Algèbre
ENS Cachan

Année 2011/2012
Dimitri Ara

TD 3
Idéaux, anneaux principaux, anneaux factoriels

Exercice 1 (Une définition idéale des idéaux premiers). Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier d'un anneau A. Montrer que si I et J sont deux idéaux de A tels que $IJ \subset \mathfrak{p}$, alors $I \subset \mathfrak{p}$ ou $J \subset \mathfrak{p}$.

Exercice 2 (Lemme chinois). Soit A un anneau. On dit que deux idéaux I et J de A sont *étrangers* si on a $I + J = A$.

1. Montrer que si I et J sont deux idéaux étrangers de A, alors $IJ = I \cap J$.
2. Montrer que si I et J sont deux idéaux étrangers de A, alors $A/(I \cap J)$ est canoniquement isomorphe à $A/I \times A/J$.

Exercice 3 (Indicatrice d'Euler).

1. Quel est le nombre d'éléments inversibles de $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ pour p premier et $n \geq 1$?
2. Déduire de la question précédente et du lemme chinois le nombre d'éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour $n \geq 2$.

Exercice 4 (Un anneau quadratique non factoriel). Soit A l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, *i.e.* le sous-anneau de $\mathbb{C}$ constitué des éléments de la forme $a + b\,i\sqrt{5}$ avec a et b dans $\mathbb{Z}$. On appelle *norme* d'un élément $a + b\,i\sqrt{5}$ de A l'entier $a^2 + 5b^2$.

1. Déterminer un critère sur la norme d'un élément de A pour qu'il soit inversible.
2. Montrer que tout élément de norme 9 est irréductible.
3. En considérant l'élément 9 de A, montrer que A n'est pas factoriel.

Exercice 5 (Théorème des deux carrés). On considère l'anneau $\mathbb{Z}[i]$, *i.e.* le sous-anneau de $\mathbb{C}$ constitué des éléments de la forme $a + b\,i$ avec a et b dans $\mathbb{Z}$. On appelle *norme* d'un élément $z = a + b\,i$ dans A l'entier $a^2 + b^2$. On notera $\mathrm{N}(z)$ cet entier.

1. Déterminer les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.
2. Montrer qu'un nombre premier p est somme de deux carrés si et seulement si p est réductible dans $\mathbb{Z}[i]$.
3. Montrer que pour z et z' dans $\mathbb{Z}[i]$ non nuls, il existe q et r dans $\mathbb{Z}[i]$ tels que $z = qz' + r$ avec $\mathrm{N}(r) < \mathrm{N}(z')$.
4. En déduire que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau principal.
5. Soit p un nombre premier. Montrer que $\mathbb{Z}[i]/(p)$ est canoniquement isomorphe à $\mathbb{F}_p[X]/(X^2 + 1)$. En déduire que p est irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$ si et seulement si -1 n'est pas un carré modulo p.

6. On montrera dans un prochain TD que -1 est un carré modulo un nombre premier impair p si et seulement si p est congru à 1 modulo 4. Déduire de ce fait une condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre premier soit somme de deux carrés.

Exercice 6 (**Topologie de Zariski**)**.** Soit A un anneau. On note $\operatorname{Spec} A$ l'ensemble des idéaux premiers de A. Pour I un idéal de A, on note $V(I)$ l'ensemble des idéaux premiers de A contenant I.

1. Montrer que les $V(I)$ définissent les fermés d'une topologie sur $\operatorname{Spec} A$. On appelle cette topologie la *topologie de Zariski.*
2. Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux. Montrer que f induit une application continue $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ pour la topologie de Zariski.
3. Décrire l'espace topologique $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$. Est-il séparé ?

Exercice 7 (**Nilradical d'un anneau**)**.** Soit A un anneau. On note $\mathrm{Nil}(A)$ l'ensemble des éléments nilpotents de A, *i.e.* des éléments f tels que $f^n = 0$ pour un certain $n \geq 0$.

1. Montrer que $\mathrm{Nil}(A)$ est un idéal de A.
2. Montrer que $\mathrm{Nil}(A)$ est inclus dans tout idéal premier.
3. Soit f un élément de A qui n'est pas nilpotent. Montrer qu'il existe un idéal premier de A ne contenant pas f. (On pourra utiliser le lemme de Zorn.)
4. En déduire que $\mathrm{Nil}(A)$ est l'intersection des idéaux premiers de A.

Exercice 8 (**Radical de Jacobson**)**.** Soit A un anneau. On appelle *radical de Jacobson* l'intersection des idéaux maximaux de A. Montrer que le radical de Jacobson est l'ensemble des a de A tels que pour tout b dans A, l'élément $1 + ab$ est inversible.

Exercice 9 (**Localisation**)**.** Soient A un anneau intègre et S une partie multiplicative, *i.e.* stable par produit (en particulier S contient 1). On supposera de plus que S ne contient pas 0. Soit $S^{-1}A$ le sous-anneau du corps des fractions de A formé des éléments de la forme a/s avec a dans A et s dans S. On notera $\phi : A \to S^{-1}A$ le morphisme canonique.

1. Vérifier que ϕ envoie tout élément de S sur un élément inversible. Montrer que si $f : A \to B$ est un morphisme d'anneaux qui envoie tout élément de S sur un élément inversible, alors il existe un unique morphisme d'anneaux $\overline{f} : S^{-1}A \to B$ tel que $\overline{f}\phi = f$.
2. Montrer que le morphisme ϕ induit un injection des idéaux de $S^{-1}A$ dans ceux de A et que cette injection se restreint en une bijection entre les idéaux premiers de $S^{-1}A$ et les idéaux premiers de A ne rencontrant pas S.
3. Soit A un anneau principal (respectivement factoriel). Montrer que $S^{-1}A$ est principal (respectivement factoriel).
4. Soit k un corps. Montrer, en utilisant la question précédente, que $k[X, Y]/(XY - 1)$ est un anneau factoriel.