ et $0 < k < n$, admette un relèvement

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_n^k & \longrightarrow & X \\ j_{n,k} \downarrow & \nearrow & \\ \Delta_n & & \end{array} .$$

Ces relèvements doivent être pensés comme des opérations de composition, ou de production de cohérences supérieures. Joyal a défini une structure de catégorie de modèles sur les ensembles simpliciaux dont les objets fibrants sont exactement les quasi-catégories.

Un second modèle très utilisé est celui des espaces complets de Segal, introduit par Rezk [66]. Un espace de Segal est un préfaisceau simplicial sur Δ (qu'on peut voir comme un ensemble bisimplicial) fibrant au sens de Reedy (condition technique dont le but est d'assurer que certains produits fibrés sont des produits fibrés homotopiques)

tel que, pour tout $k \geq 2$, le morphisme simplicial de Segal

$$X_k \rightarrow X_1 \times_{X_0} \cdots \times_{X_0} X_1$$

soit une équivalence d'homotopie faible. (Nous passons sous silence la condition de complétude.) Rezk a défini une structure de catégorie de modèles sur les préfaisceaux simpliciaux sur Δ dont les objets fibrants sont exactement les espaces complets de Segal. Les catégories de modèles des quasi-catégories et des espaces complets de Segal ont été comparées par deux équivalences de Quillen distinctes par Joyal et Tierney [54].

De la même manière que la catégorie des petites catégories est secrètement une 2-catégorie, la $(\infty, 1)$ -catégorie des petites $(\infty, 1)$ -catégories est secrètement une $(\infty, 2)$ -catégorie. Qu'est-ce qu'une $(\infty, 2)$ -catégorie? Plus généralement, pour $n \geq 0$, une (∞, n) -catégorie est moralement une ∞ -catégorie dont les k -cellules, pour $k > n$, sont (faiblement) inversibles. Les (∞, n) -catégories apparaissent naturellement dans de nombreux contextes, et notamment dans les travaux de Lurie sur l'hypothèse du cobordisme [57] ou, dans le cas $n = 2$, ceux de Gaitsgory sur le programme de Langlands géométrique [40].

La plupart des modèles pour les $(\infty, 1)$ -catégories ont été généralisés aux (∞, n) -catégories : les catégories de Segal ont été généralisées en catégories de Segal supérieures [48, 69], les espaces complets de Segal en ce que nous appellerons des Θ_n -espaces de Rezk [67, 68], les catégories relatives en n -catégories relatives [5].

Dans [A1], nous généralisons les quasi-catégories en n -quasi-catégories et nous comparons ce modèle à celui des Θ_n -espaces de Rezk, généralisant ainsi le travail de Joyal et Tierney [54] pour $n > 1$. L'objet de la prochaine section est d'expliquer le contenu mathématique de ce travail.

A.1.2. Les n -quasi-catégories

Nous allons définir les n -quasi-catégories comme les objets fibrants d'une structure de catégorie de modèles sur les préfaisceaux sur la catégorie Θ_n (voir le paragraphe 2.3.7). Commençons par introduire quelques éléments de la théorie des localisateurs de Cisinski dont l'objet est la construction de structures de catégories de modèles sur les catégories de préfaisceaux [26, section 1.4].

A.1.2.1. — Soit A une petite catégorie. On appelle A -localisateur une classe W de flèches de \widehat{A} satisfaisant aux propriétés suivantes :

- (a) W vérifie la propriété du deux sur trois ;
- (b) toute fibration triviale de \widehat{A} , c'est-à-dire toute flèche de \widehat{A} ayant la propriété de relèvement à droite par rapport aux monomorphismes, est dans W ;
- (c) la classe des monomorphismes de \widehat{A} appartenant à W est stable par image directe et composition transfinie.

On dit qu'un A -localisateur W est *accessible* s'il est engendré par un *ensemble*, c'est-à-dire s'il existe un ensemble tel que W soit le plus petit A -localisateur contenant ledit ensemble.

Théorème A.1.2.2 (Cisinski). — Soit A une petite catégorie et soit W une classe de flèches de \widehat{A} . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) W est un A -localisateur accessible ;
- (b) il existe une structure de catégorie de modèles sur \widehat{A} à engendrement cofibrant dont les équivalences faibles sont les éléments de W et dont les cofibrations sont les monomorphismes.

Démonstration. — C'est [26, théorème 1.4.3]. □

A.1.2.3. — Soit toujours A une petite catégorie. On notera

$$A \xleftarrow{p} A \times \Delta \xrightarrow{q} \Delta$$

les deux foncteurs de projection. Le foncteur image inverse $p^* : \widehat{A} \rightarrow \widehat{A \times \Delta}$ est pleinement fidèle et correspond à l'inclusion des préfaisceaux discrets dans les préfaisceaux simpliciaux.

On dira qu'un morphisme $f : X \rightarrow Y$ de $\widehat{A \times \Delta}$ est une *équivalence verticale* si, pour tout objet a de A , le morphisme simplicial $f_{a,\bullet} : X_{a,\bullet} \rightarrow Y_{a,\bullet}$ est une équivalence d'homotopie faible. On notera W_{vert} la classe des équivalences verticales.

De même, si on a fixé W un A -localisateur, on appellera *équivalence horizontale* un morphisme $f : X \rightarrow Y$ de $\widehat{A \times \Delta}$ tel que, pour tout $n \geq 0$, le morphisme $f_{\bullet,n} : X_{\bullet,n} \rightarrow Y_{\bullet,n}$ de \widehat{A} est dans W . On notera W_{hor} la classe des équivalences horizontales.

A.1.2.4. — Soit A une petite catégorie et soit W un A -localisateur. La *complétion simpliciale* de W est le $(A \times \Delta)$ -localisateur W_{Δ} engendré par

$$W_{\text{hor}} \cup \{X \times q^*(\Delta_1) \rightarrow X \mid X \in \text{Ob}(\widehat{A \times \Delta})\}.$$

Cisinski a démontré que si W est un A -localisateur accessible, alors il en est même de sa complétion simpliciale W_{Δ} (voir [26, proposition 2.3.24]). Ainsi, en vertu du théorème A.1.2.2, si on dispose d'une structure de catégorie de modèles à engendrement cofibrant sur la catégorie des préfaisceaux sur une petite catégorie A dont les cofibrations sont les monomorphismes, alors on peut canoniquement lui associer une structure de catégorie de modèles sur la catégorie des préfaisceaux simpliciaux sur A . Cisinski a démontré que ces deux structures sont équivalentes au sens de Quillen (voir [A1, proposition 2.20 et 2.23]).

Fixons un entier $n \geq 1$. Nous allons maintenant définir des générateurs pour le Θ_n -localisateur des n -quasi-catégories.

A.1.2.5. — Soit T un objet de Θ_n . Par définition, on peut exprimer T comme une somme globulaire

$$T = D_{i_1} \amalg_{D_{j_1}} \cdots \amalg_{D_{j_{l-1}}} D_{i_l},$$

avec les i_k (et donc les j_k) inférieurs ou égaux à n , cette limite inductive étant calculée dans Θ_n . Notons $y : \Theta_n \rightarrow \widehat{\Theta}_n$ le foncteur de Yoneda. On dispose d'un morphisme canonique

$$y(D_{i_1}) \amalg_{y(D_{j_1})} \cdots \amalg_{y(D_{j_{l-1}})} y(D_{i_l}) \rightarrow y(D_{i_1} \amalg_{D_{j_1}} \cdots \amalg_{D_{j_{l-1}}} D_{i_l}).$$

On notera I_T la source de ce morphisme. En considérant le plongement de Yoneda comme une inclusion, on a donc un morphisme

$$i_T : I_T \rightarrow T.$$

On vérifie facilement que ce morphisme est un monomorphisme.

Remarque A.1.2.6. — Les morphismes $i_T : I_T \rightarrow T$ encodent les conditions de Segal supérieures. Plus précisément, on peut montrer que l'image essentielle du nerf cellulaire

$$N_{\Theta_n} : n\text{-Cat} \rightarrow \widehat{\Theta}_n$$

est constituée des ensembles n -cellulaires X tels que, pour tout objet

$$T = D_{i_1} \amalg_{D_{j_1}} \cdots \amalg_{D_{j_{l-1}}} D_{i_l}$$

de Θ_n , le morphisme

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\Theta}_n}(T, X) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\widehat{\Theta}_n}(I_T, X)$$

de précomposition par i_T , qui s'identifie à un morphisme

$$X_T \rightarrow X_{D_{i_1}} \times_{X_{D_{j_1}}} \cdots \times_{X_{D_{j_{l-1}}}} X_{D_{i_l}},$$

est une bijection. Pour $n = 1$, on retrouve les conditions de Segal usuelles.

A.1.2.7. — Pour k tel que $1 \leq k \leq n$, on notera J_k la n -catégorie qui coreprésente le foncteur $n\text{-Cat} \rightarrow \mathcal{E}ns$ envoyant une n -catégorie sur l'ensemble de ses k -cellules (strictement) inversibles pour la composition $*_{k-1}$. Cette n -catégorie est en fait une k -catégorie.

Voici des représentations graphiques de J_1 , J_2 et J_3 (sans les identités) :

$$J_1 = 0 \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} 1 \quad , \quad J_2 = 0 \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Downarrow \Uparrow \\ \curvearrowleft \end{array} 1 \quad \text{et} \quad J_3 = 0 \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Downarrow \Leftarrow \Rightarrow \Uparrow \\ \curvearrowleft \end{array} 1 \quad ,$$

les deux cellules de dimension maximale étant inverse l'une de l'autre.

On dispose d'un n -foncteur canonique

$$j_k : J_k \rightarrow D_{k-1},$$

unique n -foncteur de J_k vers D_{k-1} qui est l'identité sur les $(k-2)$ -tronqués bêtes (condition vide pour $k = 1$). Ce n -foncteur envoie les deux $(k-1)$ -cellules non triviales de J_k sur la cellule principale de D_{k-1} et les deux k -cellules non triviales sur l'identité

de cette dernière. Par ailleurs, le n -foncteur j_k coreprésente la transformation naturelle associant à toute $(k - 1)$ -cellule d'une n -catégorie C son identité vue comme une k -cellule inversible de C .

A.1.2.8. — Le *localisateur des n -quasi-catégories* est le Θ_n -localisateur engendré par l'ensemble

$$\{i_T : I_T \rightarrow T \mid T \in \text{Ob}(\Theta_n)\} \cup \{N_{\Theta_n}(j_k) : N_{\Theta_n}(J_k) \rightarrow D_{k-1} \mid 1 \leq k \leq n\}.$$

La *structure de catégorie de modèles des n -quasi-catégories* sur $\widehat{\Theta}_n$ est la structure associée au localisateur des n -quasi-catégories par le théorème de Cisinski (théorème A.1.2.2). Une *n -quasi-catégorie* est un objet fibrant pour cette structure.

Théorème A.1.2.9 (Joyal). — *La catégorie de modèles des 1-quasi-catégories coïncide avec la catégorie de modèles des quasi-catégories.*

Démonstration. — C'est une conséquence directe de divers résultats de Joyal [53, 54]. Voir [A1, théorème 5.20] pour plus de détails. \square

Remarque A.1.2.10. — Par définition, les n -quasi-catégories sont des ensembles n -cellulaires vérifiant certaines conditions de relèvement. L'ensemble des flèches donnant ces conditions de relèvement est défini par des générateurs et des propriétés de stabilité, ce qui le rend peu explicite. La recherche de conditions de relèvement agréables définissant les n -quasi-catégories, analogue à celles pour les quasi-catégories, est un problème important mais difficile.

Mon principal résultat sur les n -quasi-catégories est la comparaison avec les Θ_n -espaces de Rezk que nous allons maintenant définir.

A.1.2.11. — Le *localisateur des Θ_n -espaces de Rezk* est le $(\Theta_n \times \Delta)$ -localisateur engendré par

$$W_{\text{vert}} \cup p^*(\mathcal{G})$$

(voir le paragraphe A.1.2.3), où

$$\mathcal{G} = \{i_T : I_T \rightarrow T \mid T \in \text{Ob}(\Theta_n)\} \cup \{N_{\Theta_n}(j_k) : N_{\Theta_n}(J_k) \rightarrow D_{k-1} \mid 1 \leq k \leq n\}$$

est l'ensemble générateur du localisateur des n -quasi-catégories du paragraphe A.1.2.8.

La *structure de catégorie de modèles des Θ_n -espaces de Rezk* est la structure de catégorie de modèles associée à ce localisateur. Les objets fibrants pour cette structure sont les *Θ_n -espaces de Rezk*.

Remarque A.1.2.12. — La structure de catégorie de modèles définie dans le paragraphe précédent coïncide avec celle définie par Rezk dans [67], même si la définition donnée ici est différente.

Théorème A.1.2.13 (Rezk). — *La catégorie de modèles des Θ_n -espaces de Rezk est cartésienne.*

Démonstration. — C'est le résultat principal de [67] (voir proposition 11.5). \square

Le résultat central de [A1], établissant le lien entre n -quasi-catégories et Θ_n -espaces de Rezk, est le suivant :

Théorème A.1.2.14. — *Le localisateur des Θ_n -espaces de Rezk est la complétion simpliciale du localisateur des n -quasi-catégories.*

Démonstration. — C'est [A1, théorème 8.3]. \square

Corollaire A.1.2.15. — *La catégorie de modèles des n -quasi-catégories est cartésienne.*

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate des deux théorèmes précédents (voir [A1, corollaire 8.5]). \square

Théorème A.1.2.16. — *Munissons $\widehat{\Theta}_n$ (resp. $\widehat{\Theta}_n \times \Delta$) de la structure de catégorie de modèles des quasi- n -catégories (resp. des Θ_n -espaces de Rezk).*

(a) *Alors l'adjonction*

$$p^* : \widehat{\Theta}_n \rightleftarrows \widehat{\Theta}_n \times \Delta : i_0^*,$$

où i_0^* est le foncteur $X \mapsto X_{\bullet,0}$, est une équivalence de Quillen.

(b) *Considérons le foncteur*

$$\begin{aligned} R : \Theta_n \times \Delta &\rightarrow \widehat{\Theta}_n \\ (T, \Delta_n) &\mapsto T \times N_{\Theta_n} \widetilde{\Delta}_n, \end{aligned}$$

où $\widetilde{\Delta}_n$ désigne le groupoïde simplement connexe d'ensemble d'objets $\{0, \dots, n\}$.
Alors l'adjonction

$$R_! : \widehat{\Theta}_n \times \Delta \rightleftarrows \widehat{\Theta}_n : N_R,$$

associée à R par le procédé de Kan, est une équivalence de Quillen.

Démonstration. — Cela résulte du fait que le localisateur des Θ_n -espaces de Rezk est la complétion simpliciale de celui des n -quasi-catégories (théorème A.1.2.14), ainsi que de résultats généraux sur la complétion simpliciale dus à Cisinski (voir [A1, théorème 8.4 et corollaire 8.8]). \square

Remarque A.1.2.17. — Pour $n = 1$, on retrouve les deux équivalences de Quillen de Joyal et Tierney entre les quasi-catégories et les espaces complets de Segal [54].

A.2. Autour des ∞ -opérades

De la même manière que les $(\infty, 1)$ -catégories sont une version homotopique des catégories, les ∞ -opérades sont une version homotopique des opérades et jouent un rôle prépondérant en algèbre homotopique, notamment sous l'impulsion de Lurie [58]. Les principaux modèles de ∞ -opérades sont les ∞ -opérades de Lurie [58, chapitre 13], les ∞ -opérades de Moerdijk et Weiss [63, 28], préfaisceaux sur la catégorie « dendroïdale » Ω , les espaces de Segal dendroïdaux complets [29] et les opérades simpliciales [30]. Ces modèles sont reliés entre eux par des zigzags d'équivalences de Quillen grâce aux travaux de nombreux auteurs [29, 30, 46, 2, 24].

Dans [A2], avec Denis-Charles Cisinski et Ieke Moerdijk, nous démontrons que la catégorie dendroïdale Ω , analogue opéradique de la catégorie simpliciale Δ qui intervient dans la définition des ∞ -opérades de Moerdijk et Weiss, est une catégorie test au sens de Grothendieck. Cela signifie en particulier qu'il existe une structure de catégorie de modèles sur $\widehat{\Omega}$ dont les équivalences faibles sont les morphismes qui sont envoyés par le foncteur catégorie des éléments sur une équivalence de Thomason et dont les cofibrations sont les monomorphismes, et que cette catégorie de modèles modélise canoniquement les types d'homotopie. Nous montrons de plus, qu'à un changement de cofibrations près, cette structure peut être obtenue comme une localisation de Bousfield à gauche de la structure de catégorie de modèles de Cisinski et Moerdijk des ∞ -opérades [28].

Dans [A3], avec Javier Gutiérrez et Moritz Groth, nous étudions l'espace de modules des modèles des ∞ -opérades. L'idée provient d'un travail de Toën qui a résolu le problème analogue pour les $(\infty, 1)$ -catégories [76], travail ensuite généralisé par Barwick et Schommer-Pries aux (∞, n) -catégories [6]. Nous démontrons ainsi que l'espace de modules des modèles des ∞ -opérades est faiblement contractile, et que celui des ∞ -opérades non symétriques a le type d'homotopie de l'espace classifiant de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, l'élément non trivial de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ correspondant à une opération « miroir » sur les arbres. Cela entraîne en particulier que deux modèles des ∞ -opérades sont comparables entre eux d'une unique manière. Nous redémontrons également le résultat de Barwick et Schommer-Pries, à savoir que l'espace de modules des modèles des (∞, n) -catégories est l'espace classifiant de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$, par une méthode légèrement différente de la leur.

A.3. Le point de vue *folk* sur les ∞ -catégories

Le point de vue adopté dans ce mémoire sur les ∞ -catégories (dans cette section, nous revenons au monde strict et « ∞ -catégorie » devra être compris comme « ∞ -catégorie stricte ») est homotopique : les ∞ -catégories sont vues comme des modèles pour les types d'homotopie et sont donc en un certain sens considérées à équivalences de Thomason près. Néanmoins, il est également intéressant de les considérer seulement à équivalences de ∞ -catégories près (généralisation naturelle mais

non triviale des équivalences de catégories). Ce point de vue conduit à la structure de catégorie de modèles dite *folk* sur $\infty\text{-Cat}$ [55] dont les équivalences faibles sont les équivalences de ∞ -catégories et dont les objets cofibrants sont les ∞ -catégories libres au sens des polygraphes.

Dans [A5], avec François Métayer, nous montrons que la structure *folk* peut se transférer, *via* le lemme de transfert (lemme 1.3.2), à la catégorie des ∞ -groupoïdes (stricts), ou plus généralement des (∞, n) -catégories (strictes). Nous montrons par ailleurs que dans l'équivalence entre les ∞ -groupoïdes et les complexes croisés de Brown et Higgins [13], cette structure de catégorie de modèles correspond à la structure de catégorie de modèles de Brown et Golasiński sur les complexes croisés [12].

Dans [A4], avec Maxime Lucas, nous montrons que le produit de Gray et le joint ∞ -catégoriques sont compatibles à la structure de catégorie de modèles *folk*. Plus précisément, la catégorie $\infty\text{-Cat}$ munie de cette structure et du produit de Gray forme une catégorie de modèles monoïdale fermée et, en particulier, on peut dériver le produit de Gray et les **Hom** internes associés $\underline{\mathbf{Hom}}_{\text{oplax}}$ et $\underline{\mathbf{Hom}}_{\text{lax}}$. Nous montrons également un résultat similaire pour les (∞, n) -catégories (strictes), établissant en particulier que le produit de Gray de deux ∞ -groupoïdes est un ∞ -groupoïde. Pour le joint, la situation est plus complexe car la structure résultante n'est pas fermée mais seulement localement fermée. Nous montrons néanmoins que l'on peut dériver le joint et ses **Hom** internes locaux, les tranches, au prix d'un travail non trivial d'algèbre homotopique.

TRAVAUX PRÉSENTÉS

- [T1] D. ARA – « Structures de catégorie de modèles à la Thomason sur la catégorie des 2-catégories strictes », *Cah. Topol. Géom. Différ. Catég.* **56** (2015), no. 2, p. 83–108.
- [T2] ———, « A Quillen Theorem B for strict ∞ -categories », *J. Lond. Math. Soc. (2)* **100** (2019), no. 2, p. 470–497.
- [T3] D. ARA & G. MALTSINIOTIS – « Vers une structure de catégorie de modèles à la Thomason sur la catégorie des n -catégories strictes », *Adv. Math.* **259** (2014), p. 557–654.
- [T4] ———, « Le type d'homotopie de la ∞ -catégorie associée à un complexe simplicial », Prépublication, arXiv:1503.02720v1, 2015.
- [T5] ———, « Un théorème A de Quillen pour les ∞ -catégories strictes I : la preuve simpliciale », *Adv. Math.* **328** (2018), p. 446–500.
- [T6] ———, « Un théorème A de Quillen pour les ∞ -catégories strictes II : la preuve ∞ -catégorique », *High. Struct.* **4** (2020), no. 1, p. 284–388.
- [T7] ———, « Joint et tranches pour les ∞ -catégories strictes », *Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.)* **165** (2020).
- [T8] ———, « Comparaison des nerfs n -catégoriques », *Algebr. Geom. Topol.* **22** (2022), no. 6, p. 2867–2914.

AUTRES TRAVAUX

- [A1] D. ARA – « Higher quasi-categories vs higher Rezk spaces », *J. K-Theory* **14** (2014), no. 3, p. 701–749.
- [A2] D. ARA, D.-C. CISINSKI & I. MOERDIJK – « The category Ω of dendrices is a test category », *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **167** (2019), no. 1, p. 470–477.
- [A3] D. ARA, M. GROTH & J. J. GUTIÉRREZ – « On autoequivalences of the $(\infty, 1)$ -category of ∞ -operads », *Math. Z.* **281** (2015), no. 3-4, p. 807–848.
- [A4] D. ARA & M. LUCAS – « The folk model category structure on strict ω -categories is monoidal », *Theory Appl. Categ.* **35** (2020), p. 745–808.
- [A5] D. ARA & F. MÉTAYER – « The Brown-Golasiński model structure on strict ∞ -groupoids revisited », *Homology Homotopy Appl.* **13** (2011), no. 1, p. 121–142.

RÉFÉRENCES

- [1] F. A. AL-AGL & R. STEINER – « Nerves of multiple categories », *Proc. London Math. Soc. (3)* **66** (1993), no. 1, p. 92–128.
- [2] C. BARWICK – « From operator categories to higher operads », *Geom. Topol.* **22** (2018), no. 4, p. 1893–1959.
- [3] C. BARWICK & D. M. KAN – « Quillen theorems B_n for homotopy pullbacks of (∞, k) -categories », à paraître dans *Homology Homotopy Appl.*
- [4] ———, « Relative categories: another model for the homotopy theory of homotopy theories », *Indag. Math. (N.S.)* **23** (2012), no. 1-2, p. 42–68.
- [5] ———, « n -relative categories: a model for the homotopy theory of n -fold homotopy theories », *Homology Homotopy Appl.* **15** (2013), no. 2, p. 281–300.
- [6] C. BARWICK & C. SCHOMMER-PRIES – « On the unicity of the theory of higher categories », *J. Amer. Math. Soc.* **34** (2021), no. 4, p. 1011–1058.
- [7] M. A. BATANIN & R. STREET – « The universal property of the multitude of trees », *J. Pure Appl. Algebra* **154** (2000), no. 1-3, p. 3–13.
- [8] C. BERGER – « A cellular nerve for higher categories », *Adv. Math.* **169** (2002), no. 1, p. 118–175.
- [9] ———, « Iterated wreath product of the simplex category and iterated loop spaces », *Adv. Math.* **213** (2007), no. 1, p. 230–270.
- [10] J. E. BERGNER – « A model category structure on the category of simplicial categories », *Trans. Amer. Math. Soc.* **359** (2007), no. 5, p. 2043–2058.
- [11] ———, « Three models for the homotopy theory of homotopy theories », *Topology* **46** (2007), no. 4, p. 397–436.

- [12] R. BROWN & M. GOLASIŃSKI – « A model structure for the homotopy theory of crossed complexes », *Cahiers Topologie Géom. Différentielle Catég.* **30** (1989), no. 1, p. 61–82.
- [13] R. BROWN & P. J. HIGGINS – « The equivalence of ∞ -groupoids and crossed complexes », *Cahiers Topologie Géom. Différentielle* **22** (1981), no. 4, p. 371–386.
- [14] M. BULLEJOS & A. M. CEGARRA – « On the geometry of 2-categories and their classifying spaces », *K-Theory* **29** (2003), no. 3, p. 211–229.
- [15] M. CALVO, A. M. CEGARRA & B. A. HEREDIA – « Bicategorical homotopy fiber sequences », *J. Homotopy Relat. Struct.* **9** (2014), no. 1, p. 125–173.
- [16] P. CARRASCO, A. M. CEGARRA & A. R. GARZÓN – « Nerves and classifying spaces for bicategories », *Algebr. Geom. Topol.* **10** (2010), no. 1, p. 219–274.
- [17] A. M. CEGARRA – « Homotopy fiber sequences induced by 2-functors », *J. Pure Appl. Algebra* **215** (2011), no. 4, p. 310–334.
- [18] A. M. CEGARRA & B. A. HEREDIA – « Comparing geometric realizations of tricategories », *Algebr. Geom. Topol.* **14** (2014), no. 4, p. 1997–2064.
- [19] ———, « Homotopy colimits of 2-functors », *J. Homotopy Relat. Struct.* **11** (2016), no. 4, p. 735–774.
- [20] A. M. CEGARRA, B. A. HEREDIA & J. REMEDIOS – « Bicategorical homotopy pullbacks », *Theory Appl. Categ.* **30** (2015), p. 147–205.
- [21] J. CHICHE – « La théorie de l’homotopie des 2-catégories », Thèse, Université Paris Diderot – Paris 7, 2014, sous la direction de G. Maltsiniotis.
- [22] ———, « Un théorème A de Quillen pour les 2-foncteurs lax », *Theory Appl. Categ.* **30** (2015), p. 49–85.
- [23] ———, « Théories homotopiques des 2-catégories », *Cah. Topol. Géom. Différ. Catég.* **56** (2015), no. 1, p. 15–75.
- [24] H. CHU, R. HAUGSENG & G. HEUTS – « Two models for the homotopy theory of ∞ -operads », *J. Topol.* **11** (2018), no. 4, p. 857–873.
- [25] D.-C. CISINSKI – « Le localisateur fondamental minimal », *Cah. Topol. Géom. Différ. Catég.* **45** (2004), no. 2, p. 109–140.
- [26] ———, « Les préfaisceaux comme modèles des types d’homotopie », *Astérisque* (2006), no. 308, p. xxiv+390.

- [27] D.-C. CISINSKI & G. MALTSINIOTIS – « La catégorie Θ de Joyal est une catégorie test », *J. Pure Appl. Algebra* **215** (2011), no. 5, p. 962–982.
- [28] D.-C. CISINSKI & I. MOERDIJK – « Dendroidal sets as models for homotopy operads », *J. Topol.* **4** (2011), no. 2, p. 257–299.
- [29] ———, « Dendroidal Segal spaces and ∞ -operads », *J. Topol.* **6** (2013), no. 3, p. 675–704.
- [30] ———, « Dendroidal sets and simplicial operads », *J. Topol.* **6** (2013), no. 3, p. 705–756.
- [31] S. CRANS – « On combinatorial models for higher dimensional homotopies », Thèse, Université d’Utrecht, 1995, sous la direction de I. Moerdijk et D. van Dalen.
- [32] B. DAY – « On closed categories of functors », in *Reports of the Midwest Category Seminar, IV*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 137, Springer, 1970, p. 1–38.
- [33] ———, « A reflection theorem for closed categories », *J. Pure Appl. Algebra* **2** (1972), no. 1, p. 1–11.
- [34] J. W. DUSKIN – « Simplicial matrices and the nerves of weak n -categories. I. Nerves of bicategories », vol. 9, 2001/02, CT2000 Conference (Como), p. 198–308.
- [35] W. G. DWYER & D. M. KAN – « Simplicial localizations of categories », *J. Pure Appl. Algebra* **17** (1980), no. 3, p. 267–284.
- [36] R. FRITSCH – « Zur Unterteilung semisimplizialer Mengen. I », *Math. Z.* **108** (1969), p. 329–367.
- [37] R. FRITSCH & D. M. LATCH – « Homotopy inverses for nerve », *Math. Z.* **177** (1981), no. 2, p. 147–179.
- [38] A. GAGNA – « Sur la théorie de l’homotopie des 3-catégories strictes », Thèse, Université d’Aix-Marseille, sous la direction de D. Ara.
- [39] ———, « Strict n -categories and augmented directed complexes model homotopy types », *Adv. Math.* **331** (2018), p. 542–564.
- [40] D. GAITSGORY – « Outline of the proof of the geometric Langlands conjecture for GL_2 », *Astérisque* (2015), no. 370, p. 1–112.
- [41] J. W. GRAY – *Formal category theory: adjointness for 2-categories*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 391, Springer-Verlag, 1974.

- [42] A. GROTHENDIECK – « Techniques de construction et théorèmes d’existence en géométrie algébrique. III. Préschémas quotients », *Séminaire Bourbaki* **6** (1960–1961), exposé no. 212.
- [43] ———, *Pursuing Stacks, Volume I*, édité par G. Maltsiniotis, Documents Mathématiques, vol. 20, Société Mathématique de France, 2022.
- [44] L. GUETTA – « Homology of strict ω -categories », Thèse, Université de Paris, 2021, sous la direction de F. Métayer.
- [45] S. HENRY – « Minimal model structures », Prépublication, arXiv:2011.13408, 2020.
- [46] G. HEUTS, V. HINICH & I. MOERDIJK – « On the equivalence between Lurie’s model and the dendroidal model for infinity-operads », *Adv. Math.* **302** (2016), p. 869–1043.
- [47] P. S. HIRSCHHORN – *Model categories and their localizations*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 99, American Mathematical Society, 2003.
- [48] A. HIRSCHOWITZ & C. SIMPSON – « Descente pour les n -champs », Prépublication, arXiv:math/9807049v3, 2001.
- [49] M. L. DEL HOYO – « On the loop space of a 2-category », *J. Pure Appl. Algebra* **216** (2012), no. 1, p. 28–40.
- [50] L. ILLUSIE – *Complexe cotangent et déformations II*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 283, Springer-Verlag, 1972.
- [51] A. JOYAL – « Disks, duality and Θ -categories », Prépublication, 1997.
- [52] ———, « Quasi-categories and Kan complexes », *J. Pure Appl. Algebra* **175** (2002), no. 1-3, p. 207–222, Special volume celebrating the 70th birthday of Professor Max Kelly.
- [53] ———, « The theory of quasi-categories and its applications », Prépublication, 2008.
- [54] A. JOYAL & M. TIERNEY – « Quasi-categories vs Segal spaces », in *Categories in algebra, geometry and mathematical physics*, Contemp. Math., vol. 431, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, p. 277–326.
- [55] Y. LAFONT, F. MÉTAYER & K. WORYTKIEWICZ – « A folk model structure on omega-cat », *Adv. Math.* **224** (2010), no. 3, p. 1183–1231.
- [56] J. LURIE – *Higher topos theory*, Annals of Mathematics Studies, vol. 170, Princeton University Press, 2009.

- [57] ———, « On the classification of topological field theories », Prépublication, 2010.
- [58] ———, « Higher algebra », Prépublication, 2017.
- [59] M. MAKKAI & M. ZAWADOWSKI – « Duality for simple ω -categories and disks », *Theory Appl. Categ.* **8** (2001), p. 114–243.
- [60] G. MALTSINIOTIS – « La théorie de l’homotopie de Grothendieck », *Astérisque* (2005), no. 301, p. vi+140.
- [61] J. P. MAY – « Finite spaces and larger contexts », Prépublication.
- [62] F. MÉTAYER – « Resolutions by polygraphs », *Theory Appl. Categ.* **11** (2003), no. 7, p. 148–184.
- [63] I. MOERDIJK & I. WEISS – « Dendroidal sets », *Algebr. Geom. Topol.* **7** (2007), p. 1441–1470.
- [64] D. G. QUILLEN – *Homotopical algebra*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 43, Springer-Verlag, 1967.
- [65] ———, « Higher algebraic K -theory I », in *Algebraic K-theory I: Higher K-theories* (H. Bass, éd.), Lecture Notes in Mathematics, vol. 341, Springer-Verlag, 1973, p. 85–147.
- [66] C. REZK – « A model for the homotopy theory of homotopy theory », *Trans. Amer. Math. Soc.* **353** (2001), no. 3.
- [67] C. REZK – « A Cartesian presentation of weak n -categories », *Geom. Topol.* **14** (2010), no. 1, p. 521–571.
- [68] ———, « Correction to “A Cartesian presentation of weak n -categories” », *Geom. Topol.* **14** (2010), no. 4, p. 2301–2304.
- [69] C. SIMPSON – *Homotopy theory of higher categories*, New Mathematical Monographs, vol. 19, Cambridge University Press, 2012.
- [70] R. STEINER – « Omega-categories and chain complexes », *Homology Homotopy Appl.* **6** (2004), no. 1, p. 175–200.
- [71] ———, « Simple omega-categories and chain complexes », *Homology Homotopy Appl.* **9** (2007), no. 1, p. 451–465.
- [72] R. STREET – « The algebra of oriented simplexes », *J. Pure Appl. Algebra* **49** (1987), no. 3, p. 283–335.

- [73] ———, « Categorical structures », in *Handbook of algebra*, Handb. Algebr., vol. 1, Elsevier, 1996, p. 529–577.
- [74] ———, « Categorical and combinatorial aspects of descent theory », *Appl. Categ. Structures* **12** (2004), no. 5-6, p. 537–576.
- [75] R. W. THOMASON – « Cat as a closed model category », *Cah. Topol. Géom. Différ. Catég.* **21** (1980), no. 3, p. 305–324.
- [76] B. TOËN – « Vers une axiomatisation de la théorie des catégories supérieures », *K-Theory* **34** (2005), no. 3, p. 233–263.
- [77] K. WORYTKIEWICZ, K. HESS, P.-E. PARENT & A. TONKS – « A model structure à la Thomason on 2-Cat », *J. Pure Appl. Algebra* **208** (2007), no. 1, p. 205–236.
- [78] ———, « Corrigendum to : “A model structure à la Thomason on 2-Cat” [J. Pure Appl. Algebra 208 (2007) 205–236] [MR2269840] », *J. Pure Appl. Algebra* **220** (2016), no. 12, p. 4017–4023.