Algèbre
 ENS Cachan

Année 2011/2012
 Dimitri Ara

TD 5
Extensions de corps

Exercice 1 (Caractéristique et sous-corps premier). Soient A un anneau et φ l'unique morphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}$ vers A. On appelle *caractéristique* de A le générateur positif du noyau de φ.

1. Soit A un anneau intègre. Montrer que la caractéristique de A est nulle ou est un nombre premier.
2. Soit k un corps. Montrer que si k est de caractéristique nulle (respectivement de caractéristique p premier), alors ϕ induit une injection de $\mathbb{Q}$ (respectivement de $\mathbb{F}_p$) dans k.

Exercice 2 ($\sqrt{2}+\sqrt{3}$).

1. Montrer que $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\}$ est une base de $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.
2. Quel est le polynôme minimal de $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ sur $\mathbb{Q}$?
3. En déduire que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.
4. Déterminer le groupe des automorphismes (de corps) de $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

Exercice 3 (Autour de la base téléscopique).

1. Montrer que toute extension de degré premier est monogène.
2. Soient K/k une extension et P un polynôme irréductible sur k. Montrer que si le degré de P est premier au degré de K/k, alors P est irréductible sur K.
3. Soient k un corps et x un élément algébrique sur k de degré impair. Montrer que $k(x^2) = k(x)$.

Exercice 4 (Degré d'extensions). Déterminer le degré des extensions de $\mathbb{Q}$ suivantes :

$$\mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2}), \quad \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[3]{2}), \quad \mathbb{Q}\Big(\sqrt{2+\sqrt{2}}\Big), \quad \mathbb{Q}\Big(j, \sqrt{2+\sqrt{2}}\Big), \quad \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, \sqrt[3]{3}).$$

Exercice 5 (Extensions cyclotomiques). Soient p un nombre premier et ζ_p une racine primitive p-ième de l'unité dans $\mathbb{C}$.

1. Déterminer le polynôme minimal de ζ_p.
2. Déterminer le groupe des automorphismes de $\mathbb{Q}(\zeta_p)$.

Exercice 6 (Racines p-ième). Soient k un corps, a un élément de k et p un nombre premier.

1. Montrer que le polynôme $X^p - a$ est irréductible sur k si et seulement s'il n'a pas de racine dans k.
2. Soit $k = \mathbb{Q}$. On suppose $X^p - a$ est irréductible. Quel est le degré d'un corps de décomposition de $X^p - a$?

Exercice 7 (**Extensions quadratiques**)**.** Soit k un corps. On appelle *extension quadratique* de k une extension de k de degré 2.

1. Supposons k de caractéristique différente de 2. Montrer que les extensions quadratiques de k sont les corps de rupture des polynômes irréductibles sur k de la forme $X^2 - a$. À quelle condition deux telles extensions sont-elles isomorphes ? En déduire une classification des extensions quadratiques de $\mathbb{Q}$.
2. Supposons k de caractéristique 2. Montrer que les extensions quadratiques de k sont les corps de rupture des polynômes irréductibles sur k de la forme $X^2 - a$ ou $X^2 - X - a$. À quelle condition deux telles extensions sont-elles isomorphes ?

Exercice 8 (**Degré du corps de décomposition**)**.** Soient k un corps et K un corps de décomposition d'un polynôme P sur k de degré $n > 0$.

1. Montrer que le degré de K sur k divise $n!$.
2. On suppose que le degré de K sur k est $n!$. Montrer que P est irréductible. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 9 (**Existence de la clôture algébrique**)**.** Soit k un corps. Notons F l'ensemble des polynômes non constants de $k[X]$ et considérons l'anneau de polynômes $A = k[\{X_f\}_{f\in F}]$ en un ensemble d'indéterminées indicé par F. Notons I l'idéal de A engendré par les $f(X_f)$ où f varie dans F.

1. Montrer que I est un idéal propre de A.
2. En déduire l'existence d'une extension algébrique de k dans laquelle tout polynôme de k admet une racine.
3. En itérant cette construction, construire une clôture algébrique de k.

Exercice 10 (**Constructions à la règle et au compas**)**.** On dit qu'un entier algébrique x est *constructible à la règle et au compas* s'il existe une tour d'extensions

$$k_0 = \mathbb{Q} \subset k_1 \subset \cdots \subset k_n,$$

telle que x appartienne à k_n.

1. Faire le lien entre cette définition et la géométrie.
2. En admettant que π est transcendant, montrer que $\sqrt{\pi}$ n'est pas constructible (*i.e* la quadrature du cercle est impossible).
3. Montrer que $\sqrt[3]{2}$ n'est pas constructible (*i.e.* la duplication du cube est impossible).
4. Montrer que $\cos(\pi/9)$ n'est pas constructible (*i.e.* la trisection de l'angle est impossible.)

Exercice 11 (**k-algèbres finies réduites**)**.** Soient k un corps et A une k-algèbre *finie* (*i.e.* de dimension finie sur k).

1. Montrer qu'un idéal de A est premier si et seulement s'il est maximal.
2. Montrer que A n'a qu'un nombre fini d'idéaux premiers.
3. Supposons de plus que A est *réduite*, c'est-à-dire sans éléments nilpotents non nuls. Montrer que A est isomorphe à un produit fini d'extensions finies de k. (On pourra utiliser l'exercice 7 du TD 3.)