5) Introduction

<u>déf</u> : Une (∞, n)-catégorie est une ∞-catégorie (faible) dans laquelle les i-flèches pour $i > n$ sont inversibles.

<u>Problème</u> : Qu'est-ce qu'une ∞-catégorie (faible) ?

Intuitivement une ∞-catégorie (faible) est un ∞-graphe muni d'opérations de compositions et d'unités, vérifiant des axiomes à flèches supérieures près, lesquelles flèches vérifient des axiomes à flèches supérieures près, etc.

<u>Solution</u> : on contourne le problème (bien que l'on puisse rendre le « etc » précis) et on définit directement un « modèle » des (∞, n)-catégories (i.e. essentiellement une catégorie $\mathcal{C}$ munie d'équivalences faibles W tq morallement $\mathcal{C}[W^{-1}] \simeq Ho((\infty, n)\text{-}Cat)$)

<u>ex</u> : $\rightarrow n = 1$

On a les modèles suivants :

- les quasi-catégories (Joyal)
- les catégories simpliciales
- les catégories de Segal (Segal, Dwyer, Kan, Smith, Simpson)
- les espaces complets de Segal (Rezk)

cf. le survey de Bergner

- les catégories munies d'une classe d'équivalences faibles (Barwick, Kan)
- les 2-catégories strictes (avec les équivalences de Dwyer-Kan)

$\cdot$ $n > 1$

- les catégories de Segal supérieures (Hirschowitz, Simpson)
- les espaces complets de Segal supérieurs (Rezk)

(dans son papier sur l'hypothèse du cobordisme Lurie utilise une variante des espaces complets de Segal due à Barwick)

- $n = 0$ Une $(\infty, 0)$-catégorie n'est rien d'autre qu'un ∞-groupoïde. Il existe quantité de modèles pour les ∞-groupoïdes. Dans ces notes, nous utilisons le modèle des complexes de Kan.

<u>Intuition des espaces complets de Segal</u> (cf. section 2.1 de Lurie)

Supposons qu'on ait défini une théorie des $(\infty, 1)$-catégories et un foncteur de réalisation $N : \infty\text{-Gpd} \to \mathrm{Kan}$

Soit C une $(\infty, 1)$-catégorie.

- Considérons la sous $(\infty,1)$-catégorie X_0 de C des morphismes (faiblement) inversibles. La $(\infty,1)$-catégorie C_0 est en fait un ∞-groupoïde : c'est le ∞-groupoïde des objets de C.

- Considérons la $(\infty,1)$-catégorie $\mathrm{Fun}(\Delta_1, C)$ des foncteurs $\Delta_1 \to C$, où $\Delta_1 = \{0 \leq 1\}$. Notons X_1 le sous ∞-groupoïde maximal (cf. ci-dessous) de $\mathrm{Fun}(\Delta_1, C)$. X_1 est le ∞-groupoïde des flèches de C.

- Plus généralement, notons X_n le sous-groupoïde maximal de $\mathrm{Fun}(\Delta_n, C)$, où $\Delta_n = \{0 \leq \dots \leq n\}$

Les C_n forment un objet simplicial dans les ∞-groupoïdes :

$$\Delta_n \longmapsto h(\mathrm{Fun}(\Delta_n, C))$$

où h est le foncteur sous ∞-groupoïde maximal.

En réalisant via le foncteur N, on obtient un espace simplicial (i.e. un ensemble bisimplicial).

Ex : Supposons que C soit une catégorie.

Alors $X : \Delta_n \mapsto Nh(\mathrm{Fun}(\Delta_n, C))$ détermine C.

Les objets (resp. les flèches) de C sont les objets de X_0 (resp. de X_1). Il nous reste à décrire la composition.

Dans Δ (la catégorie des simplexes), on a

$$\Delta_2 = (\Delta_1, \sigma) \coprod_{\Delta_0} (\tau, \Delta_1) \quad \text{où} \quad \begin{array}{l} \sigma(0) = 0 \\ \text{et } \tau(0) = 1 \end{array}$$

On obtient donc en appliquant X une flèche

$$\varphi_2 : X_2 \longrightarrow X_1 \times_{X_0} X_1$$

d'ensembles simpliciaux. On vérifie immédiatement que cette flèche est un isomorphisme. Plus généralement, pour $k \geq 1$,
La composition est donc donnée par φ_2^{-1}.
on a un isomorphisme canonique

$$\varphi_k : X_k \longrightarrow \overbrace{X_1 \times_{X_0} \cdots \times_{X_0} X_1}^{k}$$

Revenons au cas général. Il n'est pas raisonnable d'attendre que φ_k soit un isomorphisme : il faut affaiblir cette propriété.

déf : Un espace de Segal est un espace simplicial $(X_\cdot)$ tq pour tout $k \geq 1$, $\varphi_k : X_k \to X_1 \overset{h}{\times}_{X_0} \cdots \overset{h}{\times}_{X_0} X_1$ soit une équivalence faible.

Il est raisonnable de supposer qu'à partir d'une $(\infty,1)$-catégorie, on obtient par la construction ci-dessus un espace de Segal.

Rq : Dans la définition que nous adopterons ensuite, les espaces de Segal satisferont une condition technique assurant que les produits fibrés du type dessus sont homotopiques.

Soit $(X_\bullet)$ un espace de Segal. On peut lui associer une $(\infty,1)$-catégorie C de la manière suivante

Les objets de C sont les 0-simplexes de X_0.

Si x et y sont deux objets de C, on définit un ∞-groupoïde $Map_C(x,y)$ (en fait un complexe de Kan) de la manière suivante :

$$Map_C(x,y) = \{y\} \overset{h}{\underset{X_0}{\times}} X_1 \overset{h}{\underset{X_0}{\times}} \{x\}$$

On a une composition

$Map_C(y,z) \times Map(x,y) \longrightarrow Map(x,z)$ donnée par

$$z \overset{h}{\underset{X_0}{\times}} X_1 \overset{h}{\underset{X_0}{\times}} y \times y \overset{h}{\underset{X_0}{\times}} X_1 \overset{h}{\underset{X_0}{\times}} x \underset{df^{-1}}{\simeq} z \overset{h}{\underset{X_0}{\times}} X_1 \overset{h}{\underset{X_0}{\times}} X_1 \overset{h}{\underset{X_0}{\times}} x$$
$$\xrightarrow{\simeq} z \overset{h}{\underset{X_0}{\times}} X_2 \overset{h}{\underset{X_0}{\times}} x \longrightarrow z \overset{h}{\underset{X_0}{\times}} X_1 \overset{h}{\underset{X_0}{\times}} x$$

La catégorie $Ho(X_\bullet)$ est le tronqué de la $(\infty,1)$-catégorie C définie ci-dessus. Explicitement, ses objets sont les 0-simplexes de X_0 et $Hom_{Ho(X_\bullet)}(x,y) = \pi_0(Map_C(x,y))$.

Si $X_\bullet$ provient d'une $(\infty,1)$-catégorie C, alors les 1-simplexes de X_0 et 0-simplexes inversibles de X_1 correspondent tous les deux aux 1-flèches inversibles de C

<u>déf</u> : Soit $X_\bullet$ un espace de Segal. On note $X_{hoequiv}$ le sous-ensemble simplicial plein de X_1 dont les 0-simplexes sont les f inversibles dans $Ho(X_\bullet)$.

L'application $X_0 \to X_1$ induite par $\Delta_1 \to \Delta_0$, se factorise par $X_{hoequiv}$.

L'espace de Segal $X_\bullet$ est dit complet si $X_0 \to X_{hoequiv}$ est une équivalence faible.

<u>déf</u> : Une $(\infty,1)$-catégorie est un espace de Segal complet

I) Préliminaires modèle-catégoriques

1) Quelques définitions

def : Une catégorie de modèles cartésiennes closes est une catégorie cartésienne close munie d'une structure de catégorie de modèles vérifiant l'axiome suivant.

Soient $i : A \to B$ une cofibration et $p : X \to Y$ une fibration. Alors la flèche canonique

$$\underline{\mathrm{Hom}}(B, X) \to \underline{\mathrm{Hom}}(A, X) \times_{\underline{\mathrm{Hom}}(A, Y)} \underline{\mathrm{Hom}}(B, Y)$$

est une fibration. Si de plus i ou p est une équivalence faible, alors cette flèche est également une équivalence faible.

Rq : Si X est fibrant l'axiome ci-dessus entraîne que $\underline{\mathrm{Hom}}(B, X)$ est fibrant pour tout B.

ex : $\hat{\Delta}_{\text{Quillen}}$, $\hat{\Delta}_{\text{Joyal}}$, $\mathrm{Top}_{\text{eng comp}}$, $C_\cdot(R)$ (complexes de R-modules munie de la structure projective), $s\mathrm{Pre}(A)_{\text{inj}}$ (cf. plus loin)

def : Une catégorie de modèles simpliciales est une catégorie $\mathcal{C}$ enrichie en ensembles simpliciaux tq

1) pour tous $K \in \mathrm{Ob}\,\hat{\Delta}$, $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, il existe $K \otimes X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, $X^K \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ et des isomorphismes

$$\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(K \otimes X, Y) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\hat{\Delta}}(K, \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(X, Y)) \simeq \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(Y, X^K),$$

munie d'une structure de catégorie de modèles tq

2) Soient $i : A \to B$ une cofibration et $p : X \to Y$ une fibration de $\mathcal{C}$. Alors la flèche canonique

$$\mathrm{Map}(B, X) \to \mathrm{Map}(A, X) \times_{\mathrm{Map}(A, Y)} \mathrm{Map}(B, Y)$$

est une fibration de Kan. Si de plus,

i ou p est une équivalence faible, alors cette flèche
est une équivalence faible simpliciale

ex : $\hat{\Delta}_{Quillen}$, $sPre(A)_{inj}$

Par contre, $\hat{\Delta}_{Joyal}$ n'est pas simpliciale.

def : Une catégorie de modèles est dite propre
à gauche si les équivalences faibles sont stables
(resp. à droite)
par image directe le long d'une cofibration
(resp. inverse) (resp. d'une fibration).
On dit que M est propre si elle propre à gauche et
à droite

ex : $\hat{\Delta}$ est propre, $sPre(C)$ est propre

def : Une catégorie de modèles est combinatoire
si elle est localement présentable et si ses cofibrations
et ses cofibrations triviales sont engendrées par un ensemble.

ex : essentiellement toutes les catégories de modèles de nature
algébrique sont combinatoires

2) Préfaisceaux simpliciaux

Soit A une petite catégorie. On notera $sPre(A)$ la
catégorie des préfaisceaux simpliciaux sur A, i.e. la
catégorie des foncteurs $A^{op} \to \hat{\Delta}$. Cette catégorie n'est autre
que $\widehat{A \times \Delta}$.

Les projections $A \times \Delta \to A$ et $A \times \Delta \to \Delta$ induisent des foncteurs

$$d : \hat{A} \to sPre(A) \quad \text{et} \quad c : \hat{\Delta} \to sPre(A)$$

(d pour discret et c pour constant !)

Fait : 1) Le foncteur d est pleinement fidèle
2) Le foncteur c est pleinement fidèle si A admet
un objet final (A 0-connexe suffit).

Les représentables de $sPre(A)$ sont les $(a, \Delta_n) \simeq d(a) \times c(\Delta_n)$.

De plus, $d(a) \simeq (a, \Delta_0)$ et $c(\Delta_n) \simeq (1, \Delta_n)$

si 1 est un objet terminal.

La catégorie $sPre(A)$ est cartésienne fermée :

$$\underline{Hom}_{sPre(A)}(X, Y) = ((a, \Delta_n) \mapsto Hom_{sPre(A)}(X \times (a, \Delta_n), Y))$$

De plus, elle est simpliciale :

$$\underline{Map}_{sPre(A)}(X, Y) = (\Delta_n \mapsto Hom_{sPre(A)}(X \times c(\Delta_n), Y))$$

et on admet des

$$K \otimes X := c(K) \times X \quad \text{et} \quad Y^K := \underline{Hom}(c(K), Y)$$

vérifiant les relations d'adjonction vues plus haut.

<u>Thm</u> : La catégorie $sPre(A)$ est munie d'une structure de catégorie de modèles dont les équivalences faibles et les cofibrations sont argument par argument. De plus, cette catégorie de modèles est combinatoire, cartésienne fermée, simpliciale et propre.
On notera $sPre(A)_{inj}$ cette catégorie des modèles.

<u>Rq</u> : 1) Les cofibrations de $sPre(A)_{inj}$ sont les monomorphismes.
En particulier, tout objet est cofibrant.
2) On vérifie que tout objet discret, i.e. de la forme $d(X)$ est fibrant.

<u>Cas particulier important</u> :

$A = \Theta_1 = \Delta$ (Nous notons Θ_1 le facteur Δ non simplicial de $sPre(\Delta) = \widehat{\Delta \times \Delta}$).

Dans ce cas, la structure injective sur $sPre(\Theta_1)$ coïncide avec la structure dite de Reedy et on a donc :

<u>prop</u> : Un morphisme $X \to Y$ de $sPre(\Theta_1)$ est une fibration (resp. une fibration triviale) si pour tout $k \geq 0$

$$\mathrm{Map}(d(\Delta_k), Y) \longrightarrow \mathrm{Map}(d(\partial\Delta_k), Y) \times_{\mathrm{Map}(d(\partial\Delta_k), X)} \mathrm{Map}(d(\Delta_k), X)$$

est une fibration de Kan (resp. une fibration de Kan triviale). De plus, les fibrations sont des fibrations de Kan argument par argument.
En particulier, X est fibrant si $\mathrm{Map}(d(\Delta_k), X) \to \mathrm{Map}(d(\partial\Delta_k), X)$ est une fibration de Kan. De plus, si X est fibrant, X_k est un complexe de Kan pour tout k.

II) Espaces complets de Segal

1) Espace de Segal

<u>def</u> : Un espace de Segal est un objet X de $sPre(\Theta_1)$ vérifiant les deux conditions suivantes :

- X est fibrant pour la structure injective
- pour tout k, $\varphi_k : X_k \longrightarrow X_1 \times_{X_0} \dots \times_{X_0} X_1$ est une équivalence faible simpliciale

<u>Rq</u> : 1) Le caractère fibrant de X va entraîner que certains carrés cartésiens de l'introduction seront homotopiquement cartésiens. En effet, explicitons la condition d'être fibrant :

- $k=0$, X_0 est fibrant
- $k=1$, $X_1 \longrightarrow X_0 \times X_0$ est une fibration de Kan

Le carré
$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & X_1 \arrow[d] \\ \Delta_0 \arrow[r] & X_0 \times X_0 \end{tikzcd}$$
est donc homotopiquement cartésien

- $k=2$, $X_2 \longrightarrow \varinjlim \left(\begin{tikzcd} & X_1 & & X_1 \\ X_0 \arrow[ur] \arrow[r] & X_1 & X_0 \arrow[l] \arrow[ur] \end{tikzcd} \right) =$ ensemble simplicial des triangles dans X_0

est une fibration de Kan

2) Notons I_k la colimite $\overbrace{\Delta_1 \amalg_{\Delta_0} \cdots \amalg_{\Delta_0} \Delta_1}^{k \text{ fois}}$ dans $\widehat{\Theta_1}$.

On a un monomorphisme $I_k \to \Delta_k$ dans $\widehat{\Theta_1}$ et φ_k n'est rien d'autre que $Map(d(\Delta_k), X) \to Map(d(I_k), X)$.

Puisque X est fibrant et $sPre(\Theta_1)$ est simplicial, φ_k est une fibration de Kan.

On va définir un foncteur $N : Cat \to sPre(\Theta_1)$ suivant l'intuition de l'introduction.

<u>déf</u> : Soit $k : Cat \to Gpd$ l'adjoint à droite du foncteur d'inclusion des groupoïdes dans les catégories.

On pose $N : Cat \to sPre(\Theta_1)$
$C \longmapsto \Delta_n \longmapsto k(\underline{Hom}(\Delta_n, C))$

<u>prop</u> : Si C est une catégorie, alors $N(C)$ est un espace de Segal

<u>dem</u> : exercice instructif !

<u>prop</u> : Le foncteur $Cat \to sPre(\Theta_1)$ est pleinement fidèle.

<u>dem</u> : Cela résulte essentiellement du fait qu'un morphisme $NC \to ND$ est déterminé par $NC_i \to NC_i$ pour $i = 0, 1$, que l'inverse de $NC_2 \to NC_1 \times_{NC_0} NC_1$ est donné par la composition et que $NC_0 \to NC_1$ est donné par les unités (cf. également l'intro).

Nous allons maintenant étudier la catégorie homotopique $Ho(X)$ d'un espace de Segal X.

<u>déf</u> : Soit X un espace de Segal.

- L'ensemble des objets de X est l'ensemble des 0-simplexes de X_0
- Soient x et y deux objets de X. L'espace des morphismes de x à y est la fibre en (x,y) de $X_1 \to X_0 \times X_0$.
  On le notera $Map_C(x,y)$.
- L'application $X_0 \to X_1$ associe à tout x un élément 1_x dans $Map(x,x)$

- On dit que $f, g \in Map(x,y)$ sont homotopes si $f = g$ dans $\pi_0(Map(x,y))$

Rq : - Le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} Map_c(x,y) \arrow[r] \arrow[d] & X_1 \arrow[d] \\ \Delta_0 \arrow[r, "(x,y)"'] & X_0 \times X_0 \end{tikzcd}$$

est homotopiquement cartésien, i.e. $Map_c(x,y)$ est la fibre homotopique de $X_1 \to X_0 \times X_0$ en (x,y).

- $Map_c(x,y)$ est un complexe de Kan. De plus, son type d'homotopie ne dépend pas de la composante connexe de (x,y).

Plus généralement, si $x_0, \dots, x_n$ sont $n+1$ objets de X, on notera $Map(x_0, \dots, x_n)$ la fibre de $X_n \to X_0^{n+1}$ en $(x_0, \dots, x_n)$. On a une équivalence faible de fibrations

$$\begin{tikzcd} X_n \arrow[rr] \arrow[dr] & & X_1 \times_{X_0} \dots \times_{X_0} X_1 \arrow[dl] \\ & X_0^{n+1} & \end{tikzcd}$$

induisant une fibration triviale entre les fibres

$$Map(x_0, \dots, x_n) \to Map(x_{n-1}, x_n) \times \dots \times Map(x_0, x_1)$$

On définit maintenant une composition : soient x, y, z des objets de X.

$$\circ : Map(y,z) \times Map(x,y) \xleftarrow{\sim} Map(x,y,z) \xrightarrow{d_1} Map(x,z)$$

(où d_1 est induit par $\Delta_1 \to \Delta_2$, $0 \mapsto 0$, $1 \mapsto 2$)

Notons $Ho(\mathcal{C})$ le graphe dont les objets sont ceux de X et $Hom_{Ho\mathcal{C}}(x,y) = \pi_0(Map(x,y))$.

prop : Cette composition induit une structure de catégorie sur $Ho(\mathcal{C})$. De plus, les unités sont les 1_x définies précédemment.

Rq : Si C est une catégorie, $Ho(NC) \simeq C$.

D'ailleurs, $N : Cat \to sPr(c)$ admet un adjoint à gauche L et on peut montrer que si X est de Segal, $LX = Ho(X)$.

On obtient une nouvelle preuve du fait que N est pleinement fidèle.

déf : $f \in Map(x,y)$ est une équivalence d'homotopie si son image dans $Ho(\mathcal{C})$ est un isomorphisme.

prop : Si $f \in Map(x,y)$ et $f' \in Map(x',y')$ sont dans la même composante connexe de X_1, alors f est une équivalence d'homotopie ssi g l'est.

dem : On reformule la condition d'être une équivalence d'homotopie en une condition de relèvement et on utilise le fait que X est fibrant.

déf : L'espace des équivalences d'homotopie de X, noté $X_{hoequiv}$, est le sous-ensemble simplicial plein de X_1 dont les 0-simplexes sont les équivalences d'homotopie.

Rq : 1) Par la proposition précédente, $X_{hoequiv}$ est une réunion de composantes connexes de X_1. C'est donc un complexe de Kan.

2) Le morphisme simplicial $X_0 \to X_1$ induit $X \to X_{hoequiv}$

2) Espaces complets de Segal

déf : Un espace de Segal est dit complet si $X \to X_{hoequiv}$ est une équivalence faible simpliciale.

Soit $J = \Pi_1 \Delta_1$ le groupoïde simplement connexe $0 \rightleftarrows 1$.
On identifiera J avec le complexe de Kan associé par le nerf usuel.

Thm : Soit X un espace de Segal.
Alors le morphisme $Map(d(J), X) \to X_1$ (induit par $\Delta_1 \to J$) induit une équivalence faible

$$Map(d(J), X) \to X_{hoequiv}.$$

dem : technique !

prop Soit X un espace de Segal.

Alors X est complet ssi pour tous x, y objets de C,

$X_0 \to X_{hoequiv}$ est pleinement fidèle, i.e. $X_0(x,y) \xrightarrow{\sim} X_{hoequiv}(x,y)$ équivalence faible simpliciale

dem : En effet, on a un diagramme

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r] \arrow[dr] & X_{hoequiv} \arrow[d] \\ & X_0 \times X_0 \end{tikzcd}$$

d'où le résultat en considérant les applications induites sur les fibres homotopiques.

prop: Soit X un espace complet de Segal

On a $\pi_0(X_0) \simeq \pi_0(Ho(X))$

dem : On a $\pi_0(X_0) \xrightarrow{\sim} \pi_0(X_{hoequiv}) \simeq \pi_0(Ho(X))$

prop : Soit X un espace complet de Segal.

Alors $Ho X$ est un groupoïde ssi X est faiblement équivalent à un $c(K)$ où K est un complexe de Kan

dem : $Ho X$ est un groupoïde ssi $X_{hoequiv}(x,y) \to X(x,y) = Map(x,y)$ est l'identité ssi $X_0 \to X_{hoequiv}$ est une équivalence faible ssi $X_0 \to X_1$ est une équivalence faible (car X est complet), d'où le résultat.

On va maintenant étudier les équivalences faibles entre espaces complets de Segal

def : Soit $f : X \to Y$ entre espaces de Segal (non nécessairement complets)

On dit que f est une équivalence faible de Dwyer-Kan si

1) le foncteur induit $H_0 X \to H_0 Y$ est essentiellement surjectif

2) pour tous x, x', l'application induite

$$\mathrm{Map}_X(x, x') \to \mathrm{Map}_Y(f(x), f(x'))$$

est une équivalence faible simpliciale

Rq : Par 2), le foncteur $H_0 X \to H_0 Y$ est en fait une équivalence de catégorie.

prop : Soit $f : X \to Y$ entre espaces de Segal complets. Alors f est une équivalence faible (argument par argument) ssi f est une équivalence de Dwyer-Kan.

dem : Si f équivalence faible alors

$X_0 \to Y_0$ et $X_1 \to Y_1$ sont des équivalences faibles simpliciales,

d'où f est de Dwyer-Kan.

Réciproquement, supposons f de Dwyer-Kan.

Montrons que $f_0 : X_0 \to Y_0$ est une équivalence faible.

On sait déjà que $\underset{\substack{\| \\ H_0(X)}}{\pi_0(X_0)} \xrightarrow{\sim} \underset{\substack{\| \\ H_0(Y)}}{\pi_0(Y_0)}$ car X et Y sont complets.

Par ailleurs, si x, x' sont des objets de X, l'hypothèse $\mathrm{Map}_X(x, x') \to \mathrm{Map}_Y(fx, fx')$ entraîne $X_{hoequiv}(x, x') \xrightarrow{\sim} Y_{hoequiv}(fx, fx')$

Mais puisque X et Y sont complets, cette application s'identifie à $X_0(x, x') \xrightarrow{\sim} Y_0(fx, fx')$.

D'où f_0 est une équivalence faible.

Par ailleurs, le carré

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r] \arrow[d] & X_0 \times X_0 \arrow[d] \\
Y_1 \arrow[r] & X_0 \times X_0
\end{tikzcd}$$

est homotopiquement cartésien car $\mathrm{Map}(x,x') \simeq \mathrm{Map}(fx, fx')$

D'où f_1 est une équivalence faible.

Il vient puisque X et Y sont des espaces de Segal

que f_k est une équivalence faible pour tout k.

Nous allons maintenant munir $sPre(\Theta_1)$ de deux nouvelles structures de modèles : $sPre(\Theta_1)_S$ et $sPre(\Theta_1)_{SC}$.

Les équivalences faibles seront argument par argument dans les deux cas. Les objets fibrants et les cofibrations de $sPre(\Theta_1)_S$ (resp. de $sPre_{cs}$) seront les espaces de Segal (resp. les espaces complets de Segal). Par la proposition précédente, on aura donc $Ho(sPre(\Theta_1)_{cs}) \simeq \{\text{espaces complets de Segal}\}[[\text{équivalences de Dwyer-Kan}]^{-1}]$

L'outil pour construire ces structures est la localisation de Bousfield

<u>Oubli</u> :

prop : Soit C une catégorie. Alors NC est un espace complet de Segal.

dém : Provient du fait que $kC \to \underline{\mathrm{Hom}}(\Delta_1, kC)$ est une équivalence de catégories.

prop : Soit $u : C \to D$ un foncteur entre catégories. Alors u est une équivalence de catégories ssi Nu est une équivalence faible argument par argument.

dém : Cela résulte immédiatement du fait que les fibrations argument par argument entre espaces complets de Segal sont les equivalences de Dwyer-Kan.

III) Préliminaires modèles catégoriques 2 : localisation de Bousfield

Soit $\mathcal{M}$ une catégorie de modèles et S une classe de flèches de $\mathcal{M}$.

déf : Une localisation à gauche de $\mathcal{M}$ par rapport à S est une catégorie de modèles N munie d'un foncteur $j : \mathcal{M} \to L_S\mathcal{M}$ de Quillen à gauche tq $Lj : Ho(\mathcal{M}) \to Ho(L_S\mathcal{M})$ envoie S sur des isomorphismes et qui est universelle pour cette propriété, i.e pour toute catégorie de modèles P munie de $k : \mathcal{M} \to N$ de Quillen à gauche tq Lk envoie S sur des isos, il existe un unique foncteur $N \to L_S\mathcal{M}$ de Quillen à gauche tq

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[r] \arrow[dr] & L_S\mathcal{M} \arrow[d] \\ & N \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Rq : L'argument usuel montre qu'un tel $L_S\mathcal{M}$ est unique à isomorphisme près.
On va donner une construction d'un tel $L_S\mathcal{M}$ sous des hypothèses sur $\mathcal{M}$ et S.
Pour simplifier, on va supposer $\mathcal{M}$ simpliciale. Notons Q un foncteur de remplacement cofibrant.

déf : 1) Un objet Z de $\mathcal{M}$ est dit S-local s'il est fibrant et si pour tout $A \to B \in S$, l'application $Map(QB, Z) \to Map(QA, Z)$ est une équivalence faible (simpliciale)

2) Un morphisme $A \to B$ de $\mathcal{M}$ est une équivalence faible S-locale si pour tout Z S-local, l'application $Map(QB, Z) \to Map(QA, Z)$ est une équivalence faible.

Rappel : Si $\mathcal{M}$ est simpliciale, $A \to B$ est une équivalence faible ssi pour Z fibrant, $Map(QB, Z) \to Map(QA, Z)$ est une équivalence faible
ssi les applications $Map(QB, RB) \to Map(QA, RB)$ et $Map(QB, RA) \to Map(RA, RA)$, où R est un foncteur remplacement fibrant, sont des équivalences faibles.

On en déduit :

<u>prop</u> : 1) Une équivalence faible est une équivalence faible S-locale.

2) Une équivalence faible S-locale entre objets S-locaux est une équivalence faible

<u>déf</u> : On appelle localisation de Bousfield $L_S\mathcal{M}$ de $\mathcal{M}$ par rapport à S la structure de catégorie des modèles sur $\mathcal{M}$ (si elle existe) dont les équivalences faibles sont les équivalences faibles S-locales et les cofibrations sont les cofibrations de $\mathcal{M}$.

<u>Th</u> : Si la localisation de Bousfield $L_S\mathcal{M}$ existe, alors $L_S\mathcal{M}$ est la localisation de $\mathcal{M}$ par rapport à S.

<u>prop</u> : Supposons que la localisation de Bousfield $L_S\mathcal{M}$ existe. Alors,

1) les fibrations entre objets S-locaux au sens de $\mathcal{M}$ et $L_S\mathcal{M}$ coïncident ;

2) si $\mathcal{M}$ est propre à gauche, les objets fibrants de $L_S\mathcal{M}$ sont les objets S-locaux.

<u>Thm</u> : Si $\mathcal{M}$ est combinatoire et propre à gauche, alors la localisation de Bousfield $L_S\mathcal{M}$ existe.

De plus, 1) $L_S\mathcal{M}$ est combinatoire et propre à gauche

2) si $\mathcal{M}$ est simpliciale, alors $\mathcal{M}$ l'est également.

Récapitulons : les objets fibrants de $L_S\mathcal{M}$ sont les objets S-locaux et les notions de fibrations et équivalences faibles entre tels objets coïncident au sens de $\mathcal{M}$ et $L_S\mathcal{M}$ coïncident.

<u>Cas particulier</u> :

Soient A une petite catégorie et $\mathcal{M} = sPre(A)_{inj}$.

La structure $sPre(A)_{inj}$ est combinatoire, propre, cartésienne fermée et simpliciale. En particulier, on peut la localiser par un ensemble.

prop : Soit S un ensemble de flèches de $sPr(A)$.
(Rezk) Alors $L_S\, sPr(A)_{inj}$ est cartésienne fermée ssi pour tout objet a de A et tout objet X de $sPr(A)$ S-local, l'objet $\underline{Hom}(d(a),X)$ est S-local.

IV) La catégorie de modèles des espaces complets de Segal

Rappels : On note $I_k = \Delta_1 \coprod_{\Delta_0} \cdots \coprod_{\Delta_0} \Delta_1$ où la somme est prise dans $\widehat{\Theta_1}$. On a un morphisme $I_k \hookrightarrow \Delta_k$.

Un espace simplicial X est un espace de Segal ssi X est fibrant pour la structure injective et pour tout $k \geq 0$
$X_k = Map(d(\Delta_k), X) \to Map(d(I_k), X) = X_1 \times_{X_0} \cdots \times_{X_0} X_1$ est une équivalence faible.

déf : Soit $\mathcal{J} = \{ d(I_k \hookrightarrow \Delta_k) ; k \geq 0 \}$

La catégorie de modèles des espaces de Segal est $sPr(\Theta_1)_{ES} = L_{\mathcal{J}}\, sPr(\Theta_1)_{inj}$

Par le rappel ci-dessus, les objets fibrants de $sPr(\Theta_1)_{ES}$ sont les espaces de Segal.

Rappels : On note J le nerf de $\Pi_1 \Delta_1 = 0 \rightleftarrows 1$.

Un espace de Segal X est complet ssi
$X_0 = Map(d(\Delta_0), X) \to X_{hoequiv} = Map(d(J), X)$

déf : Soit $\mathcal{Y} = \{ d(J \to \Delta_0) \}$. La catégorie des espaces complets de Segal est $sPr(\Theta_1)_{ECS} = L_{\mathcal{J} \cup \mathcal{Y}}\, sPr_{inj}(\Theta_1)$.

Par le rappel, les objets fibrants de $sPr(\Theta_1)_{ECS}$ les espaces complets de Segal.

La théorie de la localisation de Bousfield entraîne :

prop : Les catégories de modèles $sPr(\Theta_1)_{ES}$ et $sPr(\Theta_1)_{ECS}$ sont combinatoires, simpliciales et propres à gauche.

De plus, les equivalences faibles de $sPr(\Theta_1)_{ECS}$ entre espaces complet de Segal sont les équivalences de Segal.

En particulier, $Ho(sPre(\Theta_1)_{ECS}) \simeq ECS[DK^{-1}]$

où ECS est la sous-catégorie pleine de $sPre(\Theta_1)$ formée des espaces complets de Segal et DK est la classe des équivalences de Dwyer-Kan.

<u>Thm</u> (Joyal - Tierney) Le foncteur $sPre(\Theta_1) \longrightarrow \widehat{\Theta_1} = \widehat{\Delta}$, $X \longmapsto \Delta_n \mapsto X_{n,0}$ est une équivalence de Quillen à droite.

En particulier, si X est un espace de Segal complet $X_{\bullet,0}$ est une quasi-catégorie et $ECS[DK^{-1}] \simeq QCat[(\text{équiv de quasi-catégories})^{-1}]$

<u>Thm</u> : Les catégories $sPre(\Theta_1)_{ES}$ et $sPre(\Theta_1)_{ECS}$ sont cartésiennes fermées

<u>dém</u> : Ce n'est pas formel. Il s'agit de montrer que si X est un espace de Segal (resp. complet), alors $\underline{Hom}(d(\Delta_k), X)$ un espace de Segal (resp. complet). On se ramène formellement au cas $k=1$. En utilisant le fait que les structures considérées sont simpliciales, on est réduit à montrer que

$$d(\Delta_1 \times I_k \longrightarrow \Delta_1 \times \Delta_k)$$

$$(\text{resp. } d(\Delta_1 \times J \longrightarrow \Delta_1 \times \Delta_0))$$

est une équivalence faible de $sPre(\Theta_1)_{ES}$ (resp. $sPre(\Theta_1)_{ECS}$)

On prouve le premier cas en utilisant la combinatoire de la décomposition simpliciale de $\Delta_1 \times \Delta_k$.

Dans le deuxième cas, on prouve directement que $X^{d(\Delta_1)}$ est complet.

<u>Rq</u> : $\Delta_1 \times I_k \to \Delta_1 \times \Delta_k$ et $\Delta_1 \times J \to \Delta_1 \times \Delta_0$ sont des équivalences faibles quasi-catégoriques

Il résulte du théorème de Joyal et Tierney que si $A \to B$ est une équivalence faible quasi-catégorique alors $d(A \to B)$ est une équivalence faible de $sPre(\Theta_1)_{ECS}$. En effet, d est l'adjoint à gauche de $X \mapsto X_{\bullet,0}$ et tous les objets sont cofibrants dans $\widehat{\Delta}_{Joyal}$.

V) La catégorie Θ de Joyal

<u>déf</u> : - La catégorie globulaire est la catégorie engendrée par le graphe

$$D_0 \underset{\tau_1}{\overset{\sigma_1}{\rightrightarrows}} D_1 \rightrightarrows \cdots \underset{\tau_n}{\overset{\sigma_n}{\rightrightarrows}} D_n \rightrightarrows D_{n+1} \cdots$$

soumis aux relations $\sigma_{n+1}\sigma_n = \tau_{n+1}\sigma_n$ et $\sigma_{n+1}\tau_n = \tau_{n+1}\tau_n$, $n \geq 1$.

- Un ensemble globulaire ou ω-graphe est un préfaisceau sur $\mathbb{G}$.

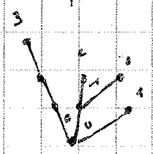
- Un tableau des dimensions est un tableau

$$\begin{pmatrix} i_1 & & i_2 & & i_3 & \cdots & & i_n \\ & j_1 & & j_2 & & \cdots & j_{n-1} & \end{pmatrix}$$

d'entiers positifs tels que $i_l > j_l$ et $i_{l+1} > j_l$, $1 \leq l \leq n$.

- La dimension d'un tableau est le plus grand entier qu'il contient.

<u>Rq</u> : Un tel tableau peut se représenter par un arbre planaire.

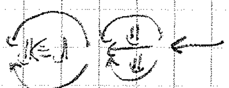
Par exemple, $\begin{pmatrix} 3 & & 2 & & 2 & & 1 \\ & 0 & & 1 & & 0 & \end{pmatrix}$ correspond à 

À un tel tableau T, on associe le ω-graphe

$$G_T = \varinjlim \left(\begin{tikzcd}[column sep=small] D_3 & & D_2 & & D_2 & & D_1 \\ & D_0 \arrow[ul, "\sigma"] \arrow[ur, "\tau"'] & & D_1 \arrow[ul, "\sigma"] \arrow[ur, "\tau"'] & & D_0 \arrow[ul, "\sigma"] \arrow[ur, "\tau"'] & \end{tikzcd} \right)$$

où σ et τ désignent des composés itérés de σ_i et τ_i.

<u>ex</u> : Pour le tableau ci-dessus on obtient :



<u>déf</u> : Un schéma de composition globulaire est un ω-graphe qui provient d'un tableau.

Notons $\omega\text{-}Cat_{str}$ la catégorie des ω-catégories strictes. Le foncteur d'oubli $U : \omega\text{-}Cat_{str} \to \widehat{\mathbb{G}}$ admet un adjoint à gauche $L : \widehat{\mathbb{G}} \to \omega\text{-}Cat_{str}$ ω-catégorie libre

<u>déf</u> : - La catégorie Θ de Joyal est définie de la manière suivante : les objets de Θ sont les tableaux de dimensions ; si S, T sont deux tableaux, alors

$$\mathrm{Hom}_\Theta(S, T) = \mathrm{Hom}_{\omega\text{-}Cat}(LG_S, LG_T)$$

- La catégorie Θ_n est la sous-catégorie pleine de Θ dont les objets sont les tableaux de dimension inférieure ou égale à n.

Rq : Pour $n=1$, les schémas sont les

$$\bullet \quad \text{et} \quad \underbrace{\to \to \cdots \to}_{k \geq 1}.$$

La catégorie Θ_1 est donc Δ_1.

On va maintenant donner une description combinatoire de Θ_n due à Berger en termes de produit en couronne.

déf : Soit C une catégorie. On définit une catégorie $\Delta \int C$ de la manière suivante. Les objets de $\Delta \int C$ sont des couples $(\Delta_m ; c_1, \dots, c_m)$ où $m \geq 0$ et $c_1, \dots, c_m$ sont des objets de C. Un morphisme de $(\Delta_m ; c_1, \dots, c_m)$ vers $(\Delta_n ; d_1, \dots, d_n)$ est donné par $\varphi : \Delta_m \to \Delta_n$ dans $\widehat{\Delta}$ et pour tous i et j tels que $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ et $\varphi(i-1) < j \leq \varphi(i)$, un morphisme $f_{ji} : c_i \to d_j$ dans C.

Un morphisme peut être représenté de la manière suivante

$$0 \xrightarrow{c_1} 1 \xrightarrow{c_2} 2 \ \cdots \ m-1 \xrightarrow{c_m} m$$

$$0 \xrightarrow{d_1} 1 \dashrightarrow \varphi(0)-1 \xrightarrow{d_{\varphi(0)}} \varphi(0) \xrightarrow{d_{\varphi(0)+1}} \cdots \xrightarrow{d_{\varphi(1)}} \varphi(1) \dashrightarrow \cdots \dashrightarrow \varphi(m-1) \to \cdots \xrightarrow{d_{\varphi(m)}} \varphi(m) \to n.$$

Cette représentation rend évidente la composition des morphismes.

Explicitement, $(\Delta_m ; c_1, \dots, c_m) \xrightarrow{(\varphi, f_{ji})} (\Delta_n ; d_1, \dots, d_n) \xrightarrow{(\psi, g_{kj})} (\Delta_p ; e_1, \dots, e_p)$ est donné par $(\psi\varphi, h_{ki})$ où $h_{ki} = g_{kj} f_{ji}$ pour l'unique j pour lequel g_{kj} et f_{ji} sont définis.

déf : Soit $T_0 = *$ la catégorie ponctuelle.

On définit par récurrence des catégories sur $n \geq 0$

$$T_{n+1} = \Delta \int T_n .$$

Rq : Il est immédiat que $T_1 = \Delta \int * = \Delta$.

Un objet de T_2 est un couple $(\Delta_m; \Delta_{i_1}, \dots, \Delta_{i_m})$.

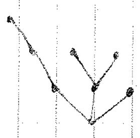
On peut le représenter par un arbre. Par exemple,

$(\Delta_3; \Delta_2, \Delta_0, \Delta_1)$ correspond à .

De même l'objet de T_3

$$(\Delta_3; (\Delta_0), (\Delta_2; \Delta_0, \Delta_0), (\Delta_1; \Delta_1))$$

correspond à



On vérifie facilement que les objets de T_n sont en bijection via les arbres avec les objets de Θ_n.

Soit V une catégorie cartésienne fermée, admettant un objet initial $\emptyset$. On notera V-Cat la catégorie des catégories enrichies dans V. On a un foncteur

$$\tau : \Delta \int V \longrightarrow V\text{-Cat}$$

qui envoie $(\Delta_m; v_1, \dots, v_m)$ sur la V-catégorie C définie par

$$\mathrm{Ob}\, C = \{0, \dots, m\} \quad \text{et} \quad \mathrm{Hom}_C(i,j) = \begin{cases} v_j \times \dots \times v_{i+1} & \text{si } i \leq j \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

avec des identités et une composition évidente.

(En fait, cette catégorie est la V-catégorie libre engendrée par le V-graphe $0 \xrightarrow{v_1} 1 \xrightarrow{v_2} 2 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{v_m} m$.)

L'action de τ sur les morphismes est évidente.

<u>prop</u> : Soit W une sous-catégorie pleine de V ne contenant pas d'objet initial de V. Alors $\Delta \int W \to \Delta \int V \longrightarrow V\text{-Cat}$ est pleinement fidèle.

On a un foncteur $i_1 : T_1 = \Delta = \Delta \int * \longrightarrow \Delta \int \mathrm{Ens} \to \mathrm{Ens}\text{-Cat} = \mathrm{Cat}$.

Par la proposition précédente ce foncteur est pleinement fidèle.

(Ce foncteur est évidemment le foncteur évident). On obtient

un foncteur $i_2 : T_2 = \Delta \int T_1 \xrightarrow{\Delta \int i_1} \Delta \int \mathrm{Cat} \longrightarrow \mathrm{Cat}\text{-}\mathrm{Cat} = 2\text{-}\mathrm{Cat}_{str}$

Par la proposition précédente, ce foncteur est pleinement fidèle.

On obtient alors par récurrence un foncteur pleinement fidèle

$i_n : T_n \to n\text{-}\mathrm{Cat}_{\mathrm{str}}$. On en déduit :

__Thm__ (Berger) Le foncteur i_n induit un isomorphisme de catégories $T_n \to \Theta_n$.

__dem__ : En effet, on a vu que les objets de T_n correspondent aux arbres (de Θ_n) et le foncteur i_n correspond au foncteur n-catégorie libre

__VI) Espaces complets de Segal supérieurs__

Fixons $n \geq 1$. On se place dans la catégorie $s\mathrm{Pre}(\Theta_n)$.

Soit T un objet Θ_n. Un tel objet est un tableau de dimensions $\begin{pmatrix} i_1 & & \cdots & & i_n \\ & j_1 & \cdots & j_{n-1} & \end{pmatrix}$.

Dans Θ_n, on a $T = D_{i_1} \amalg_{D_{j_1}} \cdots \amalg_{D_{j_{n-1}}} D_{i_n}$.

On notera I_T la somme $D_{i_1} \amalg_{D_{j_1}} \cdots \amalg_{D_{j_{n-1}}} D_{i_n}$ dans $\widehat{\Theta_n}$.

On a un monomorphisme canonique $I_T \hookrightarrow T$ dans $\widehat{\Theta_n}$.

__Rq__ : L'objet I_T est le n-graphe associé au tableau (muni de structure additionnelle) alors que T « est » la n-catégorie associée au tableau

__ex__ : $n = 1$, $\quad I_{\Delta_k} = D_1 \amalg_{D_0} \cdots \amalg_{D_0} D_1 = \Delta_1 \amalg_{\Delta_0} \cdots \amalg_{\Delta_0} \Delta_1 = I_k$

et l'application $I_{\Delta_k} \hookrightarrow \Delta_k$ n'est rien d'autre que l'application $I_k \hookrightarrow \Delta_k$ déjà considérée.

__def__ : Un Θ_n-espace de Segal est un objet X de $s\mathrm{Pre}(\Theta_n)$ tq

1) X est fibrant pour la structure injective ;

2) pour tout objet T de Θ_n,

$$\underset{\substack{\text{\rotatebox{90}{$\cong$}} \\ X(T)}}{\mathrm{Map}(d(T), X)} \to \underset{\substack{\text{\rotatebox{90}{$\cong$}} \\ X_{i_1} \times_{X_{j_1}} \cdots \times_{X_{j_{n-1}}} X_{i_n}}}{\mathrm{Map}(d(I_T), X)}$$

est une équivalence faible, si $T = \begin{pmatrix} i_1 & & \cdots & & i_n \\ & j_1 & \cdots & j_{n-1} & \end{pmatrix}$.

déf : Soit $\mathcal{J}_n = \{ d(I_T \hookrightarrow T) \,;\, T \in \mathrm{Ob}\,\Theta_n \}$.

La catégorie des Θ_n-espaces de Segal est la localisation de Bousfield $sPr(\Theta_n)_{ES} = L_{\mathcal{J}_n} sPr(\Theta_n)_{inj}$

Puisque $sPr(\Theta_n)_{inj}$ est propre, les objets fibrants de $sPr(\Theta_n)_{ES}$ sont les Θ_n-espaces de Segal. De plus, la structure $sPr(\Theta_n)_{ES}$ est combinatoire, propre et simpliciale. Un des résultats difficiles de Rezk est que cette structure est cartésienne fermée.

Rq : Pour $n=0$, on obtient $\hat{\Delta}$ Quillen,
et pour $n=1$, on retrouve $sPr(\Theta_1)_{ES}$.

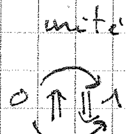
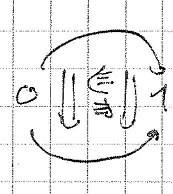
Passons maintenant aux Θ_n-espaces complets.

Rappelons qu'on note J le groupoïde $\Pi_1 |\Delta_1| = \{0 \rightleftarrows 1\}$.

On va définir des i-catégories J_i par récurrence sur $i \geq 1$.

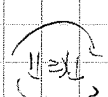
$J_1 = J$, J_{i+1} a pour objets 0 et 1 et les i-catégories des morphismes entre objets sont
$\mathrm{Hom}(0,0) = *$, $\mathrm{Hom}(0,1) = J_i$, $\mathrm{Hom}(1,1) = *$

Explicitement, on a (sans les unités)

$J_1 = 0 \rightleftarrows 1$, $J_2 =$ , $J_3 =$ , etc.

On note D_i la i-catégorie engendrée par le préfaisceau représentable D_i de Θ.

Explicitement, on a (sans les unités)

$D_0 = \cdot$, $D_1 = \cdot \longrightarrow \cdot$, $D_2 =$ , $D_3 =$ .

Pour $i \geq 1$, on a un foncteur canonique

$$j_i : J_i \longrightarrow D_{i-1}.$$

Pour $i \leq n$, on peut considérer j_i comme un foncteur de n-catégories, i.e. un morphisme de n-Cat_{str}.

Attention : on a noté ci-dessus $X_k = X(C_k)$. Cette notation n'est pas compatible avec le cas $n=1$.

Oubli sur Θ_n :

Le foncteur $i : \Theta_n \hookrightarrow n\text{-}Cat_{str}$ induit un foncteur nerf

$$n\text{-}Cat_{str} \longrightarrow \widehat{\Theta}_n$$
$$C \longmapsto T \mapsto \mathrm{Hom}_{n\text{-}Cat_{str}}(i(T), C)$$

Thm (Berger)

Ce foncteur nerf est pleinement fidèle. De plus, l'image essentielle est constituée des X tq $X(T) \to X_{i_1} \times_{X_{j_1}} \cdots \times_{X_{j_{n-1}}} X_{i_n}$ pour tout $T = \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & & i_n \\ & j_1 & \cdots & j_{n-1} & \end{pmatrix}$ dans Θ_n.

Retour à la complétude

On peut par l'oubli ci-dessus, considérer les J_i, $i \leq n$, comme des morphismes de $\widehat{\Theta}_n$.

def : Un Θ_n-espace de Segal est complet si pour tout k avec $1 \leq k \leq n$, $\underset{X_{k-1}}{\underset{\|}{\mathrm{Map}(d(D_{k-1}), X)}} \to \underset{X_{k\text{-equiv}}}{\underset{\|}{\mathrm{Map}(d(J_k), X)}}$

def : Soit $\mathcal{J}_n = \{ d(J_i \longrightarrow D_{i-1}),\ 1 \leq i \leq n \}$.

La catégorie de modèles des Θ_n-espaces complets de Segal est $sPre(\Theta_n)_{ECS} = L_{\mathcal{T}_n \cup \mathcal{J}_n}\, sPre(\Theta_n)_{inj}$.

Les objets fibrants de $sPre(\Theta_n)_{ES}$ sont les Θ_n-espaces complets de Segal. Cette structure est combinatoire, propre et simpliciale. Un des résultats difficiles de Rezk est que cette structure est également cartésienne fermée.

def : Une (∞, n)-catégorie est un Θ_n-espace de Segal complet.

Définition explicite de la complétude

Considérons le foncteur d'inclusion $\Theta_1 \hookrightarrow \Theta_n$.

Il induit un foncteur $U : sPre(\Theta_n) \longrightarrow sPre(\Theta_1)$

prop : Si X est un Θ_n-espace de Segal, alors UX est un espace de Segal. Si de plus X est complet, alors UX est complet.

dém : C'est immédiat en termes d'objets locaux.

déf : Soit X un Θ_n-espace de Segal. La catégorie homotopique $Ho(X)$ de X est $Ho(UX)$.

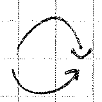
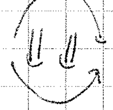
On va définir pour $k \geq 0$ une $(k-1)$-catégorie ∂D_k munie d'un foncteur $i_k : \partial D_k \hookrightarrow D_k$.

déf : Pour $k = 0$, $\partial D_k = \emptyset$ et $i_k : \emptyset \hookrightarrow D_0$

Pour $k \geq 1$, $\partial D_k = D_{k-1} \coprod_{\partial D_{k-1}} D_{k-1}$ et $i_k = (\tau_k, \sigma_k)$

où $\tau_k, \sigma_k : D_{k-1} \longrightarrow D_k$ proviennent de $\hat{\Theta}$.

Rq : Explicitement, on a (sans les unités)

$\partial D_0 =$, $\partial D_1 = \bullet \quad \bullet$, $\partial D_2 =$  , $\partial D_3 =$ 

Dans la suite, pour $k \leq n+1$, on considèrera ∂D_k comme un objet de $\hat{\Theta}_n$.

Not : Si T est un objet de Θ_n et X dans $sPre(\Theta_n)$, on a

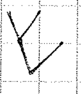
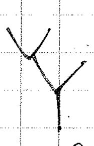
$$X_T = Map(d(T), X).$$

Plus généralement, si T est un préfaisceau sur Θ_n, on notera $X_T := Map(d(T), X)$.

En particulier, on peut parler de $X_{\partial D_k}$.

déf : Soit T un tableau de Θ. On définit un nouveau tableau sT en ajoutant 1 à chaque entier du tableau, appelé suspension de T.

ex : $T = \begin{pmatrix} 2 & & 2 & & 1 \\ & 1 & & 0 & \end{pmatrix}$ et $sT = \begin{pmatrix} 3 & & 3 & & 2 \\ & 2 & & 1 & \end{pmatrix}$

En termes d'arbres $T \longleftrightarrow$  et $sT \longleftrightarrow$ 

Rq : La suspension définit un foncteur $\Theta_k \longrightarrow \Theta_{k+1}$

Not : On notera s^k la suspension itérée k-fois.

déf : Fixons X dans $sPr(\Theta_n)$ et k tq $0 \le k \le n$.

L'espace de k-flèches de X est $X_k := X_{D_k}$.

Une k-flèche de X est un 0-simplexe de X_k.

Deux k-flèches f, g de X sont parallèles si, ou bien $k=0$, ou bien f et g ont même source et même but, i.e.

$$X(\sigma_k)(f) = X(\sigma_k)(g) \quad \text{et} \quad X(\tau_k)(f) = X(\tau_k)(g).$$

où $\sigma_k, \tau_k : D_{k-1} \to D_k$.

prop : L'application canonique $X_{\partial D_{k+1}} \longrightarrow X_k \times X_k$ induit une bijection entre les 0-simplexes de $X_{\partial D_{k+1}}$ et les couples de k-flèches parallèles.

dém : Formel.

Rq : On peut donc considérer $X_{\partial D_{k+1}}$ comme l'espace des k-flèches parallèles.

déf : Soit X un Θ_n-espace de Segal.

Soit f et g deux $(k-1)$-flèches parallèles de X, $1 \le k \le n$.

On définit un objet $Map_X(f,g)$ de $sPr(\Theta_{n-k})$ de la manière suivante : si T est un tableau de Θ_{n-k}, alors $Map_X(f,g)_T$ est défini par le carré cartésien suivant :

$$\begin{tikzcd} Map_X(f,g)_T \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & X_{s^k T} \arrow[d] \\ \Delta_0 \arrow[r] & X_{\partial \Delta_k} \end{tikzcd}$$

prop : si X est un Θ_n-espace de Segal, alors $Map_X(f,g)$ est un Θ_{n-k}-espace de Segal. De plus, si X est complet, alors $Map_X(f,g)$ l'est également.

dém : Résulte du fait que les ensembles $\mathcal{I}_n$ et $\mathcal{J}_n$ sont « stables par suspension ».

déf : Soit X un Θ_n-espace de Segal. Soit u une k-flèche de X, $1 \le k \le n$. Notons f et g les $(k-1)$-flèches source et but de u et x, y les $(k-2)$-flèches source et but de f et g.

La k-flèche u définit une flèche dans $Ho(Map_X(x,y))$.

On dit que u est une h-équivalence si cette flèche est un isomorphisme.

On note $X_{h\text{-equiv}}$ le sous-ensemble simplicial plein de X_h dont les 0-simplexes sont h-équivalences.

Rq : Formellement, les définitions ci-dessus ne font pas sens pour $h=1$. Pour qu'elles fassent sens, il faudrait ajouter une unique -1-flèche.
On peut plus simplement utiliser directement la catégorie $\mathrm{Ho}\, X$.

prop : L'application $\mathrm{Map}(d(J_h), X) \to \mathrm{Map}(d(D_h), X) = X_h$ induite par $J_h \to D_h$ se factorise par $X_{h\text{-equiv}}$ et induit une équivalence faible $\mathrm{Map}(d(J_h), X) \to X_{h\text{-equiv}}$.

dem : On se ramène au cas (difficile) des espaces de Segal ($n=1$).

cor : Un Θ_n-espace de Segal est complet ssi pour tout h tq $1 \leq h \leq n$, $X_{h-1} \to X_{h,\text{equiv}}$ est une équivalence faible.

VII) $\Delta S M$ - espaces complets de Segal

Pour démontrer que la catégorie des Θ_n-espaces de Segal (complets ou non) est cartésienne fermée, Rezk procède par récurrence à partir du résultat suivant :

def : Une présentation est la donnée d'une petite catégorie A et d'un ensemble S de flèches de $s\mathrm{Pre}(A)$.
Une présentation (A, S) est dite cartésienne si la catégorie de modèles $L_S s\mathrm{Pre}(A)$ est cartésienne fermée.

Thm : Soit (A, S) une présentation cartésienne. Notons $M = L_S s\mathrm{Pre}(A)$.
Il existe une présentation cartésienne $(\Delta S A, S')$ « naturelle ».
En particulier, $s\mathrm{Pre}(\Delta S A)$ est munie d'une structure de catégorie de modèles cartésienne fermée naturelle.

En appliquant par récurrence cette construction à partir de $(*, \emptyset)$ on obtient une structure cartésienne fermée sur $sPre(\Theta_n)$. C'est exactement la structure définie sur $sPre(\Theta_n)$ dans la section précédente. Le reste de ces notes est dédié à cette construction.

Fixons une présentation (A, S).

<u>déf</u> : Soit $(\Delta_m ; a_1, \dots, a_m)$ un objet de $\Delta \int A$.

On définit un objet $I_{(\Delta_m, a_1, \dots, a_m)}$ de $\widehat{\Delta \int A}$ de la manière suivante :

$$I_{(\Delta_m ; a_1, \dots, a_m)} = (\Delta_1 ; c_1) \coprod_{(\Delta_0)} \dots \coprod_{(\Delta_0)} (\Delta_1 ; c_m)$$

On a un morphisme canonique

$$\varphi_{(\Delta_m ; a_1, \dots, a_m)} : I_{(\Delta_m, a_1, \dots, a_m)} \longrightarrow (\Delta_m ; c_1, \dots, c_m)$$

On note $\mathcal{J}_{\Delta \int A} = \{ d(\varphi_{(\Delta_m ; a_1, \dots, a_m)}) ; (\Delta_m ; a_1, \dots, a_m) \in Ob\, \Delta \int A \}$

On va maintenant associer des flèches de $sPre(\Delta \int C)$ à S. Pour cela, on aura besoin du foncteur d'entrelacement $V : \Delta \int sPre(A) \to sPre(\Delta \int A)$

<u>déf</u> : Le foncteur $V : \Delta \int sPre(A) \to sPre(\Delta \int A)$ est l'extension de Kan à gauche

$$\begin{tikzcd}
\Delta \int sPre(A) \arrow[dr, dashed, "V"] & \\
\Delta \int A \arrow[u, "\Delta \int d"] \arrow[r, "d"'] & sPre(\Delta \int A)
\end{tikzcd}$$

Explicitement, $(\Delta_m ; X_1, \dots, X_m)$ est envoyé sur

$$(\Delta_n ; a_1, \dots, a_n) \longmapsto \coprod_{\varphi : \Delta_n \to \Delta_m} \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=\varphi(i-1)+1}^{\varphi(i)} X_j(a_i)$$

<u>Rq</u> : Si X_j est un représentable b_j, alors $X_j(a_i) = Hom_{sPre(A)}(a_i, b_j)$ et on retrouve la formule donnant $Hom((\Delta_n ; a_1, \dots, a_n), (\Delta_m ; b_1, \dots, b_m))$.

En particulier, le triangle de l'extension de Kan est commutatif.

<u>déf</u> : On note $\mathcal{S}_{\Delta \int (A,S)} = \{ V((\Delta_1 ; X) \to (\Delta_1 ; Y)) ; \varphi : X \to Y \in S \}$

La présentation des $\Delta \int (A,S)$-espaces de Segal est $(sPre(\Delta \int A), \mathcal{J}_{\Delta \int A} \cup \mathcal{S}_{\Delta \int (A,S)})$.

<u>Thm</u> (Rezk) Si la présentation (A, S) est cartésienne, alors la présentation des $\Delta\int(A,S)$-espaces de Segal est cartésienne.

Il nous reste à parler de complétude.

<u>déf</u> : Considérons le foncteur
$$\Delta\int A \to \Delta$$
$$(\Delta_m; a_1, \dots, a_m) \mapsto \Delta_m$$

Il induit par restriction un foncteur $T_\# : sPre(\Delta) \to sPre(\Delta\int A)$

On pose $\mathcal{J}_{\Delta\int A} = \{ T_\#(d(J \to \Delta_0)) \}$, où $J \to \Delta_0$ est le morphisme d'ensemble simpliciaux considéré dans la section $\underline{IV}$.

<u>déf</u> : La présentation des $\Delta\int(A,S)$-espaces complets de Segal est $(\Delta\int A, \mathcal{T}_{\Delta\int A} \cup \mathcal{J}_{\Delta\int A} \cup \mathcal{S}_{\Delta\int(A,S)})$.

<u>Thm</u> (Rezk) Si la présentation (A, S) est cartésienne, alors la présentation des $\Delta\int(A,S)$-espaces complets de Segal est cartésienne.

<u>déf</u> : On définit deux présentations sur $sPre(\Theta_n)$ par récurrence sur n :

1) $ES_{\Theta_0} = (*, \emptyset)$, $ES_{\Theta_{m+1}} = (\Theta_{m+1}, \mathcal{T}_{\Delta\int\Theta} \cup \mathcal{S}_{\Delta\int(\Theta_m, ES_{\Theta_m})})$

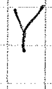
2) $ECS_{\Theta_0} = (*, \emptyset)$, $ECS_{\Theta_{m+1}} = (\Theta_{m+1}, \mathcal{T}_{\Delta\int\Theta_m} \cup \mathcal{J}_{\Delta\int\Theta_{m+1}} \cup \mathcal{S}_{\Delta\int(\Theta_m, ECS_{\Theta_m})})$

<u>Attention</u> : On n'a ni $\underbrace{(\Theta_m, \mathcal{T}_m)}_{\text{au sens de la section précédente}} = ES_{\Theta_m}$, ni $(\Theta_m, \mathcal{T}_m \cup \mathcal{J}_m) = ECS_{\Theta_m}$

Par exemple, si $T = \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 2 & & 2 \\ & 1 & & 0 & \end{smallmatrix}\right)$ (= ),

$I_T \hookrightarrow T$ n'appartient pas à ES_{Θ_2}.

Néanmoins, $I_U \hookrightarrow U$ appartient à $\mathcal{S}_{\Delta\int(\Theta_1, ES_{\Theta_1})}$

pour $U = \left(\begin{smallmatrix} 2 & & 2 \\ & 1 & \end{smallmatrix}\right)$ (= )

et $U \coprod_{D_0} D_2 \hookrightarrow T$ appartient à $\mathcal{T}_{\Delta\int\Theta_1}$

<u>prop</u> : Les catégories de modèles associées aux présentations ES_{Θ_n} et ECS_{Θ_n} coïncident avec les catégories de modèles des Θ_n-espaces de Segal et des Θ_n-espaces de Segal complets.

<u>cor</u> : Les catégories de modèles de Θ_n-espaces de Segal et des Θ_n-espaces de Segal complets sont cartésiennes fermées